Tentamen Matematisk modellering (MA069G)

2018-10-31

Cornelia Schiebold, Leif Olsson, Magnus Eriksson

Hjälpmedel: Datorprogrammen MATLAB och LINGO (alternativt en Python-utvecklingsmiljö), ordbehandlare, Internet, penna, papper, föreläsningsanteckningar, dina egna filer.

Du får inte kommunicera med någon annan person än läraren/tentamensvakten, och får därför inte använda Facebook, Skype, mail eller liknande program. Lyssna på musik via Spotify är inte tillåtet och du får inte lyssna på klipp från Youtube.

Skrivtid: 08.00-13.00

Maxpoäng: 26 p

Inlämning: Presentera lösningarna på ett begripligt och välstrukturerat sätt. Motivera slutsatser väl och redovisa antaganden. All programkod ska lämnas in tillsammans med beräkningsresultat, eventuella diagram, och lösningar som antingen kan skrivas för hand eller i en ordbehandlare. Definiera samtliga koefficienter och variabler i lösningar såväl som programkod, och kommentera programkoden så att den blir lätt att följa. Om skrivaren krånglar eller om det är lång kö till skrivaren kan du lämna in elektroniskt i en Moodle-inkorg på PDF- eller Word-format. Tydliggör i tentamensomslaget hur många sidor du lämnar in elektroniskt och hur många du lämnar in på papper. Börja varje uppgift på ny sida, och sortera sidorna i uppgiftsordning. Skriv namn , datum och kurskod i sidhuvudet på varje sida samt paginera så långt med ”Sida X av n”.

Bedömning: För godkänt ska du klara av en liten del på varje uppgift. Är en uppgift otillräckligt besvarad finns möjlighet till Fx dvs kompletteringsuppgift. Betyg (A-E) bestäms av sammanlagda poängen innan komplettering, och kan ändras ett betygssteg baserat på hur väl projektuppgiften är genomförd.

Rättning: Den rättade tentamen skannas inte, utan kommer att kunna hämtas ut på MOD-avdelningens (matematikämnets) kursexpedition i hus E.

Lycka till!

Uppgift 1. (5 p) Betrakta funktionen

$$f(x) = \arctan(1 + x^2).$$

a) Approximera derivatan av $f(x)$ i $x = \frac{1}{2}$ genom framåtdifferenser med steglängder $h_1 = 0.02$ och $h_2 = 0.01$.

b) Approximera derivatan av $f(x)$ i $x = \frac{1}{2}$ genom centraldifferenser med steglängder $h_1 = 0.02$ och $h_2 = 0.01$.

c) Använd Richardsonextrapolation på resultaten i a) och b).

d) Bestäm det exakta värdet av $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ på bråkform (Tips: $\arctan(x)$har derivata $\frac{1}{1+x^2}$). Vilka fel får man för approximationerna i a) – c)?

Uppgift 2: (5 p) Betrakta funktionen

$$f(x) = e^x - 2x^2.$$

a) Skissa grafen för funktionen $f(x)$ över intervallet [1,3].

b) Använd intervallhalveringsmetoden för att hitta en numerisk lösning till $f(x) = 0$ i intervallet [2,3]. Acceptera intervallets mittpunkt som numerisk lösning så snart intervallets längd är mindre än 0.01.

c) Använd Newton Raphsons metod för att hitta alla numeriska lösningar till $f(x) = 0$ i intervallet [1,3] på följande sätt: Välj ett lämpligt startvärde x_0. Newton Raphson-metoden ger successivt värden $x_1, x_2, \dots$. Acceptera x_n som numerisk lösning så snart $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-7}$.

d) Kan intervallhalveringsmetoden användas för att hitta en numerisk lösning till $f(x) = 0$ i intervallet [1,3]?

Uppgift 3: (5 p) Låt

$$I = \int_1^e \ln x \; dx$$

och

a) Använd Monte Carlo-metoden för att bestämma ett approximativt värde på I. Visa programkod. Välj en rimlig precision och ange antal iterationer som krävs för att uppnå denna precision.

b) Använd den sammansatta trapetsregeln med steglängd $h = \frac{e-1}{10}$ för att beräkna ett approximativt värde på I. Hur många x-värden sker beräkningen i?

c) Bestäm det exakta värdet på I (Tips: $x(\ln x - 1)$ är en primitiv funktion av $\ln x$). Vilka fel får man för approximationerna i a) och b)?

d) Vilken av metoderna a) och b) är rimligare? Ge ett argument.

Uppgift 4: (6 p) En fabrik tillverkar stolar bord och bokhyllor. För varje stol fås en vinst på 30kr, för varje bord 20kr och för varje bokhylla 40kr. i maskin 1 tar det 2 timmar för varje stol, 1 timme för varje bord och 3 timmar för varje bokhylla. I maskin 2 tar det 1 timme för varje stol, bord och bokhylla. Maskin 3 används bara för stolar och bord och det tar 1 timme för varje stol och bord. Maskin 1 kan man använda i 120 timmar, maskin 2 i 80 timmar och maskin 3 i 60 timmar.

a) Formulera ett relevant linjärt optimeringsproblem med alla tillhörande definitioner av variabler och parametrar.

b) Beräkna med den definierade modellen i a) den totala vinsten med hänsyn till alla bivillkor och ange det optimala resultatet

c) Formulera en dual modell och ange det optimala resultatet

d) Hur mycket minskar vinsten om man minskar tiden i maskin 2 med 10 timmar och hur kan man se det när man löser den duala modellen? Motivera ditt svar.

e) Om vi minskar tiden i a) med 10 timmar för maskin 3 hur många stolar, bord och bokhyllor är det då optimalt att tillverka?

f) Kan det finnas några problem med lösningen i e)? I så fall ange dessa.

Uppgift 5: (5 p)

Betrakta en liten butik med plats för fyra kunder. Den kan vara i tillstånden 0, 1, 2, 3 eller 4 kunder i butiken. Två kassörer betjänar högst två kunder samtidigt, medan övriga kunder står i kö. Vid fyra kunder i butiken väntar således två i kö medan två betjänas. Ytterligare anländande kunder möts då av en låst dörr och skylten ”Fullt - var god återkom senare”. Kundernas ankomst är en Poissonprocess med intensiteten λ = 0,5 kunder per minut. Tiden att betjäna en kund är exponentialfördelad med väntevärdet $1/\mu$ minuter, där μ är serviceintensiteten 0,2 avslutade ärenden per minut, när endast en kassa har en kund. Om båda kassorna betjänar kunder så blir systemets totala serviceintensitet 2μ avslutade ärenden per minut. Kunder kan endast anlända till och lämna butiken varje hel minut (tidluckestorleken). Försumma sannolikheten att två eller fler kunder anländer samma minut, eller blir färdiga samma minut.

a) Rita Markovkedjans tillståndsdiagram med korrekta övergångssannolikheter.

b) Sätt upp övergångsmatrisen för ditt tillståndsdiagram. Notera att summan längs en rad ska vara 1.

c) Skriv ett program som gör en iterativ numerisk beräkning av den stationära fördelningen. Utifrån denna fördelning, beräkna genomsnittligt antal kunder i butiken. Visa både programkod och beräkningsresultat.

d) Lös istället uppgift c genom att skapa en Monte Carlo-simulering av Markov-kedjan, det vill säga genom att använda slumptalsgenerering. (Tips: *Antingen* kan du utnyttja att sannolikheten att en kund anländer en viss tidlucka är λ, och att en kund blir färdigbetjänad är μ eller 2 μ. Om u är ett rektangulärfördelat slumptal mellan 0 och 1 så är $u<p$ sant med sannolikheten p. *Eller* så kan du använda metoden inverse transform sampling för att generera nästa tillstånd – som ett tal mellan 0 och 4 – med sannolikheter enligt övergångsmatrisen.) Hur många tidluckor måste simuleras (eller hur många slumptal krävs) för en rimlig precision? Visa både programkod och beräkningsresultat.