Algoritmos y Estructuras de Datos III

Trabajo Práctico 1

Integrante	LU	Correo electrónico
Agustín Cangiani	344/09	cangiani@gmail.com
Marco Vanotti		marcovanotti15@gmail.com
Romina Gómez	590/08	rominagomez1789@gmail.com
Verónica Coy	652/08	verocoy@gmail.com

Keywords:
Ceros de funciones, Newton, Bisección, Energía mecánica, tolerancia, presición

Índice

1. Ejercicio 1

1.1. Desarrollo

1.2. Correctitud

1.2.1. Demo

Vamos a demostrar que si tenemos una secuencia de máquinas óptima, que no esté ordenada de mayor a menor según el tiempo de producción, podemos cambiar el orden de dos máquinas adyacentes que estén desordenadas y seguir teniendo una solución óptima.

Una secuencia de máquinas óptima es una secuencia tal que el Tiempo de producción de la misma es menor o igual que el de cualquiera de sus permutaciones.

Definimos una función T para obtener el tiempo total de procesamiento de una máquina en la posición k de la secuencia S como

$$T(S,k) = \left(\sum_{i=0}^{k} Costo(S_i) \right) + Peso(S_k)$$

Definimos la función para calcular el tiempo total de procesamiento de una secuencia de máquinas como

$$Tiempo(S) = \max \{ \ T(S,j),\ j \in [0 \ , \ |S| \ ) \}$$

Supongamos que tenemos una secuencia S óptima que no se encuentra ordenada. Entonces existe un $j < |S-1| \ / \ Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$.

Sea S' la secuencia que se forma de intercambiar la máquina de la posición j con la de la posición $j+1$, quiero ver que $Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$.

Sea $i \neq j \wedge i \neq j+1$, es trivial ver que $T(S,i) = T(S',i)$. Es decir, que si el máximo no era ni j, ni $j+1$, el tiempo total se mantiene igual.

Supongamos entonces que $Tiempo(S)$ depende de $T(S,j)$ y $T(S,j+1)$:

$$Tiempo(S) = \max \{ \ T(S,j) \ , T(S,j+1) \ \}$$

$$T(S,j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i) \right) + Peso(S_j) + Costo(S_j)$$

$$T(S,j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i) \right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j)$$

Por hipótesis, vale que $Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) = T(S,j+1)$$

$$Tiempo(S') = \max \{ \ T(S', j) \ , T(S', j+1) \ \}$$

Como en S' intercambiamos la máquina en la posición j por la máquina en la posición $j+1$, vale que $S'_j = S_{j+1} \wedge S'_{j+1} = S_j$

Luego, reemplazando en T las máquinas

$$T(S', j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1})$$

$$T(S', j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j) > Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$$

1.3. Resultados

2. Ejercicio 2

2.1. Desarrollo

2.2. Correctitud

2.2.1. Demo

Vamos a demostrar que si tenemos una secuencia de máquinas óptima, que no esté ordenada de mayor a menor según el tiempo de producción, podemos cambiar el orden de dos máquinas adyacentes que estén desordenadas y seguir teniendo una solución óptima.

Una secuencia de máquinas óptima es una secuencia tal que el Tiempo de producción de la misma es menor o igual que el de cualquiera de sus permutaciones.

Definimos una función T para obtener el tiempo total de procesamiento de una máquina en la posición k de la secuencia S como

$$T(S,k) = \left(\sum_{i=0}^{k} Costo(S_i)\right) + Peso(S_k)$$

Definimos la función para calcular el tiempo total de procesamiento de una secuencia de máquinas como

$$Tiempo(S) = \max\ \{\ T(S,j),\ j \in [0\ ,\ |S|\ )\}$$

Supongamos que tenemos una secuencia S óptima que no se encuentra ordenada. Entonces existe un $j < |S-1|\ /\ Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$.

Sea S' la secuencia que se forma de intercambiar la máquina de la posición j con la de la posición $j+1$, quiero ver que $Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$.

Sea $i \neq j \wedge i \neq j+1$, es trivial ver que $T(S,i) = T(S',i)$. Es decir, que si el máximo no era ni j, ni $j+1$, el tiempo total se mantiene igual.

Supongamos entonces que $Tiempo(S)$ depende de $T(S,j)$ y $T(S,j+1)$:

$$Tiempo(S) = \max\ \{\ T(S,j)\ ,\ T(S,j+1)\ \}$$

$$T(S,j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i)\right) + Peso(S_j) + Costo(S_j)$$

$$T(S,j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i)\right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j)$$

Por hipótesis, vale que $Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) = T(S,j+1)$$

$$Tiempo(S') = \max \{ \ T(S',j) \ , T(S',j+1) \ \}$$

Como en S' intercambiamos la máquina en la posición j por la máquina en la posición $j+1$, vale que $S'_j = S_{j+1} \wedge S'_{j+1} = S_j$

Luego, reemplazando en T las máquinas

$$T(S',j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1})$$

$$T(S',j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j) > Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$$

2.3. Resultados

3. Ejercicio 3

3.1. Desarrollo

3.2. Correctitud

3.2.1. Demo

Vamos a demostrar que si tenemos una secuencia de máquinas óptima, que no esté ordenada de mayor a menor según el tiempo de producción, podemos cambiar el orden de dos máquinas adyacentes que estén desordenadas y seguir teniendo una solución óptima.

Una secuencia de máquinas óptima es una secuencia tal que el Tiempo de producción de la misma es menor o igual que el de cualquiera de sus permutaciones.

Definimos una función T para obtener el tiempo total de procesamiento de una máquina en la posición k de la secuencia S como

$$T(S,k) = \left(\sum_{i=0}^{k} Costo(S_i) \right) + Peso(S_k)$$

Definimos la función para calcular el tiempo total de procesamiento de una secuencia de máquinas como

$$Tiempo(S) = \max \; \{ \; T(S,j), \, j \in [0 \; , \; |S| \;) \}$$

Supongamos que tenemos una secuencia S óptima que no se encuentra ordenada. Entonces existe un $j < |S-1| \; / \; Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$.

Sea S' la secuencia que se forma de intercambiar la máquina de la posición j con la de la posición $j+1$, quiero ver que $Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$.

Sea $i \neq j \wedge i \neq j+1$, es trivial ver que $T(S,i) = T(S',i)$. Es decir, que si el máximo no era ni j, ni $j+1$, el tiempo total se mantiene igual.

Supongamos entonces que $Tiempo(S)$ depende de $T(S,j)$ y $T(S,j+1)$:

$$Tiempo(S) = \max \; \{ \; T(S,j) \; , \; T(S,j+1) \; \}$$

$$T(S,j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i) \right) + Peso(S_j) + Costo(S_j)$$

$$T(S,j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i) \right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j)$$

Por hipótesis, vale que $Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) = T(S,j+1)$$

$$Tiempo(S') = \max \{ \ T(S', j) \ , T(S', j+1) \ \}$$

Como en S' intercambiamos la máquina en la posición j por la máquina en la posición $j + 1$, vale que $S'_j = S_{j+1} \wedge S'_{j+1} = S_j$

Luego, reemplazando en T las máquinas

$$T(S', j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1})$$

$$T(S', j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j) > Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$$

3.3. Resultados

4. Ejercicio 4

4.1. Desarrollo

4.2. Correctitud

4.2.1. Demo

Vamos a demostrar que si tenemos una secuencia de máquinas óptima, que no esté ordenada de mayor a menor según el tiempo de producción, podemos cambiar el orden de dos máquinas adyacentes que estén desordenadas y seguir teniendo una solución óptima.

Una secuencia de máquinas óptima es una secuencia tal que el Tiempo de producción de la misma es menor o igual que el de cualquiera de sus permutaciones.

Definimos una función T para obtener el tiempo total de procesamiento de una máquina en la posición k de la secuencia S como

$$T(S,k) = \left(\sum_{i=0}^{k} Costo(S_i)\right) + Peso(S_k)$$

Definimos la función para calcular el tiempo total de procesamiento de una secuencia de máquinas como

$$Tiempo(S) = \max \{\ T(S,j),\ j \in [0\ ,\ |S|\ )\}$$

Supongamos que tenemos una secuencia S óptima que no se encuentra ordenada. Entonces existe un $j < |S-1|\ /\ Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$.

Sea S' la secuencia que se forma de intercambiar la máquina de la posición j con la de la posición $j+1$, quiero ver que $Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$.

Sea $i \neq j \wedge i \neq j+1$, es trivial ver que $T(S,i) = T(S',i)$. Es decir, que si el máximo no era ni j, ni $j+1$, el tiempo total se mantiene igual.

Supongamos entonces que $Tiempo(S)$ depende de $T(S,j)$ y $T(S,j+1)$:

$$Tiempo(S) = \max \{\ T(S,j)\ ,\ T(S,j+1)\ \}$$

$$T(S,j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i)\right) + Peso(S_j) + Costo(S_j)$$

$$T(S,j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S_i)\right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j)$$

Por hipótesis, vale que $Peso(S_j) < Peso(S_{j+1})$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) = T(S,j+1)$$

$$Tiempo(S') = \max \{\ T(S', j)\ ,\ T(S', j+1)\ \}$$

Como en S' intercambiamos la máquina en la posición j por la máquina en la posición $j+1$, vale que $S'_j = S_{j+1} \wedge S'_{j+1} = S_j$

Luego, reemplazando en T las máquinas

$$T(S', j) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1})$$

$$T(S', j+1) = \left(\sum_{i=0}^{j-1} Costo(S'_i) \right) + Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$Peso(S_{j+1}) + Costo(S_{j+1}) + Costo(S_j) > Peso(S_j) + Costo(S_j) + Costo(S_{j+1})$$

$$\Downarrow$$

$$Tiempo(S) \geq Tiempo(S')$$

4.3. Resultados

5. Conclusiones

6. Librerías básicas

7. Referencias