

Теория вероятностей и математическая статистика.

Домашнее задание №5

Автор: Сурова София, БПИ191

октябрь 2022

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.90, №3

СВ X принимает только два различных значения a ($a > 0$) и $-a$ с вероятностью $1/2$. Верно ли, что $E(X) > a$ и $D(X) < a^2$?

Решение

По формуле математического ожидания для дискретной величины

$$E(X) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 = a * \frac{1}{2} + (-a) * \frac{1}{2} = 0$$

$E(X) = 0 < a$, то есть утверждение в условии неверно.

По формуле дисперсии для дискретной величины

$$E(X^2) = x_1^2 * p_1 + x_2^2 * p_2 = a^2 * \frac{1}{2} + (-a)^2 * \frac{1}{2} = a^2$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = a^2 - 0^2 = a^2$$

$D(X) = a^2$, то есть утверждение в условии неверно.

Ответ: Оба утверждения неверны: $E(X) = 0 < a$, $D(X) = a^2$

стр.90, №4

Закон распределения случайной величины X выглядит следующим образом (см. таблицу).

Построить ряды распределения и найти математические ожидания следующих случайных величин:

а) $Y = 10X - 1$, б) $Y = -X^2$, в) $Y = 2^X$

X	-0.5	0	0.5	1	1.5
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Решение

Что такое ряд распределения? Это таблица для дискретных случайных величин, в которой в первой строчке находятся значения, которые может принимать случайная величина, а во второй строчке - вероятности того, что случайная величина примет соответствующее значение.

а) Как получить ряд распределения для случайной величины $Y = 10X - 1$? Достаточно подставить значения X и посмотреть, какие значения Y и с какой вероятностью получаются. Например, подставим $X = -0.5$ и получим $Y = -5 - 1 = -6$. Так как $X = -0.5$ с вероятностью $p = 0.1$, то и $Y = -6$ с вероятностью $p = 0.1$. Аналогично, подставим $X = 0$ и получим, что $Y = 0 - 1 = -1$ с вероятностью $p = 0.4$. Продолжая данные рассуждения для остальных значений получим, что

Y=10X-1	-6	-1	4	9	14
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Математическое ожидание дискретной случайной величины $Y = 10X - 1$

$$EY = \sum y_i p_i = -6 * 0.1 - 1 * 0.4 + 4 * 0.1 + 9 * 0.3 + 14 * 0.1 = 3.5$$

Самая частая и грубая ошибка - подстановка значений вероятности в выражение!

Чтобы проверить себя, то обратите внимание, что все вероятности находятся в отрезке $[0, 1]$, и в сумме дают 1.

б) В пункте а) могло показаться, что достаточно просто изменить первую строку со значениями, а вероятности переписать, однако если это проделать с $Y = -X^2$, то получится следующий ряд распределения:

$Y=-X^2$	-0.25	0	-0.25	-1	-2.25
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Заметим, что значение $Y = -0.25$ мы получили с помощью $X = -0.5$ с вероятностью $p = 0.1$ и $X = 0.5$ с вероятностью $p = 0.1$, а значит необходимо эти вероятности сложить и получим, что

$Y=-X^2$	-0.25	0	-1	-2.25
p	0.2	0.4	0.3	0.1

Упорядочим по возрастанию значений, принимаемых случайной величиной

$Y=-X^2$	-2.25	-1	-0.25	0
p	0.1	0.3	0.2	0.4

Математическое ожидание дискретной случайной величины $Y = -X^2$

$$EY = \sum y_i p_i = -2.25 * 0.1 - 1 * 0.3 - 0.25 * 0.2 + 0 * 0.4 = -0.575$$

в)

$Y=2^X$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Математическое ожидание дискретной случайной величины $Y = -X^2$

$$EY = \sum y_i p_i = (1/\sqrt{2}) * 0.1 + 1 * 0.4 + \sqrt{2} * 0.1 + 2 * 0.3 + 2\sqrt{2} * 0.1 = \frac{7 + 10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \approx 1.495$$

стр.90, №9

СВ X принимает только два различных значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Вычислить $F_X(1/2)$ и $F_X(-1/2)$.

Решение

X	-1	1
p	0.5	0.5

$F_X(0.5) = P(\{X \leq 0.5\}) = 0.5$, так как случайная величина X принимает только одно значение меньше 0.5 - значение $X = -1$ с вероятностью 0.5

$F_X(-0.5) = P(\{X \leq -0.5\}) = 0.5$, так как случайная величина X принимает только одно значение меньше -0.5 - значение $X = -1$ с вероятностью 0.5

Ответ: 0.5, 0.5

стр.90, №11

СВ $X \sim \text{Bi}(1, 0.5)$. Сравнить $(EX)^2$ и DX .

Решение

$\text{Bi}(n, p)$ - биномиальное распределение, которому соответствуют случайные величины, равные количеству успехов в n испытаниях с вероятностью успеха p .

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, EX = np, DX = np(1-p)$$

$$\text{Тогда } (EX)^2 = (np)^2 = (1 * 0.5)^2 = 0.25, DX = np(1-p) = 1 * 0.5 * 0.5 = 0.25$$

Ответ: $(EX)^2 = DX = 0.25$

стр.91, №19

Функции $G(x)$ и $H(x)$ являются функциями распределений некоторых СВ. Является ли функция $F(x) = G(x) + H(x)$ функцией распределения некоторой СВ?

Решение

Одно из свойств функции распределения: $G(+\inf) = \lim_{x \rightarrow +\inf} G(x) = 1$. Аналогично для $H(x)$.

Тогда рассмотрим, чему равна $F(+\inf)$.

$$F(+\inf) = \lim_{x \rightarrow +\inf} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\inf} G(x) + H(x) = \lim_{x \rightarrow +\inf} G(x) + \lim_{x \rightarrow +\inf} H(x) = 1 + 1 = 2, \text{ то есть } F(x) = G(x) + H(x) \text{ не является функцией распределения.}$$

Ответ: не является

стр.92, №28

У торгового агента имеется пять адресов потенциальных покупателей, к которым он обращается по списку с предложением приобрести реализуемый фирмой товар. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается соответственно как 0.5, 0.4, 0.4, 0.3 и 0.25. Покупатели принимают решение о покупке товара, независимо друг от друга. Агент обращается к ним в указанном порядке пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Составить ряд распределения СВ X — числа покупателей, к которым обратится агент. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Решение

Пусть X — количество покупателей, к которым обратится агент, пока кто-нибудь не согласится.

$P(\{X = 1\}) = 0.5$, то есть первый покупатель сразу же соглашается, и агент идёт домой

$P(\{X = 2\}) = (1 - 0.5) * 0.4 = 0.2$, то есть первый покупатель не согласился, агент идёт к следующему, и второй покупатель соглашается

$P(\{X = 3\}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.4) * 0.4 = 0.12$, то есть первый и второй не согласились, а третий соглашается

$P(\{X = 4\}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.4) * (1 - 0.4) * 0.3 = 0.054$, то есть первый, второй и третий не согласились, а четвёртый соглашается

$P(\{X = 5\}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.4) * (1 - 0.4) * (1 - 0.3) = 0.126$, то есть первый, второй, третий и четвёртый не согласились, а согласие пятого нас уже не интересует, мы его всё равно посетим и на нём остановимся, так как покупателей всего 5.

Ряд распределения — это всего таблица, в которой в первой строчке находятся значения, которые может принимать случайная величина, а во второй строчке — вероятности того, что случайная величина примет соответствующее значение. Тогда наш ряд распределения выглядит следующим образом:

X	1	2	3	4	5
p	0.5	0.2	0.12	0.054	0.126

Проверим, что мы всё правильно посчитали: все вероятности в ячейках должны быть не больше 1, а сумма этих вероятностей равна строго 1.

$$0.5 + 0.2 + 0.12 + 0.054 + 0.126 = 1 - \text{верно.}$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X

$$EX = \sum x_i p_i = 1 * 0.5 + 2 * 0.2 + 3 * 0.12 + 4 * 0.054 + 5 * 0.126 = 2.106$$

Дисперсию удобно посчитать по формуле $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$:

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 1 * 0.5 + 4 * 0.2 + 9 * 0.12 + 16 * 0.054 + 25 * 0.126 = 6.394$$

Самая главная ошибка здесь — возведение в степень вероятностей вместе с значениями СВ!

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = 6.394 - 2.106^2 = 1.958764 \approx 1.9588$$

Ответ: ряд распределения построен, $EX = 2.106$, $DX = 1.9588$

стр.92, №32

Лотерея заключается в розыгрыше трех номеров из шести. Порядок выпадения выигрышных номеров неважен. Выигрыш при угадывании одного номера из трех составляет 20 рублей, двух номеров из трех — 100 рублей, всех трех номеров — 500 рублей. Найти средний выигрыш при покупке одного билета лотереи. Построить график функции распределения размера выигрыша.

Решение

Пусть X - размер выигрыша.

$P(\{X = 0\}) = \frac{C_3^0 C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$, чтобы не угадать ни один номер, нужно выбрать 0 выигрышных и 3 невыиг-
рышных номера

$P(\{X = 20\}) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}$, чтобы угадать один номер, нужно выбрать 1 выигрышный и 2 невыиг-
рышных номера

$P(\{X = 100\}) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$, чтобы угадать два номера, нужно выбрать 2 выигрышных и 1 невыиг-
рышный номер

$P(\{X = 500\}) = \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{20}$, чтобы угадать все три номера, нужно выбрать 3 выигрышных и 0 невыиг-
рышных номеров

Чтобы было нагляднее, построим ряд распределения, благо мы уже научились это делать

X	0	20	100	500
p	0.05	0.45	0.45	0.05

Проверим, что мы всё правильно посчитали: все вероятности в ячейках должны быть не больше 1, а сумма этих вероятностей равна строго 1.

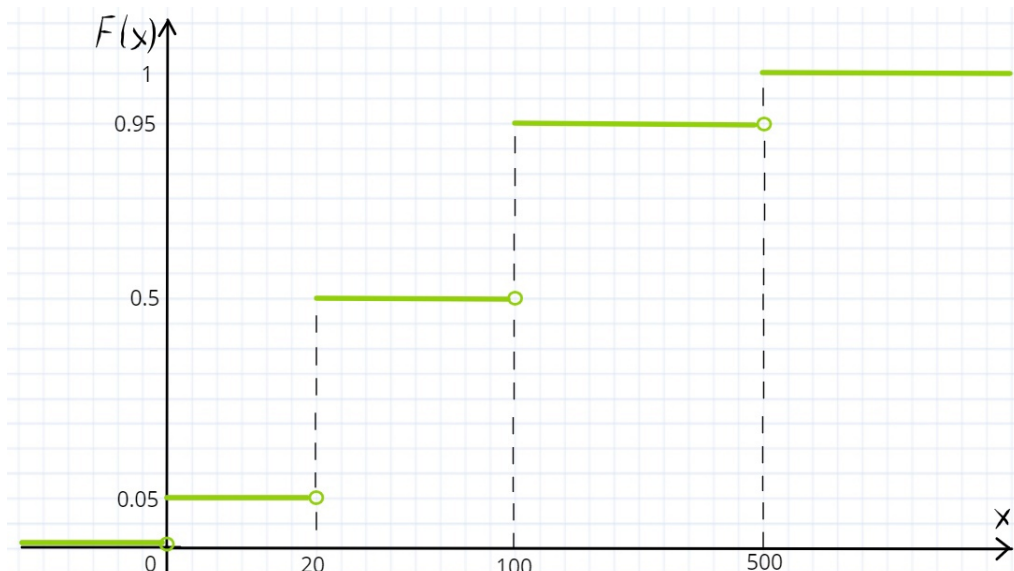
$0.05 + 0.45 + 0.45 + 0.05 = 1$ - верно.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X

$$EX = \sum x_i p_i = 0 * 0.05 + 20 * 0.45 + 100 * 0.45 + 500 * 0.05 = 79$$

То есть в среднем мы при покупке одного билета лотереи выиграем 79 рублей (но стоит помнить, что и среднее квадратическое отклонение, то есть корень из дисперсии, равно 104.6 рублей)

Функция распределения определяется следующим образом: $F(x) = P(\{X \leq x\})$. Её график в случае дискретной СВ выглядит как ступеньки, которые по мере движения вправо всё выше и в конце концов выходят на плато с единицей.



Почему мы выкалываем значения именно справа?

Рассмотрим $F(20) = P(\{X \leq 20\}) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 20\}) = 0.05 + 0.45 = 0.5$, то есть значение 20 уже относится к значению 0.5, а не 0.05, это важно.

Ответ: график функции распределения построен, в среднем выигрыш с одного билета $EX = 79$

стр.94, №53

СВ X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 1/x, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Найти a , для которого $P\{X > a\} = 1/3$

Решение

$$P(\{X > a\}) = 1 - P(\{X \leq a\}) = 1 - F(a) = 1/3 \Rightarrow F(a) = 2/3$$

$$F(a) = 2/3 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ 1 - 1/a = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ 1/a = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

Ответ: $a = 3$

стр.94, №55а

Функция распределения непрерывной СВ X определяется формулой

$$F(x) = c + b * \arctg(x)$$

Найти постоянные b и c

Решение

Одно из свойств функции распределения: $0 \neq F(x) \neq 1$. Им и воспользуемся

Так как $-\frac{\pi}{2} < \arctg(x) < \frac{\pi}{2}$, то для умножим все части на $b = \frac{1}{\pi}$.

Получили, что $-0.5 < \frac{1}{\pi} * \arctg(x) < 0.5$, далее добавим ко всем частям $c = 0.5$

Тогда $0 < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} * \arctg(x) < 1$

Основное свойство функции распределения выполнено, также дополнительно можно проверить, что выполнены остальные свойства, или просто поверить мне, что это верный ответ.

Ответ: $b = \frac{1}{\pi}, c = \frac{1}{2}$