

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

- ① Инженер предложил новый метод сборки изделий. В результате сборки 10 изделий новым способом время сборки составило 79, 74, 112, 95, 83, 96, 77, 84, 70, 90 минут. Постройте ДИ уровня надёжности 0.95 для среднего времени сборки детали. Предполагается, что наблюдения имеют гауссовское распределение.

$$X_1, \dots, X_{10} \sim N(m, \sigma^2)$$

оцениваем m при неизвестной σ^2

центральная статистика $G = \frac{(\bar{X} - m)\sqrt{n-1}}{\sqrt{S^2}} \sim t_{(n-1)}$

$$P(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < G < t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

тогда доверительный интервал

$$\left(\bar{X} - \frac{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}}; \bar{X} + \frac{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}} \right)$$

В данной задаче

$$\alpha = 0,05 \quad n=10 \quad t_{9, 0,975} = 2,262 \quad \sqrt{n-1} = 3$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 860/10 = 86$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 1416/10 = 141.6 \quad \sqrt{S^2} \approx 11.9$$

подставляем

$$\left(86 - \frac{2,262 \cdot 11,9}{3}; 86 + \frac{2,262 \cdot 11,9}{3} \right)$$

$$(77,0274; 94,9726)$$

- ② Постройте ДИ уровня надёжности 0.9 для дисперсии времени сборки деталей из задачи ①

оцениваем σ^2 при неизвестной m

центральная статистика $G = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

$$P(\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < G < \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

тогда доверительный интервал

$$\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right)$$

В данной задаче

$$\alpha = 0,1 \quad n=10 \quad \chi^2_{9, 0,05} = 3,32 \quad \chi^2_{9, 0,95} = 16,92$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 141.6$$

подставляем

$$\left(\frac{10 \cdot 141,6}{16,92}; \frac{10 \cdot 141,6}{3,32} \right)$$

$$(83,6879; 426,5060)$$

③ Имеются данные Федеральной службы государственной статистики о среднедушевых доходах населения (рублей в месяц) в 2008 году по некоторым областям Центрального и Приволжского ФО. По ЦФО - 10043; 9596; 10305; 8354; 9413; 19776; 9815; 11311; 11253; 10856; 11389. По ПФО - 14253; 7843; 9581; 8594; 16119; 10112; 10173; 9756. Постройте доверительный интервал уровня надёжности 0.95 для разности средних значений среднедушевых доходов населения Центрального и Приволжского ФО.

$X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ и $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ независимы
оцениваем $m_1 - m_2$ при неизвестных σ_1^2 и σ_2^2

центральная статистика $G = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{S_{xy}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$

$$P(t_{n_1+n_2-2, \frac{\alpha}{2}} < G < t_{n_1+n_2-2, 1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

тогда доверительный интервал

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{n_1+n_2-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{S_{xy}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}; \bar{X} - \bar{Y} + t_{n_1+n_2-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{S_{xy}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

в данной задаче

$$\alpha = 0,05 \quad n_1 = 11 \quad n_2 = 8 \quad t_{17, 0,975} = 2,110 \quad \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{8}} \approx 0,4647$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i = 122111/11 = 11101$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{X})^2 \approx 8321177,4545$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i = 86431/8 = 10803,875$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{Y})^2 \approx 7158438,1094$$

$$S_{xy}^2 = \frac{n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{148800456,875}{17} \approx 7831603 \quad \sqrt{S_{xy}^2} \approx 2798,5$$

подставляем

$$\left(11101 - 10803,875 - 2,110 \cdot 2798,5 \cdot 0,4647; 11101 - 10803,875 + 2,110 \cdot 2798,5 \cdot 0,4647 \right)$$

$$(-2,4469; 3041,1018)$$