

свойства статистических оценок

- ① Доказать, что выборочные начальные моменты являются несмешенными оценками соответствующих теоретических начальных моментов.
Найти математическое ожидание выборочной дисперсии. Доказать асимптотическую несмешенность выборочной дисперсии.

→ выборочный начальный момент $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$

$$E\hat{\mu}_k = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i^k = M_k$$

$E\hat{\mu}_k = M_k \Rightarrow$ оценка несмешенная

→ выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$\begin{aligned} E S^2 &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = E(x_1 - \bar{x})^2 = D(x_1 - \bar{x}) = D x_1 + D \bar{x} - 2 \operatorname{cov}(x_1, \bar{x}) = \\ &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2 \operatorname{cov}(x_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n} \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E S^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)\sigma^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} \sigma^2 = \sigma^2 \Rightarrow$$
 оценка асимптотически несмешенна

- ② Выборка X_1, \dots, X_n соответствует распределению $R(0; \theta)$. Пусть $\hat{\theta} = 2\bar{X}$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмешенной и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ ?

$$E\hat{\theta} = E(2\bar{X}) = E\left(\frac{2}{n} \sum_i^n x_i\right) = \frac{2}{n} \sum_i^n E x_i = \frac{2}{n} \sum_i^n \frac{\theta+0}{2} = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta+0}{2} = \theta$$

$E\hat{\theta} = \theta \Rightarrow$ оценка несмешенная

$$D\hat{\theta} = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = 4D\left(\frac{1}{n} \sum_i^n x_i\right) = \frac{4}{n^2} D\left(\sum_i^n x_i\right) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$E\hat{\theta} = \theta$ и $D\hat{\theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$ оценка состоятельна

Метод максимального правдоподобия и метод моментов

- ③ Выборка X_1, \dots, X_n соответствует гауссовскому распределению $N(\theta_1, \theta_2^2)$. Построить оценку вектора параметров (θ_1, θ_2^2) по методу МП и по методу моментов.
- ④ Выборка X_1, \dots, X_n соответствует распределению $R(0; \theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ .
- ⑤ Выборка X_1, \dots, X_n соответствует геометрическому распределению $G(\theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ .

- ③ $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$ $\theta = (\theta_1, \theta_2^2)$ функция правдоподобия

$$\text{ММП } L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta_2} \exp\left\{-\frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right\}$$

$$\ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - n \ln \theta_2 - \frac{\sum (x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta_1} = \frac{\sum (x_i - \hat{\theta}_1)}{\theta_2^2} = 0$$

$$\sum (x_i - \hat{\theta}_1) = 0 \Rightarrow \sum x_i - n\hat{\theta}_1 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{\sum (x_i - \hat{\theta}_1)^2}{\theta_2^2} = 0$$

$$-n\hat{\theta}_2 + \sum (x_i - \hat{\theta}_1)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \hat{\theta}_1)^2 = S^2$$

$$\text{ММ} \quad \begin{cases} \hat{M}_1 = M_1 \\ \hat{M}_2 = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i & M_1 = EX = \theta_1 \\ \hat{M}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 & M_2 = EX^2 = (EX)^2 + DX = \theta_1^2 + \theta_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \bar{X} \\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = S^2 \end{cases}$$

④ $X_1, \dots, X_n \sim R(0, \theta)$

$$\text{ММП} \quad L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}, & \text{если } X_1, \dots, X_n \in (0, \theta) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция правдоподобия достигает максимума при $\hat{\theta} = X_{(n)}$

$X_{(n)}$ — последний элемент вариационного ряда, т.е. самый большой

$$\text{ММ} \quad \hat{M}_1 = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \\ M_1 = EX = \frac{0+\theta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \bar{X} = \frac{0+\hat{\theta}}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}$$

⑤ $X_1, \dots, X_n \sim G(\theta), \theta > 0$

$$\text{ММП} \quad L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \theta (1-\theta)^{x_i-1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i - n}$$

$$\ln L(\theta, X_1, \dots, X_n) = n \ln \theta + (\sum x_i - n) \ln (1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{(\sum x_i - n)}{1-\theta} = 0$$

$$n(1-\hat{\theta}) - (\sum x_i - n)\hat{\theta} = 0$$

$$n - n\hat{\theta} - \hat{\theta}\sum x_i + n\hat{\theta} = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\text{ММ} \quad \hat{M}_1 = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \\ M_1 = EX = \frac{1}{\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \bar{X} = \frac{1}{\hat{\theta}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$$

⑥ 13. Пусть $Z_n = \text{col}(X_1, \dots, X_n)$ — выборка, соответствующая распределению с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2}{\theta} x_i e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, \quad x_i \geq 0$$

$$\ln L(\theta, X_1, \dots, X_n) = n \ln 2 - n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum x_i^2}{\theta}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{\theta^2} = 0$$

$$-n\hat{\theta} + \sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

⑦ 14. Пусть $Z_n = \text{col}(X_1, \dots, X_n)$ — выборка, соответствующая биномиальному распределению $\text{Bi}(10; \theta)$. Оценить неизвестный параметр θ методом максимального правдоподобия.

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n C_{10}^{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{10-x_i}$$

$$\ln L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \ln C_{10}^{x_i} + \sum x_i \cdot \ln \theta + (10-n - \sum x_i) \ln (1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta} = \sum x_i \cdot \frac{1}{\theta} - (10-n - \sum x_i) \cdot \frac{1}{1-\theta} = 0$$

$$\sum x_i \cdot (1 - \hat{\theta}) - (10n - \sum x_i) \cdot \hat{\theta} = 0$$

$$\sum x_i - \hat{\theta} \sum x_i - 10\hat{\theta}n + \hat{\theta} \sum x_i = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{10n}$$