Теория вероятностей и математическая статистика. Домашнее задание №8

Автор: Сурова София, БПИ191

ноябрь 2021

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.132, №4
Подбрасывают три игральные кости. Рассматриваются случайные величины: X - количество костей, на которых выпало шесть очков. Y - количество костей, на которых выпало пять очков. Найти $E(X+Y)$ и закон распределения СВ $Z = X + Y$

Решение
Ряд распределения - это таблица, в которой в первой строчке находятся значения, которые может принимать случайная величина, а во второй строчке - вероятности того, что случайная величина примет соответствующее значение. Тогда наш ряд распределения выглядит следующим образом:

X $\sim Bi(3, 1/6)$	0	1	2	3
p	$(5/6)^3$	$3(1/6)(5/6)^2$	$3(1/6)^2(5/6)$	$(1/6)^3$

Y $\sim Bi(3, 1/6)$	0	1	2	3
p	$(5/6)^3$	$3(1/6)(5/6)^2$	$3(1/6)^2(5/6)$	$(1/6)^3$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X

$$EX = \sum x_i p_i = 0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1 \cdot 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2 \cdot 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.5$$

Примечание. Можно посчитать проще, если вы поняли, что $X \sim Bi(3, 1/6)$ и $EX = np = 3 * \frac{1}{6} = 0.5$

Математическое ожидание дискретной случайной величины Y аналогично $EY = 0.5$

Тогда $EZ = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0.5 + 0.5 = 1$

$Z = X + Y = Bi(3, 1/3)$ - количество костей, на которых выпало пять или шесть очков.

Z $\sim Bi(3, 1/3)$	0	1	2	3
p	$(2/3)^3$	$3(1/3)(2/3)^2$	$3(1/3)^2(2/3)$	$(1/3)^3$

Ответ: $E(X + Y) = 1$, $Z \sim Bi(3, 1/3)$

стр.132, №5
Задан закон распределения случайного вектора $Z = (X, Y)$

Y/X	-1	1
1	1/6	1/3
2	0	1/6
3	1/3	0

Требуется:
а) найти закон распределения случайной величины $X + Y$
б) проверить справедливость равенств $E(X+Y) = EX + EY$, $D(X+Y) = DX + DY + 2cov(X, Y)$

Решение
$P\{X = x_i\} = \sum\limits_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum\limits_j P\{Z = z_{ij}\}$ (в данном случае i - столбец, j - строка)
$P\{Y = y_j\} = \sum\limits_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum\limits_i P\{Z = z_{ij}\}$ (в данном случае i - столбец, j - строка)
Найдём сумму по строке и по столбцу

Y/X	-1	1	
1	1/6	1/3	1/2
2	0	1/6	1/6
3	1/3	0	1/3
	1/2	1/2	

Тогда

X	-1	1
p	1/2	1/2

Y	1	2	3
p	1/2	1/6	1/3

$P\{X + Y = 0\} = P\{X = -1, Y = 1\} = 1/6$
$P\{X + Y = 1\} = P\{X = -1, Y = 2\} = 0$
$P\{X + Y = 2\} = P\{X = -1, Y = 3\} + P\{X = 1, Y = 1\} = 1/3 + 1/3 = 2/3$
$P\{X + Y = 3\} = P\{X = 1, Y = 2\} = 1/6$
$P\{X + Y = 4\} = P\{X = 1, Y = 3\} = 0$

X+Y	0	1	2	3	4
p	1/6	0	2/3	1/6	0

Математическое ожидание дискретной случайной величины X
$EX = \sum x_i p_i = -1 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{1}{2} = 0$
Математическое ожидание дискретной случайной величины Y
$EY = \sum y_i p_i = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{6} + 3 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$
Математическое ожидание дискретной случайной величины $X + Y$
$E(X+Y) = 0 \cdot \dfrac{1}{6} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \dfrac{2}{3} + 3 \cdot \dfrac{1}{6} + 4 \cdot 0 = \dfrac{11}{6}$

$E(X+Y) = EX + EY$ - верно

Дисперсия случайной величины X
$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$
$DX = E(X^2) - (EX)^2 = 1 - 0 = 1$
Дисперсия случайной величины Y
$E(Y^2) = \sum y_i^2 p_i = 1^2 \cdot \dfrac{1}{2} + 2^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 3^2 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{25}{6}$
$DY = E(Y^2) - (EY)^2 = \dfrac{25}{6} - \dfrac{121}{36} = \dfrac{29}{36}$
Дисперсия случайной величины $X + Y$
$E((X+Y)^2) = 0 \cdot \dfrac{1}{6} + 1 \cdot 0 + 2^2 \cdot \dfrac{2}{3} + 3^2 \cdot \dfrac{1}{6} + 4^2 \cdot 0 = \dfrac{25}{6}$
$D(X+Y) = \dfrac{25}{6} - \dfrac{121}{36} = \dfrac{29}{36}$

Ковариация случайных величин X и Y
$E(XY) = \sum x_i y_j p_i j = -1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{6} - 1 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{3} + 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{11}{6} = -\frac{1}{2}$
$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X,Y) = 1 + \frac{29}{36} + 2 \cdot (-1)\frac{1}{2} = \frac{29}{36}$ - верно

стр.132, №6
Найти ковариацию $cov(c, X)$, где X - некоторая СВ, c - константа.

Решение
$E(cX) = cE(X)$
$E(c) = c$

$$cov(c, X) = E(cX) - E(c)E(X) = cE(X) - cE(X) = 0$$

Ответ: 0

стр.132, №7
В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 3%, а вследствие дефекта B - 4.5%. Годная продукция составляет 95%. Найти коэффициент корреляции дефектов A и B.

Решение
Пусть случайная величина A - наличие дефекта A, а случайная величина B - наличие дефекта B.
Тогда

A	0	1
p	0.97	0.03

B	0	1
p	0.955	0.045

A/B	0	1
0	0.95	?
1	?	?

Но

A/B	0	1	
0	0.95	?	0.97
1	?	?	0.03
	0.955	0.045	

Тогда

A/B	0	1
0	0.95	0.02
1	0.005	0.025

Математическое ожидание дискретной случайной величины A
$EA = \sum a_i p_i = 0 * 0.97 + 1 * 0.03 = 0.03$
Математическое ожидание дискретной случайной величины B
$EB = \sum b_i p_i = 0 * 0.955 + 1 * 0.045 = 0.045$

Дисперсия случайной величины A
$E(A^2) = 0 * 0.97 + 1 * 0.03 = 0.03$
$D(A) = E(A^2) - (EA)^2 = 0.03 - 0.03^2 = 0.0291$
Дисперсия случайной величины B
$E(B^2) = 0 * 0.955 + 1 * 0.045 = 0.045$
$D(B) = E(B^2) - (EB)^2 = 0.045 - 0.045^2 = 0.042975$

Ковариация A и B
$E(AB) = \sum a_i b_j p_{ij} = 0 * 0 * 0.95 + 0 * 1 * 0.02 + 1 * 0 * 0.05 + 1 * 1 * 0.025 = 0.025$
$cov(A, B) = E(AB) - E(A)E(B) = 0.025 - 0.03 * 0.045 = 0.02365$

Коэффициент корреляции A и B
$\rho(A, B) = \frac{cov(A, B)}{\sqrt{DA}\sqrt{DB}} = \frac{0.02365}{\sqrt{0.0291}\sqrt{0.042975}} \approx 0.669$

Ответ: 0.669

стр.132, №12
Известно, что $EX = 1$, $EX^2 = 2$. Найти $cov(X, X)$

Решение
$cov(X, X) = E(XX) - E(X)E(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1^2 = 1$
Примечание. $cov(X, X) = DX$

Ответ: 1

стр.133, №13
Известно, что СВ $X \sim E(1)$, $DY = 2$, $D(X - Y) = 3$. Найти $cov(X, Y)$

Решение
$X \sim E(1) \Rightarrow EX = 1$, $DX = 1$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$$

$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) + 2cov(X, -Y) = D(X) + D(Y) - 2cov(X, Y) \Rightarrow$
$cov(X, Y) = \dfrac{1}{2}(DX + DY - D(X - Y)) = \dfrac{1}{2}(1 + 2 - 3) = 0$

Ответ: 0

стр.133, №14
Найти коэффициент корреляции междуслучайными величинами:
а) X и $Y = 18X$
б) X и $Y = 7 - 2X$

Решение

$$\rho(X, X) = 1$$
$$\rho(aX + b, cY + d) = sgn(a, c)\rho(X, Y)$$

а) $\rho(X, Y) = \rho(X, 18X) = \rho(X, X) = 1$
Если вы, допустим, забыли свойство для коэффициента корреляции, то
$EY = E(18X) = 18EX$
$DY = D(18X) = 18^2DX$
$E(XY) = E(18X^2) = 18E(X^2)$
$cov(X, Y) = E(XY) - EXEY = 18E(X^2) - 18(EX)^2 = 18DX$
$\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DXDY}} = \dfrac{18DX}{\sqrt{18^2(DX)^2}} = 1$

б) $\rho(X, Y) = \rho(X, 7 - 2X) = -\rho(X, X) = -1$
Опять же если вы забыли свойство для коэффициента корреляции, то
$EY = E(7 - 2X) = 7 - 2EX$
$DY = D(7 - 2X) = D(-2X) = 4DX$
$E(XY) = E(7X - 2X^2) = 7EX - 2EX^2$
$cov(X, Y) = E(XY) - EXEY = 7EX - 2EX^2 - (7 - 2EX)EX = -2EX^2 + 2(EX)^2 = -2DX$
$\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DXDY}} = \dfrac{-2DX}{\sqrt{4(DX)^2}} = -1$

Ответ: а) 1, б) -1

Центр исследований гражданского общества и некоммерческого сектора НИУ ВШЭ провёл социологическое исследование, в котором изучалась проблема участия населения в благотворительной деятельности. Среди вопросов, задаваемых респондентам, были, в частности, вопросы о материальном положении и образовании респондента.
Пусть СВ ξ (материальное положение) принимает три значения - 1 (бедный), 2 (средний уровень благосостояния), 3 (высокий уровень благосостояния), а СВ η (уровень образования) принимает значения - 1 (образование ниже среднего), 2 (среднее и среднее специальное образование), 3 (высшее образование).
Распределение случайного вектора (η, ξ), соответствующее репрезентативной выборке 2009 года, представлено следующей таблицей.

η/ξ	1	2	3
1	0.083	0.035	0.001
2	0.31	0.375	0.026
3	0.04	0.116	0.014

Найдите коэффициент корреляции СВ ξ и η. Являются ли СВ ξ и η некоррелированными? Являются ли СВ ξ и η зависимыми? Прокомментируйте полученный результат.

Решение

ξ	1	2	3
p	0.433	0.526	0.041

η	1	2	3
p	0.119	0.711	0.17

$E\xi = 1 * 0.433 + 2 * 0.526 + 3 * 0.041 = 1.608$
$E\eta = 1 * 0.119 + 2 * 0.711 + 3 * 0.17 = 2.051$

$E(\xi^2) = 1 * 0.433 + 4 * 0.526 + 9 * 0.041 = 2.906$
$D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = 2.906 - 1.608^2 = 0.320336$
$E(\eta^2) = 1 * 0.119 + 4 * 0.711 + 9 * 0.17 = 4.493$
$D\eta = E(\eta^2) - (E\eta)^2 = 4.493 - 2.051^2 = 0.286399$

$E(\xi\eta) = 1*1*0.083+1*2*0.035+1*3*0.001+2*1*0.31+2*2*0.375+2*3*0.026+3*1*0.04+3*2*0.116+3*3*0.014 = 3.374$
$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0.075992$

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{0.075992}{\sqrt{0.320336 * 0.286399}} \approx 0.250887631$$

$\rho(\xi, \eta) \neq 0 \Rightarrow \xi$ и η коррелированы
$\rho(\xi, \eta) > 0 \Rightarrow \xi$ и η коррелированы положительно

$\rho(\xi, \eta) \neq 0 \Rightarrow \xi$ и η зависимы

Существует взаимосвязь между материальным положением и уровнем образования среди выбранных респондентов, данные величины положительно костреллированы, коэффициент корреляции $\rho = 0.25$