Séries

① Définitions

Une série est une somme de terme infinie notée

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \, a_{n+1} + \cdots$$

a_i est le terme générale.

Exemple :

* $$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2+i^2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2+i} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \cdots$$

* $$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k^2 \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k^2 = -1 + 4 - 9 + 16 - 25 + \cdots$$

Convergence : Verge vers le point

Etude discrète et n'est pas continue

- $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ est convergente si $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = L$ avec $L \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ est divergente si $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \pm\infty$ ou n'existe pas

Suite de Somme partielle :

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$$

- $S_1 = a$ · $S_2 = a_1 + a_2$ · $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} S_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \text{ est convergente}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Série · la suite

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \longrightarrow \{S_n\} = \{S_1, S_2 \dots S_n\}$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \dots\right\}$$

Fajr

Il faut la demonstration

On raisonne avec la récurrence

On a $n = 1$ $\quad S_1 = \frac{1}{2}$

On suppose $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

On démontre que $S_{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$

$$S_{n+1} = S_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 2 + 1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

Donc $S_{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$

D'après le principe de récurrence, on peut dire que

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$\{S_n\} = \left\{\frac{2^n - 1}{2^n}\right\}$$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

Alors $\{S_n\}$ est convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k+1) - \ln(k)$$

$\cdot\, S_1 = \ln(2)$ $\quad \cdot\, S_2 = \ln(3)$ $\quad \cdot\, S_3 = \ln(4) \ldots\ S_n = \ln(n+1)$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ Donc $\{S_n\}$ est divergente.

Remarque :

Soit une série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$

si $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ alors la serie est divergente

Exemple : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 + 3k - 1}{k+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc série divergente

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$$

Divergente — Convergente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Série géometrique :

- $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots$

$$= a_1 + a_1 r + a_2 r^3 + \dots a_1 r^{k-1} \dots$$

- $\sum_{k=1}^{+\infty} a_1 r^{k-1}$

- $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$

- $r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^n$

donc $S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$

$$S_n (1-r) = a_1 (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{a_1}{1-r}\left(1-r^n\right)$$

$$= \frac{a_1}{1-r} \lim_{n \mapsto +\infty} \left(1-r^n\right)$$

1^er^ cas : $-1 < r < 1$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} r^n = 0$$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_1 r^{k-1} = \frac{a_1}{1-r}$$ Convergence

2^ème^ cas : $r > 1$ ou $r < -1$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \pm\infty$$ divergence

3^ème^ cas : $r = 1$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} S_n \nexists$$ il n'existe pas

$r = -1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n \ \nexists \begin{cases} \to -1 \\ \to 1 \end{cases}$ Une série géométrique

donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_1 r^{k-1} = \dfrac{a_1}{1-r}$ ssi $-1 < r < 1$

Exemple :

$\sum\limits_{k=3}^{+\infty} 2(0,1)^k$; $\sum \dfrac{(-2)^k}{3^{k+2}}$

. $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} 2(0,1)^k = 2(0,1)^3 + 2(0,1)^4 + \dots$

La raison $r = 0,1$ et $-1 < r < 1$

donc $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} 2(0,1)^k = \dfrac{2(0,1)^3}{1-0,1}$

donc convergente

. $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{(-2)^i}{3^{i+2}} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{27} + \dfrac{4}{81}$

. La division de 2 nombre consécutifs $\left(\dfrac{-2}{27} \Big/ \dfrac{1}{9}\right)$

$-1 < r = -\dfrac{2}{3} < 1$

Fajr

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-2)}{3^{i+2}} = \frac{1/9}{1-\left(-2/3\right)} = \frac{1/9}{5/3} = \frac{1}{15}.$$

Cas particulier : Séries à terme positif

Soit $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ est à terme positif si

$a_k \geqslant 0 \quad \forall k.$

Critère d'Alembert :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \;/\; a_i > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

si $d < 1$ la serie est convergente
si $d > 1$ la série est divergente
si $d = 1$ On ne peut rien dire

Exemple : Etudier la convergence

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k k!} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(2/3)^i}{i!}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \quad ; \quad a_n = \frac{2^n}{3^n n!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \times \frac{3^n (n)!}{2^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3(n+1)} = 0 < 1 \quad \text{Convergente}$$

Fajr

$$\cdot\ a_{n+1} = \frac{\left(2/3\right)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(2/3\right)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{n+1} = 0 < 1$$

convergente

Critère de la racine $n^{\text{ième}}$:

Soit $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \quad a_i \geqslant 0 \quad \forall i$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(a_n\right)^{1/n} = \ell$$

si $\ell < 1$ convergente

$\ell > 1$ divergente

$\ell = 1$ On ne peut rien dire

Exemple :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(2k^2 - 4k + 3\right)^k}{(k+1)^{2k}} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{7^k}$$

Fajr

Scanned by CamScanner

- $a_n = \dfrac{(2n^2-4n+3)^n}{(n+1)^{2n}}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{(2n^2-4n+3)^n}{(n+1)^{2n}}\right)^{1/n} = \frac{2n^2-4n+3}{(n+1)^2}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1$ donc divergente

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{7^k} = 5 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{7^k}$

$a_n = \dfrac{1}{7^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{7}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{7} < 1$ donc convergente

Critère de l'intégrale de Cauchy :

Soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad / \; a_k > 0 \;\; \forall k$

si $f(n) = a_n$ est continue et décroissante

alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}$ sont de la $\overline{m}$ nature

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^k f(x)\,dx$$

Tajr

Exemple : Determiner la nature de la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+3)}{k+3}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3} \qquad x \in [1;+\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3} - \ln(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2} < 0$$

Décroiss.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+3)}{(x+3)} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{k} \frac{\ln(x+3)}{(x+3)} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+3)}{(x+3)} dx \qquad U = \ln(x+3)$$

$$dU = \frac{1}{x+3} dx$$

$$\int_1^{+\infty} U\,dU = \frac{U^2}{2} + C = \frac{(\ln(x+3))^2}{2} + C$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left[\frac{[\ln(x+3)]^2}{2} \right]_1^k = \frac{1}{2} \lim_{k \to +\infty} (\ln(k+3))^2 - \ln^2(4)$$

$= +\infty$ divergente donc la serie est divergente

Critère des séries p

Une série p est de la forme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \qquad p \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \; ; \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \; ; \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

Si $p > 1$ la série est convergente.

si $p \leq 1$ la série est divergente

Série Alternée :

Série alternée est de la forme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k \; ; \; \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

et $\begin{cases} ① \text{ Si le terme } a_k \text{ décroît à partir d'un certain rang } (\text{Dé...} \\ ② \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ est convergente}$$

Fajr

Exemple : $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2}{k+3}$; $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(k-1)!}$

- $a_n = \frac{2}{n+3}$; $\lim a_n = 0$

$$(a_n)' = 2\left(-\frac{1}{(n+3)^2}\right) < 0$$

a_n decroit alors la série est convergente

- $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{1}{n!} \times \frac{(n-1)!}{1} = \frac{1}{n} \leq 1$$

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ Décroissante

la série est convergente

Fajr

Série entières (puissance)

Une série entière de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots}_{\text{Polynôme}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

Exemple :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^k}{k!} = 1 + (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(x-3)^3}{6} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{2^k} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + \dots$$

Intervalle de convergence :

Si x fait partie d'un intervalle ça va converger sinon ça ne va pas converger

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \xrightarrow{VA} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k|$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{termes positifs.}$$

Exemple :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(2x-5)^k}{k} \right|$$ Série à terme positifs.

$$a_n = \left| \frac{(2x-5)^n}{n} \right| \; ; \; a_{n+1} = \left| \frac{(2x-5)^{n+1}}{n+1} \right|$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(2x-5)^{n+1}}{n+1} \right| \times \left| \frac{n}{(2x-5)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(2x-5)\, n}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} |2x-5| \left| \frac{n}{n+1} \right|$$

Séparation de x et n psq n tend vers $+\infty$

$$= |2x-5| \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}$$

donc $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |2x-5|$$

Pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k}$ converge, il faut $|2x-1| < 1$
(critès d'Alembert)

$$-1 < 2x-5 < 1$$
$$4 < 2x < 6$$
$$2 < x < 3$$

Fajr

$r = \frac{Max - Min}{2}$

Intervalle de convergence $x \in]2, 3[$

donc le rayon $r = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{3-2}{2}\right)$.

Exemple : Determiner, si possible, le rayon de convergence

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (8x+1)^k$$

$$a_{n+1} = \left|(8x+1)^{n+1}\right|$$

$$a_n = \left|(8x+1)^n\right|.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} |8x+1|$$

$$|8x+1| < 1 \iff -1 < 8x+1 < 1$$

$$\iff -\frac{1}{4} < x < 0 \Rightarrow x \in \left]-\frac{1}{4}, 0\right[$$

Donc $r = \frac{1}{8}$.

Developpement d'une fonction en série entière :

* Dévelloppement de Taylor :

Soit $f(x)$ une fonction de classe C^n (Infiniment dérivable)

au voisinage de $x = x_0$ $\quad |x - x_0| \simeq 0$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} +$$
$$\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \dots +$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

Cas particulier : $x_0 = 0$ (Developpement de Maclawrin)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Exemple : $f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x$

$\vdots$ ← ça se répète

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Exemple : $g(x) = \sin(x)$

On a

$g(x) = \sin x \qquad g(0) = \sin(0) = 0$

$g'(x) = \cos x \qquad g'(0) = \cos(0) = 1$

$g''(x) = -\sin(x) \qquad g''(0) = -\sin(0) = 0$

$g'''(x) = -\cos(x) \qquad g'''(0) = -1$

$g^4(x) = \sin(x) \qquad g^{(4)}(0) = 0$

Fonction impair

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ; \quad \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Fonct° paire

$\cos(-x) = \cos(x)$

$x_0 = 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$f(x) = e^{x^2} \qquad x \simeq 0 \qquad$ On pose $y = x^2$

$$e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\int_0^{0,5} e^{x^2} dx = \int_0^{0,5} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \, dx$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} \right)_0^{0,5}$$

$$= 0,5 + \frac{(0,5)^3}{3} + \frac{(0,5)^5}{10} + \frac{(0,5)^7}{42}.$$

Exemple : $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ← ça ressemble à la Somme d'une suite géométrique

$$\frac{a}{1-r}$$

donc on considère $a = 1$, $r = -x$

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + C$$

$x = 0$ donc $\ln(1) = C = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

On peut aussi utiliser la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-x \\ \hline \underline{-1-x} & 1-x+x^2-x^3 \\ -x & \\ \underline{+x+x^2} & \\ x^2 & \\ \underline{-x^2-x^3} & \\ -x^3 & \end{array}$$

Fajr

Alors $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

Exemple : $g(x) = \text{Arctan}(x)$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{1-r} \qquad a = 1, \quad r = -x^2$$

Je multiplie ce qu'il mit par $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$$

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

---

* e^x si $x_0 = 4$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

$f(x) = e^x \qquad f(4) = e^4$

$f'(x) = e^x \qquad f'(4) = e^4$

$$e^x = e^4 + e^4(x-4) + \frac{e^4}{2}(x-4)^2 + \frac{e^4}{3!}(x-4)^3 + \dots + \frac{e^4}{n!}(x-4)^n$$

$$e^x = e^4\left(1 + (x-4) + \frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(x-4)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-4)^4}{n!}\right).$$

$$e^x = e^4\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}\right)$$

On pose $y = x-4$ $\quad x \simeq 4 \Rightarrow y \to 0$

$$e^x = e^{y+4} = e^y e^4$$

$$e^x = e^4 \left(e^y\right)$$

$$= e^4 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = e^4 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}\right)$$

Fajr

Analyse numérique

La formule de Taylor :

$$\rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R\left((x_0-x_0)^{n+1}\right).$$

On pose $x - x_0 = h$

$$\rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R\left(h^{n+1}\right).$$

Exemple : Trouver le développement de Taylor

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ autour $x_0 = 1$

$f(1) = 1$; $f'(x) = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$

$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}$

On a $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2$

$$f(1+h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + R\left(h^3\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+h}} = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + R\left(h^3\right)$$

Fajr

1- $\frac{1}{\sqrt{1,01}} = \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{0,01}_{h}}} = 1-\frac{1}{2}(0,01)+\frac{3}{8}(0,01)^2 = 0,99503$

2- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{1}_{h}}} = 1-\frac{1}{2}+\frac{3}{8} = 0,875$

* On peut dire que le développement est exact lorsqu'il est proche de h

* Développement de Taylor pour une fonction de plusieurs variables :

Soit $f(x,y)$ au voisinage de (x_0, y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right.$$

À l'ordre 2

Exemple : $f(x,y) = x^2 + x\sin y$ au voisinage de $(1,0)$.

$f(1,0) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+\sin y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 1$$

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) + (y-0) + \frac{1}{2!}\left(2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-0)\right)$$

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + (x-1)^2 + y(x-1).$$

On a $(x_0, y_0) = (1,0)$

$h_1 = (x-1)$; $h_2 = (y-0)$

$$f(1+h_1, 0+h_2) = 1 + 2h_1 + h_2 + h_1^2 + h_2 h_1$$

$$f(1,0) \longrightarrow f(\underbrace{1,01}_{h_1 = 0,01} ; \underbrace{0,2}_{h_2 = 0,2}) = 1,2221$$ Taylor

$$f(0,01 ; 0,2) = 1,0236$$ Directe

L'erreur

$$\Delta f = |f - f^*| = 0,1985 \simeq 0,2$$

Fajr

Analyse d'erreur :

1) Définition :

Soit x un nombre et x^* une approximation de ce nombre

L'erreur absolue est définie par $\Delta x = |x - x^*| = E_a$

L'erreur relative est définie par :

- $E_r = \dfrac{\Delta x}{|x|} = \dfrac{|x - x^*|}{|x|}$

- $E_r = \dfrac{\Delta x}{|x^*|}$

Exemple : $x = \pi = 3,141592$

$x^* = 3,1419$.

$E_a = 3,08 \times 10^{-4}$ $E_r = 9,8 \times 10^{-5}$

Définition : Un nombre a 5 chiffres significatifs

$0, d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots \times 10^e$

$E_a \leqslant 0,5 \times 10^{e-5}$ ← chiffres significatifs.

$x = 3{,}141592$

$x = 0{,}3141592 \times 10^{1}$ e

$E = 3{,}08 \times 10^{-4}$

$E_a = 0{,}308 \times 10^{-3}$ S

$= 0{,}308 \times 10^{-3} < 0{,}5 \times 10^{-3}$ nombre signif

$< 0{,}5 \times 10^{1-4}$ e-S

Exemple : Déterminer le nbr de chiffres significatifs.

Le 0 à gauche on les compte pas par contre à gauche on le compte

408,07	93,0	0045,7	0,046	0,1000
$S = 5$	$S = 3$	$S = 3$	$S = 2$	$S = 3$

Exemple : Tous les chiffres des nombres suivants sont significatifs ; Trouvez une borne sup de Δx.

- $x = 0{,}1234 \times 10^{0}$ donc $s = 4$ $e = 0$

$\Delta x < 0{,}5 \times 10^{0-4}$

$\Delta x < 0{,}5 \times 10^{4}$

- $x = 8{,}760 = 0{,}8760 \times 10^{1}$ donc $s = 4$ $e = 1$

$\Delta x < 0{,}5 \times 10^{-3}$

- $x = 0{,}11285 \times 10^{-3}$ donc $s = 5$ $e = -3$

$\Delta x < 0{,}5 \times 10^{-8}$

Fajr

- $x = 0{,}25415 \times 10^8$ $\quad s = 5 \quad e = 8$

$\Delta x \leq 0{,}5 \times 10^3$

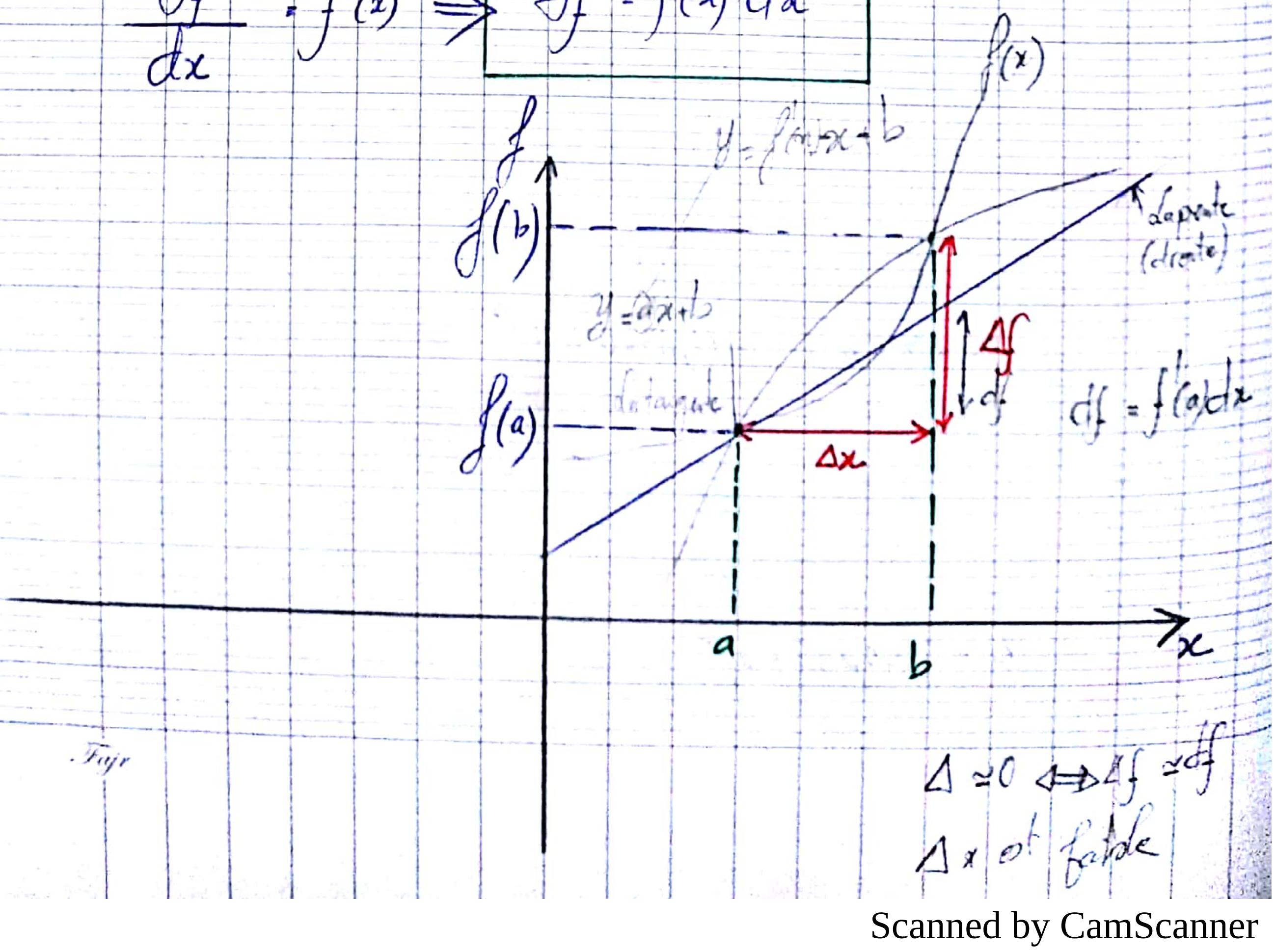
Propagation d'une erreur :

Comment se propage une erreur ?

$x^* \longrightarrow f(x^*)$ Cette valeur on va l'introduire dans une fct

$\Delta x = |x - x^*|$ $\quad \Delta f = |f(x) - f(x^*)|$

$$\frac{\partial f}{dx} = f'(x) \Rightarrow \boxed{\partial f = f'(x)\, dx}$$



$df = f'(a)dx$

$\Delta \simeq 0 \Leftrightarrow \Delta f \simeq df$

Δx est faible

$$\Delta f = |f'(x)|\,\Delta x$$

Exemple : Estimer les erreurs commises dans l'évaluation des fonctions ; Tous les chiffres sont significatifs.

1-/ $f(x) = \ln(x)$; $x^* = 2{,}01$ $\quad s = 3$

2-/ $f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$; $x^* = 1{,}0100$ $\quad s = 5$

Solution :

1-/ Δf ?

$$\Delta f = |f'(x^*)|\,\Delta x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x^*) = \frac{1}{2{,}01}$$

On a $s = 3$ et $x^* = 0{,}201 \times 10^{1}$ Donc $\Delta x \leq 0{,}5 \times 10^{-2}$

$$\Delta f \leq \frac{1}{2{,}01} \times 0{,}5 \times 10^{-2}$$

$$\Delta f \leq 2{,}48 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{f(x) = f(x^*) \pm \Delta f}$$

La fonction = dérivé + l'erreur

2/ $\Delta x \leq 0,5 \times 10^{1-5}$

$\leq 0,5 \times 10^{-4}$

donc $\Delta f \leq \dfrac{1}{1+x^2} \times 0,5 \times 10^{-4}$

$$\Delta f \leq \frac{1}{1+(1,10100)^2} \times 0,5 \times 10^{-4}$$

$$\Delta f \leq 2,475 \times 10^{-5}$$

Cas de fonction de plusieurs variables :

On a dit $\dfrac{df}{dx} = f'(x) \Longrightarrow df = f'(x)dx$

Soit $f(x,y,z)$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}$$

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f(x^*,y^*,z^*)}{\partial z} \right| \Delta z$$

Exemple : Estimer les erreurs commises dans l'évaluation des fonctions de plusieurs variables. Tous les chiffres sont significatifs a-/ $f(x,y) = x^2 y^3$; $x^* = 12,1$; $y^* = 3,721$

b-/ $f(x,y,z) = -xyz$; $x^* = 1,260$; $y^* = 0,5 \times 10^{-3}$; $z^* = 12,93$

---

a-/ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(12,1 \,;\, 3,772) = 1246,79$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(12,1 ; 3,721) = 6081,50.$

On a $x^* = 12,1 = 0,121 \times 10^2$ $\quad s = 3$, $p = 2$ $\quad \Delta x \leq 0,5 \times 10^{-1}$

$y^* = 3,721 = 0,3721 \times 10^1$ $\quad s = 4$, $e = 1$ $\quad \Delta y \leq 0,5 \times 10^{-1}$

$\Delta f = 1246,79 \times 0,5 \times 10^{-1} + 6081,5 \times 0,5 \times 10^{-3}$

$= 65,38025.$

On a $f(x^*, y^*) = f(12,1 \,;\, 3,721) = 7543,09 = 0,754309 \times 10^4$

$\Delta f = 65,38026$

$= 0,6538026 \times 10^2 < 0,5 \times 10^3$

On a déjà Δf et on veut la comparer (vers sa majorant)

donc on fait 10^2 plus grand

(2)

10^{e-s} $\quad e - s = 3$ donc

$4 - 1 = 3$ (3) → ce 1 est le nombre de chiffres significatifs = 7

(1)

b/ $\frac{\partial f}{\partial x} = -yz = -6,465 \times 10^{-3}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -xz = -16,2918$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy = -6,3 \times 10^{-4}$

- $\Delta x = 0,5 \times 10^{-3}$

$s = 4$, $x^* = 0,1260 \times 10^{1}$

- $\Delta y = 0,5 \times 10^{-4}$

$s = 1$; $e = -3$

- $\Delta z = 0,5 \times 10^{-2}$

$s = 4$ $e = 2$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$$

$= 6,465 \times 10^{-3} \times 0,5 \times 10^{-3} + 16,2918 \times 0,5 \times 10^{-4} + 6,3 \times 10^{-4} \times 0,5 \times 10^{-2}$

$= 8,2 \times 10^{-4}$

(2) Equations non linéaires :

la présence de $x = 1$.

- Equation linéaire $= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$

Fajr

Soit $a, x, b \in \mathbb{R}$

$a_1 x_1^2 + a_2 x_2, x_3 + \dots = b$

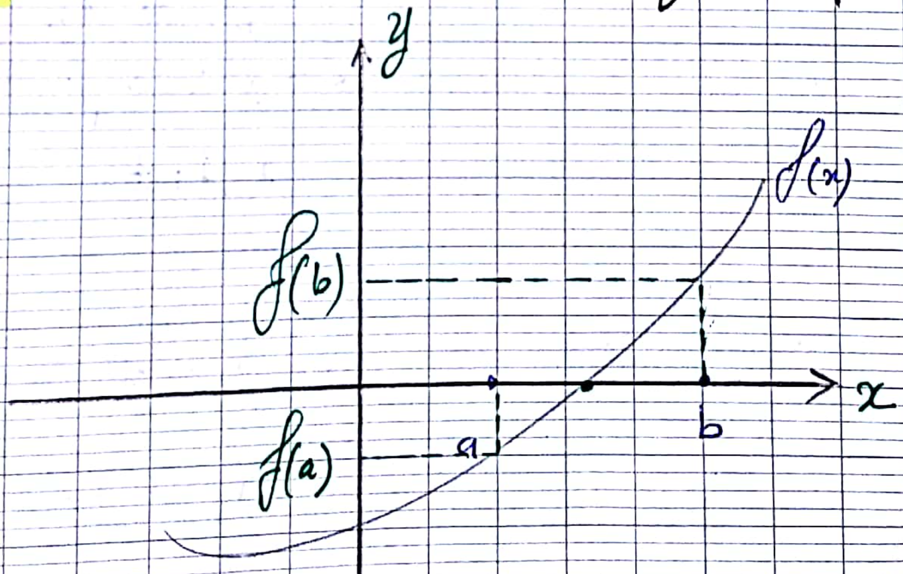
intersection dans les points des abscisses.

Equation $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$ racine de $f(x)$

Définition : x_0 est une racine de $f(x)$ alors $f(x_0) = 0$

2.1 : Méthode de la bisection :

But : Chercher une racine d'une fonction $f(x)$



$[a, b] \,/\, f(a) \times f(b) < 0$

On pose $x_m = \dfrac{a+b}{2}$

$[a, x_m]$ $f(a)\,f(x_m) < 0$

$\cancel{[x_m, b] \; f(b)\,f(x_m) > 0}$

Algorithme de la bissection :

1/ $[x_1, x_2]$ pour lequel $f(x) = 0$

2/ Etant donnée e_a, le critère d'arrêt et N le nombre max d'itérations

3/ $x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

4/ Si $\dfrac{|x_2 - x_1|}{2\,|x_m|} < e_a$ →
- Convergence atteinte
- écrire x_m
- écrire $f(x_m)$
- Arrêt.

5/ Si $f(x_1)\,f(x_m) < 0$ alors $x_m = x_2 \Longrightarrow [x_1, x_m]$

Si $f(x_m)\,f(x_2) < 0$ alors $x_m = x_1 \longrightarrow [x_m, x_2]$

6/ Si N est atteint pas de convergence.

Exemple : $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ possède une racine dans $[1;2]$

$f(1) = -4$, $f(2) = 3$

donc $f(1) \times f(2) < 0$ donc $x_m = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$

- $f(1{,}5) = -1{,}87$ donc $[1{,}5, 2] \Rightarrow x_m = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$
- $f(1{,}75) = 0{,}17$ donc $[1{,}5; 1{,}75] \Rightarrow x_m = 1{,}625$
- $f(1{,}625) = -0{,}94$ donc $[1{,}625; 1{,}75]$

Comment savoir le nombre d'itérations

$$L \rightarrow \frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{2^2} \rightarrow \frac{L}{2^3} \rightarrow \frac{L}{2^4}$$

donc $\frac{L}{2^N} < \Delta r$

$$\frac{2^N}{L} > \frac{1}{\Delta r} \Leftrightarrow 2^N > \frac{L}{\Delta r}$$

$$\log_2 2^N > \log_2\left(\frac{L}{\Delta r}\right)$$

$$N > \frac{Ln(L/\Delta r)}{Ln 2}$$

erreur

$$N > \frac{ln(L) - Ln(\Delta r)}{Ln 2}$$

nombre d'i

Fajr

On a $L = 1$

$$N > \frac{\ln(1) - \ln(0{,}01)}{\ln(2)}$$

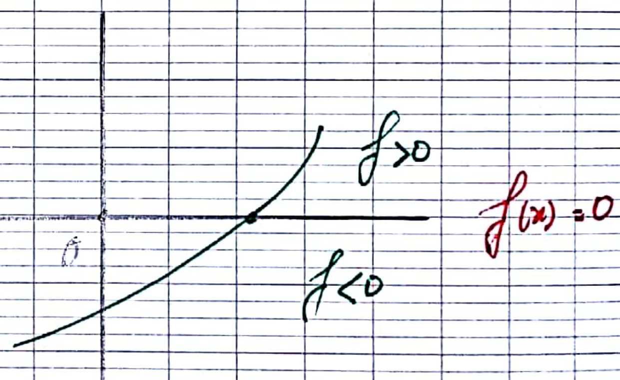
$$N > 6{,}64$$

donc $N = 7$

Methode de bissection :

Résoudre $f(x) = 0$ $\quad [a, b]$

$$f(a) \times f(b) < 0$$



$$x_m = \frac{a+b}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$f(x_m) \times f(x_1) < 0$$

ou $f(x_m) \times f(x_2) < 0$

$$f(x) = -0{,}9\,x^2 + 1{,}7\,x + 2{,}5 \qquad [2{,}8\,;3]$$

$f(2{,}8) = 0{,}204$; $f(3) = -0{,}5$

$$f(2{,}8) \times f(3) < 0$$

$$x_m = \frac{3 + 2{,}8}{2} = 2{,}9$$

$$f(2{,}9) = -0139$$

$[2,8 ; 2,9]$ $\quad x_m = \frac{2,8 + 2,9}{2} = 2,85$

$f(2,85) = 0,03$

$[2,85 ; 2,9]$ $\quad x_m = \frac{2,85 + 2,9}{2} = 2,876$

$f(2,876) = -0,05$

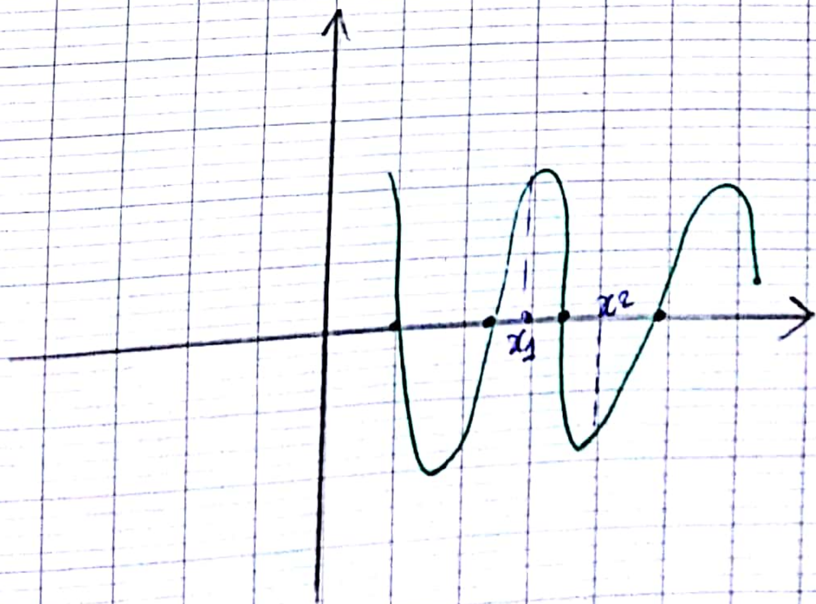
Deux indications pour la convergence

* L'image approche de 0
* x_m sont un peu égales

$[2,86 , 2,87]$ $\quad x_m = 2,86$

$[x_1, x_2]$

$f(x_1) \times f(x_2) > 0$



C'est une méthode fermée, il faut psq il y a plusieurs racines

2.2 Méthode des points fixes :

- Déf : Un point fixe x pour une fonction $g(x)$ et tel que $g(x) = x$

Exp : $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad x = 0$; $x = 1$;

$\Rightarrow g(0) = 0$, $g(1) = 1$

donc se sont des points fixes.

- Résoudre $f(x) = 0$

$\downarrow$

transformer $g(x) = x$ $\rightarrow$ nous propose plusieurs fonctions

Exp : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2x+3}}$

$2x = x^2 - 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{x^2 - 3}{2}}$

$x(x-2) - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{x-2}}$

$g_1(x) = \sqrt{2x+3}$; $g_2(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$; $g_3(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$

Fajr

Algorithme de la méthode des points fixes :

$$x = g(x)$$

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$ Suite

x_0
$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$

1-/ Soit ea critère d'arrêt
2-/ Soit N le nombre max d'itération
3-/ Estimer une valeur pour x_0
4-/ $x_{n+1} = g(x_n)$
5-/ Si $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < ea$.

- Arrêt
- Afficher x_n
- Convergence

6-/ Si N est atteint pas de convergence. (Donc revenir à 3)

Exp : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ Objectif : Trouver les racines $f(x) = 0$

$x_0 = 4$; $g_1(x) = \sqrt{2x+3}$

$x_1 = g(4) = \sqrt{11} = 3,31$

$x_2 = g(x_1) = g(3,31) = 3,10$

$x_3 = g(x_2) = g(3,10) = 3,03$

$x_4 = g(x_3) = g(3,03) = 3,01$

$x_5 = g(x_4) = g(3,01) = 3,003$

$r \simeq 3,00$ → Converge

Maintenant, on change la fonction

$x_0 = 4$; $g_2 = \frac{3}{x-2}$

$x_1 = g(4) = 1{,}5$; $x_2 = g(1{,}5) = -6$

$x_3 = (-6) = -0{,}375$; $x_4 = g(-0{,}375) = -1{,}26$

$x_5 = g(-1{,}26) = -0{,}92$; $x_6 = g(-0{,}92) = -1{,}02$

$x_7 = g(-1{,}02) = -0{,}99$

autour de -1

$r_2 = 1$

On a $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$ $r_1 = \frac{2+4}{2} = 3$; $r_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

On a 2 racines

. Maintenant, on choisit la 3ème fonct :

$g_3(x) = \frac{x^2-3}{2}$; $x_0 = 4$

$g_3(x_1) = 6{,}5$; $x_2 = g(6{,}5) = 19{,}6$

$x_3 = g(19{,}6) = 191$

ici l'algorithme diverge.

Convergence de la méthode des points fixes :

$f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x$

Fajr

Soit r une racine de $f(x)$ et un point fixe.

$$\begin{cases} f(r) = 0 \\ r = g(r) \end{cases}$$

Erreur à l'ordre n

$$e_n = x_n - r \Rightarrow x_n = e_n + r$$

Erreur à l'ordre $n+1$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r$$

$$e_{n+1} = g(x_n) - g(r)$$

$$e_{n+1} = g(e_n + r) - g(r)$$

$$e_{n+1} = g(r + e_n) - g(r)$$

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2}$

Developpement de Taylor

$$g(r+e_n) = g(r) + g'(r)e_n + \underbrace{g''(r)\frac{e_n^2}{2!} + g^3(r)\frac{e_n^3}{3!} + \dots}_{\text{on peut la negliger à cause de petits valeurs } e_n}$$

donc $g(r+e_n) = g(r) + g'(r)e_n$

$$e_{n+1} = g(r) + g'(r)e_n - g(r)$$

$$\boxed{e_{n+1} = g'(r)e_n}$$

le passage de x_0 vers x_1 à travers de $g(x)$ mais il y a une erreur d'ordre 1

$$x_0 \downarrow g(x_0) \Rightarrow e_1 = |x_1 - x_0|$$

$$x_1 \downarrow g(x_1) \Rightarrow e_2 = |x_2 - x_1|$$

x_2

$\downarrow$

$$x_{n-1} \downarrow \Rightarrow e_n = |x_n - x_{n-1}|$$

$$x_n \downarrow \Rightarrow e_{n+1} = |x_{n+1} - x_n|$$

x_{n+1}

On a $e_{n+1} = g'(r) e_n$

$\Leftrightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(r)$

et $-1 < g'(r) < 1$

$|g'(r)|$ taux de convergence $\left(|g'(r)| < 1 \right)$

Remarque : x_0 joue un rôle dans la convergence.

Déf : Un point fixe r de $g(x)$ est dit attractif si $|g'(r)| < 1$ et repulsif si $|g'(r)| > 1$ indéterminer si $|g'(r)| = 1$

Remarque :

Si $|g'(r)| < 1$ et $g'(r) \neq 0$

la methode converge à l'ordre 1

Si $|g'(r)| < 1$ et $g'(r) = 0$; $g''(r) \neq 0$

la methode converge à l'ordre 2

Exp : $r_1 = -1$; $r_2 = 3$

à partir ...

$$g_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \quad ; \quad g_2'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} \quad ; \quad g_3'(x) = x$$

	$r_1 = -1$	$r_2 = 3$
$g_1'(r)$	1	$1/3$ < 1
$g_2'(r)$	$-1/3$	-3
$g_3'(r)$	-1	3

$|g'(r)| < 3$

diverger

2.3 La methode de Newton :

$f(x) = 0$ $\quad x_0$ faible variation (qui s'appelle Δx)

$$x_1 = x_0 + \delta_{x_0}$$

$$f(x_0 + \delta_x) \simeq 0$$

$$f(x+\delta_x) = f(x) + f'(x)\delta_x + \underbrace{f''(x)\frac{\delta_x^2}{2!} + \cdots}_{\text{il est négligeable}}$$

$$f(x+\partial x) \simeq 0 \Rightarrow f(x) + f'(x)\,\partial x \simeq 0$$

$$\partial_x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_0 \longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Algorithme de la méthode de Newton :

1-/ Soit ea un critère d'arrêt.

2-/ " N le nombre d'itération

3-/ " x_0 une valeur initiale

4-/ Effectuer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

5-/ Si $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < ea$

- Convergence atteinte - Écrire la solution x_{n+1}

6-/ Si N est atteinte pas de convergence retour à 3.

Fajr

Exp : Résoudre $e^{-x} - x = 0$

$$f(x) = e^{-x} - x \qquad x_0 = 0$$

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

erreur

$x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5 \qquad e_1 = 0{,}5$

$$x_2 = 0{,}5 + \frac{e^{-0{,}5} - 0{,}5}{e^{-0{,}5} + 1} = 0{,}566 \qquad e_1 = 0{,}066$$

$$x_3 = 0{,}566 + \frac{e^{-0{,}566} - 0{,}566}{e^{-0{,}566} + 1} = 0{,}567 \qquad e_3 = 0{,}001$$

$$x_3 \simeq r \simeq 0{,}567143$$

Convergence de la methode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f'(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{(f'(x))^2 - (f(x))^2 + f(x) f''(x)}{(f''(x))^2}$$

Fajr

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

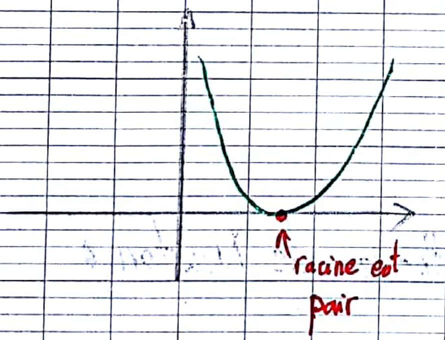
r : racine $|g'(r)| < 1$

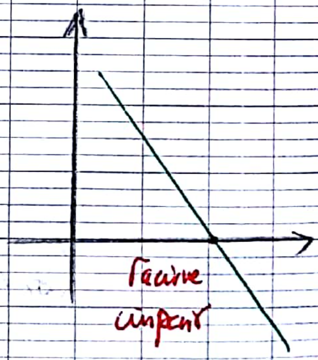
$g'(r) = 0$ $f'(r) \neq 0 \Rightarrow f''(r) = 0$

la convergence d'ordre 2.

Cas des racines multiples :

$f(x) = (x-2)^3$





$f(x) = (x-r)^m h_1(x)$

$\lim_{x \to r} h(x) \neq 0$ $h(r) \neq 0$

r est une racine de $f(x)$ de multiplicité m

$f(x) = (x-2)(x-3)^2(x+2)$

$r_1 = 2$ racine simple

$r_2 = 3$ " Double

$r_3 = -2$ " triple

Fajr

Déf : r est une racine de multiplicité de m

$$f(r)=0\ ;\ f'(r)=0\ ;\ f''(r)=0\ \dots\ f^{(m-1)}(r)=0$$

et $f^{(m)}(r) \neq 0$.

Exp : $f(x) = x\sin(x)$ 0 est une racine $f(0)=0$

$f'(x) = x\cos(x) + \sin(x)$ $f'(0)=0$

$f''(x) = \cos(x) - x\sin(x) + \cos$ $f''(0) = 2 \neq 0$

Donc 0 est une racine double de $f(x)$.

On a $g'(x) = \dfrac{f(x)\, f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$

$$f(x) = (x-r)^m h(x)$$

$$f'(x) = m(x-r)^{m-1} h(x) + (x-r)^m h'(x)$$

$$f''(x) = m(m-1)(x-r)^{m-2} h(x) + m(x-r)^{m-1} h'(x) + m(x-r)^{m-1} h'(x) + (x-r)^m h''(x)$$

Après calcule $\boxed{g'(r) = 1 - \frac{1}{m}}$ converge quatratique $m=1$

quadratique càd ax^2+bx+c

$m \neq 1$ $g'(r) \neq 0$ Convergence linéaire.

Exp : Déterminer la multiplicité m de la racine r

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ $r = 0$

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $r = 1$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $r = 0$

Solution :

(a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ $f'(0) = 1$

0 est une racine simple.

(b) $f'(x) = 2x - 2$ $f'(1) = 0$

$f''(x) = 2 \neq 0$ donc $r = 1$ racine double

(c) impossible r ce n'est pas une racine de f

(psq il y a division par 0)

Fajr

Scanned by CamScanner