Université de Yaoundé 1
The University of Yaounde 1

Faculté des Sciences
Faculty of Science

Département d'Informatique
Department of Computer Science

INF 304 : Correction de l'examen (Semestre 2)

Pr. R. NDOUNDAM - Dr. E. KOUOKAM

Juin 2016

Exercice 1: QCM (3 pts)

Attention, dans ces questions il y a toujours une et une seule réponse valable. En particulier, lorsque plusieurs réponses sont possibles, prendre la plus restrictive. Par exemple s'il est demandé si 0 est nul, non nul, positif, ou négatif, sélectionner nul qui est plus restrictif que positif et négatif, tous deux vrais. (0.5 * 5 pts)

1.1 Parmi les questions 1.2 à 1.6, la première ayant pour réponse b. est...
a. 1.2 **a.** 1.4 **c.** 1.5 **d.** Aucune **e.** je ne sais pas

1.2 Automate minimal et automate canonique
a. sont des synonymes **b. sont équivalents**
c. sont non déterministes **d.** n'ont rien en commun **e.** je ne sais pas

1.3 Le langage $a^n b^m$ est **a.** fini **b. rationnel** **c.** non reconnaissable par automate fini **d.** vide **e.** je ne sais pas

1.4 L'automate de Thompson de l'expression rationnelle $(ab)^*c$ est
a. sans boucle **b.** sans transition spontanée **c. contient 0, 8, 10 ou 12 états** **d.** est déterministe **e.** je ne sais pas

1.5 Soit L_r est un langage rationnel. Si $L \subseteq L_r$, alors...
a. L est rationnel **b.** L est hors-contexte. **c.** L est sensible au contexte.
d. L peut ne pas être rationnelle **e.** je ne sais pas

1.6 Le lemme de pompage exprime
a. une condition nécessaire de rationalité **b.** une condition suffisante de rationalité **c.** une condition nécessaire et suffisante de rationalité **d.** ça dépend **e.** je ne sais pas

Exercice 2: Langages, équations et déterminisme *(12 pts)*

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$

2.1. Soit A l'automate de Thompson pur associé à l'expression régulière a^*b+ac. Construire A.***(2 pts)***

Solution: La construction de Thompson pure conduit à l'automate à 12 états, représenté à la figure 1

□

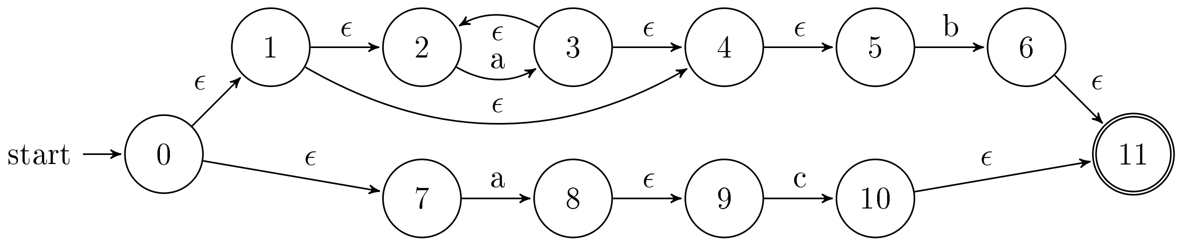

FIGURE 1 – Automate A

2.2. Déterminisez l'automate A. Vous donnerez toutes les étapes du calcul ainsi que la représentation graphique dudit automate.***(3 pts)***.

Solution: La table 1 donne l'ϵ-fermeture de chaque état de l'automate A ainsi que table de transitions de l'automate déterministe associé à A (dont l'état initial est $\epsilon - fermeture(0) = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$). l'AFD obtenu est donné à la figure 2.

Etat	**ϵ-fermeture**	**Etat**	**ϵ-fermeture**
0	0, 1, 2, 4, 5, 7	6	6, 11
1	1, 2, 4, 5	7	7
2	2	8	8, 9
3	2, 3, 4, 5	9	9
4	4, 5	10	10, 11
5	5	11	11

Détats	**a**	**b**	**c**
$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$	B	C	$\emptyset$
$B = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$	D	C	E
$C = \{6, 11\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$D = \{2, 3, 4, 5\}$	D	C	$\emptyset$
$E = \{10, 11\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

TABLE 1 – ϵ-fermeture des états de A et table de transitions de l'AFD

□

2.3. Donnez l'automate B correspondant au langage $\overline{L(A)}$. Vous justifierez la méthode employée et expliquerez vos calculs. ***(3 pts)***.

Solution: Nous savons pour l'avoir vu en TD que les langages rationnels sont clos par complémentation. Par conséquent, connaissant l'automate reconnaissant le langage L(A), on peut aisément déduire l'automate reconnaissant $\overline{L(A)}$. Pour ce faire, il faut tout d'abord compléter l'automate

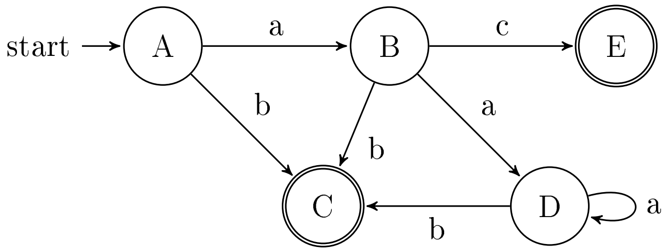

FIGURE 2 – Automate déterminisé correspondant à A

déterministe de la figure 2 puis inverser le statut des états de l'automate (tout état final devient non final et tout état non final devient final). On obtient donc l'automate B de la figure 3. Ici, l'état F est l'état correspondant au puits de l'automate déterministe.

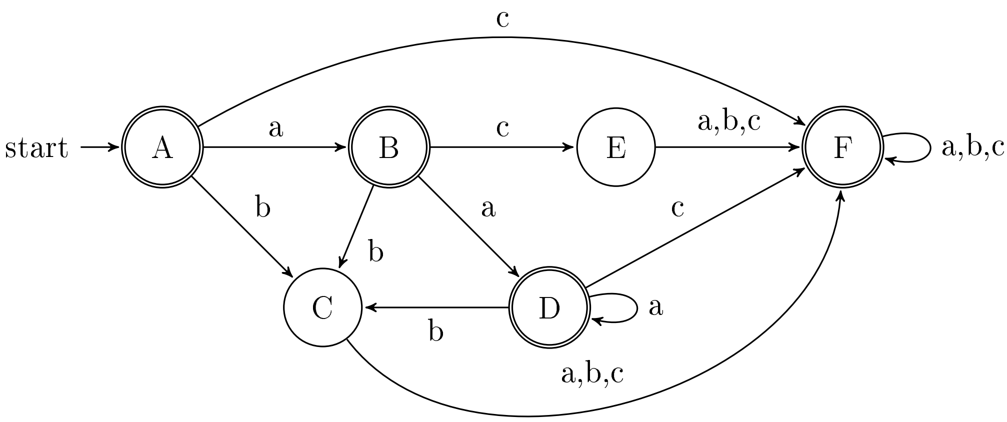

FIGURE 3 – Automate B

□

2.4. Dériver le système d'équations résultant de l'automate B et produire une expression rationnelle qui lui corresponde. ***(1+1 pts)***.

Solution:

$$\begin{cases} X_A &= aX_B + bX_C + cX_F + \epsilon \\ X_B &= aX_D + bX_C + cX_E + \epsilon \\ X_C &= (a+b+c)X_F \\ X_D &= aX_D + bX_C + cX_F + \epsilon \\ X_E &= (a+b+c)X_F \\ X_F &= (a+b+c)X_F + \epsilon \end{cases} \tag{1}$$

On veut donc résoudre ce système en X_A.
De la dernière équation, on tire donc $X_F = (a+b+c)^*$ et on déduit que

$X_E = X_C = (a+b+c)^+$.
Pareillement, l'équation donnant X_D donne après substitution des formules précédentes $X_D = a^*(b(a+b+c)^+ + c(a+b+c)^* + \epsilon)$
Ensuite on a $X_B = a(a^*(b(a+b+c)^+ + c(a+b+c)^* + \epsilon)) + b(a+b+c)^+ + c(a+b+c)^* + \epsilon$ Il ne nous reste plus qu'à mener une substitution dans la formule donnant X_A, ce qui aboutit à
$X_A = a(X_B = a(a^*(b(a+b+c)^+ + c(a+b+c)^* + \epsilon)) + b(a+b+c)^+ + c(a+b+c)^* + \epsilon) + b(a+b+c)^+ + c(a+b+c)^* + \epsilon$ □

2.5. Minimiser l'automate B et déduire l'automate canonique associé. ***(2 pts)***

Solution: En appliquant l'algorithme vu en cours, pour rendre cet automate minimal, nous commençons par le partitionner en états finaux et non finaux. On obtient alors

$$\Pi_0 = \{\{A, B, D, F\}, \{C, E\}\}$$

.
En considérant le symbole c, on réalise que la transition sur c partant de A, D et F reste dans la première partition tandis que celle sur c partant de l'état B conduit à E qui se trouve dans une partition séparée. B ne peut donc rester dans la première partition, on obtient un nouveau partitionnement

$$\Pi_1 = \{\{A, D, F\}, \{B\}, \{C, E\}\}$$

.
De façon similaire, la transition sur le symbole b dans la partition $\{A, D, F\}$ mène vers deux partions séparés, ce qui permet d'avoir un autre partitionnement

$$\Pi_2 = \{\{A, D\}, \{F\}, \{B\}, \{C, E\}\}$$

.
Aussi, la transition sur le symbole a, partant de la partition $\{A, D\}$ conduit à des partitions différentes. Il faut donc la partitionner à nouveau et on obtient

$$\Pi_3 = \{\{A\}, \{D\}, \{F\}, \{B\}, \{C, E\}\}$$

.
Ce partitionnement reste stable par la suite. L'automate est à présent minimal. Cet automate étant déjà complet, il correspond donc à l'automate canonique. Au final, l'automate (minimal et canonique) recherché est bien celui de la figure 4

□

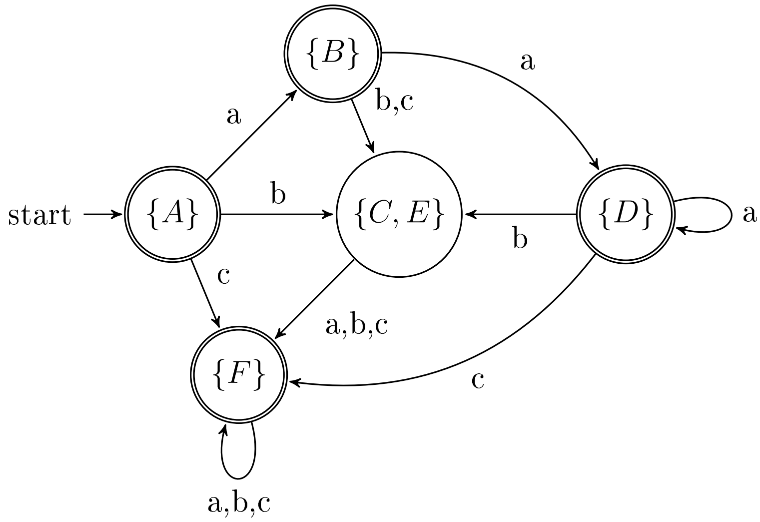

FIGURE 4 – Automate canonique (et minimal)

Exercice 3: Pompage et autres... (7 pts)

3.1 Démontrer que les langages suivants ne sont pas réguliers

3.1.1 $L_{311} = \{0^n1^n | n \text{ est un entier naturel} \geq 0\}$. ***(2 pts)***

Solution: Vu en TD et en cours. □

3.1.2 $L_{312} = \{w | w \text{ a autant de 0 que de 1}\}$. ***(2 pts)***

Solution: Suivant la stratégie énoncée ci-dessus, nous prenons n quelconque et construisons la chaîne $w = 0^n1^n \in L_{311}$ Prenons une décomposition $w = xyz$ quelconque telle que $y \neq \epsilon$ et $|xy| \leq n$. Étant donné que $w = xyz = 0^n1^n$, $|xy| \leq n$ et que $y \neq \epsilon$, nous savons que $xy = 0^i$ avec $|0|_y \geq 1$

Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L.
Étant donné que $|1|_{xy} = |1|_{0^i} = 0$, on a donc $|1|_{xz} = |1|_{xyz} = |0|_{xyz} = m$. Par ailleurs, nous savons que $|0|_{xz} = |0|_{xyz} - |0|_y = m - |0|_y$ et nous savons que $|0|_y \geq 1$, ce qui signifie que $|0|_{xz} = m - |0|_y < m = |1|_{xz}$ D'où l'on tire que xz n'est pas dans L_{312}, L_{312} n'est donc pas régulier. □

3.2 On considère $\Sigma = \{a, b\}$. Construire un AFD correspondant au langage $L_{32} = \{w | w \text{ est de longueur paire et contient un nombre impair de a}\}$, i-e $L_{32} = \{w | \; |w| \equiv 0(2) \text{ et } |w|_a \equiv 1(2)\}$ en présentant clairement les différentes étapes de la construction ***(3 pts)***

Solution: Pour construire cet automate, on commence par construire un AFD A_1 reconnaissant les mots de longueur paire sur $\Sigma = \{a, b\}$ puis un autre, A_2, reconnaissant les mots ayant un nombre impair de a. On obtient ainsi les automates des figures 5 et 7.

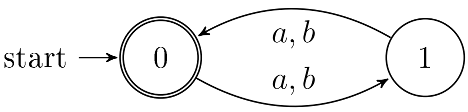

FIGURE 5 – Automate A_1

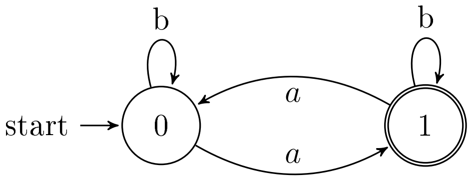

FIGURE 6 – Automate A_2

Il ne nous reste plus qu'à construire l'automate intersection de A_1 et A_2. Il aura au plus $2^2 = 4tats$ à savoir $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$ et $\{1, 1\}$. Seul l'état $\{0, 1\}$ sera final.
Au final on obtient l'automate suivant : □

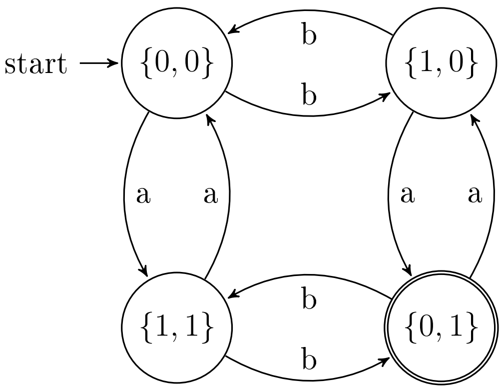

FIGURE 7 – Automate $A = A_1 \cap A_2$

Bon courage ! ! !