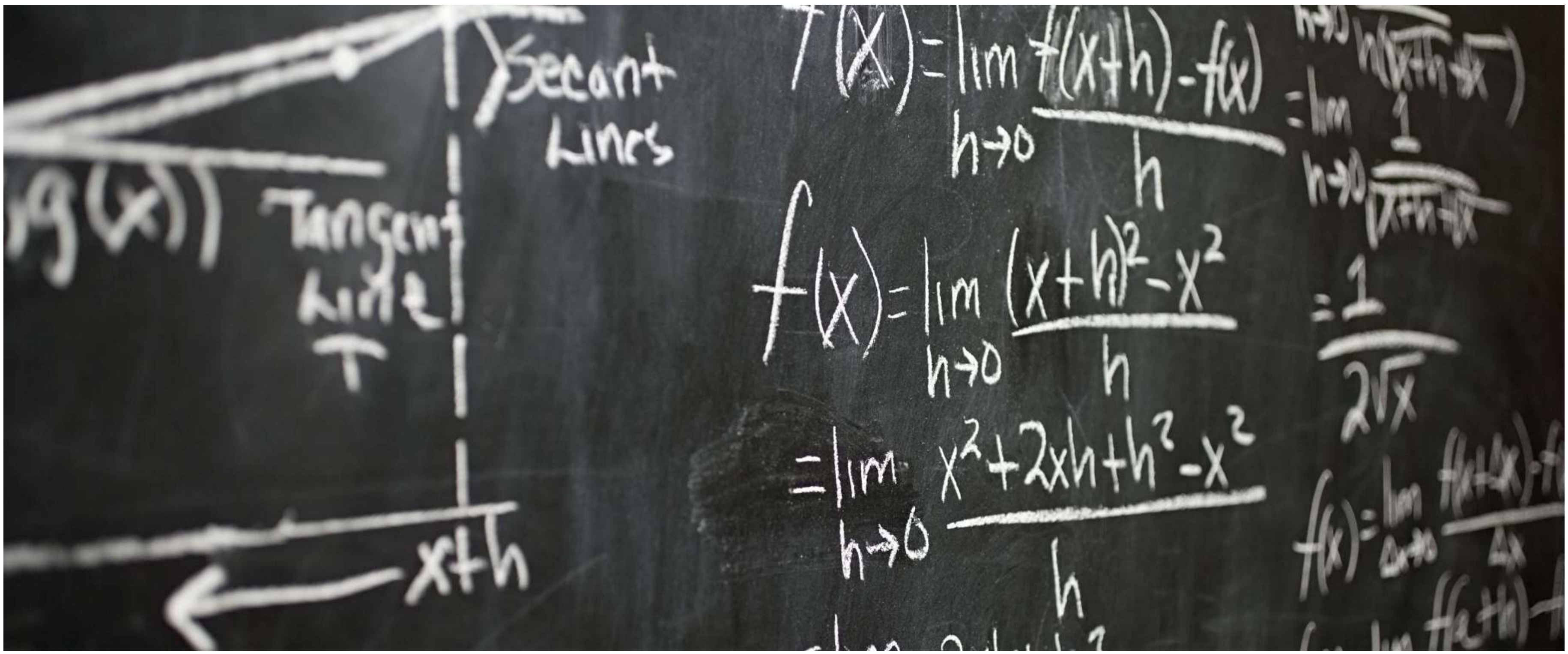
Algebra de Boole

Contenido

- Breve historia del Algebra de Boole
- Postulados y Teoremas
- Circuitos lógicos básicos
- Método de minimización gráfica
- Ejercicios

BREVE HISTORIA DEL ALGEBRA DE BOOLE



¿Qué es el Álgebra de Boole?

Es un sistema matemático desarrollado por **George Boole** en el siglo XIX.

G. Boole y su obra "*An Investigation of the Laws of Thought*" (1854) introdujo este sistema de lógica matemática.

Se basa en la **teoría de conjuntos.**

¿Para qué sirve el algebra de Boole?

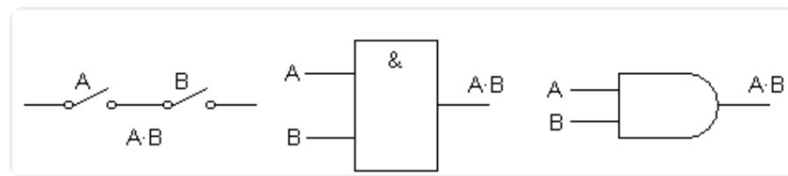
Boole creó un marco formal para representar proposiciones lógicas mediante símbolos y operaciones como “AND,” “OR,” y “NOT.” El álgebra de Boole es fundamental para simplificar y resolver problemas en sistemas digitales. Su aplicación abarca desde la representación de circuitos lógicos hasta la programación de computadoras.

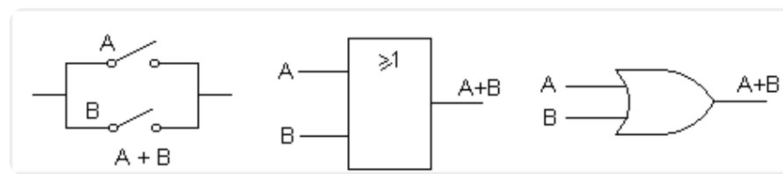
Conectiva	Nombre Lógico	Símbolo
No	Negación	$\neg$, $\sim$, ‘
Y	Conjunción	$\wedge$
O	Disyunción Inclusiva	$\vee$
O ... O	Disyunción Exclusiva	$\veebar$
Si ... entonces	Implicación o Condicional	$\rightarrow$
Si y solo si	Doble Implicación o Bicondicional	$\leftrightarrow$

CLAUDE SHANNON

Contribución y relación con Boole

- Claude Shannon, ingeniero electrónico y matemático estadounidense, desempeñó un papel crucial en la aplicación práctica del álgebra de Boole.
- Setenta años después de la muerte de George Boole, en 1938, Shannon encontró en su trabajo una base para aplicaciones en el mundo real.
- Shannon demostró cómo el álgebra booleana optimizaba el *diseño de sistemas electromecánicos* de relés, utilizados en conmutadores telefónicos.
- En esencia, Shannon aplicó las ideas de Boole para construir los circuitos de los ordenadores modernos.
- **George Boole** sentó las bases teóricas con su álgebra, y **Claude Shannon** llevó esas ideas a la práctica, allanando el camino para la revolución digital actual.



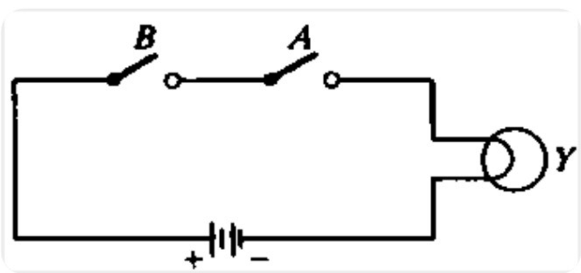


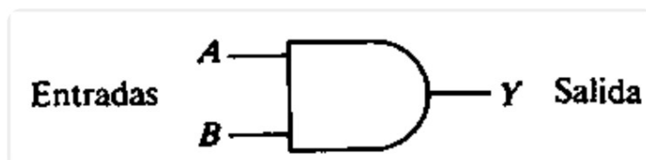
CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Variables Binarias y Operadores básicos usados

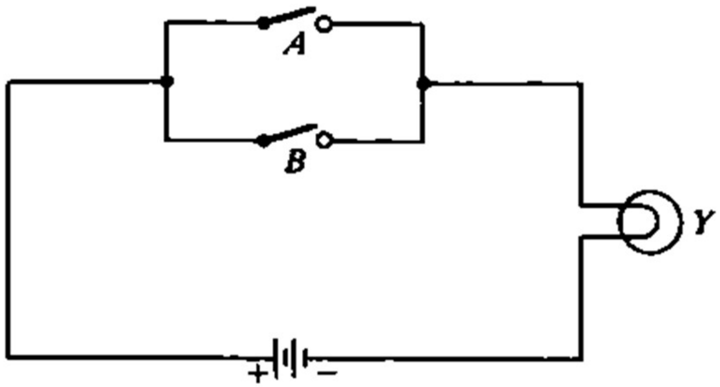
o Se definen las variables usadas para los procesos y diseños utilizadas en el álgebra de Boole (0 y 1) .

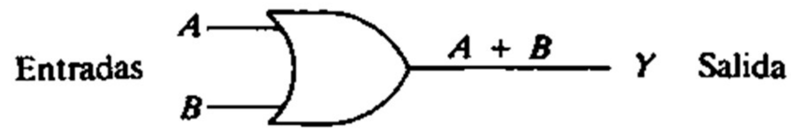
o Incluye sus símbolos, expresiones matemáticas y tablas de verdad.

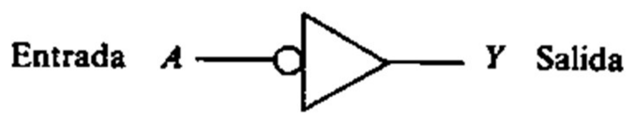


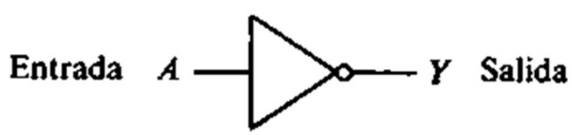


Operadores Lógicos Básicos

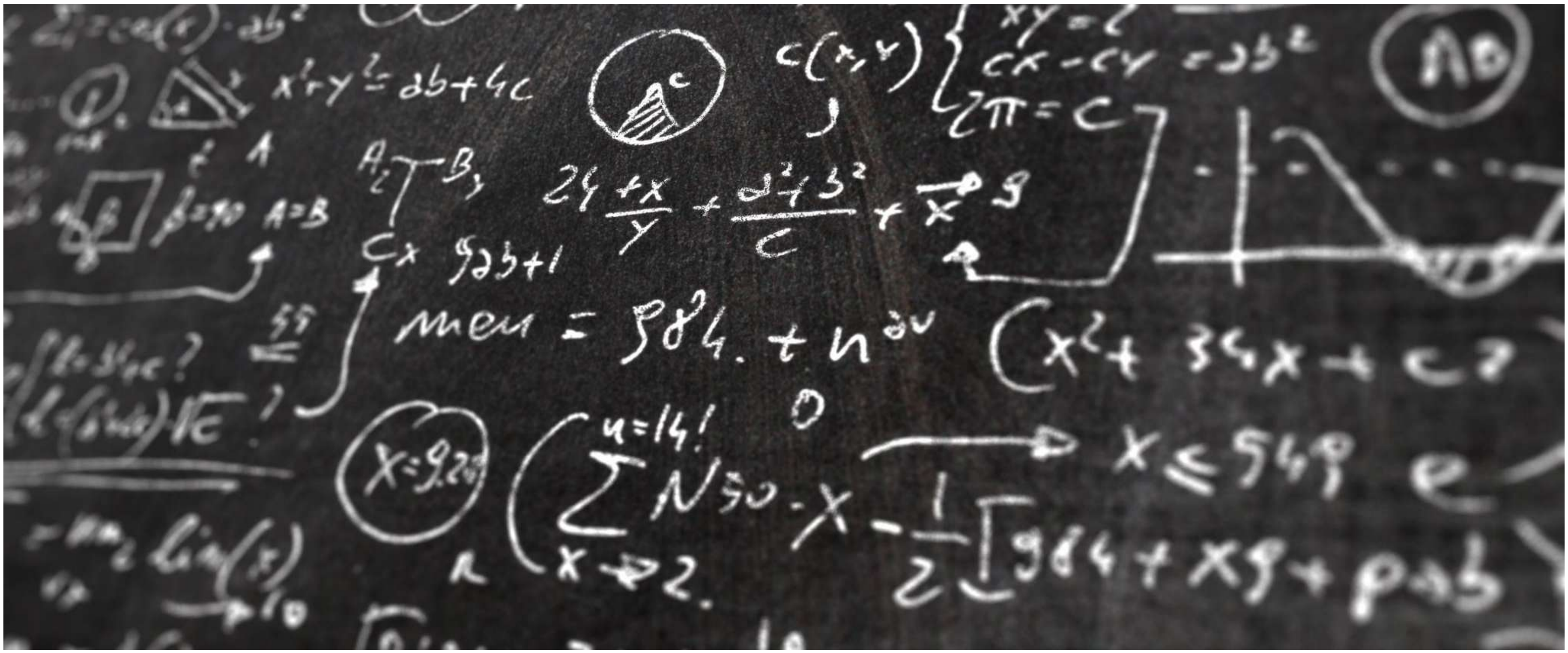








POSTULADOS DEL ALGEBRA DE BOOLE



P1 . Ley de identidad.

Existen elementos identidad (0 para la operación "+" y 1 para la operación " • ") de forma que para cualquier elemento x, se cumple :

$$x+0=x \qquad x \bullet 1= x$$

P2. Ley conmutativa.

Para cualesquiera dos elementos **x** e **y**, se cumple :

$$x+y = y+x \qquad x \bullet y = y \bullet x$$

P3 . Ley distributiva.

Dados tres elementos x, y, z se cumple:

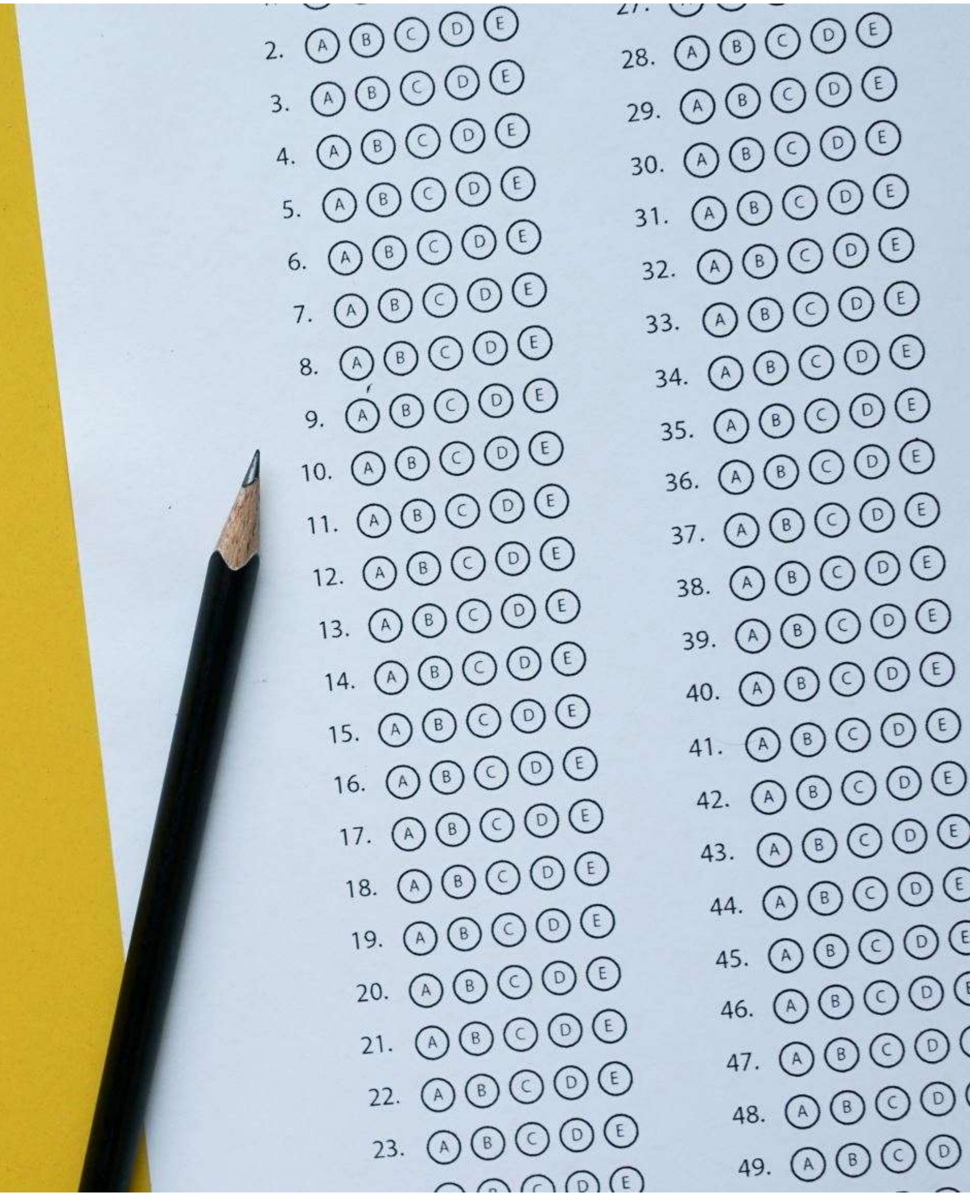
$$x+(y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z) \qquad\qquad x \bullet (y+z)=x \bullet y + x \bullet z$$

P4. Ley del complemento.

Para todo elemento **x** existe un complemento **x** tal que:

$$x+x' = 1 \qquad\qquad x \bullet x' = 0$$

COMPROBAR LOS POSTULADOS POR MEDIO DE COMPUERTAS



A partir de los 4 postulados es posible probar una serie de propiedades.

T1. Ley de idempotencia: $x + x = x \qquad x \cdot x = x$

T2. Ley de unicidad del complemento: el elemento $\overline{x}$ del postulado cuarto es único.

T3. Ley de los elementos dominantes: $x + 1 = 1 \qquad x \cdot 0 = 0$

T4. Ley involutiva: $\overline{(\overline{x})} = x$

T5. Ley de absorción: $x + x \cdot y = x \qquad x \cdot (x + y) = x$

T6. Ley del consenso: $x + \overline{x} \cdot y = x + y \qquad x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$

T7. Ley asociativa: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$

T8. Ley de De Morgan: $\overline{x\, y} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

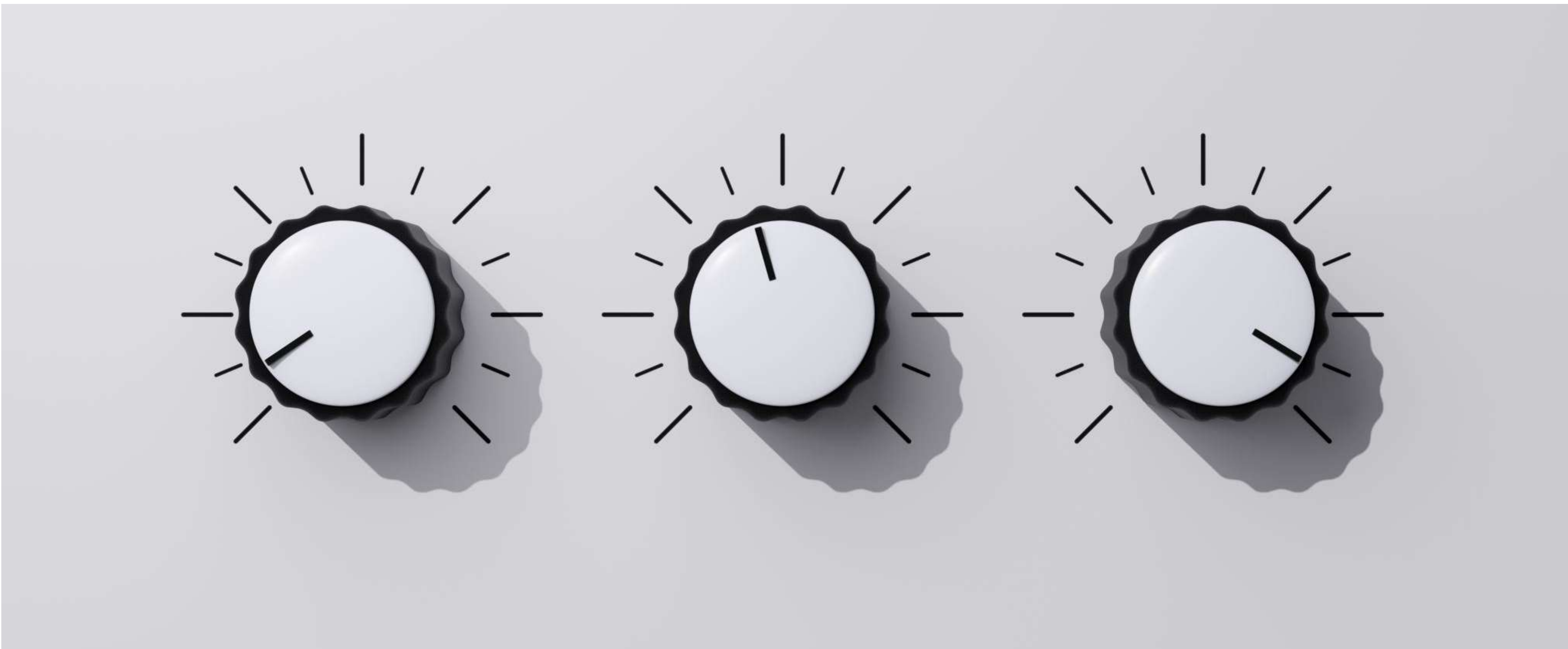
T9. Ley de De Morgan generalizada: $\overline{x\, y\, z \ldots} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + \ldots$

$\overline{x + y + z \ldots} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \ldots$

T10. Ley del consenso generalizado: $x \cdot y + \overline{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$

$(x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$

Funciones de conmutación



Una función de tres variables f(x, y, z) se puede definir de la siguiente forma:

$$f(0,0,0) = 0,\ \ f(0,0,1) = 1,\ \ f(0,1,0) = 0,\ \ f(0,1,1) = 1,\ \ f(1,0,0) = 0,$$
$$f(1,0,1) = 0,\ \ f(1,1,0) = 1,\ \ f\,(1,1,1) = 1$$

NOTA. No todas las combinaciones de las variables deben de especificarse, decimos entonces que la función es <u>incompleta</u> o que está <u>incompletamente especificada</u>. Cuando esto sucede, por ejemplo, en la combinación (x0,y0,z0) lo simbolizamos de la siguiente forma :

f(x0,y0,z0) = d *ó* ***f(x0,Y0,z0) = -****, donde los símbolos "-" y "d" (don't care) son llamadas indeterminados .*

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

- Tablas de verdad.
- Mapa de Karnaugh.
- Expresiones o fórmulas.

TABLA DE VERDAD

x y z	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

M. DE KARNAUGHT

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	0	1	1	1

f

Formas canónicas

EXPRESIONES O FÓRMULAS

minitérminos

$$f(a, b, c, d) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d + \bar{a}\,b\,\bar{c}\,d + \bar{a}\,b\,c\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,c\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,c\,d + a\,b\,c\,\bar{d} + a\,b\,c\,d =$$
$$= m_1 + m_5 + m_6 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15} = \Sigma\,(1, 5, 6, 10, 11, 14, 15).$$

maxitérminos

$$f(a, b, c, d) = (a + b + c + d)\,(a + b + \bar{c} + d)\,(a + b + \bar{c} + \bar{d})\,(a + \bar{b} + c + d)$$
$$(a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})\,(\bar{a} + b + c + d)\,(\bar{a} + b + c + \bar{d})\,(\bar{a} + \bar{b} + c + d)\,(\bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d}) =$$
$$= M_0\,M_2\,M_3\,M_4\,M_7\,M_8\,M_9\,M_{12}\,M_{13} = \Pi\,(0, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13).$$