Année 2012-2013	**EXAMEN DE LOGIQUE FORMELLE** Mardi 23 octobre 2012	Promotion Guichet $2^{ième}$ année É. SALVAT

> *Modalités :*
> – *Durée 2h00*
> – *Aucun document autorisé*
> – *Aucune sortie n'est autorisée durant la durée de l'examen*
> – *Le barème est donné à titre indicatif*

1 Logique des propositions (6 points)

Exercice 1 (*2 points*)**.**
Dites si les formules suivantes sont valides, contingentes ou insatisfaisables. Justifiez votre réponse.

1. $(\neg(p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r)$
2. $(p \wedge ((q \rightarrow \neg p) \wedge (q \vee r) \wedge \neg r)) \rightarrow q$

Corrigé de l'exercice 1. 1.

p	q	r	$\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$	$(\neg(p \wedge q) \vee r)$	$(\neg(p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V

La formule est contingente.

2.

p	q	r	$(q \rightarrow \neg p)$	$(q \vee r)$	$(p \wedge ((q \rightarrow \neg p) \wedge (q \vee r) \wedge \neg r)) \rightarrow q$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

La formule est valide.

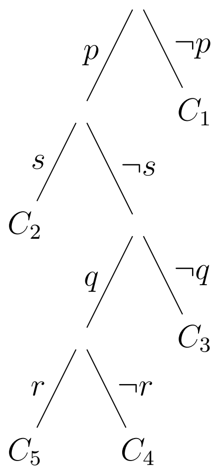
Exercice 2 (Arbre sémantique - *4 points*)**.**
A l'aide des arbres sémantiques, construisez, si il en existe un, un arbre échec des formules suivantes, ou bien donnez un modèle de la formule.

1. $p \wedge \neg s \wedge q \wedge (p \to (r \vee s)) \wedge \neg r$
2. $((p \to (q \wedge r)) \vee q) \to (q \vee r)$

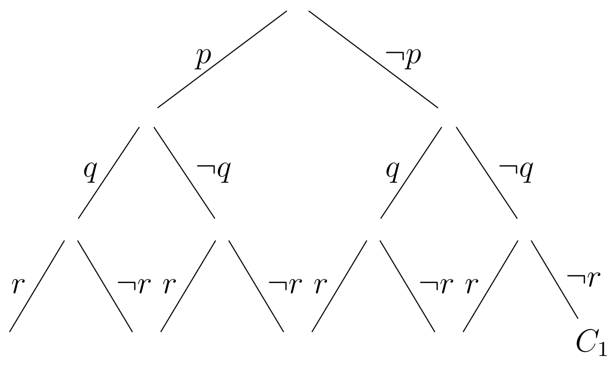
Corrigé de l'exercice 2.

Il faut au préalable, passer les formules sous forme clausale.

1. $E_1 = p \wedge \neg s \wedge q \wedge (p \to (r \vee s)) \wedge \neg r$
   $E_1 = p \wedge \neg s \wedge q \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge \neg r$
   $FC_1 = \{C_1 = \{p\}; C_2 = \{\neg s\}; C_3 = \{q\}; C_4 = \{\neg p; r; s\}; C_5 = \{\neg r\}\}$
   On construit l'arbre échec suivant :



2. $E_2 = ((p \to (q \wedge r)) \vee q) \to (q \vee r)$
   $E_2 = \neg((\neg p \vee (q \wedge r)) \vee q) \vee (q \vee r)$
   $E_2 = ((p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge \neg q) \vee (q \vee r)$
   $E_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee r)$
   $E_2 = (p \vee q \vee r) \wedge \blacksquare \wedge \blacksquare$
   $E_2 = (p \vee q \vee r)$
   $FC_2 = \{C_1 = \{p; q; r\}\}$



L'interprétation $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(r) = V$ est un modèle de la formule E_2.

Logique des prédicats (14 points)

Exercice 3 (Unifications - *4 points*)**.**
Calculez, si il existe, un unificateur le plus général des paires d'atomes (A_1, A_2) à l'aide de l'algorithme de Robinson. En cas d'échec, indiquez pourquoi les atomes ne sont pas unifiables. u, v, w, x, y, z sont des variables, f, g sont des symboles fonctionnels, a, b sont des constantes.

1. $A_1 = p(f(g(x,y)), g(v,w), y)$, $A_2 = p(f(z), x, f(x))$
2. $A_1 = p(x, f(u,x))$, $A_2 = p(f(y,a), f(z, f(b,z)))$;

Corrigé de l'exercice 3.
En Appliquant l'algorithme de Robinson, on obtient les ensembles de désaccord et les substitutions suivantes.

1. $A_1 = p(f(g(x,y)), g(v,w), y)$, $A_2 = p(f(z), x, f(x))$
   a) – ensemble de désaccord : $D_1 = \{g(x,y); z\}$
      – substitution : $\sigma_1 = \{(z, g(x,y))\}$
      – $A_1' = \sigma_1(A_1) = p(f(g(x,y)), g(v,w), y)$
        $A_2' = \sigma_1(A_2) = p(f(g(x,y)), x, f(x))$
   b) – ensemble de désaccord : $D_2 = \{x; g(v,w)\}$
      – substitution : $\sigma_2 = \{(x, g(v,w))\}$
      – $A_1'' = \sigma_2(A_1') = p(f(g(g(v,w),y)), g(v,w), y)$
        $A_2'' = \sigma_2(A_2') = p(f(g(g(v,w),y)), g(v,w), f(g(v,w)))$
   c) – ensemble de désaccord : $D_3 = \{y; f(g(v,w))\}$
      – substitution : $\sigma_3 = \{(y, f(g(v,w))))\}$
      – $A_1''' = \sigma_3(A_1'') = p(f(g(g(v,w), f(g(v,w)))), g(v,w), f(g(v,w)))$
        $A_2''' = \sigma_3(A_2'') = p(f(g(g(v,w), f(g(v,w)))), g(v,w), f(g(v,w)))$
   d) – ensemble de désaccord : $D_4 = \emptyset$

   A_1 et A_2 sont unifiables. Un unificateur le plus général de A_1 et A_2 est $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ soit $\sigma = \{(z, g(g(v,w), f(g(v,w)))); (x, g(v,w)); (y, f(g(v,w)))\}$
2. $A_1 = p(x, f(u,x))$, $A_2 = p(f(y,a), f(z, f(b,z)))$
   a) – ensemble de désaccord : $D_1 = \{x; f(y,a)\}$
      – substitution : $\sigma_1 = \{(x, f(y,a))\}$
      – $A_1' = \sigma_1(A_1) = p(f(y,a), f(u, f(y,a)))$
        $A_2' = \sigma_1(A_2) = p(f(y,a), f(z, f(b,z)))$
   b) – ensemble de désaccord : $D_2 = \{u; z\}$
      – substitution : $\sigma_2 = \{(u, z)\}$
      – $A_1'' = \sigma_2(A_1') = p(f(y,a), f(z, f(y,a)))$
        $A_2'' = \sigma_2(A_2') = p(f(y,a), f(z, f(b,z)))$

c) – ensemble de désaccord : $D_3 = \{y; b\}$
   – substitution : $\sigma_3 = \{(y, b)\}$
   – $A_1''' = \sigma_3(A_1'') = p(f(b,a), f(z, f(b,a)))$
     $A_2''' = \sigma_3(A_2'') = p(f(b,a), f(z, f(b,z)))$

d) – ensemble de désaccord : $D_4 = \{a; z\}$
   – substitution : $\sigma_4 = \{(z, a)\}$
   – $A_1'''' = \sigma_4(A_1''') = p(f(b,a), f(a, f(b,a)))$
     $A_2'''' = \sigma_4(A_2''') = p(f(b,a), f(a, f(b,a)))$

e) – ensemble de désaccord : $D_5 = \emptyset$

A_1 et A_2 sont unifiables. Un unificateur le plus général de A_1 et A_2 est $\sigma = \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ soit $\sigma = \{(x, f(b,a)); (u, a); (y, b); (z, a)\}$

Exercice 4 (Modélisation - *4 points*)**.**
Modélisez les phrases suivantes en logique des prédicats. Vous préciserez le vocabulaire utilisé.

1. Tous les étudiants aiment la logique.
2. Chaque étudiant n'aime pas une matière.
3. Tous les étudiants n'aiment pas une matière.
4. Les étudiants qui ont une bonne note en logique sont les meilleurs.

Corrigé de l'exercice 4.
On utilise le vocabulaire suivant :
- Constantes : log (la logique)
- Variables : x, y
- fonctions : pas de fonction
- Prédicats unaires :
  - $Etud$: $Etud(x)$ signifie x est un étudiant
  - Mat : $Mat(y)$ signifie y est une matière
- Prédicats binaires :
  - $Aime$: $Aime(x, y)$ signifie x aime y
  - BN : $BN(x, y)$ signifie x a une bonne note en y
  - $Meilleur$: $Meilleur(x, y)$ signifie x est meilleur que y

1. $\forall x Etud(x) \rightarrow Aime(x, log)$
2. $\forall x \exists y (Etud(x) \wedge Mat(y)) \rightarrow \neg Aime(x, y)$
3. $\exists x \forall y (Mat(x) \wedge Etud(y)) \rightarrow \neg Aime(y, x)$
4. $\forall x \forall y (Etud(x) \wedge BN(x, log) \wedge Etud(y)) \rightarrow Meilleur(x, y)$

Exercice 5 (Méthode de résolution - *6 points*)**.**
Soit l'énoncé suivant :

1. Tous ceux qui conduisent une Harley sont rustres.
2. Tous les motards conduisent une Harley ou une BMW.
3. Quiconque conduit une BMW est branché.
4. Toute personne branchée est avocat.
5. Une jeune fille bien ne sort pas avec quelqu'un de rustre.
6. Marie est une jeune fille bien, et Jean est un motard.
7. Si Jean n'est pas avocat, alors Marie ne sort pas avec Jean.

a) Modélisez en logique du premier ordre l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats :
   - har(x) : x est une Harley
   - cond(x,y) : x conduit y.
   - bmw(x) : x est une bmw.
   - mot(x) : x est un motard.
   - rus(x) : x est rustre.
   - bra(x) : x est branché.
   - avo(x) : x est avocat.
   - jfb(x) : x est une jeune fille bien.
   - sort(x,y) : x sort avec y.

   Bien entendu, vous compléterez cette modélisation, si c'est nécessaire, avec des constantes, des variables et des fonctions.

b) Prouvez à l'aide de la méthode de résolution que la dernière affirmation est une conséquence logique de l'ensemble des autres affirmations.

Corrigé de l'exercice 5.

Modélisation. Formule associée à chaque affirmation de l'énoncé ; *Marie* et *Jean* sont des constantes :

(a) $\forall x \forall y((har(y) \wedge cond(x, y)) \rightarrow rus(x))$

(b) $\forall x(mot(x) \rightarrow \exists y((har(y) \vee bmw(y)) \wedge cond(x, y)))$

(c) $\forall x \forall y((cond(x, y) \wedge bmw(y)) \rightarrow bra(x))$

(d) $\forall x(bra(x) \rightarrow avo(x))$

(e) $\forall x \forall y((jfb(x) \wedge rus(y)) \rightarrow \neg sort(x, y))$

(f) $jfb(Marie) \wedge mot(Jean)$

(g) $\neg avo(Jean) \rightarrow \neg sort(Marie, Jean)$

Résolution. On va montrer que a$\wedge$b$\wedge$c$\wedge$d$\wedge$e$\wedge$f$\wedge\neg$g est insatisfaisable. Pour cela il faut mettre les formules sous forme clausale. Première étape mise sous forme prenexe :

(a) $\forall x \forall y(\neg har(y) \vee \neg cond(x, y) \vee rus(x))$

(b) $\forall x \exists y(\neg mot(x) \vee ((har(y) \vee bmw(y)) \wedge cond(x, y)))$

(c) $\forall x \forall y(\neg cond(x,y) \vee \neg bmw(y) \vee bra(x))$

(d) $\forall x(\neg bra(x) \vee avo(x))$

(e) $\forall x \forall y(\neg jfb(x) \vee \neg rus(y) \vee \neg sort(x,y))$

(f) $jfb(Marie) \wedge mot(Jean)$

($\neg$g) $\neg avo(Jean) \wedge sort(Marie, Jean)$

Seule b contient une variable existentielle y, on introduit la fonction unaire de Skolem f. On obtient alors la formule :

(b′) $\forall x(\neg mot(x) \vee ((har(f(x)) \vee bmw(f(x))) \wedge cond(x, f(x))))$

Passage à la forme clausale :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{\neg har(y); \neg cond(x,y); rus(x)\} \\
C_2 &= \{\neg mot(x); har(f(x)); bmw(f(x))\} \\
C_3 &= \{\neg mot(x); cond(x, f(x))\} \\
C_4 &= \{\neg cond(x,y); \neg bmw(y); bra(x)\} \\
C_5 &= \{\neg bra(x); avo(x)\} \\
C_6 &= \{\neg jfb(x); \neg rus(y); \neg sort(x,y)\} \\
C_7 &= \{jfb(Marie)\} \\
C_8 &= \{mot(Jean)\} \\
C_9 &= \{\neg avo(Jean)\} \\
C_{10} &= \{sort(Marie, Jean)\}
\end{aligned}$$

Résolution :

$$\begin{array}{ll}
C_{11} = Res(C_{10}, C_6, \{(x, Marie); (y, Jean)\}) & = \{\neg jfb(Marie); \neg rus(Jean)\} \\
C_{12} = Res(C_{11}, C_7, \{\}) & = \{\neg rus(Jean)\} \\
C_{13} = Res(C_{12}, C_1, \{(x, Jean)\}) & = \{\neg har(y); \neg cond(Jean, y)\} \\
C_{14} = Res(C_{13}, C_3, \{(x, Jean); (y, f(Jean))\}) & = \{\neg har(f(Jean)); \neg mot(Jean)\} \\
C_{15} = Res(C_{14}, C_8, \{\}) & = \{\neg har(f(Jean))\} \\
C_{16} = Res(C_{15}, C_2, \{(x, Jean)\}) & = \{\neg mot(Jean); bmw(f(Jean))\} \\
C_{17} = Res(C_{16}, C_8, \{\}) & = \{bmw(f(Jean))\} \\
C_{18} = Res(C_{17}, C_4, \{(y, f(Jean))\}) & = \{\neg cond(x, f(Jean)); bra(x)\} \\
C_{19} = Res(C_{18}, C_3, \{(x, Jean)\}) & = \{\neg mot(Jean); bra(Jean)\} \\
C_{20} = Res(C_{19}, C_5, \{(x, Jean)\}) & = \{\neg mot(Jean); avo(Jean)\} \\
C_{21} = Res(C_{20}, C_9, \{\}) & = \{\neg mot(Jean)\} \\
C_{22} = Res(C_{21}, C_8, \{\}) & = \{\}
\end{array}$$