IUT GMP1 Chapitres 0 et 1 : **Démonstrations**

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Proposition 1. Si $Card(E) = n \in \mathbb{N}$ alors

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration :
On procède par récurrence sur le nombre d'éléments n de E.
$*$ Pour $n = 0$ c'est-à-dire E n'a pas d'élément, $E = \emptyset$. Et la seule partie de $\emptyset$ est $\{\emptyset\}$ et donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ est réduit à 1 élement. Finalement

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 1 = 2^0$$

et l'initialisation est vraie.
$*$ Supposons que la propriété soit vraie pour les ensembles de cardinal égal à $n > 0$. Prenons un ensemble E de cardinal $n+1$. E est par conséquent non vide, et on prend un élément $x \in E$. On regarde maintenant les parties de E qui contiennent cet élément x, et les parties de E qui ne contiennent pas x. On voit que l'ensemble $E\backslash\{x\}$ (E privé de l'élément x) est de cardinal $n(= n + 1 - 1)$, et on lui applique donc l'hypothèse de récurrence, à savoir que l'ensemble des parties de $E\backslash\{x\}$ possède 2^n éléments. Intéressons-nous à l'autre ensemble : celui des parties de E qui contiennent l'élément x. Comme l'élément x est fixé, on construit des parties différentes de E (qui contiennent toutes x) qu'à partir des n autres éléments, cela revient donc à considérer l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments. Par conséquent ce deuxième ensemble des parties contenant x a lui aussi exactement 2^n. On conclut en disant que l'ensemble des parties de E est précisément l'ensemble des parties de E qui contiennent x union l'ensemble des parties de E qui ne contiennent pas x. D'où

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1},$$

et cela démontre la propriété au rang $n + 1$. ■

Proposition 2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \end{aligned}$$

Démonstration :
On considère le cercle trigonométrique usuel dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient X, Y, M les points sur le cercle trigonométrique d'angle respectif $x, y, x+y$ (faire un dessin). On a dans ce repère,

$$\vec{OM} = \cos(x+y)\vec{i} + \sin(x+y)\vec{j}. \tag{1}$$

D'autre part, soit le point A tel quel $(O, \vec{OX}, \vec{OA})$ forme un repère orthonormé direct. Et on a dans ce repère (changer de repère consiste en quelque sorte à tourner le cercle trigo d'angle x),

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \cos(y)\vec{OX} + \sin(y)\vec{OA} \\ &= \cos(y)\left[\cos(x)\vec{i} + \sin(x)\vec{j}\right] + \sin(y)\left[\cos(x+\frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(x+\frac{\pi}{2})\vec{j}\right] \\ &= \cos(y)\cos(x)\vec{i} + \cos(y)\sin(x)\vec{j} + \sin(y)\left[-\sin(x)\vec{i} + \cos(x)\vec{j}\right] \\ &= (\cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x))\,\vec{i} + (\cos(y)\sin(x) + \sin(y)\cos(x))\,\vec{j}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en identifiant avec (1). ■

Proposition 3. Formule de Moivre : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

Démonstration :
On procède par récurrence sur n.
$*$ Pour $n = 0$, on a

$$(\cos(x) + i\sin(x))^0 = 1 = \cos(0) + i\sin(0),$$

et la formule est vraie.
$*$ Supposons que la formule de Moivre soit vraie pour un certain entier $n > 0$. On calcule alors

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i\sin(x))^{n+1} &= (\cos(x) + i\sin(x))^n\,(\cos(x) + i\sin(x)) \\ &= (\cos(nx) + i\sin(nx))(\cos(x) + i\sin(x)) \end{aligned}$$

où l'on vient d'utiliser l'hypothèse de récurrence au rang n. Et on peut réécrire ce dernier terme grâce aux formules de $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ ... :

$$\begin{aligned}
&= \cos(nx)\cos(x) + i\cos(nx)\sin(x) + i\sin(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) \\
&= \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) + i\left(\cos(nx)\sin(x) + \sin(nx)\cos(x)\right) \\
&= \cos(nx+x) + i\sin(nx+x) \\
&= \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x),
\end{aligned}$$

et cela prouve la formule au rang $n+1$. ■