Université de Yaoundé 1
The University of Yaounde 1

Faculté des Sciences
Faculty of Science

Département d'Informatique
Department of Computer Science

INF319 : Contrôle continu

Étienne KOUOKAM

17 Novembre 2016
Durée : **1h30**

Exercice 1: Système formel (5 pts)

Soit le système formel défini par :

$$\begin{cases} \text{L'alphabet :} & \Sigma = \{D, E, \_\} & \\ \text{Les mots :} & \Sigma^* & \\ \text{Les axiomes :} & xD\_Ex & \text{où x est toute suite quelconque de } \_, i.e\ x \in (\_)^+ \\ \text{La règle unique :} & xDyEz \vdash xzDy\_Ez & \text{où } x, y, z \in (\_)^+ \end{cases}$$

Choisissons l'interprétation $\mathcal{I}$:

$$\begin{cases} D : & \text{"divisé par"} \\ E : & \text{"égale"} \\ & \text{Le tiret(underscore) représente une unité (ex :\_\_\_ correspond à "3")} \end{cases}$$

Supposons +aDbEc et que $\mathcal{I}$ (aDbEc)soit un énoncé vrai. Parmi les 3 formules :

$$\begin{cases} (F_1) & accDb\_\_Ec \\ (F_2) & aaD\_\_DbEc \\ (F_3) & abDbEc\_ \end{cases}$$

1.1 Lesquelles sont des théorèmes du système formel ? (1.5 pts)

Corrigé:
(F_1) est un théorème. En effet, $aDbEc \vdash acDb\_Ec \vdash accDb\_\_Ec$
(F_2) n'est pas un théorème car la règle d'inférence ne permet pas d'introduire un $2^{\text{ème}}$ D.
(F_3) n'est pas un théorème car la règle d'inférence ne permet pas d'introduire le _ après le c. □

1.2 Lesquelles sont vraies dans $\mathcal{I}$ (1.5 pts)

Corrigé: (F_1) *et* (F_3) sont vrais dans I.
(F_2) pose un problème de parenthésage :
— si on lit $\frac{2a/2}{b} = c$ alors c'est vrai.
— si on lit $\frac{2a}{2/b} = c$ alors c'est faux.

□

1.3 Considérant qu'un système formel S est consistant sans une interprétation $\mathcal{I}$ si et seulement si tout théorème T de S vérifie $\mathcal{I}$(T)=vrai, dire si le système formel ci-dessus est consistant dans l'interprétation $\mathcal{I}$. (2 pts)

Corrigé: Oui. Les théorèmes sont tous de la forme $+x^n D(\_)^n Ex$ où x est une suite de _ qui s'interprète $\frac{nx}{n} = x$.

□

Exercice 2: Les pires et les purs...(5 pts)

Dans un pays imaginaire, il y a deux catégories de personnes : les pires et les purs. Les pires mentent toujours, les purs disent toujours la vérité. Soit A et B deux des habitants de ce pays. A l'aide de la logique propositionnelle, pour chacune des questions ci-dessous, dire à quelle catégorie A et B appartiennent.

2.1 A dit : "Au moins l'un de nous deux est un pire". (1.5 pts)

Corrigé: Soit A est pur soit il est pire.
S'il est pire, sa déclaration n'est pas correcte mais plutôt la négation. Or la négation de cette déclaration consiste à dire qu'aucun des deux (A et B) n'est pire, ce qui est absurde. Donc **A est pur** et de facto, **B est pire**. □

2.2 Cette fois, A dit : "Si B est un pur, alors je suis un pire". (1.5 pts)

Corrigé: En procédant comme dans le cas précédent, on suppose A pire. De ce fait, la négation de sa déclaration est donc vraie, à savoir que A et B sont tous deux purs. Ce qui est absurde car A est supposé pire. Par conséquent, **A est pur** et de facto encore, **B est pire**. □

2.3 A dit : "Ou je suis un pire, ou B est un pur". (2 pts)

Corrigé:

Cas 1. Cette fois, on suppose d'abord que A est pur. Alors, sa déclaration revient à dire que A et B sont soit tous deux purs soit tous deux pires. Ce dernier cas étant impossible du fait que A ait été supposé pur, on conclut donc que **les deux sont purs**.

Cas 1. En supposant ensuite que A est pire, la négation de sa déclaration revient à dire que A est pire et B pur ou A est pur et B pire. Ce dernier cas étant impossible compte tenu de l'hypothèse faite, on conclut que **A est pire** et **B est pur**.

Au final, on voit que dans ce cas, B est pur et A est quelconque. □

Exercice 3: Interprétation en logique (6 pts)

Tout en expliquant, donner le nombres de lectures différentes pour les phrases suivantes :

3.1 Tout dodécaèdre est au moins aussi grand que tout cube (1 pt)

Corrigé: On considère les prédicats D(X), C(X) et PG(X,Y) auxquels on assigne les sémantiques respectives suivantes : "X est un dodécaèdre", "X est un cube" et "X est plus grand que Y". On a alors l'interprétation suivante :

$$\forall X \; \forall Y \; ((D(X) \wedge C(Y)) \Rightarrow PG(X, Y))$$

□

3.2 Chaque professeur a donné un livre à chaque étudiant. (2 pts)

Corrigé: Cette phrase comporte trois quantificateurs, portant sur trois variables différentes (pour respectivement un professeur x, un livre y, un étudiant z). Il y a deux ∀ et un ∃. A priori on peut prévoir 6 permutations possibles : $\forall X \; \exists Y \; \forall Z$, $\forall Z \; \exists Y \; \forall X$, $\forall Z \; \forall X \; \exists Y$, $\forall X \; \forall Z \; \exists Y$, $\exists Y \; \forall X \; \forall Z$, $\exists Y \; \forall Z \; \forall X$.
Mais on sait qu ?il est possible de permuter sans dommage deux quantificateurs de même type qui se suivent, autrement dit les lectures $\forall Z \; \forall X \; \exists Y$ et $\forall X \; \forall Z \; \exists Y$ sont identiques, de même que $\exists Y \; \forall X \; \forall Z$ et $\exists Y \; \forall Z \; \forall X$. On obtient donc quatre lectures différentes :

Cas 1 : $\forall X \; (Professeur(X) \Rightarrow (\exists Y \; Livre(Y) \wedge \forall Z (Etudiant(Z) \Rightarrow Donne(X, Y, Z))))$.
Ici, le livre ne dépend que du professeur

Cas 2 : $\forall Z\ (Etudiant(Z) \Rightarrow (\exists Y\ Livre(Y) \wedge \forall X (Professeur(X) \Rightarrow Donne(X,Y,Z))))$.
Dans ce cas, le livre ne dépend que de l'étudiant

Cas 3 : $\forall X\ \forall Z\ ((Professeur(X) \wedge Etudiant(Z)) \Rightarrow \exists Y\ (Livre(Y) \wedge Donne(X,Y,Z)))$.
Cette fois, le livre donné dépend du professeur et de l ?étudiant.

Cas 4 : $\exists Y (Livre(Y) \wedge \forall X\ \forall Z\ ((Professeur(X) \wedge Etudiant(Z)) \Rightarrow Donne(X,Y,Z)))$.
Et donc, il y a un seul livre, que chaque professeur donne à chaque étudiant.

□

3.3 Marie n'a rien raconté à quelqu'un. (2 pts)

Corrigé: On a le choix entre

— $\neg\exists X\ \exists Y a\_Raconte)(marie, X, Y)$ ou $\forall X\ forallY\ (\neg a\_Raconte(marie, X, Y))$ pour dire que Marie n'a rien raconté à personne.

— $\exists Y\ \neg\exists X\ a\_Raconte(marie, X, Y)$ ou $\exists Y\ \forall X\ (\neg a\_Raconte(marie, X, Y))$ pour dire qu'il y a quelqu'un à qui Marie n'a rien raconté.

Les lectures $\exists X\ \neg\exists Y\ a\_Raconte(marie, X, Y)$ et $\exists X\ \exists Y\ \neg a\_Raconte(marie, X, Y)$ étant impossibles. □

Exercice 4: Prédicats & Résolution (6 pts)

On considère les énoncés suivants :

E1 : Si un cours est facile, certains étudiants sont heureux.

E2 : Si un cours a un examen final, aucun étudiant n'est heureux.

Mettre ces énoncés sous forme clausale et utiliser le principe de résolution afin de démontrer que "Si un cours a un examen final, alors il n'est pas facile"

Corrigé: On commence par définir les différents prédicats utilisés :

```
C(X): "X est un cours"        F(X):"X est facile"
E(X): "X est un étudiant"     H(X): "X est heureux"    Ef(X):"X est a un examen final
```

Pour E1 : $\forall X\ ((C(X) \wedge F(X)) \Rightarrow \exists Y\ (E(Y) \wedge H(Y)))$
Pour E2 : $\forall X\ ((C(X) \wedge Ef(X)) \Rightarrow \neg(\exists Y\ E(Y) \wedge H(Y)))$
On a donc

$E_1 \equiv \forall X\ (\neg(C(X) \wedge F(X)) \vee \exists Y (E(Y) \wedge H(Y))) \equiv \forall X\ ((\neg C(X) \vee \neg F(X)) \vee \exists Y (E(Y) \wedge H(Y)))$ i-e

$$E_1 \equiv \forall X\ \exists Y ((\neg C(X) \vee \neg F(X) \vee E(Y)) \wedge (\neg C(X) \vee \neg F(X) \vee H(Y))) \text{ i-e}$$

$$E_1 \equiv \forall X\ \exists Y ((\neg C(X) \vee \neg F(X) \vee E(Y)) \wedge (\neg C(X) \vee \neg F(X) \vee H(Y)))$$

$$E_1 \equiv \forall X \ ((\neg C(X) \vee \neg F(X) \vee E(f(X))) \wedge (\neg C(X) \vee \neg F(X) \vee H(f(X))))$$

$$E_2 \equiv \forall X \ (\neg(C(X) \wedge Ef(X)) \vee \neg(\exists Y \ E(Y) \wedge H(Y))) \equiv \forall X \ ((\neg C(X) \vee \neg Ef(X)) \vee \forall Y (\neg E(Y) \vee \neg H(Y)))$$

$$E_2 \equiv \forall X \ \forall Y \ (\neg C(X) \vee \neg Ef(X) \vee \neg E(Y) \vee \neg H(Y))$$

Sous forme clausale, on a donc :

$$C_1 = \{\neg C(X), \neg F(X), E(f(X))\}, \ C_2 = \{\neg C(X), \neg F(X), H(f(X))\}$$

$$C_3 = \{\neg C(X), \neg Ef(X), \neg E(Y), \neg H(Y)\}$$

La négation de la conclusion est donc

$$E_3 \equiv \neg(\exists X \ ((C(X) \wedge Ef(X)) \Rightarrow \neg F(X))) \equiv \neg(\exists X \ \neg(C(X) \wedge Ef(X)) \vee \neg(F(X))) \text{ i-e}$$

$$E_3 \equiv \forall X \ ((C(X) \wedge Ef(X)) \wedge F(X)) \equiv E_3 = \{\{C(X)\}, \{Ef(X)\}, \{F(X)\}\}$$

Ce qui donne donc

$$C_4 = \{C(X)\}, \ \ C_5 = \{F(X)\}, C_6 = \{Ef(X)\}$$

A partir de là, on établit une série de résolutions comme suit :
$C_1, C_4 \models C_7 = \{\neg F(X), E(f(X))\}$ *Ensuite*, $C_5, C_7 \models C_8 = \{\neg F(X), E(f(X)).$
$C_3, C_4 \models C_9 = \{\neg Ef(X), \neg E(Y), \neg H(Y)\}$ *Puis*, $C_6, C_9 \models C_{10} = \{\neg E(Y), \neg H(Y)\}.$
$C_8, C_{10} \models C_{11} = \{\neg H(Y)\}$ *Puis*, $C_2, C_4 \models C_{12} = \{\neg F(X), H(f(X))\}.$
Il s'en suit que $C_5, C_{12} \models C_{13} = \{H(f(X))\}$ et finalement, $C_{11}, C_{14} \models \square\}$

$\square$

Bon courage !!!