Analyse GI2

Pr Azeddine Baalal

ESTC - Printemps 2019

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

Sommaire

1.1 Topologie de $\mathbb{R}^d$

1.1.1 Norme

On appelle norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E toute application N, de E dans $\mathbb{R}$, qui vérifie :

i) $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

ii) $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

iii) $\forall x \in E \ \forall y \in E \ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On emploie généralement la notation $\|x\|$ pour $N(x)$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Propriété

$$\forall x \in E \ \forall y \in E \qquad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Normes classiques

Sur $\mathbb{R}^d$, on utilise indifféremment les trois normes classiques suivantes, définies pour $x = (x_1, ..., x_d)$ par :

$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|$ (Norme Manhattan) ;

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2}$ (Norme euclidienne) ;

$\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (Norme p, $p \geq 1$) ;

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_d|\}$ (Norme infinie).

Proposition 1.1 *Toute norme* $\|.\|$ *dans un espace vectoriel normé* $(E; \|.\|)$ *vérifie, pour tous* $x; y \in E$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont *équivalentes* s'il existe deux constantes réelles $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que pour tout $x \in E$

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\| .$$

Proposition 1.2 *Sur* $\mathbb{R}^d$ *(et tout autre espace vectoriel normé de dimension finie) Toutes les normes sont équivalentes.*

Dans la suite on notera donc (sauf précision) $\|.\|$ pour désigner une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$.

1.1.2 Parties remarquables de $\mathbb{R}^d$

Boules

Dans $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme, on appelle :

– *boule ouverte* de centre $a \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r\},$$

– *boule fermée* de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| \leq r\}.$$

Parties bornées

Une partie D de $\mathbb{R}^d$ est *bornée* si l'ensemble des réels $\|x - y\|$, où x et y sont des vecteurs quelconques de D, est borné dans $\mathbb{R}$.

D est bornée si, et seulement si, il existe une boule qui le contient.

Parties ouvertes, parties fermées

Soit D une partie de $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$.

On dit que a est un *point intérieur* de D s'il existe une boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contenue dans D.

On dit que a est un *point frontière* de D si toute boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contient au moins un élément de D et un élément qui n'appartient pas à D.

L'ensemble des points frontières de D est appelée *la frontière* de D.

On dit que a est un *point adhérent* à D si toute boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contient un point de D.

Les points adhérents à D sont les points de D et les points frontières de D.

L'adhérence de D, notée $\overline{D}$ ou $adh(D)$, est l'ensemble des points adhérents à D.

Un *point d'accumulation* d'une partie D est un point a adhérent à $D \setminus \{a\}$.

Il est alors facile de voir que tout voisinage d'un point d'accumulation contient une infinité d'éléments de D.

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^d$ est *ouverte* si elle ne contient aucun point de sa frontière, c'est-à-dire si elle est égale à l'ensemble de ses points intérieurs.

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^d$ est *fermée* si elle contient tous les points de sa frontière.

On dit qu'un point a de D est *isolé* si l'on peut trouver une boule de centre a ne contenant pas d'autre point de D que A.

Exercice 1.1 *Dessinez les boules fermées de centre O et de rayon $r > 0$ relatives à chacune des trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$.*

Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est un *compact* de $\mathbb{R}^n$ s'il est fermé et borné.

1.1.3 Suites dans $\mathbb{R}^d$

On appelle *suite* dans $\mathbb{R}^d$ toute application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$$

On note une telle application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|.\|$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si et seulement si l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|.\|$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* dans $(\mathbb{R}^d; \|.\|)$, si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}^d$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $\|x_n - l\| < \varepsilon$.

Si la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, alors elle est unique.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l = (l_1, \ldots, l_d)$ dans $(\mathbb{R}^d; \|.\|)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n,i} = l_i$, pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Proposition 1.3 *Puisque sur $\mathbb{R}^d$ toutes les normes sont équivalentes, toute suite convergente pour l'une des normes est convergente pour l'autre.*

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite* ou *sous-suite* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une caractérisation fondamentale des compacts de $\mathbb{R}^d$ est la suivante.

Théorème 1.4 *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact si, et seulement si, de toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans K.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^d$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tous $n, m \geq N$, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Si dans un ensemble, toute suite de Cauchy est convergente, on dit que l'ensemble est *complet*.

Tout espace vectoriel normé complet est appelé *espace de Banach*.

$(\mathbb{R}^d; \|.\|)$ est un espace de Banach. Donc toute suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^d; \|.\|)$ est convergente.

1.2 Fonctions de plusieurs variables

Dans cette partie nous allons étudier des fonctions vectorielles de plusieurs variables $f : U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$, où d et m sont des entiers ≥ 1. Nous avons déjà étudié de telles fonctions dans des cas particuliers :

- $d = m = 1$, ce sont les fonctions réelles d'une variable réelle ;
- $d = 1$, $m > 1$, ce sont les fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Le but est d'étendre les notions de continuité et dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle au cas des fonctions de plusieurs variables.

1.2.1 CONTINUITÉ

1.2.2 Fonction de deux variables

Une fonction f, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout vecteur (x, y) de D un réel unique $f(x, y)$.

L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

est la surface représentative de f ; c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable.

1.2.3 Fonctions partielles

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2)$ un point intérieur de D. Les fonctions :

$x \longmapsto f(x, a_2)$ et $y \longmapsto f(a_1, y)$ définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a_1 et a_2, sont appelées

les fonctions partielles associées à f au point a.

1.2.4 Limite en un point

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$, a un point d'accumulation de D, et f une fonction à valeurs réelles dont le domaine de définition est D, privé éventuellement de a.

On dit que f a pour limite l au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists r > 0 \;\; (X \in D \text{ et } \|x - a\| < r) \Longrightarrow |f(X) - l| < \varepsilon.$$

L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. On dit que les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Exercice 1.2 *Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en* $(0, 0)$ *pour les fonctions* f *suivantes, pour lesquelles on donne* $f(x, y)$ *:*

1. $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$ *; (indication :* $f(0, y)$*).*

2. $\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$; *(indication : $f(x,0)$ et $f(x,|x|^{\frac{3}{2}})$).*
3. $\dfrac{x^4y^3}{x^6+y^8}$; *(indication :en notant $X = |x|^3$, $Y = y^4$ puis $\rho = \sqrt{X^2+Y^2}$ on a $|f(x,y)| \leq \dfrac{X^{\frac{4}{3}}Y^{\frac{3}{4}}}{X^2+Y^2} \leq \rho^{\frac{1}{12}}$).*
4. $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$; *(indication : $f(x,0)$ et $f(x,-x+x^2)$).*
5. $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$. *(indication : $v = \max(|x|,|y|)$, on a, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ $\sqrt{x^2+y^2} \geq v$ et $|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|} \leq 2v^{\frac{3}{2}}$).*

1.2.5 Continuité

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $a \in D$ si f possède en a une limite égale à $f(a)$.

Si f est continue en chaque élément de D, on dit que f est continue sur D.

Remarque 1.1 *Si f a pour limite l en a, la restriction de f à toute courbe continue passant par a admet la même limite l. La réciproque est fausse.*

1.2.6 Opérations algébriques

Comme pour les fonctions d'une variable, la somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) et la composée de deux fonctions continues sont continus.

Remarque 1.2 *Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en a, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par a qui n'admette pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.*

Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général.

Dans le cas de deux variables, lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, il peut être intéressant de passer en coordonnées polaires.

1.3 Calcul différentiel

Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$.

1.3.1 Dérivées partielles premières

Soit $(x_0,y_0) \in D$. Les dérivées partielles de f en (x_0,y_0) sont les dérivées des fonctions partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) := \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}.$$

1.3.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Si les fonctions dérivées partielles $(x, y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

1.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

1.4.1 Définition

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0). On les note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0)\,; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0)\,;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0)\,; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

1.4.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Si les fonctions dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.

Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

Théorème 1.5 (de Schwarz) *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (x_0, y_0), alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

1.4.3 Dérivée dans une direction

La dérivée de f en (x_0, y_0) dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}(a, b)$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Lorsque f est différentiable, cette limite existe et vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) &= \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \bullet \overrightarrow{u}(a, b) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \bullet \overrightarrow{u}(a, b). \end{aligned}$$

Cette dérivée directionnelle est maximum dans la direction du gradient et vaut alors $\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $f_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto (x+y)^p \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge continuement en $(0,0)$.

2) La condition précédente étant remplie, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0,0)$.

1.4.4 Différentielle

On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe des constantes réelles A et B telles que :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \|(h,k)\| \, \varepsilon(h,k)$$
$$\text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

Dans ce cas, on a $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et on note :

$$df_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

et

$$df_{(x_0,y_0)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

Théorème 1.6

1. *Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0).*
2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).*

Les deux réciproques sont fausses.

1.5 Fonctions implicites

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et Γ_K la courbe de niveau $f(x,y) = K$. A tout point $(x_0, y_0) \in \Gamma_K$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut associer un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I \qquad y = \varphi(x) \Longleftrightarrow f(x,y) = K.$$

De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est donnée par :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

1.6 Résultats d'optimisation

Une condition suffisante d'extremum global :

Théorème 1.7 *Soit f une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$. Alors f admet un minimum et un maximum globaux sur D.*

Une condition nécessaire d'extremum :

Théorème 1.8 *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Si f présente un extremum en M_0, alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f.

Une condition suffisante d'extremum :
On note

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,; \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,; \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\,; \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Théorème 1.9 *Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Si, au point M_0, on a*

1. *Si $p = q = 0$; $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ (ou $t < 0$), alors $f(x_0, y_0)$ est maximum local de f.*
2. *Si $p = q = 0$; $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (ou $t > 0$), alors $f(x_0, y_0)$ est minimum local de f .*
3. *Si $p = q = 0$ et $rt - s^2 < 0$, alors $f(x_0, y_0)$ n'est pas un extremum local de f.*
4. *Dans le cas où $p = q = 0$ et $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.*

Ces résultats s'établissent à partir du développement limité d'ordre 1 de f en (x_0, y_0), valable pour $f \in C^1(U)$, $(x_0, y_0) \in U$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ph + qk + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k),$$

et à partir du développement limité d'ordre 2 de f en (x_0, y_0), valable pour $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $(x_0, y_0) \in U$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ph + qk + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + \left(h^2 + k^2\right)\varepsilon(h, k),$$

avec p, q, r, s et t pris au point (x_0, y_0), et avec ε continue et nulle au point $(0, 0)$.

1.7 Exercices

Exercice 1.3 *Étudiez la continuité de*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x\tan y - y\tan x}{x^2+y^2} \quad \textit{si } (x,y)\neq(0,0) \\ \textit{et} \quad f(0,0) &= 0, \end{aligned}$$

en $(0,0)$.

Solution 1.1 *Pour étudier la limite de* $f(x,y)$ *lorsque* (x,y) *tend vers* $(0,0)$, *nous allons utiliser le développement limité de la fonction tangente au voisinage de l'origine qui peut s'écrire :*

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u) \quad \textit{avec} \lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0.$$

Avec cette notation, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x\left(y+\frac{y^3}{3}+y^3\varepsilon(y)\right) - y\left(x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\frac{xy}{3}\left(y^2-x^2+y^2\varepsilon(y)+x^2\varepsilon(x)\right)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Choisissons la norme euclidienne $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
On a la majoration :

$$|f(x,y)| \leq |x|\,|y|\left(\frac{1}{3}+\varepsilon(x)+\varepsilon(y)\right).$$

On en déduit que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$, *ce qui prouve que* f *est continue en* $(0,0)$.

Exercice 1.4 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} \quad \textit{si } (x,y)\neq(0,0) \textit{ et } f(0,0)=0$$

1. *Montrez que la restriction de* f *à toute droite passant par l'origine est continue.*
2. *Montrez que la fonction* f *n'est pas continue à l'origine.*

Solution 1.2 *Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans* $\mathbb{R}^2$ *puisque*

$$x^4-2x^2y+3y^2 = (x^2-y)^2+2y^2$$

ne s'annule qu'en $(0,0)$.

1. *La restriction de* f *aux droites* $x=0$ *et* $y=0$ *est la fonction nulle.*
   La restriction de f *à la droite* $y=\lambda x$, *avec* $\lambda\neq 0$, *donne :*

   $$f(x,\lambda x) = \frac{\lambda x}{x^2-2\lambda x+3\lambda^2}$$

   et tend vers 0 *quand* x *tend vers* 0.
   Comme $f(0,0)=0$, *la restriction de* f *à toute droite passant par l'origine est donc continue.*

2. *Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a :*

$$f(x, x^2) = \frac{1}{2} \text{ si } x \neq 0.$$

Par conséquent, $f(x, x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

Exercice 1.5 *Étudiez les extrémums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$