Теория вероятностей и математическая статистика. Домашнее задание №3

Автор: Сурова София, БПИ191

сентябрь 2022

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.43, №18
При формировании группы для проведения специального социологического опроса необходимо отобрать 10 человек, удовлетворяющих определенным требованиям. Вероятность того, что наугад выбранный человек удовлетворяет этим требованиям, равна 0.2. Найти вероятность того, что при отборе придется тестировать ровно 20 человек.

Решение
Испытанием назовём тестирование одного человека на предмет удовлетворения требованиям, тогда успех - это 'человек удовлетворяет требованиям', а неудача - 'человек не удовлетворяет требованиям'. Вероятность успеха $p = 0.2$

Если необходимо провести ровно 20 испытаний, то в девятнадцати первых испытаниях должно быть девять успехов, а двадцатое испытание должно быть успешным.
Тогда по схеме Бернулли $P = C_{19}^9 p^9 (1-p)^{10} * p = C_{19}^9 p^{10} (1-p)^{10} \approx 0.001$

Ответ: $C_{19}^9 p^{10} (1-p)^{10} \approx 0.001$

стр.44, №19
Игральная кость подброшена дважды. Зависимы ли случайные события $A = \{$число очков при первом бросании равно 5$\}$ и $B = \{$сумма очков при двух бросаниях равна 9$\}$? Ответ обосновать.

Решение
Пусть $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$, тогда A и B независимые $\Leftrightarrow P(AB) = P(A) * P(B)$

$$P(A) = \frac{1}{6} * \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = P(\{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\}) = \frac{4}{6*6} = \frac{1}{9}$$
$$P(AB) = P(\{(5,4)\}) = \frac{1}{6*6} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{54} = \frac{1}{6} * \frac{1}{9} = P(A) * P(B) \Rightarrow A \text{ и } B \text{ зависимы}$$

Ответ: A и B зависимы

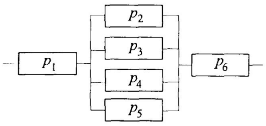
стр.44, №22
Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0.01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0.95?

Решение
Обозначим за событие $A = \{$хотя бы один найдет работу$\}$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \leq 0.05$
$P(\overline{A}) = (1-0.01)^n = 0.99^n \leq 0.05 \Rightarrow n \geq 298$

Ответ: не менее 298

стр.44, №24

Некоторая система состоит из шести элементов, отказы которых независимы. Вероятности безотказной работы (надежности) элементов равны соответственно $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/2$, $p_1 = 2/3$, $p_6 = 3/4$. Найти вероятность отказа ровно двух элементов в параллельном соединении при условии, что система работает нормально.



Решение

Обозначим за событие $A = \{\text{ровно два элемента в параллельном соединении отказали}\}$, а за событие $B = \{\text{система работает нормально}\}$ тогда необходимо найти условную вероятность $P(A|B)$,

которая вычисляется по формуле $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(AB) = P(\{\text{ровно два элемента из элементов 2-5 отказали, но система работает исправно}\}) =$

$= P(\{\text{работает элемент 1}\}) * P(\{\text{отказали ровно два элемента среди 2-5}\}) * P(\{\text{работает элемент 6}\}) =$

$= p_1 * C_4^2 * \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 * \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 * p_6 = \dfrac{2}{3} * 6 * \dfrac{1}{4} * \dfrac{1}{4} * \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

$P(B) = P(\{\text{работает элемент 1}\}) * P(\{\text{работает хотя бы один элемент из 2-5}\}) * P(\{\text{работает элемент 6}\}) =$

$= p_1 * (1 - (1 - p_2) * (1 - p_3) * (1 - p_4) * (1 - p_5)) * p_6 = \dfrac{2}{3} * \dfrac{15}{16} * \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{32}$

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{3 * 32}{16 * 15} = \dfrac{2}{5}$

Ответ: 0.4

стр.44, №25

Отдел надзора отделения центрального банка курирует деятельность ряда коммерческих банков. При сдаче квартальной отчетности серьезные финансовые нарушения обнаруживаются в среднем у 5% банков. На проверку выбрано три банка. Найти наиболее вероятное число банков с серьезными нарушениями финансовой отчетности среди выбранных.

Решение

Испытанием назовем проверку банка, тогда успех - это 'найдены серьезные нарушения', а неудача - 'серьезные нарушения не найдены'. Вероятность успеха $p = 0.05$

Воспользуемся схемой Бернулли:

$P(\{\text{ни у одного из трёх банков не нашли нарушения}\}) = C_3^0 p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3 = 0.857375$

$P(\{\text{у одного из трёх банков нашли нарушения}\}) = C_3^1 p^1 (1-p)^2 = 3p(1-p)^2 = 0.135375$

$P(\{\text{у двух из трёх банков нашли нарушения}\}) = C_3^2 p^2 (1-p)^1 = 3p^2(1-p) = 0.007125$

$P(\{\text{у всех трёх банков нашли нарушения}\}) = C_3^3 p^3 (1-p)^0 = p^3 = 0.000125$

Наиболее вероятное число банков с нарушениями отчетности равно 0.

Ответ: 0

стр.44, №26

Вероятность рождения мальчика равна 0.515. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления второго мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет четверо детей.

Решение

Испытанием назовем рождение ребенка, тогда успех - это 'родился мальчик', а неудача - 'родилась девочка'. Вероятность успеха $p = 0.515$

Если необходимо провести ровно 4 испытания, то в трех первых испытаниях должен быть один успех, а четвертое испытание должно быть успешным. Тогда по схеме Бернулли $P = C_3^1 p(1-p)^2 * p = 3p^2(1-p)^2 = 0.187$

Ответ: 0.187

стр.44, №33
Пусть $P(A) = P(B) = 1/4$. Верно ли, что $P(A+B)$ будет больше в том случае, когда A и B независимы, чем когда A и B несовместны?

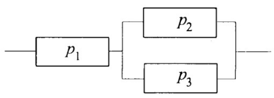
Решение
Если A и B независимы, то $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)-P(A)P(B) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}*\frac{1}{4} = \frac{7}{16}$
Если A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)-0 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0 = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{8}{16} > \frac{7}{16}$
Ответ: не верно, $P(A+B)$ больше в том случае, когда A и B несовместны

стр.45, №37
Из колоды карт (36 карт) подряд вытаскиваются две карты. Рассматриваются события: $A =$ первая карта имеет пиковую масть, $B =$ обе карты красного цвета. Зависимы ли события A и B? Ответ обосновать.

Решение
Понятно, что события несовместны и вероятность пересечения событий равна 0, так как пики чёрные, но необходимо показать, что вероятность самих событий не равна 0.
$P(A) = \frac{C_9^1 * C_{35}^1}{C_{36}^2} \neq 0$
$P(B) = \frac{C_{18}^1 C_{17}^1}{C_{36}^2} \neq 0$
$P(AB) = \frac{0}{C_{36}^2} = 0 \neq P(A) * P(B) \Rightarrow A$ и B зависимы, несовместны

Ответ: A и B зависимы

стр.46, №40
Схема электрической цепи представлена на рисунке, где p_i является вероятностью безотказной работы i-ого элемента. Пусть надежности элементов равны $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.6$. Элементы отказывают независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы схемы.



Решение
$P(\{\text{схема работает безотказно}\}) = P(\{\text{работает элемент 1}\}) * P(\{\text{работает хотя бы один элемент из 2-3}\}) =$
$= P(\{\text{работает элемент 1}\}) * (1 - P(\{\text{элементы 2-3 оба не работают}\})) = p_1 * (1 - (1-p_2) * (1-p_3)) =$
$= 0.8 * (1 - 0.3 * 0.4) = 0.8 * 0.88 = 0.704$

Ответ: 0.704

стр.47, №50
В кармане лежат 5 монет достоинством в 50 коп., 4 монеты по 10 коп. и 1 монета — 5 коп. Наугад берут 3 монеты. Какова вероятность того, что в сумме они составляют не более одного рубля?

Решение
Чтобы в сумме монеты не составляли более одного рубля, необходимо взять не более одной монеты в 50 коп. Тогда испытанием назовем взятие монеты, успехом - взятие монеты в 50 копеек, неудачей - взятие монеты, отличной от 50 копеек. Вероятность успеха $p = \frac{5}{5+4+1} = \frac{1}{2}$

Как говорилось ранее, необходимо найти вероятность того, что в трех испытаниях будет не более одного успеха, то есть по схеме Бернулли: $P = C_3^0 p^0 (1-p)^3 + C_3^1 p^1 (1-p)^2 = \frac{1}{8} + 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Ответ: 0.5

стр.47, №51
Фирма рассылает рекламные проспекты восьми потенциальным партнерам. В результате такой рассылки в среднем у каждого пятого потенциального партнера возникает интерес к фирме. Найти вероятность того, что это произойдет: а) в трех случаях; б) не более чем в трех.

Решение
Испытанием назовем рассылку рекламного проспекта потенциальному партнеру, тогда успех - это 'у потенциального партнера возник интерес к фирме', а неудача - 'потенциальный партнер проигнорировал рекламу'. Вероятность успеха $p = 0.2$

а) Вероятность получить три успеха в восьми испытаниях равна
$P_1 = C_8^3 p^3 (1-p)^5 = 0.1468$
б) Вероятность получить менее четырёх успехов в восьми испытаниях равна
$P_2 = C_8^0 p^0 (1-p)^8 + C_8^1 p^1 (1-p)^7 + C_8^2 p^2 (1-p)^6 + C_8^3 p^3 (1-p)^5 \approx 0.9437$

Ответ: а) 0.1468, б) 0.9437

стр.47, №52
Лицензия отбирается у любого торгового предприятия, как только торговая инспекция в третий раз обнаружит серьезное нарушение правил торговли. Найти вероятность того, что лицензия будет отобрана после пятой проверки. Известно, что вероятность обнаружения нарушения при одной проверке равна 0.2 и не зависит от результатов предыдущих проверок.

Решение
Испытанием назовем проверку торговой инспекцией торгового предприятия, тогда успех - это 'обнаружено серьезное нарушение правил торговли', а неудача - 'серьезное нарушение правил торговли не обнаружено'. Вероятность успеха $p = 0.2$

Если необходимо провести ровно пять испытаний, то в четырех первых испытаниях должны быть два успеха, а пятое испытание должно быть успешным.
Тогда по схеме Бернулли $P = C_4^2 p^2 (1-p)^2 * p = 6p^3(1-p)^2 = 0.03072$

Ответ: 0.03072

стр.47, №53
Вероятность рождения мальчика равна 0.515. Найти вероятность того, что в семье, где четверо детей, не менее двух девочек.

Решение
Испытанием назовем рождение ребенка, тогда успех - это 'родился мальчик', а неудача - 'родилась девочка'. Вероятность успеха $p = 0.515$

Необходимо найти вероятность того, что в четырех испытаниях не менее двух неудач, то есть не более двух успехов: $P = C_4^0 p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p^1 (1-p)^3 + C_4^2 p^2 (1-p)^2 \approx 0.6647$

Ответ: 0.6647

стр.47, №54
В микрорайоне девять машин технической службы. Для бесперебойной работы необходимо, чтобы не меньше восьми машин были в исправном состоянии. Считая вероятность исправного состояния для всех машин одинаковой и равной 0.9, найти вероятность бесперебойной работы технической службы в микрорайоне.

Решение
Испытанием назовем проверку состояния машины технической службы, тогда успех - это 'состояние машины исправно', а неудача - 'состояние машины не исправно'. Вероятность успеха $p = 0.9$

Необходимо найти вероятность того, что в девяти испытаниях не менее восьми успехов:
$P = C_9^8 p^8 (1-p)^1 + C_9^9 p^9 (1-p)^0 = 9p^8(1-p) + p^9 \approx 0.7748$

Ответ: 0.7748

стр.48, №55
В среднем каждый десятый договор страховой компании завершается выплатой по страховому случаю. Компания заключила пять договоров. Найти вероятность того, что страховой случай наступит: а) один раз; б) хотя бы один раз.

Решение
Испытанием назовем заключение договора страховой компании, тогда успех - это 'страховой случай наступит', а неудача - 'страховой случай не наступит'. Вероятность успеха $p = 0.1$

а) Необходимо найти вероятность того, что в пяти испытаниях ровно один успех:
$P = C_5^1 p^1 (1-p)^4 = 0.32805$

б) Необходимо найти вероятность того, что в пяти испытаниях хотя бы один успех:
$P(\{\text{хотя бы 1 успех}\}) = 1 - P(\{\text{ни одного успеха}\}) = 1 - (1-p)^5 = 0.40951$

Ответ: а) 0.32805, б) 0.40951