

Теория вероятностей и математическая статистика

домашнее задание 10

Сурова София

Плотность распределения функции СВ

① СВ $\xi \sim R(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. найти плотность распределения $y = \sin \xi$

$y = \varphi(x) = \sin x$ монотонна на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и дифференцируема \Rightarrow

$$f_y(y) = f_\xi(\varphi'(y)) \cdot |\varphi'(y)|$$

$$\varphi'(y) = \arcsin y \quad (\varphi'(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y \in (-1, 1)$$

$$\text{тогда } f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1, 1) \\ 0, & y \notin (-1, 1) \end{cases}$$

② СВ $\xi \sim R(0, \pi)$. найти плотность распределения $y = \sin \xi$

$y = \varphi(x) = \sin x$ не монотонна на $(0, \pi) \Rightarrow$ разбиваем на интервалы

$$1) (0, \frac{\pi}{2}) \quad \varphi_1^{-1}(y) = \arcsin y \quad (\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (0, 1)$$

$$2) (\frac{\pi}{2}, \pi) \quad \varphi_2^{-1}(y) = \pi - \arcsin y \quad (\varphi_2^{-1}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (0, 1)$$

$$\text{тогда } f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi} \cdot \left| -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right|, & y \in (0, 1) \\ 0, & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

суммируем по интервалам

Неравенство Чебышева

③ Пусть СВ ξ – скорость ветра в некоторой точке Земли. Оцените

вероятность того, что скорость ветра в этой точке превысит 80 км/час,

если в результате многолетних наблюдений измерений установлено: а)

среднее значение скорости = 16 км/час; б) среднее значение скорости =

16 км/час, а среднеквадратическое отклонение = 4 км/час.

$$\bullet \xi \geq 0 \quad E\xi < \infty \quad P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} \quad \text{1 форма или Неравенство}$$

$$\bullet E\xi^2 < \infty \quad P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2} \quad \text{Маркова}$$

$$\bullet D\xi < \infty \quad P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad \text{2 форма}$$

пусть ξ – скорость ветра, тогда ξ неотрицательна

$$a) P(\xi \geq 80) \leq \frac{16}{80} = 0,2$$

по первой форме $P(\xi \geq 80) \in [0; 0,2]$

$$b) P(|\xi - 16| \geq 64) = P(\xi \geq 80) + P(\xi \leq -48) \leq \frac{4}{64^2} = \frac{1}{1024} \approx 0,00098$$

по второй форме $P(\xi \geq 80) \in [0; 0,00098]$

Ответ: а) $P(\xi \geq 80) \in [0; 0,2]$ б) $P(\xi \geq 80) \in [0; 0,00098]$

4) Пусть СВ ξ имеет конечный второй момент. Оцените с помощью неравенства Чебышёва $P(|\xi - m| < 3\sigma)$. Сравните полученный результат с точным значением вероятности, если известно, что СВ ξ имеет распределение: а) $N(m, \sigma^2)$, б) $E(\lambda)$, в) $R(a, b)$.

$$P(|\tilde{\varphi} - m| < 3\sigma) = 1 - P(|\tilde{\varphi} - m| \geq 3\sigma) \geq 1 - \frac{D\tilde{\varphi}}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{6^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{6^2}{9 \cdot 9} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

а) $\tilde{\varphi} \sim N(m, \sigma^2)$

$$P(|\tilde{\varphi} - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973 \xrightarrow{\text{правило 3 сигм}}$$

оценка $[0,89; 1]$

реальное значение $0,9973 \in [0,89; 1]$

б) $\tilde{\varphi} \sim E(\lambda)$ $E\tilde{\varphi} = m = 1/\lambda$ $D\tilde{\varphi} = \sigma^2 = 1/\lambda^2$ $\sigma = 1/\lambda$ $\lambda > 0$

$$P(|\tilde{\varphi} - m| < 3\sigma) = P(-3\sigma + m < \tilde{\varphi} < 3\sigma + m) = F(3\sigma + m) - F(-3\sigma + m) = F\left(\frac{4}{\lambda}\right) - F\left(-\frac{2}{\lambda}\right) = (1 - e^{-4}) - 0 = 1 - e^{-4} \approx 0,9817$$

оценка $[0,89; 1]$

реальное значение $0,9817 \in [0,89; 1]$

в) $\tilde{\varphi} \sim R(a, b)$ $E\tilde{\varphi} = m = \frac{b+a}{2}$ $D\tilde{\varphi} = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ $a \leq b$

$$P(|\tilde{\varphi} - m| < 3\sigma) = P(-3\sigma + m < \tilde{\varphi} \leq 3\sigma + m) = F(3\sigma + m) - F(-3\sigma + m) = F\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}a\right) - F\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{\sqrt{3}+1}{2}a\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\sqrt{3}b + b - \sqrt{3}a + a \leq 2b \quad -\sqrt{3}b + b + \sqrt{3}a + a \geq 2a$$

$$\sqrt{3}(b-a) \leq b-a$$

$$b-a \geq \sqrt{3}(b-a)$$

$$\sqrt{3} \leq 1 \text{ неверно}$$

$$1 \geq \sqrt{3} \text{ неверно}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}a > b \quad \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{\sqrt{3}+1}{2}a < a$$

оценка $[0,89; 1]$

реальное значение $1 \in [0,89; 1]$

Гауссовский вектор

5) случайный вектор $\zeta = (\tilde{\varphi}, y)$ имеет гауссовское распределение $N(m, K)$

$$m = (E\tilde{\varphi}, Ey) = (1, -1)$$

$$K = \begin{pmatrix} \text{cov}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) & \text{cov}(\tilde{\varphi}, y) \\ \text{cov}(y, \tilde{\varphi}) & \text{cov}(y, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\tilde{\varphi} & \text{cov}(\tilde{\varphi}, y) \\ \text{cov}(\tilde{\varphi}, y) & Dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 26 \end{pmatrix}$$

найти $P(2\tilde{\varphi} - 3y > 4)$.

$\tilde{\varphi}$ и y имеют нормальное распределение $\Rightarrow 2\tilde{\varphi} - 3y$ также имеет нормальное распределение как их линейная комбинация

$$E(2\tilde{\varphi} - 3y) = E(2\tilde{\varphi}) + E(-3y) = 2E\tilde{\varphi} - 3Ey = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5$$

$$D(2\tilde{\varphi} - 3y) = D(2\tilde{\varphi}) + D(-3y) + 2\text{cov}(2\tilde{\varphi}, -3y) = 4D\tilde{\varphi} + 9Dy - 12\text{cov}(\tilde{\varphi}, y) = 4 \cdot 2 + 9 \cdot 26 - 12 \cdot (-5) = 302$$

$$P(2\tilde{\varphi} - 3y > 4) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{4-5}{\sqrt{302}}\right) = 0,5 - \Phi_0(-0,058) = 0,5 + \Phi_0(0,058) = 0,5 + 0,0231 = 0,5231$$

Ответ: 0,5231

⑥

Известно, что случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$, где СВ ξ – рост наугад взятого взрослого мужчины и СВ η – его вес, удовлетворительно описываются двумерным нормальным законом распределения с математическим ожиданием $m_\zeta = (175, 74)$ и ковариационной матрицей $K_\zeta = \begin{pmatrix} 49 & 26 \\ 26 & 36 \end{pmatrix}$.

Считается, что человек страдает избыточным весом, выполняется неравенство $\xi - \eta \leq 90$. Найдите: а) математическое ожидание и дисперсию характеристики избыточного веса $\xi - \eta$; б) вероятность того, что наугад выбранный мужчина страдает избыточным весом.

а) $\zeta = \xi - \eta$ имеет нормальное распределение как линейная комбинация нормально распределенных величин ξ и η

$$E(\xi - \eta) = E\xi + E(-\eta) = E\xi - E\eta = 175 - 74 = 101$$

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D(-\eta) + 2\text{cov}(\xi, -\eta) = D\xi + D\eta - 2\text{cov}(\xi, \eta) = 49 + 36 - 2 \cdot 26 = 33$$

$$\zeta \sim N(101, 33)$$

$$\delta) P(\xi - \eta \leq 90) = \Phi\left(\frac{90 - 101}{\sqrt{33}}\right) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{90 - 101}{\sqrt{33}}\right) = 0,5 - \Phi_0(1,915) = 0,5 - 0,4722 = 0,0278$$

Ответ: а) $\xi - \eta \sim N(101, 33)$ δ) 0,0278

⑦ СВ $\xi, \eta \sim N(0, 1)$ и являются независимыми.

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в круг радиуса 2 с центром в начале координат

$$P((\xi, \eta) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy \quad \xi, \eta \text{ независимы} \Leftrightarrow f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$$

$$\begin{aligned} P((\xi, \eta) \in C) &= \iint_C \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{полярные коорд.} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ dx dy = r dr d\varphi \end{array} \right\} = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \int_0^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \left\{ r dr = -d\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right\} = \\ &= - \int_0^2 e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(-\frac{r^2}{2}\right) = - \left(e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^2 \right) = - (e^{-2} - e^0) = 1 - e^{-2} \approx 0,8647 \end{aligned}$$

Ответ: 0,8647