

# Теория вероятностей и математическая статистика.

## Разбор нулевика контрольной работы

Сурова София

ноябрь 2022

### Что важно помнить

Вероятность от 0 до 1 включительно

Дисперсия и среднее квадратическое неотрицательны

Функция распределения определена на всей числовой прямой, принимает значения от 0 до 1 и монотонно неубывает.

Функция плотности всегда неотрицательна, а интеграл от  $-\infty$  до  $+\infty$  всегда равен 1

### Число сочетаний и размещений. Формулы вероятности

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$  - порядок важен

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  - порядок НЕ важен

$P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$  и  $B$  зависимы

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$  и  $B$  независимы

Для несовместных событий:  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , где  $P(AB) = 0$

Для независимых событий:  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , где  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Условная вероятность:  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ ,  $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Схема Бернулли:  $P = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ , где  $n$  - число испытаний,  $k$  - число успехов,  $p$  - вероятность успеха

Формула Байеса:  $P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$

Формула полной вероятности:  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$

$H_i$  - гипотезы, полная группа событий (попарно несовместны и  $\sum H_i = \Omega$ )

$P(H_i)$  - априорная вероятность,  $P(H_i|A)$  - апостериорная вероятность

### Функция распределения

$F(x) = P\{X \leq x\}$

Свойства:

1.  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$

2.  $P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

### Плотность распределения

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$

Свойства:

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

2.  $P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

### Математическое ожидание и дисперсия

$EX = \sum x_i P\{X = x_i\}$  - для дискретных

$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  - для непрерывных

$DX = E(X - EX)^2$

$DX = \sum (x_i - EX)^2 P\{X = x_i\}$  - для дискретных

$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$  - для непрерывных

$DX = E(X^2) - (EX)^2$

$E(X^2) = \sum x_i^2 P\{X = x_i\}$  - для дискретных

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$  - для непрерывных

$c$  - константа

$E(c) = c$

$E(c \cdot \xi) = c \cdot E(\xi)$

$E(\xi + c) = E(\xi) + c$

$E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$

$D(c) = 0$

$D(c \cdot \xi) = c^2 \cdot D(\xi)$

$D(\xi + c) = D(\xi)$

$D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2cov(\xi_1, \xi_2)$

$\sigma = \sqrt{DX}$  - среднее квадратическое отклонение

### Квантиль

$Q_a$  - квантиль уровня  $a$  или  $a$ -квантиль

$Q_a = \min(\{x : F(x) \geq a\})$

$F(Q_a) = a$

$\int_{-\infty}^{Q_a} f(x) dx = a$

Квантиль уровня  $\frac{1}{2}$  называется медианой

### Биномиальное распределение

$$\xi \sim Bi(n, p)$$

$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$E(\xi) = n \cdot p$

$D(\xi) = n \cdot p \cdot q$

Биномиальное распределение описывает число успехов в  $n$  испытаниях с вероятностью успеха  $p$ .

### Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda)$$

$\lambda = n \cdot p, n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$

$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

$E(\xi) = D(\xi) = \lambda$

Распределение Пуассона описывает также описывает число успехов, когда количество испытаний велико, а вероятность успеха достаточно мала и  $\lambda = n \cdot p = const$ . Распределение Пуассона ещё называют законом редких событий. С помощью распределения Пуассона можно описать, например, число вызовов, поступивших в течение суток на телефонную станцию; число метеоритов, упавших в определенном районе; число распавшихся частиц при радиоактивном распаде вещества.

### Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p)$$

$$P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p = p \cdot (1-p)^{k-1} \text{ (на } k\text{-ом эксперименте - удача)}$$

$$E(\xi) = \frac{1}{p}$$

$$D(\xi) = \frac{q}{p^2}$$

Геометрическое распределение описывает число испытаний до появления первого успеха.

### Равномерное распределение

$$\xi \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{- функция плотности}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x > b \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a; b] \end{cases} \quad \text{- функция распределения}$$

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### Экспоненциальное распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{- функция плотности}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{- функция распределения}$$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Экспоненциальное распределение имеет время безотказной работы каких-нибудь приборов или систем, время ожидания в очереди.

### Гауссовское распределение

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$m$  – среднее отклонение,  $\sigma$  – среднеквадратическое (стандартное) отклонение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{- функция плотности}$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{- функция распределения (она же функция Лапласа)}$$

$$E(\xi) = m$$

$$D(\xi) = \sigma^2$$

Интеграл в гауссовской плотности не находится в элементарных функциях

$$\text{Нормировка: } \frac{x-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

### Задача №1.

У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, каждое из которых он посещает с равной вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюёт с вероятностью 0.8; на втором месте – с вероятностью 0.7; на третьем – с вероятностью 0.6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

### Решение

Введем события  $A$  и  $H_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ )

$A = \{\text{при трех попытках рыбак поймал одну рыбу}\}$

$H_i = \{\text{рыбак был в } i\text{-ом месте}\}$

Из условия мы знаем, что:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3} \text{ ("посещает с равной вероятностью")}$$

Посчитаем вероятности  $P(A|H_i)$ , которые вычисляются по формуле Бернулли, если учесть то, что у рыбака было три попытки и поймал рыбу он только один раз:

$$P(A|H_1) = C_3^1 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.8)^2 = 0.096$$

$$P(A|H_2) = C_3^1 \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.7)^2 = 0.189$$

$$P(A|H_3) = C_3^1 \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.6)^2 = 0.288$$

Воспользуемся формулой полной вероятности, чтобы вычислить  $P(A)$ :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot 0.096 + \frac{1}{3} \cdot 0.189 + \frac{1}{3} \cdot 0.288 = 0.032 + 0.063 + 0.096 = 0.191$$

Можем вычислить вероятность того, что рыбак был на первом месте и, что из трех попыток поймать рыбу, успешной была лишь одна:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.032}{0.191} = \frac{32}{191} = 0.1675$$

**Ответ:** 0.1675

### Задача №2.

При одном цикле обзора радиолокационной станции объект обнаруживается с вероятностью 0.85. Обнаружение объекта в каждом цикле достигается независимо от других циклов. Какое минимальное число циклов надо осуществить, чтобы вероятность обнаружения объекта была не меньше, чем 0.999?

### Решение

Данная задача описывает схему Бернулли. Вероятность успеха каждого события по условию равна 0.85.

Нам необходимо найти минимальное количество циклов  $n$ , необходимых для выполнения условия. Чтобы посчитать вероятность обнаружения объекта хотя бы в одном цикле, резоннее будет вычислить вероятность того, что объект не был обнаружен ни в одном из циклов, и затем вычесть эту вероятность из единицы.

Вероятность необнаружения обозначим  $\bar{A}$ . Тогда:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (C_n^0 \cdot 0.85^0 \cdot (1 - 0.85)^n) = 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0.15^n) = 1 - 0.15^n$$

Из условия мы получаем следующее неравенство (вероятность обнаружения объекта была не меньше, чем 0.999):

$$1 - 0.15^n \geq 0.999$$

$$0.15^n \leq 0.001$$

$$n \geq 3.641 \Rightarrow \text{нужно осуществить минимум 4 цикла}$$

**Ответ:** 4 цикла

### Задача №3.

Аппаратура, состоящая из 1000 элементов, функционирует нормально до тех пор, пока число отказавших элементов не превысит двух. Каждый элемент независимо от других элементов в течение времени  $T$  работает безотказно с вероятностью 0.998. Какова вероятность того, что система в целом проработает время  $T$ ? Пусть случайная величина  $\xi$  – количество элементов, отказавших в течении времени  $T$ . Найдите математическое ожидание и 0.6-квантиль случайной величины  $\xi$ .

### Решение

$\xi = \{\text{количество элементов, отказавших в течении времени } T\}$

Задача описывает биномиальное распределение с  $n = 1000$  и  $p = 0.002$ , так как нам нужна вероятность отказа одного элемента в течение какого-то времени  $T$  (то есть  $1 - 0.998$ ). Тогда имеем:

$\xi \sim Bi(1000, 0.002)$

Так как распределение описывается большим количеством деталей и маленькой вероятностью, мы можем воспользоваться аппроксимацией для биномиального распределения:

$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0.002 = 2 \Rightarrow \xi \sim \Pi(2)$

Чтобы система работала безотказно необходимо, чтобы сломалось не более двух деталей (то есть 0, 1 или 2). Тогда:

$$P = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{1} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1} + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2} = \frac{5}{e^2}$$

Чтобы найти математическое ожидание воспользуемся известной нам формулой для распределения Пуассона:

$$E(\xi) = \lambda = 2$$

0.6-квантиль - это такое число, для которого выполняется условие, что  $P(\xi \leq Z_{0.6}) = 0.6$

Так как в нашем случае мы имеем дискретное распределение, то нам нужно пройти по всем  $F(k)$ , где  $k$  будет начинаться с нуля. Когда  $F(k)$  превзойдет 0.6, то это и будет 0.6-квантилем:

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!}$$

$$P(\xi = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2} = 0.135$$

$$F(0) = 0.135$$

$$P(\xi = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 2 \cdot e^{-2} = 0.27$$

$$F(1) = F(0) + 0.27 = 0.135 + 0.27 = 0.405$$

$$P(\xi = 2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = 2 \cdot e^{-2} = 0.27$$

$$F(2) = F(1) + 0.27 = 0.405 + 0.27 = 0.675 \Rightarrow \text{мы превзошли } 0.6, \text{ а значит } Z_{0.6} = 2$$

**Ответ:** вероятность =  $5e^{-2}$ ;  $Z_{0.6} = 2$

**Задача №4.**

Случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{если } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

Найти константу  $c$ , функцию распределения случайной величины  $\xi$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\eta = -5\xi + 4$ , вычислить  $P(|\xi - 0.5| \leq 0.25)$ .

**Решение**

Нам известно, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ . Тогда мы можем найти константу  $c$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^1 c(1-x^2)dx + \int_1^{+\infty} 0dx = c \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = c \left( \int_{-1}^1 1dx - \int_{-1}^1 x^2dx \right) = \\ &= c \left( x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = c \left( (1 - (-1)) - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = c \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = c \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Из определения функции плотности мы знаем, что  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ . Тогда функция распределения будет иметь следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dx = 0, & \text{если } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^x \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \dots = -0.25x^3 + 0.75x + 0.5, & \text{если } |x| \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-x^2)dx + \int_1^x 0dx = \frac{3}{4} \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Теперь вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$$\begin{aligned} E(\eta) &= E(-5\xi + 4) = E(-5\xi) + E(4) = -5E(\xi) + 4 = -5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx + 4 = \\ &= -5 \cdot \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx + 4 = -\frac{15}{4} \cdot \int_{-1}^1 (x - x^3)dx + 4 = -\frac{15}{4} \cdot (0 - 0) + 4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\eta) &= D(-5\xi + 4) = D(-5\xi) + D(4) = 25 \cdot D(\xi) + 0 = 25 \cdot (E(\xi^2) - (E(\xi))^2) = 25 \cdot (E(\xi^2) - 0) = \\ &= 25E(\xi^2) = 25 \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{75}{4} \int_{-1}^1 x^2 \cdot (1-x^2)dx = \frac{75}{4} \left( \int_{-1}^1 x^2dx - \int_{-1}^1 x^4dx \right) = \\ &= \frac{75}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{-1}{5} \right) = \frac{75}{4} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{75}{4} \cdot \frac{4}{15} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|\xi - 0.5| \leq 0.25) &= P(0.25 \leq \xi \leq 0.75) = \int_{0.25}^{0.75} f(x)dx = \frac{3}{4} \int_{0.25}^{0.75} (1-x^2)dx = \\ &= \frac{3}{4} \left( 0.75 - \frac{0.75^3}{3} - 0.25 + \frac{0.25^3}{3} \right) = 0.274 \end{aligned}$$

**Ответ:** тут много пунктов, соберите сами :)

**Задача №5.**

Станок-автомат изготавливает валики. Контролируется диаметр валика  $\xi$ , удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением 10 мм. Чему равно среднеквадратическое отклонение диаметра валика, если с вероятностью 0.99 диаметр заключён в интервале (9.7; 10.3). Найдите 0,99-квантиль СВ  $\xi$ .

**Решение**

По условию задачи мы имеем гауссовское распределение:  $\xi \sim N(10, \sigma^2)$ . Зная то, что с вероятностью 0.99 диаметр заключён в интервале (9.7; 10.3) можем найти среднеквадратическое отклонение:

$$P(9.7 < \xi < 10.3) = \Phi_0\left(\frac{10.3 - 10}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9.7 - 10}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{0.3}{\sigma}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{0.3}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{0.3}{\sigma}\right) = 0.495$$

С помощью таблицы найдем значение функции Лапласа:

$$\frac{0.3}{\sigma} = 2.58 \Rightarrow \sigma = 0.116$$

Найдем 0,99-квантиль СВ  $\xi$ :

$$F(Z_{0.99}) = \Phi_0\left(\frac{Z_{0.99} - 10}{0.116}\right) + 0.5 = 0.99 \\ \Phi_0\left(\frac{Z_{0.99} - 10}{0.116}\right) = 0.49$$

Снова воспользуемся таблицей:

$$\frac{Z_{0.99} - 10}{0.116} = 2.33 \Rightarrow Z_{0.99} - 10 = 0.27 \Rightarrow Z_{0.99} = 10.27$$

**Ответ:**  $\sigma = 0.116$ ;  $Z_{0.99} = 10.27$

**Комментарий**

Хочу обратить ваше внимание на то, что в этом варианте отсутствуют задачи на следующие темы:

- 1) Формула сложения вероятностей;
- 2) Условные вероятности, исследование зависимости/независимости событий;
- 3) Формула полной вероятности;
- 4) Дискретные величины общего вида, биномиальное распределение;
- 5) Равномерное и экспоненциальное распределения.

В некоторых вариантах задачи на эти темы могут быть.