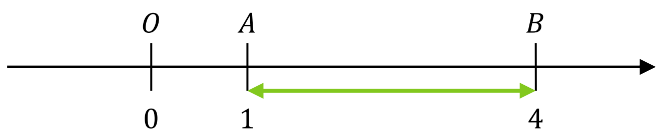
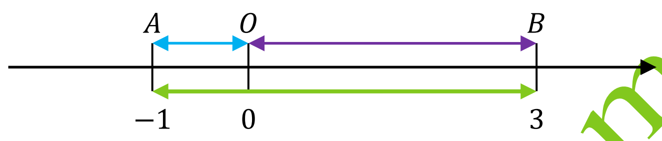
Valeur absolue et fonction valeur absolue

Cours

1) EXEMPLES PRÉLIMINAIRES



La distance entre les nombres 1 et 4 est la longueur du segment $[AB]$, c'est-à-dire la distance entre le point A d'abscisse 1 et le point B d'abscisse 4. Pour aller de A à B (c'est-à-dire de 1 à 4), on parcourt ainsi une distance de 3 unités. Cette distance AB est notée $d(1\,;4)$ et on a : $AB = d(1\,;4) = 3$.



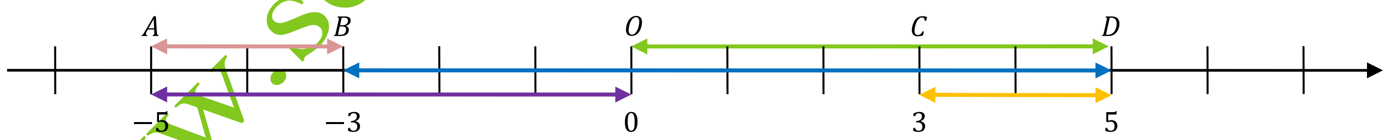
La distance entre les nombres -1 et 3 est la longueur du segment $[AB]$, c'est-à-dire 4. En effet, pour aller de A à B (c'est-à-dire de -1 à 3), on parcourt une distance de 4 unités : tout d'abord une distance de 1 unité (c'est-à-dire de -1 à 0) et une distance de 3 unités (c'est-à-dire de 0 à 3). Cette distance AB est notée $d(-1\,;3)$ et on a : $AB = d(-1\,;3) = 4$.

Remarque : La terminologie « distance entre deux réels x et y » est un abus de langage ; il faudrait en effet parler de « distance entre les points d'abscisses respectives x et y ».

2) DÉFINITION

La **DISTANCE** entre deux réels x et y est la distance entre les points de la droite numérique, d'abscisses respectives x et y. On note cette distance $d(x\,;y)$.

Exemples : Soient les points $A(-5)$, $B(-3)$, $O(0)$, $C(3)$ et $D(5)$ de la droite numérique (aussi appelée droite des réels).



- $d(0\,;5) = OD = x_D - x_O = 5 - 0 = 5$
- $d(-5\,;0) = AO = x_O - x_A = 0 - (-5) = 0 + 5 = 5$
- $d(3\,;5) = CD = x_D - x_C = 5 - 3 = 2$
- $d(-3\,;5) = BD = x_D - x_B = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$
- $d(-5\,;-3) = AB = x_B - x_A = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2$
- $d(5\,;0) = DO = x_D - x_O = 5 - 0 = 5$
- $d(0\,;-5) = OA = x_O - x_A = 0 - (-5) = 0 + 5 = 5$
- $d(5\,;3) = DC = x_D - x_C = 5 - 3 = 2$
- $d(5\,;-3) = DB = x_D - x_B = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$
- $d(-3\,;-5) = BA = x_B - x_A = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2$

Remarque : La **distance** entre 2 réels x et y est parfois également appelée **écart** entre les réels x et y.

3) PROPRIÉTÉS

Les exemples ci-dessus permettent d'énoncer quelques propriétés, que nous veillerons cependant à démontrer…

Propriété 1 : Pour tous réels x et y :

$$d(x\,;y) = d(y\,;x)$$

Autrement dit, la notion de distance est symétrique.

Démonstration : Soient deux réels x et y. Soient les points A d'abscisse x et B d'abscisse y de la droite numérique. La distance entre x et y est notée $d(x\,;y)$ et la distance entre y et x est notée $d(y\,;x)$. Or, $d(x\,;y) = AB$ et $d(y\,;x) = BA$. Comme $AB = BA$, il en résulte l'égalité suivante : $d(x\,;y) = d(y\,;x)$.

Propriété 2 : Pour tous réels x et y :

$$d(x\,;y) \geq 0$$

Autrement dit, une distance entre deux réels est toujours positive ou nulle.

Démonstration : Par définition, la distance entre deux réels x et y, notée $d(x\,;y)$, est la distance entre les points de la droite numérique, d'abscisses respectives x et y. Par conséquent, une distance entre deux points étant toujours positive ou nulle, $d(x\,;y) \geq 0$.

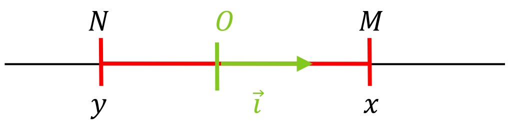
Propriété 3 : Pour tous réels x et y :

$$d(x\,;y) = \begin{cases} y - x & si\ x \leq y \\ x - y & si\ x \geq y \end{cases}$$

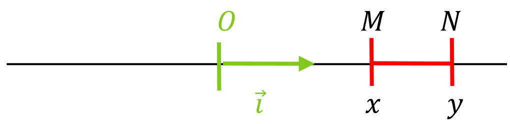
Autrement dit, $d(x\,;y) = \max(y - x\,;x - y)$.

Démonstration : Soient les points M et N d'abscisses respectives x et y.

- Si $x \geq y$, $MN = d(x\,;y) = x - y$



- Si $x \leq y$, $MN = d(x\,;y) = y - x$



En effet, la distance entre deux points d'abscisses différentes correspond à la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite de ces points.

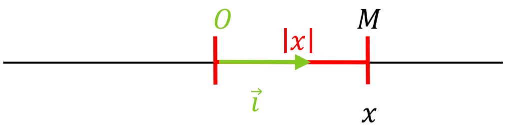
1) DÉFINITION

Sur la droite numérique munie du repère $(O\,;\vec{\imath})$, pour tout réel x, il existe un unique point M d'abscisse x.

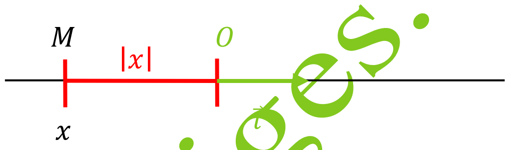
La **VALEUR ABSOLUE** du nombre x, notée $|x|$, est la distance OM, c'est-à-dire la distance entre 0 et x.

Par définition, on a donc $|x| = OM = d(0\,;x)$.

- **1er cas : si $x \geq 0$**



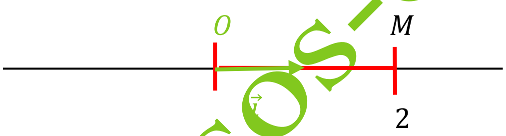
- **2ème cas : si $x \leq 0$**



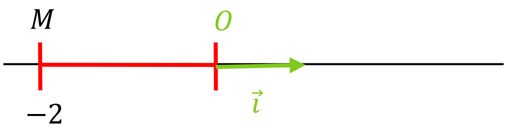
Remarque importante (surtout destinée aux élèves de Terminale) : Il n'existe pas de valeur absolue dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, bien que $\mathbb{C}$ contienne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Il ne faut donc pas confondre le module d'un nombre complexe z, noté $|z|$, et la valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$. En effet, si $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ (x et y réels), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le module de z ne coïncide alors avec la valeur absolue d'un réel que lorsque $y = 0$, c'est-à-dire que lorsque z est un réel pur.

Exemples : Dans chacun des cas ci-après, on a placé le point M sur la droite numérique munie du repère $(O\,;\vec{\imath})$.

- $|2| = d(0\,;2) = OM = x_M - x_O$
  $= 2 - 0 = 2$



- $|-2| = d(0\,;-2) = OM = x_O - x_M$
  $= 0 - (-2) = 2$



2) PROPRIÉTÉS

Propriété 1 : Pour tout nombre réel x,

$$|x| \geq 0$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle.

Démonstration : Pour tout x réel, $|x| = d(0\,;x)$. Or, par définition, une distance entre deux réels est positive ou nulle donc $|x| \geq 0$.

Propriété 2 :

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Autrement dit, un nombre dont la valeur absolue est nulle est nul, et réciproquement.

Démonstration : $|x| = 0 \Leftrightarrow d(0\,;x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x = 0 & si\ x \leq 0 \\ x - 0 = 0 & si\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & si\ x \leq 0 \\ x = 0 & si\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Exemple : $|5x - 2| = 0 \Leftrightarrow 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x = 2 \Leftrightarrow x = 2/5$

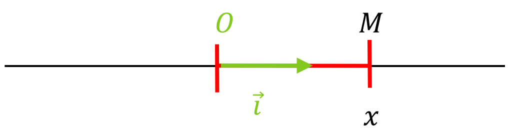
Propriété 3 :

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

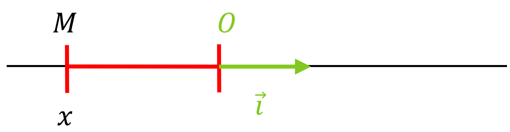
Autrement dit, $|x| = \max(-x\,;x)$.

Démonstration :

- Si $x \geq 0$, $OM = |x| = x - 0 = x$



- Si $x \leq 0$, $OM = |x| = 0 - x = -x$



Exemples :

- $|2| = 2$ car 2 est positif
- $|-2| = -(-2) = 2$ car -2 est négatif
- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ car $\sqrt{2} - 1 > 0$
- $|1 - \sqrt{2}| = \underbrace{-(1 - \sqrt{2})}_{car\ 1 - \sqrt{2} < 0} = -1 + \sqrt{2}$

  $= \sqrt{2} - 1$

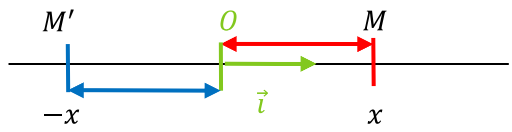
Remarque : On peut également noter que $|x| = x \times \mathrm{sgn}(x)$ où sgn désigne la **fonction signe** définie par $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Propriété 4 : Pour tout nombre réel x,

$$|-x| = |x|$$

Autrement dit, un réel et son opposé ont même valeur absolue.

Démonstration : Soient les points M et M', d'abscisses respectives x et $-x$, sur une droite munie du repère $(O\,;\vec{\imath})$. M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O du repère donc $OM' = OM$. C'est-à-dire $|-x| = |x|$.



Exemples :

- $|2| = 2$
- $|-2| = |2| = 2$
- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$
- $|1 - \sqrt{2}| = |-(-1 + \sqrt{2})| = |-1 + \sqrt{2}|$
  $= -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

Propriété 5 : Pour tout nombre réel x,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Autrement dit, la racine carrée du carré d'un réel n'est pas égale à ce réel mais à sa valeur absolue.

Démonstration : Trois cas se présentent, selon les valeurs de x.

- 1$^{\text{er}}$ cas : $x < 0$

D'une part, $x < 0$ donc $-x > 0$ (d'après la décroissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -x$). On sait que x^2 est à la fois le carré de x et de $-x$. Or, par définition, la racine carrée d'un nombre est le réel positif dont ce nombre est le carré, donc le réel $-x$ est la racine carrée du nombre x^2. C'est-à-dire $\sqrt{x^2} = -x$.

D'autre part, $x < 0$, donc $|x| = -x$.

Par conséquent, on a bien l'égalité $\sqrt{x^2} = |x|$.

- 2$^{\text{ème}}$ cas : $x = 0$

D'une part, $x = 0$ donc, par continuité de la composée des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0, $\sqrt{x^2} = 0$.

D'autre part, $x = 0$, donc $|x| = 0$.

Par conséquent, on a bien l'égalité $\sqrt{x^2} = |x|$.

- 3$^{\text{ème}}$ cas : $x > 0$

D'une part, $x > 0$. La racine carrée d'un nombre étant le réel positif dont ce nombre est le carré, le réel x est la racine carrée du nombre x^2. C'est-à-dire $\sqrt{x^2} = x$.

D'autre part, $x > 0$, donc $|x| = x$.

Par conséquent, on a bien l'égalité $\sqrt{x^2} = |x|$.

- Conclusion : Chacun des cas vérifie bien l'égalité $\sqrt{x^2} = |x|$.

Remarque importante : Ne pas confondre $\sqrt{x^2}$ (qui existe pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\sqrt{x}^2$ (qui n'existe que si $x \in \mathbb{R}^+$).

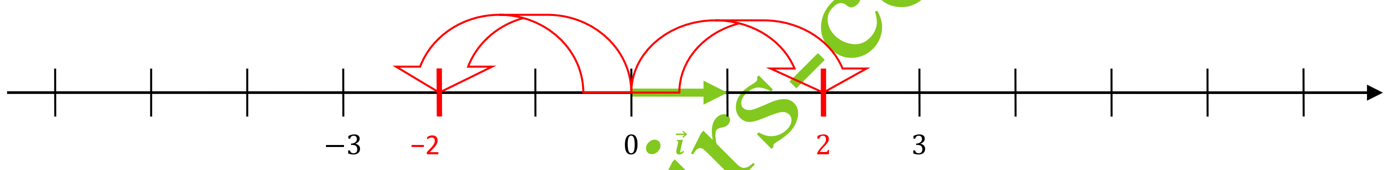
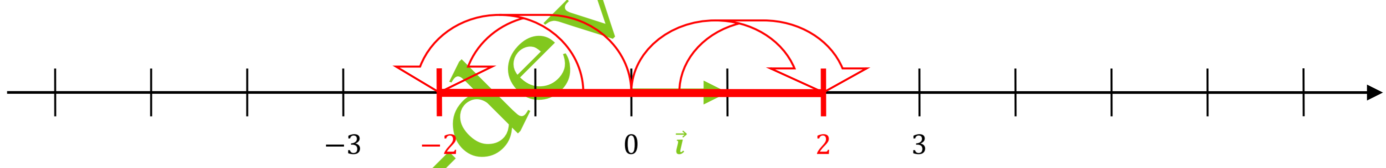
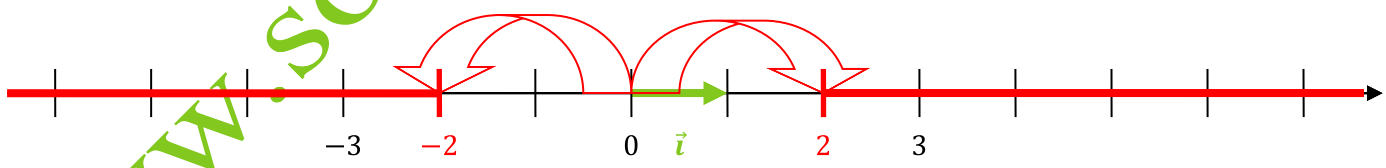
1) RELATION ENTRE DISTANCE ET VALEUR ABSOLUE

Pour tous réels x et y,

$$|x - y| = d(x\,;y)$$

- Si $x \leq y$, alors $|x - y| = d(x\,;y) = y - x$
- Si $x \geq y$, alors $|x - y| = d(x\,;y) = x - y$

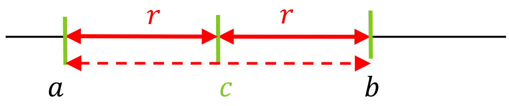
2) EXPRESSIONS EQUIVALENTES

<table>
<tr><th>Valeur absolue</th><th>Distance</th><th>Egalité ou inégalité</th><th>Encadrement</th><th>Intervalle / Réunion d'intervalles</th></tr>
<tr><td>$|x| = 2$</td><td>$d(0\,;x) = 2$</td><td>$x = 2$ ou $x = -2$</td><td></td><td>$x \in \{-2\,;2\}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>$|x| \leq 2$</td><td>$d(0\,;x) \leq 2$</td><td>$x \leq 2$ et $x \geq -2$</td><td>$-2 \leq x \leq 2$</td><td>$x \in [-2\,;2]$</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>$|x| \geq 2$</td><td>$d(0\,;x) \geq 2$</td><td>$x \geq 2$ ou $x \leq -2$</td><td></td><td>$x \in]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
</table>

3) CENTRE ET RAYON D'UN INTERVALLE

Soit un **intervalle** $[a\,;b]$ tel que $a \leq b$, soit c son **CENTRE** et soit r son **RAYON**. Alors :

$$c = \frac{a+b}{2}$$



$$r = \frac{b-a}{2}$$

CHAPITRE 4 : Valeurs absolues et opérations

1) ADDITION, SOUSTRACTION ET INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Pour tous nombres réels x et y,

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Autrement, dit, la valeur absolue d'une somme de termes est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues des termes.

Remarque importante : Cette propriété est appelée **INÉGALITÉ TRIANGULAIRE**.

Démonstration 1 : Raisonnons par disjonction des cas (selon les signes respectifs des réels x et y) et consignons ces différents cas dans un tableau.

<table>
<tr><th></th><th>$x > 0$</th><th>$x < 0$</th><th>$x = 0$</th></tr>
<tr><td>$y > 0$</td><td>D'une part,
$x + y$ est la somme de deux termes positifs
donc $x + y$ est positif
D'où :
$|x + y| = x + y$
D'autre part,
x est positif donc $|x| = x$
et
y est positif donc $|y| = y$
D'où :
$|x| + |y| = x + y$
Par conséquent,
$|x + y| = |x| + |y|$</td><td>$x < 0$ donc $|x| = -x$
et
$y > 0$ donc $|y| = y$

$x + y$ est la somme d'un terme négatif et d'un terme positif
Donc 3 cas sont à envisager :
• Si $x + y > 0$, alors
$|x + y| = x + y = -(-x) + y$
$= -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$
• Si $x + y < 0$, alors
$|x + y| = -(x + y) = -x - y$
$= |x| - |y| \leq |x| \leq |x| + |y|$
• Si $x + y = 0$, alors
$|x + y| = |0| \leq |x| + |y|$
Par conséquent, l'inégalité
$|x + y| \leq |x| + |y|$ est vraie</td><td>D'une part,
$x + y$ est la somme d'un terme nul et d'un terme positif
donc $x + y$ est positif
D'où :
$|x + y| = x + y = 0 + y = y$
D'autre part,
x est nul donc $|x| = 0$
et
y est positif donc $|y| = y$
D'où :
$|x| + |y| = 0 + y = y$
Par conséquent,
$|x + y| = |x| + |y|$</td></tr>
<tr><td>$y < 0$</td><td>$x > 0$ donc $|x| = x$
et
$y < 0$ donc $|y| = -y$

$x + y$ est la somme d'un terme positif et d'un terme négatif
Donc 3 cas sont à envisager :
• Si $x + y > 0$, alors
$|x + y| = x + y = x - (-y)$
$= |x| - |y| \leq |x| \leq |x| + |y|$
• Si $x + y < 0$, alors
$|x + y| = -(x + y) = -x - y$
$= -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$
• Si $x + y = 0$, alors
$|x + y| = |0| \leq |x| + |y|$</td><td>D'une part,
$x + y$ est la somme de deux termes négatifs
donc $x + y$ est négatif
D'où :
$|x + y| = -(x + y) = -x - y$
D'autre part,
x est négatif donc $|x| = -x$
et
y est négatif donc $|y| = -y$
D'où :
$|x| + |y| = -x + (-y)$
$= -x - y$
Par conséquent,
$|x + y| = |x| + |y|$</td><td>D'une part,
$x + y$ est la somme d'un terme nul et d'un terme négatif
donc $x + y$ est négatif
D'où :
$|x + y| = -(x + y) = -x - y$
$= 0 - y = -y$
D'autre part,
x est nul donc $|x| = 0$
et
y est négatif donc $|y| = -y$
D'où :
$|x| + |y| = 0 + (-y) = -y$
Par conséquent,
$|x + y| = |x| + |y|$</td></tr>
</table>

	<u>Par conséquent</u>, l'inégalité $\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ est vraie		
$y=0$	<u>D'une part,</u> $x+y$ est la somme d'un terme positif et d'un terme nul donc $x+y$ est positif D'où : $\lvert x+y\rvert = x+y = x+0 = x$ <u>D'autre part,</u> x est positif donc $\lvert x\rvert = x$ et y est nul donc $\lvert y\rvert = 0$ D'où : $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = x+0 = x$ <u>Par conséquent</u>, $\lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	<u>D'une part,</u> $x+y$ est la somme d'un terme négatif et d'un terme nul donc $x+y$ est négatif D'où : $\lvert x+y\rvert = -(x+y) = -x-y$ $= -x-0 = -x$ <u>D'autre part,</u> x est négatif donc $\lvert x\rvert = -x$ et y est nul donc $\lvert y\rvert = 0$ D'où : $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = -x+0 = -x$ <u>Par conséquent</u>, $\lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	<u>D'une part,</u> $x+y$ est la somme de deux termes nuls donc $x+y$ est nul D'où : $\lvert x+y\rvert = \lvert 0\rvert = 0$ <u>D'autre part,</u> x est nul donc $\lvert x\rvert = 0$ et y est nul donc $\lvert y\rvert = 0$ D'où : $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 0+0 = 0$ <u>Par conséquent</u>, $\lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$

<u>Conclusion :</u> Il résulte dans tous les cas que, quels que soient les réels x et y, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Remarque : D'après le tableau ci-dessus, $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x$ et y sont de même signe (ou nuls).

Démonstration 2 (plus rapide et moins fastidieuse !) : Comparons $(|x|+|y|)^2$ et $|x+y|^2$ pour tous réels x et y pour aboutir à une comparaison de $|x|+|y|$ et $|x+y|$.

Quels que soient les réels x et y,

- $(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2 \times |x| \times |y| + |y|^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2$

  Remarque : On fait ici appel à un résultat démontré ultérieurement : $|x \times y| = |x| \times |y|$

- $|x+y|^2 = \begin{cases} (x+y)^2 & si\ x+y \geq 0 \\ (-(x+y))^2 & si\ x+y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+y)^2 & si\ x+y \geq 0 \\ (-1)^2(x+y)^2 & si\ x+y \leq 0 \end{cases} = x^2 + 2xy + y^2$

Or, pour tous réels x et y, $xy \leq |xy|$ d'où $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$. Comme, par ailleurs, $x^2 = |x|^2$ et $y^2 = |y|^2$, il s'ensuit que $x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2$, c'est-à-dire $0 \leq |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$.

Enfin, la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Pour tous nombres réels x et y,

$$|x-y| \leq |x| + |y|$$

Autrement, dit, la valeur absolue d'une différence de deux termes est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de chaque terme.

Démonstration : Il suffit de remplacer y par $-y$ dans l'inégalité triangulaire. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, pour tous réels x et y, $|x-y| \leq |x| + |-y|$. Or, $|-y| = |y|$ donc $|x-y| \leq |x| + |y|$.

2) MULTIPLICATION ET DIVISION

Pour tous nombres réels x et y,

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un produit de facteurs est égale au produit des valeurs absolues de chaque facteur.

Démonstration : Raisonnons par disjonction des cas (selon les signes respectifs des réels x et y) et consignons ces différents cas dans un tableau.

	$x > 0$	$x < 0$	$x = 0$
$y > 0$	D'une part, xy est le produit de deux facteurs positifs donc xy est positif D'où : $\|x \times y\| = xy$ D'autre part, x est positif donc $\|x\| = x$ et y est positif donc $\|y\| = y$ D'où : $\|x\| \times \|y\| = x \times y = xy$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie	D'une part, xy est le produit d'un facteur négatif par un facteur positif donc xy est négatif D'où : $\|x \times y\| = -xy$ D'autre part, x est négatif donc $\|x\| = -x$ et y est positif donc $\|y\| = y$ D'où : $\|x\| \times \|y\| = -x \times y = -xy$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie	D'une part, xy est le produit d'un facteur nul par un facteur positif donc xy est nul D'où : $\|x \times y\| = 0$ D'autre part, x est nul donc $\|x\| = 0$ et y est positif donc $\|y\| = y$ D'où : $\|x\| \times \|y\| = 0 \times y = 0$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie
$y < 0$	D'une part, xy est le produit d'un facteur positif par un facteur négatif donc xy est négatif D'où : $\|x \times y\| = -xy$ D'autre part, x est positif donc $\|x\| = x$ et y est négatif donc $\|y\| = -y$ D'où : $\|x\| \times \|y\| = x \times (-y) = -xy$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie	D'une part, xy est le produit de deux facteurs négatifs donc xy est positif D'où : $\|x \times y\| = xy$ D'autre part, x est négatif donc $\|x\| = -x$ et y est négatif donc $\|y\| = -y$ D'où : $\|x\| \times \|y\| = -x \times (-y) = xy$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie	D'une part, xy est le produit d'un facteur nul par un facteur négatif donc xy est nul D'où : $\|x \times y\| = 0$ D'autre part, x est nul donc $\|x\| = 0$ et y est négatif donc $\|y\| = -y$ D'où : $\|x\| \times \|y\| = 0 \times (-y) = 0$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie
$y = 0$	D'une part, xy est le produit d'un facteur positif par un facteur nul donc xy est nul D'où : $\|x \times y\| = 0$ D'autre part, x est positif donc $\|x\| = x$ et y est nul donc $\|y\| = 0$	D'une part, xy est le produit d'un facteur négatif par un facteur nul donc xy est nul D'où : $\|x \times y\| = 0$ D'autre part, x est négatif donc $\|x\| = -x$ et y est nul donc $\|y\| = 0$	D'une part, xy est le produit de deux facteurs nuls donc xy est nul D'où : $\|x \times y\| = 0$ D'autre part, x est nul donc $\|x\| = 0$ et y est nul donc $\|y\| = 0$

	D'où : $\|x\| \times \|y\| = x \times 0 = 0$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie	D'où : $\|x\| \times \|y\| = -x \times 0 = 0$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie	D'où : $\|x\| \times \|y\| = 0 \times 0 = 0$ Par conséquent, l'égalité $\|x \times y\| = \|x\| \times \|y\|$ est vraie

Conclusion : Il résulte dans tous les cas que, quels que soient les réels x et y, $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Pour tous nombres réels x et y tels que $y \neq 0$,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un quotient est égale au quotient des valeurs absolues.

Démonstration 1 : D'après la propriété précédente sur la multiplication, pour tous nombres réels x et y tels que $y \neq 0$,

$$\left|\frac{x}{y}\right| \times |y| = \left|\frac{x}{y} \times y\right| = |x|$$

Or, en divisant dans chaque membre par $|y| \neq 0$:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Démonstration 2 : Pour tous nombres réels x et y tels que $y \neq 0$,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

1) ÉQUATIONS DE LA FORME $|X| = Y$

Pour tout X réel,

$$|X| = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

$$|X| = Y \Leftrightarrow X = Y \text{ ou } X = -Y \text{ (avec } Y \geq 0)$$

Remarque : L'équation $|X| = Y$ n'admet pas de solution si $Y < 0$.

Exemples :

- **Exemple 1 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x - 3| = -2$

L'équation $|2x - 3| = -2$ est de la forme $|X| = Y$ avec $X = 2x - 3$ et $Y = -2$. Ici, $Y < 0$ donc l'équation $|2x - 3| = -2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. L'ensemble S des solutions est $S = \emptyset$.

- **Exemple 2 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|3x - 1| = 0$

L'équation $|3x - 1| = 0$ est de la forme $|X| = Y$ avec $X = 3x - 1$ et $Y = 0$. Ici, $Y = 0$ donc, pour tout x réel, $|3x - 1| = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = 1/3$. L'ensemble S des solutions est $S = \{1/3\}$.

- **Exemple 3 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| = 1$

L'équation $|x + 2| = 1$ est de la forme $|X| = Y$ avec $X = x + 2$ et $Y = 1$. Ici, $Y > 0$ donc, pour tout x réel, $|x + 2| = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \text{ ou } x + 2 = -1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -3$. L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \{-3\,;\,-1\}$.

- **Exemple 4 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| = 2x - 1$

L'équation $|x + 2| = 2x - 1$ est de la forme $|X| = Y$ avec $X = x + 2$ et $Y = 2x - 1$. ATTENTION ! Ici, on ignore le signe de Y, qui dépend de x. Pour que l'équation ait un sens, il faut que $2x - 1 \geq 0$ car $|x + 2| \geq 0$.

$$|x + 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2x - 1 \text{ ou } x + 2 = -(2x - 1) \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3 \text{ ou } x + 2 = -2x + 1 \\ 2x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } 3x = -1 \\ x \geq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -1/3 \\ x \geq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$ L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \{3\}$.

2) ÉQUATIONS DE LA FORME $|X| = |Y|$

Pour tous réels X et Y non nuls,

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow X = Y \; ou \; X = -Y$$

Remarque : Si $X = 0$ ou $Y = 0$, l'équation $|X| = |Y|$ est de la forme $|X| = 0$ ou $|Y| = 0$ (voir ci-dessus).

Exemples :

- **Exemple 1 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| = |2x - 1|$

L'équation $|x + 2| = |2x - 1|$ est de la forme $|X| = |Y|$ avec $X = x + 2$ et $Y = 2x - 1$. Pour tout réel x, $|x + 2| = |2x - 1| \Leftrightarrow x + 2 = 2x - 1 \; ou \; x + 2 = -(2x - 1) \Leftrightarrow -x = -3 \; ou \; x + 2 = -2x + 1$

$\Leftrightarrow x = 3 \; ou \; 3x = -1 \Leftrightarrow x = 3 \; ou \; x = -1/3$. L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \{-1/3 \,;\, 3\}$.

- **Exemple 2 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| = |x - 1|$

L'équation $|x + 2| = |x - 1|$ est de la forme $|X| = |Y|$ avec $X = x + 2$ et $Y = x - 1$. Pour tout réel x, $|x + 2| = |x - 1| \Leftrightarrow x + 2 = x - 1 \; ou \; x + 2 = -(x - 1) \Leftrightarrow 2 = -1 \; (absurde \,!) \; ou \; x + 2 = -x + 1$

$\Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1/2$. L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \{-1/2\}$.

Remarque importante : L'équation $|x + 2| = |x - 1|$ est équivalente à $d(x \,;\, -2) = d(x \,;\, 1)$. Par conséquent, x est le milieu de l'intervalle $[-2 \,;\, 1]$. Donc $x = \frac{-2+1}{2}$. L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \{-1/2\}$.

1) INÉQUATIONS DE LA FORME $|X| \leq Y$

Pour tout X réel et pour tout réel Y positif ou nul,

$$|X| \leq Y \Leftrightarrow -Y \leq X \leq Y \Leftrightarrow X \in [-Y\,;Y]$$

Remarques :

- Les inégalités ci-dessus restent vraies si on remplace $\leq$ par $<$.
- Si $Y < 0$, l'inéquation $|X| \leq Y$ n'est jamais vérifiée (une distance étant toujours positive ou nulle).

Exemples :

- **Exemple 1 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \leq -3$

L'inéquation $|x+2| \leq -3$ est de la forme $|X| \leq Y$ avec $X = x+2$ et $Y = -3$.

$Y < 0$ donc l'inéquation n'admet pas de solution. L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \emptyset$.

- **Exemple 2 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \leq 3$

L'inéquation $|x+2| \leq 3$ est de la forme $|X| \leq Y$ avec $X = x+2$ et $Y = 3$.

Pour tout réel x, $|x+2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+2 \leq 3 \Leftrightarrow -3-2 \leq x \leq 3-2 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$

L'ensemble des solutions, noté S, est $S = [-5\,;1]$.

- **Exemple 3 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \leq 2x-1$

L'inéquation $|x+2| \leq 2x-1$ est de la forme $|X| \leq Y$ avec $X = x+2$ et $Y = 2x-1$.

Pour tout réel x, $|x+2| \leq 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -(2x-1) \leq x+2 \leq 2x-1 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 \leq x+2 \leq 2x-1 \\ 2x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 \leq x+2 \text{ et } x+2 \leq 2x-1 \\ x \geq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2 \leq x+2x \text{ et } 2+1 \leq 2x-x \\ x \geq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x \text{ et } 3 \leq x \\ x \geq 1/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3 \leq x$

L'ensemble des solutions, noté S, est $S = [3\,;+\infty[$.

2) INÉQUATIONS DE LA FORME $|X| \geq Y$

Pour tout X réel et pour tout réel Y positif ou nul,

$$|X| \geq Y \Leftrightarrow X \leq -Y \ ou \ X \geq Y \Leftrightarrow X \in]-\infty\,;\,-Y] \cup [Y\,;\,+\infty[$$

Remarques :

- Les inégalités ci-dessus restent vraies si on remplace $\geq$ par $>$.
- Si $Y \leq 0$, l'inéquation $|X| \geq Y$ est toujours vérifiée (une distance étant toujours positive ou nulle).

Exemples :

- **Exemple 1 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \geq -1$

L'équation $|x+2| \geq -1$ est de la forme $|X| \geq Y$ avec $X = x+2$ et $Y = -1$.

$Y \leq 0$ donc l'inéquation est toujours vérifiée. L'ensemble des solutions, noté S, est $S = \mathbb{R}$.

- **Exemple 2 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \geq 1$

L'équation $|x+2| \geq 1$ est de la forme $|X| \geq Y$ avec $X = x+2$ et $Y = 1$.

Pour tout réel x, $|x+2| \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq -1 \ ou \ x+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -3 \ ou \ x \geq -1$

L'ensemble des solutions, noté S, est $S =]-\infty\,;\,-3] \cup [-1\,;\,+\infty[$.

- **Exemple 3 :** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \geq 2x-1$

L'inéquation $|x+2| \geq 2x-1$ est de la forme $|X| \geq Y$ avec $X = x+2$ et $Y = 2x-1$.

Pour tout réel x, $|x+2| \geq 2x-1 \Leftrightarrow x+2 \leq -(2x-1) \ ou \ x+2 \geq 2x-1$

$\Leftrightarrow x+2 \leq -2x+1 \ ou \ 2+1 \geq 2x-x \Leftrightarrow x+2x \leq 1-2 \ ou \ 3 \geq x \Leftrightarrow 3x \leq -1 \ ou \ 3 \geq x$

$\Leftrightarrow x \leq -1/3 \ ou \ x \leq 3$

L'ensemble des solutions, noté S, est $S =]-\infty\,;3]$.

1) ENCADREMENT D'UN RÉEL

Soit un réel x.

Réaliser un **ENCADREMENT** de x consiste à trouver deux réels a et b tels que $a \leq x \leq b$.

Le nombre $b - a$ est appelé l'**AMPLITUDE** de l'encadrement.

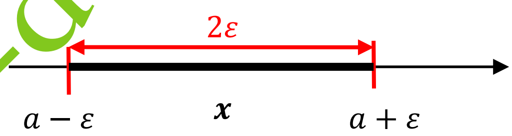
Exemples : Proposons plusieurs encadrements de $\sqrt{5}$ dont l'affichage des 8 premières décimales à la calculatrice donne : $\sqrt{5} \approx 2{,}23606798$.

Encadrement	Amplitude	Calcul de l'amplitude
$2 \leq \sqrt{5} \leq 3$	1	$3 - 2 = 1$
$2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$	10^{-2}	$2{,}24 - 2{,}23 = 0{,}01 = 10^{-2}$
$2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237$	10^{-3}	$2{,}237 - 2{,}236 = 0{,}001 = 10^{-3}$
$2{,}2360679 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}2360680$	10^{-7}	$2{,}2360680 - 2{,}2360679 = 10^{-7}$

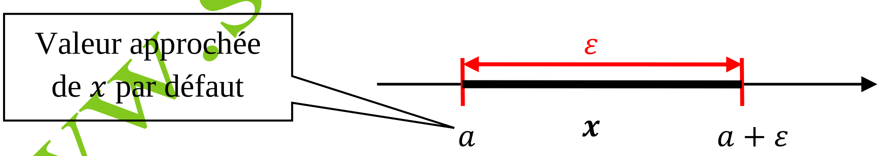
2) VALEURS APPROCHÉES

Soient x et a deux réels distincts et ε un réel strictement positif.

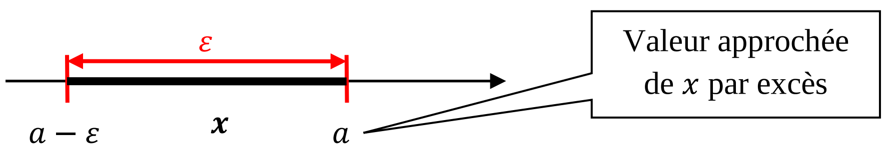
- Lorsque $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$, on dit que a est une **VALEUR APPROCHÉE** de x à ε près.



- Lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près **PAR DÉFAUT**.



- Lorsque $a - \varepsilon \leq x \leq a$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près **PAR EXCÈS**.



Le réel positif ε s'appelle la **PRÉCISION**.

Remarques : $|x - a| \leq \varepsilon$ est une autre notation de la valeur approchée de x à ε près.

Valeur absolue et fonction valeur absolue – Cours

Exemples : On a vu dans les précédents exemples plusieurs encadrements de $\sqrt{5}$ d'amplitudes différentes :

- $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$ est un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude 1.

Or, $2 \leq \sqrt{5} \leq 3 \Leftrightarrow 2{,}5 - 0{,}5 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}5 + 0{,}5$. Par conséquent, 2,5 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 0,5 près.

- $2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$ est un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude 10^{-2}.

Or, $2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24 \Leftrightarrow 2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}23 + 0{,}01 \Leftrightarrow 2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}23 + 10^{-2}$. Par conséquent, 2,23 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près par défaut.

- $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237$ est un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude 10^{-3}.

Or, $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237 \Leftrightarrow 2{,}237 - 0{,}001 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237 \Leftrightarrow 2{,}237 - 10^{-3} \leq \sqrt{5} \leq 2{,}23 + 10^{-2}$. Il résulte de cette double inégalité que 2,237 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près par excès.

1) DÉFINITION

La **FONCTION VALEUR ABSOLUE** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe sa valeur absolue $|x|$.

La fonction valeur absolue f est donc ainsi définie :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

2) SENS DE VARIATION

La fonction valeur absolue est :

- **DECROISSANTE** sur $]-\infty\,;0]$
- **CROISSANTE** sur $[0\,;\,+\infty[$

Rappel : Dire qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous nombres a et b de l'intervalle I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f la fonction valeur absolue. Comparons alors $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire étudions le signe de $f(a) - f(b)$.

Pour tous réels a et b, on a $f(a) - f(b) = |a| - |b|$.

- <u>1er cas : $0 \leq a < b$</u>

$0 \leq a$ donc $|a| = a$ et $0 < b$ donc $|b| = b$. Par conséquent, $|a| - |b| = a - b$.

Or, $0 \leq a < b$ donc, en soustrayant b dans chaque membre, $0 - b \leq a - b < b - b$, c'est-à-dire $a - b < 0$.

Ainsi, $\underbrace{|a| - |b|}_{=a-b} < 0$, c'est-à-dire $\underbrace{|a|}_{f(a)} < \underbrace{|b|}_{f(b)}$

Par conséquent, si $0 \leq a < b$, alors $f(a) < f(b)$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

- <u>2ème cas : $a < b < 0$</u>

$a < 0$ donc $|a| = -a$ et $b < 0$ donc $|b| = -b$. Par conséquent, $|a| - |b| = -a - (-b) = -(a - b)$.

Or, $a < b < 0$ donc, en soustrayant b dans chaque membre, $a - b < b - b < 0 - b$, c'est-à-dire $a - b < 0$.

Ainsi, $\underbrace{|a| - |b|}_{=-\underbrace{(a-b)}_{<0}} > 0$, c'est-à-dire $\underbrace{|a|}_{f(a)} > \underbrace{|b|}_{f(b)}$

Par conséquent, si $a < b < 0$, alors $f(a) > f(b)$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Remarque pouvant faire office de deuxième démonstration :

Pour tout $x \in]-\infty\,;0]$, $|x| = -x$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $|x| = x$ donc la fonction valeur absolue est l'union de la fonction $x \mapsto -x$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et de la fonction $x \mapsto x$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Or, sur $]-\infty\,;0]$, la fonction $x \mapsto -x$ est décroissante comme étant une fonction affine (linéaire) de coefficient directeur négatif. En outre, sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction $x \mapsto x$ est croissante comme étant une fonction affine (linéaire) de coefficient directeur positif. Ainsi, la fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. On dit que la fonction valeur absolue est une **fonction affine par morceaux**.

TABLEAU DE VARIATION :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction valeur absolue admet un **MINIMUM** en 0 égal à 0. Autrement dit, pour tout x réel, $|x| \geq 0$.

Remarque : On peut retenir que :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur valeur absolue (ou bien que si a et b sont deux nombres positifs tels que $a \leq b$ alors $|a| \leq |b|$)
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de celui de leur valeur absolue (ou bien que si a et b sont deux nombres négatifs tels que $a \leq b$ alors $|a| \geq |b|$)

3) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

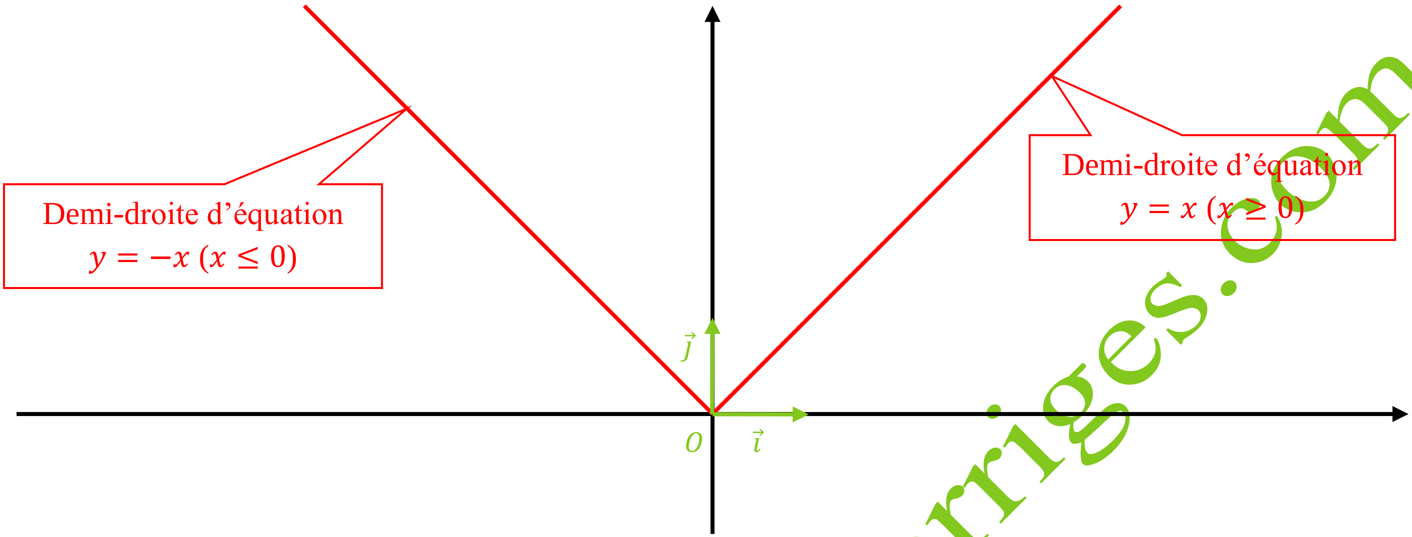
La fonction valeur absolue est une **FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX**.

Sa représentation graphique dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan est la **réunion de deux demi-droites d'origine O**, l'une d'équation $y = -x$ sur $\mathbb{R}^-$, l'autre d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}^+$.

Point méthode : Pour tracer la représentation graphique de la fonction valeur absolue, on établit un tableau de valeurs, on place dans un repère les points de coordonnées $(x\,;|x|)$ et on les relie.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3	4	5

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan



Remarque : La représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ est en forme de « V ». Plus généralement, toutes les fonctions $x \mapsto |x - a|$ ont une représentation graphique en forme de « V » (voir plus bas).

4) PARITÉ ET SYMÉTRIE

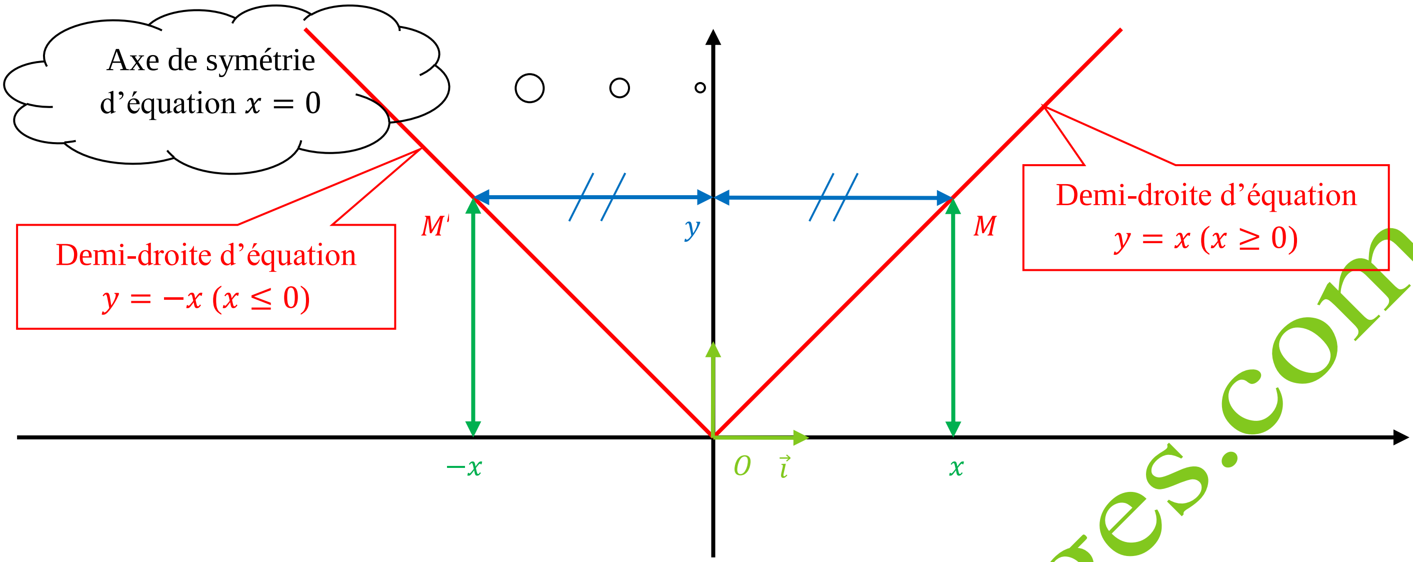
La fonction valeur absolue est une **FONCTION PAIRE**.

Démonstration : Tout d'abord, la fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est centrée en 0. En outre, pour tout x réel, $|-x| = |x|$ donc la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire.

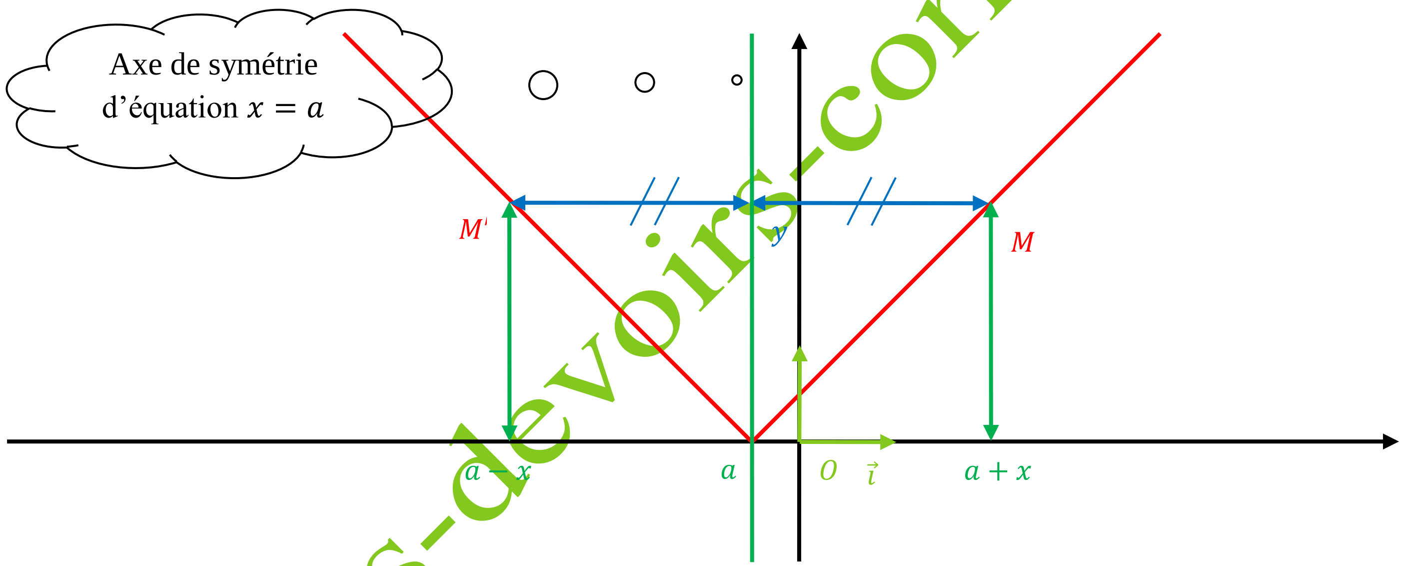
Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est **SYMÉTRIQUE PAR RAPPORT À L'AXE DES ORDONNÉES** d'équation $x = 0$.

Démonstration : Soient x et y deux réels. Le point $M(x\,;y)$ appartient à la courbe représentative de la fonction valeur absolue si, et seulement si, $y = |x|$. Or, pour tout x réel, $|-x| = |x|$ donc $y = |x| = |-x|$. Le point $M'(-x\,;y)$ appartient également à la courbe représentative de la fonction valeur absolue. Donc les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe d'équation $x = 0$.

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ et de son axe de symétrie



Représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x - a|$ et de son axe de symétrie



Remarques :

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x - a|$ est obtenue par translation. Il s'agit de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x|$ ayant subi une translation de vecteur $\frac{-a}{\|\vec{\imath}\|}\ \vec{\imath}$.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x - a|$ est symétrique par rapport à un axe parallèle à l'axe des ordonnées. Cet axe de symétrie a pour équation $x = a$.