Actividad Guiada 2

Javier Rodríguez Juárez

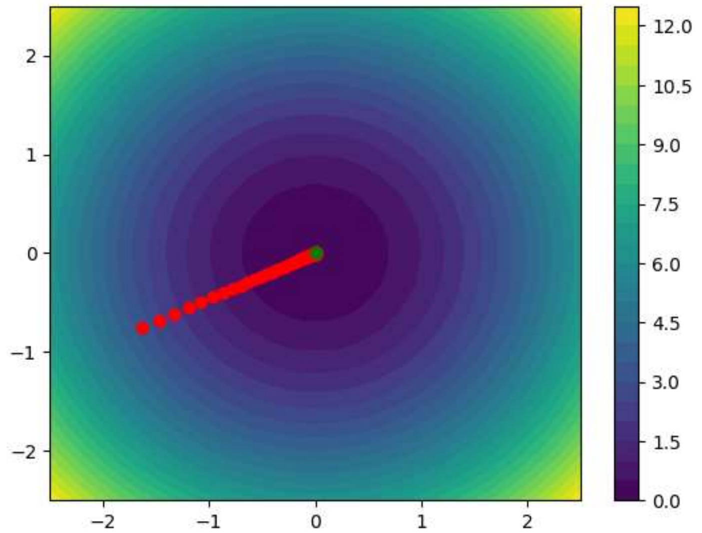
[Link a Github]

```
import math
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
f = lambda X: X[0]**2 + X[1]**2     # Función
df = lambda X: [2 * X[0], 2 * X[1]] # Gradiente
```

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

for _ in range(500):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [-2.163226464353566e-23, -9.98209407469802e-24] 5.675970757240843 6e-46
```



Para una función:

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 3\right) \cdot \cos(2x + 1 - e^y)$$

```
f = lambda X: np.sin(1/2 * X[0]**2 - 1/4 * X[1]**2 + 3) * np.cos(2 * X[0] + 1 - np.e**X[1])

def df(pto):
    h = 0.01
    T = np.copy(pto)
    grad = np.zeros(2)
```

```
    for it, th in enumerate(pto):
        T[it] = T[it] + h
        grad[it] = (f(T) - f(pto)) / h
    return grad
```

Aplicando la definición de derivada

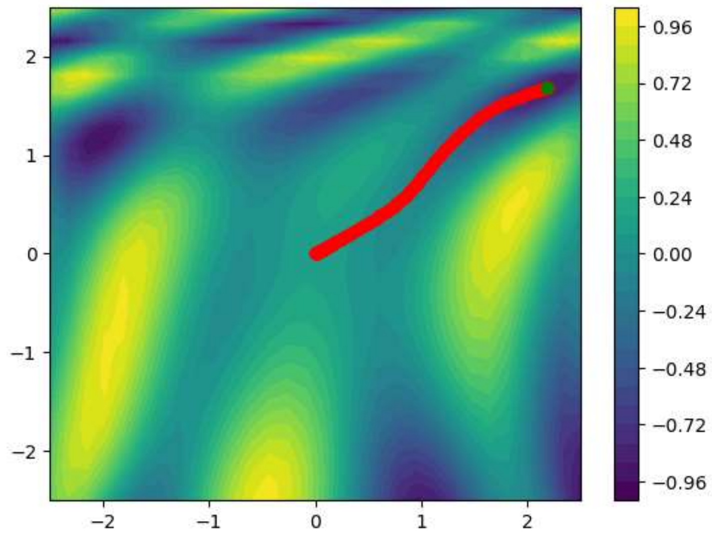
$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Partiremos siempre del punto inicial (0, 0) para que los resultados sean comparables

Con una tasa de aprendizaje de $\gamma = 0.05$ y 500 iteraciones:

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

# P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

for _ in range(500):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [2.1862558022902987, 1.679703727336733] -0.9995748020012025
```

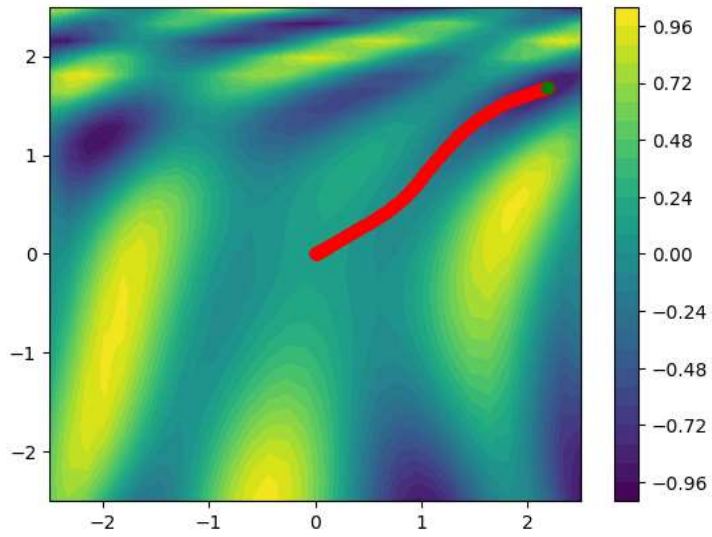


Aplicando una tasa de aprendizaje variable en función del gradiente:

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])
```

```
contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

# P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

grad_ini = df(P)
grad_prev = math.sqrt(grad_ini[0]**2 + grad_ini[1]**2)

steps = 500
for s in range(steps):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

  # Variacion en funcion del modulo del gradiente para adecuar
  # la tasa de aprendizaje en cada iteracion
  mod_grad = math.sqrt(grad[0]**2 + grad[1]**2)
  ta = ta * (1 - (mod_grad - grad_prev) / max(1, mod_grad + grad_prev))
  grad_prev = mod_grad


plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [2.186255802290299, 1.6797037273367328] -0.9995748020012026
```



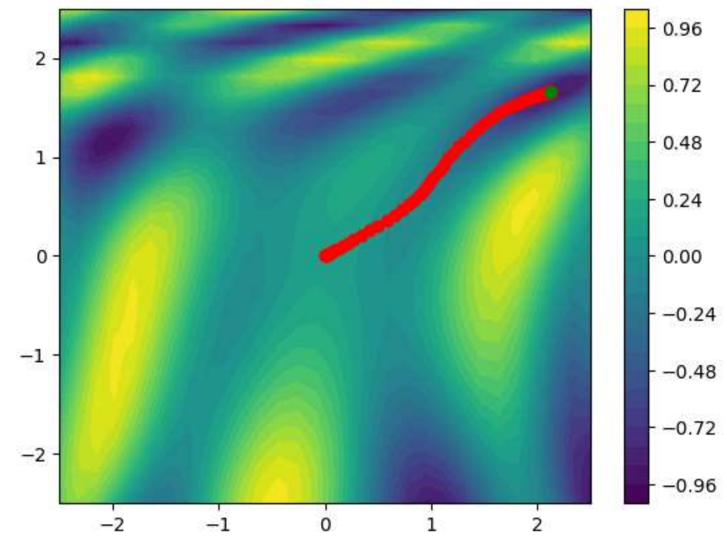
Aplicando una tasa de aprendizaje variable en función del numero de iteraciones:

Hay que incrementar la tasa de aprendizaje inicial hasta 0.25

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

# P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.25

grad_ini = df(P)
grad_prev = math.sqrt(grad_ini[0]**2 + grad_ini[1]**2)

steps = 500
```

```
for s in range(steps):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

  # Variacion en funcion del numero de iteraciones
  mod_grad = math.sqrt(grad[0]**2 + grad[1]**2)
  ta = ta * (1 - s / steps)
  grad_prev = mod_grad


plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [2.127532371869663, 1.6608790599779941] -0.9903407471475894
```



De forma analítica

Calculando la derivada:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \cdot \cos(2x - e^y + 1) \cdot \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) - 2 \cdot \sin(2x - e^y + 1) \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right)$
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^y \cdot \sin(2x - e^y + 1) \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right) - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \cos(2x - e^y + 1) \cdot \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + 3\right)$

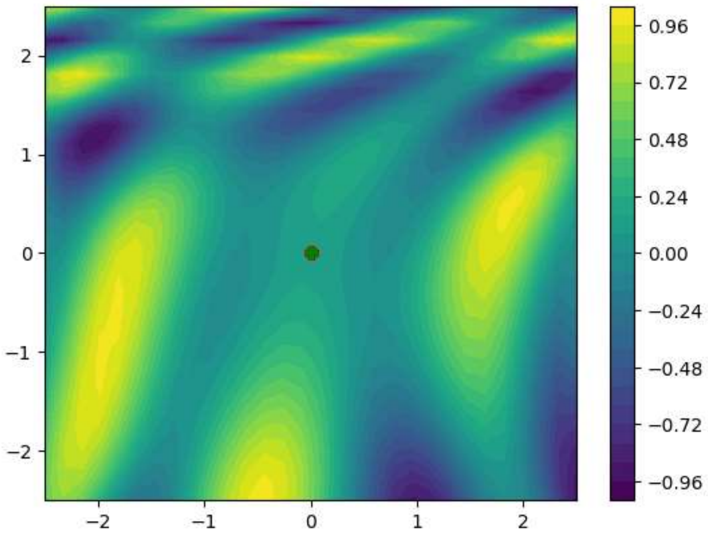
```
df = lambda X: \
         [X[0] * np.cos(2 * X[0] - np.e**X[1] + 1) * np.cos(X[0]**2 / 2 - X[1]**2 / 4 + 3) - 2 * np.sin(2 * X[0] - np.e**X[1] + 1) * np.s
         np.e**X[1] * np.sin(2 * X[0] - np.e**X[1] + 1) * np.sin(X[0]**2 / 2 - X[1]**2 / 4 + 3) - (1/2) * X[1] * np.cos(2 * X[0] - np.e**
```

Con una tasa de aprendizaje de $\gamma = 0.05$ y 500 iteraciones:

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

# P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

for _ in range(500):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
```

```
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

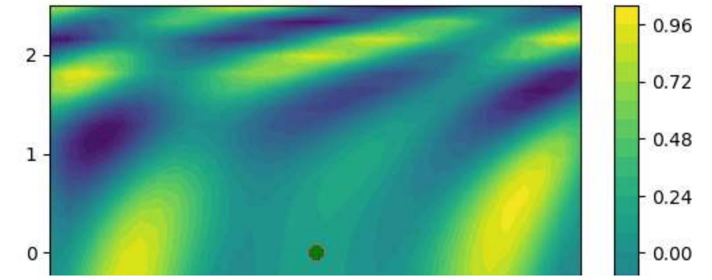
```
Solución =  [0.0, 0.0] 0.1411200080598672
```



Aplicando una tasa de aprendizaje variable en función del gradiente:

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

# P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

grad_ini = df(P)
grad_prev = math.sqrt(grad_ini[0]**2 + grad_ini[1]**2)

steps = 500
for s in range(steps):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

  # Variacion en funcion del modulo del gradiente para adecuar
  # la tasa de aprendizaje en cada iteracion
  mod_grad = math.sqrt(grad[0]**2 + grad[1]**2)
  ta = ta * (1 - (mod_grad - grad_prev) / max(1, mod_grad + grad_prev))
  grad_prev = mod_grad


plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [0.0, 0.0] 0.1411200080598672
```

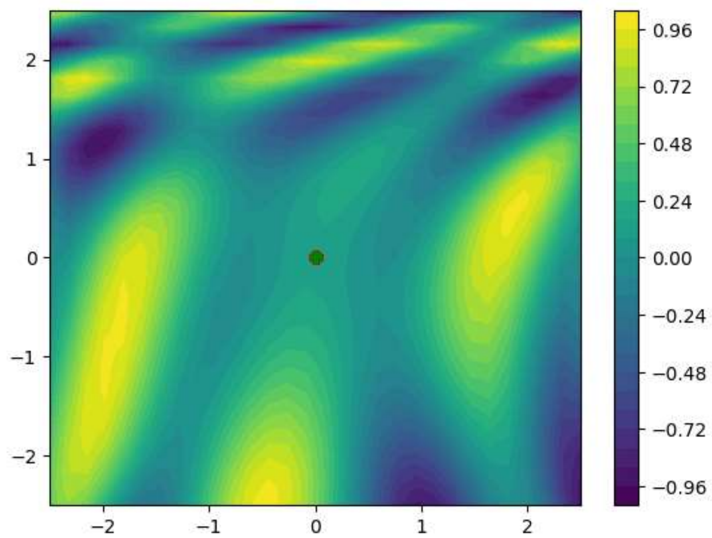


Aplicando una tasa de aprendizaje variable en función del numero de iteraciones:

Hay que incrementar la tasa de aprendizaje inicial hasta 0.25

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

# P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.25

grad_ini = df(P)
grad_prev = math.sqrt(grad_ini[0]**2 + grad_ini[1]**2)

steps = 500
for s in range(steps):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

  # Variacion en funcion del numero de iteraciones
  mod_grad = math.sqrt(grad[0]**2 + grad[1]**2)
  ta = ta * (1 - s / steps)
  grad_prev = mod_grad


plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [0.0, 0.0] 0.1411200080598672
```



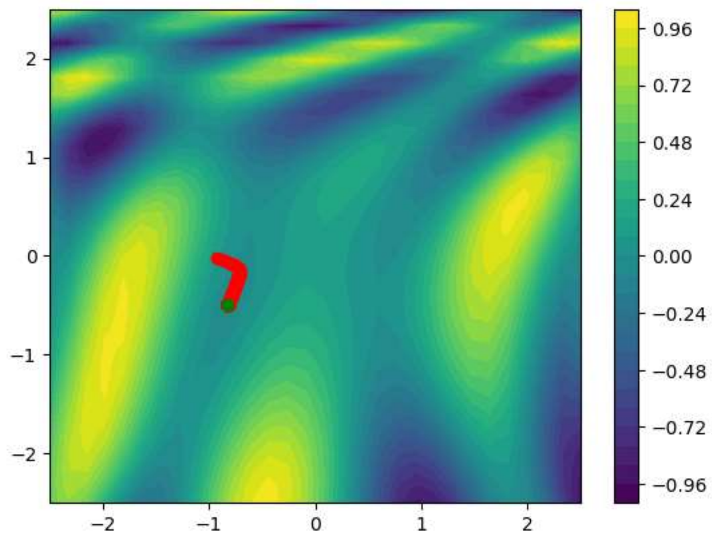
Analíticamente, como el punto inicial es (0, 0) es un máximo local, el gradiente de la función en ese punto es nulo y no varia (permanece estable).

Realizando los mismos ejemplos para un punto inicial aleatorio:

Aplicando una tasa de aprendizaje variable en función del gradiente:

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
# P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

grad_ini = df(P)
grad_prev = math.sqrt(grad_ini[0]**2 + grad_ini[1]**2)

steps = 500
for s in range(steps):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

  # Variacion en funcion del modulo del gradiente para adecuar
  # la tasa de aprendizaje en cada iteracion
  mod_grad = math.sqrt(grad[0]**2 + grad[1]**2)
  ta = ta * (1 - (mod_grad - grad_prev) / max(1, mod_grad + grad_prev))
  grad_prev = mod_grad


plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [-0.8229073158984596, -0.4993775681849973] -0.041983264557007564
```



Aplicando una tasa de aprendizaje variable en función del numero de iteraciones:

Hay que incrementar la tasa de aprendizaje inicial hasta 0.25

```
resolucion = 30
rango = 2.5
X = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Y = np.linspace(-rango, rango, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, x in enumerate(X):
  for iy, y in enumerate(Y):
```

```
    Z[iy, ix] = f([x, y])

contour = plt.contourf(X, Y, Z, resolucion)
cbar = plt.colorbar(contour)

P = [random.uniform(-rango, rango), random.uniform(-rango, rango)]
# P = [0, 0]

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

ta = 0.05

grad_ini = df(P)
grad_prev = math.sqrt(grad_ini[0]**2 + grad_ini[1]**2)

steps = 500
for s in range(steps):
  grad = df(P)
  P[0], P[1] = P[0] - ta * grad[0], P[1] - ta * grad[1]
  plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red")

  # Variacion en funcion del numero de iteraciones
  mod_grad = math.sqrt(grad[0]**2 + grad[1]**2)
  ta = ta * (1 - s / steps)
  grad_prev = mod_grad


plt.plot(P[0], P[1], "o", c="green")
print("Solución = ", P, f(P))
```

```
Solución =  [-2.026306094924716, 1.1728725802321565] -0.9999941910069718
```