

# Simulador Dinámico de un Exoesqueleto de 6GdL

Reporte de Medio Término

García-Álvarez Gregorio E. , Luna-Macías Antonio J. , Tevera-Ruiz Alejandro

*Departamento: Robótica y Manufactura Avanzada*

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV)*

**Resumen**—El presente documento describe el desarrollo cinemático y dinámico que simula un exoesqueleto con 6 grados de libertad (GdL). El diseño está enfocado para utilizarse en el dedo índice, sin embargo debido a que este trabajo aún no incorpora otras cadenas cinemáticas, como el diseño original presentado en el trabajo: "HEXOTRAC"[1], esto implica que el propio, se pueda utilizar adecuadamente en cualquier dedo a excepción del pulgar. Una de las características que tendrá el exoesqueleto presentado, será que el dedal distal, tendrá capacidades hápticas y estará actuado en todos sus grados de libertad, sin embargo por el momento, no es el alcance concerniente a este documento.

**Palabras Clave**—Simulador, Exoesqueleto, GRyMA

## I. INTRODUCCIÓN

## II. DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA

### II-A. Cinemática directa

#### II-A1. Transformaciones homogéneas

De manera general, se explica una matriz de transformación homogénea como una matriz que permite expresar un punto especificado en coordenadas de un marco referencial con respecto a las coordenadas de otro marco referencial, esto a partir de la aplicación de una rotación pura, una traslación pura, o una combinación de ambas sobre el marco referencial inicial.

De esta forma, se explica en [Multirigid Body] que para cadenas cinemáticas abiertas, donde el movimiento se encuentra restringido a una sola dirección, la transformación homogénea desde el referencial padre hacia cualquier referencial local se define únicamente por las coordenadas generalizadas escalares correspondientes, definido de la siguiente manera.

$$A_i(q_i) \triangleq A_{pi}^i(q_i) = \begin{bmatrix} R_{pi}^i(q_i) & d_{pi}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

Donde  $i$  representa el marco referencial del cuerpo correspondiente, y  $pi$  el marco referencial padre del referencial  $i$ .

A partir de esta definición, se afirma que la transformación homogénea representa el movimiento rígido de un marco referencial dado con respecto a otro, y que además presenta la propiedad de la propagación del Movimiento Rígido, que de manera resumida permite realizar una multiplicación entre matrices de transformación homogénea de marcos referenciales

consecutivos, de tal manera que la matriz resultante representa la transformación entre el primer y el último marco referencial, expresándose de la siguiente manera.

$$A_0^i(q) = A_0^{pi}(q_1, \dots, q_j) A_i(q_i)$$

#### II-A2. Asignación de referenciales

Con respecto al tema de transformaciones homogéneas, se observa que un aspecto clave que se debe tener delimitado en el sistema es la localización y orientación de los diferentes referenciales correspondientes a cada uno de los cuerpos rígidos que lo conforman. En este caso, se busca tener un marco referencial asignando a cada uno de los eslabones del exoesqueleto, con lo cual es necesario pasar por un proceso de ubicación de referenciales en los diferentes puntos de interés en el robot a analizar, a este proceso se le conoce como asignación de referenciales.

Como se explica en [Multirigid Body] Existen diferentes metodologías para la asignación de referenciales en sistemas robóticos con cadenas cinemáticas abiertas, a continuación se describirá de manera resumida el fundamento de las convenciones de Denavit-Hartenberg (DH), que también aplican para su versión modificada (DHm), al igual que se explicará la metodología propuesta por el Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada del CINVESTAV (GRyMA), siendo esta última la metodología utilizada para la asignación de referenciales en el proyecto.

Por un lado, se tiene que las convenciones  $DH$  y  $DHm$ , están conformadas de algoritmos que delimitan la forma de establecer marcos de referencia en cadenas cinemáticas donde los marcos consecutivos dependen únicamente de 4 parámetros, en vez de 6 que sería el caso de considerar todas las posibles traslaciones y rotaciones en los tres ejes  $[x,y,z]$  del sistema coordinado. Para lograr dicha reducción de parámetros, las metodologías hacen uso de 2 restricciones con respecto al movimiento de un marco referencial a otro.

- El eje  $x$  de un referencial dado debe ser perpendicular al eje  $z$  de los marcos referenciales consecutivos.
- El eje  $x$  de un referencial dado y el eje  $z$  del referencial consecutivo deben intersectar.

De igual manera, se asume que el movimiento de cualquier marco de referencia con respecto a su referencial padre, ya sea rotacional o prismático, debe realizarse siempre con respecto al eje  $z$  del referencial padre.

### II-A3. Cinemática GRyMA

Con respecto a la metodología GRyMA, se explica en [Multirigid Body] que el proceso de asignación de referenciales inicia con delimitar cada marco referencial  $\Sigma_i$  a lo largo de los ejes de las articulaciones que definen las coordenadas generalizadas  $q_i$ . Sin embargo, a diferencia de las metodologías *DH* y *DHm*, en este caso no existe la restricción de colocar el eje  $z$  en la misma dirección que la dirección de movimiento de las articulaciones, con lo cual la dirección de movimiento se define directamente con el vector director extendido.

$$\lambda_i = (\lambda_T^T, \lambda_R^T)^T \in \mathbb{R}^6$$

De esta manera, cada uno de los marcos referenciales se puede colocar en la misma orientación que el referencial base, con lo cual solamente resultan necesarios 3 parámetros de ajuste para determinar la distancia relativa entre el referencial padre y cada referencial nominal en una posición de las coordenadas generalizadas de  $q = 0$ .

$$d_{i0} = (d_{xi}, d_{yi}, d_{zi})$$

Con lo cual, considerando que se cumple la condición de tornillo explicada en [Multirigid Body],  $\lambda_{Ti} X \lambda_{Ri} = 0$ , debido a que cada coordenada generalizada induce ya sea un movimiento prismático o de revoluto, pero no una combinación de ambos, entonces la matriz de transformación homogénea entre dos referenciales se expresa de la siguiente manera.

$$A_i(q_i) = A_{i0} A_{iv}(q_i) = \begin{bmatrix} e^{[\lambda_{Ri} \times] q_i} & d_{i0} + \lambda_{Ti} q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando para el proceso de implementación, que el Operador Producto Cruz  $[\mathbf{a} \times]$  representa el producto cruz vectorial como una expresión de una matriz simétrica sesgada de la siguiente forma.

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Así, si todos los posibles movimientos se encuentran alineados con alguno de los ejes principales de cada marco referencial, el vector director cinemático  $\lambda_i$  puede ser codificado con un parámetro escalar único  $\Theta$ , incluyendo el caso constante, es decir el caso en el que no existe un movimiento variable en el tiempo.

$\Theta_i$	0	1	2	3	4	5	6
$\lambda_{Ti}$	0	1	0	0	0	0	0
$\lambda_{Ti}$	0	0	1	0	0	0	0
$\lambda_{Ti}$	0	0	0	1	0	0	0
$\lambda_{Ri}$	0	0	0	0	1	0	0
$\lambda_{Ri}$	0	0	0	0	0	1	0
$\lambda_{Ri}$	0	0	0	0	0	0	1
$R_i$	$I_3$	$I_3$	$I_3$	$I_3$	$R_x(q_i)$	$R_y(q_i)$	$R_z(q_i)$

Con lo cual, la metodología GRyMA haría uso de 4 parámetros básicos constantes para cada relación padre/hijo entre referenciales: y  $\Theta_i$ .

De otra manera, cada vector director de traslación y rotación puede ser parametrizado con un par de elevación-azimut ( $\alpha_i, \beta_i$ ) de la siguiente manera, aumentando el número de parámetros requeridos en 2.

$\Theta_i$	7	8
$\lambda_{Ti}$	$\cos \alpha_i \sin \beta_i$	0
$\lambda_{Ti}$	$\sin \alpha_i \sin \beta_i$	0
$\lambda_{Ti}$	$\cos \beta_i$	0
$\lambda_{Ri}$	0	$\cos \alpha_i \sin \beta_i$
$\lambda_{Ri}$	0	$\sin \alpha_i \sin \beta_i$
$\lambda_{Ri}$	0	$\cos \beta_i$
$R_i$	$I_3$	$R_{\lambda_{Ri}}(q_i)$

### II-A4. Jacobiano geométrico

### II-A5. Jacobiano geométrico de velocidad lineal

### II-A6. Jacobiano geométrico de velocidad angular

La cinemática directa consiste en definir la posición y orientación del efector final, en función de las coordenadas generalizadas de cada articulación, con respecto a un marco de referencia [3], en este caso particular, es un marco de referencia no inercial.

Para lograrlo, se requieren cadenas cinemáticas desde el referencial base hasta el referencial local; para cada uno de estos ejes coordenados, se requiere el cálculo de matrices de transformación homogéneas mismas que definen el movimiento de rotación y traslación en función de donde se ubique el marco referencial de cada articulación.

Debido a que cada eslabón tiene asignada una coordenada generalizada y por lo tanto, tiene su propia matriz que describe su movimiento, se necesita multiplicar cada una de las matrices de transformación homogéneas.

La matriz de transformación homogénea tiene la siguiente forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que la matriz  $R_i^j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  representa la orientación del referencial  $j$  respecto al referencial  $i$ , y el vector  $d_i^j$  expresa la traslación del referencial  $j$  respecto al referencial  $i$ .

Existen diferentes métodos para asignar los referenciales de coordenadas generalizadas, y así obtener la matriz de transformación homogénea; uno de los más utilizados en robótica industrial es el denominado: "Denavit Hartenberg", pero no es el único. En el curso se presentan 2 más (Denavit Hartenberg modificado "mDHz GRyMA), lo cierto es que los 3 buscan reducir la cantidad de parámetros que se requieren para definir las transformaciones homogéneas entre marcos referenciales. Los movimientos rígidos generales se definen mediante una traslación  $d \in \mathbb{R}^3$  y una rotación  $R \in SO(3)$ . Por tanto, se componen de 6 GDL para cada par de marcos referenciales consecutivos. La asignación del marco para cada elemento

rígido da como resultado todos los  $A_i(q_i) \in SE(3)$  en el sistema.

Dos de los ejemplos más comunes son las convenciones clásicas de Denavit-Hartenberg (DH) y las modificadas de Denavit-Hartenberg (mDH). Ambos reducen los parámetros requeridos de 6 a 4, lo que da como resultado la torsión del enlace ( $\alpha$ ), la longitud del enlace ( $a$ ), el ángulo de unión ( $\theta$ ) y el desplazamiento del enlace ( $d$ ). A continuación se presentarán las reglas que se deben llevar a cabo para la asignación de referenciales, correspondiente.

#### II-A7. Denavit Hartenberg

Existen dos restricciones al momento de definir del marco de referencia:

1. El eje  $x$  de un referencial dado debe ser perpendicular al eje  $z$  de los referenciales vecinos consecutivos.
2. El eje  $x$  de un referencial dado y el eje  $z$  del referencial vecino consecutivo deben intersectar.

Debido a que la convención DH define una secuencia intrínseca explícita:  $\theta_i \rightarrow d_i \rightarrow a_i \rightarrow \alpha_i$ , las transformaciones homogéneas  $A_i(q_i)$ , que representan el movimiento rígido correspondiente, se obtiene la siguiente forma particular:

$$A_i(q_i) \triangleq A_R(R_{z,\theta})A_T(d_i)A_T(a_i)A_R(R_{x,\alpha_i}) \\ = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i(\cdot) & d_{i/i-1}^{(i-1)}(\cdot) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$R_{i-1}^i(\cdot) = R_{z,\theta_i}R_{x,\alpha_i} \\ = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$d_{i/i-1}^{(i-1)}(\cdot) = d_i k + a_i R_{z,\theta_i} R_{x,\alpha_i} i = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Además se sabe que solo uno de los parámetros DH es variable en el tiempo, por lo tanto existen variaciones en el ángulo de articulación o en el desplazamiento del enlace

$$\theta_i(t) = \theta_{i_0} + q_i(t) \quad \text{Articulación Revoluta}(R)$$

$$d_i(t) = d_{i_0} + q_i(t) \quad \text{Articulación prismática}(P)$$

La cinemática directa de un robot manipulador puede ser determinada por la multiplicación de todas las matrices  $A_i(q_i)$  obtenidas por la tabla de los parámetros de DH.

Sabiendo que el exoesqueleto tiene asignados 6 coordenadas generalizadas  $q_i$  se tendría que aplicar la multiplicación de la siguiente manera:

$$A = A_1(q_1) A_2(q_2) A_3(q_3) A_4(q_4) A_5(q_5) A_6(q_6) A_7(q_7)$$

Sin embargo, esto no es del todo cierto, debido a que para lograr cumplir con las 2 condiciones que estipula la metodología, aunado a la forma que tiene el diseño de

los eslabones 1 y 3, implica que se generen referenciales virtuales.

Después de comparar los resultados de la matriz homogénea obtenida por las 3 metodologías y comparando los resultados de las mismas, se optó por no utilizar la metodología tradicional y llevar a cabo los cálculos con el siguiente método:

#### II-A8. GRyMA

La metodología GRyMA (Nombre dado en honor al Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada) es otra alternativa a la asignación de los marcos referenciales en una cadena cinemática. Busca un cambio de paradigma y no exige las restricciones de DH mencionadas en la metodología anterior. El origen de cada marco de referencia  $\Sigma_i$  se coloca a lo largo del eje de articulación que definirá la coordenada generalizada  $q_i$ . No obstante, el eje  $z$  no está restringido a estar a lo largo de esta coordenada y la dirección del movimiento se define directamente con el vector director extendido  $\lambda_i = (\lambda_{Ti}^T, \lambda_{Ri}^T)^T \in \mathbb{R}^6$ . Todas las coordenada generalizada de referencia, son colocadas en la misma orientación de ÇASA"logrando una configuración nula y 3 parámetros de compensación son definidos para representar la distancia relativa desde el origen del marco padre para cada marco nominal  $d_{io} = (d_{xi}, d_{yi}, d_{zi})$  en la posición de ÇASA"(q=0).

La transformación homogénea correspondiente es  $A_i$  y tiene la siguiente forma:

$$A_i(q_i) = A_{io} A_{iv}(q_i) \quad \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{pi},$$

$A_{io}$  representa la transformación homogénea constante y  $A_{iv}(q_i)$  la transformación homogénea variante en el tiempo.

$$A_{io} = \begin{bmatrix} I_3 & d_{io} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

donde

$$d_{io} = \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Por otra parte:

$$A_{vi}(q_i(t)) \triangleq \begin{bmatrix} e^{[\lambda_{Ri}X]q_i} & \lambda_{Ti}q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{cases} A_R(R\lambda_{Ri},q_i) & \text{si } q_i \text{ es rotacional } (\lambda_T = 0) \\ A_T(\lambda_{Ti}q_i) & \text{si } q_i \text{ es prismática } (\lambda_R = 0) \end{cases}$$

Se caracteriza con la coordenada generalizada escalar  $q_i \in \mathbb{R}$  y el vector director extendido unitario constante (vector director cinemático)

$$\lambda_i^{(1)} := \begin{pmatrix} A_{Ti} \\ A_{Ri} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow \lambda_{Ti}x\lambda_{Ri} = 0$$

Entonces:

$$A_i(q_i) = A_{io} A_{iv}(q_i) = \begin{bmatrix} e^{[\lambda_{Ri}X]q_i} & d_{io} + \lambda_{Ti}q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{[\lambda_{R_i} X] q_i}$  es la matriz de rotación correspondiente la cual es un mapeo exponencial (Formula de Rodrigues)

$$R_{\lambda_i \theta} = I + [\lambda x] s \theta + [\lambda x]^2 v \theta = e^{[\lambda x] \theta}$$

donde

$$\epsilon_{q_i} = \text{verseno} := 1 - \cos(q_i)$$

Si todos los movimientos posibles son alineados con uno de los ejes principales de cada marco, el vector director cinemático  $\Theta_i$  se puede codificar con un parámetro escalar único  $i$ , como se muestra a continuación:

$\Theta_i$	0	1	2	3	4	5	6
$\lambda_{T_i}$	0	1	0	0	0	0	0
$\lambda_{T_i}$	0	0	1	0	0	0	0
$\lambda_{T_i}$	0	0	0	1	0	0	0
$\lambda_{R_i}$	0	0	0	0	1	0	0
$\lambda_{R_i}$	0	0	0	0	0	1	0
$\lambda_{R_i}$	0	0	0	0	0	0	1
$R_i$	$I_3$	$I_3$	$I_3$	$I_3$	$R_x(q_i)$	$R_y(q_i)$	$R_z(q_i)$

En caso contrario, cada  $\lambda_{T_i}$ ,  $\lambda_{R_i}$  puede parametrizarse con un par elevación-azimut ( $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ):

$\Theta_i$	7	8
$\lambda_{T_i}$	$\cos \alpha_i \sin \beta_i$	0
$\lambda_{T_i}$	$\sin \alpha_i \sin \beta_i$	0
$\lambda_{T_i}$	$\cos \beta_i$	0
$\lambda_{R_i}$	0	$\cos \alpha_i \sin \beta_i$
$\lambda_{R_i}$	0	$\sin \alpha_i \sin \beta_i$
$\lambda_{R_i}$	0	$\cos \beta_i$
$R_i$	$I_3$	$R_{\lambda_{R_i}}(q_i)$

Por lo cual, la metodología GRyMA usa únicamente 4 parámetros constantes independientes básicos para cada relación de los marcos padre/hijo:  $d_{x_i}$ ,  $d_{y_i}$ ,  $d_{z_i}$  y  $\theta$

Para la asignación de marcos se respeta el siguiente algoritmo:

1. Identificar los ejes de movimiento en cada articulación.
2. Asignar el marco de referencia inercial  $\Sigma_0$  de modo que tanto la posición como la orientación sean estratégicamente definidas con respecto a los ejes de articulación del sistema.
3. Asignar cada marco de referencia  $\Sigma_i$  a la articulación correspondiente con la misma orientación del marco inercial y con el origen a lo largo del eje de articulación.
4. Determinar el vector de distancia  $d_i \in \mathbb{R}^3$  desde el marco padre de cada unión, en la posición "home" ( $q = 0$ ).
5. Codificar el parámetro de dirección  $\Theta_i$  con respecto a la dirección y el tipo de movimiento de cada articulación.

Finalmente, aplicando lo anterior y asignando los marcos referenciales como se aprecia en la Figura 3, se obtiene la siguiente tabla:

## II-B. Jacobiano

Existen dos tipos de jacobiano: El jacobiano analítico y el jacobiano geométrico. Este último depende de la configuración

$\Sigma_i$	$\Sigma_{p_i}$	$d_{x_i}$	$d_{y_i}$	$d_{z_i}$	$\Theta_i$
$\Sigma_1$	$\Sigma_0$	0	0	0	5
$\Sigma_2$	$\Sigma_1$	L1	1	L2	5
$\Sigma_3$	$\Sigma_2$	-L7	0	L3	8
$\Sigma_4$	$\Sigma_3$	-L6	0	L4	6
$\Sigma_5$	$\Sigma_4$	0	0	L5	4
$\Sigma_6$	$\Sigma_5$	0	0	0	5
$\Sigma_6$	$\Sigma_6$	-L8	0	0	0

del manipulador y representa la relación entre las velocidades de la articulación, la velocidad lineal y angular de efector final. En contraparte, el jacobiano analítico es cuando el efector final se expresa con referencia a una representación mínima (ángulos de Euler) en el espacio operacional, y se calcula derivando la posición del efector final y su orientación con respecto a las variables de la articulación [6]. La matriz jacobiana de un manipulador robótico es una matriz de  $6 \times N$ , donde la velocidad articular  $\dot{q}$  es un vector  $N$  y la velocidad espacial  $v$  es un vector  $-6$ . La velocidad espacial y la velocidad articular están relacionadas a través de la matriz jacobiana mediante la siguiente expresión:

$$v = J_i(q) \dot{q}$$

En el caso de que el manipulador tenga 6 GDL, no hay ningún problema a la hora de analizar la matriz jacobiana, ya que será una matriz de  $6 \times 6$  (matriz cuadrada), por lo que los cálculos de determinantes y rangos se pueden realizar sin ningún problema. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, el diseño propuesto se clasifica como un manipulador de menos de 6 GDL. Debido a esto, la matriz jacobiana resultante será una matriz de  $6 \times 5$ . De esta manera la matriz correspondiente a jacobiana se expresa como:

$$J = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} & J_{1,3} & J_{1,4} & J_{1,5} \\ J_{2,1} & J_{2,2} & J_{2,3} & J_{2,4} & J_{2,5} \\ J_{3,1} & J_{3,2} & J_{3,3} & J_{3,4} & J_{3,5} \\ J_{4,1} & J_{4,2} & J_{4,3} & J_{4,4} & J_{4,5} \\ J_{5,1} & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,5} \\ J_{6,1} & J_{6,2} & J_{6,3} & J_{6,4} & J_{6,5} \end{bmatrix}$$

Donde los valores representados en los primeros 3 renglones, corresponden a la velocidad lineal y los siguientes 3 a la velocidad angular. Para el caso de la velocidad lineal, se parte de la ecuación:

$$J_{v_i} q \triangleq \frac{\partial d_i}{\partial q}$$

Tomando en cuenta esto, la matriz del jacobiano de la velocidad lineal  $J_v$  para el robot manipulador propuesto resultará de:

$$J_v = J_{v_1}(q_1) J_{v_2}(q_2) J_{v_3}(q_3) J_{v_4}(q_4) J_{v_5}(q_5)$$

Para el caso de la velocidad angular, se parte de la ecuación:

$$J_{\omega_i} q \triangleq [r1_i] \times \frac{\partial r1_i}{\partial q} + [r2_i] \times \frac{\partial r2_i}{\partial q} + [r3_i] \times \frac{\partial r3_i}{\partial q}$$

Tomando en cuenta esto, la matriz del jacobiano de la velocidad angular  $J_\omega$  para el robot manipulador propuesto resultará de:

$$J_\omega = J_{\omega_1}(q_1) J_{\omega_2}(q_2) J_{\omega_3}(q_3) J_{\omega_4}(q_4) J_{\omega_5}(q_5)$$

## II-C. Dinámica

La dinámica es la parte de la mecánica que estudia la relación entre el movimiento y las causas que lo producen (fuerzas o torques) mediante el análisis de ecuaciones diferenciales de segundo orden (modelo dinámico). Para su obtención, pueden utilizarse diferentes metodologías a partir de la mecánica Newtoniana o bien de la mecánica Lagrangiana.

Especialmente, para sistemas multicuerpos rígidos, se prefiere el uso de la mecánica Lagrangiana dada su versatilidad y fácil escalado mediante el análisis energético para sistemas con  $n$  partículas. Además, reduce drásticamente el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento de un conjunto de partículas; ya que sólo necesitaremos  $n$  ecuaciones y no  $3n$  como es el caso de la mecánica Newtoniana. Para ello, el sistema debe poder ser descrito mediante un conjunto de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y sus derivadas totales respecto al tiempo  $\dot{\mathbf{q}}$  (ambas medibles); las cuales representan las direcciones del movimiento admisible del sistema.

### II-C1. Ecuación de D'Alembert-Lagrange

Considerando el principio de *trabajo virtual* orientado al equilibrio estático del principio de mínima acción, puede partirse a la construcción del *principio de D'Alembert*; siendo una extensión y enfocado al equilibrio dinámico del sistema. Permitiendo así, la expresión (1) que representa la *Ecuación de D'Alembert-Lagrange* de forma vectorial para  $\mathbf{q}$  linealmente independientes.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

donde

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

define la energía cinética total del sistema relacionada con la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$  y

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

representa las *fuerzas generalizadas* relacionadas a la suma de las fuerzas efectivas  $\mathbf{f}_{e_j}$  que experimenta cada cuerpo  $j$  respecto a la coordenada generalizada  $q_i$  como resultado de los siguientes efectos:

- Potenciales conservativos
- Disipación (para sistemas no conservativos)
- Restricciones (no necesariamente *holonómicas*)
- Fuerzas exógenas (normalmente definidas por el usuario)

### II-C2. Fuerzas Inerciales

Del mismo modo, para un conjunto de partículas hay una *fuerza generalizada de inercia*  $\tau_I$  que representa la compen-

sación virtual del movimiento definido como el valor negativo de (1).

$$-\tau_I \triangleq \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

Al resolver (4) en términos de (2), se obtiene:

$$-\tau_I = H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \{\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\}}{\partial \mathbf{q}} \quad (5)$$

Donde la suma del segundo y tercer término representan al vector de Coriolis

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \{\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\}}{\partial \mathbf{q}} \quad (6)$$

Por lo tanto, la expresión (1) puede reescribirse como:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (7)$$

### II-C3. Matriz de Inercia

Considerando una partícula  $i$  de masa constante  $m$ , su energía cinética es proporcional a su velocidad traslacional  $v_i$  y rotacional  $\omega_i$  en el centro de masa en coordenadas inerciales.

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^{(0)2} + \frac{1}{2} I_{c_i}^{(0)} \omega_i^{(0)2} \quad (8)$$

Para sistemas multipartículas,

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (9)$$

Por lo que si (8) es equivalente a (2), entonces la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$  debe contener la misma información que los términos de (8).

Para ello, es necesario el uso de (**Eq Jacobianos Geo**) para el mapeo de las velocidades lineales y angulares de los **centros de masa** de cada eslabón en función de las coordenadas generalizadas. Obteniendo:

$$H(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \{ m_i {}^0 J_{vc m_i}^T(\mathbf{q}) {}^0 J_{vc m_i}(\mathbf{q}) + {}^0 J_{\omega_{cm_i}}^T(\mathbf{q}) R_0^i(\mathbf{q}) I_c^{(i)} R_0^{iT}(\mathbf{q}) {}^0 J_{\omega_{cm_i}}(\mathbf{q}) \} \quad (10)$$

donde

$$I_c \triangleq - \int_B [\mathbf{r} \times]^2 dm = \begin{bmatrix} I_{xxc} & I_{xye} & I_{xzc} \\ I_{xye} & I_{yye} & I_{yze} \\ I_{xzc} & I_{yze} & I_{zzc} \end{bmatrix} \quad (11)$$

es el tensor de inercia en el centro de masa de un cuerpo  $B$ , siendo  $\mathbf{r}$  el vector de posición del centro de masa respecto a su referencial local no inercial.

De acuerdo a (11), la matriz es simétrica y está compuesta por los momentos de inercia (en su diagonal principal) y los productos de inercia (para los elementos fuera de ella).

Por otra parte, la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$  cuenta con ciertas propiedades:

- Es simétrica  $H(\mathbf{q}) = H(\mathbf{q})^T$
- Es definida positiva  $H(\mathbf{q}) = 0$  **revisaar**

## II-C4. Vector de Coriolis

$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  representa las fuerzas centrípetas y de Coriolis en función a las variables de estado del sistema  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

Es importante recalcar que  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y puede tener diferentes valores para el mismo robot, mientras que  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es único.

El vector de Coriolis puede ser expresado como:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i,j}^n c_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) \triangleq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial h_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right) \quad (13)$$

son los *Símbolos de Christoffel*. Donde  $h$  es el elemento en la matriz de inercia,  $k$  corresponde a la posición en el vector de Coriolis; mientras que  $i$  y  $j$  permiten obtener el producto de las velocidades generalizadas.

Aunque el enfoque es el vector de Coriolis, resulta importante considerar la propiedad *Skew-Symmetry*. De acuerdo a [Olguin'Multibody], se establece las siguientes relaciones con la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$ :

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\dot{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q} \quad (14)$$

$$\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T = 0 \quad (15)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{H}(\mathbf{q}) \quad (16)$$

## II-C5. Vector de disipación

Como se presentó en las propiedades de la expresión (3), las fuerzas generalizadas pueden descomponerse en (17).

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau}_U + \boldsymbol{\tau}_D + \boldsymbol{\tau}_C + \boldsymbol{\tau} \quad (17)$$

Donde  $\boldsymbol{\tau}_U$  corresponde al efecto de potenciales conservativos,  $\boldsymbol{\tau}_D$  representa la disipación de energía,  $\boldsymbol{\tau}_C$  las fuerzas de contacto y  $\boldsymbol{\tau}$  los torques aplicados en cada grado de libertad de acuerdo al usuario.

Si se consideran efectos de disipación y potencial conservativo en (7), puede obtenerse la siguiente expresión:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (18)$$

Donde  $D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es el vector de disipación y puede estar representado por una *función de Rayleigh* tal como se presenta

$$D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (19)$$

O bien, por una fricción viscosa lineal  $b_i$  proporcional a la velocidad generalizadas  $\dot{q}_i$  como:

$$D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

## II-C6. Energía Potencial y Vector de gravedad

Para definir adecuadamente el vector de gravedad, es necesario considerar la definición matemática de la energía potencial  $U$  para sistemas multipartículas. Siendo

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{d}_{cm_i}^T \mathbf{g}_0 \quad (21)$$

donde  $\mathbf{d}_{cm_i}$  corresponde al vector posición del centro de masa y  $\mathbf{g}_0$  al vector de aceleración de la gravedad, ambos en coordenadas inerciales.

Ya que la energía potencial gravitacional depende de las coordenadas generalizadas, el vector de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  puede expresarse como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = - \sum_{i=1}^n [m_i {}^0J_{vcm_i}^T(\mathbf{q})] \mathbf{g}_0 \quad (22)$$

Donde el signo negativo es la corrección tal que la energía potencial gravitacional aumenta en contra de la dirección de la gravedad.

## III. IMPLEMENTACIÓN

El diseño del dedo exoesqueleto con 6 GDL se muestra en la Figura 1 en su posición inicial de ÇASAz está constituido por una cadena cinemática de 7 eslabones, que están todos conectados entre sí por articulaciones revolutas. El software que se utilizó para generar el diseño en 3D, fue solidworks porque tiene varias herramientas que ayudaron en el desarrollo matemático, así como su versatilidad para enlazarse con matlab, software con el que se programaron los cálculos.

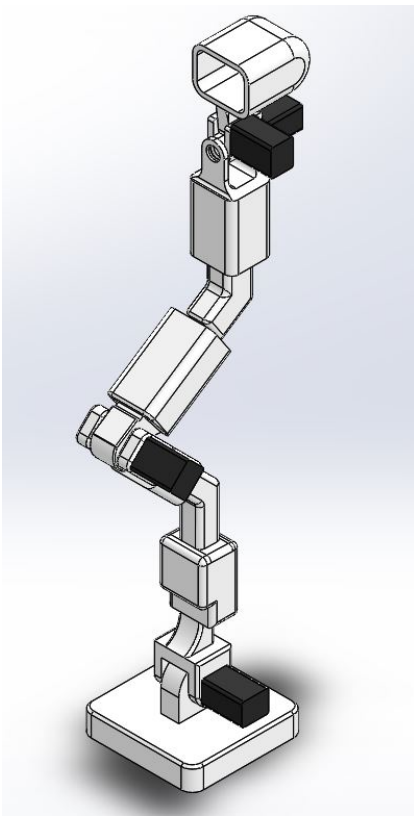


Figura 1. Diseño 3D

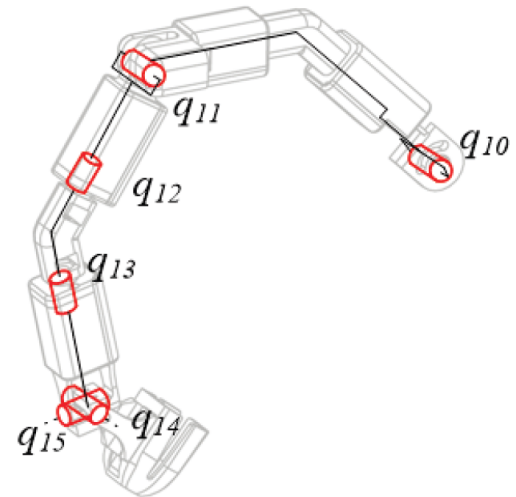


Figura 2. Esquema de las Articulaciones Original

Sin embargo por cuestiones de practicidad el equipo propuso una modificación y se agregó un eslabón más, de esta manera se evita que la articulación revoluta  $q_5$  y  $q_6$  estuvieran fusionadas, como se visualiza en la Figura 2. El dibujo posicionado con una perspectiva lateral derecha, que se visualiza en la Figura 3 proporciona una imagen con dimensiones parametrizadas, mismas que se plasman en la siguiente tabla:

Parámetros	[m]	[rad]
L1	0.03235525	
L2	0.10513390	
L3	0.02462267	
L4	0.02228474	
L5	0.04334075	
L6	0.00600000	
L7	0.01999013	
L8	0.02565247	
L9	0.01273194	
L10	0.03641522	
$\alpha$		59.26721315°

Así mismo, en la Figura 3 se aprecia la asignación de referenciales  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ ,  $q_5$  y  $q_6$ . Los marcos inerciales propuestos a cada GDL se colocaron utilizando la convención GRyMA, manteniendo la dirección positiva de la mano derecha.

También se asignaron materiales, proponiendo para los eslabones un polímero termoplástico de nombre .acrilonitrilo butadieno estireno" también conocido como filamento ABS, utilizado por impresoras 3D, pensando que en un futuro próximo podamos imprimir el modelo y así experimentar con el en un entorno real; en el caso del dedal, se seleccionó un polímero artificial que pertenece al grupo de las poliamidas, llamado comunmente "Nylon", pues creemos que para cuidar la comodidad del usuario, al ingresar su dedo, el material no debe ser tan rígido y el nylon permite un equilibrio entre la suavidad y al mismo tiempo que no sea deformable.

### III-A. Diseño del exoesqueleto

La disposición de las articulaciones que se muestran en la Figura 2, fueron las planteadas originalmente en el manual de robótica, proporcionado por el Dr. Ernesto Olguín.

Finalmente los motores propuestos son de micro Metal LP con reductora de 50:1, de corriente continua, con dimensiones de 24 x 10 x 12 mm y 10 gramos de peso

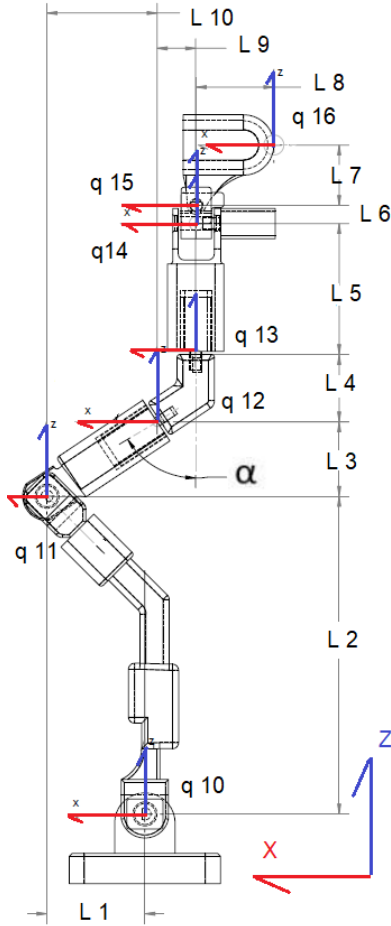


Figura 3. Esquema de las Articulaciones Utilizado

Conocer la cantidad de grados de libertad que tiene el exoesqueleto, nos servirá para identificar la versatilidad del movimiento que se podrá ejercer. Existen 3 clasificaciones [2] :

- Menos de 6 GDL. Tienen menos GDL que el movimiento que puede tener en el espacio. Es decir, si el robot está diseñado para moverse en un espacio tridimensional (con 3 parámetros de traslación y 3 de rotación) y tiene menos de 6 GDL, presentará limitaciones en la manera en que se mueve.
- Exactamente 6 GDL. Para aquellos manipuladores robóticos que tienen exactamente 6 GDL, pueden mover su efector final de manera independiente en cada uno de los seis parámetros que conforman el espacio de trabajo tridimensional.
- Más de 6 GDL. Si un robot tiene más actuadores que los parámetros del espacio en el que se puede mover, implica que está sobre actuado y por lo tanto redundante.

### III-B. Cinemática directa

Con respecto a la implementación en MATLAB de las ecuaciones correspondientes a la cinemática directa del sistema, primeramente se asignaron los referenciales a cada uno de los eslabones por medio de la metodología GRyMA, siendo posible visualizar la localización final de los referenciales en la figura [FIGURA CON REFERENCIALES]. De igual manera, se presenta en la tabla siguiente los parámetros utilizados para la asignación de los referenciales.

$q_i$	Parámetros de localización					$\Theta_i$	$\Sigma_i$	$\Sigma_{pi}$
	[mm]			[°]				
	$d_{xi}$	$d_{yi}$	$d_{zi}$	$\alpha$	$\beta$			
$q_1$	0	0	0	-	-	5	$\Sigma_1$	$\Sigma_0$
$q_2$	32.35	0	105.13	-	-	5	$\Sigma_2$	$\Sigma_1$
$q_3$	-36.41	0	24.62	0°	-59.26°	8	$\Sigma_3$	$\Sigma_2$
$q_4$	-12.73	0	22.28	-	-	6	$\Sigma_4$	$\Sigma_3$
$q_5$	0	0	43.34	-	-	4	$\Sigma_5$	$\Sigma_4$
$q_6$	0	0	6	-	-	5	$\Sigma_6$	$\Sigma_5$

De esta forma, en el anexo 1 se muestra el código elaborado para la función generadora de las matrices de transformación homogéneas entre marcos referenciales consecutivos, basado en la ecuación [ECUACIÓN!], con el cual se obtiene como salida un arreglo de 6 matrices expresable de la siguiente manera.

$$A = [A_0^1(q_1), A_1^2(q_2), A_2^3(q_3), A_3^4(q_4), A_4^5(q_5), A_5^6(q_6)]$$

Posteriormente, a partir del arreglo de matrices resultante, se genera la función de cinemática directa, la cual implementa la propiedad de propagación del movimiento rígido, pues permite obtener las matrices de transformación homogénea desde el marco referencial inercial hasta cualquiera de los referenciales no inerciales por medio de su multiplicación. El código de la función se puede visualizar en el anexo 2, y su salida es un arreglo igualmente de 6 matrices, al cual se le agregó el ajuste en coordenadas de posición correspondiente para el análisis de los centros de masa de cada uno de los eslabones, y que se puede expresar de la siguiente forma.

$$A_0^i = [A_0^1(q_1), A_0^2(q_1, q_2) \dots A_0^6(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)]$$

Finalmente, para la obtención de los Jacobianos geométricos de velocidad lineal y angular, se hace uso de las expresiones presentadas en las ecuaciones [ECUACION] y [ECUACION], de esta manera se desarrolló el código para la generación de los Jacobianos, presentado en el anexo 3, el cual tiene como salida un arreglo de 6 matrices Jacobianas, de las cuales cada una representa el Jacobiano correspondiente a cada uno de los centros de masa de los diferentes eslabones que conforman el exoesqueleto.

### III-C. Dinámica

A partir de la expresión (18) considerando el principio de D'Alamabert-Lagrange para sistemas con efectos de disipa-



ción y potencial gravitacional conservativo. Puede construirse el modelo dinámico del sistema

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\mathbf{q})^{-1} \{ \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \} \quad (23)$$

donde el vector de torques  $\boldsymbol{\tau}$  representa la entrada del sistema y  $\ddot{\mathbf{q}}$  la salida del mismo.

Para realizar la simulación, es necesario obtener de manera simbólica en función de  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  la estructura de cada término en (23).

### III-C1. Matriz de inercia simbólica

Para obtener la matriz de inercia en términos de las coordenadas generalizadas, se optó por construir la función (Ver Anexo X-A1) con base a la expresión (10). De este modo, al integrar dos veces la aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}$  podrá utilizarse para evaluar  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  mediante el uso de *Simulink*.

Donde los valores de los jacobianos geométricos para cada centro de masa está dado por (**eq jacobianos geométrico**), mientras que los tensores de inercia (con valores en el Anexo **ANEXO Tensores de Inercia**) de cada eslabón fueron obtenidos mediante el análisis de propiedades físicas de *SolidWorks*.

### III-C2. Vector de Coriolis simbólico

Una vez obtenida la matriz de inercia de manera simbólica, puede procederse con el cálculo del vector de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  mediante los símbolos de Christoffel expuestos en (13) tal como se presenta en la función de *MATLAB* del Anexo X-A2.

### III-C3. Vector de disipación

Mientras que el vector de disipación  $\mathbf{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está basado en la expresión (20) con coeficientes de fricción viscosa iguales para cada articulación; suponiendo así, que la fricción dado el rozamiento entre componentes mecánicos y el motor es la misma para cada articulación.

Cabe destacar que  $b$  es un parámetro que el usuario podrá modificar en un intervalo de 0 a 0,1 [ $\frac{Ns}{m}$ ], con el fin de tener un análisis más amplio sobre el robot. Por lo que al tener un valor de  $b = 0$ , se asume que el sistema no perderá energía dados los efectos de disipación y por ende, se estará hablando de un sistema conservativos.

### III-C4. Vector de gravedad simbólico

Como último componente del modelo dinámico,  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  fue obtenido a partir de la expresión (22). Donde

$$\mathbf{g}_0 = [0 \quad 0 \quad -9,81]^T \quad (24)$$

está en coordenadas inerciales con unidades en [ $\frac{m}{s^2}$ ]. Su construcción se presenta en el Anexo X-A4.

### III-C5. Diagrama de bloques

Considerando que *Simulink* funciona mediante bloques, cada una de los términos requeridos por (23) pueden ser exportados mediante la función *matlabFunctionBlock* [1]. Por lo que al implementarse, se obtiene el diagrama de bloques de la Figura 4.

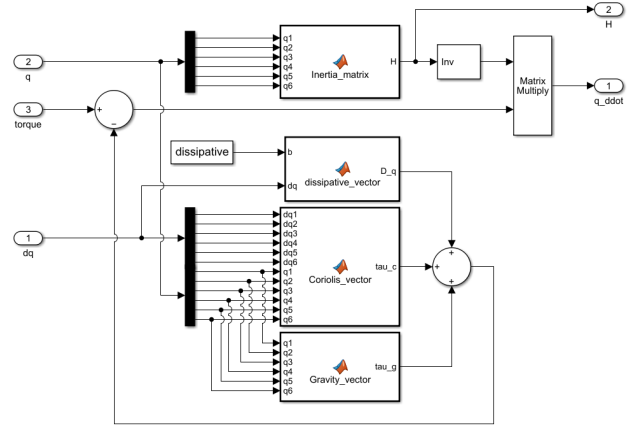


Figura 4. Diagrama de bloques del modelo dinámico

Donde *dissipative* representa al factor de disipación  $b$  indicado por el usuario,  $dq$  indica  $\dot{\mathbf{q}}$  y *torque* es equivalente a  $\boldsymbol{\tau}$ .

## IV. RESULTADOS

## V. RESULTADOS

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## VI. DISCUSIÓN

## VII. DISCUSIÓN

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra

sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## VIII. CONCLUSIONES

### VIII-A. *García Álvarez Gregorio Eliezer*

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### VIII-B. *Luna Macías Antonio de Jesús*

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### VIII-C. *Tevera Ruiz Alejandro*

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue,

a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## IX. REFERENCIAS

[2] [3]

## REFERENCIAS

- [1] "Convert symbolic expression to matlab function block," 2009. [Online]. Available: [https://la.mathworks.com/help/symbolic/matlabfunctionblock.html?s\\_tid=doc\\_ta](https://la.mathworks.com/help/symbolic/matlabfunctionblock.html?s_tid=doc_ta)
- [2] E. Olguín-Díaz, *3D Motion of Rigid Bodies*. Springer, 2019.
- [3] —, *Rigid Multibody Systems Dynamics*. CINVESTAV, 2021.

## X. ANEXOS

### X-A. *Anexos implementación cinemática*

#### X-A1. *Cálculo simbólico de la matriz de Inercia*

```

1 function H = inertia_matrix(mass, J_cm, FK, IT)
2     N = length(mass);
3     H = zeros(N);
4     for i = 1:N
5         J_cm_i = reshape(J_cm(i,:), 6, N);
6         Jv_cm_i = J_cm_i(1:3, :);
7         Jw_cm_i = J_cm_i(4:6, :);
8         FK_i = reshape(FK(i,:), 4, 4);
9         IT_i = reshape(IT(i,:), 3, 3);
10        rotmatrix0_i = FK_i(1:3, 1:3);
11        linear = mass(i) * (Jv_cm_i)' * Jv_cm_i;
12        angular = (Jw_cm_i)' * (rotmatrix0_i) * (
13            IT_i) * (rotmatrix0_i)' * (Jw_cm_i);
14        H = H + linear + angular;
15    end
end

```

#### X-A2. *Cálculo simbólico del vector de Coriolis*

```

1 function C = coriolis_vector(H, q, dq)
2     n = size(H, 1);
3     C = sym(zeros(n, 1));
4     for k = 1:n
5         cs = 0;
6         for i = 1:n
7             for j = 1:n
8                 cs_1 = diff(H(k, j), q(i));
9                 cs_2 = diff(H(i, k), q(j));
10                cs_3 = diff(H(i, j), q(k));

```

```

11         cs_ijk = (1/2)*(cs_1 + cs_2 -
12             cs_3);
13         cs = cs + (cs_ijk*dq(i)*dq(j))
14             ;
15     end
16 end
17 close(f)
18 end

```

#### X-A3. Cálculo simbólico del vector de Disipación

```

1 function D_q = dissipative_vector(b, dq)
2     viscosity_matrix = sym(diag(b));
3     D_q = viscosity_matrix*dq';
4 end

```

#### X-A4. Cálculo simbólico del vector de Gravedad

```

1 function g_q = gravity_vector(m, J_cm, g_0)
2     n = length(m);
3     g_q = sym(zeros(n,3));
4     for i = 1:n
5         J_cm_i = reshape(J_cm(i,:), 6, n);
6         Jv_cm_i = J_cm_i(1:3,:);
7         g_q = g_q + m(i)*(Jv_cm_i');
8     end
9     g_q = simplify(g_q*(-g_0));
10 end

```