
Génération de seconde harmonique

Résumé : L'équipe de Jérôme Beugnon du groupe Gaz quantiques du Laboratoire Kastler Brossel et du Collège de France, dirigé par Jean Dalibard, manipule des gaz de Bose 2D de rubidium. Le refroidissement et le piégeage des atomes nécessite de nombreux lasers, aux longueurs d'onde adaptées aux différentes transitions atomiques que l'on cherche à exploiter. L'objectif principal de mon stage a été la conception d'un laser à 532 nm (dans le vert) par génération de fréquence double à partir d'un laser infrarouge à 1064 nm. J'ai réalisé l'intégralité du montage et fait varier les différents paramètres disponibles afin d'essayer d'optimiser la puissance et la stabilité du faisceau vert produit. On constate que, du fait des effets thermiques, il est très difficile d'obtenir une puissance stable de l'ordre de quelques watts comme espéré.

Mots clefs : optique non-linéaire, génération de seconde harmonique (SHG), niobate de lithium périodiquement polé (PPLN), fibre optique, cristaux photoniques

Stage encadré par :
Jérôme BEUGNON
beugnon@lkb.ens.fr / tél. (+33) 1 44 27 14 31
Laboratoire Kastler Brossel
Adresse
Postale
<http://adresse.web.du/laboratoire/>



Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe Gaz quantiques du Laboratoire Kastler Brossel et du Collège de France pour son accueil chaleureux et pour m'avoir fait découvrir le monde de la recherche de l'intérieur. Je remercie tout particulièrement Franco Rabec pour avoir pris le temps de m'expliquer tous les détails de l'expérience sur laquelle il travaille et Guillaume Brochier pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils. Je remercie également Benjamin Huard pour m'avoir conseillé ce stage. Enfin, je remercie Jérôme Beugnon, mon maître de stage, pour sa disponibilité, ses conseils et toutes les connaissances qu'il m'a transmises, ainsi que pour le temps qu'il m'a consacré pendant mon stage mais également en amont pour planifier mon stage et préparer tout le matériel nécessaire.

Table des matières

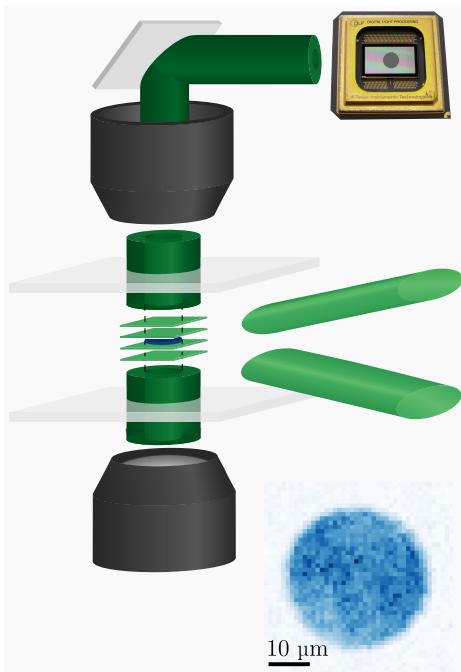
1	Introduction	1
1.1	Expériences de rubidium	1
1.2	Utilisation des lasers à 532 nm	2
1.3	Objectif du stage	2
2	Couplage de la fibre à cristaux photoniques	2
3	Principe de la génération de seconde harmonique (SHG)	5
3.1	Polarisation non linéaire et seconde harmonique	5
3.2	Le problème de l'accord de phase	6
3.3	Cas des faisceaux gaussiens	7
4	Réalisation de la génération de seconde harmonique	10
4.1	Choix du cristal doubleur	10
4.2	Montage et alignement	10
5	Étude à basse puissance	12
5.1	Efficacité de conversion	12
5.2	Profil du faisceau généré	14
6	Étude à haute puissance	15
6.1	Caractérisation à haute puissance	15
6.2	Recherche d'un régime exploitable	15
7	Conclusion	15
A	Équation d'onde non-linéaire	16
B	Validité de l'hypothèse de non déplétion	16
C	Efficacité de conversion dans un cristal périodiquement pôlé	16

1 Introduction

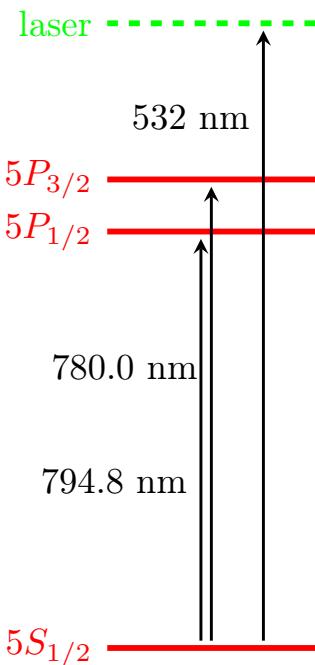
1.1 Expériences de rubidium

La réalisation d'expériences de physique quantique sur des gaz d'atomes nécessite de pouvoir les refroidir jusqu'à des températures en-dessous du kelvin et, souvent, de les piéger dans des potentiels contrôlés. Le refroidissement et le piégeage d'atomes neutres est réalisé avec différentes techniques, parfois combinées ou enchaînées, mais toutes reposant sur l'utilisation de lasers, ce qui explique leur importance cruciale dans ces expériences.

Dans le projet Rubidium du groupe Gaz quantiques (LKB - Collège de France), les atomes refroidis et piégés par une séquence de piège magnéto-optique (MOT), de pièges magnétique et optique et de refroidissements par évaporation, que nous ne discuterons pas ici, sont ensuite confinés dans un plan pour former un gaz dégénéré à 2 dimensions avec de l'ordre de 10^5 atomes à 20 nK. Comme expliqué dans la sous-section suivante, un laser vert (à 532 nm) pousse les atomes de rubidium vers un minimum d'intensité. Ainsi, en éclairant le nuage d'atomes avec un faisceau vert (vertical sur la figure) dont le profil, réalisé avec un DMD (*digital mirror device*) est en forme d'anneau, on réalise une "boîte" circulaire avec un puits de potentiel plat dans laquelle les atomes sont confinés. Pour geler le degré de liberté vertical, on fait interférer deux faisceaux cohérents inclinés pour réaliser une figure d'interférence constituée de franges planes, comme on peut le voir figure 1a (les 2 faisceaux en question sont les faisceaux vert clair sur la figure), et on confine les atomes dans un des minima. Pour ce faire, on commence par piéger l'intégralité des atomes dans un même minimum d'intensité en créant une figure avec une interfrange large, puis on resserre progressivement l'interfrange en faisant varier l'inclinaison des faiseaux. En forçant une évaporation optique, on ne garde que les atomes moins énergétiques de sorte qu'à la fin de la séquence expérimentale, l'intégralité des atomes soit dans le mode fondamental du puits. Les atomes ont alors une fonction d'onde gaussienne d'épaisseur de l'ordre de 180 nm [Bakkali-Hassani, 2021]. On voit figure 1a en bleu une image des atomes piégés dans le disque. Un deuxième DMD avec un nouveau laser vert peuvent alors être utilisés pour façonner différents potentiels à l'intérieur de la "boîte".



(a) Réalisation d'un piège circulaire 2D [2]



(b) Transitions du rubidium 87

FIGURE 1 – Utilisation du laser à 532 nm dans l'expérience : le laser est à une fréquence très supérieure à celle des transitions du rubidium 87, ce qui permet de piéger les atomes dans les minima d'intensité

1.2 Utilisation des lasers à 532 nm

Alors que le refroidissement des atomes se fait avec des lasers résonants, c'est-à-dire de fréquence proche de celle de la transition visée, et repose sur l'échange d'impulsion lors de l'absorption et la réémission de photons, le piégeage est réalisé avec des lasers non-résonants, désaccordés soit vers le rouge (*i.e.* de fréquence très inférieure à celle des transitions atomiques), soit vers le bleu (*i.e.* de fréquence très supérieure à celle des transitions atomiques), et repose sur le principe du piégeage optique dipolaire exploitant l'interaction champ électrique - dipôle électrique induit.

C'est le cas des lasers à 532 nm, qui sont désaccordés vers le bleu pour le rubidium 87 comme on peut le voir sur le diagramme des transitions figure 1b.

Cette interaction donne lieu, classiquement, à une force dérivant du potentiel $U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\varepsilon_0c}\Re(\alpha(\omega))I(\mathbf{r})$ (\mathbf{d} désigne le moment dipolaire induit, α la polarisabilité complexe, $\langle \cdot \rangle$ une moyenne temporelle et I l'intensité du faisceau) qui va servir à piéger les atomes dans un minimum de potentiel. Le rayonnement laser va également engendrer des cycles d'absorption et réémission spontanée, ayant lieu, toujours "classiquement", à une fréquence $\Gamma_{\text{diff}} = \frac{P_{\text{abs}}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\varepsilon_0c}\Im(\alpha(\omega))I(\mathbf{r})$ où $P_{\text{abs}} = \langle \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} \rangle$ est la puissance absorbée par l'atome, qui vont conduire à un réchauffement des atomes. Pour un atome à deux niveaux avec une transition à ω_0 , dans l'approximation de faible saturation (état excité faiblement peuplé) et de fort désaccord ($\Delta = \omega - \omega_0$ vérifiant $|\Delta| \ll \omega_0$), vérifiée en pratique et permettant de justifier le calcul classique (à une précision de l'ordre du pourcent), on trouve

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}) \quad (1)$$

$$\Gamma_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (2)$$

avec $\Gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0m_ec^3}$ la largeur naturelle de la transition, qui correspond dans une vision classique au facteur d'amortissement dû au rayonnement.

Puisque $\Gamma_{\text{diff}} = \frac{\Gamma}{\hbar\Delta}U_{\text{dip}}$, on voit qu'un grand désaccord permet de minimiser le chauffage dû à la diffusion. On remarque également que pour un faisceau laser désaccordé vers le rouge, l'atome est piégé dans les zones lumineuses, alors que pour un désaccord vers le bleu, l'atome est piégé dans les zones sombres.

Pour un atome réel à plusieurs niveaux, l'énergie d'interaction (qui s'obtient plus rigoureusement en considérant la perturbation par un hamiltonien de couplage $\mathcal{H}_1 = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$ des états propres du système atome + champ) est la somme des contributions des différents états excités, pondérée par l'importance des transitions associées [Grimm et al., 2000]. Pour les atomes de rubidium 87 utilisés dans l'expérience, les transitions prépondérantes sont les 2 transitions de la ligne D qui sont représentées figure 1b.

1.3 Objectif du stage

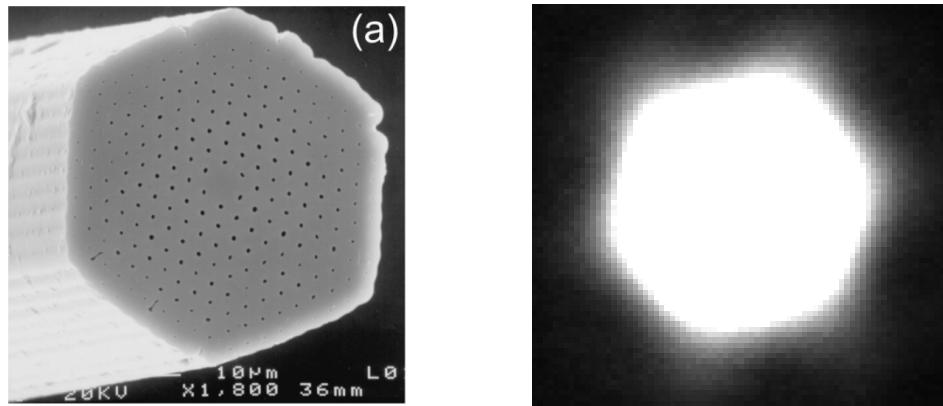
Les lasers verts actuellement utilisés au laboratoire sont des lasers à 1064 nm Nd-Yag "solides" ou des lasers à fibres qui sont vendus directement avec le doublage de fréquence. Ils ont l'inconvénient d'être particulièrement onéreux et fragiles, et leur réparation nécessite plusieurs mois d'attente. L'objectif de mon projet était donc d'explorer la possibilité de réaliser le doublage soi-même à partir d'un laser à 1064 nm beaucoup plus facile d'accès. Ce doublage de fréquence (SHG pour *second harmonic generation* en anglais) repose sur l'existence d'un terme dans la polarisation électrique de certains cristaux quadratique en le champ appliqué, qui joue le rôle d'un terme source à la fréquence double de celle du faisceau incident. C'est notamment le cas du niobate de lithium choisi pour ce projet.

2 Couplage de la fibre à cristaux photoniques

Une première partie de mon stage, indépendante de l'objectif principal d'obtenir un laser vert, a été de tester une fibre à cristaux photoniques LMA-PM-10 de la marque NKT Photonics. LMA signifie large (effective) mode area et donc que la fibre est faite pour des faisceaux larges, ce qui est important

pour les applications avec des lasers de plusieurs dizaines de watts, car le seuil de destruction des matériaux ainsi que les effets thermiques dus à la dissipation dépendent de l'intensité et non de la puissance totale. La fibre utilisée a un mode de $8.6\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre alors que les fibres traditionnelles ont plutôt un diamètre de $3\text{ }\mu\text{m}$. L'utilisation d'une fibre à cristaux photoniques LMA permet donc de réduire l'intensité de presque un ordre de grandeur.

La technologie des fibres optiques traditionnelles, reposant sur une réflexion interne totale, ne permet pas de fabriquer des fibres à cœur large qui resteraient monomodes sur une gamme de longueurs d'ondes et de rayon de courbure de la fibre suffisante. Les fibres à cristaux photoniques, quant à elles, reposent sur une variation d'indice optique effectif périodique grâce à une structure régulière de trous et ont l'avantage de permettre beaucoup plus de liberté, notamment en terme de taille du cœur tout en restant monomodes, et ce sur une très large gamme de fréquences. [Russell, 2006, 2007]



(a) Image par microscopie électronique par balayage de la première fibre à cristaux photoniques fonctionnelle [4]

(b) Image en intensité du mode hexagonal en sortie (caméra fortement saturée)

FIGURE 2 – Structure de la fibre à cristaux photoniques et mode hexagonal en sortie

Comme indiqué, la fibre à cristaux photoniques ne sélectionne qu'un seul mode. Les fibres monomodes traditionnelles sélectionnent généralement un mode gaussien, mais la géométrie de la fibre à cristaux photoniques utilisée fait que le mode sélectionné est un mode hexagonal, comme on peut le voir figure 2b. Ce mode ne se distingue cependant que très peu d'un mode gaussien, et on ne voit la forme hexagonale qu'en saturant la caméra.

En particulier, afin de maximiser la transmission de la fibre, il faut que l'axe de propagation du faisceau incident (gaussien) coïncide avec celui de la fibre, ce qui correspond à l'ajustement de 4 paramètres (2 angles pour l'orientations et 2 coordonnées pour la position dans le plan transverse). L'ajustement est fait à l'aide de 2 miroirs (cf schéma figure 3). Il faut également que le faisceau ait le bon waist et qu'il soit focalisé en bout de fibre. La focalisation est réalisée à l'aide d'un coupleur de fibre (60SMS-SMA-0-M5-08 de la marque Schäfter+Kirchhoff), qui est un collimateur de focale 5 mm optimisé pour le couplage de fibres et nécessite de produire un faisceau collimaté en amont du coupleur avec le bon waist (que l'on peut déterminer expérimentalement en observant le faisceau en sortie de fibre, puisqu'elle est équipée d'un coupleur identique). Cet ajustement est fait à l'aide d'un télescope avec des focales adaptées.

De façon plus détaillée, le protocole du couplage est essentiellement le suivant :

1. On choisit une hauteur de faisceau avec laquelle on va trailler, et on aligne la source laser et les optiques à cette hauteur.
2. À l'aide des vis des 2 miroirs réglant l'angle vertical, on assure l'horizontalité et la bonne hauteur du faisceau par rapport au collimateur en faisant passer le faisceau à travers ce dernier.
3. On connecte la fibre au collimateur. Si l'alignement est bon, on doit avoir une puissance mesurable en sortie.

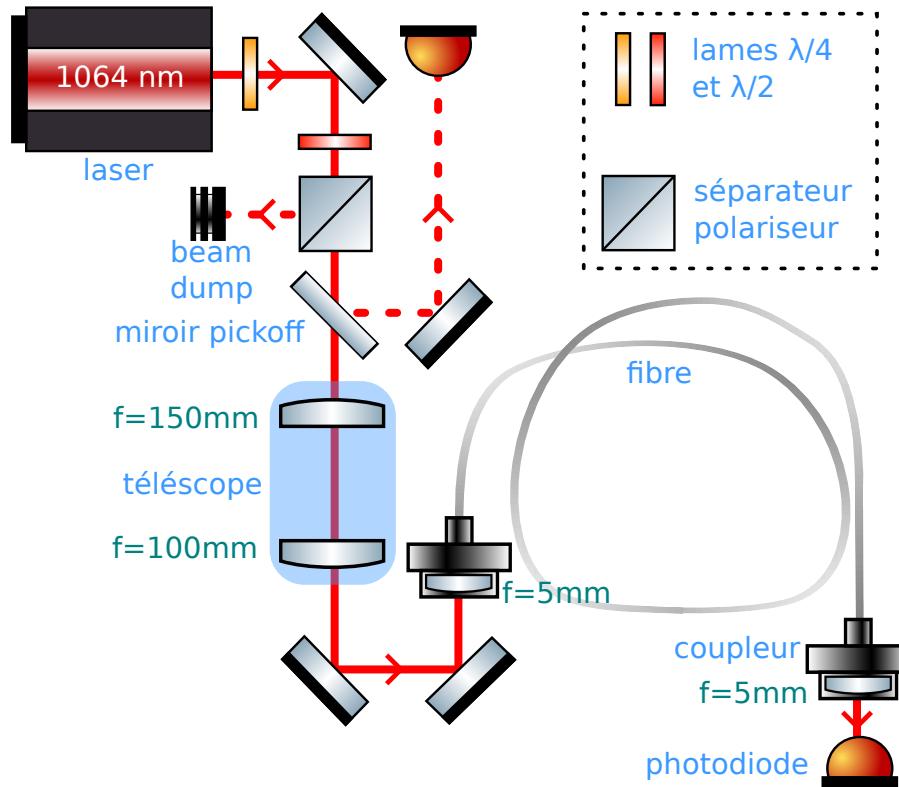


FIGURE 3 – Montage de la fibre à cristaux photoniques : Le cube séparateur permet de sélectionner une polarisation linéaire, et les lames d'onde servent à maximiser la composante du champ selon la direction transmise afin de minimiser les pertes. La composante réfléchie finit dans un “beam dump”, fait pour absorber le rayonnement infrarouge et dissiper la chaleur. Le “pickoff”, lame de verre avec un traitement adapté, sert à réfléchir une petite partie du faisceau pour l'envoyer sur une photodiode. Une calibration permet de corrélérer la tension sur la photodiode à la puissance en sortie du séparateur. Le télescope, de grandissement $\gamma = \frac{100}{150} = 0.67$, sert à produire un faisceau collimaté avec le waist souhaité, et enfin le coupleur d'entrée de fibre sert à adapter le faisceau incident à la fibre. Le coupleur de sortie sert à obtenir un faisceau collimaté et plus large qu'au sein de la fibre. Une deuxième photodiode permet de mesurer la puissance transmise et évaluer l'efficacité du couplage.

4. Pour déterminer le waist adapté à la fibre et au coupleur, on utilise la présence d'un coupleur identique à l'autre extrémité de la fibre. En effet, le faisceau gaussien en sortie aura, par retour inverse de la lumière, le bon waist à injecter dans la fibre. Le waist du mode en sortie est déterminé par la mesure à la caméra du diamètre du faisceau à différentes positions.
5. On monte un télescope avec un grandissement permettant d'obtenir le waist voulu.
6. On alterne optimisation de la position du collimateur et de l'alignement. Il faut se méfier que le déplacement du collimateur affecte l'alignement.
7. L'alignement s'effectue selon la méthode du ‘beam-walk’ : les rotations des 2 miroirs selon le même axe ont un effet couplé, permettant par exemple d'induire une translation pure du faisceau. Il est donc préférable de faire varier un angle et trouver le maximum pour cet angle en faisant varier l'angle associé sur le deuxième, et comparer ces maxima successifs. En effet, le couplage est sensible même aux petites variations d'angle, mais les maxima successifs obtenus en ‘beam-walkant’ sont assez proches.

J'ai ainsi pu obtenir un couplage d'environ 75 %, ce qui est tout à fait raisonnable. En particulier, on peut injecter 10 W dans la fibre sans risquer de l'endommager du fait d'une trop forte dissipation de puissance.

TODO : injection en pola

3 Principe de la génération de seconde harmonique (SHG)

Nous revenons maintenant à l'objectif principal du stage, l'obtention d'un laser à 532 nm par génération de seconde harmonique, dont nous expliquons d'abord le principe.

3.1 Polarisation non linéaire et seconde harmonique

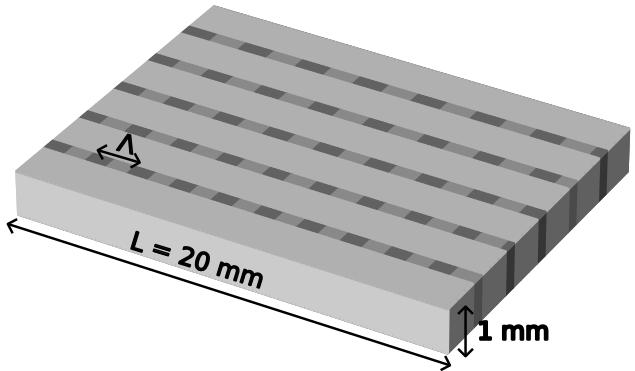
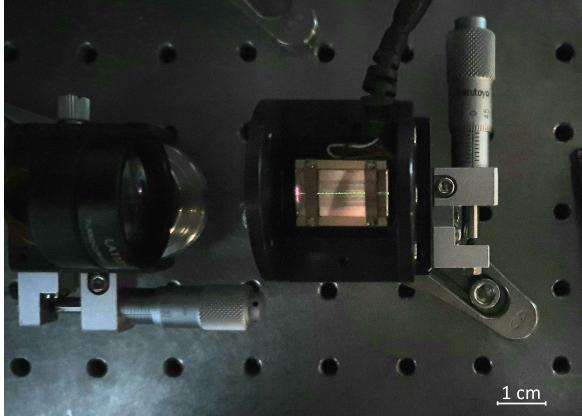


FIGURE 4 – Génération d'un laser vert dans un cristal doubleur de fréquence : le faisceau incident passant par une des bandes avec une structure de période Λ , dont le rôle est expliqué section 3.2, donne lieu à un faisceau vert grâce à la polarisation d'ordre 2 du cristal

La génération de la seconde harmonique a lieu dans un cristal doubleur de fréquence avec des propriétés non-linéaires favorables (figure 4). La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu non linéaire non magnétique donne lieu à une équation d'onde avec un terme source, qui s'écrit

$$\nabla^2 \mathcal{E}_q + \frac{\omega_q^2}{c^2} \underline{\epsilon}^{(1)}(\omega_q) \cdot \mathcal{E}_q(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_q^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

dans le domaine de Fourier en temps avec la convention $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \sum_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_q(\mathbf{r}) e^{-i\omega_q t} \right\}$ et $\mathbf{P}^{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \sum_{q \in \mathbb{N}} \mathbf{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_q t} \right\}$, avec $\underline{\epsilon}^{(1)}$ le tenseur de permittivité diélectrique relative associé à la partie linéaire de la polarisation et \mathbf{P}_q^{NL} la partie non-linéaire de la polarisation (cf annexe A) [6, 7].

On fait l'hypothèse simplificatrice d'une **polarisation linéaire** selon un des axes principaux et on travaillera par la suite avec des \mathcal{E}_q scalaires. En particulier, la permittivité tensorielle $\underline{\epsilon}^{(1)}$ est remplacée par sa valeur propre correspondante et donne lieu à un indice optique $n_q = \sqrt{\epsilon^{(1)}(\omega_q)}$. En écrivant les différentes harmoniques sous la forme d'une “onde monochromatique d'amplitude variable” $\mathcal{E}_q = \mathcal{A}_q(x, y, z) e^{ik_q z}$ avec $k_q = \frac{n_q \omega_q}{c}$ et en se plaçant dans l'approximation paraxiale, i.e. de lente variation de \mathcal{A} avec z ($\frac{\partial^2 \mathcal{A}_q}{\partial z^2} \ll k_q \frac{\partial \mathcal{A}_q}{\partial z}$), on arrive aux équations [7]

$$\left\{ \nabla_{\perp} + 2ik_q \frac{\partial}{\partial z} \right\} \mathcal{A}_q = -\frac{\omega_q^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r}) e^{-ik_q z} \quad (4)$$

avec $\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$.

En particulier, pour un champ électrique avec une composante à ω et une à 2ω , le terme quadratique

dans la polarisation est donné par [7]

$$\begin{aligned}
 P^{(2)} &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 \text{ avec } \chi^{(2)} \text{ la susceptibilité d'ordre 2} \\
 &= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \left\{ \mathcal{E}_1 e^{-i\omega t} + \mathcal{E}_1^* e^{i\omega t} + \mathcal{E}_2 e^{-2i\omega t} + \mathcal{E}_2^* e^{2i\omega t} \right\}^2 \\
 &= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \left\{ \mathcal{E}_1^2 e^{-2i\omega t} + \mathcal{E}_1^{*2} e^{2i\omega t} + 2|\mathcal{E}_1|^2 + 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* e^{i\omega t} + 2\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 e^{-i\omega t} \right. \\
 &\quad \left. + 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{-3i\omega t} + 2\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2^* e^{3i\omega t} + \mathcal{O}(\mathcal{E}_2^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

où l'on a considéré que $\chi^{(2)}$ est approximativement le même pour toutes les harmoniques.

On voit donc que l'onde incidente (à ω) conduit à un terme à la fréquence double dans la polarisation, qui va conduire à la création d'une onde à cette seconde harmonique comme souhaité. Cette dernière va conduire à un terme à la fréquence fondamentale qui va affecter l'onde incidente ainsi qu'à un terme à la fréquence triple qui va conduire à une onde à la troisième harmonique et ainsi de suite. Dans l'hypothèse où la seconde harmonique est d'amplitude faible par rapport au faisceau incident, nous pouvons cependant négliger ces termes d'ordre supérieur. Cette hypothèse, connue sous le nom **d'hypothèse de non-déplétion**, est discutée en annexe B. Nous négligerons également le terme constant dit de redressement.

Ceci conduit à l'équation d'évolution de l'amplitude de l'onde générée \mathcal{A}_2 suivante :

$$\left\{ \nabla_{\perp} + 2ik_2 \frac{\partial}{\partial z} \right\} \mathcal{A}_2 = -\frac{2\chi^{(2)}\omega^2}{c^2} \mathcal{A}_1^2 e^{-i(k_2-2k_1)z} \tag{6}$$

3.2 Le problème de l'accord de phase

Cette équation est beaucoup plus abordable dans l'approximation d'une onde plane avec \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 ne dépendant que de z (et donc \mathcal{A}_1 constante dans **l'hypothèse de non-déplétion**) :

$$\frac{d\mathcal{A}_2}{dz} = i \frac{\chi^{(2)}\omega}{2cn_2} \mathcal{A}_1^2 e^{-i\Delta kz} \text{ avec } \boxed{\Delta k = k_2 - 2k_1} \tag{7}$$

$$\text{soit } \mathcal{A}_2(L) = i \frac{\chi^{(2)}\omega}{2cn_2} \mathcal{A}_1^2 L \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) e^{-i\frac{\Delta k L}{2}} \tag{8}$$

en sortie du cristal en $z = L$ avec $\mathcal{A}_2(0) = 0$ à l'entrée.

Cette équation se comprend très bien en considérant que le carré de l'onde incidente, de nombre d'onde $2k_1$, génère un rayonnement qui se déplace ensuite à k_2 , de sorte qu'en un point z une onde de phase $2k_1 z$ vient s'ajouter à une onde se propageant avec un nombre d'onde k_2 . Ainsi, l'onde à la seconde harmonique générée en z aura à la sortie du cristal en $z = L$ la phase $2k_1 z + k_2(L-z) = k_2 L - \Delta kz$ (modulo une constante universelle), de sorte que les ondes générées en z et en $z + L_{coh} := z + \frac{\pi}{\Delta k}$ interfèrent destructivement, ce qui conduit à une amplitude nulle en sortie, comme illustré figure 5a.

Avec le cristal de niobate de lithium utilisé, L_{coh} vaut à peine 3 μm alors que le cristal fait 2 cm. Afin d'avoir une génération efficace, il faudrait donc $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n_2 - n_1) = 0$ (condition d'accord de phase) avec $\lambda_2 = 532$ nm la longueur d'onde dans le vide de la seconde harmonique, soit $n_2 = n_1$. Cela n'est *a priori* pas possible sans dispersion anormale. Une solution consiste alors à exploiter la biréfringence du cristal, mais cette méthode est difficile à réaliser et le $\chi^{(2)}$ correspondant à la polarisation requise est souvent assez faible.

Nous avons choisi une autre solution qui consiste à fabriquer un cristal dont le $\chi^{(2)}$ varie spatialement. En effet, si $\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} e^{ik_\chi z}$, cela revient à remplacer Δk par $\boxed{\Delta k_{eff} = \Delta k - k_\chi}$ dans (7). Évidemment, la susceptibilité est en réalité proche d'une valeur réelle et un tel $\chi^{(2)}$ n'est pas réalisable. À la place, on inverse le signe de $\chi^{(2)}$ en inversant l'axe extraordinaire d'un matériau ferroélectrique

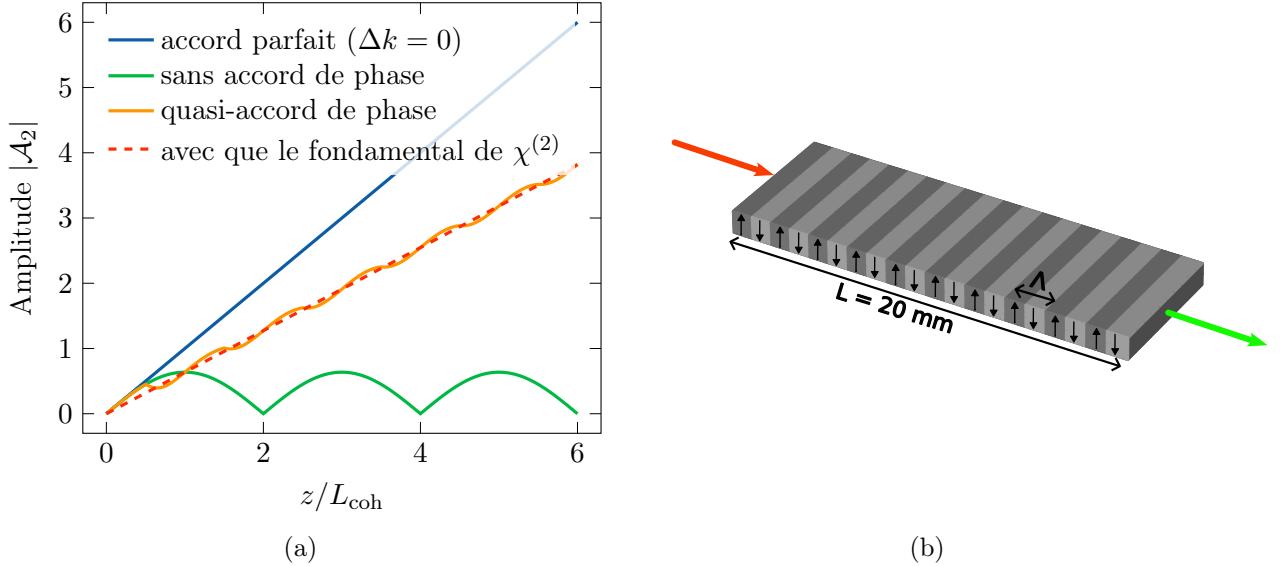


FIGURE 5 – Amplitude de seconde harmonique et quasi-accord de phase : (a) Sans accord de phase, l'amplitude de la seconde harmonique retombe à zéro toutes les $2L_{\text{coh}}$ et la croissance linéaire avec la longueur du cristal est perdue. La technique du quasi-accord de phase permet de la retrouver, bien qu'avec un coefficient plus faible. (b) L'inversion de polarisation tous les $\Lambda/2$ permet la réalisation du quasi-accord de phase.

avec une période Λ (cf figure 5b)¹. On parle alors de quasi-accord de phase et un tel cristal est dit périodiquement pôlé. Dans ce cas, la décomposition de Fourier de $\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} \text{sgn}[\cos(2\pi z/\Lambda)]$ montre que le terme de plus grande amplitude est le fondamental d'amplitude $\boxed{\chi_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi} \chi_0^{(2)}}$ et de nombre

d'onde $\boxed{k_\chi = \frac{2\pi}{\Lambda}}$. Si $k_\chi = \Delta k$, $\Delta k_{\text{eff}} = 0$ et le terme source correspondant sera accordé en phase sur toute la longueur du cristal et permettra donc de générer la seconde harmonique. Par la suite, on ne tiendra compte que de ce terme, oubliant les autres harmoniques de $\chi^{(2)}(z)$ (cela correspond à la ligne en pointillés, qui approxime bien la courbe orange). Ceci nous conduit à une amplitude

$$\mathcal{A}_2(L) = i \frac{\chi_{\text{eff}} \omega}{2c n_2} \mathcal{A}_1^2 L \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_{\text{eff}} L}{2}\right) e^{-i \frac{\Delta k_{\text{eff}} L}{2}} \quad (9)$$

$$= i \frac{\chi_{\text{eff}} \omega}{2c n_2} \mathcal{A}_1^2 L \quad (10)$$

si le quasi-accord de phase est respecté.

Ainsi, l'intensité de la seconde harmonique est quadratique en l'intensité du fondamental avec

$$\frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1^2} = \frac{\frac{1}{2} n_2 \varepsilon_0 c |\mathcal{A}_2|^2}{\left(\frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 c |\mathcal{A}_1|^2\right)^2} = \frac{\chi_{\text{eff}}^2 \omega^2}{2 n_2 n_1^2 \varepsilon_0 c^3} L^2 \quad (11)$$

On notera en particulier la dépendance quadratique en la longueur du cristal², qui serait perdue en l'absence d'accord de phase.

3.3 Cas des faisceaux gaussiens

Maintenant que nous avons éclairci l'importance de l'accord de phase, nous pouvons étudier l'effet de l'extension limitée du faisceau. Le faisceau incident produit par le laser est un faisceau gaussien,

1. En effet, si $P_z = \chi^{(2)} E_z^2$ et on change P_z et E_z de signe, on voit que $\chi^{(2)}$ est changé en son opposé.

2. Rappelons tout de même que nous nous sommes placés dans l'hypothèse de non-déplétion, et que cette croissance est donc en réalité limitée.

solution de l'équation de Helmholtz paraxiale (4) sans terme source :

$$\mathcal{A}_1(r, z) = \frac{A_1}{1 + i\zeta} e^{-\frac{r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}} \quad (12)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, w_0 le waist du faisceau et $\zeta = \frac{z}{z_R}$ où $z_R = n_1 \frac{\pi w_0^2}{\lambda_1}$ est la longueur de Rayleigh une fois dans le cristal d'indice n_1 à la fréquence du fondamental.

La seconde harmonique est générée par une onde $\mathbf{E}_1^2 \propto \left(e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} \right)^2 = e^{-\left(\frac{r}{w(z)/\sqrt{2}}\right)^2}$, ce qui conduit à la supposition que le faisceau vert produit est "gaussien" (le profil transverse est gaussien mais la puissance varie longitudinalement) avec la même longueur de Rayleigh et un waist $\sqrt{2}$ fois plus petit (ce qui est cohérent avec la relation entre waist et longueur de Rayleigh pour un faisceau de longeur d'onde moitié, si ce n'est la différence d'indice optique). La théorie de Boyd-Kleinman consiste donc à poser l'*ansatz* suivant

$$\mathcal{A}_2(r, z) = \frac{A_2(z)}{1 + i\zeta} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}} \quad (13)$$

où l'on a toujours $\zeta = (z\lambda_1)/(n_1\pi w_0^2)$. En injectant l'*ansatz* dans (6) mais avec les quantités effectives du quasi-accord de phase et en négligeant le terme en $\Delta k \ll k_2$, on trouve que A_2 vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega\chi_{\text{eff}}}{2n_2c} A_1^2 \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}}z_R\zeta}}{1 + i\zeta} \quad (14)$$

On remarque au passage que Boyd et Kleinman ont fait le choix de prendre un waist exactement $\sqrt{2}$ fois plus petit, de sorte que la relation entre waist et longueur de Rayleigh d'un faisceau gaussien n'est vérifiée qu'approximativement, ce qui a conduit au terme parasite en Δk qu'il a fallu négliger. Le choix alternatif de prendre le "bon" waist n'est pas plus satisfaisant car il conduit à un facteur $e^{\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\frac{2r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}}$ parasite dans le second membre. Quoi qu'il en soit, nous sommes surtout intéressés par l'expression de la puissance de vert générée, et cette dernière peut être obtenue sans hypothèse sur le profil du faisceau, comme nous le montrons en annexe C.

In fine, en intégrant l'équation (14) pour un faisceau incident focalisé au centre du cristal (configuration optimale), on trouve une amplitude en sortie du cristal

$$A_2(L/2) = \frac{i\omega\chi_{\text{eff}}}{2n_2c} A_1^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}}z_R\zeta}}{1 + i\zeta} dz \quad (15)$$

$$= \frac{i\omega\chi_{\text{eff}}}{2n_2c} A_1^2 z_R \int_{-L/2z_R}^{L/2z_R} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}}z_R\zeta}}{1 + i\zeta} dz \quad (16)$$

En termes de puissance,

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} n_1 \epsilon_0 c \iint dx dy |\mathcal{A}_1|^2 \quad (17)$$

$$= n_1 \epsilon_0 c \frac{\pi}{4} w_0^2 |A_1|^2 \text{ pour le faisceau incident} \quad (18)$$

$$\text{et } \mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} n_2 \epsilon_0 c \iint dx dy |\mathcal{A}_2(z = L/2)|^2 \quad (19)$$

$$= n_2 \epsilon_0 c \frac{\pi}{8} w_0^2 |A_2(L/2)|^2 \text{ pour la seconde harmonique} \quad (20)$$

Ceci conduit à une efficacité de conversion

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1^2} = \frac{n_2 \varepsilon_0 c w_0^2 \pi / 8}{n_1^2 \varepsilon_0^2 c^2 w_0^4 \pi^2 / 16} \frac{|A_2|^2}{|A_1|^4} \\
&= \frac{2n_2}{\varepsilon_0 c n_1^2 w_0^2 \pi} \frac{|A_2|^2}{|A_1|^4} \\
&= \frac{2n_2}{\varepsilon_0 c n_1^2 w_0^2 \pi} \frac{\omega^2 \chi_{\text{eff}}^2}{4n_2^2 c^2} z_{\text{R}}^2 \left| \int_{-L/2z_{\text{R}}}^{L/2z_{\text{R}}} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_{\text{R}} \zeta}}{1 + i\zeta} d\zeta \right|^2 \\
&= \frac{\omega^3 \chi_{\text{eff}}^2}{4\varepsilon_0 c^4 \pi n_1 n_2} z_{\text{R}} \left| \int_{-L/2z_{\text{R}}}^{L/2z_{\text{R}}} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_{\text{R}} \zeta}}{1 + i\zeta} d\zeta \right|^2 \\
&= \boxed{\frac{\omega^3 \chi_{\text{eff}}^2 L}{2\varepsilon_0 c^4 \pi n_1 n_2} h(a, b)} \tag{21}
\end{aligned}$$

avec $a = \frac{L}{2z_{\text{R}}}$, $b = -\Delta k_{\text{eff}} z_{\text{R}}$ et $h(a, b) = \frac{1}{4a} \left| \int_{-a}^a \frac{e^{ib\zeta}}{1 + i\zeta} d\zeta \right|^2$

Notons au passage que l'on retrouve bien le résultat pour les ondes planes dans la limite $a \ll 1$, l'équation (11) donnant $\alpha = \frac{\chi_{\text{eff}}^2 \omega^2 L^2}{2\varepsilon_0 c^3 \pi w_0^2 n_1^2 n_2}$ en passant des intensités aux puissances ($\mathcal{P} = \frac{\pi w_0^2}{2} I$).

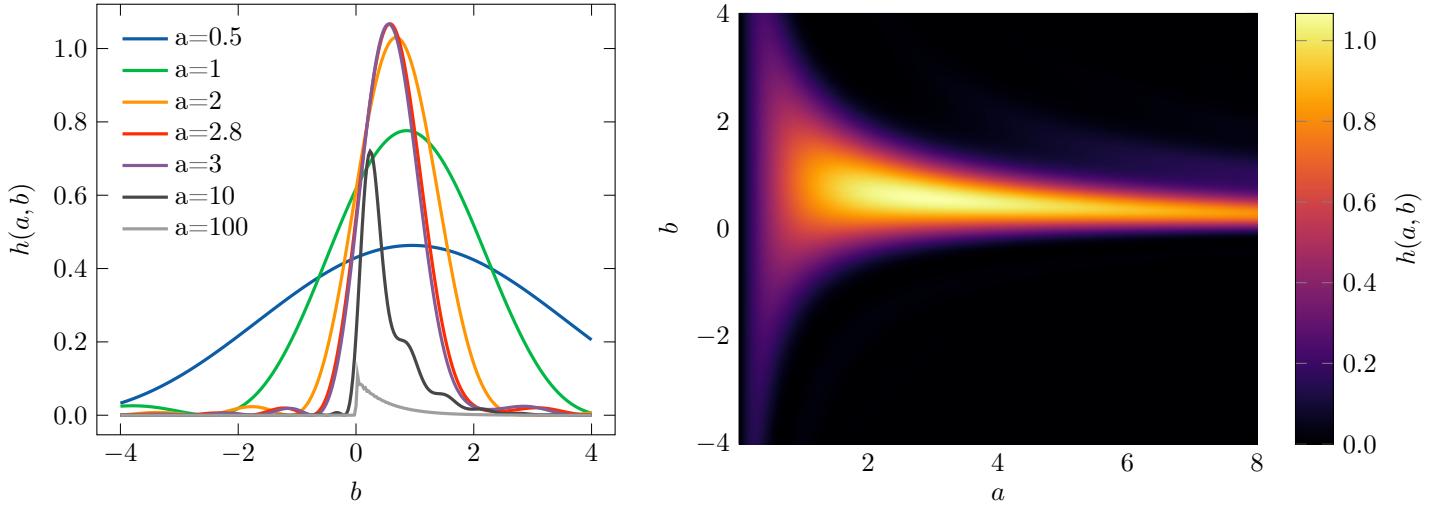


FIGURE 6 – Facteur de Boyd-Kleinman : dépendance en b pour différentes valeurs de a fixées et profil global

Le profil de h est tracé figure 6. Le facteur de Boyd-Kleinman h est maximal pour $a = 2.8$ et $b = 0.58$, et vaut alors 1.068. On remarque également que le maximum est assez large en a et se rétrécit en b lorsqu'on se rapproche de la valeur optimale de a .

Physiquement, $a \gg 1$ (i.e. $z_{\text{R}} \ll L$) correspond à un faisceau fortement focalisé. L'intensité est alors importante au point focal, mais décroît rapidement dès que l'on s'en écarte. À l'inverse, $a \ll 1$ (i.e. $z_{\text{R}} \gg L$) correspond à un faisceau collimaté. L'intensité a alors un maximum moins intense mais est uniforme sur la longueur du cristal. Notons au passage que l'on retrouve bien dans cette limite le résultat pour les ondes planes donné par l'équation (11), en considérant que $h(a, b) \approx a \text{sinc}^2(ab)$ et $\mathcal{P} = \frac{\pi w_0^2}{2} I$. L'optimum de a correspond à un compromis entre ces deux cas limites, avec une longueur de Rayleigh comparable à la longueur du cristal.

4 Réalisation de la génération de seconde harmonique

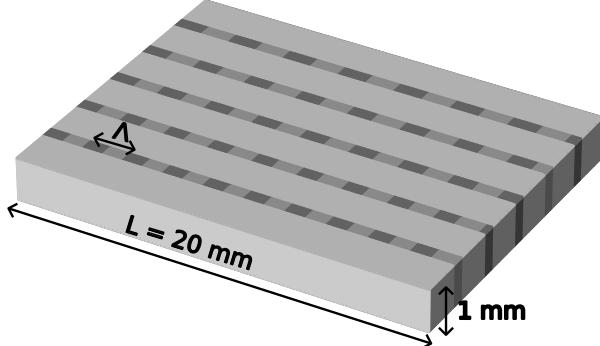
Maintenant que l'on a discuté le principe de la génération de seconde harmonique et déterminé les valeurs optimales des paramètres a et b , nous allons présenter la mise en place expérimentale du doublage dans cette section puis étudier les résultats obtenus à la lumière des calculs théoriques dans la section suivante. Tous les réglages sont d'abord faits à basse puissance (autour de 100 mW) pour des raisons de sécurité ainsi que pour éviter d'endommager le cristal.

4.1 Choix du cristal doubleur

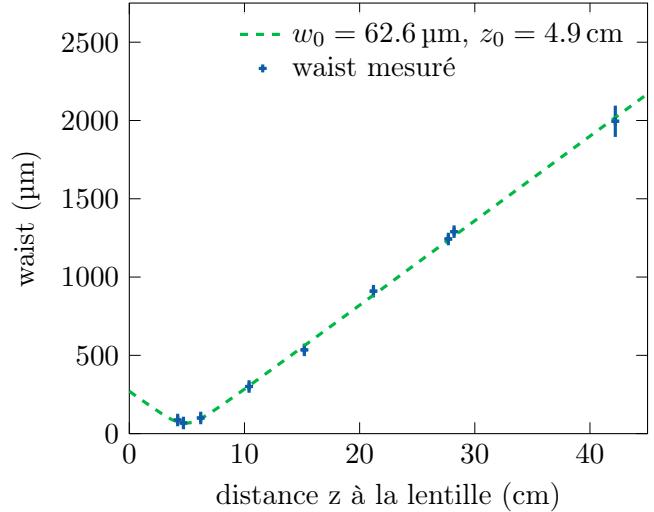
Le cristal doubleur choisi pour mon stage est un cristal de niobate de lithium périodiquement pôlé dopé au magnésium (MgO:PPLN). Il présente l'avantage d'avoir un $\chi^{(2)}$ important selon l'axe extraordinaire et donc une bonne efficacité de conversion. En revanche, il présente des effets non-linéaires parasites conduisant notamment à des inhomogénéités d'indice optique et un couplage entre les faisceaux mais présente en revanche une dégradation optique plus importante. Il est donc avantageux lorsque l'on ne cherche pas à produire plus de 2 ou 3 watts de lumière verte, ce qui est notre cas.

Le cristal commandé chez Coversion a une longueur $L = 20 \text{ mm}$ et présente 5 bandes avec des inversions de périodes différentes : $\Lambda = 6.83, 6.86, 6.90, 6.93$ et $6.96 \mu\text{m}$ (figure 7a).

4.2 Montage et alignement



(a) Schéma du cristal



(b) Profil du faisceau incident sur le cristal

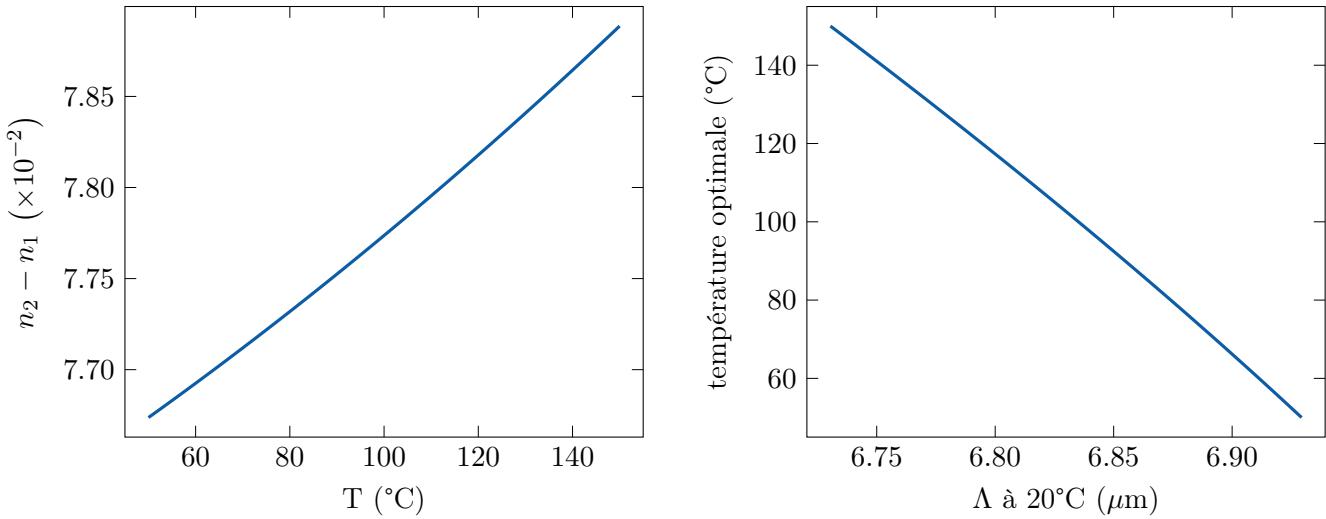
FIGURE 7

Tout d'abord, on place une lentille devant le cristal afin d'obtenir un faisceau incident focalisé au centre du cristal et avec le bon souhaité (conformément à la valeur de a voulue).

Les premières mesures ont été réalisées avec le faisceau issu de la fibre à cristaux photoniques et une lentille de focale 5 cm, sachant que le faisceau incident sur la lentille est collimaté. Le profil du faisceau obtenu a été vérifié à la caméra en mesurant le waist à différentes positions (figure 7b). Avec le waist obtenu de $62.6 \mu\text{m}$, $a = \frac{L}{2z_R} = 0.4$ ($z_R = \frac{n_1 \pi w_0^2}{\lambda_1} = 2.4 \text{ cm}$), ce qui est suboptimal mais correspond à un pic en b plus large et donc plus facile à trouver.

Il s'agit ensuite d'optimiser la température du cristal (contrôlée à l'aide d'un four Coversion) et l'alignement du faisceau incident à l'aide des deux miroirs (cf. schéma figure 9). Pour estimer la température à laquelle se trouve l'optimum, on utilise une estimation des indices optiques n_1 et n_2 en fonction de la température à partir d'une équation dite de Sellmeier, pour laquelle on a pris les coef-

ficients correspondants à un cristal de niobate de lithium congruent dopé à 5% Gayer et al. [2008], Coversion, et qui est tracée figure 8a. La température optimale calculée de la sorte est donnée figure 8b.



(a) Différence d'indices optiques calculée par l'équation de Sellmeier

(b) Température optimale calculée, en fonction de la période d'inversion Λ

FIGURE 8

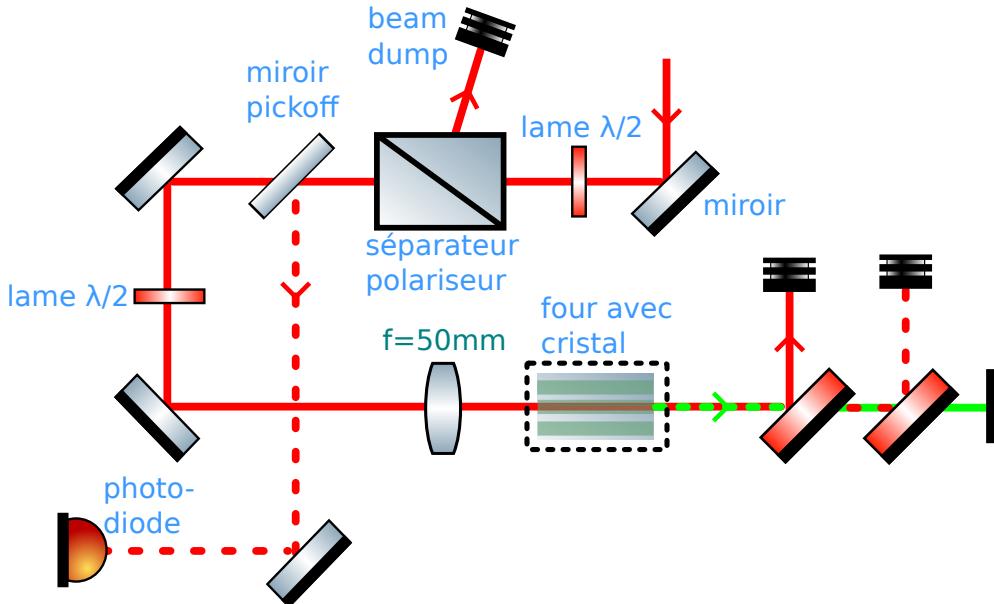


FIGURE 9 – Schéma du montage

De façon plus détaillée, l'ajustement se fait ensuite selon le protocole suivant :

1. À l'aide des quatre vis des deux miroirs, on cherche à obtenir un faisceau le plus horizontal possible à la hauteur du cristal, d'abord sans puis avec lentille. La procédure est analogue à celle pour coupler la fibre.
2. On place ensuite le cristal au point focal de la lentille et on le translate transversalement (à l'aide d'une platine de translation) jusqu'à faire passer le faisceau par la bande avec la période d'inversion choisie.

3. On tourne la lame demi-onde devant le cristal afin d'aligner la direction de polarisation (linéaire) avec l'axe extraordinaire du cristal.
4. On se place à une température élevée que l'on laisse décroître et on attend de voir apparaître le pic principal.
5. Lorsque l'alignement n'est pas bon, le pic principal et les pics secondaires sont d'amplitudes comparables et il est difficile de trouver la température optimale. Il s'agit donc d'alterner optimisation de l'alignement et de la température.
6. Une fois dépassé quelques dizaines de μW de vert, on peut passer d'une estimation de la puissance à l'œil à une mesure au puissance-mètre.
7. On fait une dernière recherche fine d'optimum de température (en variant par pas de 0.2°C sur une plage de 1°C).
8. On optimise finement l'alignement.

Le régime de doublage trouvé initialement a été pour la bande avec $\Lambda = 6.9 \mu\text{m}$ et une température optimale autour de 83°C .

5 Étude à basse puissance

L'étude du doublage est d'abord faite à basse puissance afin d'éviter les effets thermiques qui, comme nous le verrons, compliquent considérablement le comportement à haute puissance.

5.1 Efficacité de conversion

On vérifie tout d'abord que la puissance générée est bien quadratique en la puissance incidente, comme en témoignent les données présentées figure 10a. On fait ensuite varier la température autour de l'optimum, en gardant les autres paramètres fixés. On obtient alors les mesures figure 10b, qui montrent un optimum à 83.3°C (on rappelle que l'on travaille avec la bande $\Lambda = 6.9 \mu\text{m}$). L'allure de la courbe est plutôt en accord avec celle prédictive par la théorie de Boyd et Kleinman.

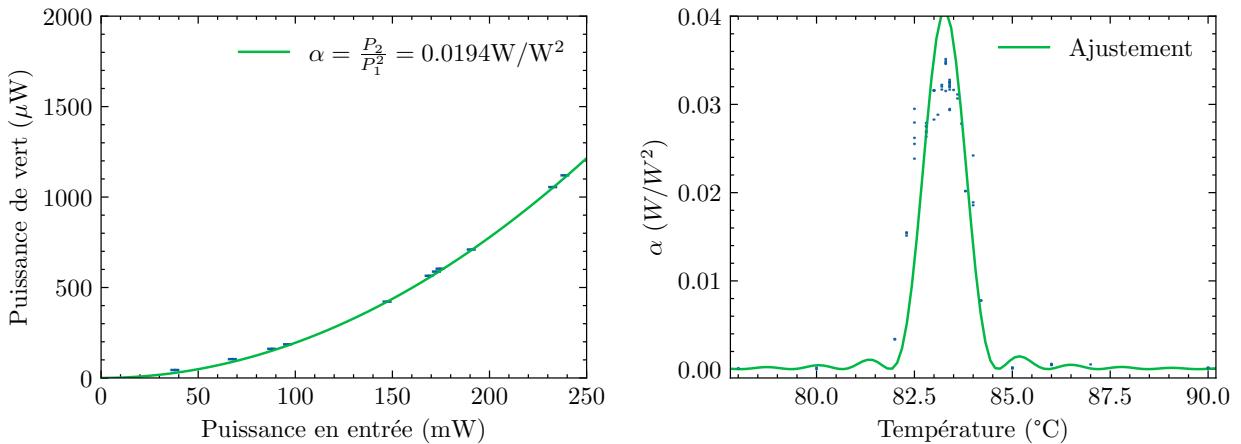


FIGURE 10 – Efficacité de conversion mesurée à basse puissance

En effet, le tracé de α en fonction de la température correspond, modulo la variation du préfacteur $\frac{\chi_{\text{eff}}^2 L}{n_1 n_2}$, à la variation de $h(a, b)$ avec a fixé et $b = -\Delta k_{\text{eff}} z_{\text{R}}$ variant avec les indices optiques. Si on linéarise la variation d'indices optiques au voisinage de l'optimum de température, on a alors

$$\delta b = -z_{\text{R}} \left[2\pi \left(\frac{\beta}{\Lambda} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial T} \right) + \frac{\Delta k_{\text{eff}}}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial T} \right] \delta T \approx -(0.3 + 5.5 + 3 \times 10^{-4}) \delta T = -5.8 \delta T \quad (22)$$

avec $\beta = 1.5 \times 10^{-5}$ le coefficient de dilatation thermique du cristal. Les graphes de $\alpha(T)$ et de $h(a, b)$ à a fixé (figure 6) sont alors reliés par dilatation des deux axes.

L'accord quantitatif pose plus de difficultés. En effet, on ne peut se fier avec certitude ni à la valeur de température indiquée par le module de contrôle du four (dont la sonde est au niveau de la monture en cuivre et non à l'intérieur du cristal chauffé par le laser), qui indiquait d'ailleurs 30 °C laser et asservissement éteints dans une salle à 25 °C, ni à la valeur exacte de la période d'inversion Λ (qui varie d'ailleurs aussi avec la dilatation thermique). Il est donc difficile de se placer sur la courbe figure 8b, or il est nécessaire de connaître la température du cristal au niveau du faisceau pour avoir une valeur exacte des indices optiques et de Λ et ainsi pouvoir calculer Δk_{eff} . La valeur de χ_{eff} varie d'un cristal à un autre et est également source d'incertitude. Coversion annonce d'ailleurs $\chi_{\text{eff}} = 28 \text{ pm/V}$ alors que la valeur théorique correspondant à $\chi^{(2)} = 50 \text{ pm/V}$ est $\chi_{\text{eff}} = 32 \text{ pm/V}$, ce qui fait passer le facteur devant h de 5.5 % W⁻¹ à 4.2 % W⁻¹.

Encore une autre source d'incertitude est la détermination du waist du faisceau incident dont z_R dépend quadratiquement. D'ailleurs, avec le waist déterminé à 62.6 μm, $a = 0.41$ ce qui correspond à un maximum de $h = 0.39$ et donc un maximum de seulement 2.1 % W⁻¹ même pour $\chi_{\text{eff}} = 32 \text{ pm/V}$. Il apparaît donc que a a été sous-estimé et donc que le waist a été surestimé. Il faudrait plutôt $a = 0.7$, ce qui correspond à un waist $\sqrt{2}$ fois plus petit, ce qui est difficilement reconciliable avec les mesures effectuées. Il est également difficile d'imaginer un $\chi_{\text{eff}} = 40 \text{ pm/V}$ qui permettrait d'augmenter suffisamment le préfacteur de h . Cette efficacité plus grande que prévu est d'autant plus étonnante que les mesures faites plus tard avec des longueurs de Rayleigh plus proches de l'optimum donnent toutes des efficacités plus faibles, et qui sont d'ailleurs en-dessous des valeurs théoriques (comme on pourrait s'y attendre au vu des imperfections inhérentes à la mise en pratique). Ces mesures sont récapitulées dans le tableau 1. La seule différence au niveau de la mise en place est que la mesure dont il s'agit jusqu'à présent a été faite avec un faisceau sortant de la fibre à cristaux photoniques, alors que les mesures suivantes ont été faites avec un faisceau contournant la fibre (ce qui était nécessaire pour les tests à haute puissance).

fibre	w_0 (μm)	z_r (cm)	a	α théorique (% W ⁻¹)	α mesuré (% W ⁻¹)
oui	63	2.5	0.4	1.6	3.5
non	30	0.6	1.7	4.15	2.8
non	38	0.9	1.1	3.4	3.1
non	64	2.6	0.4	1.6	1.2

TABLE 1

Nonobstant ces difficultés, on peut également s'intéresser à la largeur à mi-hauteur (FWHM) de la courbe puisqu'il s'agit d'une quantité indépendante de la valeur du préfacteur. La comparaison présente de nouveau quelques subtilités du fait de l'incertitude à la fois sur la température et sur la période d'inversion Λ . La méthode qui a été retenue est de fixer la valeur de Λ , ce qui fixe la température correspondant à l'optimum théorique. On trouve figure 11a le tracé de la largeur à mi-hauteur de $\alpha(T)$ en fonction de la longueur de Rayleigh z_R , pour différentes valeurs de Λ . Au cours de cette étude, il a été constaté numériquement que la largeur à mi-hauteur en b de h vérifiait assez précisément une relation affine en $\frac{1}{a}$, soit une relation affine en z_R (figure 11b), ce qui permet de simplifier grandement les calculs.

D'après la courbe figure 11a, on s'attend donc à une largeur $\delta T = 1.2^\circ\text{C}$, ce qui est clairement inférieur à la largeur de la courbe expérimentale. Les longueurs de Rayleigh donnant une largeur semblable à celle observée expérimentalement sont inférieures à 0.2 cm et donc clairement irréalistes. L'étude de la largeur de la courbe ne permet donc malheureusement pas d'éclairer les choses. Comme notre objectif n'est pas de vérifier la théorie de Boyd-Kleinman à basse puissance mais d'obtenir quelques watts de lumière verte, nous n'avons pas poussé plus loin l'acquisition de données dans

différentes configurations car cela est très chronophage au niveau de la recherche d'optimum et de l'attente de la thermalisation. En particulier, nous n'avons pas de mesures détaillées de la dépendance en température de l'efficacité dans les configurations correspondant aux valeurs présentées dans le tableau 1.

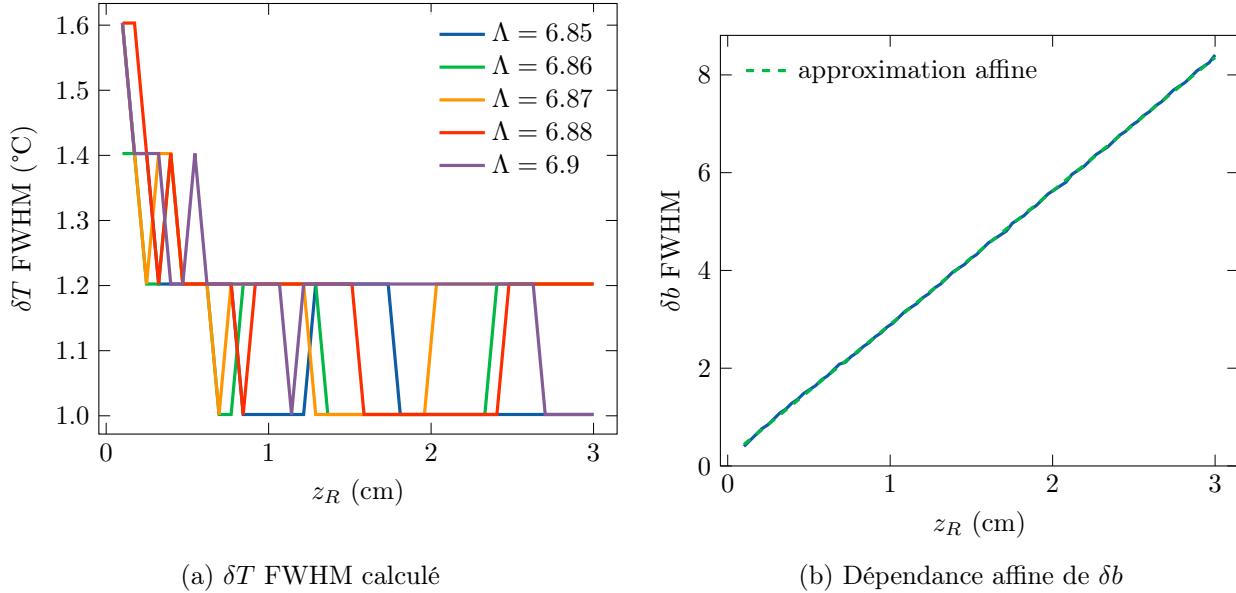


FIGURE 11

5.2 Profil du faisceau généré

On peut également s'intéresser au profil du faisceau vert généré.
Discussion de l'hypothèse d'égalité des longueurs de Rayleigh

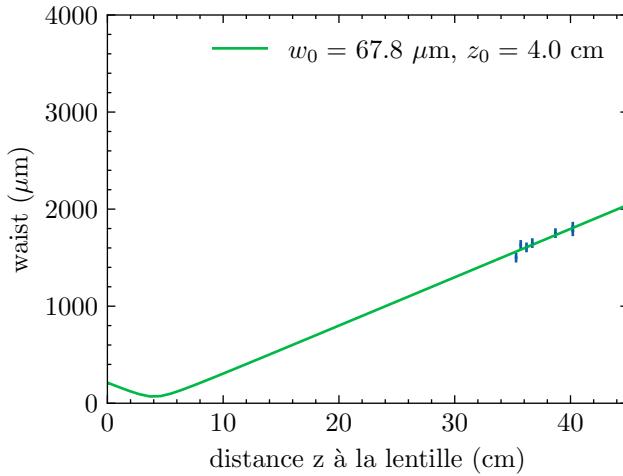


FIGURE 12 – Profil du faisceau vert généré

6 Étude à haute puissance

6.1 Caractérisation à haute puissance

6.2 Recherche d'un régime exploitable

7 Conclusion

Références

- [1] Brice Bakkali-Hassani. *Testing scale invariance in a two-dimensional Bose gas : preparation and characterization of solitary waves.* Theses, Sorbonne Université, December 2021. URL <https://theses.hal.science/tel-03591031>.
- [2] J. L. Ville, T. Bienaimé, R. Saint-Jalm, L. Corman, M. Aidelsburger, L. Chomaz, K. Kleinlein, D. Perconte, S. Nascimbène, J. Dalibard, and J. Beugnon. Loading and compression of a single two-dimensional bose gas in an optical accordion. *Phys. Rev. A*, 95 :013632, Jan 2017. doi : 10.1103/PhysRevA.95.013632. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.013632>.
- [3] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller, and Yurii B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. volume 42 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 95–170. Academic Press, 2000. doi : [https://doi.org/10.1016/S1049-250X\(08\)60186-X](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(08)60186-X). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X0860186X>.
- [4] Philip St.J. Russell. Photonic-crystal fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 24(12) :4729–4749, 2006. doi : 10.1109/JLT.2006.885258.
- [5] Philip Russell. Photonic crystal fiber :finding the holey grail. *Opt. Photon. News*, 18(7) :26–31, Jul 2007. doi : 10.1364/OPN.18.7.000026. URL <https://www.optica-opn.org/abstract.cfm?URI=open-18-7-26>.
- [6] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, Inc., USA, 3rd edition, 2008. ISBN 0123694701.
- [7] Manuel Joffre. Optique non-linéaire en régimes continu et femtoseconde. Lecture, 2010. URL <https://cel.hal.science/cel-00092964>.
- [8] O. Gayer, Z. Sacks, E. Galun, and A. Arie. Temperature and wavelength dependent refractive index equations for MgO-doped congruent and stoichiometric LiNbO₃. *Applied Physics B*, 91(2) :343–348, April 2008. doi : 10.1007/s00340-008-2998-2. URL <https://doi.org/10.1007/s00340-008-2998-2>.
- [9] Coversion. Material Properties of Lithium Niobate. <https://coversion.com/en/resource/material-properties-of-lithium-niobate/>. [Accessed 18-Jul-2023].

A Équation d'onde non-linéaire

Considérons un milieu matériel non magnétique, dans lequel

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

où \mathbf{P} est la polarisation du milieu (induite par le champ dans le milieu supposé sans polarisation propre).

En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday et en injectant l'équation de Maxwell-Ampère (sans courant libre), on trouve

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Le terme $\text{grad}(\text{div } \mathbf{E})$ est nul dans un milieu linéaire isotrope (et sans charges libres) puisque $\text{div } \mathbf{D} = 0$ implique alors $\text{div } \mathbf{E} = 0$, ou encore pour une onde plane transverse. En règle générale, ce terme est non nul à cause de l'anisotropie ou de la non-linéarité du matériau, mais il reste négligeable, en particulier dans l'approximation paraxiale [6], et sera négligé par la suite.

On décompose ensuite la polarisation en un terme linéaire $\mathbf{P}^{(1)}$ et un terme non linéaire \mathbf{P}^{NL} , et de même pour l'induction électrique $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{\text{NL}} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{P}^{\text{NL}}$.

Comme la réponse du milieu dépend de la fréquence de l'excitation, on décompose les champs en composantes à différentes pulsations ω_q :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \sum_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_q(\mathbf{r}) e^{-i\omega_q t} \right\} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \sum_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_q(\mathbf{r}) e^{-i\omega_q t} \right\} \\ \mathbf{P}^{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \sum_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_q t} \right\} \end{aligned}$$

On peut alors écrire $\mathcal{D}_q^{(1)} = \underline{\epsilon}^{(1)}(\omega_q) \mathcal{E}_q$ avec $\underline{\epsilon}^{(1)}(\omega_q)$ le tenseur de permittivité diélectrique relative (linéaire) à ω_q , ce qui conduit à l'équation de Helmholtz [6]

$$\nabla^2 \mathcal{E}_q + \frac{\omega_q^2}{c^2} \underline{\epsilon}^{(1)}(\omega_q) \cdot \mathcal{E}_q(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_q^2}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r})$$

B Validité de l'hypothèse de non déplétion

C Efficacité de conversion dans un cristal périodiquement pôlé

Étude par TF dans le plan (cf Dareau)