Теория вероятностей и математическая статистика. Домашнее задание №2

Автор: Сурова София, БПИ191

сентябрь 2022

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.44, №20
Пусть $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$. Верно ли, что $P(AB) \le \frac{3}{8}$

Решение
Пусть $P(AB) > \frac{3}{8}$, тогда, так как $P(B) \neq 0$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{3*3}{8*1} = \frac{9}{8}$, но по определению вероятности $P(AB) \le 1$, то есть мы пришли к противоречию. Следовательно, $P(AB) \le \frac{3}{8}$

Ответ: Верно

стр.45, №27
Отдел технического контроля предприятия бракует каждую партию из 100 деталей, если из 5 деталей, наугад выбранных из партии, хотя бы одна окажется бракованной. Партия содержит 5% брака. Найти вероятность для одной партии деталей быть забракованной. (Решить задачу двумя способами: используя формулу умножения вероятностей и используя только классическую формулу вычисления вероятностей.)

Решение
1) Классическое определение вероятности:
$P(\{\text{партия забракуется}\}) = P(\{\text{хотя бы одна из пяти выбранных деталей окажется бракованной}\}) =$
$= 1 - P(\{\text{все детела окажутся нормальными}\}) = 1 - \frac{C_{95}^5}{C^5 100} \approx 0.23041$
2) Формула умножения вероятностей:
$P(\{\text{партия забракуется}\}) = P(\{\text{хотя бы одна из пяти выбранных деталей окажется бракованной}\}) =$
$= 1 - P(\{\text{все детела окажутся нормальными}\}) = 1 - \frac{95}{100} * \frac{94}{99} * \frac{93}{98} * \frac{92}{97} * \frac{91}{96} \approx 0.23041$

стр.45, №28
Пусть $P(A) = \frac{1}{2}$. Найдется ли такое событие , чтобы $P(AB) > \frac{1}{2}$?
Ответ обосновать.

Решение
$P(AB) = P(A) * P(B|A) = \frac{P(B|A)}{2}$
Допустим, что $P(AB) > \frac{1}{2}$, тогда $P(B|A) > 1$, что противоречит определению вероятности, так значение вероятности принимает значения $[0, 1]$.

Ответ: нет

стр.47, №46*

По данным переписи населения Англии и Уэльса (1891 г.) установлено, что темноглазые отцы и темноглазые сыновья (событие AB) составили 5% обследованных пар, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $A\overline{B}$) — 7.9% пар, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья (событие $\overline{A}B$) — 8.9% пар, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $\overline{AB}$) — 78.2% пар.
Найти связь между цветом глаз отца и сыпа, то есть найти $P(B|A), P(B|\overline{A}), P(\overline{B}|A), P(\overline{B}|\overline{A})$.

Решение

$$P(AB) = P(A)P(B|A),\ P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = P(A)(1-P(B|A)) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A\overline{B})} = \frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)} = \frac{P(B|A)}{1-P(B|A)}$$

$$P(AB)(1-P(B|A)) = P(A\overline{B})P(B|A) \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\overline{B})} = \frac{0.05}{0.05+0.079} \approx 0.3876$$

$$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.3876 = 0.6124$$

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}),\ P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = P(\overline{A})(1-P(B|\overline{A})) \Rightarrow \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{AB})} = \frac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})} = \frac{P(B|\overline{A})}{1-P(B|\overline{A})}$$

$$P(\overline{A}B)(1-P(B|\overline{A})) = P(\overline{AB})P(B|\overline{A}) \Rightarrow P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{AB})} = \frac{0.089}{0.089+0.782} \approx 0.1022$$

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - P(B|\overline{A}) = 1 - 0.1022 = 0.8978$$

Ответ: $P(B|A) = 0.3876,\ P(\overline{B}|A) = 0.6124,\ P(B|\overline{A}) = 0.1022,\ P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.8978$

стр.47, №47

Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет «герб». Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Решение

Рассмотрим игрока, который совершает бросок первым.

В первом раунде вероятность выигрыша для него равна $p = \dfrac{1}{2}$ - вероятность выпадения «герба».

Во втором раунде вероятность выигрыша для него равна $(1-p)(1-p)p = \dfrac{1}{8}$, то есть у первого игрока выпадает «решка», у второго игрока - «решка», наконец, у первого игрока - «герб».

В i-том раунде вероятность выигрыша для него равна $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2i-1}$

Вероятность выигрыша для игрока, который ходит первым, равна $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2i-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

Теперь рассмотрим игрока, который совершает бросок вторым.

В первом раунде вероятность выигрыша для него равна $(1-p)p = \dfrac{1}{4}$, то есть у первого игрока выпадает «решка», у второго игрока - «герб».

Во втором раунде вероятность выигрыша для него равна $(1-p)(1-p)(1-p)p = \dfrac{1}{16}$, то есть у первого игрока выпадает «решка», у второго игрока - «решка», у первого игрока снова выпадает «решка», наконец, у второго игрока - «герб».

В i-том раунде вероятность выигрыша для него равна $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2i}$

Вероятность выигрыша для игрока, который ходит вторым, равна $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2i} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$

Ответ: $\dfrac{2}{3},\quad \dfrac{1}{3}$

стр.52, №82
В уроне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Из нее три раза наугад вынимают по одному шару. Требуется найти вероятность того, что все три вынутых шара окажутся белыми (событие A), при выполнении двух разных условий:
а) извлеченные из урны шары обратно не возвращаются;
б) после каждого извлечения шар возвращается обратно.

Решение
а) $P(A) = \dfrac{4}{10} * \dfrac{3}{9} * \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{30} \approx 0.033$ б) $P(A) = \dfrac{4}{10} * \dfrac{4}{10} * \dfrac{4}{10} = \dfrac{8}{125} = 0.064$

Ответ: а) $\dfrac{1}{30}$, б) $\dfrac{8}{125}$

стр.52, №83
Три радиостанции, независимо друг от друга, передают самолету один и тот же сигнал. Вероятности того, что самолетом будут приняты эти сигналы, соответственно равны: 0.9, 0.8, 0.75.
Найти вероятность того, что самолет примет посылаемый ему сигнал.

Решение
$P(\{\text{самолет примет посылаемый ему сигнал}\}) = 1 - P(\{\text{самолет не примет ни один посылаемый ему сигнал}\}) =$
$= 1 - (1 - 0.9) * (1 - 0.8) * (1 - 0.75) = 1 - 0.005 = 0.995$

Ответ: 0.995