

三维空间中基于虚拟坐标系的线性 SLAM 后端优化算法

First A. Author*. Second B. Author, Jr.**
Third C. Author***

*National Institute of Standards and Technology, Boulder, CO 80305
USA (Tel: 303-555-5555; e-mail: author@boulder.nist.gov).
**Colorado State University, Fort Collins, CO 80523 USA (e-mail:
author@lamar.colostate.edu)
***Electrical Engineering Department, Seoul National University,
Seoul, Korea, (e-mail: author@snu.ac.kr)}

Abstract: xx.

Keywords: Registration, Scan-matching, Lidar, Transformation.

1. INTRODUCTION

results.

2. 使用线性方程表示几何图形

2.1 使用线性方程表示三角形

我们使用线性方程表示平面上任意三角形的形状：设平面上三角形 ijk 的三个点的坐标是 $p_i, p_j, p_k \in \mathbb{R}^2$ ；已知边 (i, j) 的长度为 ρ_{ij} ，边 (i, k) 的长度为 ρ_{ik} ，角 $\angle jik$ 为 θ_{jik} ；使用上述三个条件我们可以得到全等三角形的约束；为了使用线性方程表示节点之间的位姿约束，我们将全等三角形约束进行放松，变成相似三角形约束 $\rho_{jik} = \rho_{ik}/\rho_{ij}, \theta_{jik}$ ；这样我们只能保证三角形 ijk 的形状不变，但是三角形整体可以进行缩放；此时可以使用如下线性方程组表示这组相似三角形约束：

$$p_k - p_i = \rho_{jik} R_{jik} (p_j - p_i)$$
$$R_{jik} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{jik}) & -\sin(\theta_{jik}) \\ \sin(\theta_{jik}) & \cos(\theta_{jik}) \end{bmatrix}$$

其中， p_i, p_j 和 p_k 分别是节点 i 、节点 j 和节点 k 的坐标，属于需要约束的变量； $R(p_j - p_i)$ 表示对向量 ij 旋转 θ_{jik} 角度，得到与向量 ik 同方向的向量；然后 $R(p_j - p_i)$ 与向量 ik 之间存在 $\rho_{jik} = \rho_{ik}/\rho_{ij}$ 的比例；

在论文[1]中使用复数的线性方程给出了上述方程的等效形式；设节点 i 的复数坐标为 $p_i^c = x_i + iy_i$ ，其中 x_i 是节点 i 坐标的 x 轴分量， y_i 是节点 i 坐标的 y 轴分量；那么上述线性方程组可以使用如下的复数线性方程表示：

$$p_k^c - p_i^c = \omega_{jik} (p_j^c - p_i^c)$$
$$\omega_{jik} = \rho_{jik} e^{i\theta_{jik}}$$

我们设 p_{ki}^c 是向量 ik 的复数坐标形式， θ_{ki} 是向量 ik 的角度；设 p_{ji}^c 是向量 ij 的复数坐标形式， θ_{ji} 是向量 ij 的角度；

$$p_{ki}^c = p_k^c - p_i^c = \rho_{ki} e^{i\theta_{ki}}$$

$$p_{ji}^c = p_j^c - p_i^c = \rho_{ji} e^{i\theta_{ji}}$$

我们将 p_{ki}^c 和 p_{ji}^c 替换上述方程中的 p_k^c, p_i^c 和 p_j^c ，得到如下方程：

$$\rho_{ki} e^{i\theta_{ki}} = \omega_{jik} \rho_{ji} e^{i\theta_{ji}}$$

$$\rho_{ki} e^{i\theta_{ki}} = \rho_{jik} \rho_{ji} e^{i(\theta_{ji} + \theta_{jik})}$$

上述方程可以转化为模长部分的约束和角度部分的约束如下：

$$\rho_{jik} = \rho_{ik}/\rho_{ij}$$

$$\theta_{ji} + \theta_{jik} = \theta_{ki}$$

这些约束刚好与节点 i 、节点 j 和节点 k 的相似三角形约束相同；因此上述复数的线性方程同样可以等效的表示三角形 jik 的形状约束；无论使用线性方程还是复数的线性方程，都可以等效的表示三角形 jik 的约束；那么在后续文本中，我们使用复数的线性方程来表示三个节点之间的位姿约束；因为复数的线性方程相对来说稍微简洁，只有一个方程；那么任意节点 i 的坐标使用复数 $p_i^c = x_i + iy_i$ 表示；

如果三角形 ijk 中任意两个节点重合，那么方程将退化；设节点 i 和节点 k 重合，那么 $\rho_{ik} = 0, \rho_{jik} = \rho_{ik}/\rho_{ij} = 0$ ；参数 $\omega_{jik} = \rho_{jik} e^{i\theta_{jik}} = 0$ ；那么复数的线性方程如下：

$$p_k^c - p_i^c = 0 \times (p_j^c - p_i^c)$$

节点 i 和节点 k 重合时，方程退化为 $p_i^c = p_k^c$ ；同理如果节点 i 和节点 j 重合，方程退化为 $p_i^c = p_j^c$ ；如果节点 j 和节点 k 重合，方程变为 $p_j^c = p_k^c$ ；如果节点 i, j, k 重合，那么方程变成 $p_i^c = p_j^c = p_k^c$ ；因此我们增加如下的判断步骤：

$$p_i^c = p_j^c, \text{ if } \rho_{ij} < \epsilon_{\text{thres}}$$

$$p_i^c = p_k^c, \text{ if } \rho_{ik} < \epsilon_{\text{thres}}$$

$$p_j^c = p_k^c, \text{ if } \rho_{jk} < \epsilon_{\text{thres}}$$

$$p_i^c = p_j^c = p_k^c, \text{ if } \rho_{ij}, \rho_{ik}, \rho_{jk} \text{ 中任意两个小于 } \epsilon_{\text{thres}}$$

其中 ϵ_{thres} 是用于判断节点是否重合的阈值；

然后我们给出一个特定的可定位性问题的条件；在三角形 ijk 中，如果已知节点 i 和节点 k 的坐标，需要使用线性方程计算节点 j 的坐标，那么节点 j 的坐标可定位的条件如下：如果节点 i 和节点 k 不是重合节点，那么节点 j 是可定位的；如果节点 i 和节点 k 是重合节点，那么线性方程退化为 $p_i^c = p_j^c$ ；这个线性方程与节点 j 的坐标没有关系，那么节点 j 的坐标不能使用线性方程计算；从几何上我们也可以得出相同的结论，如果节点 i 和节点 k 是重合节点，并且已知 ρ_{ij} 和 ρ_{kj} ，并不能确定节点 j 的坐标；因此此时节点 j 是位于一个圆上；

2.2 使用线性方程表示空间三角形

三维空间中四个节点 i, j, k, l 可以构成多个三角形；比如三角形 ijl ，三角形 ikl ，三角形 ikl ；如果这些节点位于同一个平面上，可以使用上一节的线性方程表示每个三角形的形状；如果这些节点不是位于同一个平面上，那么我们可以使用论文[2]中的方式构建线性方程；该方法使用 IMU 传感器提供的重力方向，将空间中的相似三角形约束投影到地平面上；

下面我们讨论一个位于空间中的三角形 ijk 的线性方程表示方式；设三角形 ijk 的三个点在全局坐标系 Σ_g （ z 轴方向和重力方向相反）中的坐标是 $p_i, p_j, p_k \in R^3$ ；我们在以节点 i 为原点的局部坐标系 Σ_i 中测量到节点 j 的相对位置是 $p_j^r = [x_{ij}^r, y_{ij}^r, z_{ij}^r]^T$ ；节点 k 在局部坐标系 Σ_i 中的相对位置是 $p_k^r = [x_{ik}^r, y_{ik}^r, z_{ik}^r]^T$ ；局部坐标系 Σ_i 和全局坐标系 Σ_g 之间存在未知的旋转矩阵 R_i ；

我们使用 IMU 传感器得到的重力方向，将局部坐标系 Σ_i 矫正为 z 轴与重力方向相反的局部坐标系 Σ_{iz} （设使用旋转矩阵 R_i^{cor} ）；下面我们给出将旋转矩阵 R_i^{cor} 的计算方法；在局部坐标系 Σ_i 中，使用 IMU 测量得到重力所在的方向是 $g_{\text{ori}} = [x_g, y_g, z_g]^T$ ；此处我们直接使用 IMU 测量得到重力方向作为 g_{ori} ；在实际应用中，我们还可以构建机器人的运动模型和重力加速度的数值大小，使用 Kalman 滤波器等方式估计出更加精确的重力方向；

我们设全局坐标系的 z 轴与重力方向相反；所以为了方便，使用变量 g_{inv} 表示重力相反方向，记为 $g_{\text{inv}} = -g_{\text{ori}} = [-x_g, -y_g, -z_g]^T$ ；然后设传感器节点上相对位置检测的传感器的 z 轴与 IMU 的 z 轴相同，设为 $z = [0, 0, 1]^T$ ；

我们需要将局部坐标系 Σ_i 进行旋转，使得旋转后的局部坐标系 Σ_{iz} 的 z 轴与重力方向相反；具体来说，需要将局部坐标系 Σ_i 沿着“IMU 的 z 轴-节点 i -重力反方向 g_{inv} ”三个点构建的平面的法向量（记为向量 $n \in R^3$ ），旋转“IMU 的 z 轴-节点 i -重力反方向 g_{inv} ”的角度（记为角度 $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ）；在局部坐标系 Σ_i 中，IMU 的 z 轴和重力反方向分别如下；

$$z = [0, 0, 1]^T$$

$$g_{\text{inv}} = [-x_g, -y_g, -z_g]^T$$

那么法向量 n 可以使用向量积计算如下；

$$n = z \times g_{\text{inv}} = [y_g, -x_g, 0]^T$$

旋转角度 α 可以使用数量积计算如下；

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{n \times g_{\text{inv}}}{||n|| ||g_{\text{inv}}||} \\ &= -\frac{z_g}{\sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}} \\ \alpha &= \arccos\left(-\frac{z_g}{\sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}}\right) \end{aligned}$$

然后我们可以计算旋转向量 $v \in R^3$ ；

$$\begin{aligned} v &= \frac{n}{||n||} \alpha \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{y_g^2 + z_g^2}} [y_g, -x_g, 0]^T \end{aligned}$$

计算得到旋转向量 v 之后，可以使用如下公式转换为旋转矩阵 R ；

$$R_i^{\text{cor}} = \text{phi}(v)$$

坐标系本身的旋转和坐标系中观测值的旋转相反；节点 j 在矫正后的局部坐标系 Σ_{iz} 上的相对位置如下；

$$\begin{aligned} p_j^{\text{cor}} &= (R_i^{\text{cor}})^{-1} [x_{ij}^r, y_{ij}^r, z_{ij}^r]^T \\ &= [x_{ij}^{\text{cor}}, y_{ij}^{\text{cor}}, z_{ij}^{\text{cor}}]^T \end{aligned}$$

节点 k 在矫正后的局部坐标系 Σ_{iz} 上的相对位置如下；

$$\begin{aligned} p_k^{\text{cor}} &= (R_i^{\text{cor}})^{-1} [x_{ik}^r, y_{ik}^r, z_{ik}^r]^T \\ &= [x_{ik}^{\text{cor}}, y_{ik}^{\text{cor}}, z_{ik}^{\text{cor}}]^T \end{aligned}$$

将矫正后的相对位置 $p_j^{\text{cor}}, p_k^{\text{cor}} \in R^3$ 投影到地平面，投影坐标如下；

$$\begin{aligned} p_j^{\text{xy}} &= [x_{ij}^{\text{cor}}, y_{ij}^{\text{cor}}]^T \\ p_k^{\text{xy}} &= [x_{ik}^{\text{cor}}, y_{ik}^{\text{cor}}]^T \\ p_i^{\text{xy}} &= [0, 0]^T \end{aligned}$$

那么空间三角形 ijk 的三个顶点 i, j, k 在地平面上的投影坐标 $p_i^{\text{xy}}, p_j^{\text{xy}}, p_k^{\text{xy}}$ 可以使用如下线性方程表示；

$$\begin{aligned} p_k^{\text{xy}} - p_i^{\text{xy}} &= \omega_{jik}^{\text{xy}} (p_j^{\text{xy}} - p_i^{\text{xy}}) \\ \omega_{jik}^{\text{xy}} &= \rho_{jik}^{\text{xy}} e^{i\theta_{jik}^{\text{xy}}} \end{aligned}$$

其中参数 ρ_{jik}^{xy} 计算如下；

$$\rho_{jik}^{\text{xy}} = \rho_{ik}^{\text{xy}} / \rho_{ij}^{\text{xy}}$$

$$\rho_{ij}^{xy} = \left\| p_j^{xy} - p_i^{xy} \right\|$$

$$\rho_{ik}^{xy} = \left\| p_k^{xy} - p_i^{xy} \right\|$$

角度 θ_{jik}^{xy} 计算如下：

$$\cos(\theta_{jik}^{xy}) = \frac{p_j^{xy} \times p_k^{xy}}{\left\| p_j^{xy} \right\| \left\| p_k^{xy} \right\|}$$

$$\theta_{jik}^{xy} = \arccos\left(\frac{p_j^{xy} \times p_k^{xy}}{\left\| p_j^{xy} \right\| \left\| p_k^{xy} \right\|}\right)$$

然后我们讨论三角形ijk的三个顶点i,j,k在垂直方向上的分量的线性方程：设 $p_i^z \in \mathbb{R}$ 是节点i在全局坐标系 Σ_g 中的z轴分量， $p_j^z \in \mathbb{R}$ 是节点j的z轴分量， $p_k^z \in \mathbb{R}$ 是节点k的z轴分量；因为矫正后的局部坐标系 Σ_{iz} 的z轴方向和全局坐标系 Σ_g 相同，都是垂直方向；因此我们使用节点i,j,k在局部坐标系 Σ_{iz} 中的z轴相对距离作为 p_i^z, p_j^z, p_k^z 的约束信息：

$$p_j^z - p_i^z = p_{ij}^{cor}$$

$$p_k^z - p_i^z = p_{ik}^{cor}$$

因此对于空间中三角形ijk，我们可以使用3个线性方程来表示节点i,j,k在全局坐标系 Σ_g 中的坐标关系；从几何上看，这3个线性方程对空间三角形ijk的约束如下：首先投影到地平面的线性方程使得节点i,j,k在x-y轴方向上保持特性形状的相似三角形；节点i,j,k在x-y轴上构成的三角形的形状是确定的，但是大小可以缩放；然后垂直方向上的线性方程使得节点i,j,k在垂直方向上的相对距离确定；那么空间三角形i,j,k不能沿着x轴或者y轴旋转，因为这样会改变垂直方向上的相对距离；因此上述3个方程确定了节点i,j,k在垂直方向上的排列方式和x-y轴上的形状；

下面我们讨论节点i,j,k投影到地平面上线性方程的退化问题：节点i,j,k投影到地平面上的坐标为 $p_i^{xy}, p_j^{xy}, p_k^{xy}$ ；如果任意两个平面坐标重合，那么线性方程的变化情况如下：

$$p_i^{xy} = p_j^{xy}, \text{ if } \rho_{ij}^{xy} < \epsilon_{thres}$$

$$p_i^{xy} = p_k^{xy}, \text{ if } \rho_{ik}^{xy} < \epsilon_{thres}$$

$$p_j^{xy} = p_k^{xy}, \text{ if } \rho_{jk}^{xy} < \epsilon_{thres}$$

$$p_i^{xy} = p_j^{xy} = p_k^{xy}, \text{ if } \rho_{ij}^{xy}, \rho_{ik}^{xy}, \rho_{jk}^{xy} \text{ 中任意两个小于 } \epsilon_{thres}$$

其中 ρ_{ij}^{xy} 是地平面坐标 p_i^{xy} 和 p_j^{xy} 的距离； ρ_{ik}^{xy} 是坐标 p_i^{xy} 和 p_k^{xy} 的距离； ρ_{jk}^{xy} 是坐标 p_j^{xy} 和 p_k^{xy} 的距离；

然后我们给出一个特定的可定位性问题的条件：在三维空间的三角形ijk中，如果已知节点i和节点k的地平面坐标 p_i^{xy}, p_k^{xy} ，需要使用线性方程计算节点j的地平面坐标 p_j^{xy} ，那么节点j的坐标可定位的条件如下：如果节点i和节点k不是重合节点，并且节点i和节点k不位于同一个垂直的直线上，那么节点j在地平面上是可定位的；如

果节点i和节点k是重合节点，或者节点j和节点k在同一条垂直的直线上，那么地平面上的线性方程退化为 $p_i^{xy} = p_k^{xy}$ ；这个线性方程与节点j的地平面坐标 p_j^{xy} 没有关系，那么节点j的坐标不能使用线性方程计算；

对于节点j在垂直方向上的坐标 p_j^z 的定位问题，并没有特定的要求；因为无论节点i和节点k是否重合，或者位于垂直的直线上，我们只需要方程(1)或方程(2)中的任意一个方程就能计算得到 p_j^z ；

因此对于三维空间中的三角形ijk，如果已知节点i的坐标 $p_i \in \mathbb{R}^3$ 和节点k的坐标 $p_k \in \mathbb{R}^3$ ，节点j的坐标 p_j 可定位的条件如下：节点i和节点k不是重合节点，并且节点i和节点k没有在同一条垂直的直线上；

2.3 使用线性方程表示四面体

本节中我们使用线性方程表示空间中任意四面体的形状；四面体的四个面都是三角形，如果确定其中三个面的形状，那么整个四面体的形状也被确定下来；为了使用线性方程表示节点之间的约束，我们使用相似三角形条件来约束每个三角形；比如对应三角形ijk，相似三角形约束为 $\rho_{jik} = \rho_{ik}/\rho_{ij}, \theta_{jik}$ ；

对于四面体ijkl，如果我们已知其中三个面的相似三角形约束，那么整个四面体的形状就确定下来（可以缩放）；设三角形ijl、三角形ikl、三角形jkl的相似三角形约束如下：

$$\rho_{ilj} = \rho_{lj}/\rho_{li}, \theta_{ilj}$$

$$\rho_{ilk} = \rho_{lk}/\rho_{li}, \theta_{ilk}$$

$$\rho_{jlk} = \rho_{lk}/\rho_{lj}, \theta_{jlk}$$

对于上述每个相似三角形约束，我们都可以使用空间中三角形的线性方程表示；设节点i,j,k,l在全局坐标系 Σ_g 中的坐标是 $p_i, p_j, p_k, p_l \in \mathbb{R}^3$ ；节点i,j,k,l在x轴和y轴上分量是 $p_i^{xy}, p_j^{xy}, p_k^{xy}, p_l^{xy} \in \mathbb{R}^2$ ；节点i,j,k,l在z轴上的分量是 $p_i^z, p_j^z, p_k^z, p_l^z \in \mathbb{R}$ ；

已知节点i,j,k在局部坐标系 Σ_l 中的相对坐标是 $p_{li} =$

$[x_{li}, y_{li}, z_{li}]^T$, $p_{lj} = [x_{lj}, y_{lj}, z_{lj}]^T$ 和 $p_{lk} = [x_{lk}, y_{lk}, z_{lk}]^T$ ；局部坐标系 Σ_l 矫正到z轴与重力方向相反的局部坐标系 Σ_{lz} 的旋转矩阵为 R_l^{cor} ；那么节点i,j,k在局部坐标系 Σ_{lz} 的相对位置如下：

$$p_{li}^{cor} = (R_{lz})^{-1} [x_{li}, y_{li}, z_{li}]^T = [x_{li}^{cor}, y_{li}^{cor}, z_{li}^{cor}]^T$$

$$p_{lj}^{cor} = (R_{lz})^{-1} [x_{lj}, y_{lj}, z_{lj}]^T = [x_{lj}^{cor}, y_{lj}^{cor}, z_{lj}^{cor}]^T$$

$$p_{lk}^{cor} = (R_{lz})^{-1} [x_{lk}, y_{lk}, z_{lk}]^T = [x_{lk}^{cor}, y_{lk}^{cor}, z_{lk}^{cor}]^T$$

三角形ijl在全局坐标系中的坐标 p_i, p_j, p_l 可以使用如下3个线性方程表示；

$$p_j^{xy} - p_i^{xy} = \omega_{ilj}(p_i^{xy} - p_l^{xy})$$

$$p_l^z - p_i^z = p_{li}^{cor}$$

$$p_l^z - p_j^z = p_{jl}^{cor}$$

三角形 ikl 在全局坐标系中的坐标 p_i, p_k, p_l 可以使用如下 3 个线性方程表示：

$$\begin{aligned} p_k^{xy} - p_l^{xy} &= \omega_{ilk}(p_i^{xy} - p_l^{xy}) \\ p_l^z - p_i^z &= p_{il}^{cor} \\ p_l^z - p_k^z &= p_{kl}^{cor} \end{aligned}$$

三角形 jkl 在全局坐标系中的坐标 p_j, p_k, p_l 可以使用如下 3 个线性方程表示：

$$\begin{aligned} p_k^{xy} - p_l^{xy} &= \omega_{jlk}(p_j^{xy} - p_l^{xy}) \\ p_l^z - p_j^z &= p_{jl}^{cor} \\ p_l^z - p_k^z &= p_{kl}^{cor} \end{aligned}$$

其中公式(1)和公式(2)相同，公式(3)和公式(4)相同，公式(5)和公式(6)相同；那么我们可以使用 6 个线性方程来表示任意四面体 $ijkl$ 的形状；实际上因为上一节中空间三角形的线性方程不仅约束三个节点（设为节点 i, j, k ）的形状，还约束了三个节点在垂直方向上的排列方式；那么对于四面体 $ijkl$ ，我们只需要其中两个三角形（如三角形 ijl 和三角形 ikl ）对应的线性方程约束，就能确定四面体 $ijkl$ 在空间中的形状和垂直方向上的排列方法；但是为了增加线性方程对各个方向噪声的抵抗性，我们仍然采用三个三角形（如三角形 ijl 、三角形 ikl 和三角形 jkl ）的线性方程来表示四面体 $ijkl$ ；

在三维空间的四面体 $ijkl$ 中，如果已知节点 i, j, k 的坐标 $p_i, p_j, p_k \in \mathbb{R}^3$ ；我们使用三个三角形（三角形 ijl 、三角形 ikl 、三角形 jkl ）的线性方程来计算节点 l 的坐标 $p_l \in \mathbb{R}^3$ ；实际上根据空间中三角形的定位条件，只需要一个三角形（如三角形 ijl ）的线性方程，通常就可以计算得到节点 l 的坐标；然而只使用一个三角形（如三角形 ijl ）来计算节点 l 的坐标，需要满足节点 i 和节点 j 不是重合节点，并且节点 i 和节点 j 不在同一条垂直的直线上；因此为了避免上述特殊情况，并且增加线性方程对各方向噪声的抵抗性，我们采用三个三角形（三角形 ijl 、三角形 ikl 、三角形 jkl ）的线性方程（6 个线性方程）来计算节点 l 的坐标；

下面我们给出一个特定的可定位性问题的条件：在三维空间的四面体 $ijkl$ 中，已知节点 i, j, k 的坐标是 $p_i, p_j, p_k \in \mathbb{R}^3$ ，使用三个三角形（三角形 ijl 、三角形 ikl 、三角形 jkl ）的线性方程计算节点 l 的坐标 $p_l \in \mathbb{R}^3$ ；如果三角形 ijk 的面积 S_{ijl} 不是 0，那么节点 l 是可定位的，证明如下：因为三角形 ijk 的面积 S_{ijk} 不是 0，那么节点 i, j, k 不在同一条直线上，并且节点 i, j, k 中任意两个节点不重合；那么节点 i, j, k 不在同一条垂直的直线上；因此存在两个节点（如节点 i 和节点 j ）不再同一条垂直的直线上，并且节点 i 和节点 j 不是重合节点；根据空间中三角形的可定位条件，我们可以使用节点 i 和节点 j 计算节点 k 的坐标；

3. 使用线性方程表示位姿变换

3.1 构建线性方程

SLAM 算法中可以使用多种方式获得两个关键帧之间的位姿变换（二维情况下，旋转平移矩阵 $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ）；下面表格列出使用相机传感器得到两个关键帧之间的不同类型特征点，可以使用对应的算法计算位姿变换：

表 1，相机的位姿求解算法

特征点类型	位姿变换算法
2d-2d	对极几何
2d-2d（平面）	
2d-3d	DLT算法、EPnP算法
3d-3d	icp算法

如果使用激光雷达传感器获得两帧点云，那么可以使用多种点云配准算法得到位姿变换；此外我们也可以通过 IMU 传感器、GPS 传感器、轮速计和回环检测等方法得到两帧之间的位姿变换；

不管使用什么类型传感器，我们得到的初始信息都是两个关键帧（节点）之间的位姿变换；后端优化的目的是使用这些位姿变换信息估计出精确的全局地图；下面我们使用节点 $i \in V$ 来指代关键帧，每个节点 i 都有自己的局部坐标系 Σ_i ；节点 i 的局部坐标系 Σ_i 与全局坐标系 Σ_g 之间存在未知旋转矩阵 R_i ；设节点 i 在三维空间中的坐标为 $p_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ ；设所有位姿变换 T_{ij} 的集合为 $E = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ ；我们可以定义有向图 $G = [V, E]$ ，其中 V 表示所有节点（关键帧）的集合， E 表示所有位姿变换的集合；

下面我们将任意两个节点（节点 i 、节点 j ）之间的位姿变换 $T_{ij} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 转换为线性方程约束；已知节点 i 的坐标是 $p_i \in \mathbb{R}^3$ ；我们设虚拟节点 i_x 位于局部坐标系 Σ_i 的 x 轴，坐标为 p_{ix} ，并且满足 $\|p_{ix} - p_i\| = 1$ ；设虚拟节点 i_y 位于局部坐标系 Σ_i 的 y 轴，坐标为 p_{iy} ，并且满足 $\|p_{iy} - p_i\| = 1$ ；设虚拟节点 i_z 位于局部坐标系 Σ_i 的 z 轴，坐标为 p_{iz} ，并且满足 $\|p_{iz} - p_i\| = 1$ ；那么在局部坐标系 Σ_i 中，节点 i 是局部坐标系的原点， i_x, i_y, i_z 是局部坐标系上三个轴的单位向量的节点；

同样节点 j 的坐标是 $p_j \in \mathbb{R}^3$ ；我们设虚拟节点 p_{jx} 位于局部坐标系 Σ_j 的 x 轴，并且满足 $\|p_{jx} - p_j\| = 1$ ；设虚拟节点 p_{jy} 位于局部坐标系 Σ_j 的 y 轴，并且满足 $\|p_{jy} - p_j\| = 1$ ；设虚拟节点 p_{jz} 位于局部坐标系 Σ_j 的 z 轴，并且满足 $\|p_{jz} - p_j\| = 1$ ；那么局部坐标系 Σ_j 中，节点 j 是局部坐标系的原点， p_{jx}, p_{jy}, p_{jz} 是局部坐标系上三个轴的单位坐标向量；

如果已知局部坐标系 Σ_i 中所有点的坐标（ $p_i, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}$ ），我们需要构建线性方程来表示局部坐标系 Σ_j 中所有点的坐标（ $p_j, p_{jx}, p_{jy}, p_{jz}$ ）；通过这种方式，我们可以从第一个节点开始，递推所有节点的局部坐标系；

已知局部坐标系 Σ_i 中三个轴的坐标 p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} ，我们首先构建局部坐标系 Σ_j 中虚拟节点坐标 p_{jx} 的线性方程；我们

可以使用四面体的线性方程表示方法，构建三个三角形（三角形 $j_x - i_x - i_y$ 、三角形 $j_x - i_x - i_z$ 、三角形 $j_x - i_y - i_z$ ）的线性方程：

$$\begin{aligned} p_{iy}^{xy} - p_{jx}^{xy} &= \omega_{ix,jx,iy}(p_{ix}^{xy} - p_{jx}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jx}^{xy} &= \omega_{ix,jx,iz}(p_{ix}^{xy} - p_{jx}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jx}^{xy} &= \omega_{iy,jx,iz}(p_{iy}^{xy} - p_{jx}^{xy}) \\ p_{jx}^z - p_{ix}^z &= p_{ix,jx}^{cor} \\ p_{jx}^z - p_{iy}^z &= p_{iy,jx}^{cor} \\ p_{jx}^z - p_{iz}^z &= p_{iz,jx}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_{jx}^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_x 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_{jx}^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_x 在垂直方向上的坐标；参数

$\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}, p_{ix,jx}^{cor}, p_{iy,jx}^{cor}, p_{iz,jx}^{cor}$ 将在后续具体给出；

然后我们使用 Σ_j 中的虚拟节点坐标 p_{jy} 与 Σ_i 中的三个点 p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} 构建线性方程；使用四面体方程的表示方法，构建三个三角形（三角形 $j_y - i_x - i_y$ 、三角形 $j_y - i_x - i_z$ 、三角形 $j_y - i_y - i_z$ ）的线性方程：

$$\begin{aligned} p_{iy}^{xy} - p_{jy}^{xy} &= \omega_{ix,iy,iy}(p_{ix}^{xy} - p_{jy}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jy}^{xy} &= \omega_{ix,iy,iz}(p_{ix}^{xy} - p_{jy}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jy}^{xy} &= \omega_{iy,iy,iz}(p_{iy}^{xy} - p_{jy}^{xy}) \\ p_{jy}^z - p_{ix}^z &= p_{ix,iy}^{cor} \\ p_{jy}^z - p_{iy}^z &= p_{iy,iy}^{cor} \\ p_{jy}^z - p_{iz}^z &= p_{iz,iy}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_{jy}^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_y 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_{jy}^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_y 在垂直方向上的坐标；参数

$\omega_{ix,iy,iy}, \omega_{ix,iy,iz}, \omega_{iy,iy,iz}, p_{ix,iy}^{cor}, p_{iy,iy}^{cor}, p_{iz,iy}^{cor}$ 将在后续具体给出；

然后我们使用 Σ_j 中的虚拟节点坐标 p_{jz} 与 Σ_i 中的三个点 p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} 构建线性方程；使用四面体方程的表示方法，构建三个三角形（三角形 $j_z - i_x - i_y$ 、三角形 $j_z - i_x - i_z$ 、三角形 $j_z - i_y - i_z$ ）的线性方程：

$$\begin{aligned} p_{iy}^{xy} - p_{jz}^{xy} &= \omega_{ix,jz,iy}(p_{ix}^{xy} - p_{jz}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jz}^{xy} &= \omega_{ix,jz,iz}(p_{ix}^{xy} - p_{jz}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jz}^{xy} &= \omega_{iy,jz,iz}(p_{iy}^{xy} - p_{jz}^{xy}) \\ p_{jz}^z - p_{ix}^z &= p_{ix,jz}^{cor} \\ p_{jz}^z - p_{iy}^z &= p_{iy,jz}^{cor} \\ p_{jz}^z - p_{iz}^z &= p_{iz,jz}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_{jz}^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_z 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_{jz}^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_z 在垂直方向上的坐标；参数

直方向上的坐标；参数

$\omega_{ix,jz,iy}, \omega_{ix,jz,iz}, \omega_{iy,jz,iz}, p_{ix,jz}^{cor}, p_{iy,jz}^{cor}, p_{iz,jz}^{cor}$ 将在后续具体给出；

然后我们使用 Σ_i 中的节点坐标 p_i 与 Σ_i 中的三个点 p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} 构建线性方程；使用四面体方程的表示方法，构建三个三角形（三角形 $i - i_x - i_y$ 、三角形 $i - i_x - i_z$ 、三角形 $i - i_y - i_z$ ）的线性方程：

$$\begin{aligned} p_{ix}^{xy} - p_i^{xy} &= \omega_{ix,i,iy}(p_{ix}^{xy} - p_i^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_i^{xy} &= \omega_{ix,i,iz}(p_{ix}^{xy} - p_i^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_i^{xy} &= \omega_{iy,i,iz}(p_{iy}^{xy} - p_i^{xy}) \\ p_i^z - p_{ix}^z &= p_{ix,i}^{cor} \\ p_i^z - p_{iy}^z &= p_{iy,i}^{cor} \\ p_i^z - p_{iz}^z &= p_{iz,i}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_i^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, i 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_i^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, i 在垂直方向上的坐标；参数 $\omega_{ix,i,iy}, \omega_{ix,i,iz}, \omega_{iy,i,iz}, p_{ix,i}^{cor}, p_{iy,i}^{cor}, p_{iz,i}^{cor}$ 将在后续具体给出；

我们已经使用局部坐标系 Σ_i 中的三个虚拟节点 i_x, i_y, i_z 表示出局部坐标系 Σ_j 中的节点 j 和三个虚拟节点 j_x, j_y, j_z ；因为虚拟节点 i_x, i_y, i_z 分别是局部坐标系 Σ_i 三个轴上的单位向量，所以三角形 $i_x - i_y - i_z$ 的面积 $S_{ix,iy,iz}$ 不为0（满足四面体的可定位条件）；如果我们已知局部坐标系 Σ_i 中三个虚拟节点的坐标 p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} ，可以计算局部坐标系 Σ_j 中节点 j 的坐标 p_j 和三个虚拟节点坐标 p_{jx}, p_{jy}, p_{jz} ；以此类推，SLAM问题中所有节点（关键帧）可以按照顺序连成一条线，如果我们已知第一个节点的位姿（三个虚拟节点坐标 p_{1x}, p_{1y}, p_{1z} ），就可以计算任意节点 $i \in V$ 的位姿（三个虚拟节点坐标 p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} ）；

已知局部坐标系 Σ_i 中三个虚拟节点 i_x, i_y, i_z 的坐标，使用线性方程可以计算出局部坐标系 Σ_j 中三个虚拟节点 j_x, j_y, j_z 的坐标；那么我们讨论下面的反向表示问题；如果已知局部坐标系 Σ_j 中的三个虚拟节点 j_x, j_y, j_z 的坐标，是否可以使用上述线性方程计算局部坐标系 Σ_i 中三个虚拟节点 i_x, i_y, i_z 的坐标；我们可以从几何角度讨论上述线性方程的含义；四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 对应的6个线性方程，这些线性方程在几何上的含义是确定了节点 i_x, i_y, i_z, j_x 在垂直方向上的相对距离和x-y平面上的形状（相似三角形）；如果我们将上述几何约束进行放松，将节点 i_x, i_y, i_z, j_x 在垂直方向上的相对距离变成在垂直方向上的相对距离比例；那么上述线性方程至少约束四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 的形状，但是尺度是可以缩放的；同理，其他线性方程约束了四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 和四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ 的形状，但是尺度可以缩放；因此6个节点（ $i_x, i_y, i_z, j_x, j_y, j_z$ ）构成的几何体的形状是确定的，尺度可以缩放；那么已知虚拟节点 j_x, j_y, j_z 的坐标，同样可以使用该线性方程组计算节点 i_x, i_y, i_z 的坐标；因此三个四面体（四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 、四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 和四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ ）

对应的 18 个线性方程，可以等效的表示位姿变换 T_{ij} （x-y 轴上的尺度后续计算）；

上述线性方程组中，我们使用局部坐标系 Σ_i 中的 3 个虚拟节点 i_x, i_y, i_z 表示局部坐标系 Σ_j 中的 3 个虚拟节点 j_x, j_y, j_z ；如果为了保证对称性，我们同样可以使用局部坐标系 Σ_j 中的 3 个虚拟节点 j_x, j_y, j_z 表示局部坐标系 Σ_i 中的 3 个虚拟节点 i_x, i_y, i_z ，并列出的 9 个线性方程；但是上面已经证明，使用节点 i_x, i_y, i_z 表示节点 j_x, j_y, j_z 的 18 个线性方程，已经可以等效的表示位姿变换 T_{ij} ；所以再次使用节点 j_x, j_y, j_z 表示节点 i_x, i_y, i_z 是冗余的；

在图 $G = [V, E]$ 中， V 是所有节点（关键帧）的集合；设集合 V 中存在 n 个节点；因为每个节点 $i \in V$ 的局部坐标系 Σ_i 中定义了 3 个虚拟节点 i_x, i_y, i_z ；因此我们定义虚拟节点集合如下， $V_v = \{i_x, i_y, i_z, i \in V\}$ ；这些虚拟节点的坐标是 $p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \in \mathbb{R}^3, i_x, i_y, i_z \in V_v$ ；虚拟节点在平面上的坐标是 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy} \in \mathbb{C}, i_x, i_y, i_z \in V_v$ ，虚拟节点在垂直方向上的坐标是 $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z$ ；定义虚拟节点坐标向量为

$p_v = [p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3n}$ ；定义虚拟节点在平面上坐标向量是

$p_v^{xy} = [p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in \mathbb{C}^{3n}$ ；定义虚拟节点在垂直方向上的坐标向量是

$p_v^z = [p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ ；

已知所有位姿变换 T_{ij} 的集合为 $E = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ ；任意两个节点（节点 i 、节点 j ）之间的位姿变换 T_{ij} 都可以转换为 18 个线性方程（9 个平面坐标方程，9 个垂直坐标方程）；那么我们设所有位姿变换 $T_{ij} \in E$ 对应的线性方程组如下；

$$A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}$$

$$A^z p_v^z = b^z$$

此外我们还使用局部坐标系 Σ_i 中的三个虚拟节点 i_x, i_y, i_z 的坐标表示节点 i 的坐标；那么当计算得到所有虚拟节点的坐标 p_v 后，我们可以使用 p_v 计算图 $G = [V, E]$ 中每个节点 $i \in V$ 的坐标；定义所有节点 $i \in V$ 的坐标向量为

$p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ ；定义所有节点 $i \in V$ 的平面坐标向量为 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}] \in \mathbb{C}^n$ ；定义所有节点 $i \in V$ 的垂直坐标向量为 $p^z = [p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z]^T \in \mathbb{R}^n$ ；那么使用虚拟节点坐标 p_v^{xy}, p_v^z 计算所有节点 $i \in V$ 的坐标 p^{xy}, p^z 的方程如下；

$$C^{xy} p^{xy} = D^{xy} p_v^{xy}$$

$$C^z p^z = D^z p_v^z$$

该算法的伪代码如下；

过程 1，线性方程表示位姿变换

输入，图 $G = [V, E]$ ， V 表示 n 个节点集合， E 表示所有位姿变换集合

输出，矩阵 $A^{xy}, b^{xy}, A^z, b^z, C^{xy}, D^{xy}, C^z, D^z$

设所有节点向量 $p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ ；

设所有节点的平面向量 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}]^T \in \mathbb{C}$ ；

设所有节点的垂直向量 $p^z = [p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z]^T \in \mathbb{R}$ ；

设所有虚拟节点向量 $p_v = [p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3n}$ ；

设所有虚拟节点的平面向量

$$p_v^{xy} = [p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3n}$$

设所有虚拟节点的平面向量

$$p_v^{xy} = [p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3n}$$

设所有虚拟节点的垂直向量

$$p_v^z = [p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3n}$$

For $T_{ij} \in V$:

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 的平面线性方程，加入线性方程组 $A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}$ ；

$$p_{iy}^{xy} - p_{jx}^{xy} = \omega_{ix,jx,iy} (p_{ix}^{xy} - p_{jx}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jx}^{xy} = \omega_{ix,jx,iz} (p_{ix}^{xy} - p_{jx}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jx}^{xy} = \omega_{iy,jx,iz} (p_{iy}^{xy} - p_{jx}^{xy})$$

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 的垂直线性方程，加入线性方程组 $A^z p_v^z = b^z$ ；

$$p_{jx}^z - p_{ix}^z = p_{ix,jx}^{cor}, p_{jx}^z - p_{iy}^z = p_{iy,jx}^{cor}, p_{jx}^z - p_{iz}^z = p_{iz,jx}^{cor}$$

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 的平面线性方程，加入线性方程组 $A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}$ ；

$$p_{iy}^{xy} - p_{jy}^{xy} = \omega_{ix,jy,iy} (p_{ix}^{xy} - p_{jy}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jy}^{xy} = \omega_{ix,jy,iz} (p_{ix}^{xy} - p_{jy}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jy}^{xy} = \omega_{iy,jy,iz} (p_{iy}^{xy} - p_{jy}^{xy})$$

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 的垂直线性方程，加入线性方程组 $A^z p_v^z = b^z$ ；

$$p_{jy}^z - p_{ix}^z = p_{ix,jy}^{cor}, p_{jy}^z - p_{iy}^z = p_{iy,jy}^{cor}, p_{jy}^z - p_{iz}^z = p_{iz,jy}^{cor}$$

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ 的平面线性方程，加入线性方程组 $A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}$ ；

$$p_{iy}^{xy} - p_{jz}^{xy} = \omega_{ix,jz,iy} (p_{ix}^{xy} - p_{jz}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jz}^{xy} = \omega_{ix,jz,iz} (p_{ix}^{xy} - p_{jz}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jz}^{xy} = \omega_{iy,jz,iz} (p_{iy}^{xy} - p_{jz}^{xy})$$

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ 的垂直线性方程，加入线性方程组 $A^z p_v^z = b^z$ ；

$$p_{jz}^z - p_{ix}^z = p_{ix,jz}^{cor}, p_{jz}^z - p_{iy}^z = p_{iy,jz}^{cor}, p_{jz}^z - p_{iz}^z = p_{iz,jz}^{cor}$$

For $i \in V$:

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - i$ 的平面线性方程，加入线性方程组 $C^{xy} p^{xy} = D^{xy} p_v^{xy}$ ；

$$p_{ix}^{xy} - p_i^{xy} = \omega_{ix,i,iy}(p_{ix}^{xy} - p_i^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_i^{xy} = \omega_{ix,i,iz}(p_{ix}^{xy} - p_i^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_i^{xy} = \omega_{iy,i,iz}(p_{iy}^{xy} - p_i^{xy})$$

构建四面体 $i_x - i_y - i_z - i$ 的垂直线性方程，加入线性方程组 $C^z p^z = D^z p_v^z$;

$$p_i^z - p_{ix}^z = p_{ix,i}^{cor}, p_i^z - p_{iy}^z = p_{iy,i}^{cor}, p_i^z - p_{iz}^z = p_{iz,i}^{cor}$$

$$p_{iy}^i = [0,1,0]^T$$

$$p_{iz}^i = [0,0,1]^T$$

其中 p_{ix}^i 的上标 i 表示坐标是位于局部坐标系 Σ_i ；使用旋转矩阵 R_i^{cor} 可以将虚拟节点 i_x, i_y, i_z 在局部坐标系 Σ_i 中的坐标转换到局部坐标系 Σ_i^{cor} 中；

$$p_{ix}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1}[1,0,0]^T$$

$$p_{iy}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1}[0,1,0]^T$$

$$p_{iz}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1}[0,0,1]^T$$

其中 p_{ix}^{icor} 的上标 $icor$ 表示坐标位于局部坐标系 Σ_i^{cor} 中；旋转矩阵 R_i^{cor} 是将局部坐标系 Σ_i 自身变换到局部坐标系 Σ_i^{cor} ，那么观测的坐标变换需要使用旋转矩阵 $(R_i^{cor})^{-1}$ ；

设节点 i 到节点 j 的位姿变换为 $T_{ij} \in R^{4 \times 4}$;

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & t_{ij} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{4 \times 4}, R_{ij} \in R^{3 \times 3}$$

$$t_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^T \in R^3$$

那么虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_i 中的位置如下；

$$p_{jx}^i = R_{ij}[1,0,0]^T + t_{ij}$$

虚拟节点 j_x 在矫正后的局部坐标系 Σ_i^{cor} 中的位置如下；

$$p_{jx}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1}p_{jx}^i$$

下面我们给出局部坐标系 Σ_i^{cor} 中向量 $(j_x, i_x), (j_x, i_y), (j_x, i_z)$ 的相对位置；

$$p_{jx,ix}^{icor} = p_{ix}^{icor} - p_{jx}^{icor} = [x_{jx,ix}^{icor}, y_{jx,ix}^{icor}, z_{jx,ix}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iy}^{icor} = p_{iy}^{icor} - p_{jx}^{icor} = [x_{jx,iy}^{icor}, y_{jx,iy}^{icor}, z_{jx,iy}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iz}^{icor} = p_{iz}^{icor} - p_{jx}^{icor} = [x_{jx,iz}^{icor}, y_{jx,iz}^{icor}, z_{jx,iz}^{icor}]^T$$

设向量坐标 $p_{jx,ix}^{icor}, p_{jx,iy}^{icor}, p_{jx,iz}^{icor}$ 投影到地平面上的坐标如下；

$$p_{jx,ix}^{icor^{xy}} = [x_{jx,ix}^{icor}, y_{jx,ix}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iy}^{icor^{xy}} = [x_{jx,iy}^{icor}, y_{jx,iy}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iz}^{icor^{xy}} = [x_{jx,iz}^{icor}, y_{jx,iz}^{icor}]^T$$

此处坐标的上下标较多，我们重新描述下各上下标的含义：坐标 $p_{jx,ix}^{icor^{xy}}$ 中，下标 jx,ix 表示这是向量 (j_x, i_x) 的坐标；上标 $icor$ 表示该坐标位于局部坐标系 Σ_i^{cor} 中；上标 xy 表示该坐标是投影到地平面上的平面坐标；

下面我们计算参数 $\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}$ ；其中坐标 $p_{jx,ix}^{icor^{xy}}, p_{jx,iy}^{icor^{xy}}, p_{jx,iz}^{icor^{xy}}$ 之间的长度如下；

$$\rho_{ix} = \|p_{jx,ix}^{icor^{xy}}\|$$

$$\rho_{iy} = \|p_{jx,iy}^{icor^{xy}}\|$$

$$\rho_{iz} = \|p_{jx,iz}^{icor^{xy}}\|$$

3.2 计算四面体 $ix-iy-iz-jx$ 的线性方程

在之前章节中，我们使用四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 的三个三角形（三角形 $j_x - i_x - i_y$ 、三角形 $j_x - i_x - i_z$ 、三角形 $j_x - i_y - i_z$ ）的构建的线性方程如下；

$$p_{iy}^{xy} - p_{jx}^{xy} = \omega_{ix,jx,iy}(p_{ix}^{xy} - p_{jx}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jx}^{xy} = \omega_{ix,jx,iz}(p_{ix}^{xy} - p_{jx}^{xy})$$

$$p_{iz}^{xy} - p_{jx}^{xy} = \omega_{iy,jx,iz}(p_{iy}^{xy} - p_{jx}^{xy})$$

$$p_{jx}^z - p_{ix}^z = p_{ix,jx}^{cor}$$

$$p_{jx}^z - p_{iy}^z = p_{iy,jx}^{cor}$$

$$p_{jx}^z - p_{iz}^z = p_{iz,jx}^{cor}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_{jx}^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_x 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_{jx}^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_x 在垂直方向上的坐标；参数

$\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}, p_{ix,jx}^{cor}, p_{iy,jx}^{cor}, p_{iz,jx}^{cor}$ 在之前章节中没有具体描述计算方法；下面我们给出这些参数的计算方法；

首先我们使用节点 i 中IMU测量的重力方向，将局部坐标系 Σ_i 矫正为 z 轴与重力方向相反的局部坐标系 Σ_i^{cor} （使用旋转矩阵 R_i^{cor} ）；设节点 i 中，使用IMU测量得到重力方向为 $g_{ori}^i = [x_g^i, y_g^i, z_g^i]^T$ ，重力反方向为 $g_{inv}^i = -g_{ori}^i = [-x_g^i, -y_g^i, -z_g^i]^T$ ；设节点 i 中相对位置测量的传感器的 z 轴与IMU的 z 轴相同，为 $z = [0,0,1]^T$ ；旋转矩阵 R_i^{cor} 如下；

$$n^i = z \times g_{inv}^i$$

$$\alpha^i = \arccos\left(-\frac{z_g^i}{\sqrt{x_g^{i^2} + y_g^{i^2} + z_g^{i^2}}}\right)$$

$$v^i = \frac{n^i}{\|n^i\|} \alpha^i$$

$$R_i^{cor} = \text{phi}(v^i)$$

其中 R_i^{cor} 是旋转矩阵， v_i 是旋转矩阵 R_i^{cor} 对应的旋转向量； n_i 是旋转向量 v_i 的旋转轴， α_i 是旋转向量 v_i 的旋转角度；

在局部坐标系 Σ_i 中，虚拟节点 i_x, i_y, i_z 的坐标如下；

$$p_{ix}^i = [1,0,0]^T$$

模长的比例如下：

$$\rho_{ix,jx,iy} = \rho_{iy}/\rho_{ix}$$

$$\rho_{ix,jx,iz} = \rho_{iz}/\rho_{ix}$$

$$\rho_{iy,jx,iz} = \rho_{iz}/\rho_{iy}$$

角度计算如下：

$$\theta_{ix,jx,iy} = \arccos\left(\frac{p_{jx,ix}^{icor^{xy}} p_{jx,iy}^{icor^{xy}}}{\|p_{jx,ix}^{icor^{xy}}\| \|p_{jx,iy}^{icor^{xy}}\|}\right)$$

$$\theta_{ix,jx,iz} = \arccos\left(\frac{p_{jx,ix}^{icor^{xy}} p_{jx,iz}^{icor^{xy}}}{\|p_{jx,ix}^{icor^{xy}}\| \|p_{jx,iz}^{icor^{xy}}\|}\right)$$

$$\theta_{iy,jx,iz} = \arccos\left(\frac{p_{jx,iy}^{icor^{xy}} p_{jx,iz}^{icor^{xy}}}{\|p_{jx,iy}^{icor^{xy}}\| \|p_{jx,iz}^{icor^{xy}}\|}\right)$$

参数 $\omega_{ix,jx,iy}$, $\omega_{ix,jx,iz}$, $\omega_{iy,jx,iz}$ 如下：

$$\omega_{ix,jx,iy} = \rho_{ix,jx,iy} e^{i\theta_{ix,jx,iy}}$$

$$\omega_{ix,jx,iz} = \rho_{ix,jx,iz} e^{i\theta_{ix,jx,iz}}$$

$$\omega_{iy,jx,iz} = \rho_{iy,jx,iz} e^{i\theta_{iy,jx,iz}}$$

然后我们计算参数 $p_{ix,jx}^{cor}$, $p_{iy,jx}^{cor}$, $p_{iz,jx}^{cor}$ 的数值：

$$p_{ix,jx}^{cor} = z_{jx,ix}^{icor}$$

$$p_{iy,jx}^{cor} = z_{jx,iy}^{icor}$$

$$p_{iz,jx}^{cor} = z_{jx,iz}^{icor}$$

其中 $z_{jx,ix}^{icor}$, $z_{jx,iy}^{icor}$, $z_{jx,iz}^{icor}$ 在上面计算局部坐标系 Σ_i^{cor} 中向量 (j_x, i_x) , (j_x, i_y) , (j_x, i_z) 的相对位置时已经给出：

使用节点 i 到节点 j 的位姿变换 T_{ij} 和节点 i 中重力方向 $g_{ori}^i = [x_g^i, y_g^i, z_g^i]^T$ 可以计算四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 的线性方程；具体的伪代码如下：

过程 2，计算四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 的线性方程

输入，位姿变换 T_{ij} ，重力方向 $g_{ori}^i = [x_g^i, y_g^i, z_g^i]^T$ ，虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标 $p_{jx}^j = [1,0,0]^T$

输出，线性方程的参数

$$\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}, p_{ix,jx}^{cor}, p_{iy,jx}^{cor}, p_{iz,jx}^{cor}$$

//计算旋转矩阵 R_i^{cor}

设向量 $z = [0,0,1]^T$ ；

旋转向量的旋转轴为 $n^i = z \times g_{inv}^i$ ；

$$\text{旋转向量的角度为 } \alpha^i = \arccos\left(-\frac{z_g^i}{\sqrt{x_g^i{}^2 + y_g^i{}^2 + z_g^i{}^2}}\right)；$$

$$\text{旋转向量为 } v^i = \frac{n^i}{\|n^i\|} \alpha^i；$$

旋转矩阵为 $R_i^{cor} = \text{phi}(v^i)$ ；

//虚拟节点 i_x, i_y, i_z 在局部坐标系 Σ_i^{cor} 中的位置

$$p_{ix}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1} [1,0,0]^T$$

$$p_{iy}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1} [0,1,0]^T$$

$$p_{iz}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1} [0,0,1]^T$$

虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_i 中的位置， $p_{jx}^i = R_{ij} p_{jx}^j + t_{ij}$ ；

虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_i^{icor} 中的位置， $p_{jx}^{icor} = (R_i^{cor})^{-1} p_{jx}^i$ ；

向量 (j_x, i_x) , (j_x, i_y) , (j_x, i_z) 在局部坐标系 Σ_i^{cor} 中的相对位置；

$$p_{jx,ix}^{icor} = p_{ix}^{icor} - p_{jx}^{icor} = [x_{jx,ix}^{icor}, y_{jx,ix}^{icor}, z_{jx,ix}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iy}^{icor} = p_{iy}^{icor} - p_{jx}^{icor} = [x_{jx,iy}^{icor}, y_{jx,iy}^{icor}, z_{jx,iy}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iz}^{icor} = p_{iz}^{icor} - p_{jx}^{icor} = [x_{jx,iz}^{icor}, y_{jx,iz}^{icor}, z_{jx,iz}^{icor}]^T$$

向量坐标 $p_{jx,ix}^{icor}$, $p_{jx,iy}^{icor}$, $p_{jx,iz}^{icor}$ 投影到地平面上的坐标；

$$p_{jx,ix}^{icor^{xy}} = [x_{jx,ix}^{icor}, y_{jx,ix}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iy}^{icor^{xy}} = [x_{jx,iy}^{icor}, y_{jx,iy}^{icor}]^T$$

$$p_{jx,iz}^{icor^{xy}} = [x_{jx,iz}^{icor}, y_{jx,iz}^{icor}]^T$$

向量坐标 $p_{jx,ix}^{icor}$, $p_{jx,iy}^{icor}$, $p_{jx,iz}^{icor}$ 的模长；

$$\rho_{ix} = \|p_{jx,ix}^{icor^{xy}}\|, \rho_{iy} = \|p_{jx,iy}^{icor^{xy}}\|, \rho_{iz} = \|p_{jx,iz}^{icor^{xy}}\|$$

模长的比例：

$$\rho_{ix,jx,iy} = \rho_{iy}/\rho_{ix}, \rho_{ix,jx,iz} = \rho_{iz}/\rho_{ix}, \rho_{iy,jx,iz} = \rho_{iz}/\rho_{iy}$$

计算角度：

$$\theta_{ix,jx,iy} = \arccos\left(\frac{p_{jx,ix}^{icor^{xy}} p_{jx,iy}^{icor^{xy}}}{\|p_{jx,ix}^{icor^{xy}}\| \|p_{jx,iy}^{icor^{xy}}\|}\right)$$

$$\theta_{ix,jx,iz} = \arccos\left(\frac{p_{jx,ix}^{icor^{xy}} p_{jx,iz}^{icor^{xy}}}{\|p_{jx,ix}^{icor^{xy}}\| \|p_{jx,iz}^{icor^{xy}}\|}\right)$$

$$\theta_{iy,jx,iz} = \arccos\left(\frac{p_{jx,iy}^{icor^{xy}} p_{jx,iz}^{icor^{xy}}}{\|p_{jx,iy}^{icor^{xy}}\| \|p_{jx,iz}^{icor^{xy}}\|}\right)$$

计算参数 $\omega_{ix,jx,iy}$, $\omega_{ix,jx,iz}$, $\omega_{iy,jx,iz}$ ；

$$\omega_{ix,jx,iy} = \rho_{ix,jx,iy} e^{i\theta_{ix,jx,iy}}$$

$$\omega_{ix,jx,iz} = \rho_{ix,jx,iz} e^{i\theta_{ix,jx,iz}}$$

$$\omega_{iy,jx,iz} = \rho_{iy,jx,iz} e^{i\theta_{iy,jx,iz}}$$

计算参数 $p_{ix,jx}^{cor}$, $p_{iy,jx}^{cor}$, $p_{iz,jx}^{cor}$ ；

$$p_{ix,jx}^{cor} = z_{jx,ix}^{icor}, p_{iy,jx}^{cor} = z_{jx,iy}^{icor}, p_{iz,jx}^{cor} = z_{jx,iz}^{icor}$$

3.3 计算四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 、四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ 和四面体 $i_x - i_y - i_z - i$ 的线性方程

在之前章节中，我们使用四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 的三个三角形（三角形 $j_y - i_x - i_y$ 、三角形 $j_y - i_x - i_z$ 、三角形 $j_y - i_y - i_z$ ）的构建的线性方程如下：

$$\begin{aligned} p_{iy}^{xy} - p_{jy}^{xy} &= \omega_{ix,jy,iy} (p_{ix}^{xy} - p_{jy}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jy}^{xy} &= \omega_{ix,jy,iz} (p_{ix}^{xy} - p_{jy}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jy}^{xy} &= \omega_{iy,jy,iz} (p_{iy}^{xy} - p_{jy}^{xy}) \\ p_{jy}^z - p_{ix}^z &= p_{ix,jy}^{cor} \\ p_{jy}^z - p_{iy}^z &= p_{iy,jy}^{cor} \\ p_{jy}^z - p_{iz}^z &= p_{iz,jy}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_{jy}^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_y 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_{jy}^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_y 在垂直方向上的坐标；参数

$\omega_{ix,jy,iy}, \omega_{ix,jy,iz}, \omega_{iy,jy,iz}, p_{ix,jy}^{cor}, p_{iy,jy}^{cor}, p_{iz,jy}^{cor}$ 在之前章节中没有具体描述计算方法；下面我们给出这些参数的计算方法；因为四面体 $i_x - i_y - i_z - j_y$ 的线性方程计算与四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 类似，只需要将“过程 2，计算四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ ”的输入条件中“虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标 $p_{jx}^j = [1,0,0]^T$ ”改成“虚拟节点 j_y 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标 $p_{jy}^j = [0,1,0]^T$ ”；原算法输出的参数 $\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}, p_{ix,jx}^{cor}, p_{iy,jx}^{cor}, p_{iz,jx}^{cor}$ 依次对应参数 $\omega_{ix,jy,iy}, \omega_{ix,jy,iz}, \omega_{iy,jy,iz}, p_{ix,jy}^{cor}, p_{iy,jy}^{cor}, p_{iz,jy}^{cor}$ ；

在之前章节中，我们使用四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ 的三个三角形（三角形 $j_z - i_x - i_y$ 、三角形 $j_z - i_x - i_z$ 、三角形 $j_z - i_y - i_z$ ）的构建的线性方程如下：

$$\begin{aligned} p_{iy}^{xy} - p_{jz}^{xy} &= \omega_{ix,jz,iy} (p_{ix}^{xy} - p_{jz}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jz}^{xy} &= \omega_{ix,jz,iz} (p_{ix}^{xy} - p_{jz}^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_{jz}^{xy} &= \omega_{iy,jz,iz} (p_{iy}^{xy} - p_{jz}^{xy}) \\ p_{jz}^z - p_{ix}^z &= p_{ix,jz}^{cor} \\ p_{jz}^z - p_{iy}^z &= p_{iy,jz}^{cor} \\ p_{jz}^z - p_{iz}^z &= p_{iz,jz}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_{jz}^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_z 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_{jz}^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, j_z 在垂直方向上的坐标；参数

$\omega_{ix,jz,iy}, \omega_{ix,jz,iz}, \omega_{iy,jz,iz}, p_{ix,jz}^{cor}, p_{iy,jz}^{cor}, p_{iz,jz}^{cor}$ 在之前章节中没有具体描述计算方法；下面我们给出这些参数的计算方法；因为四面体 $i_x - i_y - i_z - j_z$ 的线性方程计算与四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 类似，只需要将“过程 2，计算四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ ”的输入条件中“虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标 $p_{jx}^j = [1,0,0]^T$ ”改成“虚拟节点 j_z 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标 $p_{jz}^j = [0,0,1]^T$ ”；原算法输出的参数

$\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}, p_{ix,jx}^{cor}, p_{iy,jx}^{cor}, p_{iz,jx}^{cor}$ 依次对应参数 $\omega_{ix,jz,iy}, \omega_{ix,jz,iz}, \omega_{iy,jz,iz}, p_{ix,jz}^{cor}, p_{iy,jz}^{cor}, p_{iz,jz}^{cor}$ ；

在之前章节中，我们使用四面体 $i_x - i_y - i_z - i$ 的三个三角形（三角形 $i - i_x - i_y$ 、三角形 $i - i_x - i_z$ 、三角形 $i - i_y - i_z$ ）的构建的线性方程如下：

$$\begin{aligned} p_{iy}^{xy} - p_i^{xy} &= \omega_{ix,i,iy} (p_{ix}^{xy} - p_i^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_i^{xy} &= \omega_{ix,i,iz} (p_{ix}^{xy} - p_i^{xy}) \\ p_{iz}^{xy} - p_i^{xy} &= \omega_{iy,i,iz} (p_{iy}^{xy} - p_i^{xy}) \\ p_i^z - p_{ix}^z &= p_{ix,i}^{cor} \\ p_i^z - p_{iy}^z &= p_{iy,i}^{cor} \\ p_i^z - p_{iz}^z &= p_{iz,i}^{cor} \end{aligned}$$

其中 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}, p_i^{xy} \in C$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, i 投影到地平面上的坐标； $p_{ix}^z, p_{iy}^z, p_{iz}^z, p_i^z \in R$ 分别是节点 i_x, i_y, i_z, i 在垂直方向上的坐标；参数 $\omega_{ix,i,iy}, \omega_{ix,i,iz}, \omega_{iy,i,iz}, p_{ix,i}^{cor}, p_{iy,i}^{cor}, p_{iz,i}^{cor}$ 在之前章节中没有具体描述计算方法；下面我们给出这些参数的计算方法；因为四面体 $i_x - i_y - i_z - i$ 的线性方程计算与四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ 类似；我们可以将“过程 2，计算四面体 $i_x - i_y - i_z - j_x$ ”的输入条件中“虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_j 中的坐标 $p_{jx}^j = [1,0,0]^T$ ”改成“节点 i 在局部坐标系 Σ_i 中的坐标 $p_i^i = [0,0,0]^T$ ”；然后将“虚拟节点 j_x 在局部坐标系 Σ_i 中的位置， $p_{jx}^i = R_{ij} p_{jx}^j + t_{ij}$ ”修改为“节点 i 在局部坐标系 Σ_i 中的位置， $p_i^i = [0,0,0]^T$ ”；原算法输出的参数 $\omega_{ix,jx,iy}, \omega_{ix,jx,iz}, \omega_{iy,jx,iz}, p_{ix,jx}^{cor}, p_{iy,jx}^{cor}, p_{iz,jx}^{cor}$ 依次对应参数 $\omega_{ix,i,iy}, \omega_{ix,i,iz}, \omega_{iy,i,iz}, p_{ix,i}^{cor}, p_{iy,i}^{cor}, p_{iz,i}^{cor}$ ；

4. 不同传感器的位姿变换

本节中我们讨论不同类型的传感器获得的数据，怎样转化为不同节点之间的位姿变换；我们可以通过相机、激光雷达、IMU 传感器、GPS 传感器、轮速计和回环检测得到两帧之间的位姿变换；下面分别讨论各种传感器获得的位姿变换：

4.1 非 GPS 传感器

我们首先讨论相机和激光雷达传感器的情况；这两种传感器可以获得确定的两个节点（如节点 i 和节点 j ）之间的位姿变换 T_{ij} ；通常节点 i 与节点 j 是相邻的两个关键帧，或者距离非常接近的两个关键帧；

然后对于 IMU 传感器和轮速计，这两种传感器通常获得的是相邻的两个关键帧之间位姿变换 $T_{i-1,i}$ ；

回环检测部分同样可以获得两个节点（节点 i 和节点 j ）之间的位姿变换 T_{ij} ；并且通常节点 i 与节点 j 是机器人绕了一圈后回到原点找到的两个相邻节点；节点 i 与节点 j 在机器人运动时间上相隔较远，但是在距离上较近；

通过非 GPS 传感器获得两个节点（节点 i 和节点 j ）之间的位姿变换 T_{ij} ，可以转换为两组虚拟节点（虚拟节点 i_x, i_y, i_z 和虚拟节点 j_x, j_y, j_z ）之间的线性方程；

4.2 GPS 传感器

GPS 传感器数据的处理方式在论文[1]中已经给出，为了 SLAM 方案的完整性，我们仍然具体给出 GPS 数据的处理方法：

GPS 传感器的情况较为特殊，GPS 传感器获得的数据是经度和纬度；我们可以使用公式将经纬度转换为具体的距离值；那么 GPS 传感器每次检测的位置都是在固定的经纬度坐标系的，或者说 GPS 传感器具有一个固定的全局坐标系；其他类型的传感器（如相机和激光雷达）只能获得具体的两个节点（节点 i 、节点 j ）之间的位姿变换 T_{ij} ；如果需要获得距离很远的两个节点（节点 i 、节点 $i+n$ ）之间的位姿变换，只能通过不断累加得到， $T_{i,i+n} = T_{i,i+1}T_{i+1,i+2}\dots T_{i+n-1,i+n}$ ；这样获得累加位姿变换 $T_{i,i+n}$ 的误差会逐渐累加；对于 GPS 传感器，因为具有固定的经纬度坐标系，对于距离很远的两个节点（节点 i 、节点 $i+n$ ）之间的平移量 $t_{i,i+n}$ 的仍然具有非常高的精度；因为 GPS 传感器的数据对于大型地图在保持整体地图形状的准确性上具有很大的作用；

GPS 传感器的另一个特殊情况是 GPS 数据只有位移，没有旋转信息；假设我们获得了节点 i 的 GPS 数据（经纬度坐标系中的位置），然后获得了节点 j 的 GPS 数据；那么我们只能得到在经纬度坐标系中，节点 i 到节点 j 的平移量 $t_{ij} \in \mathbb{R}^2$ ，没有旋转信息；因此 GPS 传感器获得的平移向量 $t_{ij} \in \mathbb{R}^2$ 不能和其他传感器获得位姿变换 $T_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 组合，构建线性方程约束；虽然我们可以构建非线性的位姿图约束，但是这个和我们希望构建线性方程的优化算法不同；

GPS 传感器获得的数据通常只有经纬度，没有高度数据；并且即使 GPS 传感器获得了高度数据，高度数据的精度远低于经纬度数据；如果 GPS 传感器获得的数据只有经纬度，那么可以得到两个节点（节点 i 、节点 j ）之间的平面平移 $t_{ij} \in \mathbb{R}^2$ ；我们可以选择三个节点（节点 i,j,k ）构建线性方程（使用平面三角形），后面我们会给出具体的步骤；如果 GPS 传感器获得的数据包括经纬度和高度，那么可以得到两个节点（节点 i 、节点 j ）之间的平面平移 $t_{ij} \in \mathbb{R}^3$ ；我们可以选择三个节点（节点 i,j,k ）构建线性方程（使用空间三角形）；后面我们会给出具体的步骤；不过这种情况与平面三角形类似，可以类似的推导得到，因此不再给出具体公式；

在图 $G = [V, E]$ 中共有 n 个节点（关键帧）；GPS 数据的更新频率通常远低于相机传感器或者 IMU 传感器；所以不是每个节点都有对应的 GPS 数据，我们设拥有 GPS 数据的节点序号集合为 $G_{\text{index}} = \{g_i, i \in [1, m]\}$ ；序号集合中每个序号值 $g_i \in [1, n]$ ，然后该集合中共有 m 个元素，对应 m 个 GPS 经纬度数据；设 m 个 GPS 经纬度数据的集合为 $G = \{\text{pos}_{g(i)} = [\text{lon}_{g(i)}, \text{lat}_{g(i)}]^T, g(i) \in [1, n], i \in [1, m]\}$ ；

设第 i 个 GPS 经纬度数据为 $\text{pos}_{g(i)} = [\text{lon}_{g(i)}, \text{lat}_{g(i)}]^T$ ，第 j 个 GPS 经纬度数据为 $\text{pos}_{g(j)} = [\text{lon}_{g(j)}, \text{lat}_{g(j)}]^T$ ；我们可

以通过球面距离公式或者 UTM 平面坐标，将节点 g_i 和节点 g_j 的经纬度数据转化为相对平移向量；

$$t_{g(i),g(j)} = f(\text{pos}_{g(i)}, \text{pos}_{g(j)})$$

其中，函数 f 将两个节点的经纬度 $\text{pos}_{g(i)}, \text{pos}_{g(j)}$ 转化为平移向量 $t_{g(i),g(j)}$ ；

获得 GPS 传感器的数据后，我们会构建两种类型的线性方程，分别是相邻 GPS 数据的线性方程和跨节点 GPS 数据的线性方程；下面首先介绍相邻 GPS 数据的线性方程；

已知第 i 个 GPS 数据是 $\text{pos}_{g(i)}$ ，第 $i+1$ 个 GPS 数据是 $\text{pos}_{g(i+1)}$ ，第 $i+2$ 个 GPS 数据是 $\text{pos}_{g(i+2)}$ ；使用节点 g_{i+1} 作为中间节点，那么节点 g_{i+1} 到节点 g_i 的相对位置是 $t_{g(i+1),g(i)} = f(\text{pos}_{g(i+1)}, \text{pos}_{g(i)})$ ；节点 g_{i+1} 到节点 g_{i+2} 的相对位置是 $t_{g(i+1),g(i+2)} = f(\text{pos}_{g(i+1)}, \text{pos}_{g(i+2)})$ ；节点 g_{i+1} 到节点 g_{i+2} 的相对位置是 $t_{g(i+1),g(i+2)} = f(\text{pos}_{g(i+2)}, \text{pos}_{g(i+1)})$ ；首先需要保证这三个节点没有重合的节点，判断方式如下；

$$\rho_{g(i+1),g(i)} = \|t_{g(i+1),g(i)}\| > \epsilon_{\text{thres}}$$

$$\rho_{g(i+1),g(i+2)} = \|t_{g(i+1),g(i+2)}\| > \epsilon_{\text{thres}}$$

$$\rho_{g(i),g(i+2)} = \|t_{g(i),g(i+2)}\| > \epsilon_{\text{thres}}$$

在保证没有重合节点后，我们可以构建如下线性方程；

$$p_{g(i+2)}^{\text{xy}} - p_{g(i+1)}^{\text{xy}} = \omega_{i+1}(p_{g(i)}^{\text{xy}} - p_{g(i+1)}^{\text{xy}})$$

$$\omega_{i+1} = \rho_{i+1} e^{i\theta_{i+1}}$$

其中参数 ρ_{i+1} 和 θ_{i+1} 可以如下计算；

$$\rho_{i+1} = \frac{\rho_{g(i+1),g(i+2)}}{\rho_{g(i+1),g(i)}}$$

$$\cos(\theta_{i+1}) = \frac{t_{g(i+1),g(i)} t_{g(i+1),g(i+2)}}{\|t_{g(i+1),g(i)}\| \|t_{g(i+1),g(i+2)}\|}$$

此外我们还可以构建跨节点 GPS 数据的线性方程；任意两个相邻的 GPS 数据结合计算平移向量 $t_{g(i),g(i+1)}$ 并不能完整的使用 GPS 提供的信息；因为 GPS 数据的优势在于相距很远的两个节点之间的相对位置测量仍然能保持很好的精度；所以除了构建上述线性方程，我们还需要对距离很远的节点使用 GPS 数据构建线性方程；

对此我们需要在 GPS 数据集 G 中寻找这样的三个节点（节点 g_i 、节点 g_j 和节点 g_k ）；这三个节点中没有重合节点；

$$\rho_{g(i),g(j)} > \epsilon_{\text{thres}}$$

$$\rho_{g(i),g(k)} > \epsilon_{\text{thres}}$$

$$\rho_{g(j),g(k)} > \epsilon_{\text{thres}}$$

并且这三个节点互相之间的距离近似，或者我们使用如下公式描述；

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{g(i),g(j)}}{\rho_{g(i),g(k)}} &< p_{thres}, \text{ if } \rho_{g(i),g(j)} \geq \rho_{g(i),g(k)} \\ \frac{\rho_{g(i),g(k)}}{\rho_{g(i),g(j)}} &< p_{thres}, \text{ if } \rho_{g(i),g(j)} < \rho_{g(i),g(k)} \\ \frac{\rho_{g(j),g(i)}}{\rho_{g(j),g(k)}} &< p_{thres}, \text{ if } \rho_{g(j),g(i)} \geq \rho_{g(j),g(k)} \\ \frac{\rho_{g(j),g(k)}}{\rho_{g(j),g(i)}} &< p_{thres}, \text{ if } \rho_{g(j),g(i)} < \rho_{g(j),g(k)} \\ \frac{\rho_{g(k),g(i)}}{\rho_{g(k),g(j)}} &< p_{thres}, \text{ if } \rho_{g(k),g(i)} \geq \rho_{g(k),g(j)} \\ \frac{\rho_{g(k),g(j)}}{\rho_{g(k),g(i)}} &< p_{thres}, \text{ if } \rho_{g(k),g(i)} < \rho_{g(k),g(j)}\end{aligned}$$

其中 p_{thres} 表示两边的比例；我们需要保证三角形 $g_i g_j g_k$ 中任意两边的比例小于 p_{thres} （长边比短边）；

因为节点 g_i 、节点 g_j 和节点 g_k 在整个地图上随机寻找的，通常三个点之间的距离都较大；那么使用这三个点构成的相似三角形构建线性方程，会对整个地图的形状进行很好的约束；因为为了尽量满足这三个点构成的相似三角形形状，那么需要对节点 g_i 、节点 g_j 和节点 g_k 的位置进行均匀且较大的移动；

对于如何在 GPS 数据集合 G 中寻找尽量多的这样的三角形组合；我们采用如下方案：在 GPS 数据集合中随机寻找三个点，判断是否满足上述边的比例条件，如果不满足则重新寻找；我们可以设定寻找的最大次数 f_{max} 和所需的三角形个数 Δ_{req} ；得到满足要求的三个节点 g_i, g_j, g_k 后，我们可以构建如下线性方程：

$$\begin{aligned}p_{g(k)}^{xy} - p_{g(i)}^{xy} &= \omega_{g(i),g(j),g(k)}(p_{g(j)}^{xy} - p_{g(i)}^{xy}) \\ \omega_{g(i),g(j),g(k)} &= h(t_{g(i),g(j)}, t_{g(i),g(k)})\end{aligned}$$

我们将上述线性方程构成方程组，记为如下：

$$E^{xy} p^{xy} = 0$$

其中 $p^{xy} \in C^n$ 是所有节点 $i \in V$ 的平面坐标向量；对于 GPS 数据集合 G ，我们会构建两种类型的线性方程，分别是相邻 GPS 数据的线性方程和跨节点 GPS 数据的线性方程；下面首先介绍相邻 GPS 数据的线性方程；下面分别使用伪代码展示具体方法：

过程 3，相邻 GPS 数据构建线性方程

输入，GPS 数据集合 $G = \{\text{pos}_{g(i)} = [\text{lon}_{g(i)}, \text{lat}_{g(i)}]^T, g_i \in [1, n], i \in [1, m]\}$ ，重合节点距离 ϵ_{thres}

输出，节点位置相邻 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}]^T$ ，矩阵 E^{xy}

For i in $[1, m - 2]$:

节点 g_i, g_{i+1} 的相对平移 $t_{g(i),g(i+1)} = f(\text{pos}_{g(i)}, \text{pos}_{g(i+1)})$ ，距离为 $\rho_{g(i),g(i+1)}$ ；

节点 g_{i+1}, g_{i+2} 的相对平移 $t_{g(i+1),g(i+2)} = f(\text{pos}_{g(i+1)}, \text{pos}_{g(i+2)})$ ，距离为

$\rho_{g(i+1),g(i+2)}$ ；

节点 g_i, g_{i+2} 的相对平移 $t_{g(i),g(i+2)} = f(\text{pos}_{g(i)}, \text{pos}_{g(i+2)})$ ，距离为 $\rho_{g(i),g(i+2)}$ ；

If($\rho_{g(i+1),g(i)} > \epsilon_{thres}$):

break

If($\rho_{g(i+1),g(i+2)} > \epsilon_{thres}$):

break

If($\rho_{g(i),g(i+2)} > \epsilon_{thres}$):

break

构建线性方程， $p_{g(i+2)}^c - p_{g(i+1)}^c = \omega_{i+1}(p_{g(i)}^c - p_{g(i+1)}^c)$ ，加入矩阵 E^{xy} ；

过程 4，跨节点 GPS 数据构建线性方程

输入，GPS 数据集合 $G = \{\text{pos}_{g(i)} = [\text{lon}_{g(i)}, \text{lat}_{g(i)}]^T, g_i \in [1, n], i \in [1, m]\}$ ，边比例 k_{thres} ，最大寻找次数 f_{max} ，所需三角形个数 Δ_{req}

输出，节点位置相邻 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}]^T$ ，矩阵 E^{xy}

迭代次数 $iter_{num} = 0$ ，找到三角形个数 $\Delta_{num} = 0$

For $iter_{num} < f_{max}$ and $\Delta_{num} < \Delta_{req}$

$iter_{num} = iter_{num} + 1$ ；

GPS 数据集合 G 中，随机选择三个点 g_i, g_j, g_k ；

节点 g_i, g_j 的相对平移 $t_{g(i),g(j)} = f(\text{pos}_{g(i)}, \text{pos}_{g(j)})$ ，距离为 $\rho_{g(i),g(j)}$ ；

节点 g_i, g_k 的相对平移 $t_{g(i),g(k)} = f(\text{pos}_{g(i)}, \text{pos}_{g(k)})$ ，距离为 $\rho_{g(i),g(k)}$ ；

节点 g_j, g_k 的相对平移 $t_{g(j),g(k)} = f(\text{pos}_{g(j)}, \text{pos}_{g(k)})$ ，距离为 $\rho_{g(j),g(k)}$ ；

If($\rho_{g(i),g(j)} < \epsilon_{thres}$):

break

If($\rho_{g(i),g(k)} < \epsilon_{thres}$):

break

If($\rho_{g(j),g(k)} < \epsilon_{thres}$):

break

If($\frac{\rho_{g(i),g(j)}}{\rho_{g(i),g(k)}} > p_{thres}$ and $\rho_{g(i),g(j)} \geq \rho_{g(i),g(k)}$):

break

If($\frac{\rho_{g(i),g(k)}}{\rho_{g(i),g(j)}} > p_{thres}$ and $\rho_{g(i),g(j)} < \rho_{g(i),g(k)}$):

break

If $\left(\frac{\rho_{g(j),g(i)}}{\rho_{g(j),g(k)}} > p_{thres} \text{ and } \rho_{g(j),g(i)} \geq \rho_{g(j),g(k)}\right)$:
break

If $\left(\frac{\rho_{g(j),g(k)}}{\rho_{g(j),g(i)}} > p_{thres} \text{ and } \rho_{g(j),g(i)} < \rho_{g(j),g(k)}\right)$:
break

If $\left(\frac{\rho_{g(k),g(i)}}{\rho_{g(k),g(j)}} < p_{thres} \text{ and } \rho_{g(k),g(i)} \geq \rho_{g(k),g(j)}\right)$:
break

If $\left(\frac{\rho_{g(k),g(j)}}{\rho_{g(k),g(i)}} < p_{thres} \text{ and } \rho_{g(k),g(i)} < \rho_{g(k),g(j)}\right)$:
break

使用节点 g_i 、节点 g_j 和节点 g_k 构建线性方程，
 $p_{g(k)}^{xy} - p_{g(i)}^{xy} = \omega_{g(i),g(i),g(k)}(p_{g(j)}^{xy} - p_{g(i)}^{xy})$ ，该方程加入
矩阵 E^{xy} ；

$\Delta_{num} = \Delta_{num} + 1$;

4.3 位姿变换的方差

我们可以通过相机、激光雷达、IMU 传感器、GPS 传感器、轮速计和回环检测得到两帧之间的位姿变换；通常不同传感器获得位姿变换具有不同的方差，我们可以根据传感器自身的特点预设设定每种传感器的方差；或者根据 SLAM 算法的前端模块中，计算位姿变换的过程中得到位姿 T_{ij} 的方差；位姿变换矩阵 T_{ij} 是 4×4 矩阵，为了方便起见，我们使用单个方差 σ_{ij}^2 当作整个位姿变换矩阵的方差；

已知各节点 $i \in V$ 和虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v$ 之间的线性方程如下；

$$A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy} + v_1$$

$$A^z p_v^z = b^z + v_2$$

$$C^{xy}p^{xy} = D^{xy}p_v^{xy} + v_3$$

$$C^z p^z = D^z p_v^z + v_4$$

$$E^{xy}p^{xy} = 0 + v_5$$

其中误差向量 $v_1 \sim N(0, \Sigma_1)$, $v_2 \sim N(0, \Sigma_2)$, $v_3 \sim N(0, \Sigma_3)$,

$v_4 \sim N(0, \Sigma_4)$, $v_5 \sim N(0, \Sigma_5)$ ；我们忽略各个线性方程之间的联系，那么协方差矩阵 Σ_i 是对角矩阵；

对于误差向量 v_1 和 v_2 的方差 (Σ_1, Σ_2) ，我们使用线性方程对应的位姿变换 T_{ij} 的方差 σ_{ij}^2 作为该线性方程的方差；对于误差向量 v_3 和 v_4 的方差 (Σ_3, Σ_4) ，可以设为 0；因为这两个线性方程组表示使用节点 $i \in V$ 中的虚拟坐标 i_x, i_y, i_z 表示节点 i 的坐标，并没有引入观测数据；对于误差向量 v_5 ，每个线性方程使用两个位姿变换（如 T_{ij}, T_{ik} ）构建，为了方便起见，我们设对应线性方程的方差为 $\sigma^2 = \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ik}^2$ ；

5. 地图尺度计算

3.1 不使用 GPS 传感器情况

在图 $G = [V, E]$ 中， V 是所有节点（关键帧）的集合；设集合 V 中存在 n 个节点；每个节点 $i \in V$ 的局部坐标系 Σ_i 中定义了 3 个虚拟节点 i_x, i_y, i_z ；虚拟节点集合是 $V_v = \{i_x, i_y, i_z, i \in V\}$ ；虚拟节点坐标向量为 $p_v = [p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}] \in R^{3 \times n}$ ；虚拟节点在平面上坐标向量是 $p_v^{xy} = [p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in C^n$ ；虚拟节点在垂直方向上的坐标向量是 $p_v^z = [p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in R^n$ ；

已知所有位姿变换 T_{ij} 的集合为 $E = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ ；任意两个节点（节点 i 、节点 j ）之间的位姿变换 T_{ij} 都可以转换为 18 个线性方程（9 个平面坐标方程，9 个垂直坐标方程）；那么我们设所有位姿变换 $T_{ij} \in E$ 对应的线性方程组如下；

$$A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy}$$

$$A^z p_v^z = b^z$$

我们设第一个节点的局部坐标系 Σ_1 为全局坐标系 Σ_g ，计算其他节点的坐标；如果我们使用其他坐标系 Σ_i 作为全局坐标系 Σ_g ，那么使用对应的位姿变换 T_{1i} 就可以将所有坐标变换到坐标系 Σ_i 上；设局部坐标系 Σ_1 为全局坐标系 Σ_g ，那么节点 1 的坐标为 $p_1 = [0, 0, 0]^T$ ，虚拟节点 1_x 的坐标为 $p_{1x} = [1, 0, 0]^T$ ，虚拟节点 1_y 的坐标为 $p_{1y} = [0, 1, 0]^T$ ，虚拟节点 1_z 的坐标为 $p_{1z} = [0, 0, 1]^T$ ；

在垂直方向上的坐标向量 $p_v^z \in R^{3n}$ 中，虚拟节点 1_x 的垂直坐标 $p_{1x}^z = 0$ ，虚拟节点 1_y 的垂直坐标是 $p_{1y}^z = 0$ ，虚拟节点 1_z 的垂直坐标是 $p_{1z}^z = 1$ ；根据节点的可定位性条件，只要确定一个节点的所有坐标（如节点 1、节点 1_x 、节点 1_y 、节点 1_z 的坐标），我们可以计算得到所有其他节点的坐标；同时因为垂直方向上的线性方程约束的不同节点在垂直方向上的相对距离，所以不存在尺度不确定的问题；因此将 $p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z$ 代入坐标向量 p_v^z ，然后使用线性方程 $A^z p_v^z = b^z$ 可以计算得到向量 p_v^z 中其他节点的坐标；

在平面方向上的坐标向量 $p_v^{xy} \in C^{3n}$ 中，虚拟节点 1_x 的平面坐标是 $p_{1x}^{xy} = 1 + i \times 0$ ，虚拟节点 1_y 的平面坐标是 $p_{1y}^{xy} = 0 + i \times 1$ ，虚拟节点 1_z 的平面坐标是 $p_{1z}^{xy} = 0 + i \times 0$ ；根据节点可定位性条件，只要确定一个节点的所有坐标（如节点 1、节点 1_x 、节点 1_y 、节点 1_z 的坐标），我们可以计算得到所有其他节点的坐标；那么将 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 代入坐标向量 p_v^{xy} ，然后使用线性方程 $A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy}$ 计算得到向量 p_v^{xy} 中其他节点的坐标；平面方向上的线性方程 $A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy}$ 在几何上的含义是所有节点 $i \in V$ 在平面上投影图形的形状是确定的，但是尺度是可以缩放的；因为每个线性方程等效于一个相似三角形的约束；如果使用 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 三个平面坐标计算 p_v^{xy} 中其他节点的坐标，那么相当于使用 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 三个平面坐标确定了整个平面图形的尺度；那么这个尺度信息会从节点 1 向外传播到其他节点时，误差会逐渐的放大；比如我们设定局部坐标系 Σ_1 中三个轴的单位向量模长是 1

($\rho_{i,ix} = 1, \rho_{i,iy} = 1, \rho_{i,iz} = 1$)，但是计算得到节点 n 的坐标后，局部坐标系 Σ_n 中三个轴的向量（节点 n 、节点 n_x 、节点 n_y 和节点 n_z 组成的向量）的模长的模长不一定保持为 1 ($\rho_{n,nx}, \rho_{n,ny}, \rho_{n,nz}$)；对此我们可以采用如下方法确定更为精确的地图尺度；

设节点 1 的平面坐标为 $p_1^{xy} = 0 + i \times 0$ ，虚拟节点 1_x 的平面坐标是 $p_{1x}^{xy} = \rho + i \times 0$ ，虚拟节点 1_y 的平面坐标是 $p_{1y}^{xy} = 0 + i \times \rho$ ，虚拟节点 1_z 的平面坐标是 $p_{1z}^{xy} = 0 + i \times 0$ ；节点 1、节点 1_x 、节点 1_y 和节点 1_z 的垂直坐标不变，仍然是 $p_1^z = 0, p_{1x}^z = 0, p_{1y}^z = 0, p_{1z}^z = 1$ ；因此虚拟节点向量 p_v^z 和节点向量 p^z 的计算不受影响；设虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v / (1_x, 1_y, 1_z)$ 的平面坐标向量是 $p_{sub}^{xy} = [p_{2x}^{xy}, p_{2y}^{xy}, p_{2z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in C^{3n-3}$ ；将坐标 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 的平面坐标代入方程，线性方程组 $A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}$ 变成如下：

$$A_{sub}^{xy} p_{sub}^{xy} = b_{sub}^{xy} + v_{sub1}$$

其中 $v_{sub1} \sim N(0, \Sigma_{sub1})$ 表示各个线性方程对应的噪声；每个线性方程的方差使用对应的位姿变换 T_{ij} 的方差 σ_{ij}^2 表示；线性方程组中线性方程的个数没有变化，并且每个线性方程对应的方差没有变换；那么误差向量 $v_{sub1} = v_1$ ，方差矩阵 $\Sigma_{sub1} = \Sigma_1$ ；该线性方程组的最小二乘解如下：

$$p_{sub}^{xy} = (A_{sub}^{xyT} \Sigma_1^{-1} A_{sub}^{xy})^{-1} A_{sub}^{xyT} \Sigma_1^{-1} b_{sub}^{xy}$$

平面坐标向量 p_{sub}^{xy} 表示从节点 2 到节点 n 的 $3(n-1)$ 个虚拟节点的复数坐标，并且每个复数坐标（如 $p_{ix}^{xy}, p_{iy}^{xy}, p_{iz}^{xy}$ ）中的实部和虚部都是未知量 ρ 的一次函数：

$$p_{ix}^{xy} = (a_{ix}\rho + b_{ix}) + i(c_{ix}\rho + d_{ix})$$

$$p_{iy}^{xy} = (a_{iy}\rho + b_{iy}) + i(c_{iy}\rho + d_{iy})$$

$$p_{iz}^{xy} = (a_{iz}\rho + b_{iz}) + i(c_{iz}\rho + d_{iz})$$

同时节点 1 的三个虚拟节点 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 的复数坐标中，复数坐标的实部和虚部都是未知量 ρ 的一次函数；因此所有虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v$ 的复数坐标中，复数坐标的实部和虚部都是未知量 ρ 的一次函数；

已知节点 1、节点 1_x 、节点 1_y 和节点 1_z 的垂直坐标是 $p_1^z = 0, p_{1x}^z = 0, p_{1y}^z = 0, p_{1z}^z = 1$ ；将坐标 $p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z$ 的平面坐标代入方程，线性方程组 $A^z p_v^z = b^z + v_2$ 变成如下：

$$A_{sub}^z p_{sub}^z = b_{sub}^z + v_{sub2}$$

其中坐标向量 $p_{sub}^z = [p_{2x}^z, p_{2y}^z, p_{2z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z] \in R^{3n-3}$ ； $v_{sub2} \sim N(0, \Sigma_{sub2})$ 表示各个线性方程对应的噪声；线性方程组中线性方程的个数没有变化，并且每个线性方程对应的方差没有变化；那么误差向量 $v_{sub2} = v_2$ ，方差矩阵 $\Sigma_{sub2} = \Sigma_2$ ；该线性方程的最小二乘解如下：

$$p_{sub}^z = (A_{sub}^{zT} \Sigma_2^{-1} A_{sub}^z)^{-1} A_{sub}^{zT} \Sigma_2^{-1} b_{sub}^z$$

虚拟节点坐标的垂直分量 $p_v^z \in R^{3n-3}$ 是确定的数值，不含未知量 ρ ；使用局部坐标系 Σ_i 中的三个虚拟节点 i_x, i_y, i_z 的坐标可以表示节点 i 的坐标；那么当计算得到所有虚拟

节点的坐标 p_v 后，我们可以使用 p_v 计算图 $G = [V, E]$ 中每个节点 $i \in V$ 的坐标；所有节点 $i \in V$ 的坐标向量为 $p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^{3n}$ ；所有节点 $i \in V$ 的平面坐标向量为 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}] \in C^n$ ；所有节点 $i \in V$ 的垂直坐标向量为 $p^z = [p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z]^T \in R^n$ ；那么使用虚拟节点坐标 p_v^{xy}, p_v^z 计算所有节点 $i \in V$ 的坐标 p^{xy}, p^z 的方程如下：

$$C^{xy} p^{xy} = D^{xy} p_v^{xy}$$

$$C^z p^z = D^z p_v^z$$

上述两个方程的最小二乘解如下：

$$p^{xy} = (C^{xyT} C^{xy})^{-1} C^{xyT} D^{xy} p_v^{xy}$$

$$p^z = (C^{zT} C^z)^{-1} D^z p_v^z$$

其中坐标向量 $p^{xy} \in C^n$ 中每个节点 $i \in V$ 的复数坐标中，每个复数坐标的实部和虚部都是未知量 ρ 的一次函数：

$$p_i^{xy} = (a_i\rho + b_i) + i(c_i\rho + d_i)$$

坐标向量 $p^z \in R^n$ 中每个节点 $i \in V$ 的坐标都是确定的数值，不含未知量 ρ ；

然后我们定义如下误差函数 J_1 ：该误差函数表示每个节点 i 的坐标系 Σ_i 中，节点 i 到虚拟节点 i_x 的模长应该为 1，节点 i 到节点 i_y 的模长应该为 1，节点 i 到节点 i_z 的模长应该为 1；

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{i \in V} \left(\left(\|p_i - p_{1x}\|^2 - 1 \right)^2 + \left(\|p_i - p_{1y}\|^2 - 1 \right)^2 + \left(\|p_i - p_{1z}\|^2 - 1 \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i \in V} \left(((a_i\rho - a_{ix}\rho)^2 + (b_i - b_{ix})^2 + (p_i^z - p_{ix}^z)^2 - 1)^2 + ((a_i\rho - a_{iy}\rho)^2 + (b_i - b_{iy})^2 + (p_i^z - p_{iy}^z)^2 - 1)^2 + ((a_i\rho - a_{iz}\rho)^2 + (b_i - b_{iz})^2 + (p_i^z - p_{iz}^z)^2 - 1)^2 \right) \\ &= A_1\rho^4 + B_1\rho^3 + C_1\rho^2 + D_1\rho + E_1 \end{aligned}$$

定义误差函数 J_2 如下：如果节点 i 和节点 j 之间存在位姿变换 $T_{ij} \in R^{4 \times 4}$ ，其中平移变换 $t_{ij} \in R^3$ ，那么节点 i 和节点 j 之间的长度是 $\rho_{ij} = \|t_{ij}\|$ ；同时我们可以使用求解得到的节点 i 的坐标 p_i 与节点 j 的坐标 p_j 计算模长（未知量 ρ 的一次函数）；我们使用两个模长的差异定义误差函数：

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{T_{ij} \in E} \left(\|p_i - p_j\|^2 - \rho_{ij}^2 \right)^2 \\ &= \sum_{T_{ij} \in E} \left((a_i\rho - a_j\rho)^2 + (b_i - b_j)^2 + (p_i^z - p_j^z)^2 - \rho_{ij}^2 \right)^2 \\ &= A_2\rho^4 + B_2\rho^3 + C_2\rho^2 + D_2\rho + E_2 \end{aligned}$$

将误差函数 J_1 和误差函数 J_2 相加，得到误差函数 J ：

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 \\ &= A\rho^4 + B\rho^3 + C\rho^2 + D\rho + E \end{aligned}$$

为了使该误差函数最小，我们对 J 计算导数：

$$\frac{dJ}{d\rho} = 4A\rho^3 + 3B\rho^2 + 2C\rho + D = 0$$

然后使用三次方程的公式计算三个根 ρ_1, ρ_2, ρ_3 ；舍弃三个根中的复数根之后，对于剩余的根使用 J 的二次导数判断：

$$\frac{d^2J}{d\rho^2} = 12A\rho^2 + 6B\rho + 2C$$

如果根 $\rho_i, i \in [1,3]$ 的二次导数为正，那么根 ρ_i 是函数 J 的最小值或局部最小值（使用函数值判断最小值）；如果根 ρ_i 的二次导数为负，那么根 ρ_i 是函数 J 的局部最大值；得到优化的地图尺度 ρ 之后，我们可以代入坐标 $p_v^{xy} \in C^{3n}, p_v^{xy} \in C^n$ ；使用虚拟节点的平面坐标向量 $p_v^{xy} \in C^{3n}$ 和垂直方向向量 $p_v^z \in R^{3n}$ ，我们可以得到虚拟节点的坐标向量 $p_v \in R^{3 \times 3n}$ ；同理使用节点 $i \in V$ 的平面坐标向量 $p^{xy} \in C^n$ 和垂直方向向量 $p^z \in R^n$ ，我们可以得到节点 $i \in V$ 的坐标向量 $p \in R^{3 \times n}$ ；计算地图尺度和节点坐标的伪代码如下：

过程 5，计算地图尺度和节点坐标（不使用 GPS 数据）

输入，线性方程组 $A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy}, A^z p_v^z = b^z, C^{xy}p^{xy} = D^{xy}p_v^{xy}, C^z p^z = D^z p_v^z$ ，方差矩阵 Σ_1, Σ_2

输出，虚拟节点坐标向量 $p_v \in R^{3 \times 3n}$ ，节点坐标向量 $p \in R^{3 \times n}$ ，地图尺度 ρ

设节点 $i \in V$ 的坐标向量为 $p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^{3 \times n}$ ；

设节点 $i \in V$ 的平面坐标向量为 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}] \in C^n$ ；

设节点 $i \in V$ 的垂直坐标向量为 $p^z = [p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z]^T \in R^n$ ；

设虚拟节点坐标向量为

$$p_v = [p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}] \in R^{3 \times 3n}；$$

设虚拟节点的平面坐标向量为

$$p_v^{xy} = [p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in C^n；$$

设虚拟节点的垂直坐标向量为

$$p_v^z = [p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in R^n；$$

设节点1的平面坐标为 $p_1^{xy} = 0 + i \times 0$ ，虚拟节点 1_x 的平面坐标是 $p_{1x}^{xy} = \rho + i \times 0$ ，虚拟节点 1_y 的平面坐标是 $p_{1y}^{xy} = 0 + i \times \rho$ ，虚拟节点 1_z 的平面坐标是 $p_{1z}^{xy} = 0 + i \times 0$ ；

设虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v / (1_x, 1_y, 1_z)$ 的平面坐标向量是

$$p_{sub}^{xy} = [p_{2x}^{xy}, p_{2y}^{xy}, p_{2z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in C^{3n-3}；$$

将坐标 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 的平面坐标代入方程，线性方程组

$$A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy} \text{ 变为 } A_{sub}^{xy}p_{sub}^{xy} = b_{sub}^{xy}；$$

使用线性方程组 $A_{sub}^{xy}p_{sub}^{xy} = b_{sub}^{xy}$ 计算虚拟节点的平面分量 p_{sub}^{xy} ；该线性方程组的最小二乘解， $p_{sub}^{xy} =$

$$(A_{sub}^{xyT} \Sigma_1^{-1} A_{sub}^{xy})^{-1} A_{sub}^{xyT} \Sigma_1^{-1} b_{sub}^{xy} \quad (\rho \text{ 的一次函数})；$$

设虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v / (1_x, 1_y, 1_z)$ 的垂直坐标向量是

$$p_{sub}^z = [p_{2x}^z, p_{2y}^z, p_{2z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in R^{3n-3}；$$

将坐标 $p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z$ 的垂直坐标代入方程，线性方程组

$$A^z p_v^z = b^z \text{ 变为 } A_{sub}^z p_{sub}^z = b_{sub}^z；$$

使用线性方程组 $A_{sub}^z p_{sub}^z = b_{sub}^z$ 计算虚拟节点坐标的垂直分量 p_{sub}^z ；该线性方程的最小二乘解， $p_{sub}^z =$

$$(A_{sub}^{zT} \Sigma_2^{-1} A_{sub}^z)^{-1} A_{sub}^{zT} \Sigma_2^{-1} b_{sub}^z \quad (\text{固定数值})；$$

使用线性方程组 $C^{xy}p^{xy} = D^{xy}p_v^{xy}$ 计算节点 $i \in V$ 的平面分量 p^{xy} ；该线性方程组的最小二乘解，

$$p^{xy} = (C^{xyT} C^{xy})^{-1} C^{xyT} D^{xy} p_v^{xy} \quad (\rho \text{ 的一次函数})；$$

使用线性方程组 $C^z p^z = D^z p_v^z$ 计算节点 $i \in V$ 的垂直分量

$$p^z； \text{ 该线性方程组的最小二乘解， } p^z = (C^{zT} C^z)^{-1} D^z p_v^z \quad (\text{固定数值})；$$

$$\text{定义误差函数 } J_1, J_1 = \sum_{i \in V} \left((||p_i - p_{1x}||^2 - 1)^2 + \right.$$

$$\left. (||p_i - p_{1y}||^2 - 1)^2 + (||p_i - p_{1z}||^2 - 1)^2 \right) = A_1 \rho^4 +$$

$$B_1 \rho^3 + C_1 \rho^2 + D_1 \rho + E_1；$$

$$\text{定义误差函数 } J_2, J_2 = \sum_{i \in E} \left(||p_i - p_j||^2 - \rho_{ij}^2 \right)^2 =$$

$$A_2 \rho^4 + B_2 \rho^3 + C_2 \rho^2 + D_2 \rho + E_2；$$

$$\text{相加得到误差函数 } J, J = J_1 + J_2 = A\rho^4 + B\rho^3 + C\rho^2 + D\rho + E；$$

计算使得该误差函数最小的参数 ρ ，对 J 计算导数，

$$\frac{dJ}{d\rho} = 4A\rho^3 + 3B\rho^2 + 2C\rho + D = 0；$$

使用三次方程的公式计算三个根 ρ_1, ρ_2, ρ_3 ；舍弃三个根中的复数根，并使用函数 J 的二次导数选择最小值对应的根 ρ_i ；

参数 ρ 代入坐标 p_v^{xy}, p_v^{xy} ，计算坐标 p_v, p ；

5.2 使用 GPS 传感器情况

不使用 GPS 传感器时，各节点 $i \in V$ 和虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v$ 之间的线性方程如下：

$$A^{xy}p_v^{xy} = b^{xy} + v_1$$

$$A^z p_v^z = b^z + v_2$$

$$C^{xy}p^{xy} = D^{xy}p_v^{xy} + v_3$$

$$C^z p^z = D^z p_v^z + v_4$$

我们设定如下坐标 $p_1^{xy} = 0 + i \times 0, p_{1x}^{xy} = \rho + i \times 0, p_{1y}^{xy} = 0 + i \times \rho, p_{1z}^{xy} = 0 + i \times 0, p_{1x}^z = 0, p_{1y}^z = 0, p_{1z}^z = 1$ ；使用方程(1)和(2)计算坐标向量 p_v^{xy} 和 p_v^z ；然

后将坐标向量 p_v^{xy}, p_z^{xy} 代入方程(3)和(4)，得到坐标向量 p^{xy} 和 p^z ；

使用 GPS 传感器时，各节点 $i \in V$ 和虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v$ 之间的线性方程还需要增加如下：

$$E^{xy} p^{xy} = 0 + v_5$$

此时在设定坐标 $p_1^{xy}, p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, p_1^z, p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z$ 后，需要联立方程(1),(3),(5)计算节点向量 p_v^{xy}, p^{xy} ；我们设坐标向量 $p_{acc}^{xy} = [p_v^{xyT}, p^{xyT}]^T \in C^{4 \times n}$ 作为坐标向量 p_v^{xy} 和 p^{xy} 的合并向量；然后将方程(1),(3),(5)合并为如下：

$$F^{xy} p_{acc}^{xy} = G^{xy} + v_6$$

其中误差向量 $v_6 = [v_1^T, v_3^T, v_5^T]^T, v_6 \sim N(0, \Sigma_6)$ ；我们忽略各个线性方程之间的联系，那么协方差矩阵 Σ_6 是对角矩阵；并且满足如下关系， $\Sigma_6 = \text{diag}\{\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5\}, \Sigma_3 = 0_{(|v_3| \times |v_3|)}$ ；

将平面坐标 $p_1^{xy}, p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 代入上述方程，该方程变成如下形式：

$$F_{sub}^{xy} p_{sub,acc}^{xy} = G_{sub}^{xy} + v_{sub6}$$

其中坐标向量 $p_{sub,acc}^{xy} \in C^{4n-4}$ 是坐标向量 p_{acc}^{xy} 删除 $p_1^{xy}, p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 后的向量；误差向量 $v_{sub6} \sim N(0, \Sigma_{sub6})$ 表示各个线性方程对应的噪声；线性方程组中线性方程的个数没有变化，并且每个线性方程对应的方差没有变化；那么误差向量 $v_{sub6} = v_6$ ，方差矩阵 $\Sigma_{sub6} = \Sigma_6$ ；该线性方程组的最小二乘解如下：

$$p_{sub,acc}^{xy} = (F_{sub}^{xyT} \Sigma_6^{-1} F_{sub}^{xy})^{-1} F_{sub}^{xyT} \Sigma_6^{-1} G_{sub}^{xy}$$

计算地图尺度和节点坐标的伪代码如下：

过程 6，计算地图尺度和节点坐标（使用 GPS 数据）

输入，线性方程组 $A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}, A^z p_z^z = b^z, C^{xy} p^{xy} = D^{xy} p_v^{xy}, C^z p^z = D^z p_z^z$ ，方差矩阵 Σ_1, Σ_2

输出，虚拟节点坐标向量 $p_v \in R^{3 \times 3n}$ ，节点坐标向量 $p \in R^{3 \times n}$ ，地图尺度 ρ

设节点 $i \in V$ 的坐标向量为 $p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^{3 \times n}$ ；

设节点 $i \in V$ 的平面坐标向量为 $p^{xy} = [p_1^{xy}, p_2^{xy}, \dots, p_n^{xy}] \in C^n$ ；

设节点 $i \in V$ 的垂直坐标向量为 $p^z = [p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z]^T \in R^n$ ；

设虚拟节点坐标向量为

$$p_v = [p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}] \in R^{3 \times 3n}$$

设虚拟节点的平面坐标向量为

$$p_v^{xy} = [p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in C^n$$

设虚拟节点的垂直坐标向量为

$$p_v^z = [p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in R^n$$

设节点1的平面坐标为 $p_1^{xy} = 0 + i \times 0$ ，虚拟节点 1_x 的

平面坐标是 $p_{1x}^{xy} = \rho + i \times 0$ ，虚拟节点 1_y 的平面坐标是 $p_{1y}^{xy} = 0 + i \times \rho$ ，虚拟节点 1_z 的平面坐标是 $p_{1z}^{xy} = 0 + i \times 0$ ；

设虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v / (1_x, 1_y, 1_z)$ 的平面坐标向量是 $p_{sub}^{xy} = [p_{2x}^{xy}, p_{2y}^{xy}, p_{2z}^{xy}, \dots, p_{nx}^{xy}, p_{ny}^{xy}, p_{nz}^{xy}] \in C^{3n-3}$ ；

将坐标 $p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 的平面坐标代入方程，线性方程组 $A^{xy} p_v^{xy} = b^{xy}$ 变为 $A_{sub}^{xy} p_{sub}^{xy} = b_{sub}^{xy}$ ；

设坐标向量 $p_{acc}^{xy} = [p_v^{xyT}, p^{xyT}]^T \in C^{4 \times n}$ ；将方程(1),(3),(5)合并为 $F^{xy} p_{acc}^{xy} = G^{xy}$ ；

设坐标向量 $p_{sub,acc}^{xy} \in C^{4n-4}$ 是坐标向量 p_{acc}^{xy} 删除 $p_1^{xy}, p_{1x}^{xy}, p_{1y}^{xy}, p_{1z}^{xy}$ 后的向量；方程变为 $F_{sub}^{xy} p_{sub,acc}^{xy} = G_{sub}^{xy}$ ；

使用线性方程组 $F_{sub}^{xy} p_{sub,acc}^{xy} = G_{sub}^{xy}$ 计算节点的平面分量 $p_{sub,acc}^{xy}$ ；该线性方程组的最小二乘解， $p_{sub,acc}^{xy} =$

$$(F_{sub}^{xyT} \Sigma_6^{-1} F_{sub}^{xy})^{-1} F_{sub}^{xyT} \Sigma_6^{-1} G_{sub}^{xy} \quad (\rho \text{ 的一次函数})$$

设虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v / (1_x, 1_y, 1_z)$ 的垂直坐标向量是 $p_{sub}^z = [p_{2x}^z, p_{2y}^z, p_{2z}^z, \dots, p_{nx}^z, p_{ny}^z, p_{nz}^z]^T \in R^{3n-3}$ ；

将坐标 $p_{1x}^z, p_{1y}^z, p_{1z}^z$ 的垂直坐标代入方程，线性方程组 $A^z p_v^z = b^z$ 变为 $A_{sub}^z p_{sub}^z = b_{sub}^z$ ；

使用线性方程组 $A_{sub}^z p_{sub}^z = b_{sub}^z$ 计算虚拟节点坐标的垂直分量 p_{sub}^z ；该线性方程的最小二乘解， $p_{sub}^z =$

$$(A_{sub}^{zT} \Sigma_2^{-1} A_{sub}^z)^{-1} A_{sub}^{zT} \Sigma_2^{-1} b_{sub}^z \quad (\text{固定数值})$$

使用线性方程组 $C^{xy} p^{xy} = D^{xy} p_v^{xy}$ 计算节点 $i \in V$ 的平面分量 p^{xy} ；该线性方程组的最小二乘解，

$$p^{xy} = (C^{xyT} C^{xy})^{-1} C^{xyT} D^{xy} p_v^{xy} \quad (\rho \text{ 的一次函数})$$

使用线性方程组 $C^z p^z = D^z p_z^z$ 计算节点 $i \in V$ 的垂直分量 p^z ；该线性方程组的最小二乘解， $p^z = (C^{zT} C^z)^{-1} D^z p_z^z$ （固定数值）；

定义误差函数 $J_1, J_1 = \sum_{i \in V} \left((|p_i - p_{1x}|^2 - 1)^2 + (|p_i - p_{1y}|^2 - 1)^2 + (|p_i - p_{1z}|^2 - 1)^2 \right) = A_1 \rho^4 + B_1 \rho^3 + C_1 \rho^2 + D_1 \rho + E_1$ ；

定义误差函数 $J_2, J_2 = \sum_{i \in E} \left(|p_i - p_j|^2 - \rho_{ij}^2 \right)^2 = A_2 \rho^4 + B_2 \rho^3 + C_2 \rho^2 + D_2 \rho + E_2$ ；

相加得到误差函数 $J, J = J_1 + J_2 = A \rho^4 + B \rho^3 + C \rho^2 + D \rho + E$ ；

计算使得该误差函数最小的参数 ρ ，对 J 计算导数，

$$\frac{dJ}{d\rho} = 4A\rho^3 + 3B\rho^2 + 2C\rho + D = 0$$

使用三次方程的公式计算三个根 ρ_1, ρ_2, ρ_3 ；舍弃三个根中的复数根，并使用函数 J 的二次导数选择最小值对应的根 ρ_i ；

参数 ρ 代入坐标 p_v^{xy} , p^{xy} , 计算坐标 p^v , p ;

6. 离群点去除

该论文中线性方程通过节点之间的位姿变换 T_{ij} 构建；如果图 $G = [V, E]$ 中的位姿变换集合 $E = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ 中存在离群点，对应的线性方程的系数也会出现离群点；线性方程组在使用最小二乘法计算时，每个线性方程都对应一个误差项；离群点会使得方程的解出现很大的偏移；

在非线性优化的 SLAM 方案中，每个位姿变换 T_{ij} 都会使用观测函数构建误差函数 $h(T_{ij})$ ；然后由这些误差函数组成的误差项 $e(T_{ij}) = h(T_{ij})^2$ ，通过将这些误差项相加得到误差函数 J ；但是通常我们会在误差项外侧套一个鲁棒函数如下：

$$\rho(x) = x^2, \text{ if } -1 < x < 1$$

$$x, \text{ if } x \geq 1$$

$$-x, \text{ if } x \leq -1$$

鲁棒函数 ρ 在 0 附近的函数值上述很快；在超过某个范围后，鲁棒函数的函数值上述很慢；增加鲁棒函数后的误差函数 J 如下：

$$J = \sum_{T_{ij} \in E_T} \rho(h(T_{ij})^2)$$

因为鲁棒函数的存在，即使某个位姿变换 T_{ij} 属于离群点，对应的误差项的数值大小也不会很大；因此离群点对整个误差函数的最小值的影响不大；并且原始的误差项 $e(T_{ij}) = h(T_{ij})^2$ 是非线性函数，增加鲁棒函数后的误差项 $\rho(h(T_{ij})^2)$ 仍然是非线性函数；我们仍然使用数值计算方法求解误差函数的最小值；

然而该论文中的线性方程，我们不能采用鲁棒函数的方案；如果在每个线性方程构成的误差项外侧增加鲁棒函数，那么就变成非线性函数；我们将位姿变换构建成线性方程的目的是为了减少计算量，如果使用非线性方程，就没法达到所需的目的；

论文[1]给出了一种在位姿变换中去除离群点的方法；该方法的具体步骤较多，因此我们简要介绍大致的方法；该算法输入图 $G = [V, E]$ 中的所有位姿变换集合 $E = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ ，输出去除离群点的位姿变换集合 $E' = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ ；我们使用集合 E' 中的所有位姿变换构建线性方程，就能避免离群点对方程的影响；

该算法需要对输入的位姿变换集合 $E = \{T_{ij}, i, j \in V\}$ 中的每个位姿变换 T_{ij} 预设一个属于离群点的概率 p_{ij} ；这个概率并不是需要绝对精确的数值，我们可以使用位姿变换 T_{ij} 对应的方差 σ_{ij}^2 大致取值；比如可以采用如下的方案：

$$p_{ij} = 0.1, \text{ if } \sigma_{ij}^2 < \sigma_{thres1}^2$$

$$0.2, \text{ if } \sigma_{thres1}^2 \leq \sigma_{ij}^2 < \sigma_{thres2}^2$$

$$0.3, \text{ if } \sigma_{thres2}^2 \leq \sigma_{ij}^2$$

概率 p_{ij} 在离群点去除算法中用于寻找不同节点（节点 i 、节点 j ）之间的路线；位姿变换 T_{ij} 表示路径中的边；那么算法会尽量寻找一条离群点少的边组成的路径实现从节点 i 到达节点 j ；

该离群点去除算法的大致方法如下；设 $G = [V, E]$ 中存在两个节点 $p_1, p_2 \in V$ ；然后节点 p_1, p_2 之间存在三个旋转平移矩阵 $T_{12}^1, T_{12}^2, T_{12}^3$ ；

同时节点 p_1, p_2 经过另外一个节点（如 p_3, p_4, p_5 ）也能构成连线；那么 p_1 到 p_2 的位姿变换可以如下计算：

$$T_{12}^4 = T_{13}T_{32}$$

$$T_{12}^5 = T_{14}T_{42}$$

$$T_{12}^6 = T_{15}T_{52}$$

然后节点 p_1, p_2 经过另外两个节点（如 p_6, p_7 或 p_8, p_9 或 p_{10}, p_{11} ）可以构成连线；那么 p_1 到 p_2 的位姿变换计算如下：

$$T_{12}^7 = T_{16}T_{67}T_{72}$$

$$T_{12}^8 = T_{18}T_{89}T_{92}$$

$$T_{12}^9 = T_{1,10}T_{10,11}T_{11,2}$$

那么我们共得到 9 组节点 1 到节点 2 之间的位姿变换， $T_{12}^i, i \in [1, 9]$ ；如果使用的所有位姿变换（集合 E ）没有离群点，那么这些位姿变换 T_{12}^i 应该是非常近似的；如果使用的某个位姿变换是离群点，那么对应的位姿变换 T_{12}^i 和其他位姿变换相比，差别较大；我们可以将位姿变换 T_{12}^i 转化为平移向量和旋转向量，然后对每个分量都使用基于统计的 IQR 算法去除离群点；

7. 局部坐标系求解

我们已经计算得到图 $G = [V, E]$ 中每个节点在全局坐标系 Σ_g 中的坐标 $p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^{3 \times n}$ ；设节点 i 的全局坐标是 $p_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ ；设节点 i 的邻居节点为 $j \in N_i$ ，其中节点 j 在全局坐标系 Σ_g 中坐标是 $p_j = [x_j, y_j, z_j]^T$ ；节点 j 相对节点 i 的坐标是 $p_j^r = [x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i]^T$ ；这些邻居节点在全局坐标系中的相对坐标向量为 $P_i^n = [p_{j1}^r, \dots, p_{jn}^r] \in R^{3 \times |N_i|}, j_1, \dots, j_n \in N_i$ ；设节点 i 到邻居节点 $j \in N_i$ 的位姿变换是 $T_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & t_{ij} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{4 \times 4}, j \in N_i$ ，其中平移向量是 $t_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^T, j \in N_i$ ；那么节点 i 的邻居节点 $j \in N_i$ 在局部坐标系 Σ_i 中的相对位置向量是 $Q_i^n = [t_{ij1}, \dots, t_{ijn}] = [q_{ij1}, \dots, q_{ijn}] \in R^{3 \times |N_i|}, j_1, \dots, j_n \in N_i$ ；

然后我们已经计算得到每个节点 $i \in V$ 的虚拟节点 $i_x, i_y, i_z \in V_v$ 在全局坐标系 Σ_g 中坐标，

$p_{ix} = [x_{ix}, y_{ix}, z_{ix}]^T, p_{iy} = [x_{iy}, y_{iy}, z_{iy}]^T, p_{iz} = [x_{iz}, y_{iz}, z_{iz}]^T$ ；节点 i 的全局坐标是 $p_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ ，那么虚拟坐标 i_x, i_y, i_z 相对节点 i 的坐标如下：

$$p_{ix}^r = [x_{ix} - x_i, y_{ix} - y_i, z_{ix} - z_i]^T$$

$$p_{iy}^r = [x_{iy} - x_i, y_{iy} - y_i, z_{iy} - z_i]^T$$

$$\mathbf{p}_{iz}^r = [x_{iz} - x_i, y_{iz} - y_i, z_{iz} - z_i]^T$$

虚拟节点 i_x, i_y, i_z 在全局坐标系中的相对坐标向量为 $\mathbf{P}_i^v = [\mathbf{p}_{ix}^r, \mathbf{p}_{iy}^r, \mathbf{p}_{iz}^r]$ ；虚拟节点 i_x, i_y, i_z 在局部坐标系 Σ_i 中的坐标为 $\mathbf{p}_{ix}^i = [1, 0, 0]^T, \mathbf{p}_{iy}^i = [0, 1, 0]^T, \mathbf{p}_{iz}^i = [0, 0, 1]^T$ ；设虚拟节点 i_x, i_y, i_z 在局部坐标系 Σ_i 中的坐标向量为 $\mathbf{Q}_i^v = [\mathbf{p}_{ix}^i, \mathbf{p}_{iy}^i, \mathbf{p}_{iz}^i]$ ；

将坐标向量 \mathbf{P}_i^n 和 \mathbf{P}_i^v 合并得到 $\mathbf{P}_i = [\mathbf{P}_i^n, \mathbf{P}_i^v] \in \mathbb{R}^{3 \times |N_i|+3}$ ；将坐标向量 \mathbf{Q}_i^n 和 \mathbf{Q}_i^v 合并得到 $\mathbf{Q}_i = [\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_i^v] \in \mathbb{R}^{3 \times |N_i|+3}$ ；然后我们可以使用点集配准的方法计算节点 i 的局部坐标系的旋转矩阵 \mathbf{R}_i ；

此处我们使用了节点 i 的邻居节点 $j \in N_i$ 和虚拟节点 i_x, i_y, i_z 来构建坐标向量 \mathbf{P}_i 和 \mathbf{Q}_i ；虽然我们还将邻居节点 $j \in N_i$ 的虚拟坐标 $j_x, j_y, j_z, j \in N_i$ 也加入坐标向量中，不过此处我们并没有加入，原因如下：首先只要有三个节点（比如虚拟节点 i_x, i_y, i_z ）就可以得到旋转矩阵 \mathbf{R}_i ；然后邻居节点 $j \in N_i$ 自身的信息已经大致可以代表节点 j 的位置，再增加节点 j 的虚拟节点 j_x, j_y, j_z 的位置可能增加过多计算复杂性；

已知一组点在全局坐标系 Σ_g 中的位置向量 $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{3 \times |N_i|+3}$ ，并且已知这组点在局部坐标系 Σ_i 中的位置向量 $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{3 \times |N_i|+3}$ ；我们需要寻找一个旋转矩阵 \mathbf{R}_i ，构建如下误差函数：

$$E(\mathbf{R}_i) = \sum_{\mathbf{p}_i^j \in \mathbf{P}_i, \mathbf{q}_i^j \in \mathbf{Q}_i} \|\mathbf{R}_i \mathbf{p}_i^j - \mathbf{q}_i^j\|^2$$

我们需要使误差函数 $E(\mathbf{R}_i)$ 最小的旋转矩阵 $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ；该问题属于点云配准问题，我们可以使用ICP算法的奇异值分解计算矩阵 \mathbf{R}_i ；矩阵 \mathbf{R}_i 表示将点集从全局坐标系 Σ_g 中变换到局部坐标系 Σ_i 的旋转矩阵；坐标系本身的旋转和点集的坐标旋转相反，那么局部坐标系 Σ_i 相对于全局坐标系 Σ_g 的旋转矩阵是 $(\mathbf{R}_i)^{-1}$ ；根据ICP算法中的奇异值分解方法，使得误差函数 $E(\mathbf{R}_i)$ 取得最小值的旋转矩阵如下：

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}_i \mathbf{Q}_i^T = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{V} \mathbf{U}^T$$

对矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 计算奇异值分解，得到正交矩阵 \mathbf{U}, \mathbf{V} ；旋转矩阵 $\mathbf{R}_i = \mathbf{V} \mathbf{R}^T$ ，然而如果点集 \mathbf{P}_i 或者 \mathbf{Q}_i 退化，那么计算得到的矩阵 \mathbf{R}_i 可能是反射矩阵（ $|\mathbf{R}_i| = -1$ ）；我们可以通过如下步骤将反射矩阵 \mathbf{R}_i 调整为旋转矩阵：

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{U}^T$$

那么完整的旋转矩阵计算公式如下：

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{V} \mathbf{U}^T| \end{bmatrix} \mathbf{U}^T$$

过程4，局部坐标系求解

输入，节点 i 的坐标 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ ，节点 i 的邻居节点 $j \in N_i$ ，邻居节点 $j \in N_i$ 的坐标 $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^3$ ，邻居节点 $j \in N_i$ 的位姿变换 \mathbf{T}_{ij} ，虚拟节点 i_x, i_y, i_z 的坐标 $\mathbf{p}_{ix}, \mathbf{p}_{iy}, \mathbf{p}_{iz} \in \mathbb{R}^3$

输出，局部坐标系 Σ_i 相对全局坐标系 Σ_g 的旋转矩阵 $(\mathbf{R}_i)^{-1}$

邻居节点 $j \in N_i$ 相对节点 i 的坐标为 $\mathbf{p}_j^r = [x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i]^T$ ；

邻居节点 $j \in N_i$ 在全局坐标系 Σ_g 中的相对坐标是， $\mathbf{P}_i^n = [\mathbf{p}_{j1}^r, \dots, \mathbf{p}_{jn}^r] \in \mathbb{R}^{3 \times |N_i|}, j_1, \dots, j_n \in N_i$ ；

邻居节点 $j \in N_i$ 在局部坐标系 Σ_i 中的坐标是， $\mathbf{Q}_i^n = [\mathbf{t}_{ij1}, \dots, \mathbf{t}_{ijn}] = [\mathbf{q}_{ij1}, \dots, \mathbf{q}_{ijn}] \in \mathbb{R}^{3 \times |N_i|}, j_1, \dots, j_n \in N_i$ ；

虚拟节点 i_x, i_y, i_z 相对节点 i 的坐标为 $\mathbf{p}_{ix}^r = [x_{ix} - x_i, y_{ix} - y_i, z_{ix} - z_i]^T, \mathbf{p}_{iy}^r = [x_{iy} - x_i, y_{iy} - y_i, z_{iy} - z_i]^T, \mathbf{p}_{iz}^r = [x_{iz} - x_i, y_{iz} - y_i, z_{iz} - z_i]^T$ ；组合得到向量， $\mathbf{P}_i^v = [\mathbf{p}_{ix}^r, \mathbf{p}_{iy}^r, \mathbf{p}_{iz}^r] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ；

虚拟节点 i_x, i_y, i_z 在局部坐标系 Σ_i 中的坐标为 $\mathbf{p}_{ix}^i = [1, 0, 0]^T, \mathbf{p}_{iy}^i = [0, 1, 0]^T, \mathbf{p}_{iz}^i = [0, 0, 1]^T$ ；组成向量为， $\mathbf{Q}_i^v = [\mathbf{p}_{ix}^i, \mathbf{p}_{iy}^i, \mathbf{p}_{iz}^i] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ；

坐标向量 \mathbf{P}_i^n 和 \mathbf{P}_i^v 合并为 $\mathbf{P}_i = [\mathbf{P}_i^n, \mathbf{P}_i^v] \in \mathbb{R}^{3 \times (3n+3)}$ ，坐标向量 \mathbf{Q}_i^n 和 \mathbf{Q}_i^v 合并为 $\mathbf{Q}_i = [\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_i^v] \in \mathbb{R}^{3 \times (3n+3)}$ ；

使用点集配准计算旋转矩阵 \mathbf{R}_i ，矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{P}_i \mathbf{Q}_i^T$ ；

对矩阵 \mathbf{H} 奇异值分解， $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$ ；

旋转矩阵为 $\mathbf{R}_i = \mathbf{V} \times \text{diag}([1, 1, |\mathbf{V} \mathbf{U}^T|]) \times \mathbf{U}^T$ ；

局部坐标系 Σ_i 相对全局坐标系 Σ_g 的旋转矩阵 $(\mathbf{R}_i)^{-1}$ ；

REFERENCES

- Brown, F., Harris, M.G., and Other, A.N. (1998). Name of paper. In Name(s) of editor(s) (ed.), *Name of book in italics*, page numbers. Publisher, Place of publication.
- Smith, S.E. (2004). *Name of book in italics*, page or chapter numbers if relevant. Publisher, Place of publication.
- Smith, S.E. and Jones, L.Q. (2008). Name of paper. *Name of journal in italics*, volume (number), page numbers.

【待补充，调整格式后加入】

