



# Echantillonnage non-uniforme

## *Application aux télécommunications par satellite*

Quentin Biache & Anthony Delannoy  
Xueyang Li & Jérôme Combaniere

4 juin 2014

# PLAN

INTRODUCTION

INTERFACE GRAPHIQUE

SIGNAUX TÉLÉCOMS

RECONSTRUCTION

CONCLUSION

# INTRODUCTION

## Le sujet :

- ▶ Son contexte
- ▶ Les problématiques des transmissions en télécommunications
- ▶ Le problème de l'échantillonnage non-uniforme
- ▶ La prise en main du sujet, la répartition des tâches

# LE CONTEXTE DU SUJET...

- ▶ ...fait l'objet d'une thèse
  - déterminer si l'échantillonnage non-uniforme peut être utilisé en pratique,
  - notre objectif : fournir une interface graphique remplaçant de lourdes fonctions de reconstruction
  
- ▶ ...dans la continuité d'un projet long
  - leur objectif : création de codes Matlab pour appliquer les méthodes théoriques de reconstruction, calcul d'erreur et de complexité
  - réutilisation des codes fournis pour les intégrer dans une interface graphique utilisable sans pré-requis

# LE CONTEXTE DU SUJET...

- ▶ ...fait l'objet d'une thèse
  - déterminer si l'échantillonnage non-uniforme peut être utilisé en pratique,
  - notre objectif : fournir une interface graphique remplaçant de lourdes fonctions de reconstruction
- ▶ ...dans la continuité d'un projet long
  - leur objectif : création de codes Matlab pour appliquer les méthodes théoriques de reconstruction, calcul d'erreur et de complexité
  - réutilisation des codes fournis pour les intégrer dans une interface graphique utilisable sans pré-requis

# LE CONTEXTE DU SUJET...

- ▶ ...fait l'objet d'une thèse
  - déterminer si l'échantillonnage non-uniforme peut être utilisé en pratique,
  - notre objectif : fournir une interface graphique remplaçant de lourdes fonctions de reconstruction
  
- ▶ ...dans la continuité d'un projet long
  - leur objectif : création de codes Matlab pour appliquer les méthodes théoriques de reconstruction, calcul d'erreur et de complexité
  - réutilisation des codes fournis pour les intégrer dans une interface graphique utilisable sans pré-requis

# LE CONTEXTE DU SUJET...

- ▶ ...fait l'objet d'une thèse
  - déterminer si l'échantillonnage non-uniforme peut être utilisé en pratique,
  - notre objectif : fournir une interface graphique remplaçant de lourdes fonctions de reconstruction
  
- ▶ ...dans la continuité d'un projet long
  - leur objectif : création de codes Matlab pour appliquer les méthodes théoriques de reconstruction, calcul d'erreur et de complexité
  - réutilisation des codes fournis pour les intégrer dans une interface graphique utilisable sans pré-requis

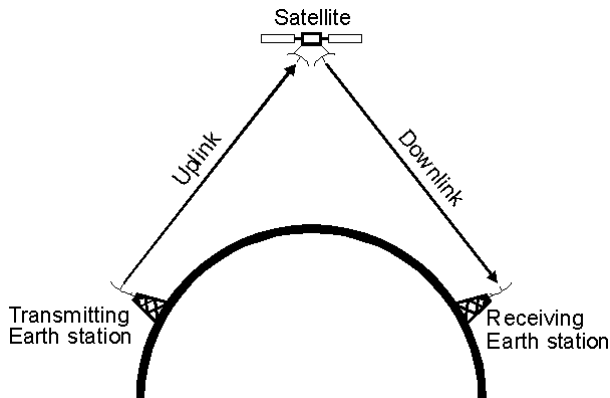
# LE CONTEXTE DU SUJET...

- ▶ ...fait l'objet d'une thèse
  - déterminer si l'échantillonnage non-uniforme peut être utilisé en pratique,
  - notre objectif : fournir une interface graphique remplaçant de lourdes fonctions de reconstruction
  
- ▶ ...dans la continuité d'un projet long
  - leur objectif : création de codes Matlab pour appliquer les méthodes théoriques de reconstruction, calcul d'erreur et de complexité
  - réutilisation des codes fournis pour les intégrer dans une interface graphique utilisable sans pré-requis



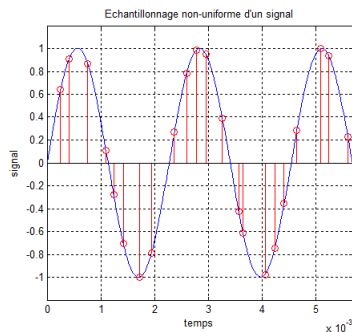
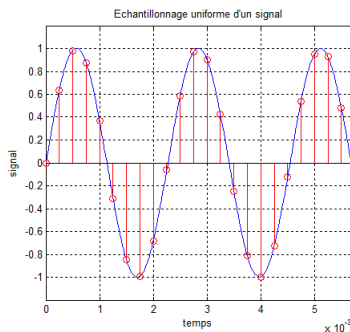
# INTRODUCTION

## Problématiques des transmissions en télécoms :



# INTRODUCTION

## Problématiques des transmissions en télécoms : l'échantillonnage



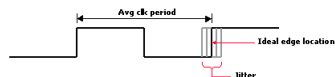
# INTRODUCTION

## L'échantillonnage non-uniforme :

- ▶ « Jitter » sur les instants d'échantillonnage : déviation de la période par rapport à la valeur d'origine ;
- ▶ Utilisation possible d'un échantillonnage volontairement non-uniforme pour s'adapter au contenu de l'image.

# INTRODUCTION

## L'échantillonnage non-uniforme :

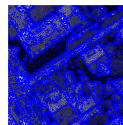


- ▶ « Jitter » sur les instants d'échantillonnage : déviation de la période par rapport à la valeur d'origine ;
- ▶ Utilisation possible d'un échantillonnage volontairement non-uniforme pour s'adapter au contenu de l'image.

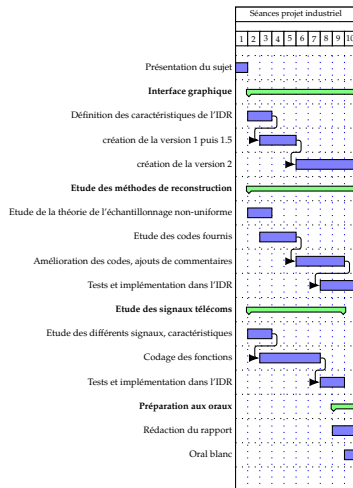
# INTRODUCTION

## L'échantillonnage non-uniforme :

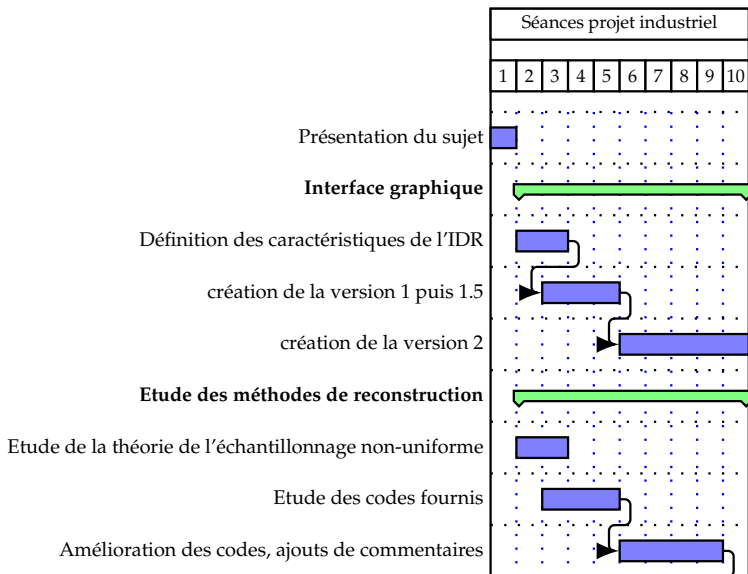
- ▶ « Jitter » sur les instants d'échantillonnage : déviation de la période par rapport à la valeur d'origine ;
- ▶ Utilisation possible d'un échantillonnage volontairement non-uniforme pour s'adapter au contenu de l'image.



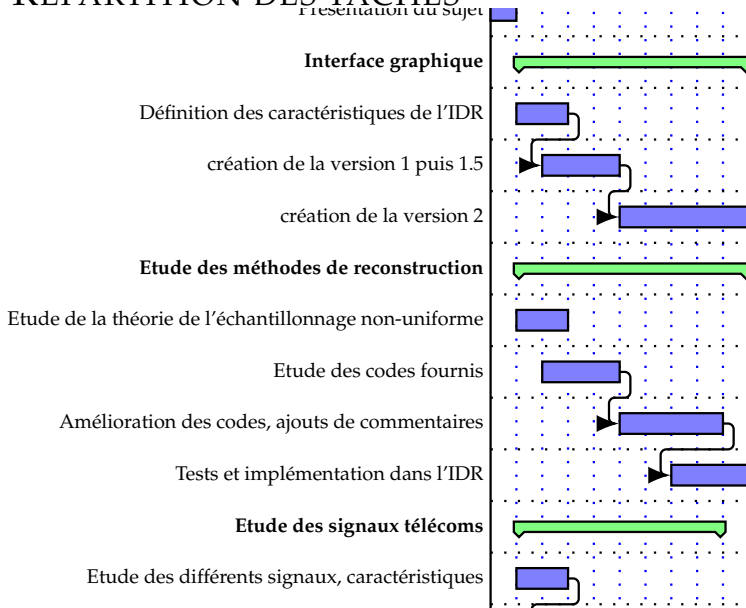
# RÉPARTITION DES TÂCHES



# RÉPARTITION DES TÂCHES

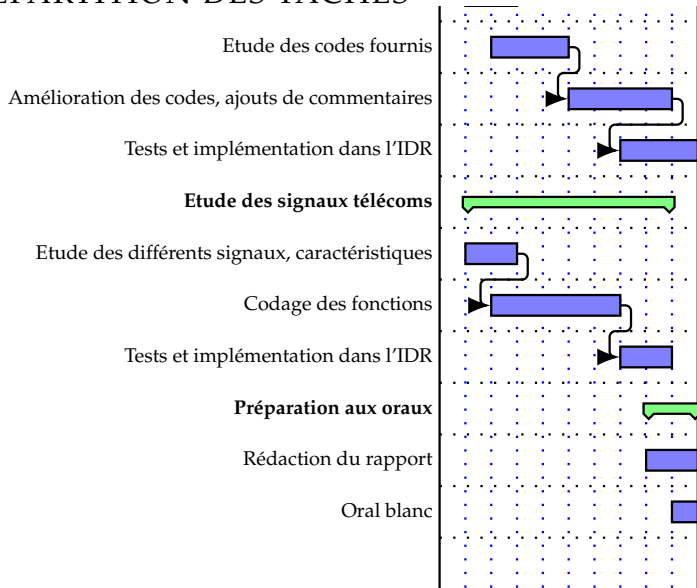


# RÉPARTITION DES TÂCHES





# RÉPARTITION DES TÂCHES



## INTRODUCTION

## INTERFACE GRAPHIQUE

Cahier des charges

IDR 1.0

IDR 1.5

IDR 2.0

Démonstration

## SIGNAUX TÉLÉCOMS

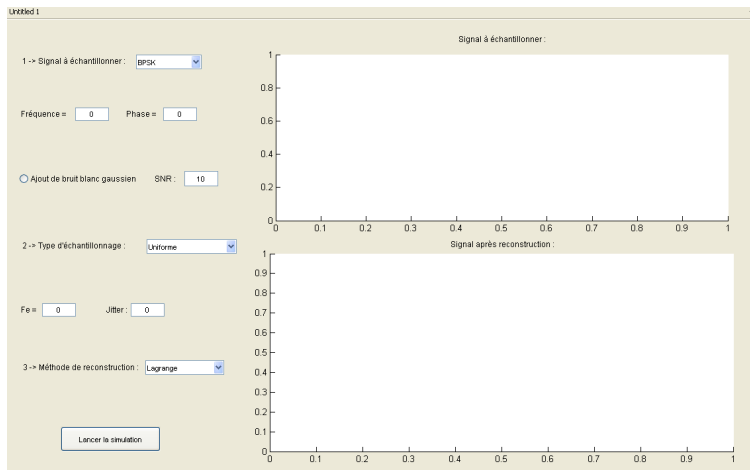
## RECONSTRUCTION

## CONCLUSION

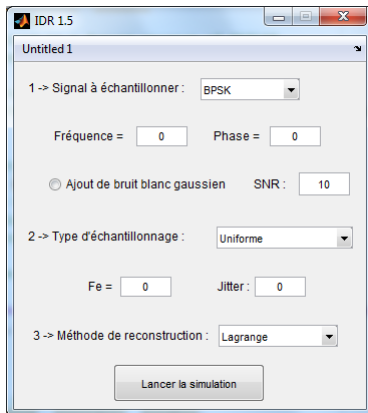
# CAHIERS DES CHARGES

- ▶ Interface intuitive et claire
- ▶ Dynamisme de l'interface
- ▶ Placement des fenêtres automatique
- ▶ Multiples signaux utilisés en télécommunications
- ▶ Echantillonnage non-uniforme (jitter uniforme)
- ▶ Diverses méthodes de reconstruction

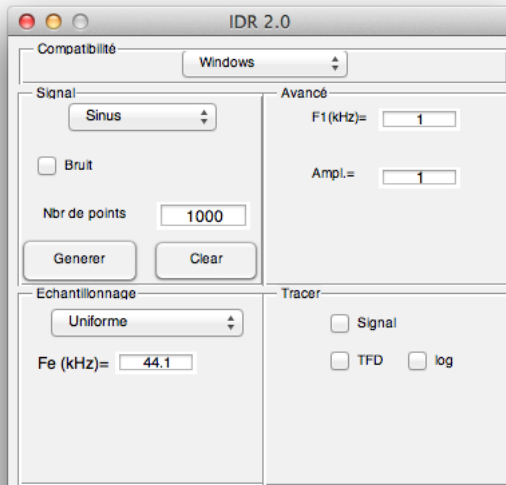
# IDR 1.0 (*Interface De Reconstruction*)



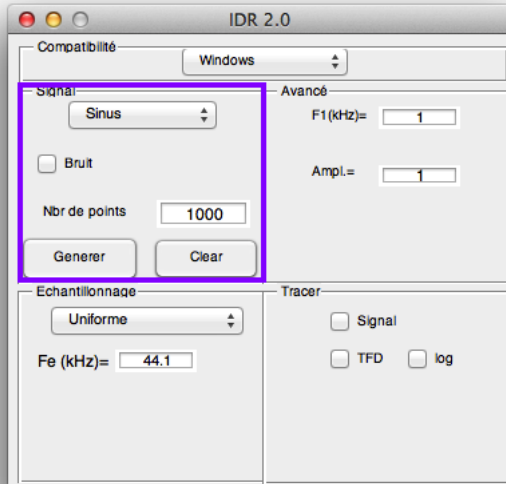
# IDR 1.5



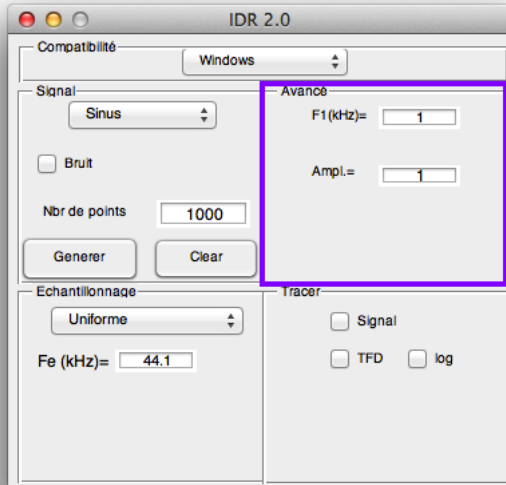
# IDR 2.0



# IDR 2.0

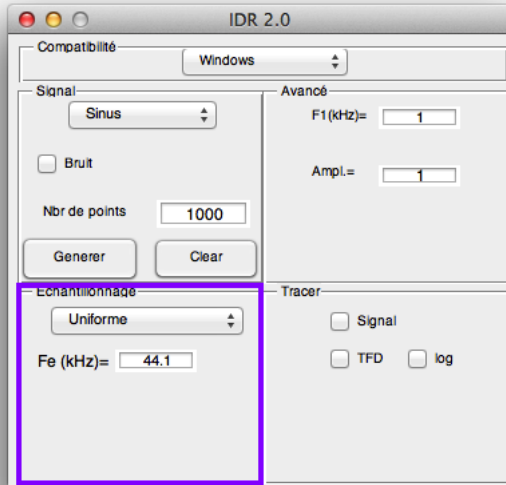


# IDR 2.0

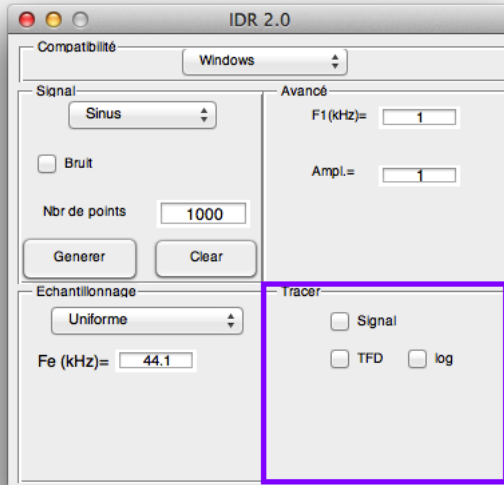




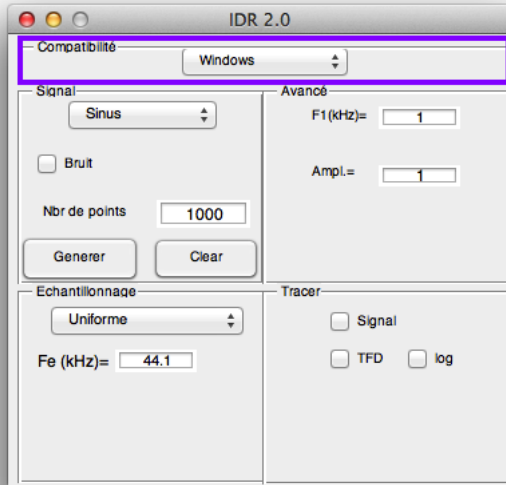
# IDR 2.0



# IDR 2.0



# IDR 2.0



# Démonstration

## INTRODUCTION

## INTERFACE GRAPHIQUE

## SIGNAUX TÉLÉCOMS

- Signaux de télécommunication

- Signal ASK

- Signal BPSK

- Signal FSK

- Signal QAM

- Signal RZ

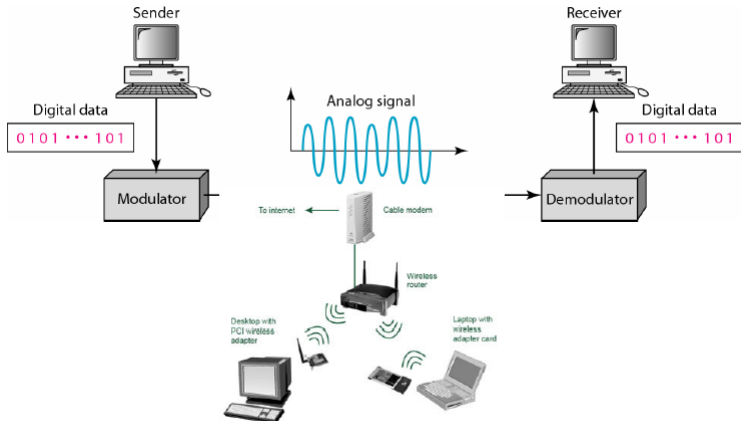
- Signal NRZ différentiel

## RECONSTRUCTION

## CONCLUSION

# SIGNAUX DE TÉLÉCOMMUNICATION

## Principe général



Tracé :



$$s(t) = \begin{cases} A_0 \cos(2\pi f_c t), & \text{binary 0} \\ A_1 \cos(2\pi f_c t), & \text{binary 1} \end{cases}$$

Tracé :

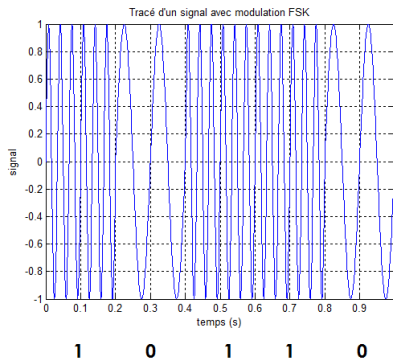


$$s(t) = \begin{cases} \text{Acos}(2\pi f_c t), & \text{binary 1} \\ \text{Acos}(2\pi f_c t + \pi), & \text{binary 0} \end{cases}$$



# LA MODULATION FSK (*Frequency Shift Keying*)

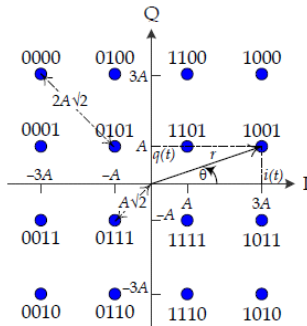
Tracé :



→ sauts de fréquence

# LA MODULATION QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

## Principe

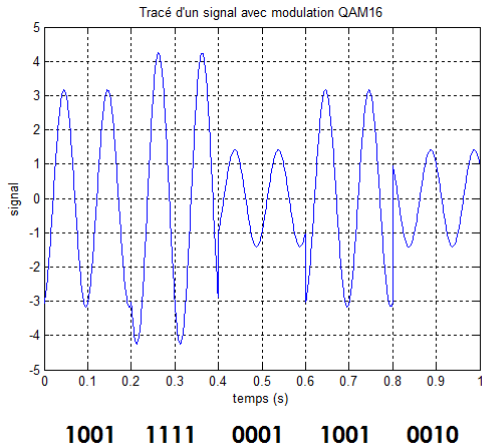


→ sauts d'amplitude et de phase ; un symbole code plusieurs bits.



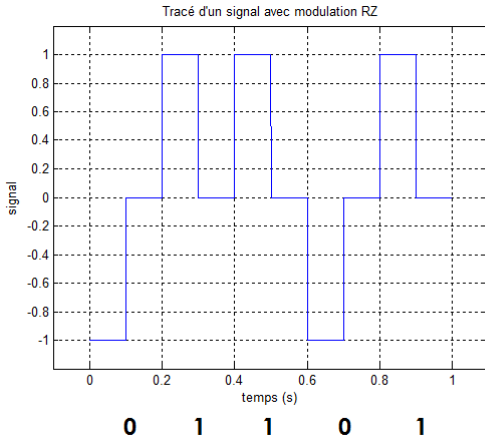
# LA MODULATION QAM

Tracé :



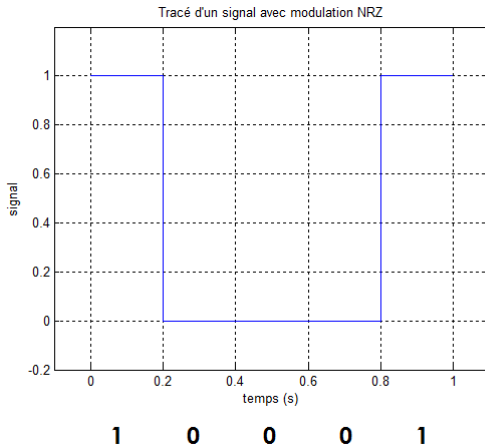
# LA MODULATION RZ (*Return to Zero*)

Tracé :



# LA MODULATION NRZ (*Non Return to Zero*)

Tracé :



## INTRODUCTION

## INTERFACE GRAPHIQUE

## SIGNAUX TÉLÉCOMS

## RECONSTRUCTION

- Limites des méthodes classiques

- Reconstruction matricielle

- Reconstruction Lagrangienne

- Reconstruction par splines cubiques

- Reconstruction itérative

## CONCLUSION

# LIMITES DES MÉTHODES DE RECONSTRUCTION CLASSIQUES



# LIMITES DES MÉTHODES DE RECONSTRUCTION CLASSIQUES

## Interpolateur de Shannon

# LIMITES DES MÉTHODES DE RECONSTRUCTION CLASSIQUES

## Interpolateur de Shannon

### ► Cas uniforme :

$$x_r(t) = \sum_{k=1}^{N_{ech}} x(t_k) \operatorname{sinc}(\pi f_{ech}(t - t_k))$$

Avec  $t_k = kT_{ech}$ . Ainsi :

$$\operatorname{sinc}(\pi f_{ech}(t_j - t_k)) = \delta_{ij}$$

→ on passe par tous les points de  $x_r$  échantillonnés.

# LIMITES DES MÉTHODES DE RECONSTRUCTION CLASSIQUES

## Interpolateur de Shannon

### ► Cas uniforme :

$$x_r(t) = \sum_{k=1}^{N_{ech}} x(t_k) \operatorname{sinc}(\pi f_{ech}(t - t_k))$$

Avec  $t_k = kT_{ech}$ . Ainsi :

$$\operatorname{sinc}(\pi f_{ech}(t_j - t_k)) = \delta_{ij}$$

→ on passe par tous les points de  $x_r$  échantillonnés.

### ► Cas non-uniforme : L'ensemble $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ n'a plus aucune raison d'être dans multiples de $T_{ech}$ !

# LIMITES DES MÉTHODES DE RECONSTRUCTION CLASSIQUES

## Conséquences :

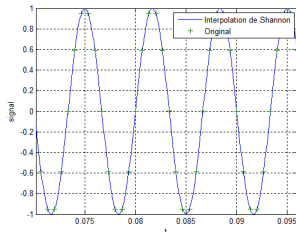


FIGURE : Reconstruction avec échantillonnage uniforme

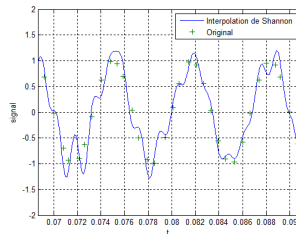


FIGURE : Reconstruction avec échantillonnage non uniforme (jitter = 50% de  $\frac{T_{ech}}{2}$ )

→ nécessité d'utiliser d'autres méthodes de reconstruction

# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

## Principe :

En notant  $\{t_j | j \in \llbracket 1, N_{ech} \rrbracket\}$  les instants uniformes et  $\{t_k^* | k \in \llbracket 1, N_{eval} \rrbracket\}$  les instants non-uniformes, on peut écrire :

$$x(t_j) = \sum_{k=1}^{N_{eval}} x_r(t_k^*) \operatorname{sinc}(\pi f_e(t_j - t_k^*))$$

# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

## Principe :

En notant  $\{t_j | j \in \llbracket 1, N_{ech} \rrbracket\}$  les instants uniformes et  $\{t_k^* | k \in \llbracket 1, N_{eval} \rrbracket\}$  les instants non-uniformes, on peut écrire :

$$x(t_j) = \sum_{k=1}^{N_{eval}} x_r(t_k^*) \operatorname{sinc}(\pi f_e(t_j - t_k^*))$$

## Reconstruction du signal

Le signal est reconstruit ensuite par inversion matricielle (pseudo-inverse).

# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

## Principe :

En notant  $\{t_j | j \in \llbracket 1, N_{ech} \rrbracket\}$  les instants uniformes et  $\{t_k^* | k \in \llbracket 1, N_{eval} \rrbracket\}$  les instants non-uniformes, on peut écrire :

$$x(t_j) = \sum_{k=1}^{N_{eval}} x_r(t_k^*) \operatorname{sinc}(\pi f_e(t_j - t_k^*))$$

## Reconstruction du signal

Le signal est reconstruit ensuite par inversion matricielle (pseudo-inverse).

## Remarque

Il faut nécessairement évaluer la reconstruction sur des instants uniformes.



# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

## Tests sous Matlab

- ▶ Ajout de commentaires dans le code fourni
- ▶ Ajout de fonctions pour simplifier la compréhension

# LA RECONSTRUCTION MATRICIELLE

## Tests sous Matlab

- ▶ Ajout de commentaires dans le code fourni
- ▶ Ajout de fonctions pour simplifier la compréhension

## Tracés obtenus :

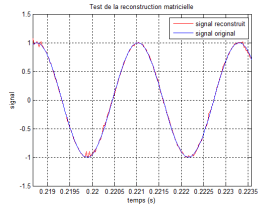


FIGURE : Reconstruction du signal (jitter = 99%  $\frac{T_{ech}}{2}$ , fenêtre de 21 points)

# RECONSTRUCTION PAR LA FORMULE DE LAGRANGE MODIFIÉE

# RECONSTRUCTION PAR LA FORMULE DE LAGRANGE MODIFIÉE

## Principe :

Utilisation des polynômes interpolateurs de Lagrange

# RECONSTRUCTION PAR LA FORMULE DE LAGRANGE MODIFIÉE

## Principe :

Utilisation des polynômes interpolateurs de Lagrange

Formules issues de la théorie :

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} H_M(t) \left[ \sum_{|k|=0}^M a_M(t, t_k) x(t_k) \right]$$

$$a_M(t, t_k) = \frac{G_M(t_k)}{(t - t_k) F'_M(t_k) \sin(\pi t_k)}$$

$$H_M(t) = \frac{F_M(t)}{G_M(t)} \sin(\pi t)$$

$$G_M(t) = \pi t \prod_{1 \leq |k| \leq M-1} \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right) \text{ et } F_M(t) = \prod_{0 \leq |k| \leq M} \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)$$

# RECONSTRUCTION PAR LA FORMULE DE LAGRANGE MODIFIÉE

Résultats après simplification :

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq |k| \leq M} x(t_k) \frac{f_k(t)}{f_k(t_k)}$$

$$f_k(t) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{l+1} \frac{\prod_{\substack{0 \leq |j| \leq M \\ j \neq k}} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right)}{\prod_{\substack{1 \leq |j| \leq M-1 \\ j \neq l}} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right)}, & \text{pour } t = l \in \llbracket -(M-1), M-1 \rrbracket \\ \text{sinc}(\pi t) \frac{\prod_{\substack{0 \leq |j| \leq M \\ j \neq k}} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right)}{\prod_{1 \leq |j| \leq M-1} \left(1 - \frac{t}{t_j}\right)}, & \text{sinon} \end{array} \right.$$

# RECONSTRUCTION PAR LA FORMULE DE LAGRANGE MODIFIÉE

## Résultats :

Tracés de la reconstruction :

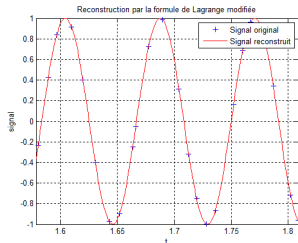


FIGURE : Reconstruction du signal (jitter = 90%  $\frac{T_{ech}}{2}$ , fenêtre de 20 points)



# RECONSTRUCTION PAR SPLINES CUBIQUES

# RECONSTRUCTION PAR SPLINES CUBIQUES

## Tests sous Matlab

Utilisation de la fonction *interp1.m*

# RECONSTRUCTION PAR SPLINES CUBIQUES

## Tests sous Matlab

Utilisation de la fonction *interp1.m*

## Résultats :

Tracés de la reconstruction :

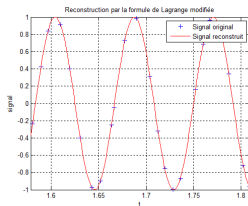


FIGURE : Reconstruction du signal (jitter = 90%  $\frac{T_{ech}}{2}$ , fenêtre de 20 points)

# RECONSTRUCTION ITÉRATIVE

# RECONSTRUCTION ITÉRATIVE

## Principe :

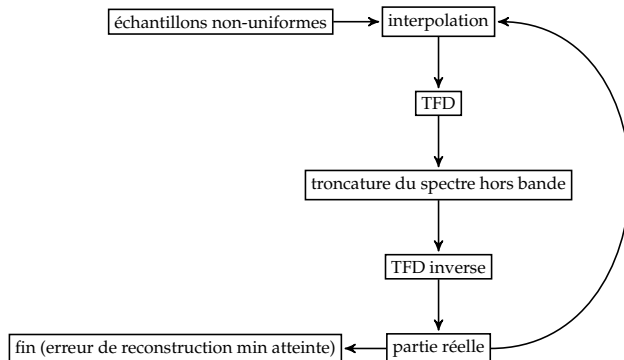
Troncature de la FFT puis reconstruction

# RECONSTRUCTION ITÉRATIVE

## Principe :

Troncature de la FFT puis reconstruction

## Schéma :



# RECONSTRUCTION ITÉRATIVE

## Résultats :

Tracés de la reconstruction :

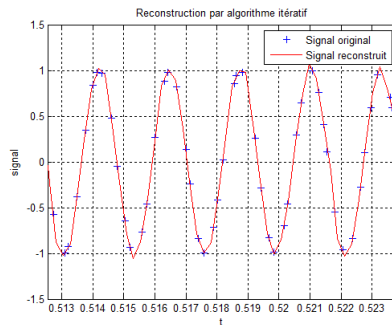


FIGURE : Reconstruction du signal (jitter = 99%  $\frac{T_{ech}}{2}$ , fenêtre de 51 points)

# CONCLUSION

## Bilan

- ▶ Application développée conforme au cahier des charges établi ;
- ▶ Le projet a permis de traiter des cas concrets, conformes à la réalité physique ;
- ▶ Codes rendus plus « accessibles » et plus simples à appréhender.

## Perspectives d'améliorations

- ▶ Ajout de signaux autres que des signaux de télécommunications ; développer l'importation de fichiers
- ▶ Ajout d'une aide interactive pour un descriptif des signaux utilisés.



# CONCLUSION

## Bilan

- ▶ Application développée conforme au cahier des charges établi ;
- ▶ Le projet a permis de traiter des cas concrets, conformes à la réalité physique ;
- ▶ Codes rendus plus « accessibles » et plus simples à appréhender.

## Perspectives d'améliorations

- ▶ Ajout de signaux autres que des signaux de télécommunications ; développer l'importation de fichiers
- ▶ Ajout d'une aide interactive pour un descriptif des signaux utilisés.

# CONCLUSION

## Bilan

- ▶ Application développée conforme au cahier des charges établi ;
- ▶ Le projet a permis de traiter des cas concrets, conformes à la réalité physique ;
- ▶ Codes rendus plus « accessibles » et plus simples à appréhender.

## Perspectives d'améliorations

- ▶ Ajout de signaux autres que des signaux de télécommunications ; développer l'importation de fichiers
- ▶ Ajout d'une aide interactive pour un descriptif des signaux utilisés.

# CONCLUSION

## Bilan

- ▶ Application développée conforme au cahier des charges établi ;
- ▶ Le projet a permis de traiter des cas concrets, conformes à la réalité physique ;
- ▶ Codes rendus plus « accessibles » et plus simples à appréhender.

## Perspectives d'améliorations

- ▶ Ajout de signaux autres que des signaux de télécommunications ; développer l'importation de fichiers
- ▶ Ajout d'une aide interactive pour un descriptif des signaux utilisés.

# CONCLUSION

## Bilan

- ▶ Application développée conforme au cahier des charges établi ;
- ▶ Le projet a permis de traiter des cas concrets, conformes à la réalité physique ;
- ▶ Codes rendus plus « accessibles » et plus simples à appréhender.

## Perspectives d'améliorations

- ▶ Ajout de signaux autres que des signaux de télécommunications ; développer l'importation de fichiers
- ▶ Ajout d'une aide interactive pour un descriptif des signaux utilisés.

# CONCLUSION

## Bilan

- ▶ Application développée conforme au cahier des charges établi ;
- ▶ Le projet a permis de traiter des cas concrets, conformes à la réalité physique ;
- ▶ Codes rendus plus « accessibles » et plus simples à appréhender.

## Perspectives d'améliorations

- ▶ Ajout de signaux autres que des signaux de télécommunications ; développer l'importation de fichiers
- ▶ Ajout d'une aide interactive pour un descriptif des signaux utilisés.