Теория вероятностей и математическая статистика. Домашнее задание №4

Автор: Сурова София, БПИ191

сентябрь 2022

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.49, №62
Может ли априорная вероятность гипотезы быть больше соответствующей апостериорной? Ответ обосновать.

Решение
$P(H_i)$ - априорная вероятность гипотезы H_i, $P(H_i|A)$ - апостериорная вероятность.

$$P(H_i) > P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$1 > \frac{P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(A) > P(A|H_i)$$

Последнее неравенство возможно, например, в случае, если события A и H_i несовместны и $P(A|H_i) = 0$, и событие A не является невозможным $P(A) > 0$.
Практический пример: пусть $A = \{$в результате одного броска кубика выпало больше 4$\}$,
$H_i = \{$в результате броска кубика выпало i$\}$, тогда $P(A) = \dfrac{2}{6} > 0 = P(A|H_2)$
Ответ: может

стр.49, №64
В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 игранных. Из ящика извлекают наугад два мяча для игры. После игры мячи возвращают обратно в ящик. После этого из ящика вынимают еще два мяча для следующей игры. Оба мяча оказались неиграинными. Найти вероятность того, что первый раз тоже играли новыми мячами.

Решение
Можно нарисовать себе следующую схему того, что происходит в задаче:
(12 новых, 8 игранных) -> I достаём два мяча: ?, ? -> (? новых, ? игранных) -> II достаём два мяча: новый, новый

Определим этап I (извлечение двух мячей первый раз) с помощью следующей системы гипотез:
$H_1 = \{$извлекли два новых мяча$\}$, $P(H_1) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \dfrac{66}{190}$
$H_2 = \{$извлекли один новый и один игранный мяч$\}$, $P(H_2) = \dfrac{C_{12}^1 C_8^1}{C_{20}^2} = \dfrac{96}{190}$
$H_3 = \{$извлекли два игранных мяча$\}$, $P(H_3) = \dfrac{C_8^2}{C_{20}^2} = \dfrac{28}{190}$

Пусть $A = \{$в этапе II достали два новых мяча$\}$, тогда
$P(A|H_1) = C_{10}^2 C_{20}^2 = \dfrac{45}{190}$, т.к. после наступления события H_1 в ящике было 10 новых и 10 игранных мячей
$P(A|H_2) = C_{11}^2 C_{20}^2 = \dfrac{55}{190}$, т.к. после наступления события H_2 в ящике было 11 новых и 9 игранных мячей
$P(A|H_3) = C_{12}^2 C_{20}^2 = \dfrac{66}{190}$, т.к. после наступления события H_3 в ящике было 12 новых и 8 игранных мячей
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \dfrac{10098}{190 * 190}$
По формуле Байеса исходная вероятность $P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \dfrac{2970}{10098} \approx 0.2941$

Ответ: 0.2941

стр.49, №65

За истекший период в торговую фирму поступали телевизоры от трех фирм-поставщиков в следующей пропорции: 1:3:6. Каждая фирма дает на свои телевизоры гарантию, идентифицируя их по серийному номеру и дате поставки. Телевизоры первой фирмы-поставщика требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, второй и третьей — соответственно в 10% и 7% случаев. Проданный телевизор требует гарантийного ремонта, однако потеряны документы, идентифицирующие фирму-поставщика. В какую фирму имеет смысл обратиться в первую очередь?

Решение

Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$телевизор поставила первая торговая фирма$\}$, $P(H_1) = \dfrac{1}{10}$
$H_2 = \{$телевизор поставила вторая торговая фирма$\}$, $P(H_2) = \dfrac{3}{10}$
$H_3 = \{$телевизор поставила третья торговая фирма$\}$, $P(H_3) = \dfrac{6}{10}$
Пусть $A = \{$телевизор требует ремонта$\}$, тогда по условию задачи $P(A|H_1) = \dfrac{15}{100}$, $P(A|H_2) = \dfrac{10}{100}$, $P(A|H_3) = \dfrac{7}{100}$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \dfrac{87}{1000}$
По формуле Байеса исходные вероятности:
$P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \dfrac{15}{87}$
$P(H_2|A) = \dfrac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \dfrac{30}{87}$
$P(H_3|A) = \dfrac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \dfrac{42}{87}$
Апостериорные вероятности в данном случае отражают вероятность события, что телевизор был продан i-той торговой фирмой при условии, что телевизор. И наиболее вероятным является апостериорная вероятность для третьей торговой фирмы, поэтому обратиться в первую очередь стоит именно в третью торговую фирму.

Ответ: в третью торговую фирму

стр.49, №66

Можно ли для нахождения вероятности события, связанного с опытом, сводящимся к схеме случаев, использовать формулу полной вероятности? Ответ обосновать.

Решение

Да, если схему случаев представить в виде дерева и листья этого дерева, то есть конечные случаи, определить с помощью системы гипотез (а это можно сделать, так как случаи несовместны и образуют всё пространство элементарных исходов), то можно найти вероятность события, связанного с этой системой случаев, по формуле полной вероятности.

Ответ: можно

стр.49, №67
Может ли сумма всех априорных вероятностей гипотез оказаться больше суммы всех апостериорных вероятностей этих гипотез?

Решение
Пусть $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$ - априорные вероятности гипотез H_1, H_2, ..., H_n соответственно. Тогда $P(H_1|A)$, $P(H_2|A)$, ..., $P(H_n|A)$ - апостериорные вероятности гипотез H_1, H_2, ..., H_n соответственно при условии произвольного события A, $P(A) \neq 0$.
Рассмотрим сумму апостериорных вероятностей гипотез

$$P(H_1|A) + P(H_2|A) + ... + P(H_n|A)$$

Разложим её по формуле Байеса

$$\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} + \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} + ... + \frac{P(H_n)P(A|H_n)}{P(A)}$$

Приведём к одному знаменателю и применим формулу полной вероятности

$$\frac{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + ... + P(H_n)P(A|H_n)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Кроме того, мы знаем, что гипотезы образуют полную группу событий, то есть они попарно несовместны и сумма этих событий есть достоверное событие. Тогда $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$
Так что сумма всех априорных вероятностей гипотез не может быть больше суммы всех апостериорных вероятностей этих гипотез.

Ответ: нет, не может

стр.50, №71
Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью имеет дефект. В цехе изделия осматриваются с равными вероятностями одним из двух контролеров. Первый обнаруживает имеющиеся дефекты с вероятностью p_1, а второй — с вероятностью p_2. Известно, что одно из изделий забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: а) первым контролером; б) вторым контролером.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$изделие с дефектом осматривается первым контролером$\}$, $P(H_1) = \dfrac{p}{2}$
$H_2 = \{$изделие с дефектом осматривается вторым контролером$\}$, $P(H_2) = \dfrac{p}{2}$
Пусть $A = \{$изделие забраковано$\}$, тогда по условию задачи $P(A|H_1) = p_1$ и $P(A|H_2) = p_2$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \dfrac{p * (p_1 + p_2)}{2}$
По формуле Байеса исходные вероятности $P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2}$, $P(H_2|A) = \dfrac{p_2}{p_1 + p_2}$

Ответ: а) $\dfrac{p_1}{p_1 + p_2}$, б) $\dfrac{p_2}{p_1 + p_2}$

стр.50, №72
Для подготовки к экзамену студенту предложено 20 вопросов. Билет содержит два вопроса. Комплектование билетов вопросами осуществляется случайным образом. Студент подготовил 15 вопросов. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого достаточно ответить правильно на два вопроса своего билета или на один вопрос своего билета и один вопрос по выбору преподавателя.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$студент знает 2 вопроса из билета$\}$, $P(H_1) = \dfrac{C_{15}^2}{C_{20}^2}$
$H_2 = \{$студент знает 1 вопрос из билета$\}$, $P(H_2) = \dfrac{C_{15}^1 C_5^1}{C_{20}^2}$
$H_3 = \{$студент не знает ни одного вопроса из билета$\}$, $P(H_3) = \dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}$

Пусть $A = \{$студент сдаст экзамен$\}$, тогда по условию задачи $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = \dfrac{C_{14}^1}{C_{18}^1}$ (то есть вероятность того, что преподаватель выберет вопрос, который студент подготовил), $P(A|H_3) = 0$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \dfrac{2940}{3420} \approx 0.8596$

Ответ: 0.8596

стр.50, №73
На предприятии работают 10 рабочих шестого разряда, 15 рабочих пятого разряда и 5 рабочих четвертого разряда. Вероятность того, что изделие, изготовленное рабочим соответствующего разряда, будет одобрено ОТК равна соответственно 0.95, 0.9 и 0.8. Найти вероятность того, что изделие, проверенное ОТК, будет одобрено, при условии, что производительность всех рабочих одинакова.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$изделие изготовлено рабочим шестого разряда$\}$, $P(H_1) = \dfrac{10}{10+15+5} = \dfrac{2}{6}$
$H_2 = \{$изделие изготовлено рабочим пятого разряда$\}$, $P(H_2) = \dfrac{15}{10+15+5} = \dfrac{3}{6}$
$H_3 = \{$изделие изготовлено рабочим четвертого разряда$\}$, $P(H_3) = \dfrac{5}{10+15+5} = \dfrac{1}{6}$
Пусть $A = \{$изделие одобрено ОТК$\}$, тогда $P(A|H_1) = 0.95$, $P(A|H_2) = 0.9$, $P(A|H_3) = 0.8$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \dfrac{2*0.95}{6} + \dfrac{3*0.9}{6} + \dfrac{1*0.8}{6} = 0.9$

Ответ: 0.9

стр.51, №76
Имеется ящик, в котором лежат 20 коробок по 10 карандашей. При вскрытии ящика 4 коробки уронили, и грифели карандашей в них сломались. Однако все 20 коробок были сданы на склад, откуда затем взяли 2 коробки и раздали карандаши ученикам. Найти вероятность того, что доставшийся ученику карандаш имеет сломанный грифель.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$2 взятые коробки не ронялись, и у карандашей не сломан грифель$\}$, $P(H_1) = \dfrac{C_{16}^2}{C_{20}^2}$
$H_2 = \{$1 коробка была уронена, 1 коробка не ронялась$\}$, $P(H_2) = \dfrac{C_{16}^1 C_4^1}{C_{20}^2}$
$H_3 = \{$2 взятые коробки были уронены, и у карандашей сломан грифель$\}$, $P(H_3) = \dfrac{C_4^2}{C_{20}^2}$
Пусть $A = \{$у карандаша сломан грифель$\}$, тогда $P(A|H_1) = 0$, $P(A|H_2) = \dfrac{10}{20}$, $P(A|H_3) = 1$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \dfrac{38}{190} = 0.2$

Ответ: 0.2

стр.51, №77
Две машинистки печатали рукопись, посменно заменяя друг друга. Первая в конечном итоге напечатала 1/3 всей рукописи, а вторая — остальное. Первая машинистка делает ошибки с вероятностью 0.15, а вторая — с вероятностью 0.1. При проверке на 13-й странице обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$текст напечатала первая машинистка$\}$, $P(H_1) = \dfrac{1}{3}$
$H_2 = \{$текст напечатала вторая машинистка$\}$, $P(H_2) = \dfrac{2}{3}$
Пусть $A = \{$в напечатанном тексте есть ошибка$\}$, тогда $P(A|H_1) = 0.15$, $P(A|H_2) = 0.1$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \dfrac{35}{300}$
По формуле Байеса исходная вероятность $P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \dfrac{15}{35} \approx 0.4286$

Ответ: 0.4286

стр.51, №78
Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = = 1/2$. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира билеты, имевшиеся в кассе, будут распроданы, для первой кассы равна $P_1 = 3/4$, для второй кассы — $P_2 = 1/2$, для третьей кассы — P_3= 2/3. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$пассажир обратится в первую кассу$\}$, $P(H_1) = \dfrac{1}{3}$
$H_2 = \{$пассажир обратится во вторую кассу$\}$, $P(H_2) = \dfrac{1}{6}$
$H_3 = \{$пассажир обратится в третью кассу$\}$, $P(H_3) = \dfrac{1}{2}$
Пусть $A = \{$билеты в кассе распроданы$\}$, тогда $P(A|H_1) = \dfrac{3}{4}$, $P(A|H_2) = \dfrac{1}{2}$, $P(A|H_3) = \dfrac{2}{3}$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \dfrac{2}{3}$
По формуле Байеса исходная вероятность $P(H_1|\overline{A}) = \dfrac{P(H_1)P(\overline{A}|H_1)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(H_1)(1 - P(A|H_1))}{1 - P(A)} = \dfrac{1}{4} = 0.25$
Ответ: 0.25

стр.51, №79
На экзамен пришли 10 студентов. Трое из них подготовлены отлично, четверо - хорошо, двое - удовлетворительно, один - плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, удовлетворительно - на 10, плохо - на 5. Студент, сдавший экзамен, ответил на все три заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

Решение
Определим следующую систему гипотез:
$H_1 = \{$студент подготовлен отлично$\}$, $P(H_1) = 0.3$
$H_2 = \{$студент подготовлен хорошо$\}$, $P(H_2) = 0.4$
$H_3 = \{$студент подготовлен удовлетворительно$\}$, $P(H_3) = 0.2$
$H_4 = \{$студент подготовлен плохо$\}$, $P(H_4) = 0.1$
Пусть $A = \{$студент ответил на 3 заданных вопроса$\}$, тогда
$P(A|H_1) = \dfrac{C_{20}^3}{C_{20}^3} = 1$, $P(A|H_2) = \dfrac{C_{16}^3}{C_{20}^3}$, $P(A|H_3) = \dfrac{C_{10}^3}{C_{20}^3}$, $P(A|H_4) = \dfrac{C_5^3}{C_{20}^3}$
По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4)$
По формуле Байеса исходные вероятности $P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}$, $P(H_4|A) = \dfrac{P(H_4)P(A|H_4)}{P(A)}$

стр.51, №80

Среди пациентов туберкулезного диспансера 15% принадлежат к первой категории больных, 66% - ко второй и 19% - к третьей. Вероятности возникновения заболевания, в зависимости от категории больных, равны соответственно 0.12, 0.09, 0.2. Найти вероятность возникновения заболевания у наугад выбранного пациента диспансера и вероятность принадлежность к третьей категории больных пациента диспансера, у которых обнаружено заболевание.

Решение

Определим следующую систему гипотез:

$H_1 = \{$пациент принадлежит к первой категории больных$\}$, $P(H_1) = 0.15$

$H_2 = \{$пациент принадлежит ко второй категории больных$\}$, $P(H_2) = 0.66$

$H_3 = \{$пациент принадлежит к третьей категории больных$\}$, $P(H_3) = 0.19$

Пусть $A = \{$возникновение заболевания$\}$, тогда $P(A|H_1) = 0.12$, $P(A|H_2) = 0.09$, $P(A|H_3) = 0.2$

По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0.15 * 0.12 + 0.66 * 0.09 + 0.19 * 0.2 = 0.1154$

По формуле Байеса исходная вероятность $P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \dfrac{0.19 * 0.2}{0.1154} \approx 0.3293$

Ответ: 0.1154, 0.3293