

Непрерывный случайный вектор

- ① 8. Случайный вектор $Z = \text{col}(X, Y)$ имеет совместную плотность вероятности $f(x, y) = \frac{a}{(1+x^2+x^2y^2+y^2)}$. Требуется:
- найти неизвестную константу a ;
 - исследовать величины X и Y на независимость и некоррелированность.

a) Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2} dy dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)} dy dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\arctg(y)}{1+x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) dx = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{1+x^2} dx = a\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = a\pi (\arctg(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}) = a\pi^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\pi^2}$$

δ) x и y независимые $\Leftrightarrow f_x(x) f_y(y) = f(x, y)$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = a \cdot \frac{\pi}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = a \cdot \frac{\pi}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$f_x(x) f_y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} = f(x, y)$$

 $\Rightarrow X, Y$ независимые $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$, т.е. X, Y некоррелированныетут проблема в том, что $EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y) dy = \infty$, т.е. $\text{cov}(X, Y)$ неопределен!Ответ: а) $a = \frac{1}{\pi^2}$ δ) X, Y независимые; $\text{cov}(X, Y)$ неопределен

- ② 9. Случайный вектор $Z = \text{col}(X, Y)$ имеет функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-(\lambda x + \mu y)} - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти частные распределения СВ X и Y . Исследовать эти величины на независимость и некоррелированность.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \begin{cases} -\lambda e^{-(\lambda x + \mu y)} + \mu e^{-\mu y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} dy = \lambda \mu e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} dy = \lambda \mu e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} d(-\mu y) \\ &= -\lambda e^{-\lambda x} (e^{-\mu y} \Big|_0^{+\infty}) = -\lambda e^{-\lambda x} (0 - 1) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \lambda \mu e^{-\mu y} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\lambda \mu e^{-\mu y} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = \mu e^{\lambda y}, \quad y \geq 0$$

$$\begin{aligned} f_x(x) f_y(y) &= \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{\lambda y} = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} = f(x, y) \Rightarrow X, Y \text{ независимы} \\ \Rightarrow \text{cov}(X, Y) &= 0, \text{ т.е. } X, Y \text{ некоррелированные} \end{aligned}$$

- ③ 21. Найти вероятность того, что случайно брошенная точка с координатами (X, Y) попадет на область D , определенную неравенствами $\{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$, если функция распределения координат этой точки равна

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x^2} - 2^{-2y^2} + 2^{-x^2-2y^2}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = (F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2)) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2))$$

$$\begin{aligned} P(1 < X \leq 2, 1 < Y \leq 2) &= F(2, 2) - F(2, 1) - F(1, 2) + F(1, 1) = \\ &= 1 - 2^{-4} - 2^{-8} + 2^{-12} - 1 + 2^{-4} + 2^{-2} - 2^{-6} - 1 + 2^{-1} + 2^{-8} - 2^{-9} + 1 - 2^{-1} - 2^{-2} + 2^{-3} = \\ &= 2^{-12} - 2^{-6} - 2^{-9} + 2^{-3} \approx 0,1077 \end{aligned}$$

Ответ: 0,1077

- ④ 22. Случайный вектор $Z = \text{col}(X, Y)$ имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти корреляционную матрицу случайного вектора Z .

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{+\infty} ye^{-y^2} dy = \left\{ -\frac{1}{2}d(y^2) = y dy \right\} = -2xe^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} d(-y^2) = \\ &= -2xe^{-x^2} (e^{-y^2}|_0^{+\infty}) = 2xe^{-x^2}, x \geq 0 \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 4ye^{-y^2} \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = -2ye^{-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = -2ye^{-y^2} (e^{-x^2}|_0^{+\infty}) = 2ye^{-y^2}$$

$$f_X(x)f_Y(y) = 2xe^{-x^2} \cdot 2ye^{-y^2} = 4xye^{-(x^2+y^2)} = f(x, y) \Rightarrow X, Y \text{ независимы}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow P(X, Y) = 0$$

$$R = \begin{pmatrix} P(X, X) & P(X, Y) \\ P(Y, X) & P(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

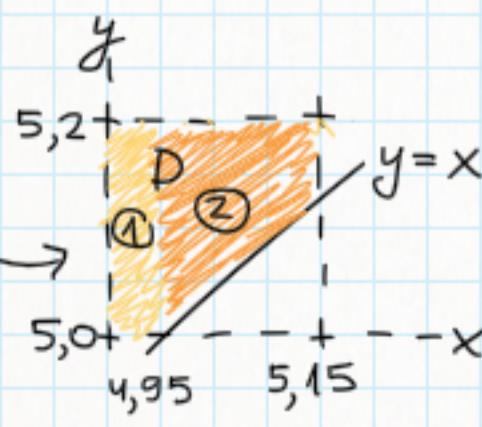
- ⑤ Диаметр вала и диаметр отверстия – независимые случайные величины, распределённые равномерно в интервалах $(4.95; 5.15)$ и $(5.0; 5.2)$ соответственно. Найдите вероятность того, что вал войдёт в отверстие.

$$X \sim R(4,95, 5,15) \quad \text{диаметр вала}$$

$$Y \sim R(5,0, 5,2) \quad \text{диаметр отверстия}$$

$$P(X \leq Y) = P(X - Y \leq 0) = *$$

надо найти вероятность попадания случайного вектора в область D



$$* = \int_{4,95}^{5,0} dx \int_{4,95}^{5,2} dy + \int_{5,0}^{5,15} dx \int_{5,0}^{5,2} dy = 0,2 \cdot 0,05 + 5,2 \cdot 0,2 - \frac{5,15^2 - 5,0^2}{2} = 0,28875$$

Ответ: 0,28875

СВ ξ и η независимы и имеют распределение $R(0,1)$. Найдите вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2\xi x + \eta = 0$ являются вещественными

корни вещественные $\Rightarrow D = 4\xi^2 - 4\eta \geq 0 \Leftrightarrow \xi^2 - \eta \geq 0$

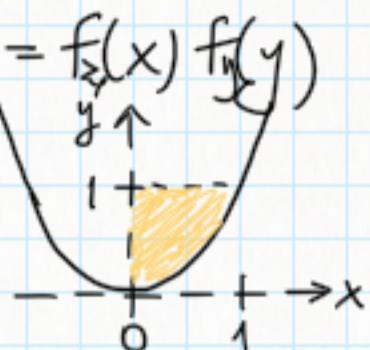
пусть $\zeta = \xi^2 - \eta \Rightarrow F_\zeta(z) = \iint_{x-y \leq z} f(x,y) dx dy$

$$P(\xi^2 - \eta \geq 0) = P(\zeta \geq 0) = 1 - P(\zeta < 0) = 1 - F_\zeta(0) = 1 - \iint f(x,y) dx dy = *$$

$$\begin{aligned} x^2 - y &\leq 0 \\ 0 \leq x &\leq 1 \\ 0 \leq y &\leq 1 \end{aligned}$$

• ξ и η независимы $\Rightarrow f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$

$$\begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



• $\xi, \eta \sim R(0,1)$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/1-0, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases} \quad f_\eta(y) \text{ аналогично}$$

$$* = 1 - \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy = 1 - \int_0^1 (1-x^2) dx = 1 - \left(x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$