Injections, surjections, bijections

Nous avons manipulé déjà ensemble pas mal de fonctions, mais presque toujours définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous aurons désormais l'occasion de manipuler des fonctions **définies sur des ensembles quelconques** et **à valeurs dans des ensembles quelconques** — des ensembles de ce-que-vous-voulez, pas forcément des ensembles de nombres. Ce chapitre s'ouvre ainsi naturellement sur une généralisation simple de choses bien connues, mais vous présente ensuite quelques nouveautés importantes, notamment les notions d'injection et de surjection.

Dans tout ce chapitre, $E, F, G\ldots$ sont des ensembles **quelconques**.

1 Généralités sur les applications

Qu'est-ce qu'une fonction ? On se contente généralement de dire ce qu'une fonction **fait** pour éviter d'avoir à dire ce qu'elle **est** : « Une fonction associe à tout élément d'un ensemble un unique élément d'un autre ensemble. » Ceci hélas n'est pas une définition, quel est donc ce quelque chose qui « associe » une chose à une autre ?

Intuitivement, une fonction c'est une figure, une courbe, un graphe. La fonction $x \longmapsto x^2$ par exemple peut être vue comme l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, x^2), x décrivant $\mathbb{R}$. On vous a sans doute expliqué qu'il ne faut pas confondre une fonction et sa courbe représentative. Avec la définition qui suit au contraire, toute fonction **est** son graphe.

Définition (Application/fonction, ensemble de définition/d'arrivée, image et antécédents d'un point, image d'une application)

- On appelle *application* (ou *fonction*) *de E dans F* toute partie f de $E \times F$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad \exists\,!\, y \in F / \quad (x, y) \in f.$$

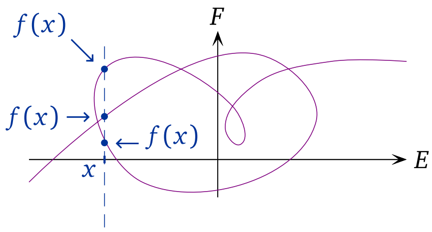
  La présence du pseudo-quantificateur « $\exists\,!$ » permet de noter $f(x)$ l'unique $y \in F$ de la proposition ci-dessus. La proposition « $(x, y) \in f$ » n'est donc en fait jamais notée ainsi mais plutôt « $y = f(x)$ ».

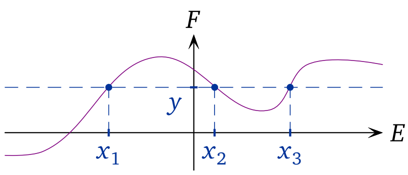
- L'ensemble E est appelé l'*ensemble de définition* (ou *de départ*) *de f*. L'ensemble F est quant à lui appelé un *ensemble d'arrivée de f*.

- Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est appelé **l'***image de x par f*.
  Pour tout $y \in F$, tout élément x de E pour lequel : $\quad y = f(x) \quad$ est appelé **un** *antécédent de y par f*.

Explication

- La figure de droite ci-contre ne représente pas une fonction de E dans F car à un x donné se trouvent associées plusieurs valeurs de $f(x)$.

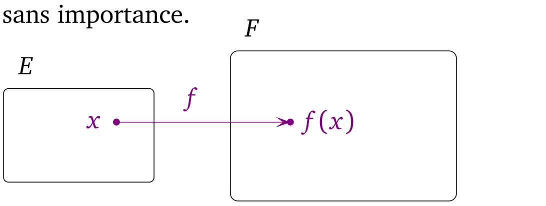


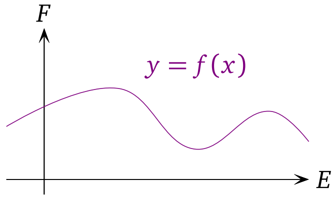


À gauche, y possède plusieurs antécédents par f, on parle d'**un** antécédent et non de « l' » antécédent de y.

- Conformément au programme, les mots « fonction » et « application » seront pour nous parfaitement synonymes. Vous trouverez peut-être dans certains ouvrages non scolaires deux définitions distinctes attachées à ces deux noms, mais n'y prêtez pas attention, c'est vraiment sans importance.

- On représente classiquement les applications de deux façons — soit au moyen de « patates » (figure de gauche), soit au moyen d'un graphe (figure de droite).

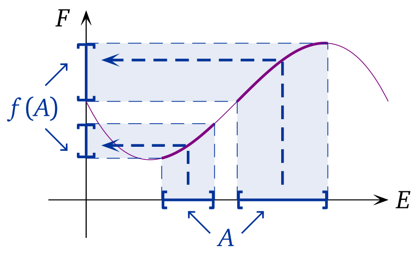


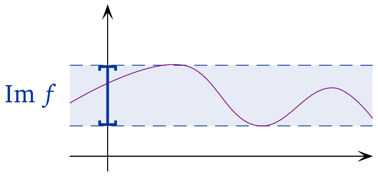


Définition (Image directe d'une partie, image d'une application) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Pour toute partie A de E, on appelle *image (directe) de A par f*, notée $f(A)$, l'ensemble :
$$f(A) = \left\{ y \in F / \quad \exists\, a \in A / \quad y = f(a) \right\} = \left\{ f(a) \right\}_{a \in A}.$$
- L'image de E tout entier est simplement appelée l'*image de f* et notée généralement $\mathrm{Im}\, f$ plutôt que $f(E)$.

Explication L'image $f(A)$ de A par f est l'ensemble des images par f des éléments de A. Graphiquement, pour déterminer $f(A)$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A, comme l'illustre la figure de droite.





On fait pareil pour déterminer graphiquement l'image $\mathrm{Im}\, f$ de f, mais avec le graphe de f tout entier.

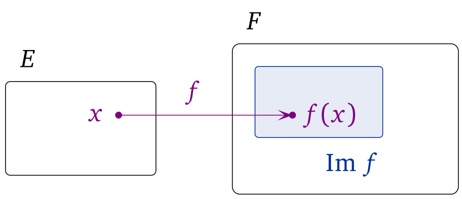
Exemple

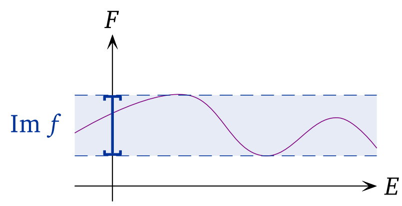
- L'image de la fonction $z \longmapsto \mathrm{Re}(z)^2$ est $\mathbb{R}_+$, l'image de la fonction $x \longmapsto ix$ est l'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs et l'image de la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est l'ensemble $\mathbb{U}$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\left\{0\right\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.

Définition (Expression « à valeurs dans… ») Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F. On dit que f est *à valeurs dans B* si toute valeur de f est élément de B, i.e. si : $\forall x \in E, \quad f(x) \in B,$ ou encore si : $\mathrm{Im}\, f \subset B$.

ATTENTION !

En général, $\mathrm{Im}\, f$ est plus petit que F !

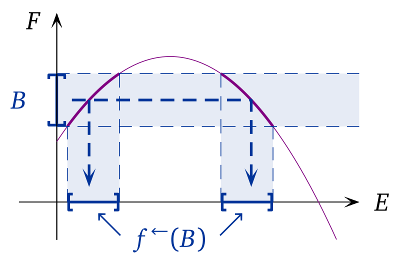




Définition (Image réciproque d'une partie) Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F. On appelle *image réciproque de B par f* l'ensemble : $\left\{ x \in E / \quad f(x) \in B \right\},$ que nous noterons **PROVISOIREMENT** $f^{\leftarrow}(B)$.

Explication Par définition, $f^{\leftarrow}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B. Géométriquement, pour déterminer $f^{\leftarrow}(B)$, on projette sur l'axe des abscisses la portion du graphe de f située dans le tube horizontal défini par B.

Pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{\leftarrow}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in B.$



En pratique Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, chercher l'image réciproque d'un singleton $\left\{y\right\}$ par f revient à résoudre l'équation : $\quad y = f(x) \quad$ d'inconnue x, alors que pour un intervalle $[a, b]$, cela revient à résoudre l'inéquation : $\quad a \leqslant f(x) \leqslant b$.

Exemple

- L'image réciproque de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$ tout entier. L'image réciproque de $[1, 2[$ est $[0, \ln 2[$ — inéquation : $\quad 1 \leqslant e^x < 2 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- L'image réciproque de $\left\{1\right\}$ par la fonction sinus est $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ — équation : $\quad \sin x = 1 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. L'image réciproque de $[2, 3]$ est vide — inéquation : $\quad 2 \leqslant \sin x \leqslant 3 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- L'image réciproque de $[4, +\infty[$ par la fonction carrée est $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ — inéquation : $\quad x^2 \geqslant 4 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Définition **(Ensemble d'applications)** L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathscr{F}(E,F)$.

✖ **Attention !** ✖ Ne confondez pas F^E et E^F !

Définition **(Famille)** Soit I un ensemble. On appelle *famille (d'éléments) de E indexée par I* toute application de I dans E. Les familles, au lieu d'être notée comme des applications, sont presque toujours notées sous la forme $(x_i)_{i\in I}$.

L'ensemble des familles de E indexée par I est naturellement noté E^I.

✌ **Explication** ✌ Une famille $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E n'est rien de plus que l'application f de $[\![1,n]\!]$ dans E définie par les relations : $f(1)=x_1, \quad \ldots, \quad f(n)=x_n,$ qui associe à chaque position l'élément qui lui correspond.

Exemple L'ensemble des suites réelles est l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, celui des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition **(Composition)** Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}\right.$ est appelée la *composée de f suivie de g* et notée $g\circ f$.

✖ **Attention !** ✖ Rappelons que la composition, en général, n'est possible que dans un seul sens, et quand elle est possible dans les deux, on n'a aucune raison d'avoir : $f\circ g = g\circ f$.

Définition **(Identité)** On appelle *identité de E* et on note Id_E l'application $x\longmapsto x$ de E dans E.

Théorème **(Propriétés de la composition)** Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications.

- **Associativité :** $h\circ\big(g\circ f\big) = \big(h\circ g\big)\circ f.$
- **Neutralité de l'identité :** $\mathrm{Id}_F\circ f = f\circ \mathrm{Id}_E = f.$

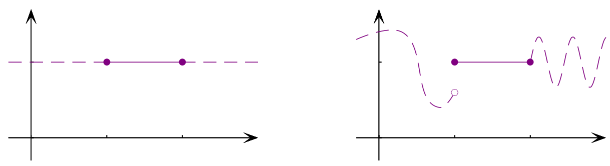
Démonstration Pour tout $x\in E$:
$$\Big(h\circ(g\circ f)\Big)(x) = h\Big((g\circ f)(x)\Big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = (h\circ g)\big(f(x)\big) = \Big((h\circ g)\circ f\Big)(x).$$ ■

Définition **(Restriction et prolongements)** Soit A une partie de E.

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle *restriction de f à A* l'application notée $f_{|A}$ de A dans F définie par :
$$\forall x\in A, \quad f_{|A}(x) = f(x).$$
- Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On appelle *prolongement de f à E* toute application g de E dans F telle que :
$$\forall x\in A, \quad f(x) = g(x).$$

✌ **Explication** ✌ Restreindre une application, c'est diminuer la taille de son ensemble de définition. Prolonger une application, c'est augmenter la taille de son ensemble de définition.

✖ **Attention !** ✖ Parce qu'il existe en général beaucoup de prolongements d'une application donnée, on parle d'UN prolongement et non « du » prolongement. Les figures ci-contre sont deux prolongements de la fonction constante égale à 1 définie sur $[1,2]$.



2 Injections, surjections, bijections

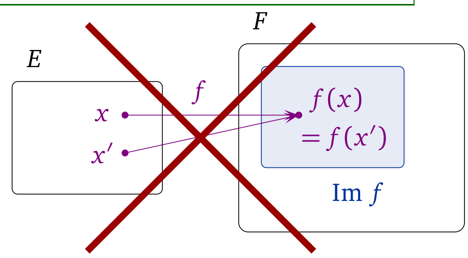
2.1 Injections

Définition (Injection) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *injective sur* E ou que c'est une *injection sur* E si :

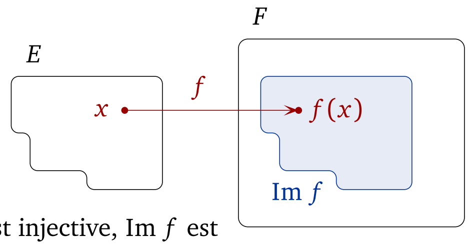
$$\forall x, x' \in E, \qquad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Explication Il apparaît d'entrée de jeu qu'une application injective est une application par laquelle on peut « SIMPLIFIER » — quand $f(x) = f(x')$, alors en fait $x = x'$.

On comprend bien également l'injectivité en contraposant sa définition. L'application f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents — pour tous $x, x' \in E$, si $x \neq x'$ alors : $\quad f(x) \neq f(x')$.



f N'EST PAS injective.



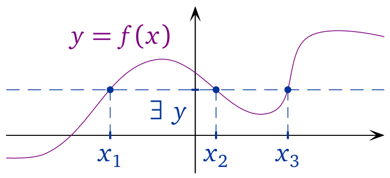
f est injective, Im f est comme une copie de E à l'intérieur de F.

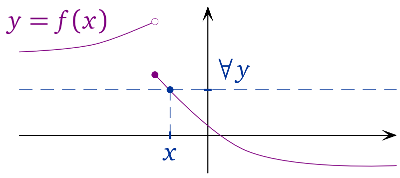
On peut aussi dire les choses ainsi : parce que f distingue à l'arrivée les éléments qui le sont au départ, l'image de f est comme une copie de E à l'intérieur de F.

Il est aussi commode de penser l'injectivité en termes d'antécédents. L'application f est injective lorsque tout élément de F possède AU PLUS UN ANTÉCÉDENT par f — soit 0, soit 1. Les éléments de F ne possédant aucun antécédent par f sont alors exactement les éléments de $F \setminus \operatorname{Im} f$.

Pour finir, on peut « voir » l'injectivité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sur son graphe car on y voit facilement si une même valeur sur l'axe des ordonnées est atteinte plusieurs fois ou non.

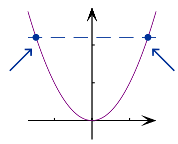
f N'EST PAS injective, CERTAINS y ont plusieurs antécédents.





f est injective, AUCUN y n'a plusieurs antécédents, certains même n'en ont pas.

Exemple La fonction carrée n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+$.



En effet

- Pas injective sur $\mathbb{R}$ car : $\quad (-1)^2 = 1^2 \quad$ par exemple.
- Injective sur $\mathbb{R}_+$ car pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+$, si $x^2 = x'^2$ alors : $\quad x = x' \quad$ ou $\quad x = -x'$, $\quad$ mais comme x et x' sont positifs, forcément : $\quad x = x'$.

Exemple La fonction $z \longmapsto \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$.

En effet Soient $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$. Si : $\quad \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{z'+\mathrm{i}}{z'-\mathrm{i}}, \quad$ alors : $\quad (z+\mathrm{i})(z'-\mathrm{i}) = (z'+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}), \quad$ donc aussitôt : $z = z' \quad$ après développement et simplification.

Théorème (Injectivité et composition) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont injectives, $g \circ f$ l'est aussi. (ii) Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.

✖ **Attention !** ✖ Dans l'assertion (ii), g n'a aucune raison d'être injective en revanche. Pensez par exemple aux fonctions $x \overset{f}{\longmapsto} e^x$ et $x \overset{g}{\longmapsto} x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

(i) Soient $x, x' \in E$. Supposant que : $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, nous voulons montrer que : $x = x'$. Or : $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ et g est injective, donc : $f(x) = f(x')$, mais f étant aussi injective : $x = x'$.

(ii) Soient $x, x' \in E$. Supposant que : $f(x) = f(x')$, nous voulons montrer que : $x = x'$. Or : $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ et $g \circ f$ est injective, donc en effet : $x = x'$. ■

Théorème (Injectivité et stricte monotonie) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

✖ **Attention !** ✖ La réciproque est fausse en général comme le montre le graphe de la fonction injective représentée un peu plus haut. Cette fonction est injective sans être monotone, mais du coup elle **n'est pas** continue. Nous verrons plus tard en effet qu'une fonction injective et continue sur un intervalle y est toujours strictement monotone.

Démonstration Supposons f strictement croissante. Soient $x, x' \in A$. On suppose que : $f(x) = f(x')$. Peut-on avoir $x < x'$? Non, car on aurait alors : $f(x) < f(x')$, alors que : $f(x) = f(x')$. Peut-on avoir $x' < x$? Non plus, car on aurait alors : $f(x') < f(x)$. Forcément : $x = x'$. ■

Exemple La fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$ car strictement monotone — de même sur $[\pi, 2\pi]$ ou $[-\pi, 0]$.

Face à une égalité du type « $\cos x = \cos y$ », rappelons qu'on ne peut pas affirmer en général que : $x = y$. On le peut en revanche si x et y se trouvent de fait dans un intervalle sur lequel cosinus est injective.

Exemple Pour tous $x, y \in \left]-1, 1\right[$: $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

En effet Nous avons déjà établi ce genre de résultat récemment, mais sans injectivité. Le concept éclaire aujourd'hui les choses d'une lumière un peu nouvelle. Soient $x, y \in \left]-1, 1\right[$. Alors $\operatorname{Arctan} x$ et $\operatorname{Arctan} y$ sont compris strictement entre $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$, donc : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ensuite :

$$\tan\big(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y\big) = \frac{\tan \operatorname{Arctan} x + \tan \operatorname{Arctan} y}{1 - \tan \operatorname{Arctan} x \ \tan \operatorname{Arctan} y} = \frac{x+y}{1-xy} = \tan \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Or la fonction tangente, strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, y est a fortiori injective, donc on peut « **simplifier** » par « tan » et enfin : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

2.2 Surjections

Définition (Surjection) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *surjective de E **sur** F* ou que c'est une *surjection de E **sur** F* si :

$$\forall y \in F, \quad \exists\, x \in E / \quad y = f(x). \qquad \text{Cela revient à dire que } \operatorname{Im} f = F.$$

✌ **Explication** ✌

f est injective sur E si et seulement si tout élément de F possède **au plus un antécédent** dans E par f.

f est surjective de E **sur** F si et seulement si tout élément de F possède **au moins un antécédent** dans E par f.

- Quand on dit qu'une application f est définie de E **DANS** F ou qu'elle est **À VALEURS DANS** F, cela signifie que F en est un ensemble d'arrivée, i.e. que les valeurs de f sont **DES** éléments de F. Cela ne signifie pas inversement que **TOUT** élément de F est une valeur atteinte par f. C'est d'ailleurs pour cela que nous avons introduit l'image $\mathrm{Im}\, f$ de f, i.e. précisément l'ensemble des valeurs de f.
  Pour la surjectivité, on ne dit pas que f est surjective de E « dans » F mais bien qu'elle est surjective de E **SUR** F, car alors f atteint tous les éléments de F et en ce sens E « **COUVRE** » F à travers f. Cette idée d'une « couverture » justifie l'emploi de la préposition « sur ».
- Très important également. Parce que tout élément de $\mathrm{Im}\, f$ possède un antécédent par f, par définition :

  Toute application est surjective de son ensemble de définition **SUR SON IMAGE**.

Exemple La fonction carrée n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en revanche elle l'est de $\mathbb{R}$ sur son **IMAGE** $\mathbb{R}_+$.

Théorème (Surjectivité et composition) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ l'est aussi. (ii) Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

✖ ATTENTION ! ✖ Dans l'assertion (ii), f n'a aucune raison d'être surjective en revanche. Pensez par exemple aux fonctions $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.

Démonstration

(i) Soit $y \in G$. Nous voulons montrer pour un certain $x \in E$: $y = g \circ f(x)$. Or g est surjective, donc : $y = g(t)$ pour un certain $t \in F$. Mais f est aussi surjective, donc : $t = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Finalement, comme voulu : $y = g(t) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$.

(ii) Soit $y \in G$. Nous voulons montrer que pour un certain $x \in F$: $y = g(x)$. Or $g \circ f$ est surjective, donc : $y = g \circ f(t)$ pour un certain $t \in E$. Il suffit dès lors de poser : $x = f(t)$. ■

2.3 BIJECTIONS

Le concept de bijection, introduit pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ au chapitre « Rappels et compléments sur les fonctions », est ici étendu aux applications définies sur et à valeurs dans des ensembles quelconques. Certaines preuves seront omises car elles sont exactement celles que nous avons déjà données.

Définition (Bijection) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est injective sur E et surjective de E sur F.
- $\forall y \in F, \quad \exists !\, x \in E / \quad y = f(x)$.

Si l'une de ces assertions est vraie, on dit que f est *bijective de* E **SUR** F ou que c'est une *bijection de* E **SUR** F.

✌ **Explication** ✌ f est bijective de E **SUR** F si et seulement si tout élément de F possède **UN ET UN SEUL ANTÉCÉDENT** dans E par f.

Définition (Réciproque) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle *réciproque de* f toute application $g : F \longrightarrow E$ pour laquelle : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

✌ **Explication** ✌ Les identités « $\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = x$ » et « $\forall y \in F, \quad f \circ g(y) = y$ » expriment l'idée que g défait le travail que f opère — et vice versa. Ce que l'une tricote, l'autre détricote.

Théorème (Bijectivité et réciproque) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

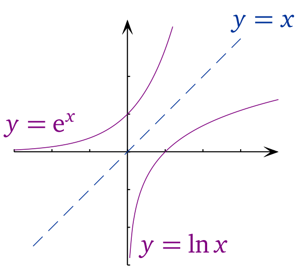
$$f \text{ est bijective de } E \text{ sur } F \text{ si et seulement si } f \text{ possède une réciproque.}$$

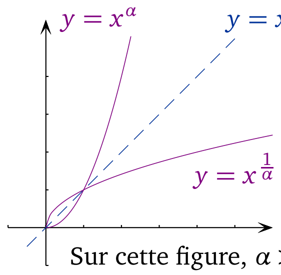
Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1}. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$:

$$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cette équivalence signifie géométriquement que le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Explication Les deux exemples suivants, bien connus, illustrent la symétrie des graphes d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de sa réciproque quand elle en a une.





Sur cette figure, $\alpha > 1$.

Exemple L'application Id_E est bijective de E sur E de réciproque elle-même.

En effet Tout simplement : $\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$.

Exemple Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto ax + b$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de réciproque $x \longmapsto \dfrac{x-b}{a}$.

En effet Il nous suffit de montrer que les fonction $x \overset{f}{\longmapsto} ax + b$ et $x \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{x-b}{a}$ sont réciproques l'une de l'autre. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = \dfrac{(ax+b)-b}{a} = x$ et $f \circ g(x) = a\,\dfrac{x-b}{a} + b = x$.

Exemple Soit $f : E \longrightarrow E$ une application pour laquelle : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ — on dit dans ce cas que f est une *involution de E*. Alors f est une bijection et : $f^{-1} = f$.

Théorème (Bijectivité, réciproque et composition) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f est bijective de E sur F, f^{-1} est bijective de F sur E et : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

(ii) Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ l'est aussi et : $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

✖ Attention ! ✖ Gare à l'ordre ! C'est bien : $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ et non pas : $\left(g \circ f\right)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Si vous cachez un trésor dans un coffre (f), puis ce coffre sous terre (g), et si ensuite vous voulez récupérer votre trésor (défaire $g \circ f$), vous devez d'abord déterrer le coffre (g^{-1}), puis l'ouvrir (f^{-1}) — au total : $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

(i) Si f est bijective, les égalités : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ — qui expriment la bijectivité de f — expriment pour la même raison la bijectivité de f^{-1} et cela montre bien que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

(ii) Si f et g sont bijectives : $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ \left(g \circ f\right) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $\left(g \circ f\right) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$, donc en effet $g \circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

En pratique Comment montrer concrètement qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective ? Le tableau suivant, essentiel, résume la marche à suivre.

Priorité	Ce qu'on fait	Ce qu'on obtient
1	Si on connaît spontanément une expression explicite de f^{-1}, on appelle g la fonction en question et on vérifie simplement que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.	Bijectivité + Réciproque
2	Si on ne connaît pas spontanément f^{-1}, on peut essayer d'en trouver une expression explicite via l'équivalence : $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.	Bijectivité + Réciproque
3	Si on ne se sent pas capable de trouver une expression explicite de f^{-1}, on montre en deux temps que f est à la fois injective et surjective.	Bijectivité

Exemple L'application $z \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ de réciproque $z \longmapsto \mathrm{i}\,\dfrac{z+1}{z-1}$.

En effet Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ et pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\zeta = f(z) \iff \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \zeta \iff z + \mathrm{i} = \zeta z - \mathrm{i}\zeta \iff \mathrm{i}(\zeta+1) = z(\zeta-1).$$

On peut alors exprimer z en fonction de ζ si et seulement si : $\zeta \neq 1$. Conclusion : 1 n'a pas d'antécédent par f et plus précisément $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Achevons maintenant nos calculs. Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$ et pour tout $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$: $\zeta = f(z) \iff z = \mathrm{i}\,\dfrac{\zeta+1}{\zeta-1}$.

Il en découle que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ de réciproque $\zeta \longmapsto \mathrm{i}\,\dfrac{\zeta+1}{\zeta-1}$.

Exemple L'application $(x,y) \overset{f}{\longmapsto} \left(2x+y, x^2+y\right)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ mais elle est bijective de $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur le demi-plan d'équation $y - x + 1 \geqslant 0$, de réciproque $(x,y) \longmapsto \left(1+\sqrt{y-x+1}\,,\ x-2-2\sqrt{y-x+1}\right)$.

En effet Pour tous $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a,b) = f(x,y) \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+y=a \\ x^2+y=b \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{l} 2x+y=a \\ x^2-2x=b-a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=a-2x \\ (x-1)^2=b-a+1. \end{array}\right.$$

Ces équivalences montrent que les couples (a,b) pour lesquels : $b-a+1<0$ n'ont pas d'antécédent par f, et même plus précisément que $\mathrm{Im}\, f$ est exactement $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 /\ b-a+1 \geqslant 0\right\}$, i.e. le demi-plan d'équation $y-x+1 \geqslant 0$.

Poursuivons. Sous l'hypothèse additionnelle que $b-a+1 \geqslant 0$:

$$(a,b) = f(x,y) \iff \left(x = 1+\sqrt{b-a+1} \quad \text{ou} \quad x = 1-\sqrt{b-a+1}\right) \quad \text{et} \quad y = a-2x.$$

Ce résultat prouve que f n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ puisque tout couple (a,b) pour lequel : $b-a+1>0$ possède exactement deux antécédents. Mais de ces deux antécédents (x,y), nous venons de voir que $x>1$ pour l'un et $x<1$ pour l'autre. Dès lors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $b-a+1 \geqslant 0$ et pour tout $(x,y) \in [1,+\infty[\times\mathbb{R}$:

$$(a,b) = f(x,y) \iff (x,y) = \left(1+\sqrt{b-a+1}\,,\ a-2-2\sqrt{b-a+1}\right).$$

Cette équivalence prouve enfin que f est bijective de $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur le demi-plan d'équation $y-x+1 \geqslant 0$, de réciproque $(x,y) \longmapsto \left(1+\sqrt{y-x+1}\,,\ x-2-2\sqrt{y-x+1}\right)$.

Théorème (Bijectivité et image réciproque) Soit f une bijection de E sur F et B une partie de F. Alors :

$$f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B),$$

où l'on rappelle que $f^{\leftarrow}(B)$ est l'image RÉCIPROQUE de B par f et $f^{-1}(B)$ l'image DIRECTE de B par f^{-1}.

Démonstration Pour tout $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \iff \exists\, b \in B/\quad x = f^{-1}(b) \iff \exists\, b \in B/\quad f(x) = b \iff f(x) \in B \iff x \in f^{\leftarrow}(B)$. ∎

✖ **Attention !** ✖ Le théorème précédent justifie qu'on note désormais **TOUJOURS** $f^{-1}(B)$ plutôt que $f^{\leftarrow}(B)$. La notation $f^{\leftarrow}(B)$ n'existe pas en fait, nous l'avons juste introduite pour ne pas nous emmêler les pinceaux dans un premier temps.

- Dans le cas où f est bijective, nous venons de voir que l'image réciproque de B par f est exactement l'image directe de B par f^{-1}. La confusion des notations $f^{-1}(B)$ et $f^{\leftarrow}(B)$ n'est donc pas gênante dans ce cas.
- Et dans le cas où f n'est pas bijective ? Dans ce cas, de toute façon, **IL N'Y A PAS** de réciproque f^{-1}, donc pas d'image directe de B par f^{-1}. La notation $f^{-1}(B)$ ne pose donc pas de problème dans ce cas non plus.

En guise de conclusion : La notation $f^{-1}(B)$ **NE** requiert **PAS** la bijectivité de f !

Explication Revenons un instant pour finir sur notre fameux TVI strictement monotone. Les notions de ce chapitre nous permettent aujourd'hui de mieux comprendre son économie intérieure.

f est continue sur $[a, b]$. → $f\big([a, b]\big)$ n'a pas de trou, c'est un intervalle.

f est strictement croissante sur $[a, b]$. → $f\big([a, b]\big) = \big[f(a), f(b)\big]$.

f est injective sur $[a, b]$.

f est bijective de $[a, b]$ sur son **IMAGE** $f\big([a, b]\big)$. → f est bijective de $[a, b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$.

3 Équipotence

Le contenu de ce paragraphe est tout à fait hors programme et ne vous est présenté qu'à titre culturel.

Définition (Équipotence) On dit que F est *équipotent à* E s'il existe une bijection de E sur F.

Explication

- Pourquoi ce mot « équipotent » et pour quoi faire ? Issu du latin, « équipotent » veut dire « même puissance ». En quel sens ? L'existence d'une bijection de E sur F nous garantit qu'on peut faire se correspondre parfaitement les éléments de E et les éléments de F, associer à tout élément de E un et un seul élément de F et vice versa. Dire que F est équipotent à E revient ainsi à dire que F a exactement le même nombre d'éléments que E.
- Intuitivement, de même, l'existence d'une injection de E dans F signifie qu'il y a moins d'éléments dans E que dans F — éventuellement autant — puisqu'on peut dans ce cas trouver dans F une copie de E qui n'est pas forcément F tout entier. Quant à l'existence d'une surjection de E sur F, elle indique au contraire que c'est E qui a plus d'éléments que F — éventuellement autant — puisqu'on peut associer à tout élément de F au moins un antécédent, peut-être plusieurs, ce qui fait qu'en un sens E couvre F à travers f.

Théorème (Propriétés de la relation d'équipotence)

- **Symétrie :** Si F est équipotent à E, alors E est équipotent à F. On peut donc dire sans ambiguïté que E et F sont *équipotents*.
- **Transitivité :** Si F est équipotent à E et si G est équipotent à F, alors G est équipotent à E.

Démonstration La symétrie repose sur le fait que la réciproque d'une bijection est une bijection — la transitivité sur le fait que la composée de deux bijections est une bijection. ∎

Le théorème suivant, hors programme mais très important en mathématiques, n'est énoncé qu'à titre culturel.

Théorème (Théorème de Cantor-Bernstein) S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors E et F sont équipotents.

Explication Bref, si E a moins d'éléments que F et F moins d'éléments que E, alors E et F en ont autant !

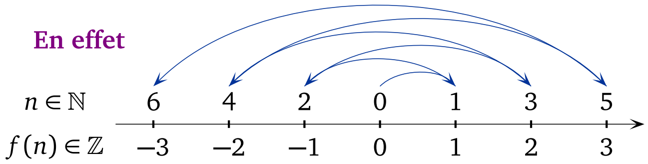
On donne ci-dessous des exemples d'équipotence dont certains sont vraiment surprenants au premier abord. Nous allons notamment voir que deux ensembles peuvent être équipotents alors que l'un d'entre eux est inclus STRICTEMENT dans l'autre.

Exemple $\mathbb{R}$ et $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sont équipotents alors qu'ils n'ont pas la même longueur. Bref, longueur et nombre de points n'ont aucun rapport. Plus généralement, tout intervalle qui n'est ni l'ensemble vide ni un singleton est équipotent à $\mathbb{R}$.

En effet Tout simplement, la fonction tangente est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents.

En effet



Il n'est pas trop difficile de montrer que l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ représentée ci-contre est bijective. Il suffit d'en trouver une expression explicite, de trouver une expression explicite de ce qu'on pense être sa réciproque $\widetilde{f}$, puis de vérifier que : $\widetilde{f} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Exemple $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents.

En effet Nous allons montrer que l'application $(p,q) \overset{g}{\longmapsto} 2^p(2q+1)$ est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$. On pourrait le faire en utilisant la décomposition des entiers en produit de facteurs premiers, mais comme nous n'avons pas encore établi ce résultat, nous allons procéder autrement. Quitte à composer ensuite par la bijection $n \longmapsto n-1$ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}$, on aura bien obtenu une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

- Pour l'injectivité, soient $(p,q),(p',q') \in \mathbb{N}^2$ tels que : $g(p,q) = g(p',q')$. Quitte à permuter (p,q) et (p',q'), on peut supposer : $p \leqslant p'$ sans perte de généralité. Alors : $2^{p'-p}(2q'+1) = 2q+1$ — égalité dans laquelle $2^{p'-p}$, $2q+1$ et $2q'+1$ sont des entiers. Comme $2q+1$ est impair, forcément : $p = p'$. Mais du coup : $2q+1 = 2q'+1$ donc : $q = q'$, et enfin : $(p,q) = (p',q')$.
- Pour la surjectivité, récurrence FORTE, nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier de $[\![1,n]\!]$ possède un antécédent par g.

  Initialisation : 1 possède un antécédent par g puisque : $g(0,0) = 1$.

  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que tout élément de $[\![1,n]\!]$ possède un antécédent par g. Qu'en est-il de $n+1$?

  Si n est pair, disons : $n = 2q$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$, alors : $n+1 = 2q+1 = 2^0(2q+1) = g(0,q)$, donc $n+1$ possède un antécédent par g.

  Supposons à présent n impair. Alors $n+1$ est pair, disons : $n+1 = 2m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On peut même en fait affirmer que $m \in [\![1,n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, m possède donc un antédécent par g, disons (p,q). Finalement : $n+1 = 2m = 2g(p,q) = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1) = g(p+1,q)$, donc $n+1$ possède un antécédent par g.

Pour que vous saisissiez bien l'incroyable portée des deux exemples qui suivent, rappelons que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et qu'à ce titre, entre deux rationnels distincts il y a toujours un irrationnel, et entre deux irrationnels distincts il y a toujours un rationnel. Intuitivement, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont donc comme deux peignes en vis-à-vis dont les dents s'alternent et se croisent, entre deux dents « rationnelles » se trouve une dent « irrationnelle » et vice versa.

Exemple $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents. On peut donc numéroter les rationnels, il y a un rationnel n°0, un rationnel n°1, un rationnel n°2, etc.

En effet Contentons-nous d'un « sketch of the proof » comme disent les anglo-saxons — un aperçu de la preuve. Nous conservons dans cet exemple les notations f et g des deux exemples précédents.

- L'application $n \longmapsto n$ est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. En vertu du théorème de Cantor-Bernstein, il nous suffit dès lors d'exhiber une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ pour montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

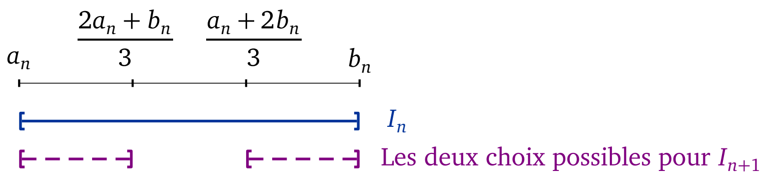
- Rappelons qu'une fraction $r = \frac{p}{q}$ est irréductible lorsqu'aucune simplification n'est plus envisageable entre son numérateur et son dénominateur — sauf ± 1, bien sûr. Avec ces notations, l'application qui, à $r \in \mathbb{Q}$, associe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est bien définie et injective. Nous disposons donc d'une injection h de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
- L'application $n \longmapsto n-1$ est très clairement une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}$ — de réciproque $n \longmapsto n+1$. Comme par ailleurs f est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$, l'application produit $(m,n) \longmapsto \big(f^{-1}(m), n-1\big)$ est une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^2$ sur nous noterons i.
- L'application $h \circ i \circ g$ est finalement injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ par composition : $\mathbb{Q} \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \xrightarrow{i} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{N}$.

Exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ **NE** sont **PAS** équipotents. Il y a donc infiniment plus d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{Q}$, donc a fortiori infiniment plus d'irrationnels que de rationnels. Le peigne des rationnels et le peigne des irrationnels ont donc à la fois des dents parfaitement alternées (au sens de la remarque faite un peu plus haut) **ET** pas le même nombre de dents !

En effet Parce que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents, montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne le sont pas revient à montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ ne le sont pas non plus. Et pour montrer qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, nous allons en fait prouver qu'aucune application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ne peut être surjective, ce sera suffisant.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque. Nous allons montrer que φ n'est pas surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.

- L'un au moins des intervalles $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ **NE** contient **PAS** $\varphi(0)$, nous le notons I_0 — si les deux intervalles conviennent, on choisit celui de gauche par exemple. Par construction : $\varphi(0) \notin I_0$. Notons a_0 et b_0 les bornes de I_0, de sorte que $I_0 = [a_0, b_0]$. L'intervalle I_0 a pour longueur $\frac{1}{3}$.
- Ensuite on répète. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fois les intervalles $I_0, I_1, \ldots, I_n$ construits, on construit l'intervalle I_{n+1} de la façon suivante. L'un au moins des intervalles $\left[a_n, \frac{2a_n + b_n}{3}\right]$ et $\left[\frac{a_n + 2b_n}{3}, b_n\right]$ **NE** contient **PAS** $\varphi(n+1)$, nous le notons I_{n+1} — si les deux intervalles conviennent, on choisit celui de gauche par exemple. Par construction : $\varphi(n+1) \notin I_{n+1}$. Notons a_{n+1} et b_{n+1} les bornes de I_{n+1}, de sorte que : $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. L'intervalle I_{n+1} a pour longueur $\frac{1}{3^{n+1}}$ — la longueur est divisée par 3 à chaque étape.



- Nous avons finalement construit une suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont emboîtés les uns dans les autres : $\ldots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0$ et dont la longueur est toujours divisée par 3 d'un rang au suivant. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc les propriétés suivantes :
$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad b_n - a_n = \frac{1}{3^{n+1}}.$$
Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et : $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$. Ces suites sont donc adjacentes, donc convergentes de même limite ℓ en vertu du théorème des suites adjacentes.
- Par construction : $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec : $\varphi(n) \notin I_n = [a_n, b_n]$, donc forcément : $\ell \neq \varphi(n)$. Conclusion : φ ne prend pas la valeur ℓ, donc n'est pas surjective !

Exemple On peut montrer que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}/\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont équipotents. Il y a donc autant de points sur une droite ou sur un plan que dans notre espace à trois dimensions.

Nous terminerons ce chapitre en beauté par un petit résultat tout bête, mais d'une portée épistémologique et historique considérable.

Théorème (Théorème de Cantor) Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Démonstration Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ une application. On pose : $A = \big\{x \in E/ \quad x \notin \varphi(x)\big\}$. Comme $A \in \mathscr{P}(E)$, on peut se demander si A possède ou non un antécédent par φ. Pour tout $x \in E$:

— si $x \in A$, alors : $x \notin \varphi(x)$ donc : $\varphi(x) \neq A$,

— si $x \notin A$, alors : $x \in \varphi(x)$ donc : $\varphi(x) \neq A$.

Dans les deux cas : $A \neq \varphi(x)$, et ce pour tout x, donc en effet A n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective de E sur $\mathscr{P}(E)$. ■

✌ Explication ✌

- Dans la mesure où l'application $x \longmapsto \{x\}$ est injective de E dans $\mathscr{P}(E)$, le théorème de Cantor montre au fond que E est toujours strictement plus petit que $\mathscr{P}(E)$ en termes d'équipotence. Il en découle un procédé de construction simple d'infinis de tailles différentes toujours plus grandes : $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big)$, $\mathscr{P}\Big(\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big)\Big)\ldots$ Il n'est pas trop dur de montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.
- À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Cantor se demande s'il existe ou non entre $\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ un infini de taille intermédiaire mais n'obtient aucun résultat ni dans un sens ni dans l'autre. L'énoncé selon lequel il **N'**y a **PAS** de tel infini intermédiaire s'appelle depuis l'*hypothèse du continu*.
- En 1938, Gödel montre que l'hypothèse du continu ne réfute pas le cadre traditionnel des mathématiques qu'on appelle *ZFC*. Ce résultat est compliqué à comprendre, Gödel n'a pas montré que l'hypothèse du continu est vraie, mais que si on l'ajoute aux axiomes usuels, la théorie obtenue n'est ni plus ni moins contradictoire que la théorie usuelle ZFC.
- En 1963, Cohen montre que l'hypothèse du continu n'est pas démontrable dans la théorie usuelle ZFC. L'hypothèse du continu est donc un de ces énoncés qu'on dit *indécidables*, impossible à prouver, impossible à réfuter.