见論文、专利检索、卡尔曼滤波.

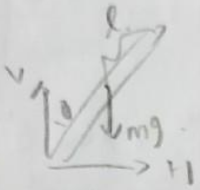
杭州電子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

专利任务:

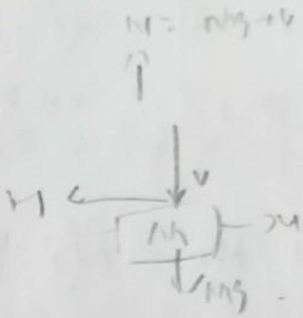
①单级倒立摆模型:

(1) 倒立摆受力分析

① 总体



② 对摆杆



③ 对小车

(2) 各个制约公式:

分析部分: 杆重心水平位置: $x = z + l\sin\theta$, $\ddot{x} = \ddot{z} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\,\ddot{\theta}$

杆重心竖直位置: $y = l\cos\theta$ $\ddot{y} = -l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\,\ddot{\theta}$

制约公式1: 杆的水平受力: $H = m\ddot{x} = m(\ddot{z} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\,\ddot{\theta})$ ①

制约公式2: 杆的竖直受力: $mg - V = m(l\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + l\sin\theta\,\ddot{\theta})$ ②

制约公式3: 杆的转动力矩平衡: $J\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta$ => ?? ③

制约公式4: 小车的受力分析: $u - H = M\ddot{z}$ ④

分析: 由②知 θ由外力V决定. 由①知 z由外力H决定.

到此 外力H、V决定变量θ, z.

但是由③知 外力H、V之间不是独立的 可消去其中1个.

由④知 实际外力 u决定H. 则 变量θ、V 都由外力

u决定.

① 上述模型经多次简化 ⇒ 线性模型（CSDN 那篇博客，有结论）

(1) 原4个等式 ⇒ 2个方程

由 $\begin{cases} u - H = M\ddot{z} \\ H = m\ddot{x} = m(\ddot{z} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\,\ddot{\theta}) \end{cases}$ 化简得

$(M+m)\ddot{z} = -ml\cos\theta\,\ddot{\theta} + ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + u$ —(1)，即第一个式子可写成 z、θ 只和标准形有关的形式

由 $\begin{cases} H = m\ddot{x} = m(\ddot{z} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\,\ddot{\theta}) \\ mg - V = m(l\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + l\sin\theta\,\ddot{\theta}) \\ J\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta \\ u - H = M\ddot{z} \end{cases}$ 共同化简得

$(J + ml^2)\ddot{\theta} = -ml\cos\theta\,\ddot{z} + mgl\sin\theta$ —(2) ⇒ 这个很难得出来，不知怎么化简的。

(2) 有损简化.

$(M+m)\ddot{z} = -ml\cos\theta\,\ddot{\theta} + ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + u$

$(J+ml^2)\ddot{\theta} = -ml\cos\theta\,\ddot{z} + mgl\sin\theta$

简化内容：① $\theta = 0$ 附近，则 $\sin\theta \approx \theta$　$\cos\theta \approx 1$

② 把 $ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2$ 去掉 ???

简化为　$(M+m)\ddot{z} = -ml\ddot{\theta} + u$

$(J+ml^2)\ddot{\theta} = -ml\ddot{z} + mgl\theta$

(3) 无损简化

把上述式子中控制力 u 只与 θ 或 u 只控制 z 的单独的形式.

可得

$$\ddot{z} = \frac{1}{J(M+m)+Mml^2}\left[-m^2l^2g\theta + (J+ml^2)u\right]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J(M+m)+Mml^2}\left[(M+m)mgl\theta - mlu\right]$$

说明：此时 $u \to \theta$ 已经是单通道可控，对于平衡车，只需要使 $u \to \theta$ 系统补偿成稳定，然后控制 $\theta' = 0$ 即可。此时调节 u 使 $\theta \to 0$ 的时候，自动实现了 z 的相应调节。即人在车上前倾，车向前加速，人后倾，车向后加速。

③ CSDN 作者的进一步分析：

(1) 上述结果整体转为状态空间方程形式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-m^2l^2g}{J(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J+ml^2}{J(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{-ml}{J(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u$$

(2) 判断上述系统自身稳定性：

$$|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dfrac{m^2l^2g}{J(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{-(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \dfrac{-(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2}\right) = 0$$

因为 $\sqrt{\ }$ 为正数，所以特征根入为正数，系统自身不稳定

(3) 判断上述系统可控性.

令 $C_0 = [B\ \ AB\ \ A^2B\ \ A^3B]$ 若 $\mathrm{rank}(C_0)=4$，则系统可控

其中 $$A = \begin{array}{c} \\ x \\ \\ y \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-m^2l^2g}{J(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+ml^2}{J(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \dfrac{-ml}{J(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ a \\ \\ b \end{array}$$

设 $x = \dfrac{-m^2l^2g}{J(M+m)+Mml^2}$，$y = \dfrac{(M+m)mgl}{J(M+m)+Mml^2}$

$a = \dfrac{J+ml^2}{J(M+m)+Mml^2}$，$b = \dfrac{-ml}{J(M+m)+Mml^2}$

则 $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & xb \\ a & 0 & xb & 0 \\ 0 & b & 0 & yb \\ b & 0 & yb & 0 \end{bmatrix}$$

$$|C_o| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & xb \\ a & 0 & xb & 0 \\ 0 & b & 0 & yb \\ b & 0 & yb & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2y^2 - 2xyab^3 + x^2b^4 = (aby - xb^2)^2 \geq 0.$$

因为 $aby \neq xb^2$ 等号不成立 故 $\text{rank}(C_o) = 4$. 系统可控.

小疑问: 系统可控的定义是. 外部输入信号 u 可以使得系统状态 $x=(z\ \dot{z}\ \theta\ \dot{\theta})^T$ 到达任意一个点. 这样是否合适?

④ 自行推导验证:

(1) 列出各物的关系:

$$\begin{cases} H = m\ddot{x} = m(\ddot{z} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}) & -(1) \\ mg - V = m(l\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + l\sin\theta\cdot\ddot{\theta}) & -(2) \\ J\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta & -(3) \\ u - H = M\ddot{z} & -(4) \end{cases}$$

(2) 化简为 $u\sim\theta$ $u\sim z$ 的关系:

由(4)代入(1), 可得 $(M+m)\ddot{z} = -ml\cos\theta\,\ddot{\theta} + ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + u$.
(消去 H.)

由(1)—(4) 消去 V 可得:

$$J\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - (u - M\ddot{z})l\cos\theta \Rightarrow V = \frac{J\ddot{\theta} + ul\cos\theta - M\ddot{z}l\cos\theta}{l\sin\theta}$$

$$mg - \frac{J\ddot{\theta} + ul\cos\theta - Ml\cos\theta\,\ddot{z}}{l\sin\theta} = ml\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + ml\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

$$mgl\sin\theta - J\ddot{\theta} - ul\cos\theta + Ml\cos\theta\,\ddot{z} = ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + ml^2\sin^2\theta\,\ddot{\theta}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{M+m} \cdot \left(-ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} + ml\sin\theta\, \dot{\theta}^2 + u\right)$$

$$Ml\cos\theta\, \ddot{z} = (J + ml^2\sin^2\theta)\,\ddot{\theta} + ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta + l\cos\theta \cdot u.$$

$$\left[(M+m)J + m^2l^2\sin^2\theta + Mml^2\right]\ddot{\theta} + m^2l^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - (M+m)mgl\sin\theta$$
$$+ ml\cos\theta\, u = 0.$$

(3) 在摄简化.

$\theta \to 0$ 时 $\sin\theta \approx \theta$. $\cos\theta \approx 1$

$$(\,(M+m)J + m^2l^2\theta^2 + Mml^2)\,\ddot{\theta} + m^2l^2\theta\,\dot{\theta}^2 - (M+m)mgl\theta$$
$$+ mlu = 0.$$

若再忽略掉 两项，则刚好与前面(SDM作者(相同)?)

为何可忽略！

$$[(M+m)J + Mml^2]\,\ddot{\theta} - (M+m)mgl \cdot \theta = -mlu.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)mgl\theta - mlu}{J(M+m) + Mml^2}$$

(4) 代替 u-z 关系.

消得到 u-z 关系式为. $(M+m)\ddot{z} = -ml\ddot{\theta} + u.$

代入 $\ddot{\theta}$ 可得.

$$(M+m)\,\ddot{z} = -ml \cdot \frac{(M+m)mgl\theta - mlu}{J(M+m) + Mml^2} + u$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{-m^2l^2g\theta + (J + ml^2)\,u}{J(M+m) + Mml^2}$$

HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

(3) 关于专利（包括自适应控制器）倒立摆建模

(1) 前面推导的结果

对于单级倒立摆 $M=0$　转动惯量 J 可以简化为 $J=ml^2$　m为总质量，l为铰链到质心位置，可近似位于中心

控制思想：只需要控制 u 使 θ 的值趋于

0 即可解决问题.

$$\ddot{\theta}=\frac{(M+m)mgl\theta-mlu}{J(M+m)+Mml^2}$$

当 $M=0$，模型简化为

$$\ddot{\theta}+0\dot{\theta}+\frac{mgl}{J}\theta=\left(\frac{-l}{J}\right)u$$

当 $J\approx ml^2$，模型简化为

$$\begin{array}{ccc} (a_1) & (a_0) & (b_{11}) \end{array}$$

$$\ddot{\theta}+0\dot{\theta}+\frac{g}{ml}\theta=\left(\frac{-1}{ml}\right)u$$

令 $x_1=\theta$　$x_2=\dot{\theta}$，转为状态空间方程形式：

被控对象

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{-g}{ml} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{-1}{ml}\end{pmatrix}u$$

$$-a_0 \qquad -a_1 \qquad\qquad b_{11}$$

(2) 控制器设计

被控对象为

参考模型为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{m1}\\ \dot{x}_{m2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_{m0} & -a_{m1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{m1}\\ x_{m2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ b_{m0}\end{pmatrix}i$$

控制律为 $u = \frac{1}{b_0}(\hat{\theta}^T x + b_{m0} g)$，其中 $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 - a_{m0} \\ \hat{a}_1 - a_{m1} \end{pmatrix}$

令设计的参数自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x K^T P e - \sigma \hat{\theta}$$

$e = x_m - x$

自适应系数

$K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = P^T > 0$

$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

P 取 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

令 $e = x_m - x$，则

动态误差方程为 $\dot{e} = A_m e + K \tilde{\theta}^T x$

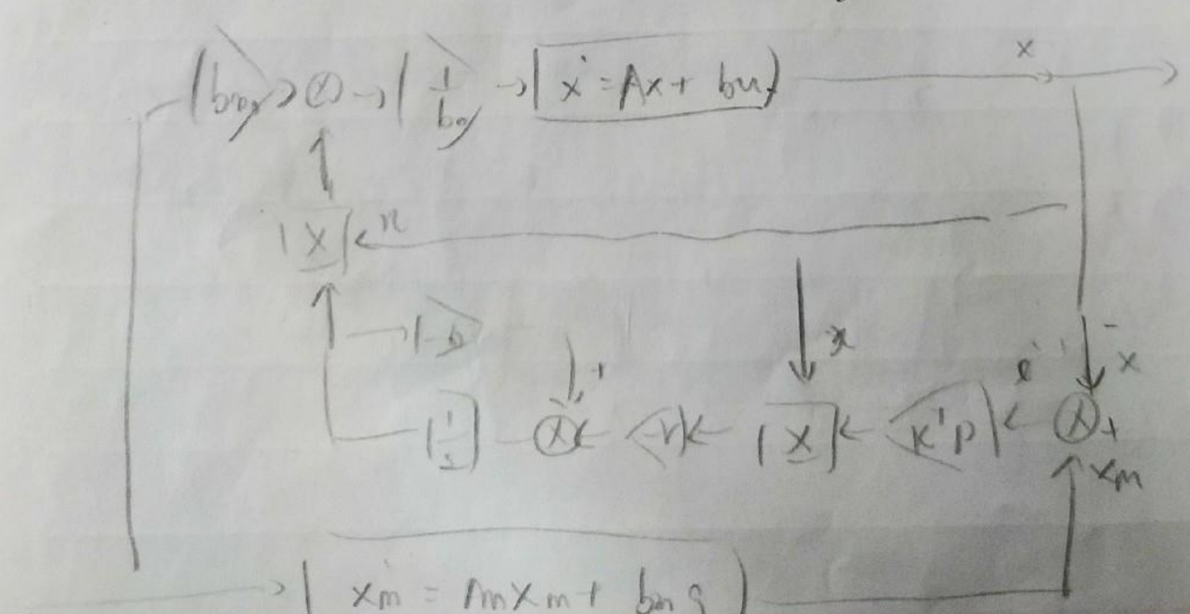
$K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$，其中 $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 - a_{m0} \\ \hat{a}_1 - a_{m1} \end{pmatrix}$

Lyapunov 方程为 $A_m^T P + P A_m = -Q < 0$

$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$，其中 $P = P^T > 0$

$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e < 0$　Q 为正定

参数自适应控制框图



杭州電子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

(3) 对于 ① $e = x_m - x$ 指令的偏差 0

② $\tilde{\theta} - \theta \to 0$ 当输入满足PE条件时 $\tilde{\theta}$ 收敛到0

PE条件 $\int_{t}^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)\,d\tau \geq \alpha I$

③ 参数 k … 在 … 仅 $\tilde{\theta}$ 常收敛到 $\to 0$

④ 收敛误差：增大 k 入，减小 $\tilde{\theta}$ 可以减小误差。

③ 另一方法 (增强型误差模型方法)

说明：前面方法是状态反馈 $x = \begin{pmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{pmatrix}$ 的情况下求

故使用输出反馈。

前面相同结论

被控对象 $\ddot\theta + \overset{a_1}{0}\dot\theta + \overset{a_0}{\left(\frac{g}{ml}\right)}\theta = \overset{b_0}{\left(\frac{-1}{ml}\right)}u.$ 输出反馈，只需测量 u、θ，不测量 $\dot\theta$。

参考模型为 $\ddot y + a_{m1}\dot y + a_{m0}y = b_{m0}u^{(m)}$ → 使用滤波器 $G(s) = \frac{1}{s+k}$，$k>0$.

误差模型为 $\varepsilon = W_m(s)(b_{m0}y - \theta^T\omega - b_0 u)$

$$W_m(s) = \frac{1}{s^2 + a_{m1}s + a_{m0}}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} (a_{m1} - a_1)(k - a_{m1}) + (a_{m0} - a_0) \\ (a_{m1} - a_1)(a_1 k - k^2 - a_0) \\ (a_{m1} - a_1)b_0 \end{pmatrix}$$

$\omega = (y\ v_1\ v_2)^T = \left[y\ \ \frac{1}{s+k}(y)\ \ \frac{1}{s+k}(u)\right]$

学习笔记

① 卡尔曼滤波器推导

(1) 基本模型:

$x_k = A x_{k-1} + B u_{k-1} + w$ → 状态空间方程转化来

① 线性随机差分方程, 就是把控制中的各种差分方程, 引进矩阵

注: 推导时简化, 不考虑 u_{k-1}

② 说明: 只对系统估计, 如果什么信息都没有, 只能相信自己的感觉, 最终得出的状态加上方差, 说明实际值在哪个范围内.

系统模型: $x_k = A x_{k-1} + w$ → 过程噪声, 符合正态分布 (高斯分布)

测量方程: $z_k = H x_k + v$ → 测量噪声 符合正态分布

→ 被测变量与测量值之间关系.
一般 $H=1$, 或者是一个比例系数.

(2) 正态分布噪声.

① 系统模型中的过程噪声:

$P(w) \sim N(0, Q)$ $\underbrace{E(w) = 0}_{\to \text{均值为0}}$ $\underbrace{E(ww^T) = Q}_{\to \text{方差为Q}}$

② 测量方程中的测量噪声:

$P(v) \sim N(0, R)$ $E(v) = 0$ $E(vv^T) = R$

(3) 先验估计

说明 不使用观测值, 只使用系统模型, 直接算出现在的系统输出量应该是多少.

本次(k)的先验估计

上次(k-1)的后验估计(最优估计)

$$\hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$ → 程序中暂时忽略控制信号 u_{k-1}，只搭模型

$$\begin{cases} \hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1} \\ \bar{z}_k = H\hat{x}^-_k \end{cases}$$

$\hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1}$ → 系统模型 得出状态的先验估计

$\bar{z}_k = H\hat{x}^-_k$ → 忽略测量噪声 v，测量过程 得测量值的先验估计

(4) 后验估计(使用先验估计得出)

代表测量的向量：$\tilde{z}_k = z_k - \bar{z}_k$

z_k：测量值

$\bar{z}_k$：先验估计(由系统模型，忽略噪声 v 得到)

名称：measurement innovation 或者 residual

后验估计：

$$\hat{x}_k = \hat{x}^-_k + K_k\tilde{z}_k$$
$$= \hat{x}^-_k + K_k(z_k - H\hat{x}^-_k)$$

注：有严格数学证明，这里略过。后面求取使 $\hat{x}_k$ 最优的 K_k。

(5) 求取 K_k

定义误差 $\begin{cases} \text{先验估计误差：} e^-_k = x_k - \hat{x}^-_k \\ \text{后验估计误差：} e_k = x_k - \hat{x}_k \end{cases}$

协方差矩阵 $\begin{cases} \text{先验估计误差协方差矩阵：} P^-_k = E[e^-_k \cdot e^{-T}_k] \\ \text{后验估计误差～：} P_k = E[e_k \cdot e_k^T] \end{cases}$

说明：后面求取 K_k，使得 P_k 最小，即估计误差 e_k 中，各分量平方值相互不相关都最小。

$$\bar{x}_k = A\hat{x}_{k-1}$$

后验误差 $e_k = x_k - \hat{x}_k$

$$= x_k - [\bar{\hat{x}}_k + K_k(z_k - H\bar{\hat{x}}_k)]$$
$$= x_k - [\bar{\hat{x}}_k + K_k(Hx_k + v - H\bar{\hat{x}}_k)]$$
$$= x_k - \bar{\hat{x}}_k - K_kHx_k - K_kv + K_kH\bar{\hat{x}}_k$$
$$= (I - K_kH)(x_k - \bar{\hat{x}}_k) - K_kv$$
$$= (I - K_kH)\bar{e}_k - K_kv$$

$$e_ke_k^T = [(I - K_kH)\bar{e}_k - K_kv][(I - K_kH)\bar{e}_k - K_kv]^T$$
$$= (I - K_kH)\bar{e}_k\bar{e}_k^T(I - K_kH)^T - K_kv\bar{e}_k^T(I - K_kH)^T$$
$$- (I - K_kH)\bar{e}_kv^TK_k^T + K_kvv^TK_k^T$$

不确定的: $\bar{e}_k$ 是 $z_1, z_2 \cdots z_{k-1}$ 的线性函数, 与当前 z_k 无关. 综合是 $E(\bar{e}_kv^T) = 0$

$E(v\bar{e}_k^T) = 0$

$$P_k = E(e_ke_k^T) = (I - K_kH)\bar{P}_k(I - K_kH)^T + K_kRK_k^T$$
$$= \bar{P}_k - K_kH\bar{P}_k - \bar{P}_kH^TK_k^T + \underbrace{K_kH\bar{P}_kH^TK_k^T + K_kRK_k^T}_{\Downarrow}$$

合并 K_k 相同

$$K_k(H\bar{P}_kH^T + R)K_k^T$$

$$= \bar{P}_k - K_kH\bar{P}_k - \bar{P}_kH^TK_k^T + K_k(H\bar{P}_kH^T + R)K_k^T$$
$$= \bar{P}_k + [K_k - \bar{P}_kH^T(H\bar{P}_kH + R)^{-1}](H\bar{P}_kH^T + R)$$

① $\rightarrow$ $[K_k - \bar{P}_kH^T(H\bar{P}_kH + R)^{-1}]$

② $\rightarrow$ $- \bar{P}_kH^T(H\bar{P}_kH^T + R)^{-1}H\bar{P}_k$

当上面式中①②两项不含 K_k，要使 P_k 最小，则

$$K_k - \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R)^{-1} = 0$$

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R)^{-1} \quad \text{时 } P_k \text{ 最小}$$

先验误差　$z = Hx + v$　　$R = E(vv^T)$

协方差

后验误差协方差：$P_k = (I - K_k \cdot H) \bar{P}_k$

P_k 后验估计代入 $K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H + R)^{-1}$ 得到。

$$\hat{\bar{x}}_k = A \hat{x}_{k-1}$$

先验误差：$\bar{e}_k = x_k - \hat{\bar{x}}_k$

$$= (A \cdot x_{k-1} + w) - A \hat{x}_{k-1}$$

$$= A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w = A e_{k-1} + w$$

$$\bar{e}_k \bar{e}_k^T = (A e_{k-1} + w)(A e_{k-1} + w)^T$$

$$= A e_{k-1} e_{k-1}^T A^T + w w^T + w \cdot e_{k-1}^T A^T + A e_{k-1} w^T$$

因为 e_{k-1} 与 e_k 无关，但与 $x_1 \sim x_{k-1}$ 有关

所以 $E(e_{k-1} w^T) = 0$

$E(w e_{k-1}^T) = 0$

先验误差协方差：

$$\bar{P}_k = E(\bar{e}_k \bar{e}_k^T) = A P_{k-1} A^T + Q$$

$x_k = A x_{k-1} + B u + w$　　$Q = E(w^T w)$

② 卡尔曼滤波的公式总结

(1) 公式定义有关

基本模型： $x_k = A x_{k-1} + B u_{k-1} + w$

测量方程： $z_k = H x_k + v$

噪声信号： $P(w) \sim N(0, Q)$ ，$E(w) = 0$ 　$E(w w^T) = Q$

$P(v) \sim N(0, R)$ ，$E(v) = 0$ 　$E(v v^T) = R$

先验估计： $\bar{\hat{x}}_k = A \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1}$ → 注：推导中 B=0] 简化情况

$\bar{z}_k = H \bar{\hat{x}}_k$ 　　　　$\bar{\hat{x}}_k = A \hat{x}_{k-1}$

后验估计： 称噪声的量： $\dot{z}_k = z_k - \bar{z}_k$

→ 测量值 　→ 先验估计

$\hat{x}_k = \bar{\hat{x}}_k + K_k \dot{z}_k$

K_k 计算：

定义误差：
- 先验估计误差： $\bar{e}_k = x_k - \bar{\hat{x}}_k$
- 后验估计误差： $e_k = x_k - \hat{x}_k$

定义误差协方差：
- 先验～： $\bar{P}_k = E(\bar{e}_k \bar{e}_k^T)$
- 后验～： $P_k = E(e_k e_k^T)$

$K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R)^{-1}$

后验协方差： $P_k = (I - K_k H) \bar{P}_k$

先验协方差： $\bar{P}_k = A P_{k-1} A^T + Q$

(2) 调节参数影响：

Time Update:

$$\bar{\hat{x}}_k = A\hat{x}_{k-1}$$

$$\bar{P}_k = AP_{k-1}A^T + Q$$

Measurement Update:

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H\bar{P}_k H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \bar{\hat{x}}_k + K_k(z_k - H\bar{\hat{x}}_k)$$

$$P_k = (I - K_k H)\bar{P}_k$$

分析：① Q、R：$Q = E(w^T w)$，$R = E(v^T v)$。如果Q较小，则算法更偏向于相信系统模型推导出的结果；如果R较小，则算法更偏向于相信传感器的数据。

② A、B、H：$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w$，$z_k = Hx_k + v$ 根据实际系统得出，其代表的是状态空间方程，一般A、B、H可直接取单位阵。

③ x_0：尽量接近真实值，如果相差太大，需要很长时间来收敛。若R较小，则收敛快，因为相信传感器的数据。若Q较小，则收敛更慢，因为相信系统模型推导结果。

④ P_0：不要设为0即可，否则初始协方差为0，后面无法收敛？

③ 扩展卡尔曼滤波描述 (EKF, Extended Kalman Filter)

(1) 问题描述：

卡尔曼滤波的基本模型：

$$\begin{cases} x_k = A x_{k-1} + B u_{k-1} + w \\ z_k = H x_k + v \end{cases} \longrightarrow$$

是线性系统，直接建立状态由连续、状态空间模型转换到离散形式

扩展卡尔曼滤波的基本模型：

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}) + w \\ z_k = h(x_k) + v \end{cases} \longrightarrow$$

非线性，处理方法就是多次迭代计算，都用泰勒展开为一次的局部线性

(2) 关于泰勒展开:

标量函数: $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 n 阶导数, 在 x_0 处展开为

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

多变量函数: $f(\vec{x})$, $\vec{x}$ 是 n 维向量, $f(x)$ 的结果是 m 维向量, 即 $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

$$\vec{f}(\vec{x})=f(\vec{x}_k)+[\nabla f(\vec{x}_k)]^T(\vec{x}-\vec{x}_k)+\frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{x}_k)^T H(\vec{x}_k)(\vec{x}-\vec{x}_k)+o^n$$

结果是 m 维向量　　$\vec{x}$ 是 n 维向量　　J_f: 雅克比矩阵　　海森矩阵

$$J_f=[\nabla f(\vec{x}_k)]^T=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}_k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}_k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}_k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x}_k)}{\partial x_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_m(\vec{x}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\vec{x}_k)}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_m(\vec{x}_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$H(\vec{x}_k)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_1 \partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_2^2}, & \cdots, & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_n \partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_k)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

每个元素都是一个向量.

(补充) 在EKF中用到的多维函数一阶近似

$$f(x) \approx f(x_k) + J_f (x - x_k)$$

结果为 → ; x_k是n阶 ; → 雅可比矩阵

雅可比矩阵 向量

$$J_f = [\nabla f(x_k)]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_m(x_k)}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial f_m(x_k)}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_k)}{\partial x_m \partial x_n} \end{bmatrix}$$

(3) EKF推导:

EKF 基本模型 → 非线性

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}) + w \\ z_k = h(x_k) + v \end{cases}$$

⇒ 展开为 $x_k = f(x_{k-1}) + F_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-1}) + w$

$= F_{k-1} x_{k-1} + (f(x_{k-1}) - F_{k-1} x_{k-1}) + w$

A 变量 定值

Bu_{k-1}

只不过此处，该项为固定常数

⇒

展开为: $z_k = h(x_k) + H_k \cdot (x_k - x_k) + v$

$= H_k \cdot x_k + (h(x_k) - H_k \cdot x_k) + v$

H 变量 固定值

总结为:

$$\begin{cases} x_k = F_{k-1} x_{k-1} + (f(x_{k-1}) - F_{k-1} x_{k-1}) + w \\ z_k = H_k x_k + (h(x_k) - H_k x_k) + v \end{cases}$$

1) 输入变量 x_{k-1} 是n维向量，输出变量 x_k 是n维~

2) 输入变量 x_k 是n维~ 输出 z_k 是 m 维~

$$F_{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{k-1})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_{k-1})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_{k-1})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n(x_{k-1})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_{k-1})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_{k-1})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

3) $\partial x_1 \sim \partial x_n$ 是指 x_{k-1} 中的各分量

$$H_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x_k)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial h_1(x_k)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1(x_k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial h_m(x_k)}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial h_m(x_k)}{\partial x_m \partial x_2} & & \frac{\partial h_m(x_k)}{\partial x_m \partial x_n} \end{bmatrix}$$

这个每次迭代都需要重新计算 F_k 与 H_k

注2：上述矩阵可以在Matlab中，可以用自变量加上很小值 eps 然后再用 eps 去除，增量得到，导数定义

代入KF过程中：

Time Update

$$\bar{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} = F_{k-1}\cdot\hat{x}_{k-1} + \left(f(\hat{x}_{k-1}) - F_{k-1}\cdot\hat{x}_{k-1}\right) = f(\hat{x}_{k-1})$$

$$\bar{P}_k = AP_{k-1}A^T + Q = F_{k-1}\cdot P_{k-1}\cdot F_{k-1}^T + Q$$

Measurement Update:

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H\bar{P}_k H^T + R)^{-1} = \bar{P}_k H_k^T (H_k \bar{P}_k H_k^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(z_k - \bar{z}_k), \quad \bar{z}_k = H_k x_k + (h(x_k) - H_k x_k) = h(x_k)$$

$$= \bar{x}_k + K_k[z_k - h(x_k)]$$

$$P_k = (I - K_k H_k)\bar{P}_k$$