

# Simulador Dinámico de un Exoesqueleto de 6GdL

Reporte de medio término

García-Álvarez Gregorio E., Luna-Macías Antonio J., Tevera-Ruiz Alejandro

*Departamento: Robótica y Manufactura Avanzada*

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*

**Resumen**—En el presente documento se explican los fundamentos, metodología y proceso de implementación para el desarrollo de un software dedicado a la simulación de la dinámica directa de un exoesqueleto actuado de 6 grados de libertad (GdL). En el desarrollo del reporte se describe el uso de la metodología GRyMA para la asignación de referenciales, las ecuaciones correspondientes al cálculo de los componentes de la cinemática directa del robot, y el cálculo de los componentes dinámicos, basados en la formulación de D’Lambert-Lagrange. Finalmente se muestra su implementación en MATLAB y Simulink, así como los resultados obtenidos de las variables de estado del sistema y el análisis energético.

**Palabras Clave**—Exoesqueleto, Dinámica Directa, Mecánica Lagrangiana, Simulink, GRyMA

## I. INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente documento se describe el desarrollo matemático necesario para simular la dinámica directa de un exoesqueleto completamente actuado con 6 grados de libertad (GdL). El diseño del exoesqueleto se propone en el artículo original [1] como un robot háptico colocado en el dedo índice, el cual permite simular las fuerzas generadas en un entorno virtual, para ser transferidas al usuario en el mundo real.

De esta manera, el objetivo del proyecto es desarrollar un simulador que permita observar el comportamiento de la dinámica directa del robot, así como analizar parámetros relacionados con el cambio de sus coordenadas generalizadas y la energía total del sistema. Siendo la entrada del simulador los torques aplicados en cada articulación, y la salida serán valores de posiciones y velocidades generalizadas variables en el tiempo.

Para esto, se explica el proceso de asignación de referenciales por medio de la metodología GRyMA [2], la obtención de las ecuaciones de cinemática directa a partir de los referenciales definidos en cada articulación, así como del modelo dinámico basado en la formulación de D’Lambert-Lagrange, considerando los efectos de las fuerzas exógenas, gravedad, disipación y Coriolis. Además, se presenta la implementación de las ecuaciones en MATLAB y Simulink para la generación de una interfaz gráfica que permite presentar una visualización 3D del robot, así como gráficas con las variables de estado y análisis energético.

## II. ANTECEDENTES

### II-A. Cinemática directa

Conocer la cantidad de grados de libertad que tiene el exoesqueleto permite identificar la versatilidad del movimiento que se podrá ejercer. Existen 3 clasificaciones [2]:

- Menos de 6 GdL. si el robot está diseñado para moverse en un espacio tridimensional, presentará limitaciones su movimiento.
- Exactamente 6 GdL. Se podrá mover de manera independiente en cada uno de los seis parámetros que conforman el espacio de trabajo tridimensional.
- Más de 6 GdL. Si un robot tiene más actuadores que los parámetros del espacio, implica que está sobre actuado.

### II-A1. Transformaciones homogéneas

De manera general, se explica una matriz de transformación homogénea como una matriz que permite expresar un punto especificado en coordenadas de un marco referencial con respecto a las coordenadas de otro marco referencial, esto a partir de la aplicación de una rotación pura, una traslación pura, o una combinación de ambas sobre el marco referencial inicial.

De esta forma, se explica en [3] que para cadenas cinemáticas abiertas, donde el movimiento se encuentra restringido a una sola dirección, la transformación homogénea desde el referencial padre hacia cualquier referencial local se define únicamente por las coordenadas generalizadas escalares correspondientes, definido de la siguiente manera.

$$A_i(q_i) \triangleq A_{pi}^i(q_i) = \begin{bmatrix} R_{pi}^i(q_i) & d_{pi}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

Donde  $i$  representa el marco referencial del cuerpo correspondiente, y  $pi$  el marco referencial padre del referencial  $i$ .

A partir de esta definición, se afirma que la transformación homogénea representa el movimiento rígido de un marco referencial dado con respecto a otro, y que además presenta la propiedad de la propagación del Movimiento Rígido, que de manera resumida permite realizar una multiplicación entre matrices de transformación homogénea de marcos referenciales consecutivos, de tal manera que la matriz resultante representa la transformación entre el primer y el último marco referencial, expresándose de la siguiente manera.

$$A_0^i(q) = A_0^{pi}(q_1, \dots, q_j) A_i(q_i) \quad (1)$$

### II-A2. Asignación de referenciales

Con respecto al tema de transformaciones homogéneas, se observa que un aspecto clave que se debe tener delimitado en el sistema es la localización y orientación de los diferentes referenciales correspondientes a cada uno de los cuerpos rígidos que lo conforman. En este caso, se busca tener un marco referencial asignando a cada uno de los eslabones de una cadena cinemática, con lo cual es necesario un proceso

de ubicación de referenciales en los diferentes puntos de interés en el robot a analizar, conocido como asignación de referenciales.

Como se explica en [3], existen diferentes metodologías para la asignación de referenciales en sistemas robóticos con cadenas cinemáticas abiertas. A continuación, se describirá de manera resumida el fundamento de las convenciones de Denavit-Hartenberg (DH), que también aplican para su versión modificada (DHm), al igual que se explicará la metodología propuesta por el Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada del CINVESTAV (GRyMA), siendo esta última la metodología utilizada para la asignación de referenciales en el proyecto.

Por un lado, se tiene que las convenciones *DH* y *DHm*, están conformadas de algoritmos que delimitan la forma de establecer marcos de referencia en cadenas cinemáticas donde los marcos consecutivos dependen únicamente de 4 parámetros, en vez de 6 que sería el caso de considerar todas las posibles traslaciones y rotaciones en los tres ejes  $[x,y,z]$  del sistema coordinado. Para lograr dicha reducción de parámetros, las metodologías hacen uso de 2 restricciones con respecto al movimiento de un marco referencial a otro.

- El eje  $x$  de un referencial dado debe ser perpendicular al eje  $z$  de los marcos referenciales consecutivos.
- El eje  $x$  de un referencial dado y el eje  $z$  del referencial consecutivo deben intersectar.

De igual manera, se asume que el movimiento de cualquier marco de referencia con respecto a su referencial padre, ya sea rotacional o prismático, debe realizarse siempre con respecto al eje  $z$  del referencial padre.

### II-A3. Metodología GRyMA

Con respecto a la metodología GRyMA, se explica en [3] que el proceso de asignación de referenciales inicia con delimitar cada marco referencial  $\Sigma_i$  a lo largo de los ejes de las articulaciones que definen cada coordenada generalizada  $q_i$ . Sin embargo, a diferencia de las metodologías *DH* y *DHm*, en este caso no existe la restricción de colocar el eje  $z$  en la misma dirección que la dirección de movimiento de las articulaciones, con lo cual la dirección de movimiento se define directamente con el vector director extendido.

$$\lambda_i = (\lambda_T^T, \lambda_R^T)^T \in \mathbb{R}^6$$

De esta manera, cada uno de los marcos referenciales se puede colocar en la misma orientación que el referencial base, con lo cual solamente resultan necesarios 3 parámetros de ajuste para determinar la distancia relativa entre el referencial padre y cada referencial local en una posición de las coordenadas generalizadas de  $q = 0$ .

$$d_{0i} = (d_{xi}, d_{yi}, d_{zi})$$

Con lo cual, considerando que se cumple la condición de tornillo explicada en [3],  $\lambda_{T_i} \times \lambda_{R_i} = 0$ , debido a que cada coordenada generalizada induce ya sea un movimiento prismático o de revoluta, pero no una combinación de ambos, entonces la matriz de transformación homogénea entre dos referenciales se expresa de la siguiente manera.

$$A_i(q_i) = A_{i0}A_{iv}(q_i) = \begin{bmatrix} e^{[\lambda_{R_i} \times]q_i} & d_{0i} + \lambda_{T_i}q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Considerando que el *Operador Producto Cruz*  $[\mathbf{a} \times]$  representa el producto cruz vectorial como una expresión de una matriz simétrica de la siguiente forma.

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Así, si todos los posibles movimientos se encuentran alineados con alguno de los ejes principales de cada marco referencial, el vector director cinemático  $\lambda_i$  puede ser codificado con un parámetro escalar único  $\Theta_i$ , incluyendo el caso constante, es decir el caso en el que no existe un movimiento variable en el tiempo.

Cuadro I  
CÓDIGOS DE MOVIMIENTO GRyMA

$\Theta_i$	0	1	2	3	4	5	6
$\lambda_{T_i}$	0	1	0	0	0	0	0
$\lambda_{T_i}$	0	0	1	0	0	0	0
$\lambda_{T_i}$	0	0	0	1	0	0	0
$\lambda_{R_i}$	0	0	0	0	1	0	0
$\lambda_{R_i}$	0	0	0	0	0	1	0
$\lambda_{R_i}$	0	0	0	0	0	0	1
$R_i$	$I_3$	$I_3$	$I_3$	$I_3$	$R_x(q_i)$	$R_y(q_i)$	$R_z(q_i)$

Con lo cual, la metodología GRyMA haría uso de 4 parámetros básicos constantes para cada relación padre/hijo entre referenciales:  $d_{x1}, d_{y1}, d_{z1}$  y  $\Theta_i$ .

De otra manera, cada vector director de traslación y rotación puede ser parametrizado con un par de elevación-azimuth  $(\alpha_i, \beta_i)$  de la siguiente manera, aumentando el número de parámetros requeridos en 2.

Cuadro II  
CÓDIGOS GENERALES GRyMA

$\Theta_i$	7	8
$\lambda_{T_i}$	$\cos(\alpha_i) \sin(\beta_i)$	0
$\lambda_{T_i}$	$\sin(\alpha_i) \sin(\beta_i)$	0
$\lambda_{T_i}$	$\cos(\beta_i)$	0
$\lambda_{R_i}$	0	$\cos(\alpha_i) \sin(\beta_i)$
$\lambda_{R_i}$	0	$\sin(\alpha_i) \sin(\beta_i)$
$\lambda_{R_i}$	0	$\cos(\beta_i)$
$R_i$	$I_3$	$R_{\lambda_{R_i}}(q_i)$

### II-A4. Jacobiano geométrico

Se explica en [3] que el Jacobiano geométrico de un marco referencial específico es el operador lineal que permite mapear las velocidades generalizadas a los valores del *twist*  $\mathcal{V}_i$ , el cual es el vector que contiene la velocidad lineal y angular de un marco referencial, y se define de la siguiente manera.

$$\mathcal{V} \triangleq \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^6$$

Considerando a  $\mathcal{M}$  como el espacio de movimiento del robot. Con lo cual, al ser relacionado con el Jacobiano geométrico, se obtiene la siguiente igualdad.

$$\mathcal{V} = J_i(q)\dot{q}$$

De esta manera, se observa que al ser el *twist* un vector que puede ser expresado en las coordenadas de cualquier marco referencial, entonces también es posible expresar el Jacobiano geométrico de diferentes formas. En este caso surgen las siguientes expresiones para la representación del Jacobiano en coordenadas inerciales y locales.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i^{(0)} &= {}^0J_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \mathcal{V}_i^{(i)} &= {}^iJ_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

Así mismo, debido a la definición que tiene el vector *twist*, el Jacobiano geométrico puede ser descompuesto en sus elementos referentes a velocidad lineal y velocidad angular de la siguiente manera.

$${}^jJ_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^jJ_{v_i}(\mathbf{q}) \\ {}^jJ_{\omega_i}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

De tal manera que se tienen las siguientes equivalencias para la velocidad lineal y angular del referencial local analizado.

$$\begin{aligned}v_i^{(j)} &= {}^jJ_{v_i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \omega_i^{(j)} &= {}^jJ_{\omega_i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

Cabe mencionar que los componentes de velocidad del Jacobiano pueden ser expresados con respecto al referencial inercial, solamente es necesario hacer la multiplicación por la matriz de transformación homogénea respectiva del referencial inercial al referencial correspondiente del Jacobiano local.

#### II-A5. Jacobiano geométrico de velocidad lineal

Como primer punto se explica en [3] que el Jacobiano de velocidad lineal en una cadena serial, puede ser expresado de la siguiente manera.

$${}^0J_{Vi}(\mathbf{q}) = [{}^0J_{Vi}]_1, [{}^0J_{Vi}]_2, \dots, \lambda_{Ti}^0, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{3 \times n} \quad (3)$$

Donde cada columna del operador esta dado por la ecuación siguiente.

$$[{}^0J_{Vi}]_k = \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \dot{q}_k} = \begin{cases} \lambda_{Tk}^{(0)} + \lambda_{Rk}^{(0)} \times (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_k) & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{Otro} \end{cases}$$

#### II-A6. Jacobiano geométrico de velocidad angular

Como segundo punto, se explica que el Jacobiano de velocidad angular, en cadenas seriales, puede ser calculado para cualquier marco de referencia haciendo uso de los vectores directores correspondientes a los referenciales subsecuentes, obteniéndose la siguiente expresión.

$${}^0J_{\omega_i} = [\lambda_{R1}^0, \lambda_{R2}^0, \dots, \lambda_{Ri}^0, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{3 \times n} \quad (4)$$

Esto es condierando que a partir de la metodología GRyMA para asignación de referenciales, el vector director de rotación con respecto al referencial inercial se expresa de la siguiente forma.

$$\lambda_{Ri}^{(0)}(\mathbf{q}) = R_0^i(\mathbf{q})\lambda_{Ri}$$

### II-B. Dinámica

La dinámica es la parte de la mecánica que estudia la relación entre el movimiento y las causas que lo producen (fuerzas o torques) mediante el análisis de ecuaciones diferenciales de segundo orden (modelo dinámico). Para su obtención, pueden utilizarse diferentes metodologías a partir de la mecánica Newtoniana o bien de la mecánica Lagrangiana.

Especialmente, para sistemas multicuerpos rígidos, se prefiere el uso de la mecánica Lagrangiana dada su versatilidad y simplicidad mediante el análisis energético para sistemas con  $n$  partículas. Además, reduce drásticamente el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento de un conjunto de partículas ya que sólo necesitaremos  $n$  ecuaciones y no  $3n$  como es el caso de la mecánica Newtoniana. Para ello, el sistema debe poder ser descrito mediante un conjunto de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y sus derivadas totales respecto al tiempo  $\dot{\mathbf{q}}$  (ambas medibles), las cuales representan las direcciones del movimiento admisible del sistema.

#### II-B1. Ecuación de D'Alambert-Lagrange

De acuerdo a [3], si se considera el principio de *trabajo virtual* orientado al equilibrio estático del principio de mínima acción, puede partirse a la construcción del *principio de D'Alambert* siendo una extensión y enfocado al equilibrio dinámico del sistema. Lo que permite obtener la expresión (5) que representa la *Ecuación de D'Alambert-Lagrange* de forma vectorial para  $\mathbf{q}$  linealmente independientes.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

donde

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

define la energía cinética total del sistema relacionada con la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$  y

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

representa las *fuerzas generalizadas* relacionadas a la suma de las fuerzas efectivas  $\mathbf{f}_{e_j}$  que experimenta cada cuerpo  $j$  respecto a la coordenada generalizada  $q_i$  como resultado de los siguientes efectos:

- Potenciales conservativos
- Disipación (para sistemas no conservativos)
- Restricciones (no necesariamente *holonómicas*)
- Fuerzas exógenas (normalmente definidas por el usuario)

#### II-B2. Fuerzas Inerciales

Con base en [3], cada conjunto de partículas tiene una *fuerza generalizada de inercia*  $\tau_I$  que representa la compensación virtual del movimiento definido como el valor negativo de (5).

$$-\tau_I \triangleq \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

Al resolver (8) en términos de (6), se obtiene:

$$-\tau_I = H(q)\ddot{q} + \dot{H}(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \{\dot{q}^T H(q) \dot{q}\}}{\partial q} \quad (9)$$

Donde la suma del segundo y tercer término representan al vector de Coriolis

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{H}(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \{\dot{q}^T H(q) \dot{q}\}}{\partial q} \quad (10)$$

Por lo tanto, la expresión (5) puede reescribirse como:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = Q \quad (11)$$

### II-B3. Matriz de Inercia

Considerando una partícula  $i$  de masa constante  $m$ , su energía cinética es proporcional a su velocidad traslacional  $v_i$  y rotacional  $\omega_i$  en el centro de masa en coordenadas inerciales de acuerdo a [4].

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^{(0)2} + \frac{1}{2} I_{c_i}^{(0)} \omega_i^{(0)2} \quad (12)$$

Para sistemas multipartículas [2],

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (13)$$

Por lo que si (12) es equivalente a (6), entonces la matriz de inercia  $H(q)$  debe contener la misma información que los términos de (12).

Para ello, es necesario el uso de (4) para el mapeo de las velocidades lineales y angulares de los centros de masa de cada eslabón en función de las coordenadas generalizadas, obteniendo:

$$H(q) = \sum_{i=1}^n \{m_i {}^0 J_{vcm_i}^T(q) {}^0 J_{vcm_i}(q) + {}^0 J_{\omega_{cm_i}}^T(q) R_0^i(q) I_c^{(i)} R_0^{iT}(q) {}^0 J_{\omega_{cm_i}}(q)\} \quad (14)$$

donde

$$I_c \triangleq - \int_B [r \times]^2 dm = \begin{bmatrix} I_{xxc} & I_{xyc} & I_{xzc} \\ I_{xy_c} & I_{yy_c} & I_{yz_c} \\ I_{xz_c} & I_{yz_c} & I_{zz_c} \end{bmatrix} \quad (15)$$

es el tensor de inercia en el centro de masa de un cuerpo  $B$ , siendo  $r$  el vector de posición del centro de masa respecto a su referencial local no inercial.

De acuerdo a (15), la matriz es simétrica y está compuesta por los momentos de inercia (en su diagonal principal) y los productos de inercia (para los elementos fuera de ella).

Por otra parte, la matriz de inercia  $H(q)$  cuenta con ciertas propiedades:

- Es simétrica
- Es definida positiva

### II-B4. Vector de Coriolis

$C(q, \dot{q})\dot{q}$  representa las fuerzas centrípetas y de Coriolis en función a las variables de estado del sistema  $(q, \dot{q})$ .

Es importante recalcar que  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y puede tener diferentes valores para el mismo robot, mientras que  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  es único.

El vector de Coriolis puede ser expresado como:

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i,j}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde

$$c_{ijk}(q) \triangleq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial h_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \quad (17)$$

son los *Símbolos de Christoffel*. Donde  $h$  es el elemento en la matriz de inercia,  $k$  corresponde a la posición en el vector de Coriolis; mientras que  $i$  y  $j$  permiten obtener el producto de las velocidades generalizadas.

Aunque el enfoque es el vector de Coriolis, resulta importante considerar la propiedad *Skew-Symmetry*. De acuerdo con [2], se establecen las siguientes relaciones con la matriz de inercia:

$$C(q, \dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{H}(q) = Q \quad (18)$$

$$Q + Q^T = 0 \quad (19)$$

$$C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}) = \dot{H}(q) \quad (20)$$

### II-B5. Vector de disipación

Como se presentó en las propiedades de la expresión (7), las fuerzas generalizadas se definen como:

$$Q = \tau_U + \tau_D + \tau_C + \tau \quad (21)$$

Donde  $\tau_U$  corresponde al efecto de potenciales conservativos,  $\tau_D$  representa la disipación de energía,  $\tau_C$  las fuerzas de contacto y  $\tau$  los torques aplicados en cada grado de libertad de acuerdo al usuario.

Si se consideran efectos de disipación y potencial conservativo en (11), puede obtenerse la siguiente expresión:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (22)$$

Donde  $D(q, \dot{q})$  es el vector de disipación y puede estar representado por una *función de Rayleigh* tal como se presenta:

$$D(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}} \quad (23)$$

O bien, por una fricción viscosa lineal  $b_i$  proporcional a la velocidad generalizadas  $\dot{q}_i$  como:

$$D(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

### II-B6. Energía Potencial y Vector de gravedad

Para definir adecuadamente el vector de gravedad, es necesario considerar la expresión matemática de la energía potencial  $U$  para sistemas multipartículas con referencia a un *datum* o valor de referencial  $h_0$ , siendo:

$$U_{h_0} = \sum_{i=1}^n U_{i_{h_0}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{d}_{cm_i}^T \mathbf{g}_0 \quad (25)$$

donde  $\mathbf{d}_{cm_i}$  corresponde al vector posición del centro de masa y  $\mathbf{g}_0$  al vector de aceleración de la gravedad, ambos en coordenadas inerciales.

Si el sistema cuenta con valores negativos en la energía potencial, puede optarse por sumar un valor constante  $U_0$  con el fin de evitarlo y generar un *offset*.

$$U = U_{h_0} + U_0 : \dot{U} = \dot{U}_{h_0} \quad (26)$$

Ya que la energía potencial gravitacional depende de las coordenadas generalizadas, el vector de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  puede expresarse como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = - \sum_{i=1}^n [m_i {}^0 J_{v_{cm_i}}^T(\mathbf{q})] \mathbf{g}_0 \quad (27)$$

Donde el signo negativo es la corrección tal que la energía potencial gravitacional aumenta en contra de la dirección de la gravedad.

### II-C. Energía Mecánica

Tal como se expresa en [4],

$$E = K + U \quad (28)$$

es la energía mecánica del sistema.

Para el caso conservativo, su valor debe ser constante ya que no existen pérdidas de energía o aumentos al ser un sistema aislado y únicamente existirá transformación de energía potencial a cinética y viceversa. Por lo tanto la *Ley de Conservación de Energía*, puede expresarse como:

$$\dot{E} = 0 \quad (29)$$

## III. IMPLEMENTACIÓN

### III-A. Mecánica del exoesqueleto

#### III-A1. Diseño mecánico

Considerando la disposición de articulaciones de [1] presentes en la Figura 1. Se observa que los referenciales no inerciales de las articulaciones  $q_{14}$  y  $q_{15}$  están sobrepuestos.

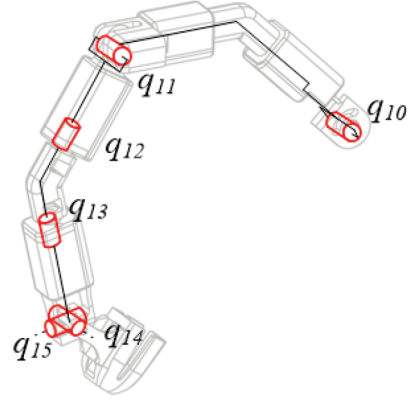


Figura 1. Esquema de las Articulaciones Original

Con el fin de facilitar el cálculo recursivo de la cinemática y dinámica del sistema, se optó por agregar un eslabón extra entre ellas, con el fin de conseguir que cada eslabón tenga un referencial asociado. Permitiendo así, el diseño del exoesqueleto de 6 GdL expuesto en la Figura 2 con una posición inicial de *casa* constituido por una cadena cinemática serial abierta de 7 eslabones con articulaciones tipo revoluto.

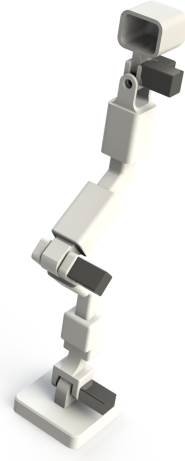


Figura 2. Diseño 3D

Donde los eslabones primeros seis eslabones cuentan con el material: *acrilonitrilo butadieno estireno*, también conocido como *ABS*, polímero termoplástico de utilizado por impresoras 3D. Mientras que para el último eslabón, dedal, se seleccionó *Nylon*, un polímero artificial que pertenece al grupo de las poliamidas. Esto, con el fin de buscar ergonomía y comfort ante la interacción con el usuario.

Respecto a los actuadores, se consideró para cada articulación motores *Pololu - micro Metal LP* de corriente directa con relación de engranes 50:1. Cuenta con dimensiones 24 x 10 x 12 [mm] y masa de 10 [g].

Considerando la caracterización de los eslabones y motores, puede obtenerse los valores de masa y centro de masa respecto a su referencial local en las Sección de VII-A, así como el Tensor de Inercia de cada eslabón en su centro de masa expuesto en la Sección VII-B.

### III-A2. Asignación de referenciales

En la Figura 3 se presenta el modelo acotado de acuerdo al Cuadro III donde el ángulo  $\beta$ , equivalente a  $-59.26^\circ$ , corresponde al ángulo de azimuth expuesto en el Cuadro II

Cuadro III  
DIMENSIONES RELATIVAS ENTRE REFERENCIALES NO INERCIALES

Parámetro	[m]
L1	0.03235525
L2	0.10513390
L3	0.02462267
L4	0.02228474
L5	0.04334075
L6	0.00600000
L7	0.01999013
L8	0.02565247
L9	0.01273194
L10	0.03641522

Además, se aprecia la asignación de referenciales  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6$  y  $\Sigma_7$  de acuerdo a la metodología GRyMA.

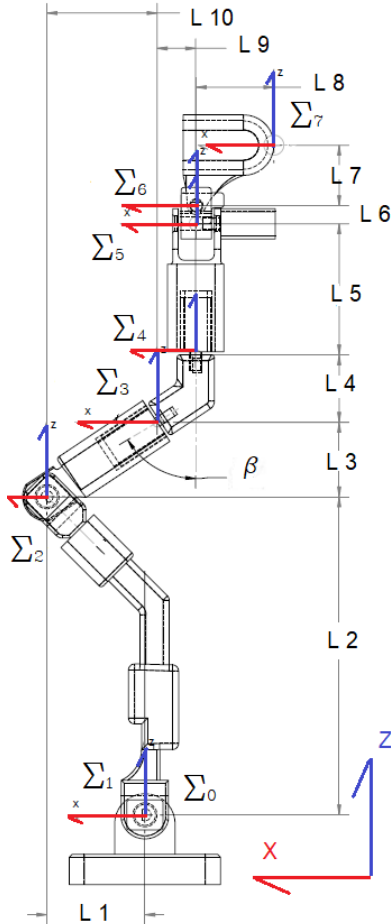


Figura 3. Esquema de las Articulaciones Utilizado

### III-B. Cinemática directa

Considerando la asignación de los referenciales mediante la metodología GRyMA de la Figura III-A2, se presenta en la tabla siguiente los parámetros utilizados:

Cuadro IV  
TABLA DE PARÁMETROS GRyMA

$q_i$	Parámetros de localización				$\alpha$	$\beta$	$\Theta_i$	$\Sigma_i$	$\Sigma_{pi}$
	$d_{xi}$	$d_{yi}$	$d_{zi}$	[mm]					
$q_1$	0	0	0	-	-	-	5	$\Sigma_1$	$\Sigma_0$
$q_2$	32.35	0	105.13	-	-	-	5	$\Sigma_2$	$\Sigma_1$
$q_3$	-36.41	0	24.62	0	-59.26	-	8	$\Sigma_3$	$\Sigma_2$
$q_4$	-12.73	0	22.28	-	-	-	6	$\Sigma_4$	$\Sigma_3$
$q_5$	0	0	43.34	-	-	-	4	$\Sigma_5$	$\Sigma_4$
$q_6$	0	0	6	-	-	-	5	$\Sigma_6$	$\Sigma_5$

De esta forma, en la Sección VII-B1 se la función que construye las matrices de transformación homogéneas entre marcos referenciales consecutivos, basado en las expresiones (2) y (1), con el cual se obtiene como salida un arreglo de 6 matrices expresable de la siguiente manera.

$$A = [A_0^1(q_1), A_1^2(q_2), A_2^3(q_3), A_3^4(q_4), A_4^5(q_5), A_5^6(q_6)]$$

Posteriormente, se genera la función de cinemática directa, la cual implementa la propiedad de propagación del movimiento rígido, ya que permite obtener las matrices de transformación homogénea desde el marco referencial inercial hasta cualquiera de los referenciales no inerciales por medio de su multiplicación.

El código de la función se puede visualizar en la sección VII-B2 donde su salida es un arreglo igualmente de 6 matrices al cual se le agregó el ajuste en coordenadas de posición correspondiente para el análisis de los centros de masa de cada uno de los eslabones.

$$A_0^i = [A_0^1(q_1), A_0^2(q_1, q_2), \dots, A_0^6(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)]$$

Finalmente, para la obtención de los Jacobianos geométricos de velocidad lineal y angular, se utilizan las expresiones (3) y (4). Permitiendo así el desarrollo del código para su generación como se expone en la Sección anexo VII-B3, el cual tiene como salida un arreglo de 6 matrices en representación del Jacobiano correspondiente a cada uno de los centros de masa.

### III-C. Dinámica

A partir de la expresión (22) considerando el *principio de D'Alambert-Lagrange* para sistemas con efectos de disipación y potencial gravitacional conservativo. Puede construirse el modelo dinámico del sistema:

$$\ddot{q} = H(q)^{-1} \{ \tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - D(q, \dot{q}) - g(q) \} \quad (30)$$

donde el vector de torques  $\tau$  representa la entrada del sistema y  $\ddot{q}$  la salida del mismo.

Para realizar la simulación, es necesario obtener de manera simbólica en función de  $(q, \dot{q})$  la estructura de cada término en (30).

#### III-C1. Matriz de inercia simbólica

Para obtener la matriz de inercia en términos de las coordenadas generalizadas, se optó por construir la función del Anexo VII-B4 con base a la expresión (14). De este modo, al integrar

dos veces la aceleración  $\ddot{q}$  podrá utilizarse para evaluar  $H(q)$  mediante el uso de *Simulink*.

Mientras que los valores de los jacobianos geométricos para cada centro de masa está dado por (3) y (4), mientras que los tensores de inercia (con valores en el Anexo VII-B) de cada eslabón fueron obtenidos mediante el análisis de propiedades físicas de *SolidWorks*.

### III-C2. Vector de Coriolis simbólico

Una vez obtenida la matriz de inercia de manera simbólica, puede procederse con el cálculo del vector de Coriolis  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  mediante los símbolos de Christoffel expuestos en (17) tal como se presenta en la función de *MATLAB* del Anexo VII-B5.

### III-C3. Vector de disipación simbólico

Mientras que  $D(q, \dot{q})$  está basada en la expresión (24) con coeficientes de fricción viscosa iguales para cada articulación; suponiendo así, que la fricción dado el rozamiento entre componentes mecánicos y el motor es la misma para cada articulación.

Cabe destacar que  $b$  es un parámetro que el usuario podrá modificar en un intervalo de 0 a 0,1 [ $\frac{Ns}{m}$ ], con el fin de tener un análisis más amplio sobre el robot. Por lo que al tener un valor de  $b = 0$ , se asume que el sistema no perderá energía dados los efectos de disipación y por ende, será un sistema conservativo.

### III-C4. Vector de gravedad simbólico

Como último componente del modelo dinámico,  $g(q)$  fue obtenido a partir de la expresión (27). Donde

$$g_0 = [0 \quad 0 \quad -9,81]^T \quad (31)$$

está en coordenadas inerciales con unidades en [ $\frac{m}{s^2}$ ]. Su construcción se presenta en el Anexo VII-B7.

### III-C5. Simulador Dinámico

Considerando que *Simulink* funciona mediante bloques, cada una de los términos requeridos por (30) pueden ser exportados mediante la función *matlabFunctionBlock* [5]. Por lo que al implementarse, se obtiene el diagrama de bloques de la Figura 4.

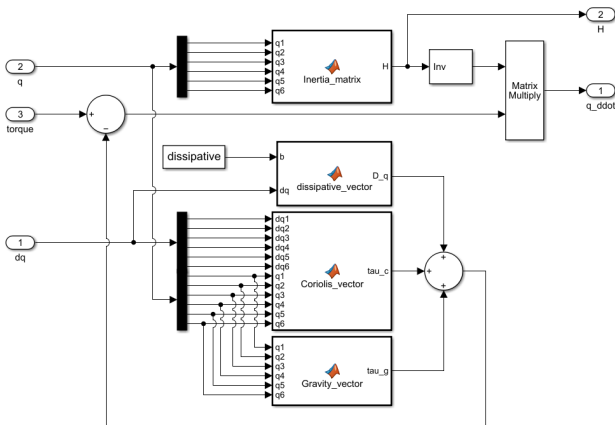


Figura 4. Diagrama de bloques del modelo dinámico

Donde *dissipative* representa al factor de disipación  $b$  indicado por el usuario, *torque* es equivalente a  $\tau$ ; mientras que  $dq$  y  $q$  indican  $\dot{q}$  y  $q$  respectivamente.

Como salidas, se define la matriz de inercia  $H(q)$  evaluada y la aceleración  $\ddot{q}$ .

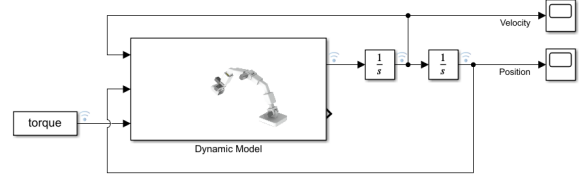


Figura 5. Diagrama de bloques de la planta

### III-C6. Solucionador

Considerando que para la simulación es necesario integrar  $\ddot{q}$  para obtener las variables de estado, es requerido el uso de un solucionador. Para el simulador, se optó por el *ode15s*, un solucionador de paso variable y orden variable (VSVO), basado en las fórmulas de diferenciación numérica (NDF) de los órdenes 1 a 5, pero que a su vez, puede utilizar las fórmulas de diferenciación inversa (BDF) que suelen ser menos eficientes [6].

Al igual que *ode113*, *ode15s* es un solucionador de paso variable destinado a resolver ecuaciones diferenciales rígidas y ecuaciones algebraicas diferenciales (DAE). Con respecto al concepto de los ODE rígidos, se explica en [7] que hace referencia a aquellos sistemas que presentan tramos de variación rápida en ciertas secciones de la función, mientras que hay otras en las que el cambio es lento en comparación a otras regiones, lo cual conlleva a tamaños de paso extremadamente pequeños, ocasionando que integradores de paso fijo como el *ode45* fallen al converger, o bien, que tomen mucho tiempo en lograrlo.

Respecto a los parámetros de los integradores, se consideró las condiciones iniciales del sistema en *casa*. Es decir,

$$q(0) = 0$$

$$\dot{q}(0) = 0$$

### III-C7. Energía Potencial

Considerando que el modelo dinámico está obtenido con base a un análisis energético, es conveniente conocer como se comporta la energía cinética, potencial y mecánica del sistema para la validación del modelo, así como para la selección de técnicas de control como trabajo a futuro.

Por lo tanto, se realizó la implementación de la expresión (25) como se presenta en el Anexo VII-B8. Sin embargo, para las gráficas se consideró el ajuste del *datum* con el fin de evitar valores negativos en la energía potencial tal como se presenta en (26), donde  $U_0$  corresponde al valor mínimo de  $U$  durante el tiempo de simulación.

### III-C8. Energía Cinética y Mecánica

Para el cálculo de la energía cinética no fue necesaria la construcción de una función, dado que la matriz de inercia ya



se encuentra evaluada durante la simulación como se presenta en la Figura 4. Por lo que únicamente se aplicó (6) para su cálculo.

Mientras que para la energía mecánica se considero la expresión (28).

### III-D. Interfaz Gráfica

Con el fin de conseguir que el simulador sea una herramienta de análisis dinámico y energético, se desarrolló una interfaz gráfica mediante *App Designer* [8] enfocada a la configuración del sistema con la definición de los parámetros del Cuadro V.

Además de la selección del tipo de sistema *Conservativo* o *No conservativo*.

Cuadro V  
PARÁMETROS DE CONFIGURACIÓN DEL SIMULADOR

Parámetros	Rango	Unidades
Torques $\tau_i$	-0.1 - 0.1	[Nm]
Factor de Disipación	0 - 0.01	[Ns/m]
Tiempo de Simulación	0 - 200	[s]

En la Figura (6) se observa la disposición de cada uno de los parámetros de configuración. Así como las pestañas donde se presentarán los resultados en el orden de variables de estado ( $q, \dot{q}$ ), Energía Cinética y Potencial ( $K, U$ ) y Energía Mecánica  $E$ .

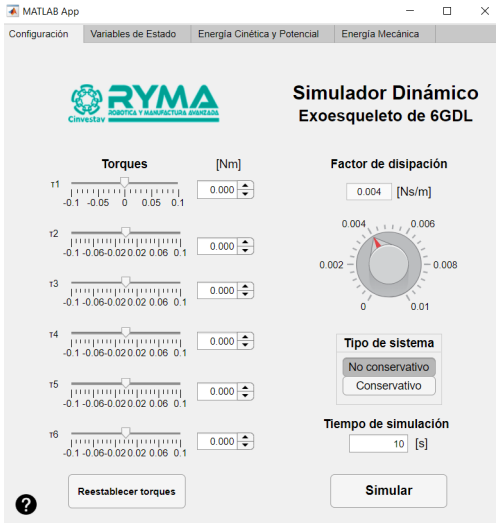


Figura 6. Interfaz Gráfica de Usuario

### III-E. Visualizador

Por otra parte, se buscó complementar la interfaz gráfica con una visualización del comportamiento del exoesqueleto. Para ello, se optó por el uso de *Simscape* [9] y *Simscape Multibody* [10], permitiendo la construcción del diagrama de bloques en *Simulink* de la Figura 7. Donde la única entrada son las coordenadas generalizadas  $q$ .

Para ello, se exportó el modelo 3D (Figura 2) previamente diseñado en *SolidWorks* a un archivo *URDF* [11] mediante la extensión desarrollada por [12] bajo el procedimiento en [13].

Obteniendo el resultado de la Figura 7, donde se anuló el motor dinámico de *Simscape* para no modificar ningún resultado previamente obtenido por el simulador desarrollado.

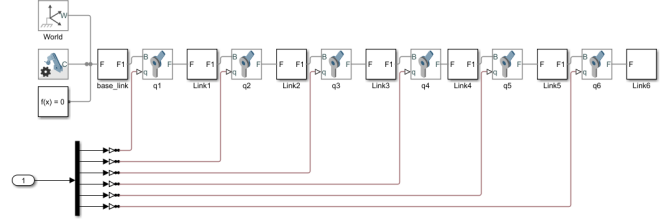


Figura 7. Diagrama de bloques del visualizador

Del mismo modo, al culminar la simulación se construyen las vistas de la Figura 8 que permiten observar desde diferentes puntos el comportamiento del exoesqueleto.

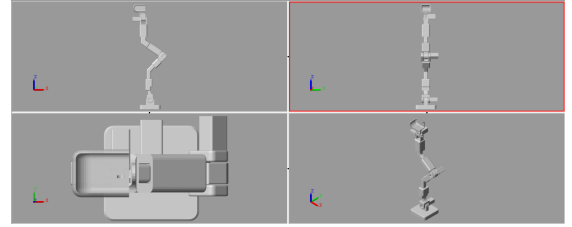


Figura 8. Vistas del simulador

## IV. RESULTADOS

Se analizaron 3 casos efectuando variaciones en los parámetros del simulador, con respecto a los torques en cada articulación y el factor de disipación aplicado en cada articulación. A continuación, se presentan los resultados para cada uno de los casos.

### IV-A. Caso 1

Este caso de estudio consiste en analizar las gráficas de simulación con los parámetros predeterminados que se describen en la Cuadro IV-A, donde los torques se inicializaron en cero (*respuesta libre*) para demostrar los gradientes de energía dados los efectos de la energía potencial gravitacional para un **sistema no conservativo**.

Cuadro VI  
PARÁMETROS ORIGINALES DEL SIMULADOR

Parámetros	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	Unidades
Torques	0	0	0	0	0	0	[Nm]
Factor de Disipación	0.004						[Ns/m]
Tiempo de Simulación	10						[s]

El tiempo de simulación se eligió para optimizar la velocidad de arranque la primera vez que se ejecuta el simulador, debido a que es proporcional al tiempo de procesamiento.

### IV-A1. Coordenadas Generalizadas

La gráfica de la Figura 9 expone que la coordenada generalizada  $q_1$  presenta un desfase de  $-180^\circ$  respecto su posición



inicial, indicando que el exoesqueleto finaliza su movimiento en una posición vertical negativa. Así mismo se observa que el sistema finaliza en una posición de reposo, con lo cual se explica la convergencia de las coordenadas generalizadas a puntos estacionarios.

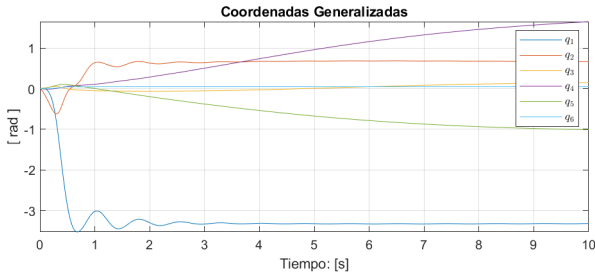


Figura 9. Coordenadas Generalizadas Caso 1

#### IV-A2. Velocidades Generalizadas

La gráfica 10, presenta un cambio notable en la velocidad de las articulaciones  $q_1$  y  $q_2$ , esto debido a que ambas conforman las articulaciones base del robot, y por lo tanto permiten definir la dirección de movimiento del resto de los referenciales. De esta forma se explican las variaciones de velocidad significativas de las primeras dos articulaciones, mientras que el resto, cuyos eslabones se mueven en función de los dos primeros en una respuesta libre del sistema, muestran variaciones menores de velocidad.

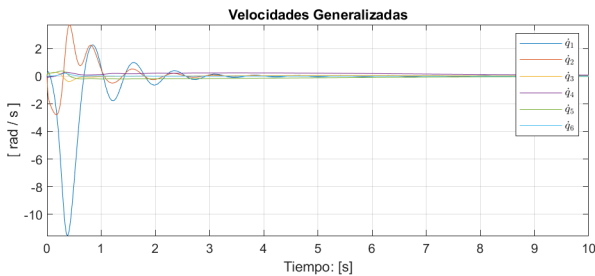


Figura 10. Velocidad Generalizada Caso 1

#### IV-A3. Energía Cinética

En el caso de la figura 11 se observa un pico en la energía cinética a los 0,4 [s] y un punto de inflexión hacia un estado estacionario a partir de 2 [s], lo cual es consistente con lo esperado, puesto que se observa una etapa de amortiguamiento y pérdida de energía, hasta alcanzar el equilibrio.

Esto significa que cuando se suelta el exoesqueleto de su posición de *casa* y empiece a moverse como un péndulo, llegará un instante en que se detenga el movimiento oscilatorio, que es la fase de amortiguamiento observada.

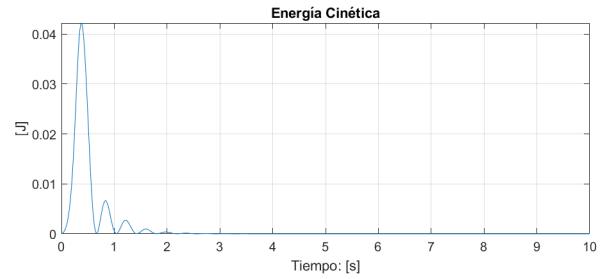


Figura 11. Energía Cinética Caso 1

#### IV-A4. Energía Potencial

La energía potencial inicia en 0,3 [J] y se puede observar en la Figura 12 que a partir de 2 [s] se llega a un punto de equilibrio al no tener movimiento el exoesqueleto. Esto es consistente con los resultados obtenidos para el rango máximo de la energía cinética, pues la misma no adquiere valores mayores al inicial de la energía potencial, con lo cual se demuestra el efecto directo de las fuerzas disipativas.

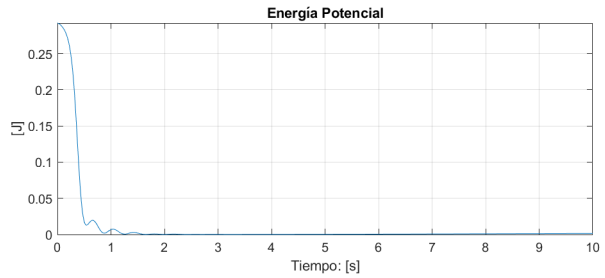


Figura 12. Energía Potencial Caso 1

#### IV-A5. Energía Mecánica

La gráfica de la Figura 13 resulta similar a la obtenida en la Figura 12 debido a que la energía cinética presenta valores de una escala menor que los obtenidos por la energía potencial, siendo congruente con que el cambio de la energía mecánica depende principalmente de  $U$ .

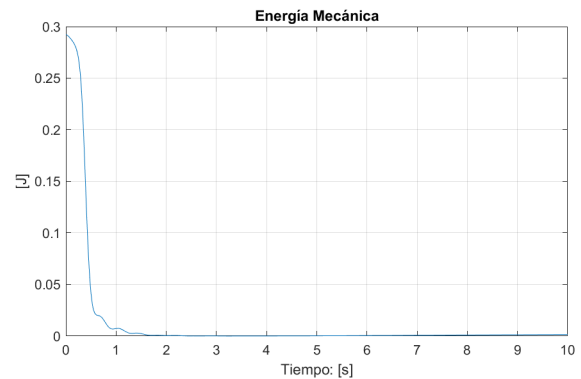


Figura 13. Energía Mecánica Caso 1

#### IV-B. Caso 2

En el presente caso de estudio, se hicieron modificaciones en todos los parámetros de acuerdo a los valores del Cuadro IV-B1 para un **sistema no conservativo** ante una respuesta a la entrada  $\tau$ .

#### IV-B1. Parámetros

Cuadro VII  
PARÁMETROS MODIFICADOS DEL SIMULADOR

Parámetros	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	Unidades
Torques	-0.050	0.050	-0.040	-0.060	0.020	0.010	[Nm]
Factor de Disipación			0.006001				[Ns/m]
Tiempo de Simulación			20				[s]

#### IV-B2. Coordenadas Generalizadas

Los resultados de la Figura 14 son consistentes con los valores dados en los torques, considerando que las fuerza aplicadas en las articulaciones  $q_1$ ,  $q_3$  y  $q_4$  se definieron con valores negativos, representado un giro en sentido negativo acorde a la regla de la mano derecha.

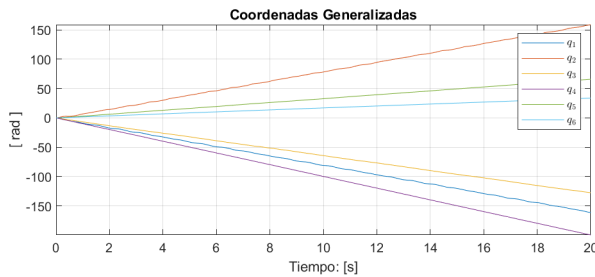


Figura 14. Coordenadas Generalizadas Caso 2

#### IV-B3. Velocidad Generalizada

Las articulaciones  $q_1$  y  $q_2$ , en la Figura 15, son las que presentan mayores variaciones de velocidad. Además, se considera que las velocidades  $\dot{q}_2$ ,  $\dot{q}_5$  y  $\dot{q}_6$  toman valores positivos de acuerdo a los torques aplicados.

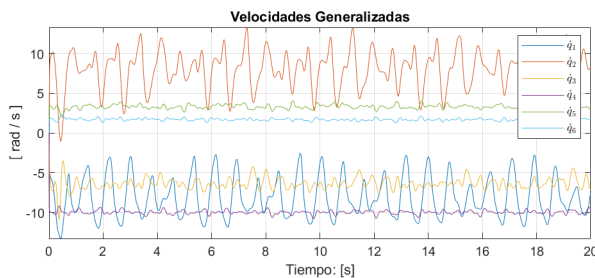


Figura 15. Velocidad Generalizada Caso 2

#### IV-B4. Energía Cinética

La Figura 16 demuestra una función oscilatoria, la cual presenta valores consistentes con el fenómeno físico que se observaría en el exoesqueleto al momento de aplicar torques constantes. Ya que a diferencia del caso anterior en el que se presentaba un punto de equilibrio, ahora las articulaciones se encuentran rotando de manera permanente, ocasionando cambios en su energía cinética siempre que los torque sean mayores que la energía potencial gravitacional.

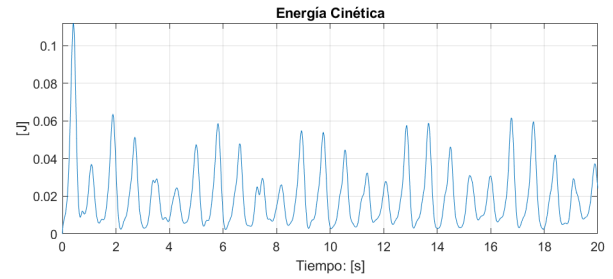


Figura 16. Energía Cinética Caso 2

#### IV-B5. Energía Potencial

Del mismo modo, la Figura 17 muestra la oscilación del movimiento que está teniendo el exoesqueleto con valores energéticos entre 0 [J] y 2,2 [J] sin alcanzar los 3 [J] del inicio, dado que el sistema no vuelve a tener la pose inicial.

Asimismo, se observa que los puntos de energía potencial máxima se relacionan con los incrementos de energía cinética tanto por los efectos de la fuerza de gravedad como de las exógenas aplicadas en cada GdL.

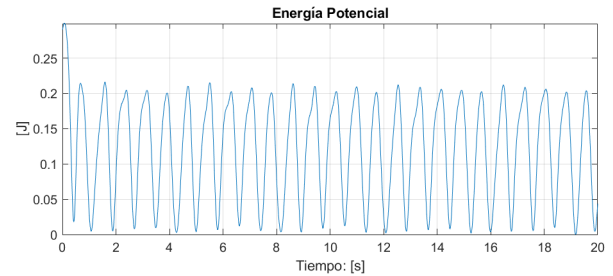


Figura 17. Energía Potencial Caso 2

#### IV-B6. Energía Mecánica

La Figura 18 muestra un desfase positivo, proporcional a la magnitud de la energía cinética respecto a la gráfica de la Figura 17.

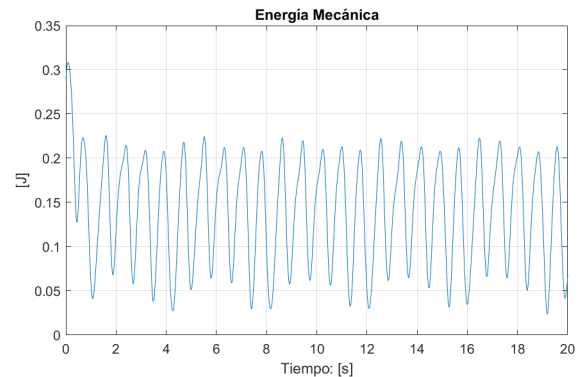


Figura 18. Energía Mecánica Caso 2

#### IV-C. Caso 3

El último caso analizado representa un **sistema conservativo**, esto significa un acercamiento a un sistema ideal o aislado, donde no se consideran fuerzas exógenas ni de disipación. En particular, toda la energía mecánica del sistema es proporcional a la energía potencial máxima en la posición inicial.

#### IV-C1. Parámetros

Los parámetros que se utilizaron para el caso 3, se ven reflejados en el Cuadro IV-C1. Se incrementó el tiempo de simulación, para tener un mayor tiempo de muestreo en el análisis.

Cuadro VIII  
PARÁMETROS MODIFICADOS DEL SIMULADOR (SISTEMA CONSERVATIVO)

Parámetros	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	Unidades
Torques	0	0	0	0	0	0	[Nm]
Factor de Disipación			0				[Ns/m]
Tiempo de Simulación			200				[s]

#### IV-C2. Coordenadas Generalizadas

La gráfica de la Figura 19 muestra los cambios en la posición angular de cada una de las articulaciones a lo largo de 200 [s]. Se aprecia  $q_6$  ejecuta mayor número de rotaciones.

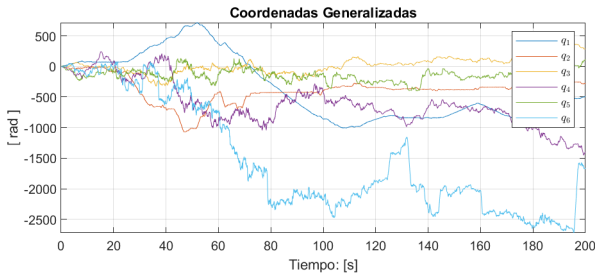


Figura 19. Coordenadas Generalizadas Caso 3

#### IV-C3. Velocidad Generalizada

Por otro lado, la Figura 20 muestra en primer plano la velocidad generalizada del referencial  $q_6$  en azul claro. El cual, entre 0 a 40 [s] presenta un incremento positivo en sus valores de velocidad, alcanzando su punto máximo en 68 [s]. Posteriormente, empieza a disminuir su velocidad hasta alcanzar un rango de  $-1000$  a  $1000$  [rad/s] a partir de un tiempo de 120 segundos.

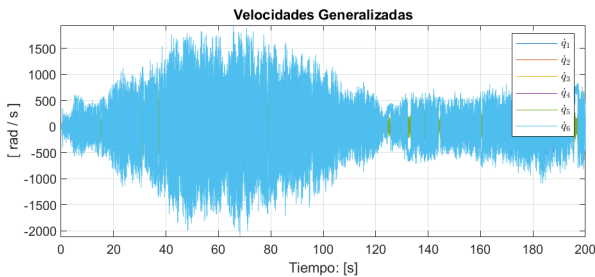


Figura 20. Velocidad Generalizada Caso 3

#### IV-C4. Energía Cinética

La energía cinética representada en la Figura 21 muestra un pico en 68 [s]. Posteriormente, alcanza rango definido entre 0 y 1 [J] a partir de 120 [s] similar al comportamiento de  $\dot{q}_6$ .

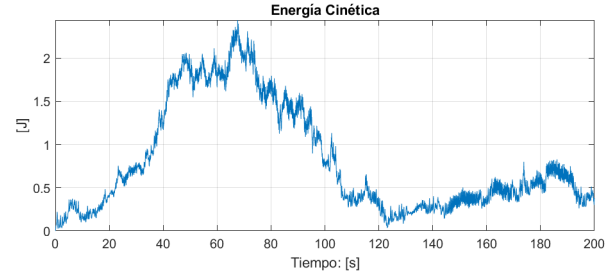


Figura 21. Energía Cinética Caso 3

#### IV-C5. Energía Potencial

Considerando el ajuste del *datum* de la Energía Potencial de acuerdo a (26), los valores presentes en la Figura 22 se definen en un rango entre 0 y 0,3 [J].

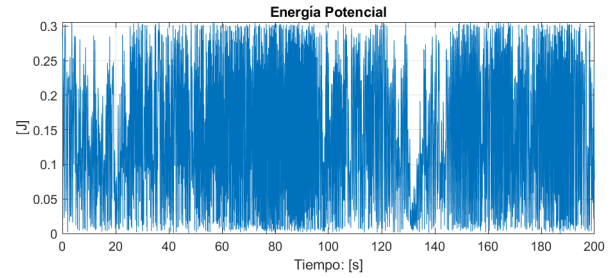


Figura 22. Energía Potencial Caso 3

#### IV-C6. Energía Mecánica

La Figura 23 representa la energía mecánica total de un sistema conservativo cuyo valor máximo es 0,3 [J] proporcional a la energía potencial en la posición inicial.

Sin embargo, se observa que entre 0 a 68 [s] se refleja una inconsistencia a las *leyes de la termodinámica* al ir en aumento la energía cinética y superar el rango máximo de la energía potencial.

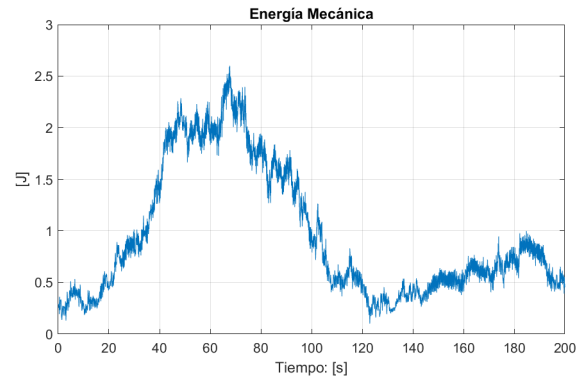


Figura 23. Energía Mecánica Caso 3

## V. DISCUSIÓN

### V-A. Análisis energético de sistema no conservativo

En la sección IV-A, se observa que el sistema se comporta de la manera esperada ya que al no existir la influencia de fuerzas exógenas  $\tau$  y considerando el efecto de las fuerzas

disipativas  $\tau_D$ , se visualiza en la gráfica de energía mecánica una tendencia de la energía hacia cero, indicando que toda la energía potencial presente en el estado inicial del robot se pierde conforme las articulaciones se mueven, hasta llegar a un estado de reposo.

Considerando la sección IV-B, se observa que el sistema se comporta nuevamente como lo esperado, esto debido que al aplicarse fuerzas exógenas  $\tau$  ocurre un aumento en la energía mecánica del sistema, transformándose así en energía cinética para el movimiento de cada eslabón.

Esto además, permite definir que el torque aplicado a cada grado de libertad supera la fricción viscosa de la articulación, haciendo que las coordenadas generalizadas  $q$  cambien de posición en función de la regla de la mano derecha.

#### V-B. Análisis energético de sistema conservativo

Si se realiza un análisis del caso de la sección IV-C, se obtienen las Figuras 24 y 25 en un tiempo de 0 a 5 [s] donde se representa el comportamiento *complementario* entre la energía cinética con la energía potencial, con el fin de describir una energía mecánica constante.

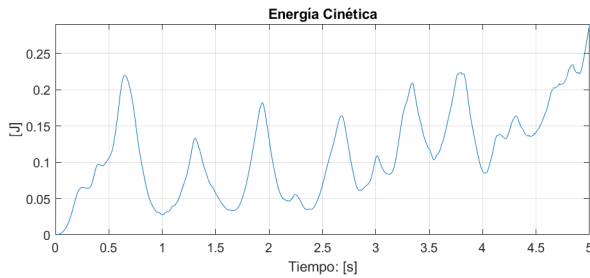


Figura 24. Energía cinética de caso 3, periodo de 5s.

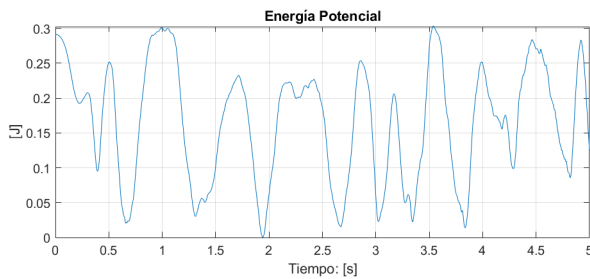


Figura 25. Energía potencial de caso 3, periodo de 5s.

Sin embargo, puede notarse un aumento en la energía cinética en los últimos segundos, tal como se presenta en la Figura 21. Esto es incongruente con los resultados esperados dado que el sistema no puede tener mayor energía cinética que la energía potencial máxima, puesto que no se aplica ninguna fuerza exógena.

Como tercer punto, asumiendo que los resultados incongruentes obtenidos para el último caso de análisis energético son consecuencia del uso de un integrador no adecuado para el tipo de sistema, se procedió a ejecutar el simulador definiendo el integrador de paso fijo *ode3* con un tamaño de paso de 0.00001s, esperando obtener una representación congruente con respecto a la conservación de la energía.

La gráfica de la energía mecánica resultante para un tiempo de 5[s] de simulación se presenta en la figura 27, y se observa que al compararse con la gráfica de energía mecánica haciendo uso del integrador *ode15s* en la figura 26, ambas gráficas presentan comportamientos similares, tanto en sus rangos de amplitud como en los valores que toman en cada instante de tiempo.

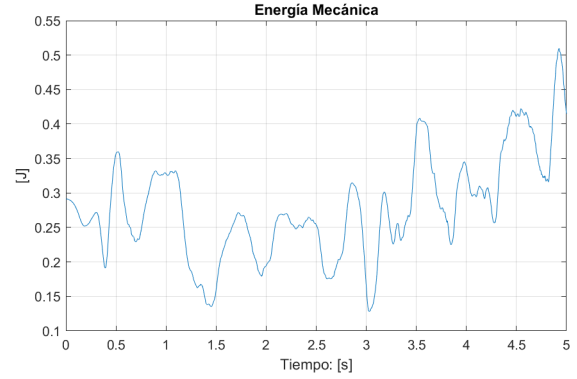


Figura 26. Energía mecánica de caso 3, periodo de 5s.

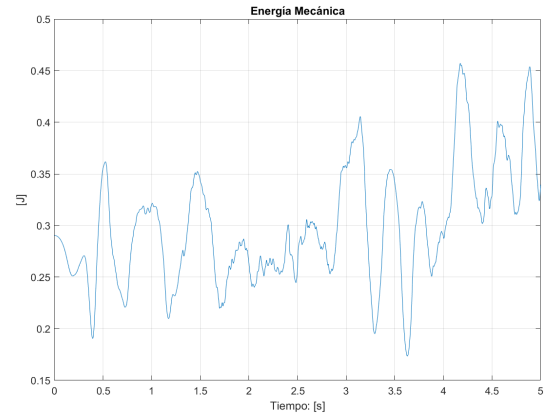


Figura 27. Energía mecánica de caso 3, periodo de 5s, integrador ode3.

De esta manera, se observa una diferencia entre los resultados obtenidos por cualquiera de los integradores con respecto a los resultados esperados. Esta discrepancia puede atribuirse al hecho de que cualquier integrador basado en métodos numéricos que dé solución al modelo dinámico, acumula un error si el tiempo de muestreo utilizado no corresponde con la velocidad de la dinámica del sistema. Es decir, considerando que las gráficas de velocidades generalizadas muestran que el eslabón asociado a  $q_6$  incrementa su velocidad en una escala mayor que la del resto de los eslabones, es posible que la frecuencia de oscilación de dicho eslabón sea mayor que la frecuencia de muestreo del integrador y por lo tanto, el causante del fallo en el proceso de integración.

#### V-C. Trabajo futuro

Se contempla el desarrollo de un segundo simulador basado en la teoría del Acercamiento de Descomposición de Cuerpos (BDA), con el fin de comparar los resultados obtenidos por este simulador.

El cambio de paradigma debería permitir mejorar los tiempos de ejecución, así como reducir el error numérico, verificando si la causa del error para el caso conservativo es debido a la naturaleza del integrador o por la estructura del modelo dinámico actual.

De igual manera, se analizará el comportamiento del sistema con diferentes métodos de integración, con el objetivo de determinar el más adecuado.

## VI. CONCLUSIONES

### VI-A. *García Álvarez Gregorio Eliezer*

Se alcanzó el objetivo de este reporte puesto que se efectuó el simulador dinámico, así como su comportamiento semejante a lo esperado en la realidad, en el caso del sistema no conservativo.

En contraparte en el sistema que no considera la fricción viscosa, se obtuvieron resultados no esperados que se analizaron y discutieron a profundidad, con el objetivo de identificar el error y así implementar una solución adecuada.

Se concluye que la discrepancia es debida al integrador. Una hipótesis es la siguiente:

Debido a que sobre el sistema solo actúa la fuerza de gravedad, al soltarse el exoesqueleto de su posición vertical de "casa", se empieza a acelerar y a partir del segundo 5 aún no alcanza una velocidad constante porque el sistema se puede considerar como un péndulo compuesto de 7 eslabones, lo que conlleva a un sistema caótico (sin embargo continúa siendo determinista). Es importante remarcar que el 6to referencial presenta una velocidad mayor al del resto de los eslabones, porque al ser tan pequeño en relación a los demás, implica que tiene el menor momento de inercia. Al ser el último eslabón el que mayor velocidad tiene, este influye considerablemente en la trayectoria de la cadena cinemática. Y estos cambios de aceleraciones sobrepasan al tiempo de procesamiento del integrador, acumulando un error numérico y mostrando datos imposibles (crear energía).

### VI-B. *Luna Macías Antonio de Jesús*

A partir del proyecto elaborado, se puede afirmar que se logró de manera parcial el objetivo inicial, referente al desarrollo de un software que permitiera simular la dinámica de un exoesqueleto actuado de cadena cinemática abierta con 6 GdL, esto por medio del desarrollo de una aplicación de MATLAB integrada con bloques de Simulink.

Por un lado, se implementaron de manera satisfactoria las ecuaciones respectivas a la dinámica del robot por medio de la formulación de D'Lambert-Lagrange, lo cual se reafirma con los resultados obtenidos de posición, velocidad y análisis energético de las pruebas realizadas para casos no conservativos, es decir aquellos casos en los cuales se consideran los efectos de las fuerzas disipativas.

Por otro lado, se observan discrepancias entre los resultados de análisis energético para el caso conservativo, y los resultados esperados dada la conservación de la energía. En este caso se observa en los primeros 5[s] de simulación un comportamiento complementario entre las energías cinética y potencial, tendiendo a un valor constante en la energía

mecánica. El problema aparece cuando las velocidades de la articulación  $q_6$  incrementan, ya que a partir de ese instante de tiempo, se visualiza por las gráficas que se genera más energía cinética de lo que el valor máximo de energía potencial inicial debería permitir. De esta manera, se interpreta que las discrepancias están dadas por un error acumulado entre el integrador utilizado y el tiempo de muestreo, los cuales posiblemente generen una pérdida de información en el proceso de integración.

De esta manera, con respecto a los trabajos futuros, resalta el desarrollo de un simulador basado en la teoría del BDA el cual permita reducir el orden de complejidad de las Ecuaciones Diferenciales presentes en las matrices dinámicas, y por lo tanto tender a la obtención de un simulador más eficiente y con menor acumulación en el error.

### VI-C. *Tevera Ruiz Alejandro*

Se alcanzó el objetivo deseado orientado al desarrollo del simulador dinámico para el exoesqueleto de 6GdL (*sistema no conservativo*) con base al diseño de [1]. Para ello, se consideró fundamentos científicos basados principalmente en el modelado de sistemas dinámicos mediante el análisis energético bajo la formulación de *D'Alambert-Lagrange*.

De esta manera, se simplificó el proceso de modelado del sistema multipartículas otorgando la posibilidad de analizar adecuadamente las variables de estado y el comportamiento energético. Para ello, se construyó el simulador mediante bloques en *Simulink* con base en funciones desarrolladas en *MATLAB*, así como la implementación de una interfaz gráfica y visualizador con el objetivo de proveer un entorno de análisis potente pero sencillo de configurar bajo ciertos parámetros.

Por otro lado, se realizaron diversas pruebas para el desarrollo y la validación del simulador dinámico. Concluyendo así con tres casos de estudio expuestos en la Sección IV. Para el primero y segundo de ellos, el comportamiento del *sistema no conservativo* fue el esperado, donde la interacción con las *fuerzas generalizadas* de disipación y/o exógenas es notoria.

Sin embargo, los resultados del *sistema conservativo* fueron inconsistentes a la teoría como consecuencia del tipo de solucionador utilizado para resolver la dinámica del sistema. Esto puede observarse en el error acumulado de la energía cinética ya que presenta un comportamiento ascendente durante cierto periodo hasta que el solucionador busca corregir el error.

Aunque el *ode15s* utiliza un método numérico potente para *sistemas rígidos*, el número de operaciones para la integración de las variables de estado es alto, por lo que aún realizando el ajuste de la frecuencia de muestreo del solucionador no se presenta una mejora significativa, únicamente mayor tiempo requerido para la convergencia.

Esto abre la posibilidad de realizar una segunda versión del simulador orientado al modelado dinámico basado en *BDA* con el fin de reducir el consumo de recursos informáticos y por ende, las operaciones aritméticas para la solución de la dinámica directa del sistema.

## REFERENCIAS

- [1] I. Sarakoglou, A. Brygo, D. Mazzanti, N. G. Hernandez, D. G. Caldwell, and N. G. Tsagarakis, "Hexotrac: A highly under-actuated hand

exoskeleton for finger tracking and force feedback,” *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2016. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7759176/>

- [2] E. Olguín-Díaz, *Rigid Multibody Systems Dynamics*. CINVESTAV, 2021.
- [3] E. Olguín-Díaz, *3D Motion of Rigid Bodies: A Foundation for Robot Dynamics Analysis*. Springer, 2019.
- [4] L. Susskind and G. Hrabovsky, *The theoretical minimum: what you need to know to start doing physics*. Basic Books, 2013.
- [5] MathWorks, “Convert symbolic expression to matlab function block,” 2009. [Online]. Available: [https://la.mathworks.com/help/symbolic/matlabfunctionblock.html?s\\_tid=doc\\_ta](https://la.mathworks.com/help/symbolic/matlabfunctionblock.html?s_tid=doc_ta)
- [6] MathWorks, “ode15s,” [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode15s.html>
- [7] MathWorks, “Solve stiff odes,” [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-stiff-odes.html>
- [8] MathWorks, “Matlab app designer,” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/products/matlab/app-designer.html>
- [9] MathWorks, “Simcape,” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/products/simcape.html>
- [10] MathWorks, [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/products/simcape-multibody.html>
- [11] Gazebo, “Urdf,” [Online]. Available: [http://gazebo.org/tutorials/?tut=ros\\_urdf](http://gazebo.org/tutorials/?tut=ros_urdf)
- [12] S. Brawner, “sw\_urdf\_exporter,” 2020. [Online]. Available: [http://wiki.ros.org/sw\\_urdf\\_exporter](http://wiki.ros.org/sw_urdf_exporter)
- [13] MathWorks, “Urdf import,” [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/physmod/sm/ug/urdf-import.html>

## VII. ANEXOS

### VII-A. Masas y Coordenadas CM

Cuadro IX  
MASAS Y COORDENADAS DE LOS CENTROS DE MASA

Centros de Masa	(respecto al referencial local)			Masa [kg]
	x [m]	y [m]	z [m]	
$cm_1$	0.01068092	0.00868293	0.05522912	0.04496018
$cm_2$	-0.02243335	0	0.01580661	0.02038587
$cm_3$	-0.01025512	0	0.00922495	0.00333783
$cm_4$	-0.00584482	-0.00000647	0.02311164	0.02889644
$cm_5$	-0.0000648	0.01247162	0.00568686	0.0108769
$cm_6$	-0.00999471	0	0.01838876	0.00726735

### VII-B. Tensores de Inercia [ $kgm^2$ ]

$$I_1 = \begin{bmatrix} 8,74E-05 & 2,47E-06 & 2,42E-05 \\ 2,47E-06 & 9,19E-05 & 0 \\ 2,42E-05 & 0 & 1,61E-05 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1,71E-06 & 0 & -1,36E-06 \\ 0 & 3,61E-06 & 0 \\ -1,36E-06 & 0 & 2,76E-06 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1,60E-07 & 0 & -5,00E-08 \\ 0 & 2,20E-07 & 0 \\ -5,00E-08 & 0 & 1,10E-07 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 7,83E-06 & 0 & -3,24E-06 \\ 0 & 9,84E-06 & 0 \\ -3,24E-06 & 0 & 3,11E-06 \end{bmatrix}$$

$$I_5 = \begin{bmatrix} 6,20E-07 & 1,00E-08 & 0 \\ 1,00E-08 & 2,40E-07 & 4,00E-08 \\ 0 & 4,00E-08 & 5,70E-07 \end{bmatrix}$$

$$I_6 = \begin{bmatrix} 9,30E-07 & 0 & -9,00E-08 \\ 0 & 1,02E-06 & 0 \\ -9,00E-08 & 0 & 1,02E-06 \end{bmatrix}$$

### VII-B1. Cálculo simbólico de matrices de transformación homogénea

```

1 function homogeneous_matrix =
    local_homogeneous_transform_matrix(
        translation, lambda, q)
2 num_ref = size(lambda, 2);
3 homogeneous_matrix = sym(zeros(num_ref, 16))
    );
4 for i = 1:num_ref
    rotation_matrix = expm(OPC(lambda(:, i)
        * q(i)));
5 hm_i = [rotation_matrix translation(:,
        i); 0 0 0 1];
6 homogeneous_matrix(i, :) = reshape(hm_i
        , 1, 16);
7 end
8 homogeneous_matrix = simplify(
    homogeneous_matrix);
9
10 end

```

### VII-B2. Cálculo simbólico de cinemática directa de centros de masa

```

1 function HM_CM0_6 =
    forward_kinematics_center_of_masa_offset(
        forward_kinematics, offset)
2 num_cm = size(offset, 2);
3 HM_CM0_6 = sym(zeros(num_cm, 16));
4 I = eye(3);
5 for i = 1:num_cm
6     HM_CM0_i = reshape(forward_kinematics(
        i, :), 4, 4) * [I offset(:, i); 0 0 0
        1];
7     HM_CM0_6(i, :) = reshape(HM_CM0_i, 1,
        16);
8 end
9 HM_CM0_6 = simplify(HM_CM0_6);
10 end

```

### VII-B3. Cálculo simbólico de Jacobiano geométrico

```

1 function J = jacobian_generator(MTH, LAMBDA_R)
2 n = size(LAMBDA_R, 2);
3 J = sym(zeros(n, (6*n)));
4 j_w = sym(zeros(3, n));
5 for i = 1:n
6     j_i = sym(zeros(6, n));
7     j_v = sym(zeros(3, n));
8     mth0_i = reshape(MTH(i, :), 4, 4);
9     mth_r_i = mth0_i(1:3, 1:3);
10    d_p = mth0_i(1:3, 4);
11    lambda_r_i = LAMBDA_R(:, i);
12    j_w_i = mth_r_i * lambda_r_i;
13    j_w(:, i) = j_w_i;
14    for j = 1:i
15        mth0_j = reshape(MTH(j, :), 4, 4);
16        d_j = mth0_j(1:3, 4);
17        j_w_j = j_w(:, j);
18        j_v(:, j) = cross(j_w_j, (d_p - d_j))
        ;
19    end
20    j_i(1:3, :) = j_v;

```

```

21     j_i(4:6, :) = j_w;
22     J(i,:) = reshape(j_i, 1, (6*n));
23 end
24 J = simplify(J);
25 end

```

#### VII-B4. Cálculo simbólico de la matriz de Inercia

```

1 function H = inertia_matrix(mass, J_cm, FK, IT)
2     N = length(mass);
3     H = zeros(N);
4     for i = 1:N
5         J_cm_i = reshape(J_cm(i,:), 6, N);
6         Jv_cm_i = J_cm_i(1:3,:);
7         Jw_cm_i = J_cm_i(4:6,:);
8         FK_i = reshape(FK(i,:), 4, 4);
9         IT_i = reshape(IT(i,:), 3, 3);
10        rotmatrix0_i = FK_i(1:3,1:3);
11        linear = mass(i)*(Jv_cm_i)'*Jv_cm_i;
12        angular = (Jw_cm_i)'*(rotmatrix0_i)*(
            IT_i)*(rotmatrix0_i')*(Jw_cm_i);
13        H = H + linear + angular;
14    end
15 end

```

#### VII-B5. Cálculo simbólico del vector de Coriolis

```

1 function C = coriolis_vector(H, q, dq)
2     n = size(H,1);
3     C = sym(zeros(n,1));
4     for k = 1:n
5         cs = 0;
6         for i = 1:n
7             for j = 1:n
8                 cs_1 = diff(H(k,j),q(i));
9                 cs_2 = diff(H(i,k),q(j));
10                cs_3 = diff(H(i,j),q(k));
11                cs_ijk = (1/2)*(cs_1 + cs_2 -
                    cs_3);
12                cs = cs + (cs_ijk*dq(i)*dq(j))
                    ;
13            end
14        end
15        C(k,1) = cs;
16    end
17    close(f)
18 end

```

#### VII-B6. Cálculo simbólico del vector de Disipación

```

1 function D_q = dissipative_vector(b, dq)
2     viscosity_matrix = sym(diag(b));
3     D_q = viscosity_matrix*dq';
4 end

```

#### VII-B7. Cálculo simbólico del vector de Gravedad

```

1 function g_q = gravity_vector(m, J_cm, g_0)
2     n = length(m);
3     g_q = sym(zeros(n,3));
4     for i = 1:n
5         J_cm_i = reshape(J_cm(i,:), 6, n);
6         Jv_cm_i = J_cm_i(1:3,:);
7         g_q = g_q + m(i)*(Jv_cm_i');
8     end
9     g_q = simplify(g_q*(-g_0));
10 end

```

#### VII-B8. Cálculo simbólico de la energía potencial

```

1 function U = potential_energy(m, fkcm, g0)
2     n = length(m);
3     U = 0;
4     for i = 1:n
5         mth_i = reshape(fkcm(i,:), 4, 4);
6         d_i = mth_i(1:3,4)';
7         U = U - m(i)*d_i*g0;
8     end
9 end

```