La logique des propositions

Aristote a défini ainsi le concept de proposition : "... tout discours n'est pas une proposition, mais seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux, ce qui n'arrive pas dans tous les cas : ainsi la prière est un discours, mais elle n'est ni vraie ni fausse (Ibid, 17a5).

1 - Sa syntaxe

Pour étudier la syntaxe d'un langage il faut donner un alphabet (un ensemble de symboles) et des règles de constructions syntaxiques d'expressions à partir de ces symboles.

1.1 - L'alphabet

L'alphabet est constitué :

- de **connecteurs** : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ qui se lisent respectivement non, et, ou, implique et équivalent. (NB: on retrouve les opérateurs de l'algébre de Boole non . (et), +(ou))
- de **délimiteurs** : les parenthèses ( )
- d'un ensemble infini dénombrable d'**atomes** appelés aussi propositions ou variables propositionnelles
- des deux constantes propositionelles **V** (vrai) et **F** (faux)

NB : Par convention pour ce cours on notera les atomes avec les majuscules de l'alphabet latin, et les concaténations de telles lettres){A, B, Z, Ai,...}

1.2 - Les formules bien formées

Le **langage** est constitué de l' ensemble des Formules Bien Formées (appelées aussi : FBFs ou Well Formed-Formula WFF) ou expressions bien formées défini comme suit:

- **Base :** tout atome est une fbf, de même les constantes propositionnelles sont des fbf
- **Induction :** si F et G sont des fbfs alors $(\neg G)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des fbfs
- **Clôture :** toutes les fbfs sont obtenues par application des 2 règles ci-dessus.

_ Ordre de priorité des connecteurs : (Le plus prioritaire) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
$A \wedge \neg B \vee C \rightarrow D \wedge E$ doit se lire $(((A \wedge (\neg B)) \vee C) \rightarrow (D \wedge E))$

_ On omet par abus les parenthèses les plus externes
$(A \vee B)$ devient $A \vee B$

_ Quand il y a un seul connecteur, l'association se fait de gauche à droite.
$A \rightarrow B \rightarrow C$ correspond à $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

Exercice 1

Pour s'exercer essayez de déterminer si les formules suivantes appartiennent à la logique des propositions.
Soient A, B, C, D des fbfs
a) $((A \vee (\neg B)) \wedge (C \vee D))$
b) $(A \vee B)\ (\wedge \vee C)$

1.3 - Définition du calcul propositionnel

On appelle calcul propositionnel le système formel défini par :

- L'alphabet défini à la section1.1
- L'ensemble des formules bien formées défini à la section 1.2
- Les schémas d'axiomes suivants :

  1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

  2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

  3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- La règle d'inférence : le modus ponens

  $A, A \rightarrow B \models B$

Une règle d'inférence représentation d'un procédé pour, à partir d'une ou de plusieurs fbfs dériver d'autres fbfs Les axiomes sont des fbfs choisies initialement
Tout système reposant sur des axiomes peuvent s'interpréter "Si ces expressions que j'appelle axiome sont correctes alors voici le système."
donc on obtient différentes théories en changeant les axiomes.

Définitions :

On appelle **déduction à partir de H1,H2...Hn,** toute suite finie de formules F1, F2,...Fp telles que pour tout i élément de {1,2 ..,p}

a) Fi est un axiome

ou bien

b) Fi est l'une des formules H1, H2, ..., Hn

ou bien

c) Fi est obtenue par application d'une règle rk élément de RS à partir des formules Fi0, Fi1, ..., Fil placées avant Fi (dans la démonstration)

S étant le système formel, on appelle **théorème**, toute formule t pour laquelle il existe une déduction à partir de l'ensemble vide.
Noté : $\vdash_S t$

Une déduction à partir de l'ensemble vide est appelée **déduction ou démonstration** ; il s'agit d'une suite de formules F1 ... Fp telles que pour tout i élément de {1,2,...p}

a) Fi est un axiome   ou

b) Fi0, Fi1,...Fip $\vdash_{\text{modus ponens}}$ Fi

Cette formule se lit Fi se déduit à partir des fbfs Fi0, Fi1,...Fip grâce à la règle d'inférence du modus ponens

Démontrer un théorème consiste à utiliser une procédure de démonstration qui elle-même utilisedes règles d'inférences. C'est une activité syntaxique indépendante du sens des expressions.

2 - Sa sémantique

La sémantique attribue une signification aux expressions. elle est **compositionnelle** : la signification d'une formule est fonction de celle de ses constituants.

2.1 - Interprétation

Une **interprétation** du calcul propositionnel consiste à donner :

1. Domaine sémantique non vide D
2. Valuation des atomes dans D
3. Définition des connecteurs par des applications de D dans D pour $\neg$ et de D$*$D dans D pour $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Interprétation classique de la logique des propositions pour lequel D = {V, F}
Tout atome est vrai ou faux mais pas les deux à la fois

Définition des connecteurs par des tables de vérité :

A	B	$\neg$A	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\rightarrow$ B	A $\leftrightarrow$ B

V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Pour une fbf G composée de différents atomes : A1...An, une interprétation de G est une assignation des valeurs de vérité à A1...An.
G comporte n atomes ==> 2^n interprétations possibles

Exemple :

G = (A ∨ B) ∧ C
==> 8 interprétations possibles

A	B	C	G
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Définition :

Une fbf G est vraie (respectivement fausse) dans une interprétation i si la valeur de G est vraie (respectivement fausse)
On écrit i[G] = V (respectivement i[G]= F)
Une interprétation qui rend vraie une formule est un **modèle** de cette formule.
On dit qu'une interprétation i est un modèle d'une formule F si la valeur de F selon l'interprétation i est vraie : i[F] = V dans ce cas on note i |= F.
On dit que i est un modèle d'un ensemble de formules E si i est modèle de tout élément de E

Exemple :

G : $(P \rightarrow (Q \vee (\neg R)))$
Notation i1([P] peut s'écrire i1[P] et se lit valeur de P selon l'interprétation i1
Soit i1 telle que: i1[P] = i1[R] = V
i1[Q] = F
G est fausse dans i1

Soit I2 telle que: i2[P] = i2[R] = F
i2[Q] = V
G est vraie dans i2

2.2 - Théorèmes d'équivalence

Définition :

Deux fbfs F et G sont **équivalentes** si et seulement si les valeurs de vérité de F et de G sont les mêmes dans toute interprétation.
si $F \models G$ et $G \models F$, on écrit alors $F \cong G$, le symbole "$\cong$" se lit "est équivalent à".

Soient A, B et C des formules bien formées.

1. **Implication matérielle**
   $A \rightarrow B \cong \neg A \vee B$
2. **Equivalence matérielle**
   $A \leftrightarrow B \cong (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. **Commutativité**
   a) $A \vee B \cong B \vee A$
   b) $A \wedge B \cong B \wedge A$
4. **Associativité**
   a) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$
   b) $(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$
5. **Distributivité**
   a) $A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   b) $A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. a) $A \vee V \cong V$
   b) $A \wedge V \cong A$
7. a) $A \vee F \cong A$
   b) $A \wedge F \cong F$
8. **Complémentarité**

a) $A \vee \neg A \cong V$
b) $A \wedge \neg A \cong F$

9. **Involution**
$(\neg(\neg A)) \cong A$

10. **Lois de de Morgan**
a) $\neg(A \vee B) \cong (\neg A) \wedge (\neg B)$
b) $\neg(A \wedge B) \cong (\neg A) \vee (\neg B)$

11. a) $A \vee ((\neg A) \wedge B) \cong A \vee B$
b) $A \wedge ((\neg A) \vee B) \cong A \wedge B$

12. **Identité**
a) $A \wedge A \cong A$
b) $A \vee A \cong A$

On peut démontrer que ces formules sont équivalentes en montrant qu'elles ont les mêmes valeurs dans toutes les interprétations. Un moyen est donc de construire leur table de vérité.

On peut utiliser ces théorèmes d'équivalence pour transformer une formule bien formée en une autre formule bien formée qui lui est équivalente.
Cela va permettre de simplifier l'écriture de formules bien formées.

Exercice 2

Entrainez-vous à développer la négation en appliquant les lois de de Morgan

a) $(\neg(A \wedge (B \vee C)))$
b) $(\neg[(\neg(A \wedge B) \vee (\neg D)) \wedge E \vee F]$
c) $(\neg((\neg A) \wedge B \wedge ((\neg C) \vee D) \vee (\neg E) \wedge F \wedge (\neg G)))$
d) $(\neg(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ([\neg(\neg D)] \vee (\neg E)) \vee (\neg F) \wedge G)$

3 - Quelques notions classiques: *validité, insatisfiabilité, conséquence, complétude*

3.1 - Validité

Une fbf A est une **tautologie** (valide) si et seulement si elle est vraie dans toute interprétation; on écrit alors : $\models A$
$\neg A \vee A$ est une formule valide

Une fbf est **invalide** si et seulement si elle n'est pas valide
$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules invalides il suffit que A et B soient fausses

3.2 - Insatisfaisabilité

Une fbf est **inconsistante** ou insatisfiable si et seulement si elle est fausse dans toute interprétation
$\neg A \wedge A$ est une formule inconsistante

Une fbf A est **consistante** ou satisfiable

- si et seulement si elle n'est pas inconsistante
- si il existe une interprétation i telle que i[A] = V
- si elle admet un modèle

$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules consistantes il suffit que A et B soient vraies

3.3 - Conséquence logique

A est une **conséquence logique** de E si et seulement si toutes les interprétations qui rendent vraies toutes les formules de E rendent vraie la formule A.
On écrit alors E |= A

On dit qu'une formule C est une conséquence logique de H1.. Hn

- si et seulement si tout modèle de H1..Hn est un modèle de C
- si et seulement si H1 $\wedge$ H2 $\wedge$ ... $\wedge$ Hn $\rightarrow$ C est valide

Dans ce contexte les formule H_i sont les hypothèses et C est la conclusion.

3.4 - Complétude

Théorème de complétude du calcul propsitionnel :

Pour toute formule A si |= A alors |– A
Autrement dit : toutes les tautologies sont des théorèmes.

4 - Représentation des connaissances

La représentation des connaissances en Intelligence Artificielle consiste à faire une correspondance entre le monde extérieur et un système symbolique manipulable par un ordinateur.La représentation des connaissances comporte un aspect passif : il faut mémoriser.Par exemple, un livre ne connaît pas l'information qu'il contient. Mais aussi un côté actif : il faut inférer, manipuler ces connaissances, effectuer un raisonnement.

CONNAITRE = MEMORISER + INFERER
REPRESENTER = FORMALISER + RAISONNER

Le sens des connecteurs ne veulent pasdire exactement la même chose que ceux du langage naturel. La capacité d'expression dans la représentation de la connaissance en logique des propositions est beaucoup moins riche qu'en langage naturel. Mais toutefois les connecteurs logique ont des correspondances ou "équivalents" dans la langue naturelle.

4.1 - La conjonction

P $\wedge$ Q peut se traduire :

- P et Q
- Q et P
- à la fois P et Q
- P, Q
- P bien que Q
- P quoique Q
- P mais Q (sous-entendu mais aussi)
- Non seulement P mais Q
- P et pourtant Q
- P tandis que Q

4.2 - La disjonction

P $\vee$ Q peut se traduire :

- P ou Q
- ou P ou Q
- ou bien P ou bien Q
- soit P soit Q
- P à moins que Q
- P sauf si Q
- P ou Q ou les deux (OU inclusif)

4.3 - Le conditionnel

P $\rightarrow$ Q peut traduire :

- si P alors Q
- P condition suffisante de Q
- Q condition nécessaire de P
- P alors Q
- Q si P
- Q lorsque P
- P seulement si Q
- Q pourvu que P
- ...

4.4 - L'équivalence

P $\leftrightarrow$ Q peut se traduire :

- P si et seulement si Q
- P si Q et Q si P
- P condition nécessaire et suffisante de Q
- ...

4.5 - Conclusion

Les ressemblances entre les connceteurs logiques et ceux de la langue naturelle sont limitées.
Il mange ou il dort et il dort ou il mange semblent synonymes
Par contre, il a faim et il mange n'est pas semblable à il mange et il a faim car le "et" a une connotation de causalité et de temps.
La porte est ouverte ou la porte est fermée. Le "ou" du français est parfois exclusif
La traduction est en général liée au contexte. Il peut aussi exister plusieurs traductions possibles.

Par exemple soit à traduire le groupes de phrases suivantes :

Jean et Pierre prirent le café et Gustave fit de même.
Jean prit le café, et Pierre ou Gustave aussi
Jean et Pierre ont dîné tous les deux, ou bien Jean et Gustave prirent le café
Jean a dîné, ainsi que Gustave ou Pierre
Pierre étudie bien à moins qu'il ne soit fatigué, auquel cas non

D'abord je vais constituer l'univers du discours c'est-à-dire je vais d'abord rechercher dans le texte toutes les propositions dont j'ai besoin. Ce qui donne pour l'exemple l'univers du discours suivant :

J : Jean prend le café
P : Pierre prend le café
G : Gustave prend le café
D : Jean a dîné
E : Gustave a dîné
F : Pierre a dîné
ETUDIE : Pierre étudie bien
FATIGUE : Pierre est fatigué

Ensuite, pour chacune des phrases je vais écrire une formule bien formée à l'aide des propositions définies ci-dessus, des connecteurs et des parenthèses.

Jean et Pierre prirent le café et Gustave fit de même
$\mathbf{J \wedge P \wedge G}$
Jean prit le café, et Pierre ou Gustave aussi
$\mathbf{J \wedge (P \vee G)}$
Jean et Pierre ont dîné tous les deux, ou bien Jean et Gustave prirent le café
$\mathbf{(D \wedge F) \vee (J \wedge G)}$
Jean a dîné, ainsi que Gustave ou Pierre
$\mathbf{D \wedge (E \vee F)}$
Pierre étudie bien à moins qu'il ne soit fatigué, auquel cas non
$\mathbf{\neg ETUDIE \leftrightarrow FATIGUE}$

Exercice 3

Voici des paquets de groupe de phrases à vous de vous exercer puis vérifier vos traductions en cliquant sur "TraductionN"

1°)

Je vous paierai votre installation de T.V. seulement si elle marche,
Or votre installation ne marche pas.
Donc je ne vous paierai pas.

2°)

S'il ne lui a pas dit, elle ne trouvera jamais.
Si elle ne lui a pas posé la question, il ne le lui dira pas.
Or elle a trouvé.
Donc elle lui a posé la question.

3°)

1. Réginald ne réussira pas le cours
2. Chantal n'échouera pas au cours
3. Chantal et Paul réussiront le cours
4. Paul réussira le cours seulement s'il n'est pas fatigué
5. Paul réussira le cours à moins qu'il ne soit fatigué
6. Paul ne réussira pas le cours ou bien Chantal le réussira
7. Paul ne réussira pas le cours mais Chantal le réussira
8. Ni Paul, ni Chantal ne réussiront le cours
9. Paul et Chantal ne réussiront pas tous les deux le cours
10. Ou Paul et Chantal réussiront tous les deux le cours ou c'est Réginald
11. Paul réussira le cours, ainsi que Chantal ou Réginald
12. Si Paul réussit le cours alors Chantal aussi, et Paul le réussira
13. Si Paul réussit le cours, alors Chantal et Paul le réussiront tous les deux
14. Paul réussira le cours si Chantal le réussit; autrement ni l'un ni l'autre ne le réussiront
15. Ou Chantal réussira le cours si et seulement si Réginald l'échoue, ou Paul le réussira s'il étudie avec méthode et n'est pas fatigué

La logique des prédicats

1 - Sa syntaxe

Pour étudier la syntaxe d'un langage il faut donner un alphabet (un ensemble de symboles) et des règles de constructions syntaxiques d'expressions à partir de ces symboles.

1.1 - L'alphabet

L'alphabet est constitué :

- de **connecteurs** : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ qui se lisent respectivement non, et, ou, implique et équivalent. (NB: on retrouve les opérateurs de l'algébre de Boole non . (et), +(ou))
- de **délimiteurs** : les parenthèses ( )
- des deux constantes propositionelles **V** (vrai) et **F** (faux)
- de **constantes** (minuscules de l'alphabet latin et les concaténations de telles lettres) C = {a, b, c,...z, aa,...}
- de **variables** (majuscules de l'alphabet latin, et les concaténations de telles lettres) V = {A, B, Z, AA..}
- de **prédicats** (majuscules P)

  L'**arité** d'un prédicat est le nombre d'argument du prédicat. C'est un nombre positif
  Si le **prédicat** est d'arité 0il correspond à la notion de **proposition** de la logique des propositions
- de **fonctions** (en minuscules: f, g sucesseur). Chaque symbole de fonction a une arité fixée.

  L'**arité** d'une fonction est le nombre d'argument de la fonction. C'est un nombre positif. Si la fonction est d'arité 0, elle correspond à la notion de constante .

- de **quantificateurs**

  ∃ prononcé "il existe" est le quantificateur existentiel
  ∀ prononcé "quel que soit" est le quantificateur universel

1.2 - Les termes

Par définition, tout terme est engendré par application des deux lois suivantes

- constantes et variables sont des termes
- si f est un symbole de fonction d'arité n (n>=1) et si t1..tn sont des termes alors f(t1..tn) est un terme

Exemple :

successeur(X) est un terme
poids(b) est un terme
successeur(poids(b)) est un terme
P(X, bleu) n'est pas un terme
poids(P(X)) n'est pas un terme

1.3 - Les atomes

Par définition, tout atome est engendré par application des deux lois suivantes

- propositions sont des atomes
- si P est un prédicat d'arité n (n >=1) et si t1..tn sont des termes alors P(t1..tn) est un atome

Exemple :

P(X, bleu) est un atome
VIDE est un atome
ENTRE(table,X, appui(fenetre)) est un atome
successeur(X) n'est pas un atome
appui(fenetre) n'est pas un atome

1.4 - Les formules bien formées

Le **langage** est constitué de l'ensemble des **Formules Bien Formées** (appelées aussi : FBFs ou Well Formed-Formula WFF) ou expressions bien formées défini comme suit :

- atomes sont des fbfs
- si F et G sont des fbfs alors $(\neg G)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des fbfs
- si G est une fbf et X une variable alors $(\exists X)G$ et $(\forall X)G$ sont des fbfs.
- toutes les fbfs sont obtenues par application des 3 règles ci-dessus.

Exemples :

- $(\exists X)\ (\forall Y)\ (P(X, Y) \vee Q(X, Y) \rightarrow R(X))$
  et $((\varnothing,(P(a) \rightarrow P(b))) \rightarrow \varnothing,P(b))$ **sont des fbfs**
- $(\varnothing,(f(a)))$
  et $f(P(a))$ **ne sont pas des fbfs**

Ordre de priorité des connecteurs

(Le plus prioritaire) $\neg, \exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Exercice 1

Soient A(X,Y), B(X), C(X,Y), D(X) des fbfs.
Essayez de déterminer si les formules suivantes appartiennent à la logique des prédicats :

a) $(\exists X\ \forall Y\ A(X, Y) \rightarrow \forall X\ \neg D(X))$
b) $(\forall X\ \exists Y\ (A(X,Y) \wedge D(B(X)))$

1.5 - Variable libre et liée

Champ ou portée d'un quantificateur = la fbf sur laquelle il s'applique
$\forall X\ \exists Y\ (P(X, Y) \wedge \exists Z\ Q(X , Z))$
le champ de $\forall X$ est $\exists Y\ (P(X, Y) \wedge \exists Z\ Q(X, Z))$
le champ de $\exists Y$ est $(P(X, Y) \wedge \exists Z\ Q(X, Z))$
le champ de $\exists Z$ est $Q(X, Z)$

une occurrence de X est liée dans une fbf si elle est dans le champ d'un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ qui l'utilise ou si elle le suit.
S sinon cette occurence est dite libre

Exemples :

$A = \forall X\ (\exists Y\ P(X, Y) \wedge Q(X, Z)) \wedge R(X)$
liée liée liée liée liée libre libre
$B = \forall X\ ((\exists Y\ Q(X, Y)) \wedge P(X, Y, Z))$
liée liée liée liée liée libre libre

Une variable est libre (resp. liée) si au moins une de ses occurences est libre (resp. liée)

Exemples :

Variables libres de A = {Z, X}
Variables liées de A = {X, Y}
Variables libres de B = {Z, Y}
Variables liées de B = {X, Y}

Unr fbf sans variable libre est dite close ou fermée

Exemple :

$\forall X\ \exists Y\ (P(X, Y) \wedge \forall Z\ R(X, Y, Z))$
liée liée liée liée liée

Exercice 2

Donner les variables libres et liées des formules suivantes:

a) $(P(f(X, Y)) \vee \forall Z\ R(a, Z))$
b) $(\forall X\ P(X, Y, Z) \vee \forall Z\ (P(Z) \rightarrow R(Z)))$
c) $(\forall X\ A(X) \vee \exists X\ (B(X) \rightarrow \neg\exists T\ C(X, T)))$

2 - Sa sémantique

La sémantique attribue une signification aux expressions. elle est **compositionnelle** : la signification d'une formule est fonction de celle de ses constituants.

2.1 - Interprétation

Une **interprétation** d'une fbf G est définie par les cinq étapes suivantes :

1. Choix d'un domaine d'interprétation non vide D
2. Assignation à chaque constante de G d'un élément de D
3. Assignation à chaque proposition de G d'un élément de {V, F}
4. Assignation à chaque prédicat d'arité n (n>=1) d'une application de Dn dans {V, F}
5. Assignation à chaque fonction d'arité (n>=1) d'une application de Dn dans D.

on dit alors qu'on a une interprétation de G sur D

Exemples :

Soient les fbfs :

- G1 : $(\forall X)\ P(X)$
- G2 : $(\forall X)\ (\exists Y)\ Q(X, Y)$
- G3 : $(\forall X)\ (R(X) \wedge T(f(X), a))$

Soit une interprétation i1 de G1
i1 : D1 = {1, 2} où

- i1[P(1)] = F
- i1[P(2)] = V

Soit une interprétation I2 de G2
i2 : D2 = {1, 3} où

- i2[Q(1, 1)] = F
- i2[Q(1, 3)] = V
- i2[Q(3, 1)] = F
- i2[Q(3, 3)] = F

Soit une interprétation i3 de G3
i3 : D1 = {4, 5} a = 4 f(4) = 5 f(5) = 4

- i3[R(4)] = V
- i3[R(5)] = F
- i3[T(4, 4)] = V
- i3[T(5, 4)] = V

2.2 - Valeur selon une interprétation

Soit une interprétation i de domaine D d'une fbf G :

1. **Si G est une proposition** alors la valeur qui lui est assignée par définition de i est appelée **valeur de G selon i** (ou dans i)
2. **Si G est un littéral non propositionnel** alors pour chaque choix de valeurs dans D pour les variables de G (s'il en existe) on obtiendra une

valeur V ou F en suivant la définition de i. Cette valeur est dite **valeur de G selon i pour le choix des valeurs de variables**.
pour G3
T(f(X), a) = V si X = 4 et a = 4

3. **Si G est de la forme (∀X)G'**, la valeur de G sera V, si la valeur de G' selon i pour toutes les valeurs de la variable (dans D) est V sinon la valeur de G sera F
G1 est F selon l'interprétation i1
4. **Si G est de la forme (∃X) G'**, la valeur de G sera V si la valeur de G' selon i pour au moins une valeur de X (dans D) est V sinon la valeur de G sera F
Valeur de Q(X, Y) dans I2 est V quand X = 1 et Y = 3 donc
∃Y Q(X, Y) est V selon I2 quand X=1
5. **Si G est de la forme (¬G') ou (G' ∧ G") ou (G' ∨ G") ou (G' → G") ou (G' ↔ G"),** les connecteurs gardent la même sémantique qu'en calcul propositionnel. On définira la valeur de G selon i (quand les valeurs G' et G" selon i seront définies) au moyen des tables de vérité.

Remarques :

1. **Il y a une infinité d'interprétations pour G**
G1 = ∀X ∃Y P(X, Y)
Si D = N
i1 : P(X, Y) est équivalent à X ≥ Y G1 est V dans i1
i2 : P(X, Y) est équivalent à X > Y G1 est F dans i2 si X=0 il n'existe pas Y<0 dans N
2. **On ne peut pas interpréter une fbf contenant des variables libres**
G4 : Q(Y) Y libre dans G4
Soit I : D où Q : D élément de {V, F}
Quel sens attribuer à la variable libre ?
soit constante ?
soit variable parcourant D ? ==> V
==> **On se limitera aux fbfs fermees**

Exercice 3

On considère un sous-ensemble du calcul des prédicats avec :
a et b comme symboles de constantes
f comme symbole de fonction unaire
P comme symbole de prédicat binaire
Soit i une interprétation de ce langage définie par son domaine D={1, 2} et par:
i[a] = 1; i[b] = 2; i[f(1)] = 2; i[f(2)] = 1; i[P(U, V)] = V si et seulement si U = 1

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes:

a) $P(a,f(a))$
b) $P(b,f(b))$
c) $\forall X\ \forall Y\ P(X,Y)$
d) $\forall X\ \forall Y\ (P(X,Y) \rightarrow P(f(X),f(Y)))$
e) $\exists X\ \forall Y\ (P(X,Y) \rightarrow P(f(X),f(Y)))$

2.3 - Théorèmes d'équivalence

Soient A, B et C des formules bien formées :

1. **Implication matérielle**
   $A \rightarrow B \cong \neg A \vee B$
2. **Equivalence matérielle**
   $A \leftrightarrow B \cong (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. **Commutativité**
   a) $A \vee B \cong B \vee A$
   b) $A \wedge B \cong B \wedge A$
4. **Associativité**
   a) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$
   b) $(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$
5. **Distributivité**
   a) $A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   b) $A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. a) $A \vee V \cong V$
   b) $A \wedge V \cong A$
7. a) $A \vee F \cong A$
   b) $A \wedge F \cong F$
8. **Complémentarité**
   a) $A \vee \neg A \cong V$
   b) $A \wedge \neg A \cong F$
9. **Involution**
   $(\neg(\neg A)) \cong A$
10. **Lois de de Morgan**
   a) $\neg(A \vee B) \cong (\neg A) \wedge (\neg B)$
   b) $\neg(A \wedge B) \cong (\neg A) \vee (\neg B)$

11. a) $A \vee ((\neg A) \wedge B) \cong A \vee B$
    b) $A \wedge ((\neg A) \vee B) \cong A \wedge B$
12. **Identité**
    a) $A \wedge A \cong A$
    b) $A \vee A \cong A$
13. $(\forall X)\ G(X) = (\forall Y)\ G(Y)$
    $(\exists X)\ G(X) = (\exists Y)\ G(Y)$
14. $(\neg((\exists X)\ G(X))) = (\forall X)\ (\neg G(X))$
    $(\neg((\forall X)\ G(X))) = (\exists X)\ (\neg G(X))$
15. $(\forall X)\ (G(X) \wedge H(X)) = (\forall X)\ G(X) \wedge (\forall X)\ H(X)$
    $(\exists X)\ (G(X) \vee H(X)) = (\exists X)\ G(X) \vee (\exists X)\ H(X)$
    ATTENTION :
    $(\forall X)\ (G(X) \vee H(X))$ **non équivalent à** $(\forall X)\ G(X) \vee (\forall X)\ H(X)$
    $(\exists X)\ (G(X) \wedge H(X))$ **non équivalent à** $(\exists X)\ G(X) \wedge (\exists X)\ H(X)$
16. $(\forall X)\ F(X) \vee (\forall X)\ H(X) = (\forall X)\ F(X) \vee (\forall Y)\ H(Y)$
    $(\exists X)\ F(X) \vee (\exists X)\ H(X) = (\exists X)\ F(X) \vee (\exists Y)\ H(Y)$
    $(\forall X)\ F(X) \wedge (\forall X)\ H(X) = (\forall X)\ F(X) \wedge (\forall Y)\ H(Y)$
    $(\exists X)\ F(X) \wedge (\exists X)\ H(X) = (\exists X)\ F(X) \wedge (\exists Y)\ H(Y)$

3 - Quelques notions classiques: validité, insatisfiabilité, conséquence, complétude

3.1 - Validité

Une fbf A est une **tautologie** **(valide)** si et seulement si elle est vraie dans toute interprétation ; **on écrit alors :** **$\models$ A**

Exemple :

$\neg A \vee A$ est une formule valide

Une fbf est **invalide** si et seulement si **elle n'est pas valide**

Exemple :

$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules invalides il suffit que A et B soient fausses

Exercice 4

Etablir la validité des formules suivantes:

a) $(\forall X\ \exists Y\ P(X, Y)) \rightarrow (\exists X\ \exists Y\ P(X, Y))$
b) $(\exists X\ \forall Y\ \neg P(X, Y) \rightarrow \exists X\ P(X,X))$

3.2 - Insatisfaisabilité

Une fbf est **inconsistante** ou insatisfiable si et seulement si **elle est fausse dans toute interprétation**

Exemple :

$\neg A \wedge A$ est une formule inconsistante

Une fbf A est **consistante** ou **satisfiable**

- si et seulement si **elle n'est pas inconsistante**
- si **il existe une interprétation i telle que i[A] = V**
- si **elle admet un modèle**

Exemple :

$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules consistantes il suffit que A et B soient vraies

3.3 - Conséquence logique

A est une **conséquence logique** de E si et seulement si **toutes les interprétations qui rendent vraies toutes les formules de E rendent vraie la formule A**.
On écrit alors **E |= A**

On dit qu'une formule C est une conséquence logique de H1.. Hn

- si et seulement si **tout modèle de H1...Hn est un modèle de C**
- si et seulement si **H1 $\wedge$ H2 $\wedge$ ... $\wedge$ Hn $\rightarrow$ C est valide**

Dans ce contexte les formule H_i sont les hypothèses et C est la conclusion.

3.4 - Indécibilité et semi-décidabilité de la logique des prédicats

Lorsqu'une formule ne contient pas de variable, on peut, comme en calcul propositionnel, en utilisant les tables de vérité, déterminer en un nombre fini d'opérations si cette formule est valide ou non inconsistante ou non.
La situation est plus complexe en présence de variables et donc de quantificateurs car il y a une infinité d'interprétations. On montre qu'il est impossible de proposer un algorithme général capable de décider en un nombre fini d'opérations de la validité ou de la non validité de n'importe quelle formule de la logique des prédicats du premier ordre.On dit que la logique des prédicats est indécidable. (Théorème d'indécidabilité de Church)
Cependant, on peut proposer des algorithmes généraux pour décider de la validité de certaines familles de fbfs :

- si la fbf est valide ils s'arrêteront
- si la fbf est non valide ils risquent de ne pas s'arrêter

La logique des prédicats est semi-décidable

Les principales techniques proposées sont :

- le théorème d'Herbrant
- la méthode de Davis et Putman
- le principe de résolution

4 - Représentation des connaissances

4.1 - L'universelle affirmative

- Tous les F sont des G
- $\forall X\ (F(X) \rightarrow G(X))$
- Tout F est G
- Tout ce qui est F est G
- N'importe lequel F est G
- Les F sont tous G
- Si un être quelconque est F, il est G
- Chaque F est G
- Seuls les G sont F

4.2 - L'universelle négative

- Aucun F n'est G
- $\forall X\ (F(X) \rightarrow \neg G(X))$
- Il n'y a aucun F et G
- Rien n'est à la fois F et G
- Les F et G n'existent pas

4.3 - La particularité affirmative

- Quelques F sont G
- $\exists X\ (F(X) \wedge G(X))$
- Quelque F est G

- Il y a des F et G
- Quelque chose est à la fois F et G
- Il y a un F et G
- Des F et G existent

4.4 - La particularité négative

- Quelques F ne sont pas G
- $\exists X\ (F(X) \wedge \neg G(X))$
- Quelque F n'est pas G
- Il y a des F et non G
- Quelque chose est à la fois F et non G
- Il y a un F et non G
- Des F et non G existent

Exemple :

soit à traduire le groupes de phrases suivantes :

a) Marcus était un homme
b) Marcus était un pompéien
c) Tous les pompéiens étaient des romains
d) César était souverain
e) Tous les romains étaient fidèles à César, soit le haïssaient
f) Chacun est fidèle à quelqu'un
g) Les gens n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles
h) Marcus a essayé d'assassiner César

D'abord je vais constituer l'univers du discours c'est-à-dire je vais d'abord rechercher dans le texte toutes les propositions dont j'ai besoin. Ce qui donne pour l'exemple l'univers du discours suivant :

D = ensemble des êtres humains

Prédicats :

- HOMME(X) : X est un homme
- POMPEIEN(X) : X est pompéien
- SOUVERAIN(X) : X est souverain

- ROMAIN(X) : X est romain
- PERSONNE(X) : X est une personne
- FIDELE(X, Y) : X est fidèle à Y
- HAIR(X, Y) : X hait Y
- ESSAYER_ASSASSINER(X, Y) : X essaye d'assassiner Y

Constantes :

- marcus
- cesar

Ensuite, pour chacune des phrases je vais écrire une formule bien formée à l'aide des propositions définies ci-dessus, des connecteurs et des parenthèses.

a) Marcus était un homme
HOMME(marcus)

b) Marcus était un pompéien
POMPEIEN(marcus)

c) Tous les pompéiens étaient des romains
∀Ξ (POMPEIEN(X) → ROMAIN(X))

d) César était souverain
SOUVERAIN(cesar)

e) Tous les romains étaient fidèles à César, soit le haïssaient
∀X (ROMAIN(X) → FIDELE(X, cesar) ∨ HAIR(X, cesar))
ou
∀X (ROMAIN(X) → (FIDELE(X, cesar) ∨ HAIR(X, cesar)) ∧ ¬(FIDELE(X, cesar) ∧ HAIR(X, cesar)))

f) Chacun est fidèle à quelqu'un
∀X ∃Y FIDELE(X, Y)

g) Les gens n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles
∀X ∀Y (PERSONNE(X) ∧ SOUVERAIN(Y) ∧ ESSAYER_ASSASSINER(X, Y) → ¬FIDELE(X, Y))

h) Marcus a essayé d'assassiner César
ESSAYER_ASSASSINER(marcus, cesar)

Exercice 5

Voici des paquets de groupe de phrases à vous de vous exercer puis vérifier vos traductions en cliquant sur "Traduction"

1- a) Quiconque sait lire est instruit
b) Les dauphins ne sont pas instruits
c) Certains dauphins sont intelligents
d) Certains êtres intelligents ne savent pas lire
e) Flipper est un dauphin
f) Le frère de Flipper est intelligent

2 -
a) Pierre se prend pour Napoléon
b) Seuls les fous se prennent pour Napoléon
c) Pierre est fou
d) Quelques fous sont courageux

3 -
a) Tous les chiens à poils ras sont frileux
b) Un chien est frileux seulement s'il est à poils ras
c) Aucun chien à poils ras n'est frileux
d) Certains chiens à poils ras sont frileux

Algorithme d'unification

1 - Introduction

Généralisation du principe de résolution à la logique des prédicats
==> Etendre définitions de "littéraux complémentaires" et de "résolvant"

Soient C1 = P(X) ∨ Q(a,X)
C2 = ¬P(g(Y)) ∨ R(Y,b)
Peut-on dire des littéraux P et ¬P qu'ils sont complémentaires ?
Peut-on définir un résolvant ?

Si [g(a)/X] et [a/Y] on obtient :
C1' = P(g(a)) ∨ Q(a,g(a))
C2' = ¬P(g(a)) ∨ R(a,b)
C1' et C2' ont un résolvant C = Q(a,g(a)) R(a,b)
C est conséquence logique de C1' et de C2' et donc de C1 et C2.
On peut trouver d'autres instances de C1 et C2 [g(g(b))/X] et [g(b)/Y] ...
On peut continuer sur d'autres instances C1 et C2 dont les littéraux en P sont complémentaires.
Tous les résolvants obtenus sont des instances de C = Q(a,X) R(Y,b)

Objectifs :

Essayer de produire directement C qui paraît plus général. Il peut être obtenu comme résolvant de
D1 = P(g(Y)) ∨ Q(a,g(Y)) instance de C1 [g(Y)/X]
et D2 = ¬P(g(Y)) ∨ R(Y,b) instance de C2
La substitution de [g(Y)/X] a permis de rendre les deux expressions en P symboliquement complémentaires.

L'unification est donc le procédé qui consiste à trouver des affectations de variables de façon à rendre des expressions identiques symboliquement.

2 - Les substitutions

Une substitution θ est un ensemble fini de couples (ti,Vi) où chaque Vi est une variable, chaque ti un différent de Vi et où aucun couple d'éléments de l'ensemble n'a la même variable Vi

Exemple :

θ1 = {f(Z)/X,t/Y}
θ2 = {a/X,f(g(a))/Y,g(t)/Z}

Définition d'instance

Soit θ une substitution, E une expression.
L'expression obtenue à partir de E en remplaçant simultanément toute occurence de Vi par ti pour tout i est **notée** E.θ et est **appelée instance de** E.

Exemple :

E = P(X,Y) Q(g(X),Z)
θ = {f(a)/X,g(t)/Y,t/Z }
E.θ = P(f(a),g(t)) Q(g(f(a)),t)

Composition de substitutions

Soit θ = {t1/X1, t2/X2, ..., tn/Xn}
σ ={u1/Y1, u2/Y2, ..., um/Ym}
la composition de θ et σ (notée σ°θ) est la substitution obtenue à partir de {t1.σ/X1, t2.σ/X2, ..., tn.σ/Xn, u1/Y1, u2/Y2, ..., um/Ym} en éliminant les couples :
a) ui/Yi si Yi ∈ {X1, X2, ..., Xn}
b) tj.σ/Xj si Xj = tj.σ

Exemple :

$\theta = \{f(T)/X, Z/Y\}$
$\sigma = \{a/X, b/T, Y/Z\}$
$\sigma°\theta = \{f(T).\sigma/X, Z.\sigma/Y, a/X, b/T, Y/Z\}$
$= \{f(b)/X, Y/Y, a/X, b/T, Y/Z\}$
$= \{f(b)/X, b/T, Y/Z\}$

$E.(\sigma°\theta) = (E.\theta).\sigma$

Substitutions interdites : ?/constante, f(X)/X, ?/fonction
La composition est associative et possède un élément neutre (substitution vide notée ?)

Exemple :

$E = P(X,Y) \vee Q(Y,Z) \vee R(Y,X)$
$\theta = \{f(T)/X, Z/Y\}$
$\sigma = \{a/X, b/T, Y/Z\}$
$E.\ \theta = P(f(T),Z) \vee Q(Z,Z) \vee R(Z,f(T))$
$(E.\ \theta).\sigma = P(f(b),Y) \vee Q(Y,Y) \vee R(Y,f(b))$
$\sigma°\theta = \{\phi(b)/X, b/T, Y/Z\}$
$E.(\sigma°\theta) = P(f(b),Y) \vee Q(Y,Y) \vee R(Y,f(b))$

Exercice 1

Calculer la substitution S = Sa°Sb dans les trois cas suivants :

a) Sa = {Y/X, f(Z)/W, b/V} et Sb = {X/Y, g(W)/V, f(V)/U}
b) Sa = {c/Z, f(W)/X, T/Y} et Sb = {b/Z, g(a,X)/Y}
c) Sa = {f(a)/Z, f(b)/Y} et Sb = {a/X, b/Y, T/W}

3 - L'unification

Définition de l'unifieur :

Une substitution θ est un unifieur de l'ensemble W des expressions {E1, ..., Ek}
<==> E1.θ = E2.θ = ... = Ek.θ
W est dit unifiable

Définition de l'unifieur le plus général ou upg :

Un unifieur σ de W = {E1, ..., Ek} est dit **upg** (unifieur le plus général)
si et seulement si pour tout unifieur θ **de W, il existe** δ **tel que :** θ = δ°σ

W = {P(X,Y), P(f(T)),Z}
σ1 = {f(T)/X, Z/Y} et σ2 = {f(T)/X, Y/Z} **upgs**
θ = {f(a)/X, g(g(a))/Y, g(g(a))/Z, a/T} **unifieur**
δ1 tel que θ1 = δ1°σ1 est {a/T, g(g(a)/Z}
δ2 tel que θ2 = δ2°σ2 est {a/T, g(g(a)/Y}

L'algorithme d'unification consiste en la recherche d'un upg d'un ensemble d'expressions.

Voyons quelques notions qui vont être utilisées au cours de l'algorithme d'unification, tout d'abord l'ensemble de discordance.
L'ensemble de discordance d'un ensemble non vide d'expressions est obtenu en localisant la première position à partir de la gauche pour laquelle toutes les expressions n'ont pas le même symbole et en extrayant dans chaque expression, la sous-expression qui commence en cette position

W1 = {P(X, g(X), f(X, Y)), P(X, g(X), f(g(t,Y), Z))}
Ensemble de discordance : D1 = {X, g(t,Y)}
W2 = {P(Y, X, Z), P(Y, f(t), h(Y)), P(Y, b, U)}
Ensemble de discordance : D2 = {X, f(t), b}
W3 = {Q(Y), P(Y)}

Voici maintenant l'algorithme d'unification :

Soit W l'ensemble fini à unifier

- **Etape 1 :** k = 0 ; Wk = W ; $\sigma\kappa = \varepsilon$
- **Etape 2 : SI** Wk est un singleton
  ALORS σk upg de W
  SINON trouver Dk l'ensemble de discordance de Wk ;
- **Etape 3 : SI** il existe des éléments Vk et tk de Dk tels que :
  _ Vk soit une variable
  _ tk soit un terme ne contenant pas Vk
  ALORS aller à l'étape 4
  SINON W non unifiable
- **Etape 4 :** σk+1 = {tk/Vk}°σk ;
  Wk+1 = Wk.{tk/Vk}
- **Etape 5 :** k = k+1 ;
  Aller à l'étape 2

SI W est ensemble fini non vide unifiable alors l'algorithme s'arrête toujours à l'étape 2 et σk est upg.

Exemple :

W = {P(a,X,f(g(Y))), P(Z,f(Z),f(U))}

1. k = 0 ; W0 = W ; $\sigma 0 = \varepsilon$;
2. D0 = {a,Z} avec Z variable et a terme ne contenant pas Z ;
3. s1 = {a,Z}°σ0 = {a/Z}
   W1 = W0.{a/Z} = {P(a,X,f(g(Y))), P(a,f(a),f(U))}
4. D1 = {X,f(a)}, V1 = X, t1 = f(a) terme ne contenant pas X ;
5. σ2 = {f(a)/X}°{a/Z} = {f(a)/X, a/Z}
   W2 = W1.{f(a)/X} = {P(a,f(a),f(g(Y))), P(a,f(a),f(U))}
6. D2 = {g(Y)/U}, V2 = U, t2 = g(Y) terme ne contenant pas U ;
7. s3 = {g(Y)/U}°σ2 = {g(Y)/U, f(a)/X, a/Z}
   W3 = W2.{g(Y)/U } = {P(a,f(a),f(g(Y)))}
8. W3 est un singleton ==> σ3 est l'upg de W
   donc W est unifiable.

Exercice 2

Donner les upgs (s'ils existent) des ensembles d'expressions suivants :

a) W = {P(T,T), P(f(V),V)}
b) W = {P(a,T), P(X,Y)}
c) W = {P(f(X),Y,X), P(Z,X,g(T))}
d) W = {P(f(X),X), P(Y,g(Y))}

Principe de résolution en logique des propostions

1 - Système de preuves par résolution

Le principe de résolution est une méthode automatique pour montrer la validité d'une formule.
Nous allons voir les notions de clauses et de résolvant avant d'aborder le principe de résolution.

1.1 - Notion de clause

Une **clause** est une fbf qui a la forme d'une disjonction de littéraux
Cas particulier : un littéral isolé est une clause.

Exemple de clauses :

$A \vee B \vee C \vee \neg D$	CLAUSE
$\neg D$	CLAUSE

Comment obtenir à partir d'une formule bien formée un ensemble de clauses ?

Il faut d'abord transformer la formule en sa forme normale conjonctive et ensuite éliminer les connecteurs $\wedge$.
On obtient ainsi un ensemble S de clauses.

1.2 - Clause résolvante

Si C1 et C2 sont 2 clauses et si $L1 = \neg L2$ et L1 est dans C1 et L2 est dans C2
C est la disjonction des clauses restantes après suppression des littéraux L1 et L2.
Elle est appelée **clause résolvante** et ou résolvant de C1 et de C2.
L1 et L2 sont les **littéraux résolus**.

Exemples :

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :
C1 : $E1 \vee E2$
C2 : $\neg E2 \vee E3$
Le résolvant de **C1** et de **C2** est **C : E1 $\vee$ E3**

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :
C1 : P
C2 : $\neg P$
Le résolvant de **C1** et de **C2** est **C** : $\neg$ **la clause vide**

La clause Faux est notée $\neg$ c'est la **clause vide**
Le résolvant C de deux clauses C1 et C2 est une conséquence logique de C1 et de C2

Exercice 1

Trouver la clause résolvante dans les cas suivants :

a) $C1 = \neg Q \vee P$ $\quad$ $C2 = R \vee \neg P \vee S$
b) $C1 = \neg Q \vee P$ $\quad$ $C2 = Q$
c) $C1 = \neg P \vee \neg Q$ $\quad$ $C2 = P \vee S \vee \neg R$
d) $C1 = P \vee Q$ $\quad$ $C2 = R \vee P$

1.3 - Algorithme de résolution

On appelle **déduction** (ou résolution) d'une clause C à partir d'un ensemble de clauses S
= séquence finie R1, R2,... Rn = C de clauses telle que chaque Ri est:

- soit une clause de S
- soit un résolvant de clauses le précédant

$S = \{R \vee Q, \neg R, \neg Q \vee P, \neg P \vee R\}$
$R1 = R \vee Q$
S'il existe une déduction de la clause vide à partir de S alors S est insatisfiable

On appelle **réfutation** la déduction de la clause vide Ø à partir de S

Montrer qu'une formule bien formée **F est valide** :

- C'est équivalent à montrer que **¬F est inconsistante**
- C'est aussi équivalent à monter que **$S_{\neg F}$ insatisfiable**
- C'est aussi équivalent à monter qu'**il existe une déduction de la clause vide Ø**

Algorithme de résolution

Début
Ecrire la négation de F ;
Mettre F sous forme d'un ensemble de clauses ;
Tant que la clause vide n'est pas rencontrée et qu'il existe des paires réductibles **faire**
  Début
  Chercher des clauses résolvantes ;
  Ajouter ce résultat à la liste des clauses ;
  Fintantque ;
Si on trouve la clause vide **alors** F est valide
  sinon F est invalide
Finsi ;
Fin ;

Exemple 1

Soit $S_{\neg F}$ $=\{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg R, P, \neg T \vee Q, T\}$

C1 C2 C3 C4 C5

$S_{\neg F}$ est l'ensemble des clauses d'une fbf $\neg F$.
Montrons que cet ensemble est insatisfiable

C1 = $\neg P \vee \neg Q \vee R$ $\Rightarrow$ C6 = $\neg P \vee \neg Q$
C2 = $\neg R$

C6 = $\neg P \vee \neg Q$ $\Rightarrow$ C7 = $\neg Q$
C3 = P

C7 = $\neg Q$ $\Rightarrow$ C8 = $\neg T$
C4 = $\neg T \vee Q$

C8 = $\neg T$ $\Rightarrow$ C9 = $\varnothing$
C5 = T

A partir de l'ensemble des clauses de la fbf $\neg F$ on a déduit la clause vide donc on peut conclure que **$\neg F$ est insatisfiable** et donc que **F est valide**.

Exemple 2

Soit $S_{\neg F}$ = $\{P \vee Q, \neg Q \vee T, \neg T \vee R, \neg R, \neg P \vee R, Q \vee S, P \vee S\}$

C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7

$S_{\neg F}$ est l'ensemble des clauses d'une fbf $\neg F$.
Montrons que cet ensemble est insatisfiable

C1 = $P \vee Q$ $\Rightarrow$ C6 = $P \vee T$
C2 = $\neg Q \vee T$

C6 = $P \vee T$ $\Rightarrow$ C7 = $P \vee R$
C3 = $\neg T \vee R$

C7 = $P \vee R$ $\Rightarrow$ C8 = P

$C4 = \neg R$

$C8 = P$ $\Rightarrow$ $C9 = R$

$C5 = \neg P \vee R$

$C9 = R$ $\Rightarrow$ $C10 = \varnothing$

$C4 = \neg R$

A partir de l'ensemble des clauses de la fbf $\neg F$ on a déduit la clause vide donc on peut conclure que **$\neg$F est insatisfiable** et donc que **F est valide**.

Mais on aurait pu aussi trouver la déduction suivante :

$C5 = \neg P \vee R$ $\Rightarrow$ $C6 = \neg P$

$C4 = \neg R$

$C6 = \neg P$ $\Rightarrow$ $C7 = Q$

$C1 = P \vee Q$

$C7 = Q$ $\Rightarrow$ $C8 = T$

$C2 = \neg Q \vee T$

$C8 = T$ $\Rightarrow$ $C9 = R$

$C5 = \neg T \vee R$

$C9 = R$ $\Rightarrow$ $C10 = \varnothing$

$C4 = \neg R$

Remarquons qu'une clause peut être utilisée plusieurs fois et que des clauses peuvent ne pas être utilisées pour déduire la clause vide

Exercice 2

A vous de montrer dans les cas suivants que F est valide :

a) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R)) \rightarrow (Q \vee R)$
b) $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (Q \wedge R)$
c) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow P))$

2 - Les limites et ouverture vers la logique des prédicats

La logique des propositions est limitée ; en effet dès que l'on veut manipuler des propriétés générales un peu complexes, des relations entre des objets, on peut aussi avoir besoin de quantifier en exprimant "Tous les hommes sont mortels". Rien ne nous permet de faire cela en logique des propositions.

Exemple :

Si l'on souhaite exprimer que "**Socrate est un homme**", on a la possibilité de donner la proposition suivante : **SOCRATE_HOMME**.
Si maintenant on souhaite exprimer que "**Platon est un homme**", on a la proposition **PLATON_HOMME**.
On se trouve avec deux assertions distinctes et aucune similitude entre Socrate et Platon.
On souhaiterait une meilleure représentation qui nous permettrait de dire que Socrate et Platon sont tous les deux des hommes dans le genre :
HOMME(Socrate), HOMME(Platon)

Le prédicat est le concept qui pallie ce problème. Il exprime une relation dans un contexte.

Exemples :

"Quelqu'un a chanté quelque chose "
on peut définir le prédicat : **A_CHANTE** avec deux arguments ou termes : celui qui chante et ce qu'il chante

A_CHANTE(MARIA_CALLAS,TRAVIATA)

Quand on veut traduire la phrase **"La maison est verte"**, on a plusieurs possibilités quant au choix du prédicat et de son arité :

- **EST_VERTE(maison)**
- ou **COULEUR(maison,verte)**
- ou **VALEUR(couleur,maison,verte)**

Si on a besoin d'exprimer des relations ou propriétés, des fonctions la logique des propositions ne le permet pas. Aussi, **le calcul des prédicats possède la notion de fonction**.

Exemple :

"Le frère de Paul travaille avec le frère de Jacques" peut se traduire par le prédicat **TRAVAILLER** avec deux arguments et par le symbole de fonction **frere** :
TRAVAILLER(frere(paul),frere(jacques))

Méthode de Herbrand

La méthode de Herbrand qui permet de ramener la satisfaisabilité d'une formule à la satisfaisabilité d'un ensemble infini de formules propositionnelles. L'un des résultat de Herbrand peut s'énoncer ainsi : étant donné une formule quelconque F de la théorie de la quantification, il est possible d'engendrer de manière mécanique une suite de formules sans quantificateurs F0, F1…Fn telle que F est démontrable en théorie de la quantification si et seulement si il existe un nombre k tel que Fk est démontrable en logique propositionnelle.
On peut dire qu'il a ramené le calcul des prédicats au calcul propositionnel.

1 - Univers ou domaine de Herbrand

Définition : L'univers de Herbrand est stratifié en niveaux.
Au niveau 0, il comprend H0 constitué par

1. l'ensemble des constantes apparaissant dans l'ensemble de clauses S . Si aucune constante n'apparaît H0 = {a} où a est une constante choisie arbitrairement.
2. tous les symboles de fonctions figurant dans les clauses de S. On leur donne comme argument les constantes mentionnées en 1.

On obtient Hi+1à partir de Hi en formant l'union de Hi et de l'ensemble de tous les termes de la forme fn(t1 t2,…, tn) où les ti prennent leurs valeurs dans Hi
Hi est appelé l'ensemble des constantes de niveau i
H∞ est appelé univers de Herbrand ou domaine de Herbrand

Exemple 1 :

$S = \{P(a), \neg P(X) \vee P(f(X))\}$

$H0 = \{ a, f(a) \}$

$H1 = \{ a, f(a), f(f(a)) \}$

$H\infty = \{ a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots \}$

Exemple 2 :

$S = \{P(X), R(X) \vee Q(Y, X), \neg Q(Y, Y)\}$

Pas de constante on en choisit une arbitrairement : a

$H0 = \{ a \}$

$H1 = \{ a \}$ car il n'y a pas de fonction

$H\infty = \{ a \}$

Exemple 3 :

$S = \{P(f(X)) \vee Q(a), Q(g(b)) \vee \neg P(Y) \}$

$H0 = \{ a, b, f(a), f(b), g(a), g(b) \}$

$H1 = \{ a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\ f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)) \}$

$H\infty =$ H1 È $\{f(f(f(a))), \ldots\}$

Exercez-vous en donnant les univers de Herbrand pour les ensembles S de clauses suivants :

$S1 = \{\neg P(X, Y) \vee Q(X, Y), \neg Q(Z, W), P(Z, T) \}$

$S2 = \{\neg P(X, g(X)) \vee Q(X, Y), Q(X, Y), P(a,X)\}$

$S3 = \{\neg P(X, g(X)) \vee Q(X, Y), Q(X, f(X)), P(a,X)\}$ Vérifions !

Définition : on dit qu'une expression est de base si aucune variable n'apparaît

Une expression est un atome ou un terme ou une conjonction d'atomes ou un ensemble de clauses…

Toutes les variables ont pris leur valeur dans l'univers de Herbrand

Exemple :

$P(X, f(X))$ $H\infty = \{ a, f(a) \ldots \}$ n'est pas une expression de base

$P(f(a), f(f(a)))$ est une expression de base

2 - Base de Herbrand

Définition : Soit S un ensemble de clauses, l'ensemble des atomes de base de la forme Pn(t1 t2,..., tn) pour tout prédicat d'arité n apparaissant dans S où t1 t2,..., tn sont des éléments de l'univers de Herbrand est appelé la base de Herbrand.

<u>Exemple :</u>
A1 = {P(a), P(f(a)), P(f(f(a)))...} est la base de Herbrand de l'exemple 1
A2 = {P(a), R(a), Q(a,a)} est la base de Herbrand de l'exemple 2
A3 = {P(a), Q(a), P(b), Q(b), P(f(a)), Q(f(a)), ...} est la base de Herbrand de l'exemple 3

Définition : Une instance de base d'une clause C (appelée aussi clause fondamentale) d'un ensemble S est une clause obtenue en remplaçant les variables libres de C par des éléments de l'univers de Herbrand $H\infty$.

<u>Exemple :</u>
C = R(X) ∨ Q(Y,X)
C1 = R(a) ∨ Q(a,a)

C = P(f(X)) ∨ Q(a)
C1 = P(f(g(b))) ∨ Q(a)

S = { P(X) ∨ Q(a), R(f(Y)) }
$H\infty$ = { a, f(a), f((f(a)).... }
On va définir une interprétation I de S dans $H\infty$

I[a] = f(f(a))

Définition de f
I[f(a)] = f(a)
I[f(f(a))] = a
I[f(f(f(a)))] = a
I[f(f(f(f(a))))] = f(a)

Définition de P
I[P(a)] = V
I[P(f(a))] = V
I [P(f(f(a)))) = F

Définition de Q
I[Q(a)] = V
I[Q(f(a))] = F

Définition de R
I[P(a)] = V
I[P(f(a))] = V

3 - Interprétation de Herbrand

Définition : Soit S un ensemble de clauses, soit H l'univers de Herbrand, I une interprétation dans H est dite H-interprétation ou interprétation de Herbrand si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. Elle applique toutes les constantes individuelles sur elle-même
2. Elle applique chaque symbole de fonction f d'arité n une fonction h qui fait correspondre à n termes h1 h2,...hn, éléments de l'univers de Herbrand H, le terme f(h1, h2,...,hn)

Remarque : Les H interprétations ne diffèrent que par l'affectation des symboles de prédicats.

Exemple 1 :
A = {P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a))....}
Une H interprétation I1 est
I1 = {V, V, V, F, F, F.....}
Ou I1 = {P(a), Q(a), R(a), ¬P(f(a)), ¬Q(f(a)), ¬R(f(a))....}

Exemple 2 :
S ={P(X) ∨ ¬Q(f(X))}
H∞ = { a, f(a), f((f(a)).... }
A = { P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), ...}
I1 = { ¬P(a), ¬Q(a), P(f(a)), ¬Q(f(a)), P(f(f(a)).... }
I2 = { P(a), ¬Q(a), ¬P(f(a)), Q(f(a)), }

Exemple 3 :

S = { P(a) ∨ ¬Q(f(X), R(X, Y)}
D = {1, 2}

a	f(1)	f(2)	P(1)	P(2)	Q(1)	Q(2)	R(1,1)	R(1,2)	R(2,1)	R(2,2)
2	2	2	V	F	V	V	F	V	F	F

Une H interprétation correspond à I avec H = {a, f(a), f(f(a))....}
A = { P(a), Q(a), R(a, a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a), a), R(a, f(a)) ....}
I[P(a)] = P(2) = F
I[Q(a)] = Q(2) = V
I[R(a, a)] = R(2, 2) = F
I[P(f(a))] = P(f(2)) = P(2) = F
IH = { ¬P(a), Q(a), ¬R(a, a), ¬P(f(a)), ...}

Définition : Etant donné une interprétation I sur un domaine D, une H interprétation I* correspondant à I est une H interprétation qui satisfait les conditions suivantes :

1. Soient h1, h2, ..., hn des éléments de H à chaque hi on affecte un di ∈ D,
2. Si P(d1, d2,...dn) est vrai (respectivement faux) dans I alors P(h1, h2,..., hn) est vrai (respectivement faux) dans I*.

Théorème : Si une interprétation I sur un domaine D satisfait un ensemble S de clauses alors n'importe quelle interprétation de Herbrand I* correspondant à I satisfait aussi S.

Théorème : Un ensemble de clauses S est insatisfiable si et seulement s'il est faux sous toutes les H interprétations

4 - Théorème de Herbrand

Définition : Un ensemble de clauses est sémantiquement inconsistant si et seulement si la conjonction de ces clauses est fausse dans tous les modèles c'est-à-dire pour toute interprétation et tout domaine. On peut se limiter à l'examen du modèle de Herbrand composé de l'univers de Herbarnd et de la H interprétation.
Ou dit autrement : Un ensemble de clauses est sémantiquement inconsistant si et seulement si la conjonction de ces clauses est fausse dans toutes les interprétations I* des S.

Propriétés :

1. Une clause C est satisfaite par une H interprétation si et seulement si toute instance de base est satisfaite par I
2. Une clause C est falsifiée pour une H interprétation I si et seulement si il y a au moins une instance de base qui soit fausse dans cette interprétation
3. Un ensemble de clauses est insatisfiable si et seulement si pour toute H interprétation il y a au moins une instance de base ou une clause qui soit fausse

Théorème d'Herbrand première formulation : Un ensemble S de clauses fondamentales est insatisfiable (sémantiquement inconsistant) si et seulement si il existe un ensemble fini S' d'instances de base de clauses de S sémantiquement inconsistant.

Les clause fondamentales (ou instances de base) sont des expressions du calcul des propositions. Comme le calcul des propositions est complet, tout ensemble fini de formules du calcul des propositions qui est sémantiquement inconsistant est syntaxiquement inconsistant.

Théorème d'Herbrand deuxième formulation : Un ensemble S de clauses fondamentales est insatisfiable (syntaxiquement inconsistant) si et seulement si il existe un ensemble fini S' d'instances de base de clauses de S syntaxiquement inconsistant.

Herbrand a aussi montré qu'il est possible de générer de manière automatique cet ensemble fini. Son théorème a donc un caractère constructif. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser les arbres sémantiques.

5 - Les arbres sémantiques

Les arbres sémantiques permettent l'examen de toutes les H interprétations
Définition : Si A est un atome les deux littéraux A et ¬A sont dits complémentaires et le couple (A, ¬A) est dit paire complémentaire

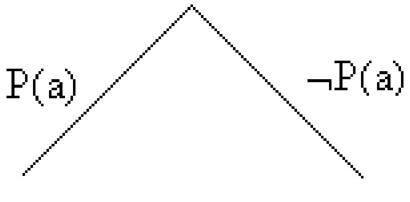
Définition : Un arc est un chemin entre deux nœuds entre lesquels il n'y a pas de neouds. Les arcs correspondent à des symboles de conjonctions.
On voit donc qu'une suite de branche de l'arbre falsifie une clause si la conjonction de littéraux qui correspond à une segment de la branche est la négation de la clause.

Définition : Soit S un ensemble de clauses, soit A la base de Herbrand de S, un arbre sémantique pour S est un arbre où chaque arc est lié à un ensemble fini d'atomes ou de négation d'atomes de la façon suivante :

1. Pour chaque nœud N il part un nombre fini d'arcs notés L1, L2,…Ln, soit Qi la conjonction de tous les littéraux attachés à Li alors Q1 ∨ Q2 ∨ Q3 ∨ ∨ Qn est valide.
2. Pour chaque nœud N soit I(N) l'union de tous les ensembles liés aux arcs du chemin T qui va de la racine à N. I(N) ne contient aucune paire complémentaire.

Exemple :

S ={ P(X), ¬P(a)}
H∞ = { a }
A = { P(a)}



5.1 - Propriétés des arbres sémantiques

Définition : Soit A ={A1, A2, ...} la base de Herbrand de S. Un arbre sémantique pour S est dit complet si et seulement si en plus des conditions exigées de l'arbre sémantique la condition :
Chaque branche de l'arbre sémantique contient pour tout atome de la base de Herbrand soit Ai soit ¬Ai

<u>Remarque :</u> I(N) correspond à la définition d'une H interprétation, un arbre sémantique complet correspond à l'examen de toutes les H interprétations

Définition : Un nœud N est dit nœud d'échec si I(N) falsifie une instance de base d'une clause de S et I(N') pour tout N' ancêtre de N ne falsifie aucune instance de base d'une clause de S
Un nœud N est appelé nœud d'échec si la portion de la branche depuis la racine jusqu'à ce nœud falsifie une clause fondamentale instanciée et si aucun segment plus court ne le faisait

Définition : Un arbre sémantique est clos ou fermé si et seulement si chacune de ses branches se termine par un nœud d'échec

Définition : Un nœud d'un arbre sémantique clos est dit nœud d'inférence si et seulement si tous les nœuds descendants immédiats de N sont des nœuds d'échec .

Théorème de Herbrand : Un ensemble S de clauses fondamentales est insatisfiable (sémantiquement inconsistant) si et seulement si à un arbre sémantique complet quelconque correspond un arbre sémantique clos

5.2 - Construction de l'arbre sémantique complet

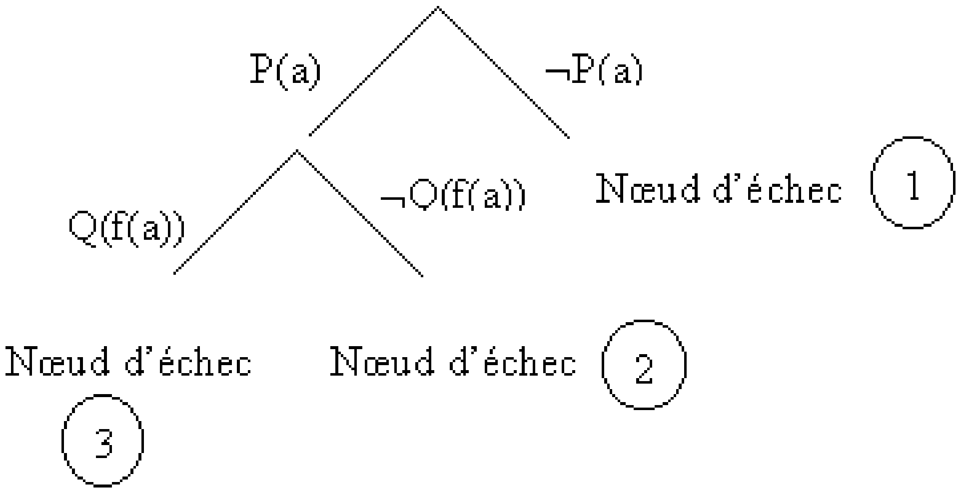
Pour construire l'arbre sémantique on étiquette les nœuds de l'arbre avec les atomes de la base de Herbrand. On élague l'arbre chaque fois qu'une branche falsifie une clause de S.

<u>Exemple :</u>

S= {P(X), ¬P(X) ∨ Q(f(X)), ¬Q(f(X))}

H∞ = { a, f(a), f((f(a)).... }

A = { P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), ...}



Partie exercices

Exercer vous et démontrez en utilisant que les fbf suivantes sont valides en utilisant le théorème de Herbrand (arbre clos fini) !:

a) $\exists X\ \forall Y\ P(X, Y) \rightarrow \forall Y\ \exists X\ P(X, Y)$

b) $\forall\ X\ (P(X) \rightarrow Q(X)) \rightarrow (\ \exists X\ P(X) \rightarrow\ \exists X\ Q(X))$

c) $\exists X\ (\exists Y\ \forall Z\ P(X, Y, Z) \rightarrow \forall Z\ \exists Y\ P(X, Y, Z))$

d) $(\forall X\ \exists Y\ P(X, Y)\ \wedge\ \forall X\ \exists Y\ Q(X, Y)) \rightarrow \forall X\ \exists Y\ \exists Z\ (P(X, Y) \wedge Q(Y, Z))$