

Un laser à 399 nm pour le refroidissement de l'ytterbium

Auteur :
Alexandre DAREAU

Sous la direction de :
Fabrice GERBIER
Jérôme BEUGNON

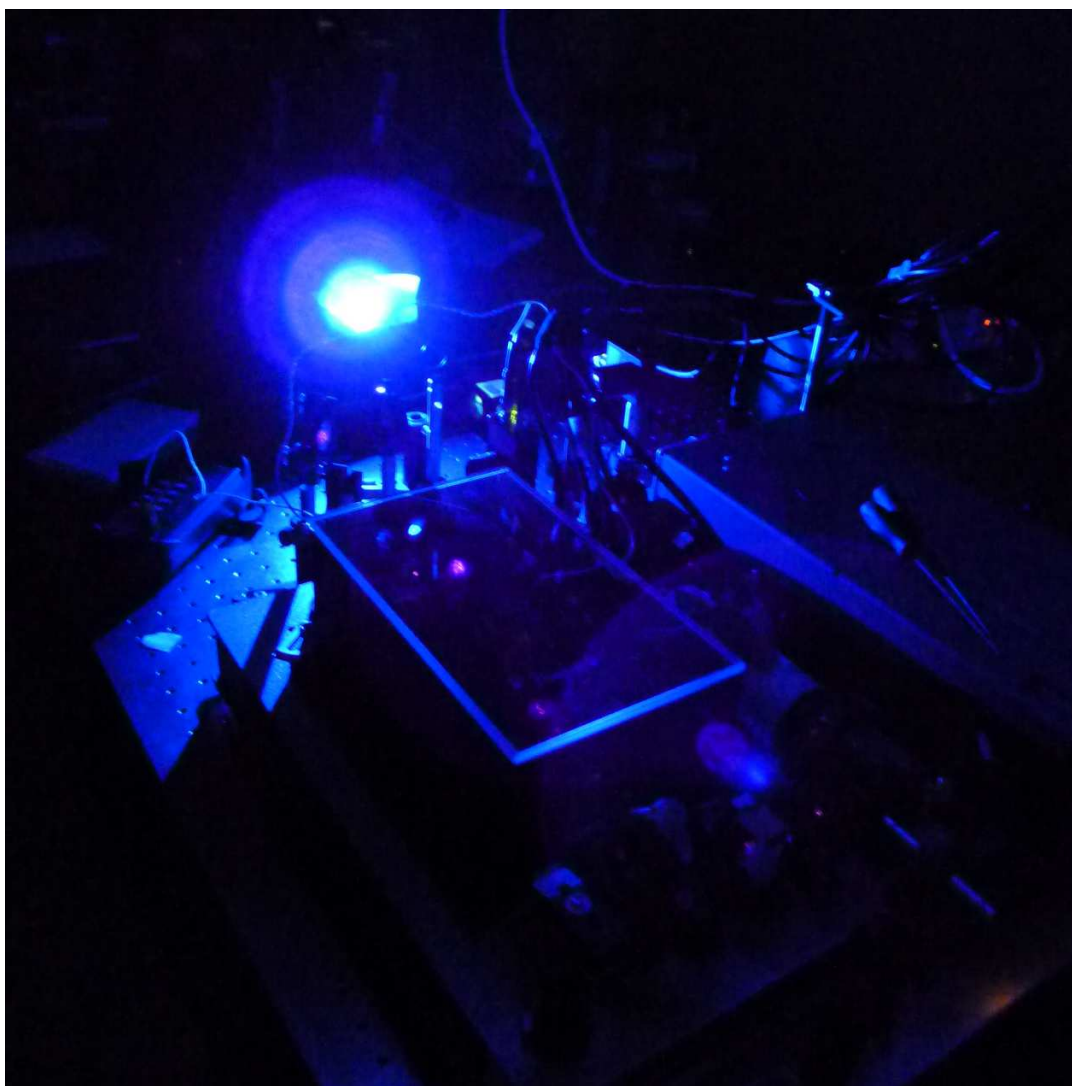


FIGURE 1 – Laser à 399 nm : laser de pompe à 798 nm suivi d'une cavité de doublage.

Janvier - Avril 2011, Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure (Paris)



Un laser à 399 nm pour le refroidissement de l'ytterbium

Résumé

Les simulateurs quantiques, dont le concept a été introduit pour la première fois dans les années 1980 par R. Feynmann, deviennent de nos jours des outils incontournables pour l'étude de systèmes quantiques complexes. Leur principe se fonde sur l'utilisation d'un système quantique témoin, permettant la simulation de modèles théoriques. Le projet proposé par Jérôme Beugnon, Jean Dalibard et Fabrice Gerbier a ainsi pour but de simuler l'effet de champs de jauge artificiels en utilisant un gaz d'atomes d'ytterbium ultra-froids piégé sur réseau. Ce rapport, rédigé à la suite d'un stage expérimental de quatre mois au laboratoire Kastler Brossel, présente la conception d'un laser à 399 nm, première étape sur le chemin du refroidissement de l'atome d'ytterbium. La stratégie retenue consiste à doubler en fréquence une diode laser amplifiée à 798 nm. Après avoir présenté les bases théoriques du refroidissement d'atomes par laser et de la génération de second harmonique en optique non-linéaire, nous nous attacherons à présenter les résultats expérimentaux ayant trait à la réalisation d'un tel laser. Nous traiterons aussi de la réalisation et de la caractérisation d'une cavité optique, permettant d'optimiser la génération de second harmonique et donc la puissance de sortie du laser.



A 399 nm laser for ytterbium cooling

Résumé

Quantum simulators were first proposed by R. Feynmann in the 1980's, and are nowadays an interesting way for investigating the properties of many-body quantum systems. They consist in simulating theoretical models by using a controllable quantum system. The experiment proposed by Jérôme Beugnon, Jean Dalibard and Fabrice Gerbier aims to use such a simulator to study artificial gauge fields, using as a controllable system a gas of ultra-cold ytterbium trapped in a two-dimensional optical lattice. In this report, written after a four-month internship carried out under the supervision of Fabrice Gerbier and Jérôme Beugnon at the *Laboratoire Kastler Brossel* of the *Ecole Normale Supérieure* in Paris, I present the design of a 399 nm laser, first step on the way to ytterbium cooling. We decided to use the frequency doubling of a 798 nm amplified laser diode. I start by introducing the underlying theoretical concepts of laser cooling and second harmonic generation in non-linear optics, and then deal with the experimental realization of such a laser. I also present the design and the specifications of an optical cavity, used to enhance the second harmonic generation, and thus the laser's power.



Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Fabrice Gerbier et Jérôme Beugnon, qui m’ont accueilli sur ce projet naissant et m’ont encadré tout au long de mon stage. J’ai beaucoup appris à leurs côtés : leur disponibilité, leurs conseils et leur aide m’ont été d’un grand secours, jusque dans la rédaction de ce rapport.

Je tiens aussi à remercier mon tuteur à l’ENS, Frédéric Chevy, qui m’a patiemment aidé et conseillé lors de ma recherche de stage, ainsi que Jean Dalibard pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Enfin, je remercie l’ensemble des membres de l’équipe du LKB, chercheurs, techniciens et doctorants, et notamment ceux de l’équipe “atomes-froids”, pour leur accueil et l’aide qu’ils ont pu m’apporter.

Table des matières

Introduction	1
1 Principes du refroidissement laser et application à l'ytterbium	2
1.1 Force de radiation	2
1.2 Ralentissement Zeeman et mélasses optiques	2
1.2.1 Ralentisseur Zeeman	2
1.2.2 Refroidissement Doppler	3
1.2.3 Températures limites de refroidissement	3
1.3 Le cas de l'ytterbium	4
1.3.1 Niveaux atomiques de l'ytterbium	4
1.3.2 Ralentissement Zeeman	5
1.3.3 Piège magnéto-optique	5
2 Réalisation d'un laser à 399 nm par doublage de fréquence	5
2.1 Génération de Second Harmonique : principes généraux	6
2.1.1 Optique non-linéaire dans l'approximation paraxiale	6
2.1.2 Optique non-linéaire du second ordre	7
2.2 Doublage de fréquence : le cas de l'onde plane	7
2.2.1 Influence du désaccord de phase Δk	8
2.2.2 Le cas de l'accord de phase parfait : $\Delta k = 0$	8
2.2.3 Quasi-accord-de-phase (<i>quasi-phase-matching</i>)	9
2.3 Doublage de fréquence : les faisceaux gaussiens	10
2.3.1 Faisceaux gaussiens	10
2.3.2 Théorie de Boyd-Kleinman	11
2.4 Un laser à 399 nm par doublage de fréquence	12
2.4.1 Le choix d'un cristal doubleur : ppKTP	12
2.4.2 Vérification expérimentale des propriétés de cristal	13
3 Optimisation de la puissance laser : doublage en cavité	13
3.1 Résonateur optique	14
3.1.1 Nécessité d'un doublage en cavité	14
3.1.2 Schéma général de la cavité optique	14
3.1.3 Stabilité et modes propres	15
3.1.4 Modes longitudinaux et transverses	15
3.1.5 Calcul des modes propres de la cavité et choix du point de fonctionnement	16
3.2 Doublage de fréquence dans une cavité optique	18
3.2.1 Puissance intra-cavité : pertes passives et efficacité de couplage	18
3.2.2 Efficacité du doublage	19
3.2.3 Effets thermiques et pertes actives	20
3.3 Stabilisation de la cavité	22
3.3.1 Asservissement de la cavité	22
3.3.2 Les problèmes du régime continu	22
Conclusion	23
Références	25
A Faisceaux gaussiens et modes de Hermite-Gauss	27
B Optique matricielle	28
C Théorie de Boyd-Kleinman	29

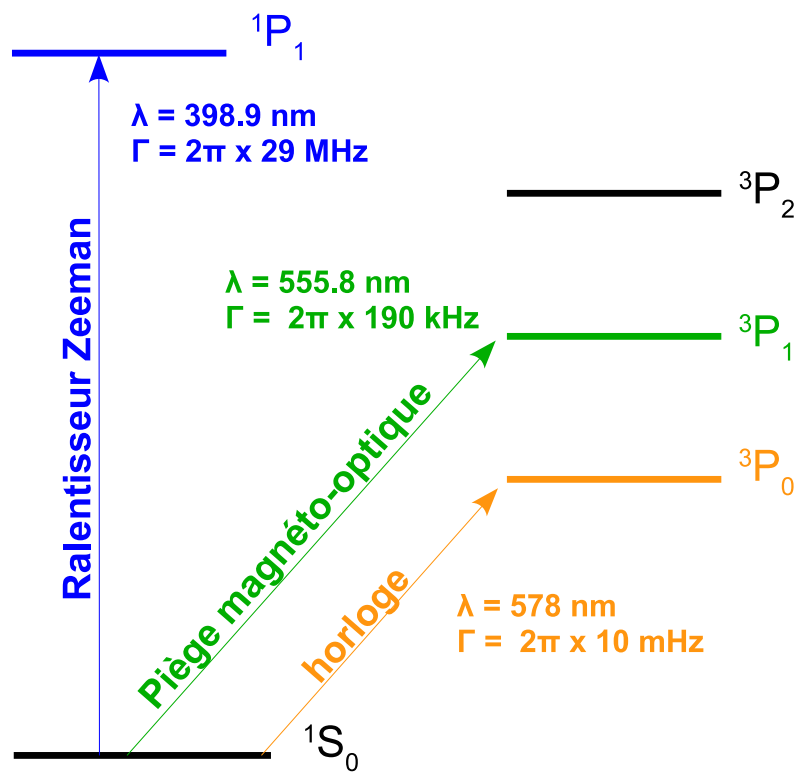


FIGURE 2 – Niveaux atomiques de l'atome d'ytterbium.

Introduction

Atomes froids et simulateurs quantiques

Les gaz atomiques, lorsqu'ils sont refroidis à des températures inférieures au *microkelvin*, montrent des propriétés surprenantes (superfluidité, cohérence...) traduisant l'apparition de comportements quantiques collectifs. Dans les années 1980, le développement de techniques de refroidissement par laser a rendu possible l'étude expérimentale de tels systèmes. Les efforts engagés par les expérimentateurs se sont poursuivis, dans les années 1990, avec pour point de mire l'observation de la condensation de Bose-Einstein ; cette dernière vaudra en 2001 le prix Nobel à Eric Cornell, Carl Wieman et Wolfgang Ketterle, qui furent les premiers à atteindre ce régime de dégénérescence quantique, à quelques mois d'intervalle en 1995. Depuis, le nombre d'espèces atomiques étudiées a explosé, et de nombreux groupes utilisent ce nouvel outil pour étudier les manifestations de la mécanique quantique à basse énergie.

La maîtrise du refroidissement d'un nombre croissant d'espèces, fermioniques comme bosoniques, ainsi que la flexibilité des conditions expérimentales (potentiel de piégeage modelable, dimensionalité et interactions modifiables, études sur réseaux...) font des systèmes d'atomes froids de bons candidats pour la réalisation de simulateurs quantiques. Proposés pour la première fois en 1982 par Richard Feynman [1], ces derniers ont pour but – à l'instar des calculateurs analogiques électriques ou mécaniques – de simuler des systèmes quantiques modèles (matière condensée, physique atomique) *via* l'utilisation d'un système physique témoin, obéissant aux mêmes équations. À la clé, un gain de temps de calcul, en comparaison avec la résolution analytique ou numérique du même problème *via* des méthodes de calcul standard. Les gaz d'atomes ultra-froids permettent ainsi d'étudier des problèmes de physique à N corps quantique sur un système dilué et bien contrôlé. L'utilisation d'atomes piégés sur réseau a en effet déjà permis d'observer des phénomènes quantiques prédits par la théorie : transition superfluide / isolant de Mott [2], localisation d'Anderson [3, 4] dans un potentiel désordonné...

Simulations de champs de jauge artificiels

L'objet du projet proposé par Jérôme Beugnon, Jean Dalibard et Fabrice Gerbier consiste à utiliser un gaz d'ytterbium ultrafroid piégé sur réseau afin de simuler des champs de jauge artificiels [5]. L'ytterbium a la particularité, à l'instar des alcalino-terreux, des posséder un état excité 3P_0 dont la durée de vie excède dix secondes. En outre, il existe une longueur d'onde – dite *magique* – pour laquelle la force dipolaire ressentie par cet état excité métastable est la même que celle ressentie par le fondamental ; en utilisant une autre longueur d'onde – dite *anti-magique* – ces forces sont exactement opposées. Cette particularité permet la réalisation d'un double réseau, alternant des colonnes piégeant l'état fondamental et l'état excité métastable. Le passage d'un site à un autre se fait par excitation laser, ce qui permet d'imprimer une phase non-nulle sur une trajectoire fermée (effet Aharonov-Bohm), correspondant à la description quantique du magnétisme orbital d'une particule chargée sur réseau. Un tel système permet ainsi de simuler, avec des atomes neutres, la réponse d'un système quantique de particules soumis à un champ magnétique. La flexibilité des conditions expérimentales ouvre la voie à l'étude de divers phénomènes, incluant l'effet Hall quantique entier (pour des fermions sans interactions) ou fractionnaire (pour des fermions ou des bosons en interaction forte).

Vers le refroidissement de l'atome d'ytterbium

Le refroidissement de l'atome d'ytterbium, premier pas sur le chemin de la réalisation du simulateur quantique, a déjà été réalisé expérimentalement par l'équipe de Y. Takahashi, de l'université de Kyoto [6, 7, 8]. L'objet de ce stage est la réalisation et l'optimisation d'un système laser accordé sur la transition $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ de l'atome d'ytterbium ($\lambda = 399$ nm), destiné au ralentissement Zeeman du jet atomique en sortie du four. La solution adoptée consiste à doubler en fréquence une diode laser à 798 nm, amplifiée par un TA^1 (système commercialisé par *Toptica*). Le doublage est optimisé grâce à l'utilisation d'une cavité optique, permettant l'exaltation du signal infra-rouge à doubler.

Après avoir rapidement introduit les concepts fondamentaux du refroidissement laser et les spécificités de leur application à l'atome d'ytterbium, nous nous intéresserons ainsi au phénomène de doublage de fréquence et à sa mise en œuvre expérimentale. Nous traiterons ensuite de la réalisation

1. Tapered Amplifier

et de l'asservissement d'une cavité optique résonnante, permettant d'optimiser la puissance doublée. Nous présenterons alors les résultats expérimentaux concernant la puissance couplée dans la cavité et l'efficacité du doublage de fréquence intra-cavité. Nous discutons finalement les effets thermiques qui apparaissent à forte puissance. Ces effets, importants quand la seconde harmonique est dans le bleu, rendent délicate la stabilisation de la cavité.

Réalisations expérimentales

Comme nous le verrons dans la suite de ce rapport, le refroidissement de l'atome d'ytterbium nécessite l'utilisation de deux lasers accordés sur deux transitions atomiques différentes : un laser à 399 nm (bleu) est utilisé pour le ralentissement Zeeman, tandis qu'un laser à 556 nm (vert) est nécessaire pour la réalisation d'un piège magnéto-optique. Le laser vert que nous utiliserons a d'ores et déjà été conçu par Sebastian Krinner au cours d'un stage, et utilise une technique similaire à celle utilisée pour le laser bleu (doublage en cavité d'un laser fibré à 1112 nm). Il n'est cependant pas sujet aux effets thermiques que nous évoquerons dans le cas du laser bleu. J'ai eu l'occasion au début de mon stage de remonter l'intégralité de la chaîne optique de ce laser (pour des raisons de compacité). Après optimisation du couplage dans la cavité, il a ainsi été possible de générer 1 W de lumière à 556 nm.

Je me suis alors consacré dans le cadre de mon stage à la réalisation du laser bleu à 399 nm, utilisant une technique similaire au laser vert précédemment conçu, mais avec des spécificités que nous évoquerons au long de ce rapport. J'ai ainsi pu monter l'intégralité de la chaîne optique du laser, ainsi que la cavité optique. La stabilisation de la cavité, qui sera évoquée dans la dernière partie de ce rapport, a quant à elle nécessité la réalisation et l'optimisation d'un circuit électronique d'asservissement standard.

1 Principes du refroidissement laser et application à l'ytterbium

1.1 Force de radiation

Le refroidissement laser, dont la théorie fut introduite en 1975 par Hänsch et Schawlow [9], avant d'être mis en œuvre expérimentalement dans les années 1980 avec le ralentissement d'un jet atomique [10] et l'observation des mélasses optiques, se fonde sur l'utilisation de la force de radiation ressentie par un atome soumis à un champ lumineux laser : l'absorption d'un photon s'accompagne d'un transfert de son impulsion $\hbar\mathbf{k}$ vers l'atome. Le processus d'émission spontanée qui suit l'absorption ayant lieu dans une direction aléatoire, son effet se moyenne à zéro et le transfert moyen d'impulsion que connaît l'atome durant une période T est $\Delta\mathbf{p} = \mathcal{N}(T)\hbar\mathbf{k}$, où $\mathcal{N}(T)$ est le nombre de cycles absorption/émission spontanée se déroulant sur la période T . La force de radiation ressentie par l'atome est alors [11] :

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \Gamma_{\text{sp}}\hbar\mathbf{k} , \quad (1)$$

où $\Gamma_{\text{sp}} = (\Gamma/2)s/(1+s)$ est le taux d'émission spontanée, avec Γ : largeur naturelle de la raie atomique, et s : paramètre de saturation² (pour un laser accordé sur la transition atomique, on a $s = I/I_{\text{sat}}$). Cette force peut être utilisée pour ralentir un jet atomique (ralentisseur Zeeman), puis pour refroidir et piéger les atomes (mélasse optique, piège magnéto-optique³).

1.2 Ralentissement Zeeman et mélasses optiques

1.2.1 Ralentisseur Zeeman

La première étape du refroidissement d'atomes consiste à ralentir un jet atomique, issu par exemple d'un four, afin de pouvoir capturer les atomes dans un piège en vue d'un refroidissement plus poussé. Nous utilisons pour ce faire un ralentisseur Zeeman, dont le principe a été démontré par l'équipe de William Phillips [10].

2. La démonstration de ces formules et l'expression des divers paramètres en jeu peuvent être trouvées dans de nombreuses références (voir par exemple les notes du cours "Atomes ultra-froids" donné par Jean Dalibard au DEA de Mécanique Quantique de l'ENS [11])

3. *Magneto-Optical Trap* : MOT



FIGURE 3 – Schéma de principe du refroidissement Doppler.

Considérons un atome se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} , soumis à un champ laser contra-propageant de vecteur d'onde \mathbf{k} . On note ω la fréquence laser, et ω_0 celle de la transition atomique. L'atome est soumis à la force de radiation $\mathbf{F}_{\text{rad}}(\delta)$, où $\delta = \omega - \omega_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ prend en compte le décalage Doppler. Cette force sera maximale pour $\delta = 0$, ce qui donne la condition $\omega = \omega_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_0 - kv$: le laser doit être désaccordé vers le rouge par rapport à la transition afin de ralentir efficacement l'atome. Un jet atomique soumis à une telle force verra ainsi sa vitesse diminuer.

Cependant, le ralentissement du jet change la condition de résonance, et le refroidissement n'est optimal que pour une vitesse donnée. Ce problème peut être contourné en ajoutant un champ magnétique \mathbf{B} dont l'intensité varie le long de la trajectoire du jet atomique. Par effet Zeeman, la condition de résonance est modifiée en $\delta = \omega - \omega_0 - kv(z) - \gamma m B(z)$, où l'on a introduit le facteur gyromagnétique γ et l'état de spin m ⁴. L'équation $\delta = 0$ fixe alors la dépendance spatiale de $B(z)$, et la pression de radiation est maximale tout au long du refroidissement pour une vitesse initiale v_0 donnée à l'entrée du ralentisseur (en principe, toute vitesse $v < v_0$ finit par "accrocher" en une région du ralentisseur donnée et se voit également ralentie).

1.2.2 Refroidissement Doppler

Considérons maintenant un atome soumis à deux champs lasers contra-propageants de même intensité, désaccordés vers le rouge de la transition atomique. Si l'atome est immobile, la moyenne des forces exercées par les deux faisceaux s'annule. Si l'atome se déplace à l'encontre de l'un des faisceaux, la fréquence de ce faisceau vue par l'atome augmente par effet Doppler, ce qui la rapproche de la condition de résonance avec la transition atomique. Par le même effet, l'autre faisceau s'éloigne de la condition de résonance : ainsi, la force totale ressentie par l'atome est dominée par le faisceau laser venant à son encontre. L'atome est ainsi "freiné" par la combinaison des deux faisceaux.

Il est alors possible de montrer que la force totale subie par l'atome se met sous la forme d'un frottement fluide $F_{\text{tot}} = -\alpha v$. Les atomes sont alors refroidis par cette friction lumineuse, ce qui a valu à ce dispositif son nom de *mélasse optique*. La situation est directement généralisable à trois dimensions, avec trois jeux de lasers contra-propageants.

Il faut noter qu'un tel dispositif se contente de freiner – *i.e.* de refroidir – les atomes, mais ne permet pas de les piéger : ils auront au sein de la mélasse un mouvement *brownien*, les conduisant finalement à sortir de cette dernière. Une solution à ce problème a été proposée par Jean Dalibard, et consiste à transformer la *mélasse optique* en *piège magnéto optique* (PMO) : on affecte aux faisceaux laser contra-propageants des polarisations circulaires opposées, et on ajoute un gradient de champ magnétique ($\mathbf{B} = 0$ au centre du piège). Par effet Zeeman, le champ magnétique change la condition de résonance pour les différents états de spin de l'état excité. Ainsi, un atome s'éloignant trop du centre du piège sera soumis à un champ magnétique plus important, rapprochant le laser venant à son encontre de la condition de résonance : il sera alors, quelle que soit sa vitesse, soumis à une force de rappel magnéto-optique le rapprochant du centre du piège : $F_{\text{tot}} = -\alpha v - \kappa x$ (à une dimension).

1.2.3 Températures limites de refroidissement

Limite Doppler La température finale obtenue lors d'un refroidissement Doppler dans une mélasse optique est limitée par les fluctuations de la force de radiation, dues au processus aléatoire d'émission spontanée. On a un problème du type force de Langevin, avec $\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\alpha \mathbf{v} + \delta \mathbf{F}$, où $\delta \mathbf{F}$ a une moyenne temporelle nulle. La température Doppler limite, obtenue pour un désaccord optimal de $\delta = -\Gamma/2$, est alors donnée par [11] :

4. On considère pour simplifier une transition $J = 0 \rightarrow J = 1$. Sinon, on devrait introduire la différence de l'état de spin Δm entre les états de la transition.

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}, \quad (2)$$

où k_B est la constante de Boltzmann.

Refroidissement Sub-Doppler Lors des premiers essais de refroidissement dans une mélasse optique, en 1988, l'équipe de William Phillips constata avec surprise que les températures obtenues étaient bien inférieures à la limite Doppler attendue [12]. Les phénomènes à l'origine de ce refroidissement sub-Doppler ont été identifiés par Claude Cohen-Tannoudji et Jean Dalibard [13]. On compte parmi eux le refroidissement *Sisyphes*, dû à l'apparition d'un gradient de polarisation lors de l'interférence des paires de faisceaux contra-propageants formant la mélasse optique.

1.3 Le cas de l'ytterbium

Maintenant que nous avons introduit les concepts de base du refroidissement par laser, il s'agit de les appliquer au cas qui nous intéresse, à savoir celui de l'ytterbium. Nous verrons que la réalisation d'un ralentisseur Zeeman et d'un PMO nécessite l'utilisation de deux lasers, accordés sur des transitions atomiques différentes.

1.3.1 Niveaux atomiques de l'ytterbium

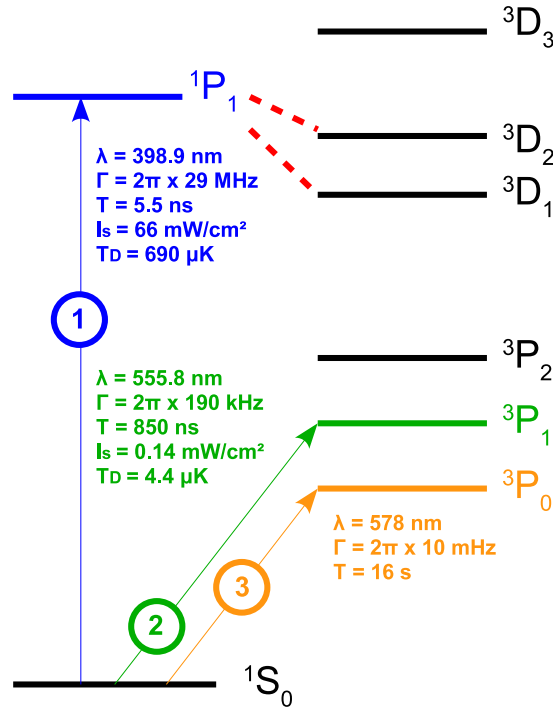


FIGURE 4 – Niveaux atomiques de l'Yb

L'atome d'ytterbium ($Z=70$) est un lanthanide. Il possède deux électrons de valence, à l'instar de l'hélium ou des alcalino-terreux comme le strontium ou le calcium, et a de ce fait une structure de niveaux d'énergies semblable à celle de ces derniers. Les premiers états excités comptent ainsi un état singulet $1P_1$ et trois états triplets $3P_0$, $3P_1$, et $3P_2$. Parmi les transitions de basse énergie, nous retiendrons la transition bleue $1S_0 \rightarrow 1P_1$ (1 de la figure 4), la transition verte $1S_0 \rightarrow 3P_1$ (2) et la transition d'horloge $1S_0 \rightarrow 3P_0$ (3).

La transition bleue est une transition large, autorisée dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique (conservation du spin, $\Delta L = 1$). Sa largeur naturelle ($\Gamma = 2\pi \times 29 \text{ MHz}$) permet un refroidissement Doppler efficace, la force de radiation étant proportionnelle à Γ (cf. équation 1). La transition verte, quant à elle, ne remplit pas les règles de sélection des transitions dipolaires électriques (non-conservation du spin). Cependant, à cause d'un fort couplage spin-orbite, il est nécessaire

d'introduire un troisième nombre quantique $J = L + S$. La nouvelle règle de sélection devient alors $\Delta J = \pm 1$, et la transition $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ est autorisée. Elle est néanmoins plus fine que la première ($\Gamma = 2\pi \times 190 \text{ kHz}$), mais reste intéressante pour le refroidissement grâce à une température Doppler très basse ($T_D = 4.4 \mu\text{K}$).

La dernière transition doit son nom de *transition d'horloge* à sa très grande finesse ($\Gamma = 2\pi \times 10 \text{ mHz}$). Elle est notamment utilisée dans les horloges atomiques utilisant des alcalino-terreux comme le strontium. En ce qui nous concerne, l'état métastable 3P_0 associé à cette transition sera utilisé pour la réalisation de champ de jauges artificiels. Elle est permise *via* le couplage hyperfin⁵, qui couple faiblement les états 3P_0 et 3P_1 .

1.3.2 Ralentissement Zeeman

Afin d'obtenir un ralentissement Zeeman efficace, il est nécessaire de maximiser la force de radiation subie par le jet atomique. Il est alors naturel de choisir la transition la plus large. Nous utiliserons donc logiquement la transition à 399 nm ($^1S_0 \rightarrow ^1P_1$). L'objet de mon stage est ainsi la conception d'un laser accordé sur cette transition, qui est rapportée dans les parties 2 et 3 du présent rapport.

1.3.3 Piège magnéto-optique

Le choix de la transition utilisée pour le piège magnéto-optique est plus subtil. En effet, si la transition bleue (la plus large) offre un certain confort d'utilisation, l'existence de transitions entre le niveau 1P_1 et les niveaux 3D (en rouge sur la figure 4), suivies de désexcitations vers des niveaux métastables 3P_2 et 3P_0 , empêche le piégeage d'un nombre important d'atomes [14]. De plus, le fondamental 1S_0 de l'ytterbium ayant un spin nul, il n'y a pas de schéma de refroidissement sub-Doppler (du type Sisyphe) possible pour cette espèce atomique. La température limite est alors donnée par la température Doppler ($T_D = 690 \mu\text{K}$), un à deux ordres de grandeur au-dessus des températures sub-Doppler habituellement atteintes avec un PMO.

La transition verte $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ est quant à elle une bonne candidate à la réalisation d'un PMO pour l'ytterbium [15]. Elle ne présente pas de fuites possibles vers des états méta-stables, et possède une température Doppler extrêmement basse ($T_D = 4.4 \mu\text{K}$). Sa finesse réduit cependant la vitesse maximale de capture, au delà de laquelle un atome ne sera pas piégé ($v_{\text{capt}} \propto \sqrt{\Gamma}$). Ce problème peut être contourné en ajoutant des bandes latérales de fréquence aux faisceaux du PMO, permettant un "élargissement" artificiel de la transition pour la capture. Nous utiliserons donc la transition verte pour la réalisation du piège magnéto-optique.

2 Réalisation d'un laser à 399 nm par doublage de fréquence

Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce rapport, la transition bleue $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ (399 nm) est la meilleure candidate pour la conception d'un ralentisseur Zeeman destiné à l'ytterbium. Plusieurs options technologiques s'offrent à nous pour la réalisation d'un laser accordé sur cette transition. La première option est l'utilisation de diodes laser ultraviolettes. Malheureusement, le standard blu-ray (405 nm) est trop éloigné de notre longueur d'onde pour que nous puissions profiter de l'offre industrielle qu'il suscite. L'autre option consiste à doubler un laser infrarouge ($\lambda = 798 \text{ nm}$) en utilisant un cristal non-linéaire. Des solutions commerciales, utilisant un laser Titane-Saphir couplé à une cavité contenant un cristal doubleur, sont disponibles, mais à un prix prohibitif. Une autre solution consiste à utiliser une diode laser infra-rouge, amplifiée par un TA ⁶, permettant de fournir des puissances de l'ordre de 500 mW (système commercial vendu par *Toptica*). Afin d'obtenir une puissance acceptable de bleu ($I_{\text{sat}} = 66 \text{ mW/cm}^2$ pour la transition considérée), il est nécessaire d'optimiser le doublage *via* l'utilisation d'un résonateur optique (cavité optique). C'est cette solution que nous avons choisie.

Nous allons ainsi commencer par présenter le principe général du doublage de fréquence, dans le cas des ondes planes puis des faisceaux gaussiens, avant de présenter les résultats expérimentaux obtenus pour le doublage d'un faisceau à 798 nm. L'optimisation de la puissance doublée *via* l'utilisation d'une cavité optique fera quant à elle l'objet de la dernière et troisième partie de ce rapport.

5. Cette explication ne concerne que les isotopes fermioniques, qui possèdent un spin nucléaire non nul. Pour les isotopes bosoniques, un champ magnétique peut permettre le couplage.

6. Tapered Amplifier

2.1 Génération de Second Harmonique : principes généraux

La génération de second harmonique, ou doublage de fréquence, est un phénomène d'optique non linéaire du second ordre permettant l'obtention d'un signal de pulsation $\omega_2 = 2\omega$ à partir d'un signal pompe à $\omega_1 = \omega$. La première observation expérimentale de ce phénomène, rendue possible par l'invention du laser, date de 1961 [16]. Cette technique est largement utilisée de nos jours pour obtenir des lasers dans le visible ou le proche ultra-violet à partir de laser infra-rouges, dont la technologie est souvent mieux maîtrisée.

2.1.1 Optique non-linéaire dans l'approximation paraxiale

Précisons tout d'abord les notations que nous allons utiliser. Au sein d'un milieu matériel non magnétique, nous considérons les champs déplacement électrique et induction usuels :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} , \quad (3)$$

où \mathbf{P} est la polarisation induite par le champ incident dans le milieu. Le champ \mathbf{E} étant réel, nous pouvons définir le champ complexe \mathcal{E} comme suit ⁷ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t)] = \Re[\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)] , \quad (4)$$

et l'on peut définir de même la polarisation complexe \mathcal{P} (nous oublions dans la suite du rapport l'aspect vectoriel de ces champs). On obtient les équations de propagation du champ complexe à partir des équations de Maxwell pour un milieu matériel, ce qui donne dans l'espace de Fourier ⁸ :

$$\Delta \mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{P}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (5)$$

et l'on pose :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{P}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) + \mathcal{P}^{(N.L.)}(\mathbf{r}, \omega) . \quad (6)$$

On peut dès à présent inclure la réponse linéaire : pour un milieu isotrope, $\mathcal{P}^{(1)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \mathcal{E}(\omega)$. En posant $n(\omega)^2 = 1 + \chi^{(1)}(\omega)$ et $k(\omega) = n(\omega)\omega/c$ on obtient l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k(\omega)^2) \mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{P}^{(N.L.)}(\mathbf{r}, \omega) . \quad (7)$$

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre de l'approximation paraxiale. On considère la propagation d'un faisceau monochromatique de fréquence ω , caractérisé par un vecteur d'onde $k = k(\omega)$. Ce faisceau diffère d'une onde plane en ce que son extension transverse est finie. On peut cependant décrire le champ électrique correspondant sous la forme du produit d'une enveloppe $\mathcal{A}(x, y, z)$ et d'une porteuse e^{ikz} :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{A}(x, y, z) e^{ikz} . \quad (8)$$

L'approximation paraxiale consiste à considérer que l'enveloppe \mathcal{A} varie lentement avec z , soit $\partial^2 \mathcal{A} / \partial z^2 \ll k \partial \mathcal{A} / \partial z$. L'équation (7) devient alors :

$$\Delta_{\perp} \mathcal{A} + 2ik \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{P}^{(N.L.)}(x, y, z, \omega) e^{ik(\omega)z} , \quad (9)$$

où on a introduit $\Delta_{\perp} \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$.

7. Nous prenons pour définition de la transformée de Fourier la formule suivante : $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$

8. On a négligé l'angle de double réfraction, ce qui élimine le terme en $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$.

2.1.2 Optique non-linéaire du second ordre

Considérons la propagation d'une onde monochromatique de pulsation $\omega_1 = \omega$ au sein d'un milieu présentant une non-linéarité d'ordre 2 ($\chi^{(2)} \neq 0$). L'onde incidente est donnée, en notation complexe, par :

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t} . \quad (10)$$

Ainsi, le champ électrique incident $E_1 = \Re[\mathcal{E}_1]$ possède des composantes complexes oscillant à $\pm\omega$, et va, *via* la polarisabilité d'ordre deux, générer un champ \mathcal{E}_2 de fréquence $\omega_2 = 2\omega$. La polarisation non-linéaire d'ordre 2 est reliée au carré du champ électrique total *via* la susceptibilité $\chi^{(2)}$ suivant [17] :

$$P^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_{tot}^2 \quad (11)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{4} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2^*)^2 \quad (12)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \left(\underbrace{|\mathcal{E}_1|^2}_{\text{statique}} + \underbrace{\mathcal{E}_1^2}_{-2\omega} + \underbrace{\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2}_{-\omega} + c.c. + O(\mathcal{E}_2^2) \right) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + c.c.) , \quad (14)$$

où l'on a mis de côté le terme de redressement correspondant à une polarisation statique du milieu, ainsi que les termes d'ordre $(E_2)^2$ ⁹. On a :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{2} \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \quad (15)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{2} \mathcal{E}_1^2 . \quad (16)$$

Nous avons ici une superposition d'ondes monochromatiques, de fréquences ω_1 et ω_2 . L'équation 9 se scinde alors en deux équations portant sur chacune des composantes de Fourier du champ, et donne le système suivant :

$$\{\Delta_\perp + 2ik_1\partial_z\} \mathcal{A}_1 = -\frac{\chi^{(2)}\omega_1^2}{2c^2} \mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2 e^{-i\Delta k z} \quad (17)$$

$$\{\Delta_\perp + 2ik_2\partial_z\} \mathcal{A}_2 = -\frac{\chi^{(2)}\omega_2^2}{2c^2} \mathcal{A}_1^2 e^{i\Delta k z} , \quad (18)$$

où l'on a posé $k_i = n_i \omega_i / c$, $n_i = n(\omega_i)$, et où l'on a introduit le désaccord de phase $\Delta k = 2k_1 - k_2$. Dans la suite, afin de simplifier les calculs et le raisonnement, nous considérerons que la puissance doublée est faible : le champ incident (\mathcal{A}_1) n'est pas affecté par le processus de doublage, ce qui revient à négliger le terme en \mathcal{A}_2 dans l'équation (17). Cette approximation est connue sous le nom d'*approximation de non-déplétion de la pompe*¹⁰.

2.2 Doublage de fréquence : le cas de l'onde plane

Considérons tout d'abord le cas le plus simple – mais non physique – de l'onde plane : on oublie la dépendance en x et y de l'enveloppe. Dans le cadre de l'approximation de non-déplétion, l'amplitude de l'onde incidente \mathcal{A}_1 est une constante que nous noterons A_0 . L'évolution du champ doublé est alors donné par :

$$\frac{d\mathcal{A}_2}{dz} = i \frac{\chi^{(2)}\omega_2}{4cn_2} A_0^2 e^{i\Delta k z} . \quad (19)$$

9. On va dans la suite se placer dans l'approximation de non-déplétion de la pompe, ce qui reviendra à négliger les termes d'ordre \mathcal{E}_2 dans les équations d'évolution, et donc *a fortiori* les termes d'ordre \mathcal{E}_2^2 .

10. *undepleted pump approximation*.

Si l'on considère la propagation sur une longueur L , avec comme condition initiale $\mathcal{A}_2(0) = 0$, on intègre facilement cette équation en :

$$\boxed{\mathcal{A}_2(L) = \frac{i\chi^{(2)}\omega_2}{2n_2c} \frac{A_0^2}{\Delta k} \sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) e^{i\frac{\Delta k L}{2}}} . \quad (20)$$

2.2.1 Influence du désaccord de phase Δk

Il n'y a *a priori* pas de raisons que Δk soit nul. Pour $\Delta k \neq 0$, l'évolution de l'intensité de l'onde produite par le doublage de fréquence évolue sinusoidalement lors de sa propagation au sein du milieu non-linéaire, soit :

$$I_2(z) \propto |\mathcal{A}_2|^2 \propto \sin\left(\frac{\Delta k z}{2}\right)^2 . \quad (21)$$

On remarque que le doublage est maximal après une propagation sur $z_1 = \pi/\Delta k$ puis retombe à zéro à $z_2 = 2\pi/\Delta k$. Il est alors possible de donner une signification physique simple au désaccord de phase Δk . En effet, le champ doublé \mathcal{E}_2 est généré de façon cohérente – et donc en phase – par le carré du champ incident \mathcal{E}_1^2 , qui se propage avec une porteuse $e^{2ik_1 z}$. Le champ \mathcal{E}_2 ainsi créé se propage alors avec un vecteur d'onde k_2 . A cause du désaccord Δk , les composantes du champ \mathcal{E}_2 créées en différents points n'oscilleront pas en phase, et certaines interféreront destructivement.

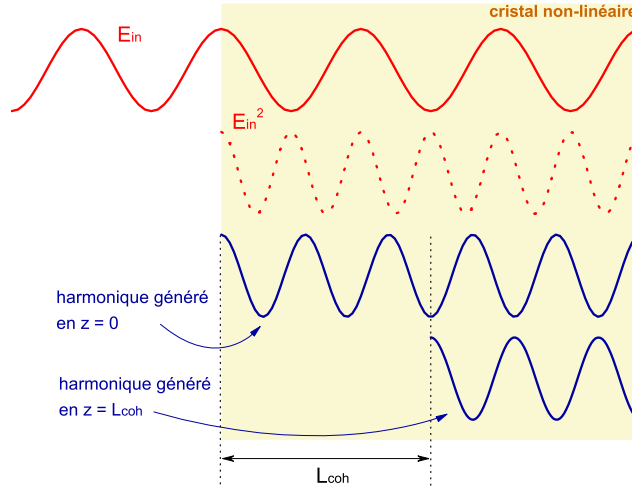


FIGURE 5 – Interprétation de Δk : les harmoniques créés en $z = 0$ et $z = \pi/\Delta k$ interfèrent destructivement.

Plus précisément, considérons l'interférence entre la composante du champ créée en $z = 0$ et celle générée en $z = L_{\text{coh}} = \pi/\Delta k$. La phase de la première est donnée par $e^{ik_2 z}$, tandis que celle de la deuxième évolue en $e^{i(2k_1 L_{\text{coh}} + k_2(z - L_{\text{coh}}))} = e^{i(k_2 z + \pi)}$: ces deux composantes, en opposition de phase, interfèrent destructivement ! Il en sera de même pour les composantes générées en $z = \delta$ et $z = \delta + L_{\text{coh}}$, ce qui aboutira à $I_2(2L_{\text{coh}}) = 0$.

2.2.2 Le cas de l'accord de phase parfait : $\Delta k = 0$

La condition la plus favorable au doublage de fréquence est le cas de l'accord de phase parfait, caractérisé par la condition :

$$\Delta k = 0 \Leftrightarrow 2n_1 \frac{\omega_1}{c} = n_2 \frac{\omega_2}{c} \Leftrightarrow \boxed{n_1 = n_2} . \quad (22)$$

À cette condition, l'intensité du second harmonique croît avec le carré de la longueur du milieu non-linéaire utilisé :

$$I_2(L) = \frac{1}{2} n_2 \epsilon_0 c |\mathcal{E}_2|^2 = \frac{(\chi^{(2)})^2 \omega_2^2}{8 n_2 n_1^2 \epsilon_0 c^3} L^2 I_1^2 . \quad (23)$$

La solution la plus aisée pour obtenir cet accord de phase est d'utiliser la biréfringence du cristal non-linéaire permettant le doublage de fréquence. Le cas le plus simple est celui d'un cristal uniaxe. Un tel cristal possède un *axe optique* \mathbf{u} , et se comporte comme suit :

- la lumière polarisée orthogonalement au plan défini par le vecteur d'onde \mathbf{k} et l'axe optique \mathbf{u} voit un indice optique *ordinaire* n_0 ,
- la lumière polarisée dans ce plan voit un indice *extraordinaire* $n_e(\theta)$ dépendant de l'angle θ entre \mathbf{u} et \mathbf{k} .

Plus précisément, on montre que :

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{n_0^2} . \quad (24)$$

Ainsi, $n_e(\theta)$ varie entre deux valeurs extrémales, n_e et n_0 , en fonction de θ . Ces valeurs dépendant aussi de la pulsation ω , il est possible d'obtenir un accord de phase pour des champs ayant des polarisations orthogonales. Par exemple, pour un cristal uniaxe positif ($n_e > n_0$), on peut choisir θ de sorte que $n_0(\omega) = n_{e,\theta}(2\omega)$.

2.2.3 Quasi-accord-de-phase (*quasi-phase-matching*)

L'utilisation de cristaux biréfringents pour obtenir un accord de phase parfait nécessite de contrôler extrêmement précisément l'orientation du cristal (θ) et de le tailler de façon adéquate. Une alternative répandue est d'utiliser la méthode du *quasi* accord de phase (*quasi-phase-matching*). L'idée est la suivante : soient (X, Y, Z) les coordonnées liées aux axes du cristal, et (x, y, z) celles liées au référentiel – fixe – du laboratoire. Si on aligne le cristal avec le repère du laboratoire ($X = x, Y = y, Z = z$), une onde se propageant suivant \mathbf{e}_z et polarisée suivant \mathbf{e}_x engendrera une polarisation électrique :

$$P_x = P_X = \chi_{XXX}^{(2)}(E_X)^2 = \chi^{(2)} E_x^2 . \quad (25)$$

Si l'on fait subir au cristal une rotation de π autour de l'axe optique z ($X = -x, Y = -y, Z = z$), ces formules se transforment en :

$$P_x = -P_X = -\chi_{XXX}^{(2)}(E_X)^2 = -\chi^{(2)}(-E_x)^2 = -\chi^{(2)} E_x^2 . \quad (26)$$

Ainsi, une telle transformation réalise $\chi^{(2)} \rightarrow -\chi^{(2)}$. En effectuant un tel renversement tout les L_{coh} , *i.e.* à chaque fois que les interférences deviennent destructives entre les composantes générées précédemment et celles nouvellement créées, on impose un déphasage de π à ces dernières, qui se trouvent alors en phase avec les premières. Mathématiquement, cette opération revient à introduire une susceptibilité non-linéaire d'ordre deux ayant la dépendance en z suivante :

$$\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} \text{signe}[\cos(2\pi/\Lambda)] , \quad (27)$$

où Λ désigne la période d'inversion de $\chi^{(2)}$. On peut développer cette fonction en série de Fourier, ce qui donne :

$$\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{ik_n z} , \quad (28)$$

avec $k_n = 2\pi n/\Lambda$ et $G_n = (2/n\pi) \sin(n\pi/2)$. On obtient alors l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dA_2}{dz} = i \frac{\chi_0^{(2)} \omega_2}{2cn_2} A_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{i(\Delta k^{(n)} z)} , \quad (29)$$

avec $\Delta k^{(n)} = \Delta k + k_n = \pi/L_{\text{coh}} + n2\pi/\Lambda$. On peut alors fixer Λ pour que la condition d'accord de phase $\Delta k^{(n)} = 0$ soit vérifiée pour un n donné. Alors, seule cette composante contribuera au doublage de manière résonnante – les autres, ne vérifiant pas l'accord de phase, resteront bornées. En choisissant l'accord $\Delta k^{(-1)} = 0$ (la plus grande valeur de G_n , $G_{-1} = 2/\pi$) qui correspond à la valeur intuitée $\Lambda = 2L_{\text{coh}}$, on obtient :

$$\mathcal{A}_2(L) = i \frac{\chi_0^{(2)} \omega_2}{\pi c n_2} A_0^2 L . \quad (30)$$

On peut alors comparer l'efficacité de cette méthode, comparée à celle d'un accord de phase parfait. On a :

$$\frac{I_2^{\text{quasi}}}{I_2^{\text{parfait}}} = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.4 . \quad (31)$$

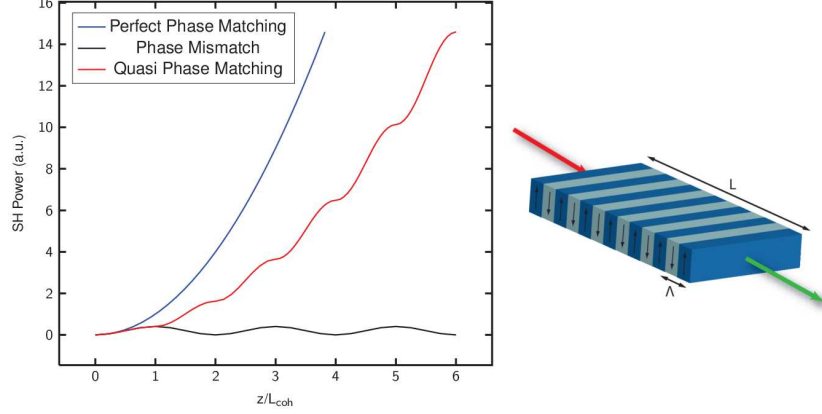


FIGURE 6 – Génération de second harmonique : **à gauche** : évolution de l'intensité du second harmonique lors de la propagation à travers le cristal doubleur dans le cas d'un accord de phase parfait, d'un quasi-accord de phase et d'un désaccord de phase. **à droite** : schéma d'un cristal pp (*periodically poled*), alternant des couches de polarisation renversée.

2.3 Doublage de fréquence : les faisceaux gaussiens

2.3.1 Faisceaux gaussiens

Si la solution en onde plane nous permet d'illustrer de façon simple les phénomènes physiques à l'origine du doublage de fréquence, il est nécessaire d'introduire le profil transverse – fini – du champ lumineux afin d'obtenir des résultats théoriques susceptibles d'être comparés à l'expérience. Le cas le plus simple que l'on peut considérer est celui d'un faisceau circulaire gaussien¹¹.

Dans la suite, nous considérerons donc une solution particulière de l'équation de propagation libre (*i.e.* sans les termes de polarisation non-linéaire), de la forme :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{\exp(-i\psi_0(z))}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \quad (32)$$

$$= \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{kw_0}{2iq(z)} \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right) , \quad (33)$$

où l'on a défini les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} q(z) &= z - iz_R & \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw(z)^2} \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} & z_R &= \frac{kw_0^2}{2} = \frac{n\pi w_0^2}{\lambda} \\ R(z) &= z + \frac{z_R^2}{z} & \psi_0(z) &= \text{atan}\left(\frac{z}{z_R}\right) \end{aligned}$$

11. **NB** : nous sommes toujours dans l'approximation paraxiale, nécessaire à la théorie gaussienne

Le paramètre w_0 est appelé *waist* du laser, et z_R est sa *longueur de Rayleigh*. $\psi_0(z)$, quant à elle, est appelée « phase de Gouy », et est due à la propagation de la partie transverse du champ. Le dernier paramètre définissant un tel faisceau est la position du *waist*, *i.e.* le point auquel le faisceau est focalisé (ici pris à $z = 0$). De plus amples informations concernant les faisceaux gaussiens sont rassemblées dans l'annexe A.

2.3.2 Théorie de Boyd-Kleinman

Il est possible, moyennant quelques hypothèses sur le mode spatial du second harmonique¹², de résoudre les équations (17,18) du doublage dans le cas d'un faisceau incident gaussien, de waist w_0 , focalisé au centre du cristal doubleur. Le calcul a été mené pour la première fois par Boyd et Kleinman [18]. Nous nous contenterons ici d'exposer les résultats concernant la puissance du second harmonique générée (pour plus de détails et un calcul détaillé de cette puissance, se reporter à l'annexe C).

Le principal résultat de Boyd et Kleinman réside dans la prédiction du facteur de rendement en puissance du doublage, α , défini par :

$$P_2 = \alpha P_1^2, \quad (34)$$

où P_2 est la puissance du second harmonique, et P_1 la puissance du champ pompe. La théorie de Boyd et Kleinman donne :

$$\alpha = \frac{\chi^2 \omega_2^3}{16\pi\epsilon_0 c^4} \frac{L}{n_1 n_2} h(a, b), \quad (35)$$

où apparaît le facteur de Boyd-Kleinman $h(a, b)$ défini par :

$$h(a, b) \approx \frac{1}{4a} \left| \int_{-a}^a \frac{e^{ib\tau}}{1 + i\tau} d\tau \right|^2, \quad (36)$$

avec les paramètres adimensionnés $a = L/2z_R$ (paramètre de focalisation) et $b = \Delta k z_R$.

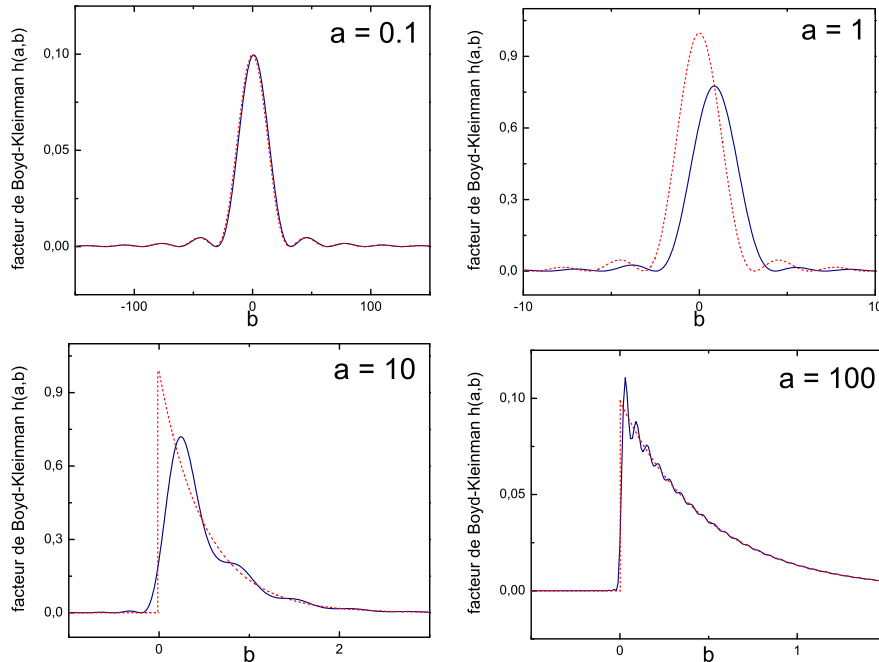


FIGURE 7 – Tracé du facteur de Boyd-Kleinman $h(a, b)$ en fonction de b pour différentes valeurs du paramètre de focalisation a (bleu). On retrouve les comportements limites en sinus cardinal pour $a = 0.1$ ou en décroissance exponentielle pour $a = 100$ (courbes rouges). Il faut noter que ces courbes ont bien une réalité expérimentale : dans la procédure d'optimisation, le facteur a est fixé une fois pour toutes par le mode du faisceau utilisé, et la puissance du second harmonique est optimisée en variant la température, *i.e.* en changeant le désaccord de phase b .

¹². Principalement, ce dernier est supposé gaussien.

Il est possible de donner une valeur simple du facteur h dans deux cas limites :

1. **Cas d'un faisceau collimaté** : ce cas correspond à $z_R \gg L \Leftrightarrow a \ll 1$. On retrouve alors le cas de l'onde plane, avec une dépendance en sinus cardinal :

$$h \sim a \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\Delta k L}{2} \right), \quad (37)$$

2. **Cas d'un faisceau fortement focalisé** : on a $z_R \ll L \Leftrightarrow a \gg 1$. On trouve alors le comportement suivant :

$$h \sim \begin{cases} \frac{\pi^2}{a} e^{-2b} & \text{pour } b > 0, \\ 0 & \text{pour } b \leq 0. \end{cases} \quad (38)$$

Il est intéressant de noter que, dans le cas fortement focalisé, le doublage est nul pour un accord de phase parfait ($\Delta k = 0 \Leftrightarrow b = 0$). Ce phénomène provient d'un terme de déphasage supplémentaire entre les harmoniques générées et le carré du champ pompe, provenant de la phase de Gouy ($\psi(z) = \operatorname{atan} \left(\frac{z}{z_R} \right)$) inhérente à la propagation d'un faisceau gaussien. Dans le cas collimaté, ce terme a une contribution négligeable et l'on retrouve le comportement de l'onde plane.

2.4 Un laser à 399 nm par doublage de fréquence

2.4.1 Le choix d'un cristal doubleur : ppKTP

La première étape vers la réalisation de notre laser à 399 nm est le choix d'un cristal non-linéaire capable de doubler le signal issu de la diode laser amplifiée ($\lambda = 798 \text{ nm}$). L'accord de phase par biréfringence (cf. 2.2) nécessitant un contrôle extrêmement précis de l'angle d'incidence et une taille adéquate du cristal, notre choix s'est porté sur la technique de quasi-accord de phase, utilisant des cristaux traités périodiquement¹³. Le quasi accord de phase est alors obtenu en faisant varier la température du cristal, ce qui va dans un même temps changer l'indice de réfraction du milieu ainsi que la période du traitement par dilatation.

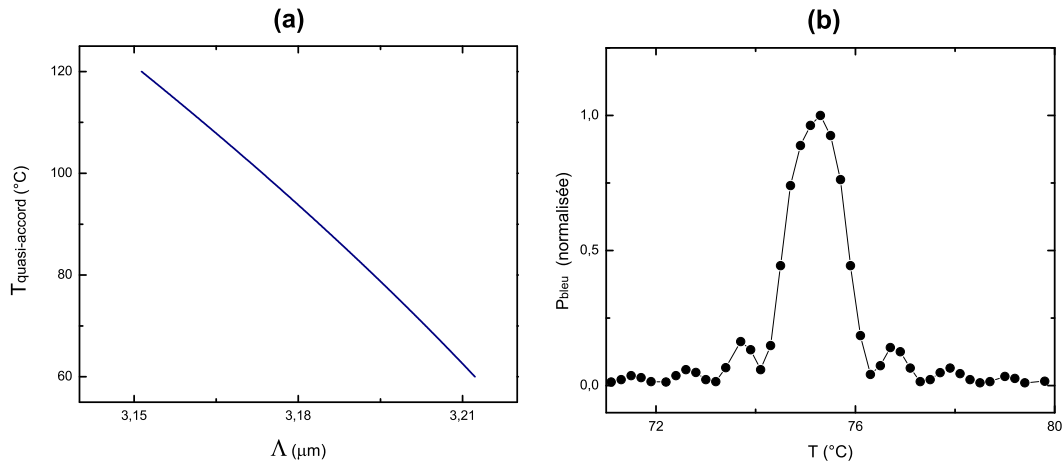


FIGURE 8 – (a) Température de quasi-accord de phase en fonction de la période du traitement (Λ) pour un cristal de ppKTP. Une incertitude de l'ordre d'un centième de micron sur Λ peut entraîner un décalage de plusieurs degrés de la température optimale. (b) Détermination expérimentale de la température optimale pour le doublage. La température trouvée (75.3°C) correspond à $\Lambda \approx 3.20 \mu\text{m}$.

Notre choix s'est arrêté sur le ppKTP, un cristal relativement coûteux. La période d'inversion (*poling period*) commandée est de $\Lambda = 3.18 \mu\text{m}$, ce qui correspond théoriquement à un quasi-accord de phase pour une température entre 80°C et 110°C pour les longueurs d'onde que nous utilisons (cf. figure 8). Le choix d'une température de travail élevée n'est pas anodin : ceci permet de limiter les effets thermiques (absorption infra-rouge induite par le bleu¹⁴, *gray tracking*) affectant le doublage à puissance élevée.

13. *periodically poled crystal*

14. *Blue Induced Infrared Absorption (BLIIRA)*

2.4.2 Vérification expérimentale des propriétés de cristal

Une fois les cristaux reçus (trois pièces de ppKTP commandées à la société *Raicol*), il s'agissait de vérifier expérimentalement leurs caractéristiques. La première étape consiste à trouver la température optimale de doublage. Le cristal est maintenu mécaniquement par un support en cuivre (figure 9), dont la température est maintenue constante par un boîtier d'asservissement électronique et deux résistances de chauffage.

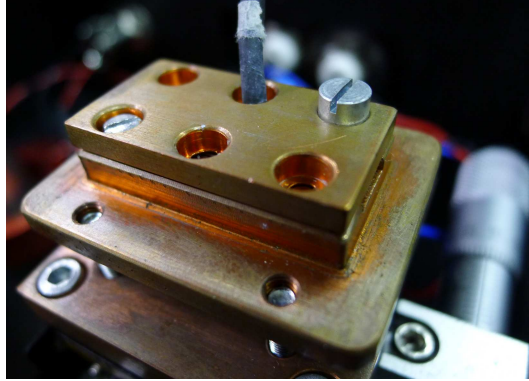


FIGURE 9 – Support en cuivre permettant la stabilité thermique et mécanique du cristal non-linéaire ppKTP.

L'intensité de bleu générée, mesurée par une photodiode, est alors relevée pour différentes températures de consigne. La température du support est obtenue par une source extérieure au circuit d'asservissement : un thermocouple est plongé dans l'un des trous permettant la fixation du capot du support. Notons que cette température peut différer de celle du cristal. Les résultats obtenus sont reportés en figure 8, (b).

La température optimale (75.3°C) se trouve en dehors de la plage initialement souhaitée ($80\text{--}110^{\circ}\text{C}$). Il faut noter qu'un tel écart peut-être facilement expliqué par une erreur minime de la période de traitement ($\Lambda = 3.18\text{ }\mu\text{m}$ correspondait à environ 94°C , tandis que $\Lambda \approx 3.20\text{ }\mu\text{m}$ donne environ 75°C). De plus, un mauvais alignement du cristal peut affecter la périodicité de susceptibilité vue par l'onde lumineuse et de ce fait changer la température d'accord. Enfin, comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, il peut y avoir une différence entre la température mesurée par la sonde et la température réelle au niveau du cristal. Travailler à une température notablement plus basse que celle prévue initialement peut nous être préjudiciable, rendant plus critiques les effets thermiques affectant le phénomène de doublage. La caractérisation de ces effets, ainsi que la mesure de l'efficacité de conversion, seront développées plus en détail dans la troisième et dernière partie de ce rapport.

3 Optimisation de la puissance laser : doublage en cavité

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il est possible de réaliser un laser à 399 nm grâce au doublage de fréquence d'un laser de pompe à 798 nm . Les premiers essais expérimentaux, utilisant le doublage d'une diode laser amplifiée – fournissant une puissance de 500 mW à 798 nm – par simple passage dans un cristal non-linéaire de ppKTP, ont montré qu'il était possible de générer quelques milliwatts de bleu à une température optimale d'environ 75°C . Il s'agit maintenant d'augmenter la puissance de bleu générée afin d'obtenir une puissance compatible avec le refroidissement Zeeman de l'atome d'ytterbium. Pour ce faire, nous utilisons une cavité (résonateur optique) permettant d'exalter le signal infrarouge (la partie non doublée du faisceau est en quelque sorte "recyclée" par la cavité optique).

Ainsi, après avoir introduit les concepts fondamentaux nécessaires à la réalisation d'un tel résonateur, nous présenterons les résultats expérimentaux concernant le doublage en cavité. Nous nous intéresserons notamment au rendement du doublage et à la stabilisation de la cavité. Nous verrons que la présence d'effets thermiques, évoqués dans la partie précédente, complique l'optimisation d'un tel dispositif.

3.1 Résonateur optique

3.1.1 Nécessité d'un doublage en cavité

Afin d'avoir une idée de la puissance de bleu qu'il est possible d'obtenir avec environ 500 mW de pompe infra-rouge en simple passage, nous pouvons nous référer à la formule de Boyd-Kleinman (équation 35). Par exemple, si l'on considère que la pompe est focalisée avec un *waist* de $40\ \mu\text{m}$, ce qui correspond à un paramètre de focalisation $a \approx 0.43$, on obtient une efficacité de conversion $\alpha \approx 1.2\% \text{ W/W}^2$. On peut alors espérer obtenir $P_2 = \alpha P_1^2 \approx 3\text{ mW}$ de bleu.

Cette puissance n'est pas suffisante pour les applications visées. À titre de comparaison, nous avons vu dans la première partie (fig. 4) que l'intensité de saturation de la transition $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ est de 66 mW/cm^2 : cette intensité donne un ordre de grandeur de l'intensité nécessaire au refroidissement Doppler des atomes d'ytterbium sur cette transition atomique. Pour des faisceaux dont l'extension est de l'ordre du cm^2 , il est nécessaire de disposer d'une puissance de l'ordre de la centaine de milliwatts. Avec un rendement de l'ordre de $1\% \text{ W/W}^2$, cela suppose de disposer d'une puissance de pompe de plusieurs watts.

Avec notre source laser, une telle puissance n'est pas accessible en simple passage ; cependant, il est possible d'atteindre de telles puissances en utilisant l'exaltation d'un résonateur optique.

3.1.2 Schéma général de la cavité optique

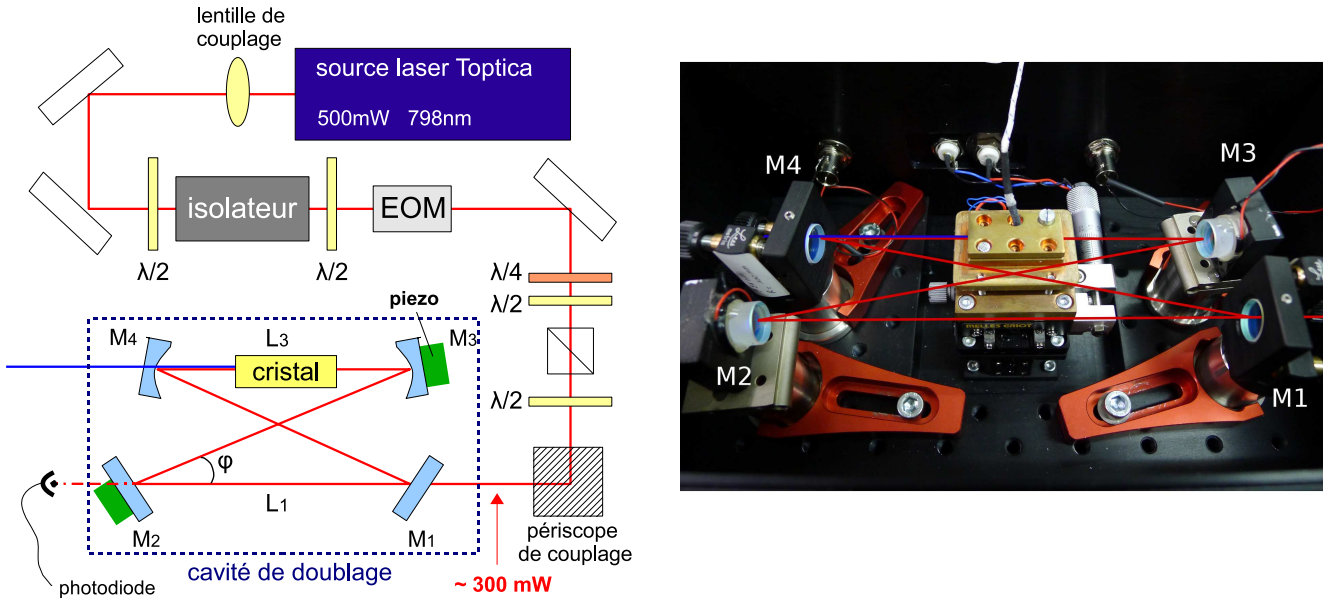


FIGURE 10 – **à gauche** : Schéma complet du montage optique utilisé pour le doublage de fréquence en cavité. **à droite** : Photo de la cavité en anneau utilisée pour le doublage.

Nous utilisons donc une cavité en anneau, en configuration « nœud papillon »¹⁵ – cette configuration est préférable à une cavité linéaire, où la formation d'une onde stationnaire engendre des motifs de haute intensité susceptible d'endommager le cristal ou d'amplifier les effets thermiques en induisant une absorption inhomogène au sein du cristal. Le schéma général du montage utilisé ainsi qu'une photo de la cavité sont exposés dans la figure 10. La cavité est composée d'un coupleur d'entrée (M_1) de transmission $T = 0.09$, d'un deuxième miroir plan de haute réflectivité (M_2) et de deux miroirs concaves (M_3 et M_4 , rayon de courbure 100 mm), constituant le bras « court » (longueur L_3) de la cavité. Le cristal est placé dans ce bras, et les miroirs M_2 et M_3 sont collés sur des actionneurs piézoélectriques, qui permettent un contrôle fin de la longueur de la cavité. L'angle φ caractérisant la cavité est fixé à 12.5° .

15. *bow-tie ring cavity*

3.1.3 Stabilité et modes propres

Considérons un faisceau gaussien¹⁶ se propageant dans la cavité. Il est entièrement caractérisé par son paramètre complexe q (cf. 2.3.1 et l'annexe A). Il est possible de montrer que lors de la traversée d'un composant optique, le faisceau incident q_1 est transformé en un faisceau q_2 suivant la loi :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} , \quad (39)$$

où A, B, C et D sont les coefficients de la matrice $[A, B; C, D]$ caractérisant le composant optique traversé dans le cadre de l'optique matricielle (voir l'annexe B pour l'expression des matrices correspondant aux éléments optiques usuels). Une propriété intéressante de ces matrices est qu'elles ont un déterminant égal à l'unité. Considérons la matrice M_{cav} (coefficients A, B, C et D) caractérisant un tour complet dans la cavité ; un mode q_c sera stable dans cette dernière s'il se reboucle identique à lui-même, c'est-à-dire si :

$$q_c = \frac{Aq_c + B}{Cq_c + D} . \quad (40)$$

Pour que le mode considéré soit physique, il faut de plus que la partie imaginaire de q_c soit non nulle (le contraire correspondrait à un *waist* nul). Si on ajoute cette condition à la propriété énoncée précédemment ($\det(M_{\text{cav}}) = AD - BC = 1$) on trouve la condition de stabilité suivante :

$$\boxed{-1 < m < 1} , \quad (41)$$

où l'on a introduit le paramètre de stabilité $m = (A + D)/2$. Lorsque (41) est vérifiée, il est possible de déterminer le mode propre de la cavité q_c . Notons que notre cavité possède deux plans de symétrie : un au milieu du bras court (L_3 , où se trouve le cristal) et un autre au milieu du bras long (L_1). Les modes propres formeront donc, par des considérations de symétrie, deux *waists* dans la cavité, un au niveau de chaque plan de symétrie. Nous nommerons par la suite ces *waists* w_{crist} et w_{long} , respectivement dans le bras court et le bras long.

3.1.4 Modes longitudinaux et transverses

Outre la condition de stabilité énoncée dans la section précédente, les modes propres doivent obéir à une condition de résonance, traduisant le fait qu'ils doivent se reboucler en phase lors d'un tour dans la cavité. Pour un mode général TEM_{nm} , la phase totale s'exprime sous la forme (cf. annexe A) :

$$\phi_{\text{tot}}(z) = kz - (1 + n + m)\psi_0(z) , \quad (42)$$

où $\psi_0(z)$ est la phase de Gouy définie en 2.3.1. Si l'on considère la propagation sur l'ensemble de la cavité, dont nous notons L_{opt} la longueur optique totale, la condition de résonance s'écrit :

$$kL_{\text{opt}} + (1 + n + m)\psi_{\text{tot}} = 2\pi p , \quad (43)$$

où ψ_{tot} est la phase de Gouy accumulée sur un tour de la cavité, et p désigne un entier. On a alors la formule suivante pour les fréquences (ν) propres de la cavité :

$$\boxed{\nu_{p,n,m} = p\Delta\nu^{\text{FSR}} + (1 + n + m)\Delta\nu^{\text{trans}}} , \quad (44)$$

avec :

$$\Delta\nu^{\text{FSR}} = \frac{c}{L_{\text{opt}}} , \quad \Delta\nu^{\text{trans}} = -\frac{\psi_{\text{tot}}}{2\pi} \frac{c}{L_{\text{opt}}} . \quad (45)$$

L'indice p correspond aux modes longitudinaux, séparés par l'*intervalle spectral libre* (*free spectral range*) $\Delta\nu^{\text{FSR}}$ de la cavité. Les indices n et m correspondent quant à eux aux modes transverses de la cavité, qui sont séparés par l'intervalle $\Delta\nu^{\text{trans}}$, et traduisent le fait que les modes TEM_{nm} obéissent à des conditions de résonance différentes, dues à la phase de Gouy. On a de plus la relation :

¹⁶. Le raisonnement se généralise directement à un mode général TEM_{nm} . Il sera notamment question de ces modes dans la partie suivante.

$$\frac{\Delta\nu^{\text{trans}}}{\Delta\nu^{\text{FSR}}} = -\frac{\psi_{\text{tot}}}{2\pi} . \quad (46)$$

La cavité agit donc comme un filtre spatial et spectral : si l'on y injecte un signal de fréquence donnée, un balayage de la longueur de la cavité, par exemple en utilisant l'actuateur piézoélectrique contrôlant la position de M_3 , fera apparaître des pics de résonance correspondant aux différents modes transverses et longitudinaux de la cavité (cf. fig 11). La position de ces pics est translatée si l'on change la fréquence de l'onde injectée. L'intensité des pics dépendra quant à elle du recouvrement spatial du signal incident avec les modes propres de la cavité (*mode matching*). Afin d'optimiser le couplage dans le mode fondamental – gaussien – de la cavité, il est nécessaire d'aligner précisément cette dernière afin de maximiser le recouvrement entre le mode injecté et le mode gaussien (cf. fig. 11, (b)).

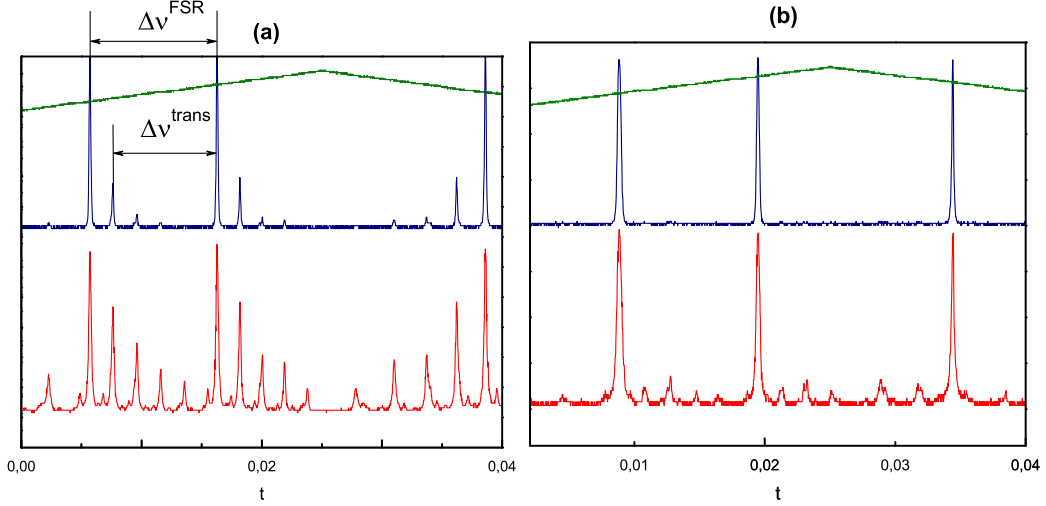


FIGURE 11 – Pics de résonance obtenus lors d'un balayage de la longueur de la cavité en utilisant un actuateur piézoélectrique. *en vert* : rampe de tension appliquée au piézo. *en bleu* : signal de bleu généré. *en rouge* : puissance infrarouge intra-cavité (obtenue en utilisant une fuite sur le miroir M_2). (a) cavité non-alignée : recouvrement mode incident/mode propre non optimisé. (b) cavité alignée.

Le second harmonique étant généré de façon cohérente par la pompe, le signal de bleu calque son mode spatial sur le mode propre de la cavité : il est ainsi possible d'obtenir une image du mode propre habitant la cavité en observant le signal bleu à travers le coupleur de sortie. Lorsque l'on balaye la longueur de la cavité à l'aide du piézo, on observe ainsi différents modes spatiaux, plus ou moins reconnaissables, pour le bleu généré, correspondant aux différents pics de la figure 11.

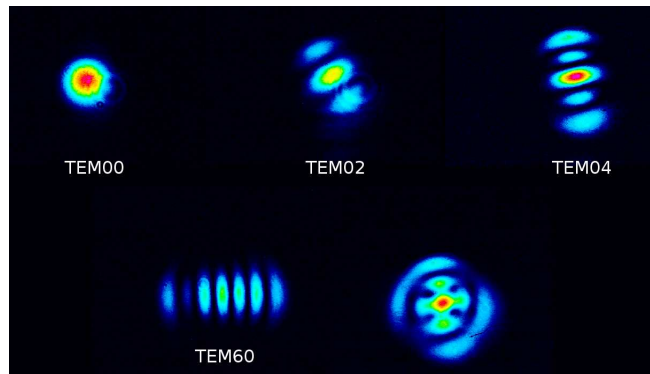


FIGURE 12 – Modes transverses observés lors du balayage de la cavité. Le signal de bleu généré est observé grâce à une caméra CCD pendant que la tension appliquée au piézo du miroir M_2 est balayée lentement.

3.1.5 Calcul des modes propres de la cavité et choix du point de fonctionnement

Afin d'optimiser l'injection de la cavité (*mode-matching*) ainsi que le doublage dans le cristal, il est nécessaire de connaître les modes propres de la cavité. Les paramètres importants sont la valeur des

waists w_{crist} et w_{long} évoqués précédemment, ainsi que la valeur de $\Delta\nu^{\text{trans}}/\Delta\nu^{\text{FSR}}$ qui déterminera si les modes transverses sont bien séparés.

Pour calculer ces différents paramètres, on commence par fixer la longueur L_1 à 143 mm, puis on fait varier L_3 sur la plage de stabilité de la cavité ($\approx 100 \text{ mm} \rightarrow 135 \text{ mm}$). L'astigmatisme de la cavité, dû au fait que la lumière arrive avec un angle sur les miroirs M_3 et M_4 , est pris en compte dans le calcul. Les résultats de la simulation sont reportés en figure 13. Le point de fonctionnement choisi correspond à $L_3 = 125 \text{ mm}$. Les paramètres correspondant sont $w_{\text{crist}} \approx 43 \mu\text{m}$ et $w_{\text{long}} \approx 170 \mu\text{m}$: le premier influe sur le doublage (on a $a \approx 0.4$ et $\alpha \approx 1.1\% W/W^2$) tandis que le second nous indique le mode spatial que l'on doit injecter dans la cavité (le point de fonctionnement est choisi au milieu d'une zone où w_{long} varie peu, afin de rendre moins critique le couplage). Une lentille est placée en sortie du laser Toptica pour optimiser le couplage dans ce sens (cf. fig 10).

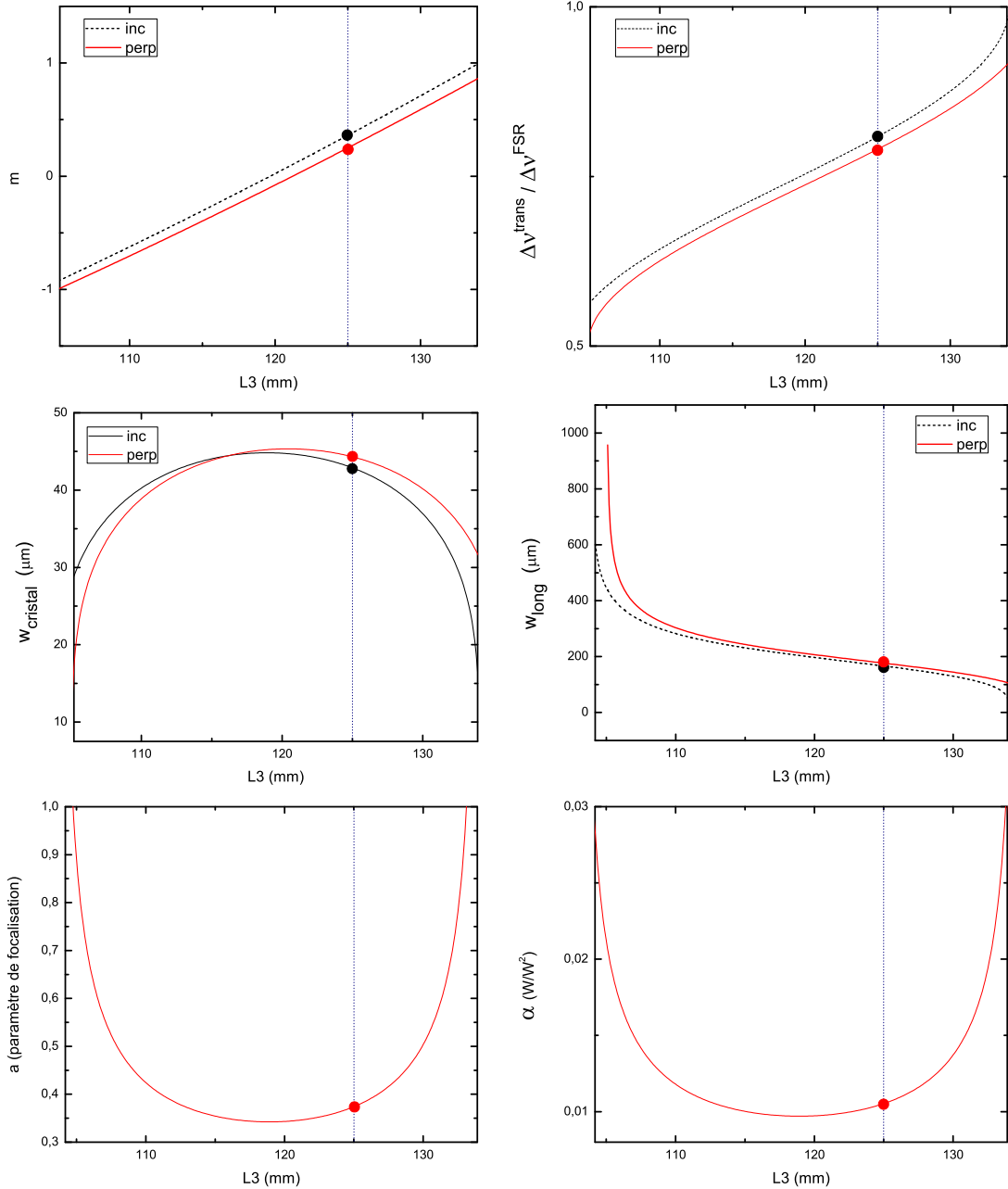


FIGURE 13 – Paramètres de la cavité sur sa plage de stabilité pour une longueur L_1 fixée à 143 mm. Le point de fonctionnement, représenté par la ligne bleu pointillée, est choisi à $L_3 = 125 \text{ mm}$.

Il est possible d'après la courbe $\alpha(L_3)$ (fig.13) de choisir un point de fonctionnement où $\alpha \approx 2$ ou $3\% W/W^2$; nous évitons une telle configuration, qui amplifierait les effets thermiques compliquant le doublage (en cavité, il est de toute façon possible de "recycler" la puissance non-doublée, et l'optimisation de α n'est pas vraiment cruciale). De plus, notons que nous avons dans notre configu-

ration $\Delta\nu^{\text{trans}}/\Delta\nu^{\text{FSR}} \approx 0.8$, ce qui permet une bonne séparation entre le mode fondamental et les modes transverses.

Une fois la cavité alignée, plusieurs mesures ont été effectuées afin de vérifier que le mode propre de fonctionnement est bien celui donné par la simulation. Le rapport $\Delta\nu^{\text{trans}}/\Delta\nu^{\text{FSR}}$, mesuré en balayant la longueur de la cavité (fig. 11), est d'environ 0.8, ce qui correspond à la valeur attendue. De plus, il est possible de mesurer le *waist* au niveau du cristal en observant le mode de bleu émis par la cavité. Pour ce faire, une lentille ($f = 100$ mm) est placée à 180 mm de la sortie de la cavité, et le faisceau est caractérisé après cette lentille. En prenant en compte l'effet du coupleur de sortie (qui se comporte comme une lentille divergente pour le faisceau bleu), on peut remonter au *waist* du signal bleu dans le cristal (fig. 14). Il faut cependant prendre garde au fait que le second harmonique est généré par le carré du champ de pompe : ainsi, son mode spatial sera calqué sur le carré du champ gaussien infra-rouge propre à la cavité. On a donc la relation : $w_{\text{crist}}^{\text{IR}} = \sqrt{2}w_{\text{crist}}^{\text{bleu}}$, ce qui nous donne, pour la valeur $w_{\text{crist}}^{\text{bleu}} \approx 32 \mu\text{m}$ mesurée sur la figure 14, un *waist* de $w_{\text{crist}}^{\text{IR}} \approx 45 \mu\text{m}$, conforme à ce que l'on attendait au vu de la simulation (fig. 13).

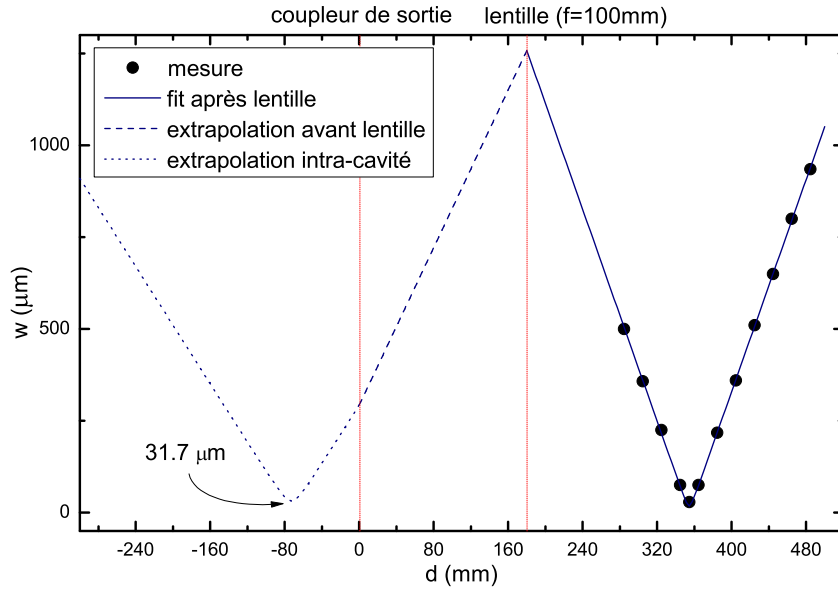


FIGURE 14 – Mesure du *waist* du mode bleu issu de la cavité. Par commodité, le faisceau est re-focalisé par une lentille ($f=100$ mm) située à 180 mm du coupleur de sortie. Son mode est mesuré en utilisant un *beam-profiler*, puis sa propagation est extrapolée jusqu'au niveau du cristal en prenant en compte l'effet de la lentille d'observation et du coupleur de sortie. Le *waist* du mode extrapolé, calqué sur le carré du mode propre de la cavité, doit être multiplié par $\sqrt{2}$ pour obtenir le w_{crist} calculé par la simulation.

3.2 Doublage de fréquence dans une cavité optique

L'avantage de travailler dans une cavité est que l'on peut en quelque sorte “recycler” la fraction de rouge non-doublée : cette dernière continue son chemin dans la cavité et repassera à travers le cristal au tour suivant. Il en résulte que la puissance intra-cavité est bien supérieure à la puissance injectée, avec un rapport de proportionnalité qui dépend de la finesse de la cavité. Nous allons tout d'abord nous attacher à caractériser la cavité en l'absence de doublage, afin d'avoir une estimation des pertes passives subies lors d'un tour dans la cavité ainsi que de l'efficacité de couplage du mode incident. Dans un second temps, nous analyserons les effets induits par le doublage (pertes actives, effets thermiques) afin de remonter à l'efficacité de conversion en cavité.

3.2.1 Puissance intra-cavité : pertes passives et efficacité de couplage

En l'absence de doublage, la puissance couplée dans la cavité dépend uniquement des pertes passives Q et de la transmission du coupleur d'entrée T . Ainsi, l'équation de stabilité de la puissance intra-cavité nous donne :

$$P_{\text{cav}} = \frac{T}{\left(1 - \sqrt{(1-T)(1-Q)}\right)^2} \gamma P_{\text{in}} , \quad (47)$$

où P_{in} désigne la puissance incidente, et γ est un facteur de couplage rendant compte du recouvrement du mode incident avec le mode propre de la cavité. Nous utilisons pour la cavité un coupleur ayant une transmission de 9 % ($T = 0.09$). Les pertes passives sont quant à elles liées à la finesse de la cavité suivant la formule suivante :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu^{\text{FSR}}}{\Delta\nu^{\text{pics}}} = \frac{2\pi}{T + Q} , \quad (48)$$

où \mathcal{F} est la *finesse* de la cavité, définie comme le rapport entre l'intervalle spectral libre $\Delta\nu^{\text{FSR}}$ et la largeur totale à mi-hauteur de ses pics de résonance (cf. fig. 11), notée $\Delta\nu^{\text{pics}}$. Il est possible de déterminer ce rapport directement depuis un signal de balayage de la cavité (fig. 11), ce qui donne pour notre configuration $\mathcal{F} \approx 60$, correspondant à des pertes passives $Q \approx 1.5\%$. Il est alors possible de déterminer l'efficacité du couplage *via* l'équation (47) (cf. figure 15). Avec nos paramètres ($T = 0.09$ et $Q = 0.015$), nous obtenons un couplage $\gamma \approx 90\%$: cette efficacité est cohérente avec la figure 11, sur laquelle nous pouvons voir qu'au moins 90 % de la puissance est couplée dans le mode fondamental¹⁷.

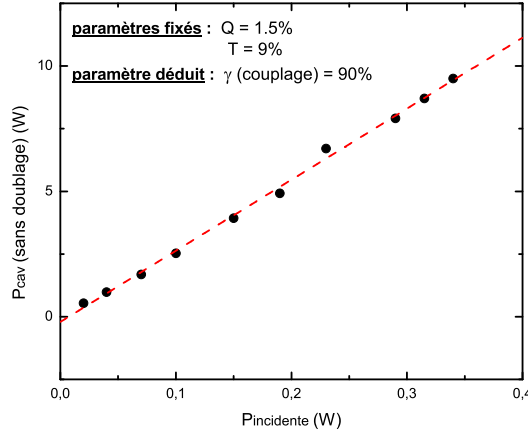


FIGURE 15 – Mesure de la puissance intra-cavité P_{cav} en fonction de la puissance incidente P_{in} **en l'absence de doublage**. L'équation (47) nous permet de remonter à l'efficacité de doublage γ , connaissant la transmission du coupleur d'entrée T et les pertes passives Q . Avec nos paramètres ($T = 0.09$ et $Q = 0.015$), nous obtenons un couplage $\gamma \approx 90\%$, ce qui est cohérent avec la figure 11.

3.2.2 Efficacité du doublage

Comme le montre la figure 15, l'exaltation de la cavité permet d'atteindre des puissances de plusieurs Watts. Nous pouvons alors amener le cristal à sa température optimale afin de caractériser l'efficacité du doublage α (cf. 2.3.2) : la puissance de bleu générée est mesurée en fonction de la puissance infra-rouge intra-cavité, et le résultat est reporté en figure 16.

Nous mesurons $\alpha \approx 1.4\%$, soit une valeur légèrement supérieure à celle attendue d'après 3.1.5 ($\alpha \approx 1.1\%$). Plusieurs facteurs peuvent expliquer cette divergence : tout d'abord, des changements dans la cavité (alignement, position des miroirs) ayant eu lieu entre la caractérisation du mode intra-cavité (fig. 14) et la mesure de l'efficacité de doublage ont pu déplacer le point de fonctionnement et donc α . De plus, des incertitudes dans la calibration des photodiodes pour la mesure de la puissance de bleu et de la puissance intra-cavité peuvent induire des marges d'erreur de l'ordre de 10 % sur la mesure de α . Malgré tout, cette valeur mesurée reste relativement proche de celle attendue.

¹⁷. Quelle que soit la forme du mode incident, ce dernier se décompose sur la base des polynômes de Hermite, qui est la base des modes propres de la cavité. Nous pouvons donc nous attendre à ce que la totalité de la puissance incidente se répartisse sur les différents modes. D'après la figure 11, peu de puissance est affectée en dehors du fondamental : le couplage est donc proche de 1.

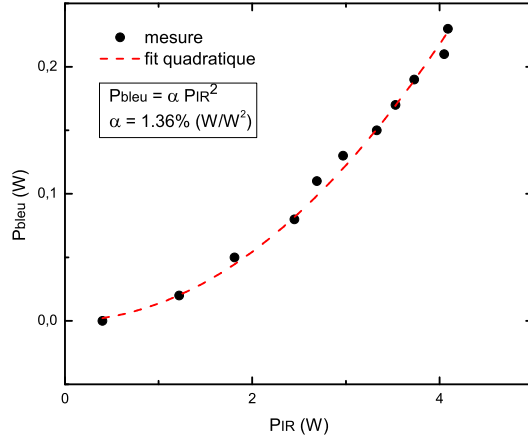


FIGURE 16 – Mesure de la puissance de bleu générée P_{bleu} en fonction de la puissance infra-rouge intra-cavité P_{IR} . Nous trouvons bien une dépendance parabolique $P_{\text{bleu}} = \alpha P_{\text{IR}}^2$, avec une efficacité de doublage $\alpha \approx 1.4\%$. La mesure est effectuée en balayant la cavité sur quelques intervalles spectraux libres, à une fréquence de 10 Hz, et en mesurant la hauteur des pics de résonance.

3.2.3 Effets thermiques et pertes actives

La précédente mesure de α était effectuée en balayant la cavité sur quelques intervalles spectraux libres, à une fréquence de 10 Hz. Cette vitesse de balayage est trop rapide pour que les effets thermiques évoqués en 2.4.1 aient le temps de se manifester. Cependant, pour des vitesses de balayage plus lentes – et *a fortiori* lorsque le laser fonctionne en régime continu – ou pour des puissances intra-cavité importantes, ces effets se manifestent et viennent perturber le doublage : la présence du second harmonique peut en effet induire l'absorption du champ de pompe (*BLIRA*¹⁸) suivant un processus non-linéaire, ce qui entraîne un échauffement du cristal.

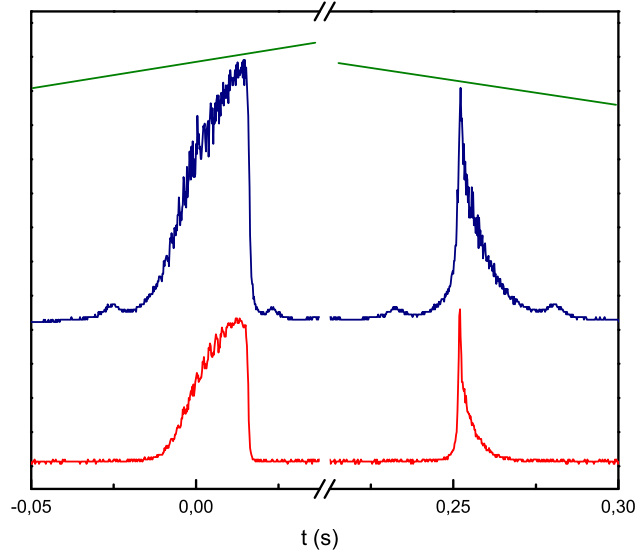


FIGURE 17 – Effets thermiques lors du balayage de la longueur de la cavité : on représente la puissance de bleu (**en bleu**), la puissance infra-rouge intra-cavité (**en rouge**) et la tension appliquée au piézo (**en vert**) en fonction du temps. Dans la première partie, la tension appliquée au piézo augmente, donc la longueur de la cavité diminue. Les effets thermiques provoquent la dilatation du cristal et un changement d'indice qui augmentent la longueur optique de la cavité : les effets du piézo et du chauffage se compensent, et le pic est élargi. Dans la seconde partie, la tension appliquée au piézo diminue, donc la longueur de la cavité augmente : cet effet va dans le même sens que celui du chauffage, et le pic est rétréci.

Ce changement de température affecte l'efficacité du doublage de plusieurs façons : premièrement, une élévation globale de la température change l'accord de phase du cristal et affecte de ce fait directe-

18. *Blue Induced Infrared Absorption*

ment le coefficient α . L'effet est visible sur la figure 18, (a) : la température de consigne du cristal étant optimisée pour les basses puissances (ou, de façon similaire, pour des vitesses de balayage rapides), il apparaît que la puissance de bleu générée en régime continu sature dans le domaine des hautes intensités. En baissant la température de consigne, il est cependant possible de s'affranchir de cet effet, et les performances obtenues en régime continu sont comparables à celles du régime pulsé. Néanmoins, d'autres effets affectent de façon subtile l'efficacité de doublage¹⁹, ce qui se traduit inexorablement par une perte d'efficacité dans le régime des fortes puissances. Il a été tout de même possible d'observer en régime continu des puissances de l'ordre de la centaine de milliwatts (pour des puissances incidentes d'environ 400 mW), ce qui est suffisant pour la réalisation du ralentisseur Zeeman pour l'ytterbium.

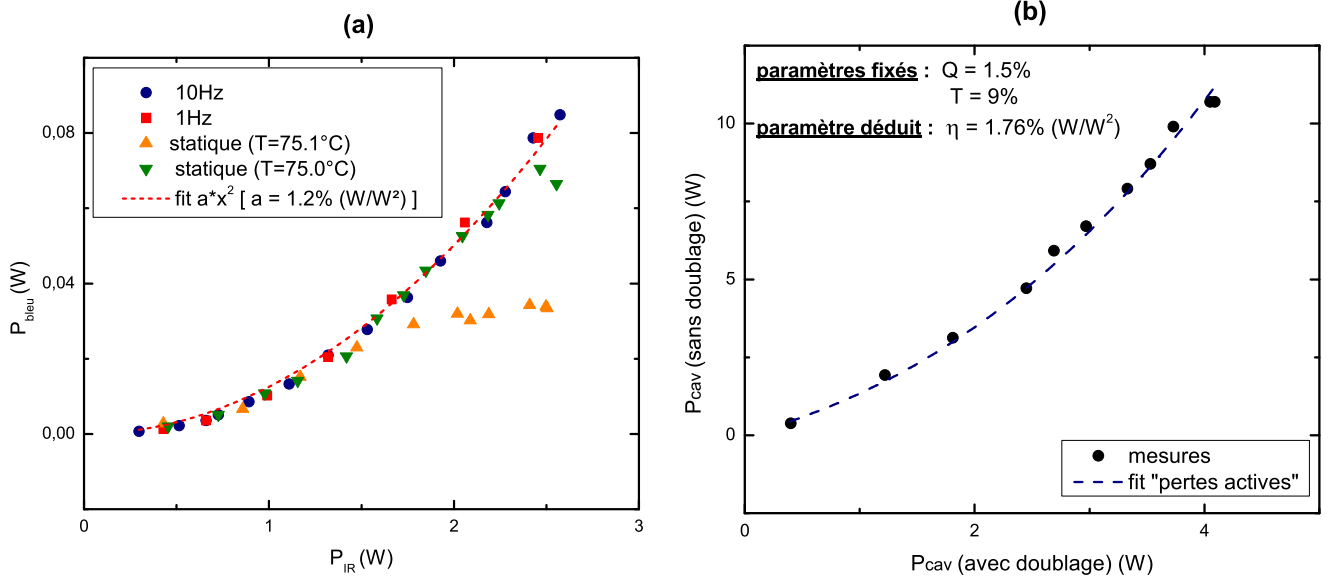


FIGURE 18 – Manifestations des effets thermiques sur l'efficacité de doublage. (a) mesure de la puissance de bleu générée en fonction de la puissance du champ de pompe. Le protocole expérimental consiste à mesurer les pics de résonance obtenus lors d'un balayage de la longueur de la cavité sur quelques intervalles spectraux libres, pour des vitesses de balayage variables (10 Hz, 1 Hz et en continu). La température est optimisée lors du balayage à 10 Hz. En continu et dans le régime des fortes puissances, on observe une saturation du doublage due à des effets thermiques. Ces effets peuvent être en partie compensés en baissant la température de consigne. (b) mesure des pertes actives. La valeur de η mesurée est supérieure à α , la différence pouvant être attribuée aux effets thermiques.

Afin de quantifier la part de ces effets thermiques indésirables, il peut être intéressant de mesurer les pertes *actives* de la cavité. Considérons un milieu induisant des pertes actives liées à des phénomènes non-linéaires du deuxième ordre (c'est par exemple le cas de la génération de second harmonique). Lors du passage dans ce milieu, la puissance du champ intra-cavité P_{cav} est transformée suivant : $P_{\text{cav}} \rightarrow P_{\text{cav}} - \eta P_{\text{cav}}^2 = (1 - \eta P_{\text{cav}}) P_{\text{cav}}$. Si l'on considère maintenant l'amplitude du champ, ces pertes peuvent être modélisées par un terme de *pertes actives* $(1 - \eta P_{\text{cav}})$: $\mathcal{E}_{\text{cav}} \rightarrow (1 - \eta P_{\text{cav}}) \mathcal{E}_{\text{cav}}$. La formule (47) est alors modifiée en :

$$P_{\text{cav}} = \frac{\gamma T}{\left(1 - \sqrt{(1 - T)(1 - Q)(1 - \eta P_{\text{cav}})}\right)^2} P_{\text{in}} . \quad (49)$$

Le facteur de pertes actives η contient bien évidemment les pertes dues au doublage de fréquence α , mais aussi une partie due aux effets thermiques β , soit $\eta = \alpha + \beta$. Afin de déterminer η , nous avons mesuré, pour une même puissance incidente, la puissance intra-cavité en l'absence de doublage $P_{\text{cav}}^{N.D.}$ (donnée par l'équation (47), qui correspond à $\eta = 0$), en fonction de la puissance intra-cavité en présence de doublage P_{cav}^D (donnée par la formule (49)). On a alors :

19. Citons, par exemple, l'effet de *lentille thermique* provoqué par l'élévation inhomogène de la température au sein du cristal, qui vient perturber la stabilité du mode de la cavité.

$$P_{\text{cav}}^{N.D.} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{(1-T)(1-Q)(1-\eta P_{\text{cav}}^D)}}{1 - \sqrt{(1-T)(1-Q)}} \right\}^2 P_{\text{cav}}^D . \quad (50)$$

Les résultats expérimentaux (figure 18, (b)) donnent $\eta \approx 1.8\%$. On a bien $\eta > \alpha$: les pertes actives ainsi modélisées ne se résument donc pas aux pertes dues au doublage, comme nous l'avions pressenti. La différence, $\beta \approx 0.4\%$, permet d'avoir une idée de l'importance relative des effets thermiques.

3.3 Stabilisation de la cavité

3.3.1 Asservissement de la cavité

Pour que le laser fonctionne en régime continu, il faut que la longueur de la cavité soit maintenue sur une résonance. Diverses perturbations (vibrations de la table optique, perturbations acoustiques, changements de température) faisant varier cette longueur, il est nécessaire d'asservir activement cette dernière : c'est le rôle des actuateurs piézoélectriques sur lesquels sont montés les miroirs M_2 et M_3 .

L'asservissement se fait grâce à la fuite du miroir M_2 permettant d'obtenir une image de la puissance intra-cavité. Afin de se verrouiller sur un pic de résonance de la cavité, nous utilisons une technique de détection synchrone : le signal incident est modulé en phase à 1 MHz en amont de la cavité par un *EOM*²⁰. Le signal de fuite, détecté par une photodiode, est alors démodulé afin d'obtenir un signal dispersif (fig. 20). Ce signal est alors traité par un circuit électronique : il y est intégré, puis envoyé sur deux voies. La voie "rapide", comportant un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure haute, est envoyée sur le piézo de plus faible capacité, et permet de compenser les dérives rapides et de faibles amplitudes ; la voie "lente" possède quant à elle un filtre passe-bas de fréquence de coupure plus basse, et est envoyée sur le piézo de grande capacité, permettant de compenser les dérives lentes de plus grandes amplitudes.

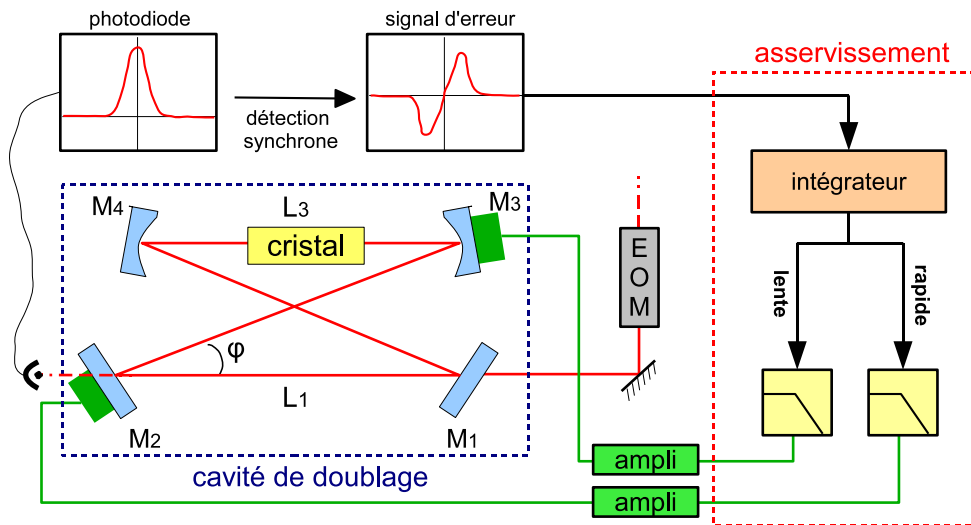


FIGURE 19 – Schéma simplifié du circuit d'asservissement de la cavité.

3.3.2 Les problèmes du régime continu

Le circuit électronique d'asservissement a été conçu à partir d'un circuit modèle utilisé pour une cavité similaire par l'équipe de F. Gerbier. Les constantes de temps et d'intégration des différents étages ont été optimisées afin de s'adapter aux spécificités de notre cavité. L'asservissement permet de stabiliser la cavité à résonance de façon robuste en l'absence de doublage, en utilisant la puissance infra-rouge intra-cavité pour générer le signal d'erreur.

Des problèmes surgissent cependant lorsque l'on essaie d'asservir la cavité en présence de doublage. Les effets thermiques évoqués précédemment affectent la forme des pics de résonance en fonction du sens de balayage (cf. fig. 17), et altèrent de ce fait le signal d'erreur (figure 20). Ce dernier devient

²⁰. *Electro-optic modulator*, cf. figure 10.

asymétrique, et il est alors difficile de stabiliser la cavité sur un maximum d'émission : une perturbation d'amplitude moyenne peut facilement faire sortir le système de la zone de stabilité.

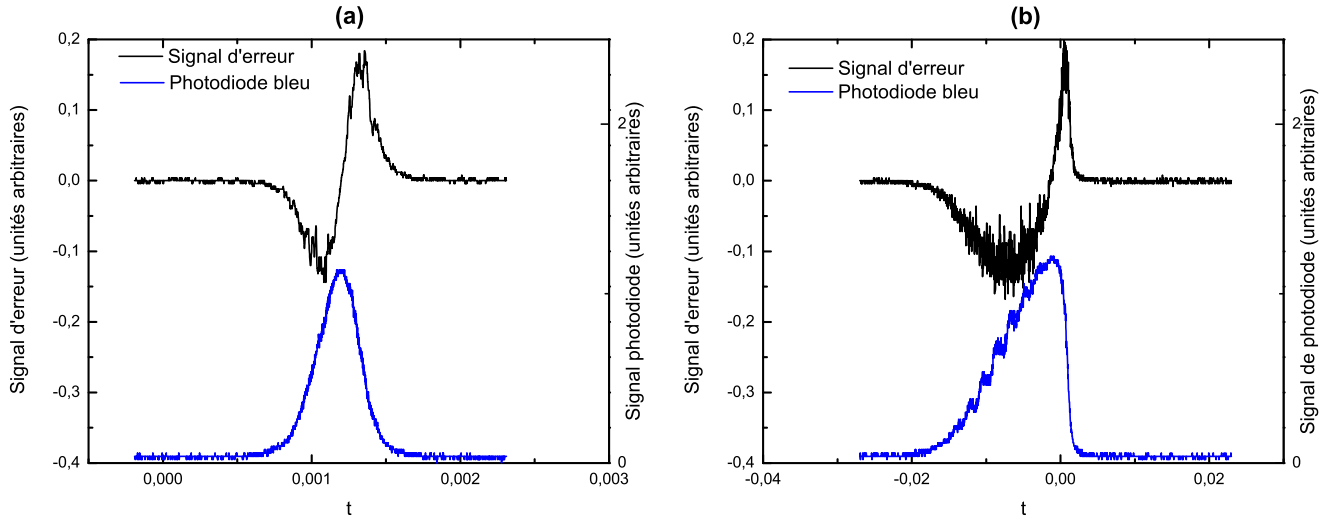


FIGURE 20 – Signal de photodiode et signal d’erreur pour deux vitesses de balayage. (a) **balayage rapide (10 Hz)** : les effets thermiques n’ont pas le temps de se manifester, et le signal d’erreur est bien dispersif et symétrique. (a) **balayage lent (500 mHz)** : le pic de résonance est déformé par les effets thermiques, ce qui affecte fortement le signal d’erreur.

Il est possible d’ajouter un *offset* au signal d’erreur afin de verrouiller la cavité légèrement à côté du maximum d’émission : le signal d’erreur est alors moins raide autour du point d’équilibre (cf. fig 20), et le système gagne en stabilité. La conversion n’est alors pas optimale, et le système reste instable vis-à-vis de fortes perturbations.

Conclusion

L’application des techniques standard de refroidissement laser à l’atome d’ytterbium nécessite donc la réalisation de deux lasers, l’un à 399 nm pour le refroidissement Zeeman, l’autre à 556 nm pour le piège magnéto-optique. Nous avons présenté dans ce rapport les résultats obtenus au cours de la réalisation du premier laser (399 nm), dans le cadre du stage expérimental mené dans l’équipe de Fabrice Gerbier et Jérôme Beugnon, de janvier à avril 2011. L’option technologique retenue, à savoir le doublage d’une diode laser amplifiée à 798 nm par un cristal non-linéaire de ppKTP, a nécessité plusieurs réalisations expérimentales : mise en place de la chaîne laser en sortie de la diode amplifiée (isolateur optique, optique de couplage), construction d’un résonateur optique (cavité) pouvant accueillir le cristal doubleur. La stabilisation de la cavité a été réalisée par une méthode d’asservissement du type détection synchrone, nécessitant l’utilisation d’un modulateur électro-optique (*EOM*) et la réalisation d’un circuit d’asservissement.

Les principales caractéristiques de la cavité ont été mesurées expérimentalement (pertes, efficacité de couplage), ainsi que les performances du cristal doubleur. Les résultats obtenus ($\alpha \approx 1.4\%$) sont en bon accord avec les simulations, et il a été ainsi possible de générer plusieurs centaines de milliwatts de signal en régime “pulsé”. En fonctionnement continu, nous avons observé l’apparition d’effets thermiques rendant difficile la stabilisation de la cavité et la détermination de la température optimale de doublage. Il a été cependant possible de générer environ 130 mW de lumière à 399 nm en régime continu, ce qui correspond à la puissance nécessaire au refroidissement Zeeman de l’atome d’ytterbium.

Plusieurs étapes restent à franchir pour la réalisation d’un ralentisseur Zeeman adapté à l’ytterbium : réalisation d’un dispositif de spectroscopie permettant d’accorder la fréquence du laser sur la transition atomique de l’Yb – des premiers essais ont été menés dans le cadre de ce stage en utilisant la transition “verte”, mais la finesse de cette dernière nous a poussés à nous consacrer à l’amélioration du laser “bleu”, plus facilement absorbé –, stabilisation du laser en dépit des effets thermiques, construction des bobines générant le champ magnétique Zeeman. Le laser “vert” à 556 nm, bien qu’il soit d’ores et déjà capable de fournir environ un watt de lumière de façon stable, doit être lui aussi

accordé sur la transition atomique par un dispositif de spectroscopie avant de pouvoir être utilisé pour la réalisation du piège magnéto-optique.

La réalisation de ces deux lasers n'est que la première étape vers le refroidissement de l'atome d'ytterbium, qui est à la base du simulateur quantique proposé par Jean Dalibard et Fabrice Gerbier. De nombreux efforts expérimentaux supplémentaires seront nécessaires (réalisation d'un laser à 578 nm, mise en place d'un double réseau optique...) avant de pouvoir utiliser ce dernier pour l'étude de champs de jauge artificiels.

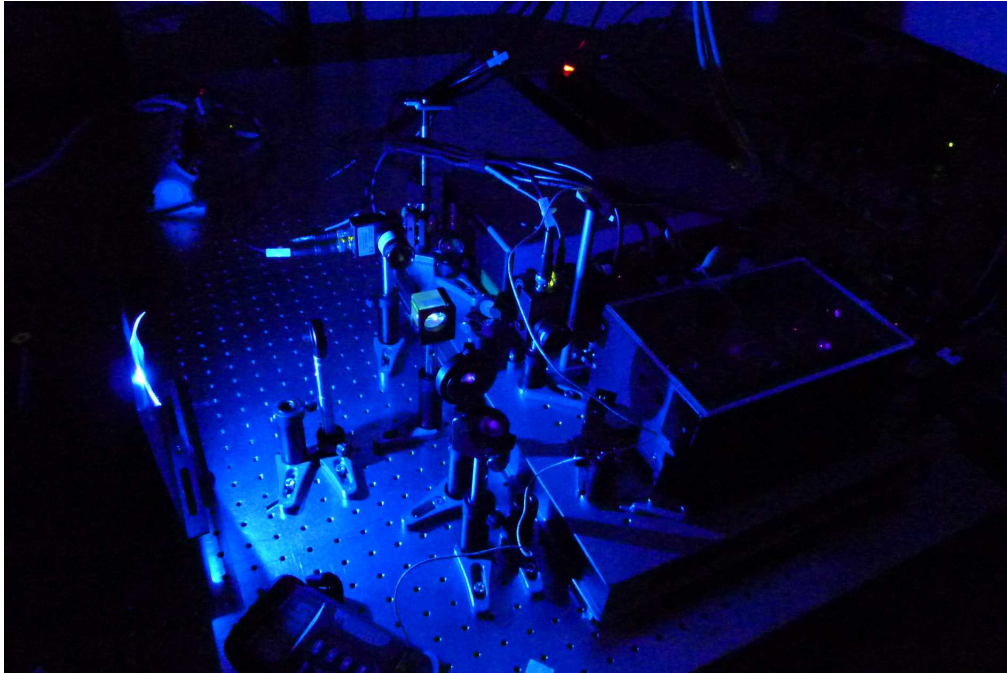


FIGURE 21 – Laser à 399 nm fonctionnant en régime continu.

Références

- [1] R. FEYNMAN, *International journal of theoretical physics* **21**, 467 (1982).
- [2] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. HANSCH, and I. BLOCH, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [3] J. BILLY, V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER, and A. ASPECT, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [4] G. ROATI, C. D'ERRICO, L. FALLANI, M. FATTORI, C. FORT, M. ZACCANTI, G. MODUGNO, M. MODUGNO, and M. INGUSCIO, *Nature* **453**, 895 (2008).
- [5] F. GERBIER and J. DALIBARD, *New Journal of Physics* **12**, 033007 (2010).
- [6] Y. TAKASU, K. MAKI, K. KOMORI, T. TAKANO, K. HONDA, M. KUMAKURA, T. YABUZAKI, and Y. TAKAHASHI, *Physical review letters* **91**, 40404 (2003).
- [7] T. FUKUHARA, Y. TAKASU, M. KUMAKURA, and Y. TAKAHASHI, *Physical review letters* **98**, 30401 (2007).
- [8] T. FUKUHARA, S. SUGAWA, Y. TAKASU, and Y. TAKAHASHI, *Physical Review A* **79**, 021601 (2009).
- [9] T. HÄNSCH and A. SCHAWLOW, *Optics Communications* **13**, 68 (1975).
- [10] W. PHILLIPS and H. METCALF, *Physical Review Letters* **48**, 596 (1982).
- [11] J. DALIBARD, Atomes ultra-froids, Notes du cours donné dans le cadre de l'ex-DEA de Physique Quantique, 2006, <http://www.phys.ens.fr/~dalibard/>
- [12] P. LETT, R. WATTS, C. WESTBROOK, W. PHILLIPS, P. GOULD, and H. METCALF, *Physical review letters* **61**, 169 (1988).
- [13] J. DALIBARD and C. COHEN-TANNOUDJI, *JOSA B* **6**, 2023 (1989).
- [14] K. HONDA, Y. TAKAHASHI, T. KUWAMOTO, M. FUJIMOTO, K. TOYODA, K. ISHIKAWA, and T. YABUZAKI, *Physical Review A* **59**, 934 (1999).
- [15] T. KUWAMOTO, K. HONDA, Y. TAKAHASHI, and T. YABUZAKI, *Physical Review A* **60**, 745 (1999).
- [16] P. FRANKEN, A. HILL, C. PETERS, and G. WEINREICH, *Physical Review Letters* **7**, 118 (1961).
- [17] M. JOFFRE, Optique non-linéaire en régimes continu et femtoseconde, Notes du cours donné dans le cadre du M2 Physique Quantique, 2010, <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092964/fr/>
- [18] G. BOYD and D. KLEINMAN, *Journal of Applied Physics* **39**, 3597 (1968).

ANNEXES

A Faisceaux gaussiens et modes de Hermite-Gauss

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation paraxiale, et nous cherchons un champ électrique sous la forme d'un produit d'une enveloppe lentement variable multipliée et d'une porteuse :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{A}(x, y, z)e^{ikz} . \quad (51)$$

On veut résoudre l'équation de propagation libre, dans l'approximation paraxiale :

$$\Delta_{\perp} \mathcal{A} + 2ik \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = 0 , \quad (52)$$

avec $\Delta_{\perp} \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Faisceaux gaussiens

Une solution physique de l'équation de propagation précédente concerne les faisceaux dont le profil initial est gaussien :

$$\mathcal{A}(x, y, 0) = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi w_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) . \quad (53)$$

La résolution des équations de propagation nous donne alors :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{\exp(-i\psi_0(z))}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \quad (54)$$

$$= \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{kw_0}{2iq(z)} \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right) \quad (55)$$

$$= \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{1}{w_0} \frac{1}{1+i\tau} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2(1+i\tau)}\right) , \quad (56)$$

où l'on a défini les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} q(z) &= z - iz_R & \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw(z)^2} \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2} & z_R &= \frac{kw_o^2}{2} = \frac{n\pi w_0^2}{\lambda} \\ R(z) &= z + \frac{z_R^2}{z} & \psi_0(z) &= \text{atan}\left(\frac{z}{z_R}\right) \end{aligned}$$

et où on a posé, dans la dernière expression, $\tau = z/z_R$.

Modes de Hermite-Gauss

Plus généralement, le champ électrique peut se décomposer sur les modes de Hermite-Gauss, aussi appelés modes TEM²¹. Le mode TEM_{nm} s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}_{nm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \frac{\exp(-i(1+n+m)\psi_0(z))}{2^n n! w(z)} \mathcal{H}_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \mathcal{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) , \quad (57)$$

où \mathcal{H}_n est le polynôme de Hermite d'ordre n . On note que la phase de Gouy est devenue $\psi_{n,m}(z) = (1+n+m)\psi_0(z) = (1+n+m)\text{atan}\left(\frac{z}{z_R}\right)$.

21. *Transverse ElectroMagnetic*

B Optique matricielle

Matrices ABCD

Dans le cadre de l'optique géométrique, on peut définir un rayon par sa distance r à l'axe optique et l'angle θ qu'il fait avec ce dernier. Dans l'approximation paraxiale, il est alors possible de modéliser les différentes étapes de la propagation du rayon (propagation libre, lentille, miroir...) par des matrices 2×2 . Après propagation, un rayon (r_1, θ_1) sera alors transformé en (r_2, θ_2) de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} . \quad (58)$$

Les matrices des éléments optiques usuels sont :

propagation libre sur L :	$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
lentille de focale f :	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$
miroir de rayon R (incidence normale ²²) :	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$
dioptre $n_1 \rightarrow n_2$:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{bmatrix}$
propagation à travers milieu d'indice n de longueur L :	$\begin{bmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Il est alors possible de montrer que la propagation d'un faisceau gaussien à travers une succession d'éléments optiques caractérisé par une matrice « ABCD » se calcule dans l'approximation paraxiale *via* la transformation de son paramètre q suivant :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} , \quad (59)$$

où q_1 et q_2 sont respectivement les paramètres complexes du faisceau gaussien avant et après propagation dans le système optique.

Propagation d'un faisceau gaussien à travers un dioptre

L'évolution des paramètres d'un faisceau gaussien lors d'un passage d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 peut porter à confusion. Pour éviter toute erreur, voici un tableau récapitulatif :

n_1	n_2
q_0	$q'_0 = (n_2/n_1)q_0$
k	$k' = (n_2/n_1)k$
z_R	$z'_R = (n_2/n_1)z_R$
w_0	$w'_0 = w_0$
z_0	$z'_0 = (n_2/n_1)(z_0 - z_D)$

où l'on a noté z_D la position du dioptre. On note que la longueur de Rayleigh du faisceau est affectée par le changement d'indice, mais pas son *waist* w_0 !

^{22.} avec un angle d'incidence θ , il faut remplacer R par $R \cos(\theta)$ dans le plan d'incidence, et par $R/\cos(\theta)$ dans le plan normal

C Théorie de Boyd-Kleinman

Il s'agit de démontrer la formule de rendement en puissance calculée par Boyd et Kleinman. On considère l'équation de Helmholtz pour l'onde harmonique :

$$(\Delta_{\perp} + 2ik_2\partial_z)\mathcal{A}_2(x, y, z) = -\frac{\chi\omega_2^2}{2c^2}\mathcal{A}_1^2 \exp(i\Delta k z) , \quad (60)$$

avec $\Delta k = 2k_1 - k_2$. On va considérer que le champ incident est gaussien, de waist w_0 , focalisé au centre du cristal ($z = 0$), et que sa déplétion est négligeable. On a alors :

$$\mathcal{A}_1 = A_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \frac{1}{1+i\tau} \exp \left\{ -\frac{r^2}{w_0^2(1+i\tau)} \right\} , \quad (61)$$

avec $\tau = z/z_R$. On note que la puissance P_1 du faisceau incident est donnée par :

$$P_1 = \frac{1}{2}n_1\epsilon_0 c \iint dxdy |\mathcal{A}_1(x, y)|^2 = \frac{1}{2}n_1\epsilon_0 c |A_0|^2 . \quad (62)$$

Résoudre l'équation (60) dans l'espace réel peut se révéler extrêmement ardu dans le cas général, et suppose en général de faire des hypothèses sur le mode spatial du faisceau doublé (dans la plupart des cas, il est supposé gaussien) dès le début du calcul. Cependant, si l'on ne s'intéresse qu'à la puissance du second harmonique, on peut s'affranchir du calcul dans l'espace réel et passer dans l'espace de Fourier transverse, en utilisant :

$$P_2 = \frac{1}{2}n_2\epsilon_0 c \iint dxdy |\mathcal{A}_1(x, y)|^2 = \frac{1}{2}n_2\epsilon_0 c \iint \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} |\tilde{\mathcal{A}}_1(k_x, k_y)|^2 . \quad (63)$$

En injectant la formule de $\mathcal{A}_1(x, y, z)$ dans l'équation (60) et en passant dans l'espace de Fourier transverse, on obtient :

$$\boxed{(-k_{\perp}^2 + 2ik_2\partial_z)\tilde{\mathcal{A}}_2(k_x, k_y, z) = -\gamma \frac{1}{1+i\tau} \exp \left\{ \frac{-k_{\perp}^2 w_0^2(1+i\tau)}{8} + i\Delta k z \right\}} , \quad (64)$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{\chi\omega_2^2 A_0^2}{2c^2} \quad \text{et} \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 . \quad (65)$$

L'équation (64) est facile à intégrer en posant $\tilde{\mathcal{A}}_2 = f(z) \exp(-ik_{\perp}^2 z/2k_2)$, et en utilisant la condition limite $f(-L/2) = 0$ ²³. On ne s'intéresse qu'au module de $\tilde{\mathcal{A}}_2$, ce qui nous donne à la sortie du cristal ($z = L/2$) :

$$|\tilde{\mathcal{A}}_2^{\text{out}}|^2 = |f(L/2)|^2 \quad (66)$$

$$= \frac{\gamma^2}{4k_2^2} \exp \left\{ -\frac{k_{\perp}^2 w_0^2}{4} \right\} \left| \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{1+i\tau} \exp \left\{ i\Delta k \left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{4k_1 k_2} \right) z \right\} dz \right|^2 , \quad (67)$$

où l'on a notamment utilisé que $\frac{1}{2k_2} - \frac{w_0^2}{8z_R} = \frac{\Delta k}{4k_2 k_1}$. On trouve alors la formule (générale) suivante pour la puissance du second harmonique :

$$P_2 = \frac{n_2\epsilon_0 c \gamma^2}{32\pi^2 k_2^2} \int dk_x dk_y \left[\exp \left\{ -\frac{k_{\perp}^2 w_0^2}{4} \right\} \left| \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{1+i\tau} \exp \left\{ i\Delta k \left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{4k_1 k_2} \right) z \right\} \right|^2 \right] . \quad (68)$$

Il faut noter que jusqu'à présent nous n'avons utilisé que deux hypothèses simplificatrices : d'une part, nous nous sommes placés dans le cadre de l'approximation paraxiale ; d'autre part, nous avons négligé la déplétion du champ de pompe. Afin de simplifier l'équation (68), nous allons procéder à une nouvelle approximation. En effet, il y a dans (68) deux termes dépendant de k_{\perp} : le premier a une

²³. On rappelle que le cristal, de longueur L , est centré en $z = 0$

dépendance gaussienne ($\exp(k_{\perp}^2 w_0^2/4)$), et ne prend des valeurs significatives que pour $k_{\perp} \leq 1/w_0$. Pour de telles valeurs de k_{\perp} , on a dans le second terme :

$$\frac{k_{\perp}^2}{4k_1 k_2} \approx \frac{k_{\perp}^2}{k_1^2} \approx \left(\frac{\lambda}{w_0} \right)^2 \ll 1, \quad (69)$$

et on peut donc négliger ce terme dans l'équation (68), ce qui simplifie énormément l'intégration sur (k_x, k_y) . On peut noter que l'approximation que nous venons de faire revient à considérer que le laser de pompe est focalisé sur une taille grande par rapport à sa longueur d'onde, ce qui revient en fait à l'approximation paraxiale. On obtient alors le résultat suivant pour la puissance convertie :

$$\boxed{P_2 = \alpha P_1^2}, \quad (70)$$

avec :

$$\boxed{\alpha = \frac{\chi^2 \omega_2^3}{16\pi \epsilon_0 c^4} \frac{L}{n_1 n_2} h(a, b)}. \quad (71)$$

On retrouve ainsi le facteur de Boyd-Kleinman $h(a, b)$ définit par :

$$h(a, b) = \frac{1}{4a} \left| \int_{-a}^a \frac{e^{ib\tau}}{1 + i\tau} d\tau \right|^2, \quad (72)$$

où l'on a défini $a = L/2z_R$ et $b = \Delta k z_R$.

Fin du rapport