Теория вероятностей и математическая статистика. Домашнее задание №6

Автор: Сурова София, БПИ191

октябрь 2022

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.90, №5
СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4, 1/3)$. Найти наиболее и наименее вероятные значения X.

Решение
Выпишем ряд распределения X, используя формулу $P(X = k) = C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}$

X	0	1	2	3	4
P	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

Соответственно, наименее вероятное значение - 4, наиболее вероятное значение - 1.

Ответ: наименее вероятное значение - 4, наиболее вероятное значение - 1

стр.90, №12
СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4, 0.1)$. Найти $F_X(-10)$.

Решение
Для наглядности приведу ряд распределения биномиальной случайной величины

$\mathbf{Bi}(n,p)$	0	1	...	k	...	n
P	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	p^n

Соответственно, $F_X(-10) = P(\{X \leq -10\}) = 0$, так как наша СВ не принимает значения меньше нуля, а если быть точнее, то вероятность того, что СВ равна отрицательному значению, равна 0.

Ответ: 0

стр.91, №20
СВ $X \sim \mathbf{R}(-1, 1)$. Сравнить $P(\{X < EX\})$ и $P(\{X > EX\})$. Найти $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\})$.

Решение
$X \sim \mathbf{R}(-1, 1)$ - равномерное распределение на отрезке $[a, b] = [-1, 1]$ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{x+1}{2}, -1 \leq x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \qquad EX = \frac{b+a}{2} = 0,\ DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

1) $P(\{X < EX\}) = P(\{X < 0\}) = P(\{X > 0\}) = P(\{X > EX\})$

2) $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\}) = P(\{|X - 0| < \sqrt{1/3}\}) = P(\{-\sqrt{1/3} < X < \sqrt{1/3}\}) = F(\sqrt{1/3}) - F(-\sqrt{1/3}) =$
$= \dfrac{1 + \sqrt{1/3}}{2\sqrt{1/3}} - \dfrac{11 + \sqrt{1/3}}{2\sqrt{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $P(\{X < EX\}) = P(\{X > EX\})$, $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

стр.91, №22
СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить $P\{X < EX\}$ и $P\{X < DX\}$

Решение
$\mathbf{E}(\lambda)$ - экспоненциальное распределение, $\lambda > 0$
$EX = \dfrac{1}{\lambda}, \quad DX = \dfrac{1}{\lambda^2}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$
$EX = DX = 1$, то есть $P\{X < EX\} = P\{X < DX\} = P\{X < 1\} = F(1) = 1 - e^{-x}$

Ответ: равны $1 - e^{-x}$

стр.91, №26
После полета самолет проходит технический осмотр и обслуживание. Число незначительных неисправностей, появившихся во время полета самолета, удовлетворительно описывается распределением Пуассона с параметром а. Предположим, что $a = 1$. Если неисправностей не обнаружено, то техническое обслуживание продолжается в среднем два часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится еще по полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то самолет ставится на профилактический ремонт, где он находится в среднем четыре часа, и таким образом общее время его технического обслуживания и ремонта составляет 6 часов. Найти закон распределения времени T технического обслуживания и ремонта самолета, математическое ожидание СВ T. Построить график функции распределения T.

Решение
$\mathbf{\Pi}(\lambda)$ - распределение Пуассона, которому соответствуют случайные величины, равные количеству успехов в большом количестве испытаний ($n \to \inf$), где вероятность успеха мала ($p \to 0$).
$P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $EX = \lambda$, $DX = \lambda$

Пусть $X \sim \mathbf{\Pi}(1)$ - число незначительных неисправностей, появившихся во время полета самолета.
Тогда T - время технического обсуживания самолёта в часах.
$P(\{T = 2\}) = P(\{X = 0\}) = \dfrac{1^0}{0!}e^{-1} = e^{-1}$
$P(\{T = 2.5\}) = P(\{X = 1\}) = \dfrac{1^1}{1!}e^{-1} = e^{-1}$
$P(\{T = 3\}) = P(\{X = 2\}) = \dfrac{1^2}{2!}e^{-1} = 0.5 * e^{-1}$
$P(\{T = 6\}) = P(\{X > 2\}) = 1 - P(\{X \leq 2\}) = 1 - P(\{X = 0\}) - P(\{X = 1\}) - P(\{X = 2\}) = 1 - 2.5 * e^{-1}$

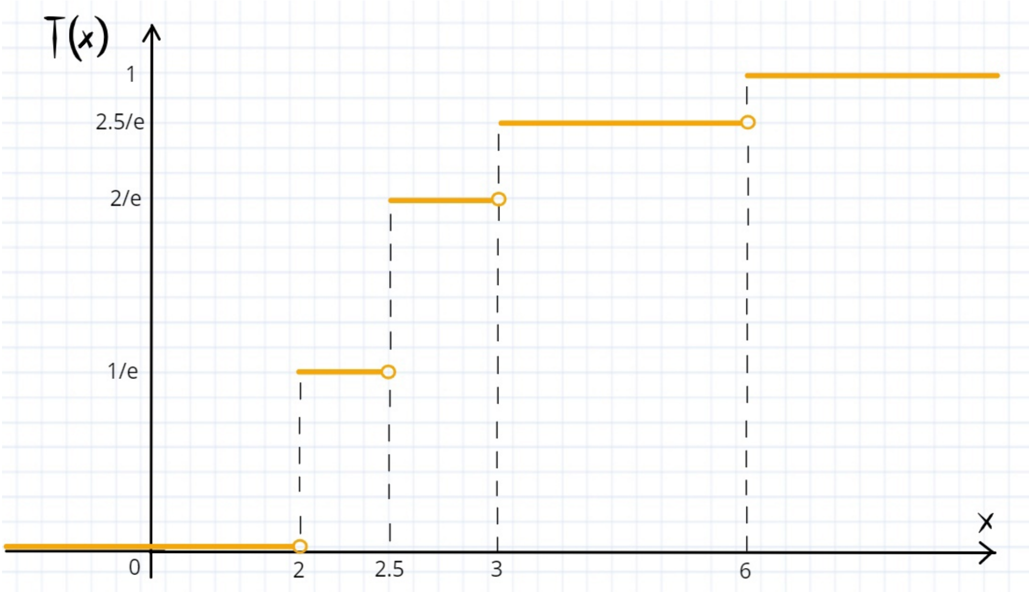
Тогда ряд распределения случайной величины T

T	2	2.5	3	6
p	e^{-1}	e^{-1}	$0.5e^{-1}$	$1-2.5e^{-1}$

Проверим, что мы всё правильно посчитали: все вероятности в ячейках должны быть не больше 1, а сумма этих вероятностей равна строго 1.
$e^{-1} + e^{-1} + 0.5e^{-1} + 1 - 2.5e^{-1} = 1$ - верно.

Математическое ожидание случайной величины T
$ET = \sum t_i p_i = 2e^{-1} + 2.5e^{-1} + 3 * 0.5e^{-1} + 6(1 - 2.5e^{-1}) = 6 - 9e^{-1}$

Функция распределения определяется следующим образом: $T(x) = P(\{T \leq x\})$. Её график в случае дискретной СВ выглядит как ступеньки, которые по мере движения вправо всё выше и в конце концов выходят на плато с единицей.



Ответ: ряд распределения и график функции распредления T построены, $ET = 6 - 9e^{-1}$

стр.91, №27
В среднем каждый второй автомобиль ВАЗ способен пройти первые 10 тыс.км без серьезных поломок, требующих гарантийного ремонта. Организация, торгующая автомобилями, заключила договор с автосервисом на гарантийное обслуживание проданных автомобилей. Согласно договору, организация выплачивает сервису 10 тыс. рублей по факту каждого обращения. Последующее гарантийное обслуживание берет на себя сервис. Прибыль компании от продажи одного автомобиля составляет 15 тыс. рублей без учета отчислений на гарантийный ремонт. Дать ответы на вопросы:
а) Какова средняя прибыль компании от продажи десяти автомобилей?
б) Какое минимальное количество автомобилей нужно продать организации за месяц, чтобы средняя месячная прибыль (с учетом выплат по гарантии) была бы не ниже 300 тыс. рублей?
в) Какова наиболее вероятная окончательная прибыль компании (с учетом выплат по гарантии) от продажи 10 автомобилей?

Решение
а) Пусть X - количество проданных автомобилей, которым не потребуется ремонт по гарантии. Тогда $X \sim \mathbf{Bi}(10, 0.5)$, так как можно рассмотреть продажу автомобиля как независимое испытание, а отсутствие поломок после прохождения первых 10 тыс.км как успех.
$EX = np = 5$ - столько проданных автомобилей в среднем не потребуют ремонта по гарантии. Прибыль компании рассчитывается как
(количество продаж*прибыль от продажи одного автомобиля - количество ремонтов по гарантии*стоимость)
Средняя прибыль компании составит $10 * 15 - (10 - 5) * 10 = 10 * 15 - 5 * 10 = 100$ тыс. рублей.

б) Пусть X всё также количество проданных автомобилей, которым не потребуется ремонт по гарантии. Тогда $X \sim \mathbf{Bi}(n, 0.5)$, $EX = np = 0.5n$ - столько автомобилей в среднем не потребуют ремонта.
Средняя прибыль рассчитывается как $n * 15 - (n - 0.5n) * 10 = 15n - 5n = 10n$ и должна составить не меньше 300 тыс. рублей. Тогда из неравенства $10n \geq 300$ получаем, что как минимум организации нужно продать 30 автомобилей.

в) Пусть X всё также количество проданных автомобилей, которым не потребуется ремонт по гарантии. Тогда $X \sim \mathbf{Bi}(10, 0.5)$. Прибыль компании определяется количеством автомобилей, которые не потребуют гарантийного ремонта, поэтому перейдём к рассмотрению наиболее вероятного значения случайной величины X.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0.5^n	10*0.5^n	45*0.5^n	120*0.5^n	210*0.5^n	252*0.5^n	210*0.5^n	120*0.5^n	45*0.5^n	10*0.5^n	0.5^n

Наиболее вероятное количество автомобилей, не потребующих ремонта $= 5$.
Средняя прибыль 100 тыс. рублей (из пункта а).

стр.92, №29а
Заявки, расслыаемые фирмой, удовлетворяются примерно в 30% случаев независимо друг от друга. Фирма разослала 200 заявок. Найти математическое ожидание и дисперсию числа удовлетворенных заявок X.

Решение
Пусть X - число удовлетворенных заявок, тогда $X \sim \mathbf{Bi}(200, 0.3)$
$EX = np = 200 * 0.3 = 60$, $DX = npq = 200 * 0.3 * 0.7 = 42$

Ответ: математическое ожидание равно 60, дисперсия равна 42

стр.92, №31
Вероятность того, что при трех независимых выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна 0.992. Найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при двадцати выстрелах.

Решение
Изначально у стрелка есть три выстрела.
Пусть X - число попаданий в цель при трех независимых выстрелах стрелка, тогда $X \sim \mathbf{Bi}(3, p)$
$P(\{X \geq 1\}) = 0.992$, т.е. $P(\{X \geq 1\}) = 1 - P(\{X = 0\}) = 1 - (1-p)^3 = 0.992 \Rightarrow (1-p)^3 = 0.008 \Rightarrow p = 0.8$

Теперь у стрелка есть двадцать выстрелов.
Пусть Y - число попаданий в цель при трех независимых выстрелах стрелка, тогда $Y \sim \mathbf{Bi}(20, 0.8)$
$EY = np = 20 * 0.8 = 16$, $DY = npq = 20 * 0.8 * 0.2 = 3.2$

Ответ: математическое ожидание равно 16, дисперсия равна 3.2

стр.92, №33
Необходимо исследовать 10 тыс. проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе руды равна 0.2. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа проб с промышленным содержанием металла.

Решение
Пусть X - число проб с промышленным содержанием металла в 10 тыс. пробах, тогда $X \sim \mathbf{Bi}(10000, 0.2)$
Математическое ожидание случайной величины X: $EX = np = 10000 * 0.2 = 2000$
Среднеквадратическое отклонение случайной величины X: $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{npq} = \sqrt{10000 * 0.2 * 0.8} = 40$

Ответ: математическое ожидание равно 2000, среднеквадратическое отклонение равно 40

стр.93, №34
Плотность вероятности случайной величины X имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 3h, x \in [-1, 0] \\ h, x \in [1, 2] \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти h, функцию распределения $F(x)$, СВ X, $E[(2-X)(X-3)])$ и $D(2-3X)$

Решение
Плотность вероятности (плотность распределения) - это неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f(x)$, для которой при любом вещественном x выполнено

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

1) У плотности вероятности, кроме неотрицательности, есть важное условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Воспользуемся этим условием, чтобы найти h:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int\limits_{-1}^{0} 3h\ dt + \int\limits_{0}^{1} 0\ dt + \int\limits_{1}^{2} h\ dt + \int\limits_{2}^{+\infty} 0\ dt = 0 + 3h(0+1) + 0 + h(2-1) + 0 = 4h = 1 \Rightarrow h = 0.25$

2) Для нахождения функции распределения воспользуемся определением плотности распределения, и проинтегрируем плотность распределения на каждом кусочке.

$x \in (-\infty, -1)$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

$x \in [-1, 0]$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{x} 0.75dt = 0.75(x+1)$

$x \in (0, 1)$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{0} 0.75dt + \int\limits_{0}^{x} 0dt = 0.75$

$x \in [1, 2]$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{0} 0.75dt + \int\limits_{0}^{1} 0dt + \int\limits_{1}^{x} 0.25dt = 0.75 + 0.25(x-1)$

$x \in (2, +\infty)$, $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1 \\ 0.75(x+1), -1 < x \leq 0 \\ 0.75, 0 < x \leq 1 \\ 0.75 + 0.25(x-1), 1 < x \leq 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

В данной задаче нужно внимательно разбивать на интервалы большой интервал в интеграле, расставлять пределы интегралов и вычислять их. По возможности проверяйте, что у вас $F(x)$ находится в пределах от 0 до 1 включительно и неубывающая.

3) $E[(2-X)(X-3)]) = E(2X - 6 - X^2 + 3X) = E(-X^2 + 5X - 6) = -E(X^2) + 5EX - 6$

$EX = \int\limits_{-\infty} +\infty xf(x)dx = \int\limits_{-1} 00.75xdx + \int\limits_{1} 20.25xdx = \frac{3x^2}{8}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{8}\Big|_{1}^{2} = -\frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = 0$

$E(X^2) = \int\limits_{-\infty} +\infty x^2 f(x)dx = \int\limits_{-1} 00.75x^2dx + \int\limits_{1} 20.25x^2dx = \frac{x^3}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{12}\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{4} + \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

$E[(2-X)(X-3)]) = -E(X^2) + 5EX - 6 = -5/6 + 0 - 6 = -41/6$

4) $D(2-3X) = 9DX = 9(E(X^2) - (EX)^2) = 9(5/6 - 0) = 45/6 = 7.5$

Ответ: $h = 0.25$, $EX = -41/6$, $DX = 7.5$

стр.95, №56

Вероятность изготовления сверла повышенной хрупкости (бракованного) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Воспользовавшись теоремой Пуассона, определить вероятность того, что количество бракованных сверел в коробке не превышает двух.

Решение

Теорема Пуассона устанавливает связь между биномиальным распределением и распределением Пуассона. Если количество испытаний достаточно велико, а вероятность успеха при этом достататочно мала, то $\lambda = np = const$.

В нашей задаче $np = 100 * 0.02 = 2$ - приемлемая константа, и $np^2 = 0.04$ - приелемая точность, поэтому воспользуемся теоремой, тогда X - количество бракованных сверел в коробке, $X \sim \mathbf{\Pi}(2)$

$P(\{X \leq 2\}) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 5e^{-2} \approx 0.6767$

Примечание. Напомню, что для распределения Пуассона $X \sim \mathbf{\Pi}(\lambda)$ $P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Ответ: вероятность того, что в коробке не больше двух бракованных сверел, равна 0.6767