Annexe 1 : Cas d'un caractère quantitatif discret

Voici les notes obtenues par les 34 élèves d'une classe de seconde à un devoir de maths :
12 , 12 , 14 , 5 , 15 , 6 , 7 , 13 , 14 , 5 , 7 , 10 , 14 , 8 , 10 , 4 , 10 , 7 , 13 , 11 , 9 , 19 , 7 , 12 , 7 , 8 , 10 , 9 , 5 , 10 , 9 , 10 , 6 , 7

1. Quelle est la population étudiée dans cette étude statistique ?
   La population étudiée est l'ensemble des 34 élèves d'une classe de seconde.
   Combien y a t il d'individus ? Cette population compte 34 individus.

2. Quel est le caractère étudié dans cette étude ?
   Le caractère étudié sur chacun des individus de cette population est la note obtenue à un devoir de maths.
   De quel type de caratère s'agit-il ?
   Il s'agit d'un caractère quantitatif discret.

3. (a) Complétons le tableau suivant :

Notes (x_i)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	19	Total
Effectifs (n_i)	1	3	2	6	2	3	6	1	3	2	3	1	1	$N = 34$
Fréquences ($f_i = \frac{n_i}{N}$) (valeurs exactes)	$\frac{1}{34}$	$\frac{3}{34}$	$\frac{2}{34}$	$\frac{6}{34}$	$\frac{2}{34}$	$\frac{3}{34}$	$\frac{6}{34}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{3}{34}$	$\frac{2}{34}$	$\frac{3}{34}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{34}$	1
Fréquences (à 0.001 près)	0.029	0.088	0.059	0.176	0.059	0.088	0.176	0.029	0.088	0.059	0.088	0.029	0.029	≈ 1

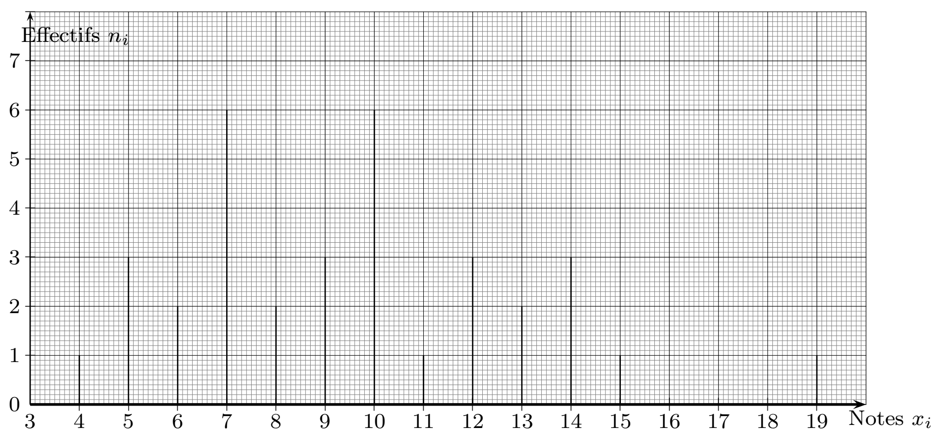
   (b) i. Complétons le tableau des effectifs cumulés croissants :

Notes (x_i)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	19	Total
Effectifs (n_i)	1	3	2	6	2	3	6	1	3	2	3	1	1	$N = 34$
Effectifs cumulés croissants	1	4	6	12	14	17	23	24	27	29	32	33	$N = 34$	

   ii. Que représentent les nombres 12, 24 et 34 dans la ligne des effectifs cumulés croissants ?
   Le nb 12 dans la ligne des effectifs cumulés croissants représente le nb d' éléves ayant eu une note inférieure ou égale à 7.
   Le nb 24 dans la ligne des effectifs cumulés croissants représente le nb d' éléves ayant eu une note inférieure ou égale à 11.
   Le nb 34 dans la ligne des effectifs cumulés croissants représente le nb d'éléves ayant eu une note inférieure ou égale à 19
   Combien d'élèves ont une note inférieure ou égale à 12 ?
   D'après le tableau des effectifs cumulés croissants, 27 élèves ont une note inférieure ou égale à 12.
   D'après la ligne des effectifs cumulés croissants, la moitié de la classe a une note inférieure ou égale à 9.

4. Traçons un diagramme en bâton des effectifs :

   Le diagramme en bâtons est la représentation graphique la plus utilisée pour représenter une série statistique dont l'étude porte sur un caractère quantitatif discret.
   Méthode : Pour réaliser un diagramme en bâtons, il faut :
   - porter, en abscisse les valeurs x_i.
   - et tracer un bâton de hauteur correspondant à l'effectif n_i.



5. (a) Calculons la moyenne $\bar{x}$ de la classe de deux métodes différentes :

Calcul de la moyenne en utilisant les effectifs : $\boxed{\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots}{N} = \dfrac{1}{N}\sum n_ix_i}$

La moyenne de la classe à ce devoir est $\bar{x} = \dfrac{1\times 4 + 3\times 5 + 2\times 6 + \cdots + 1\times 19}{34} = \dfrac{325}{34} \approx 9.56$.

Calcul de la moyenne en utilisant les fréquences : $\boxed{\bar{x} = \dfrac{n_1}{N}x_1 + \dfrac{n_2}{N}x_2 + \cdots = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots = \sum f_ix_i}$

La moyenne de la classe à ce devoir est $\bar{x} = \dfrac{1}{34}\times 4 + \dfrac{3}{34}\times 5 + \dfrac{2}{34}\times 6 + \dfrac{6}{34}\times 7 + \cdots + \dfrac{1}{34}\times 19 = \dfrac{325}{34} \approx 9.56$.

(b) Le professeur multiplie chaque note par 1.5.

i. Complétons le tableau suivant donnant les nouvelles notes de la classe :

Notes (x'_i)	6	7.5	9	10.5	12	13.5	15	16.5	18	19.5	21	22.5	28.5	Total
Effectifs (n_i)	1	3	2	6	2	3	6	1	3	2	3	1	1	$N = 34$

ii. Calculons la nouvelle moyenne $\bar{x}'$ de la classe :
La nouvelle moyenne de la classe est donc
$\bar{x}' = \dfrac{1\times 6 + 3\times 7.5 + 2\times 9 + 6\times 10.5 + \cdots + 1\times 28.5}{34} = \dfrac{487.5}{34} \approx 14.34$.

On constate que $\bar{x}' = 1.5\times\bar{x}$ cad que si on multiplie chaque note par 1.5, la moyenne est aussi multipliée par 1.5.

Dém : $\bar{x}' = \dfrac{1}{N}\sum n_ix'_i = \dfrac{1}{N}\sum\Big(n_i\times 1.5x_i\Big) = \dfrac{1.5}{N}\sum n_ix_i = 1.5\bar{x}$

(c) Le professeur préfère finalement ajouter 1 point à chaque note initiale.

i. Complétons le tableau suivant donnant les nouvelles notes de la classe :

Notes ($x"_i$)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	20	Total
Effectifs (n_i)	1	3	2	6	2	3	6	1	3	2	3	1	1	$N = 34$

ii. Calculons la nouvelle moyenne $\bar{x}"$ de la classe :
La nouvelle moyenne de la classe est donc
$\bar{x}" = \dfrac{1\times 4 + 3\times 5 + 2\times 6 + 6\times 7 + \cdots + 1\times 20}{34} = \dfrac{359}{34} \approx 10.56$.

On constate que $\bar{x}" = \bar{x} + 1$ cad que si on ajoute un point à chaque note , ce point s'ajoute aussi à la moyenne .

Dém : $\bar{x}" = \dfrac{1}{N}\sum n_ix"_i = \dfrac{1}{N}\sum\Big(n_i(x_i+1)\Big) = \dfrac{1}{N}\sum\Big(n_ix_i + n_i\Big) = \dfrac{1}{N}\Big[\sum n_ix_i + \sum n_i\Big]$
$= \dfrac{1}{N}\sum n_ix_i + \dfrac{1}{N}\times N = \bar{x} + 1$

Conclusion :
Lorsqu'on multiplie chaque valeur d'une série statistique par une constante a, la moyenne est aussi multipliée par cette constante a.
Lorsqu'on ajoute à chaque valeur d'une série statistique une même constante b, cette constante s'ajoute aussi sur la moyenne.
Pour résumer :
Si $\bar{x}$ est la moyenne des nombres $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ affectés respectivement des coefficients $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, alors la moyenne des nombres $ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, \dots, ax_k+b$ affectés eux aussi respectivement des coefficients $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, est $a\bar{x}+b$.

6. (a) Déterminons la note médiane de la classe et interprétons :

La médiane d'une série est un réel, noté M tel que :
- au moins 50% des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M.
-au moins 50% des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M.

Dans le cas d'une série portant sur un caractère quantitatif discret, la médiane est alors par convention :
- la valeur centrale de la série cad la valeur située au rang $\dfrac{N+1}{2}$ (les valeurs étant rangées dans l'ordre croissant) si l'effectif total N est impair.
- la demi-somme des deux valeurs centrales cad des valeurs situées aux rangs $\dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{N}{2}+1$ les valeurs étant rangées dans l'ordre croissant) si l'effectif total N est pair.
Pour déterminer la médiane, on s'aide donc du tableau des effectifs cumulés croissants.

Ici, l'effectif total ($N = 34$ élèves) est pair.

Donc la note médiane est la demi-somme des notes obtenues par l'élève situé au rang $\frac{N}{2} = 17$ et l'élève situé au rang $\frac{N}{2} + 1 = 18$. Or, d'après le tableau des effectifs cumulés croissants, le 17 ième élève a eu 9 et le 18 ième a eu 10. Donc la note médiane à ce devoir est $\frac{9+10}{2} = 9.5$.

Interprétation : Cela signifie qu'au moins 50% des élèves ont eu une note inférieure ou égale à 9.5 et qu'au moins 50% des élèves ont eu une note supérieure ou égale à 9.5.

(b) Déterminons à nouveau la médiane de la classe sans tenir compte de l'élève qui a eu 19 :

Cette fois-çi, l'effectif total ($N' = 33$ élèves) est impair.

Donc la note médiane est la note obtenue par l'élève situé au rang $\frac{N'+1}{2} = 17$. Or, d'après le tableau des effectifs cumulés croissant, le 17 ième élève a eu 9 donc si on ne tient pas compte de l'élève qui a eu 19, la note médiane de la classe est 9.

7. Déterminons le ou les modes :

> Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, un mode est une valeur du caractère ayant le plus grand effectif.
> Il peut donc y avoir plusieurs modes.

Dans cette étude, d'après le tableau des effectifs, la série de notes admet deux modes qui sont 7 et 10.

Interprétation : Cela signifie que 7 et 10 sont les notes les plus frequemment obtenues au devoir.

8. Déterminons l'étendue des notes :

> L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par un caractère.

Dans cette étude, l'étendue des notes à ce devoir est $19 - 4 = 15$.

Elle représente l'écart entre la note la plus haute et la note la plus basse.