

---

## Génération de seconde harmonique

---

**Résumé :** L'équipe de Jérôme Beugnon du groupe Gaz quantiques du Laboratoire Kastler Brossel et du Collège de France, dirigé par Jean Dalibard, manipule des gaz de Bose 2D de rubidium. Le refroidissement et le piègeage des atomes nécessite de nombreux lasers, aux longueurs d'onde adaptées aux différentes transitions atomiques que l'on cherche à exploiter. L'objectif principal de mon stage a été la conception d'un laser à 532 nm (dans le vert) par génération de fréquence double à partir d'un laser infrarouge à 1064 nm. J'ai réalisé l'intégralité du montage et fait varier les différents paramètres disponibles afin d'essayer d'optimiser la puissance et la stabilité du faisceau vert produit. On constate que, du fait des effets thermiques, il est très difficile d'obtenir une puissance stable de l'ordre de quelques watts comme espéré.

**Mots clefs :** optique non-linéaire, génération de seconde harmonique (SHG), niobate de lithium périodiquement polé (PPLN), fibre optique, cristaux photoniques

Stage encadré par :

**Jérôme BEUGNON**

[beugnon@lkb.ens.fr](mailto:beugnon@lkb.ens.fr) / tél. (+33) 1 44 27 14 31

Laboratoire Kastler Brossel

Adresse

Postale

<http://adresse.web.du/laboratoire/>



# Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe Gaz quantiques du Laboratoire Kastler Brossel et du Collège de France pour son accueil chaleureux et pour m'avoir fait découvrir le monde de la recherche de l'intérieur. Je remercie tout particulièrement Franco Rabec pour avoir pris le temps de m'expliquer tous les détails de l'expérience sur laquelle il travaille et Guillaume Brochier pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils. Je remercie également Benjamin Huard pour m'avoir conseillé ce stage. Enfin, je remercie Jérôme Beugnon, mon maître de stage, pour sa disponibilité, ses conseils et toutes les connaissances qu'il m'a transmises, ainsi que pour le temps qu'il m'a consacré pendant mon stage mais également en amont pour planifier mon stage et préparer tout le matériel nécessaire.

## Table des matières

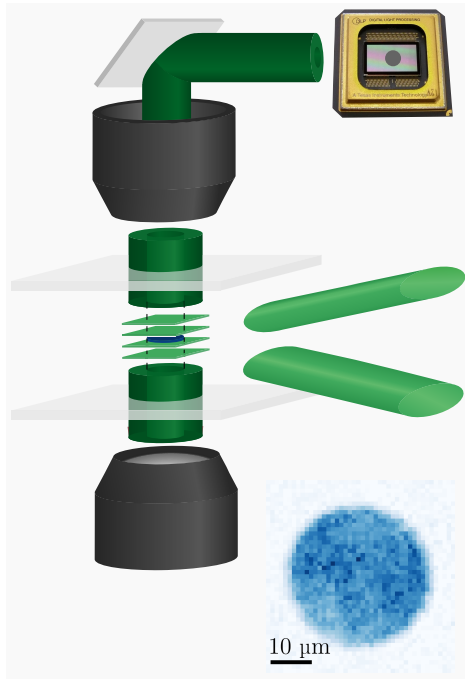
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Expériences de rubidium . . . . .	1
1.2	Utilisation des lasers à 532 nm . . . . .	2
1.3	Objectif du stage . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Couplage de la fibre à cristaux /al ? photoniques</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Principe de la génération de seconde harmonique (SHG)</b>	<b>4</b>
3.1	Polarisation non linéaire et seconde harmonique . . . . .	4
3.2	Le problème de l'accord de phase . . . . .	6
3.3	Cas des faisceaux gaussiens . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Réalisation de la génération de seconde harmonique</b>	<b>9</b>
4.1	Choix du cristal doubleur . . . . .	9
4.2	Montage et alignement . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Étude à basse puissance</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Étude à haute puissance</b>	<b>12</b>
6.1	Caractérisation à haute puissance . . . . .	12
6.2	Recherche d'un régime exploitable . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>
<b>A</b>	<b>Équation d'onde non-linéaire</b>	<b>12</b>
<b>B</b>	<b>Validité de l'hypothèse de non déplétion</b>	<b>12</b>
<b>C</b>	<b>Efficacité de conversion dans un cristal périodiquement pôlé</b>	<b>12</b>

# 1 Introduction

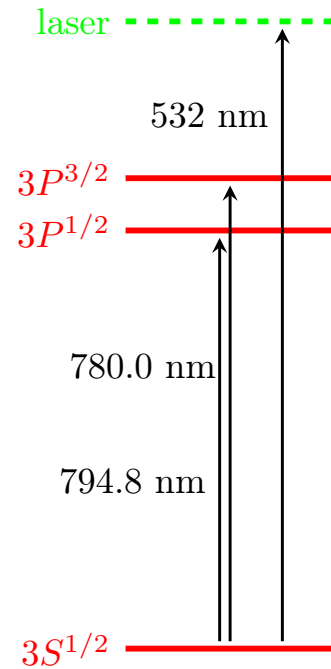
## 1.1 Expériences de rubidium

La réalisation d'expériences de physique quantique sur des atomes nécessite de pouvoir les refroidir jusqu'à des températures en-dessous du Kelvin et, souvent, de les piéger dans des potentiels contrôlés. Le refroidissement et le piégeage d'atomes neutres est réalisé avec différentes techniques, parfois combinées ou enchaînées, mais toutes reposant sur l'utilisation de lasers, ce qui explique leur importance cruciale dans ces expériences.

Dans le projet Rubidium du groupe Gaz quantiques (LKB - Collège de France), les atomes refroidis et piégés par une séquence de pièges magnéto-optiques (MOT), de pièges magnétiques et optiques et de refroidissements par évaporation, que nous ne discuterons pas ici, sont ensuite confinés dans un plan pour former un condensat 2D avec de l'ordre de  $10^6$  atomes à 200 nK. Comme expliqué dans la sous-section suivante, un laser vert (à 532 nm) pousse les atomes de rubidium vers un minimum d'intensité. Ainsi, en faisant interférer deux faisceaux cohérents inclinés, on réalise une figure d'interférence constituée de franges planes, comme on peut le voir figure 1a (les 2 faisceaux en question sont les faisceaux vert clair sur la figure), et on cherche à confiner les atomes dans un des minima. Il faut également empêcher les atomes de s'échapper par les côtés, ce pour quoi on les éclaire avec un nouveau faisceau vert (vertical sur la figure) dont le profil, réalisé avec un DMD (*digital mirror device*) est en forme d'anneau, ce qui permet de réaliser une "boîte" circulaire avec un puits de potentiel plat. Pour geler le degré de liberté vertical et obtenir un condensat 2D, on commence par piéger l'intégralité des atomes dans un même minimum d'intensité en créant une figure avec une interfrange large, puis on resserre progressivement l'interfrange en faisant varier l'inclinaison des faisceaux. En forçant une évaporation optique, on ne garde que les atomes moins énergétiques de sorte qu'à la fin l'intégralité des atomes soit dans le mode fondamental du puits. Le nuage d'atomes a alors une distribution gaussienne d'épaisseur de l'ordre de 180 nm [Bakkali-Hassani, 2021]. On voit figure 1a en bleu une image des atomes piégés dans le cercle. Un deuxième DMD avec un nouveau laser vert peuvent alors être utilisés pour façonner différents potentiels à l'intérieur de la "boîte".



(a) Réalisation d'un piège circulaire 2D<sup>1</sup>



(b) Transitions du rubidium 87

FIGURE 1 – Utilisation du laser à 532 nm dans l'expérience

1. schéma réalisé par Brice Bakkali-Hassani, ancien doctorant sur l'expérience

## 1.2 Utilisation des lasers à 532 nm

L'utilisations des lasers verts repose sur le principe du piégeage optique dipolaire, qui exploite l'interaction champ électrique-dipôle électrique induit. Cette interaction donne lieu, classiquement, à une force dérivant du potentiel  $U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c} \Re(\alpha(\omega)) I(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{d}$  désigne le moment dipolaire induit,  $\alpha$  la polarisabilité complexe,  $\langle \cdot \rangle$  une moyenne temporelle et  $I$  l'intensité du faisceau) qui va servir à piéger les atomes dans un minimum de potentiel. Le piégeage est perturbé par les cycles d'absorption et réémission spontanée, ayant lieu, toujours "classiquement", à une fréquence  $\Gamma_{\text{diff}} = \frac{P_{\text{abs}}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\varepsilon_0 c} \Im(\alpha(\omega)) I(\mathbf{r})$  où  $P_{\text{abs}} = \langle \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} \rangle$  est la puissance absorbée par l'atome. Pour un atome à deux niveaux avec une transition à  $\omega_0$ , dans l'approximation de faible saturation (état excité faiblement peuplé) et de fort désaccord ( $\Delta = \omega - \omega_0$  vérifiant  $|\Delta| \ll \omega_0$ ), vérifiée en pratique et permettant de justifier le calcul classique (à une précision de l'ordre du pourcent), on trouve

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r})$$

$$\Gamma_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r})$$

avec  $\Gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e c^3}$  le facteur d'amortissement dû au rayonnement.

Puisque  $\Gamma_{\text{diff}} = \frac{\Gamma}{\hbar\Delta} U_{\text{dip}}$ , on voit qu'un grand désaccord permet de minimiser l'effet perturbateur de la diffusion. On remarque également que pour un faisceau laser désaccordé vers le rouge, l'atome est piégé dans les zones lumineuses, alors que pour un désaccord vers le bleu (comme c'est le cas pour le rubidium et le laser vert), l'atome est piégé dans les zones sombres.

Pour un atome réel à plusieurs niveaux, l'énergie d'interaction (qui s'obtient plus rigoureusement en considérant la perturbation par un hamiltonien de couplage  $\mathcal{H}_1 = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$  des états propres du système atome + champ) est la somme des contributions des différents états excités, pondérée par l'importance des transitions associées [Grimm et al., 2000]. Pour les atomes de rubidium 87 utilisés dans l'expérience, les transitions prépondérantes sont les 2 transitions de la ligne D, pour lesquelles le laser vert à 532 nm est désaccordé vers le bleu (figure 1b)

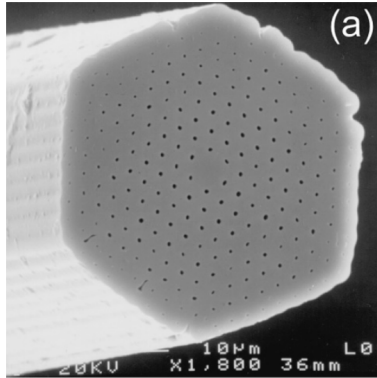
## 1.3 Objectif du stage

Les lasers verts actuellement utilisés au laboratoire sont des lasers à 1064 nm Nd-Yag ou à diode avec amplificateur à semi-conducteur (*tapered amplifier*) qui sont vendus directement avec le doublage de fréquence. Ils ont l'inconvénient d'être particulièrement onéreux et fragiles, et leur réparation nécessite plusieurs mois d'attente. L'objectif de mon projet était donc d'explorer la possibilité de réaliser le doublage soi-même à partir d'un laser à 1064 nm beaucoup plus facile d'accès. Ce doublage de fréquence (SHG pour *second harmonic generation* en anglais) repose sur l'existence d'un terme dans la polarisation électrique de certains cristaux quadratique en le champ appliqué, qui joue le rôle d'un terme source à la fréquence double de celle du faisceau incident. C'est notamment le cas du niobate de lithium choisi par mon maître de stage, Jérôme Beugnon, pour ce projet.

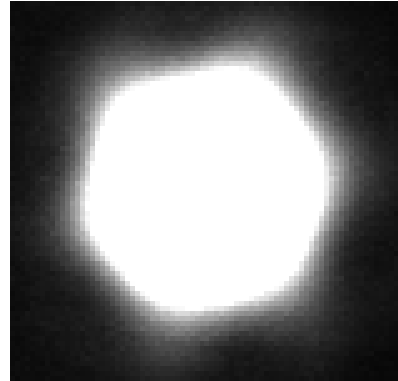
## 2 Couplage de la fibre à cristaux /al? photoniques

Une première partie de mon stage, indépendante de l'objectif principal d'obtenir un laser vert, a été de tester une fibre à cristaux photoniques LMA-PM-10 de la marque NKT Photonics. LMA signifie large (effective) mode area et donc que la fibre est faite pour des faisceaux larges, ce qui est important pour les applications avec des lasers de plusieurs dizaines de watts, car le seuil de destruction des matériaux ainsi que les effets thermiques dus à la dissipation dépendent de l'intensité et non de la puissance totale. La technologie des fibres optiques traditionnelles, reposant sur une réflexion interne totale, ne permet pas de fabriquer des fibres à cœur large qui resteraient monomodes sur une gamme de longueurs d'ondes et de rayon de courbure de la fibre suffisante. Les fibres à cristaux photoniques, quant à elles, reposent sur une variation d'indice optique effectif périodique grâce à une structure régulière de

trous et ont l'avantage de permettre beaucoup plus de liberté, notamment en terme de taille du cœur tout en restant monomodes, et ce sur une très large gamme de fréquences. [Russell, 2006, 2007]



(a) Image par microscopie électronique par balayage de la première fibre à cristaux photoniques fonctionnelle [3]



(b) Image en intensité du mode hexagonal en sortie (caméra fortement saturée)

FIGURE 2 – Structure de la fibre à cristaux photoniques et mode hexagonal en sortie

Comme indiqué, la fibre à cristaux photoniques ne sélectionne qu'un seul mode. Les fibres monomodes traditionnelles sélectionnent généralement un mode gaussien, mais la géométrie de la fibre à cristaux photoniques utilisée fait que le mode sélectionné est un mode hexagonal, comme on peut le voir figure 2b. Ce mode ne se distingue cependant que très peu d'un mode gaussien, et on ne voit la forme hexagonale qu'en saturant la caméra.

En particulier, afin de maximiser la transmission de la fibre, il faut que l'axe du faisceau incident (gaussien) coïncide avec celui de la fibre, ce qui correspond à l'ajustement de 4 paramètres (2 angles pour l'orientations et 2 coordonnées pour la position dans le plan transverse). L'ajustement est fait à l'aide de 2 miroirs (cf schéma figure 3). Il faut également que le faisceau ait le bon waist et qu'il soit focalisé en bout de fibre. La focalisation est réalisée à l'aide d'un coupleur de fibre (60SMS-SMA-0-M5-08 de la marque Schäfter+Kirchhoff), qui est un collimateur de focale 5 mm optimisé pour le couplage de fibres et nécessite de produire un faisceau collimaté au niveau du coupleur avec le bon waist (que l'on peut déterminer expérimentalement en observant le faisceau en sortie de fibre, puisqu'elle est équipée d'un coupleur identique). Cet ajustement est fait à l'aide d'un télescope avec des focales adaptées.

De façon plus détaillée, le protocole du couplage est essentiellement le suivant :

1. On choisit une hauteur de faisceau avec laquelle on va travailler, et on align la source laser et les optiques à cette hauteur.
2. À l'aide des vis des 2 miroirs réglant l'angle vertical, on assure l'horizontalité et la bonne hauteur du faisceau par rapport au collimateur en faisant passer le faisceau à travers ce dernier, en le plaçant en alternance près et loin des miroirs.
3. On connecte la fibre au collimateur. Si l'alignement est bon, on doit avoir une puissance mesurable en sortie.
4. On étudie le profil du faisceau en sortie de sorte à déterminer son waist. Puisque les collimateurs aux deux extrémités sont identiques, il s'agit du bon waist pour le faisceau incident.
5. On monte un télescope avec un grossissement permettant d'obtenir le waist voulu.
6. On alterne optimisation de la position du collimateur et de l'alignement. Il faut se méfier que le déplacement du collimateur affecte l'alignement.
7. L'alignement s'effectue selon la méthode du 'beam-walk' : les rotations des 2 miroirs selon le même axe ont un effet couplé, permettant par exemple d'induire une translation pure du faisceau. Il est donc préférable de faire varier un angle et trouver le maximum pour cet angle en faisant varier l'angle associé sur le deuxième, et comparer ces maxima successifs. En effet, le

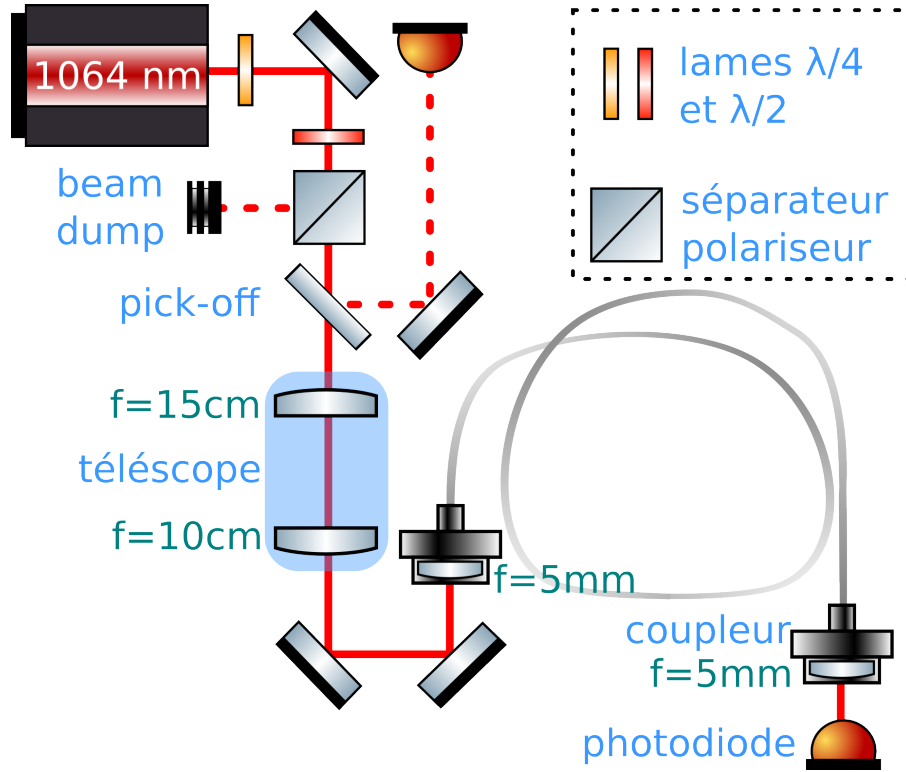


FIGURE 3 – Montage de la fibre à cristaux photoniques

couplage est sensible même aux petites variations d'angle, mais les maxima successifs obtenus en 'beam-walkant' sont assez proches.

J'ai ainsi pu obtenir un couplage d'environ 75 %, ce qui est tout à fait raisonnable. En particulier, on peut injecter 10 W dans la fibre sans risquer de l'endommager du fait d'une trop forte dissipation de puissance.

TODO : injection en pola

### 3 Principe de la génération de seconde harmonique (SHG)

Nous revenons maintenant à l'objectif principal du stage, l'obtention d'un laser à 532 nm par génération de seconde harmonique, dont nous expliquons d'abord le principe.

#### 3.1 Polarisation non linéaire et seconde harmonique

La génération de la seconde harmonique a lieu dans un cristal doubleur de fréquence avec des propriétés non-linéaires favorables (figure 4). La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu non linéaire donne lieu à une équation d'onde avec un terme source, qui s'écrit (cf annexe A) [6, 5]

$$\nabla^2 \mathbf{E}_q(\mathbf{r}) + \frac{\omega_q^2}{c^2} \underline{\epsilon}^{(1)}(\omega_q) \cdot \mathbf{E}_q(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_q^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r})$$

dans le domaine de Fourier en temps avec la convention  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_q(\mathbf{r}) e^{-i\omega_q t} \right\}$ , avec  $\underline{\epsilon}^{(1)}$  le tenseur de permittivité diélectrique relative associé à la partie linéaire de la polarisation et  $\mathbf{P}_q^{\text{NL}}$  la partie non-linéaire de la polarisation.

On fait l'hypothèse simplificatrice d'une polarisation linéaire selon un des axes principaux et on travaillera par la suite avec des  $\mathcal{E}_q$  scalaires. En particulier, la permittivité tensorielle  $\underline{\epsilon}^{(1)}$  est remplacée par sa valeur propre correspondante et donne lieu à un indice optique  $n_q^2 = 1 + \epsilon^{(1)}(\omega)/\epsilon_0$ . En écrivant les différentes harmoniques sous la forme d'une "onde monochromatique d'amplitude variable"  $\mathcal{E}_q =$

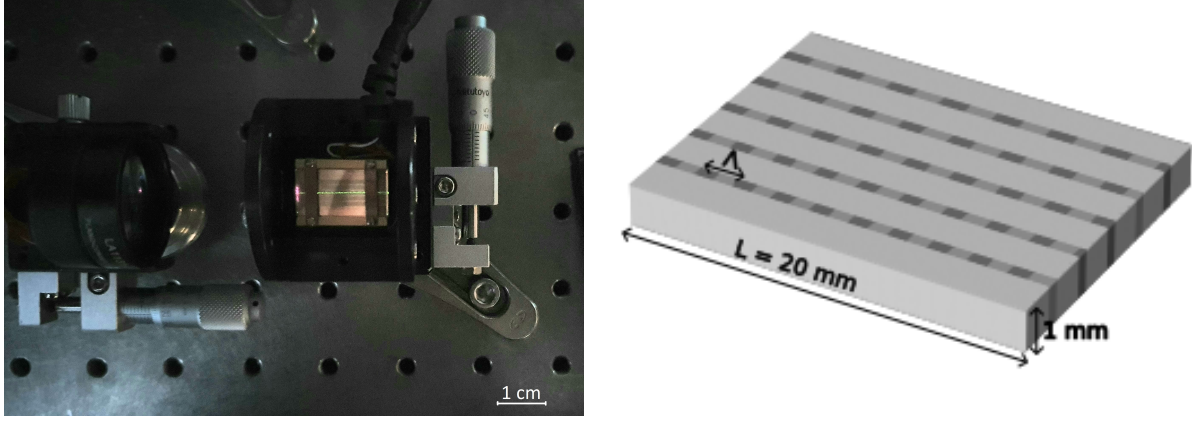


FIGURE 4 – Génération d'un laser vert dans un cristal doubleur de fréquence

$\mathcal{A}_q(x, y, z)e^{ik_q z}$  avec  $k_q = \frac{n_q \omega_q}{c}$  et en se plaçant dans l'approximation paraxiale, i.e. de lente variation de  $\mathcal{A}$  avec  $z$  ( $\frac{\partial^2 \mathcal{A}_q}{\partial z^2} \ll k_q \frac{\partial \mathcal{A}_q}{\partial z}$ ), on arrive aux équations [5]

$$\left\{ \nabla_{\perp} + 2ik_q \frac{\partial}{\partial z} \right\} \mathcal{A}_q = -\frac{\omega_q^2}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{P}_q^{\text{NL}}(\mathbf{r})e^{ik_q z} \quad (1)$$

avec  $\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ .

En particulier, pour un champ électrique avec une composante à  $\omega$  et une à  $2\omega$ , le terme quadratique dans la polarisation est donné par [5]

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 \text{ avec } \chi^{(2)} \text{ la susceptibilité d'ordre 2} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \left\{ \mathcal{E}_1 e^{-i\omega t} + \mathcal{E}_1^* e^{i\omega t} + \mathcal{E}_2 e^{-2i\omega t} + \mathcal{E}_2^* e^{2i\omega t} \right\}^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \left\{ \mathcal{E}_1^2 e^{-2i\omega t} + \mathcal{E}_1^{*2} e^{2i\omega t} + 2|\mathcal{E}_1|^2 + 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* e^{i\omega t} + 2\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 e^{-i\omega t} \right. \\ &\quad \left. + 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{-3i\omega t} + 2\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2^* e^{3i\omega t} + \mathcal{O}(\mathcal{E}_2^2) \right\} \end{aligned}$$

où l'on a considéré que  $\chi^{(2)}$  est approximativement le même pour toutes les harmoniques.

On voit donc que l'onde incidente (à  $\omega$ ) conduit à un terme à la fréquence double dans la polarisation, qui va conduire à la création d'une onde à cette seconde harmonique comme souhaité. Cette dernière va conduire à un terme à la fréquence fondamentale qui va affecter l'onde incidente ainsi qu'à un terme à la fréquence triple qui va conduire à une onde à la troisième harmonique et ainsi de suite. Dans l'hypothèse où la seconde harmonique est d'amplitude faible par rapport au faisceau incident, nous pouvons cependant négliger ces termes d'ordre supérieur. Cette hypothèse, connue sous le nom **d'hypothèse de non-déplétion**, est discutée en annexe B. Nous négligerons également le terme constant dit de redressement.

Ceci conduit à l'équation d'évolution de l'amplitude de l'onde générée  $\mathcal{A}_2$  suivante :

$$\left\{ \nabla_{\perp} + 2ik_2 \frac{\partial}{\partial z} \right\} \mathcal{A}_2 = -\frac{2\chi^{(2)}\omega^2}{c^2} \mathcal{A}_1^2 e^{-i(k_2 - 2k_1)z} \quad (2)$$



### 3.2 Le problème de l'accord de phase

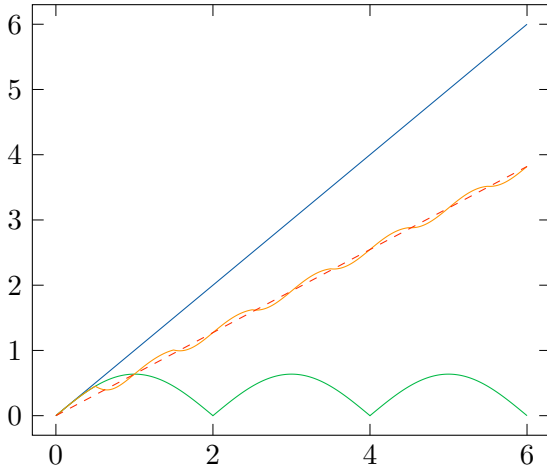
Cette équation est beaucoup plus abordable dans l'approximation d'une onde plane avec  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  ne dépendant que de  $z$  (et donc  $\mathcal{A}_1$  constante dans l'hypothèse de non-déplétion) :

$$\frac{d\mathcal{A}_2}{dz} = i \frac{\chi^{(2)}\omega}{2cn_2} \mathcal{A}_1^2 e^{-i\Delta k z} \text{ avec } \boxed{\Delta k = k_2 - 2k_1} \quad (3)$$

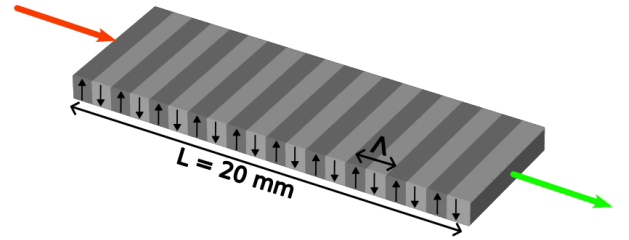
$$\text{soit } \mathcal{A}_2(L) = i \frac{\chi^{(2)}\omega}{2cn_2} \mathcal{A}_1^2 L \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) e^{-i\frac{\Delta k L}{2}} \quad (4)$$

en sortie du cristal en  $z = L$  avec  $\mathcal{A}_2(0) = 0$  à l'entrée.

Cette équation se comprend très bien en considérant que le carré de l'onde incidente, de nombre d'onde  $2k_1$ , génère un rayonnement qui se déplace ensuite à  $k_2$ , de sorte qu'en un point  $z$  une onde de phase  $2k_1 z$  vient s'ajouter à une onde se propageant à  $k_2$ . Ainsi, l'onde à la seconde harmonique générée en  $z$  aura à la sortie du cristal en  $z = L$  la phase  $2k_1 z + k_2(L - z) = k_2 L - \Delta k z$  (modulo une constante universelle), de sorte que les ondes générées en  $z$  et en  $z + L_{\text{coh}} = z + \frac{\pi}{\Delta k}$  interfèrent destructivement, ce qui conduit à une amplitude nulle en sortie, comme illustré figure 5a.



(a)



(b)

FIGURE 5 – Amplitude de seconde harmonique et quasi-accord de phase (TODO légende+alignement)

Avec le cristal de niobate de lithium utilisé,  $L_{\text{coh}}$  vaut à peine  $3\mu\text{m}$  alors que le cristal fait  $2\text{cm}$ . Afin d'avoir une génération efficace, il faudrait donc  $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n_2 - n_1) = 0$  (condition d'accord de phase) avec  $\lambda_2 = 532\text{nm}$  la longueur d'onde dans le vide de la seconde harmonique, soit  $n_2 = n_1$ . Cela n'est *a priori* pas possible sans dispersion anormale. Une solution consiste alors à exploiter la biréfringence du cristal, mais cette méthode est difficile à réaliser et le  $\chi^{(2)}$  correspondant à la polarisation requise est souvent assez faible.

Nous avons choisi une autre solution qui consiste à fabriquer un cristal dont le  $\chi^{(2)}$  varie spatialement. En effet, si  $\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} e^{ik_\chi z}$ , cela revient à remplacer  $\Delta k$  par  $\Delta k_{\text{eff}} = \Delta k - k_\chi$  dans (3). Évidemment, la susceptibilité est en réalité proche d'une valeur réelle et un tel  $\chi^{(2)}$  n'est pas réalisable. À la place, on inverse le signe de  $\chi^{(2)}$  en inversant l'axe extraordinaire d'un matériau ferroélectrique avec une période  $\Lambda$  (cf figure 5). On parle alors de quasi-accord de phase et un tel cristal est dit périodiquement pôle. Dans ce cas, la décomposition de Fourier de  $\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} \operatorname{sgn}[\cos(2\pi z/\Lambda)]$  montre que le terme de plus grande amplitude est le fondamental d'amplitude  $\chi_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{2}{\pi} \chi_0^{(2)}$  et de nombre d'onde  $k_\chi = \frac{2\pi}{\Lambda}$ . Si  $k_\chi = \Delta k$ , le terme source correspondant sera accordé en phase sur toute la longueur du



cristal et permettra donc de générer la seconde harmonique. Par la suite, on ne tiendra compte que de ce terme, oubliant les autres harmoniques de  $\chi^{(2)}(z)$  (cela correspond à la courbe en pointillés, qui approxime bien la courbe orange). Ceci nous conduit à une amplitude

$$\mathcal{A}_2(L) = i \frac{\chi_{\text{eff}} \omega}{2cn_2} \mathcal{A}_1^2 L \quad (5)$$

$$\text{ou } i \frac{\chi_{\text{eff}} \omega}{2cn_2} \mathcal{A}_1^2 L \text{sinc} \left( \frac{\Delta k_{\text{eff}} L}{2} \right) e^{-i \frac{\Delta k_{\text{eff}} L}{2}} \quad (6)$$

si le quasi-accord de phase n'est pas respecté.

En termes de puissance, la puissance de la seconde harmonique est quadratique en la puissance du fondamental, avec une efficacité (normalisée)

$$\frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1^2} = \frac{\frac{1}{2} n_2 \varepsilon_0 c |\mathcal{A}_2|^2}{\left( \frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 c |\mathcal{A}_1|^2 \right)^2} = \frac{\chi_{\text{eff}}^2 \omega^2}{2n_2 n_1^2 \varepsilon_0 c^3} L^2 \quad (7)$$

$$\text{soit } \alpha = \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1^2} = \frac{\chi_{\text{eff}}^2 \omega^2 L^2}{2\varepsilon_0 c^3 \pi w_0^2 n_1^2 n_2} \quad (8)$$

pour des faisceaux gaussiens de waists  $w_0$  pour le fondamental et  $\frac{w_0}{\sqrt{2}}$  pour la seconde harmonique que l'on va être amenés à considérer par la suite.

On notera en particulier la dépendance quadratique en la longueur du cristal<sup>2</sup>, qui serait perdue en l'absence d'accord de phase.

### 3.3 Cas des faisceaux gaussiens

Maintenant que nous avons éclairci l'importance de l'accord de phase, nous pouvons étudier l'effet de l'extension limitée du faisceau. Le faisceau incident produit par le laser est un faisceau gaussien, solution de l'équation de Helmholtz paraxiale (1) sans terme source :

$$\mathcal{A}_1(r, z) = \frac{A_1}{1 + i\zeta} e^{-\frac{r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}}$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $w_0$  le waist du faisceau et  $\zeta = \frac{z}{z_R}$  où  $z_R = n_1 \frac{\pi w_0^2}{\lambda_1}$  est la longueur de Rayleigh une fois dans le cristal d'indice  $n_1$  à la fréquence du fondamental.

La seconde harmonique est générée par une onde  $\mathbf{E}_1^2 \propto \left( e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} \right)^2 = e^{-\left(\frac{r}{w(z)/\sqrt{2}}\right)^2}$ , ce qui conduit à la supposition que le faisceau vert produit est "gaussien" (le profil transverse est gaussien mais la puissance varie longitudinalement) avec la même longueur de Rayleigh et un waist  $\sqrt{2}$  fois plus petit (ce qui est cohérent avec la relation entre waist et longueur de Rayleigh pour un faisceau de longueur d'onde moitié, si ce n'est la différence d'indice optique). La théorie de Boyd-Kleinman consiste donc à poser l'Ansatz suivant

$$\mathcal{A}_2(r, z) = \frac{A_2(z)}{1 + i\zeta} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}}$$

où l'on a toujours  $\zeta = (z\lambda_1)/(n_1\pi w_0^2)$ . En injectant l'Ansatz dans (2) mais avec les quantités effectives du quasi-accord de phase et en négligeant le terme en  $\Delta k \ll k_2$ , on trouve que  $A_2$  vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega\chi_{\text{eff}}}{2n_2c} A_1^2 \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_R \zeta}}{1 + i\zeta} \quad (9)$$

On remarque au passage que Boyd et Kleinman ont fait le choix de prendre un waist exactement  $\sqrt{2}$  fois plus petit, de sorte que la relation entre waist et longueur de Rayleigh d'un faisceau gaussien

2. Rappelons tout de même que nous nous sommes placés dans l'hypothèse de non-déplétion, et que cette croissance est donc en réalité limitée.

n'est vérifiée qu'approximativement, ce qui a conduit au terme parasite en  $\Delta k$  qu'il a fallu négliger. Le choix alternatif de prendre le "bon" waist n'est pas plus satisfaisant car il conduit à un facteur  $e^{\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\frac{2r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}}$  parasite dans le second membre. Quoi qu'il en soit, nous sommes surtout intéressés par l'expression de la puissance de vert générée, et cette dernière peut être obtenue sans hypothèse sur le profil du faisceau, comme nous le montrerons en annexe C.

In fine, en intégrant l'équation (9) pour un faisceau incident focalisé au centre du cristal (configuration optimale), on trouve une amplitude en sortie du cristal

$$\begin{aligned} A_2(L/2) &= \frac{i\omega\chi_{\text{eff}}}{2n_2c} A_1^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_R \zeta}}{1+i\zeta} dz \\ &= \frac{i\omega\chi_{\text{eff}}}{2n_2c} A_1^2 z_R \int_{-L/2z_R}^{L/2z_R} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_R \zeta}}{1+i\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

En termes de puissance,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 c \iint dx dy |A_1|^2 \\ &= n_1 \varepsilon_0 c \frac{\pi}{4} w_0^2 |A_1|^2 \text{ pour le faisceau incident} \\ \text{et } \mathcal{P}_2 &= \frac{1}{2} n_2 \varepsilon_0 c \iint dx dy |A_2(z = L/2)|^2 \\ &= n_2 \varepsilon_0 c \frac{\pi}{8} w_0^2 |A_2(L/2)|^2 \text{ pour la seconde harmonique} \end{aligned}$$

Ceci conduit à une efficacité de conversion

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1^2} = \frac{n_2 \varepsilon_0 c w_0^2 \pi / 8}{n_1^2 \varepsilon_0^2 c^2 w_0^4 \pi^2 / 16} \frac{|A_2|^2}{|A_1|^4} \\ &= \frac{2n_2}{\varepsilon_0 c n_1^2 w_0^2 \pi} \frac{|A_2|^2}{|A_1|^4} \\ &= \frac{2n_2}{\varepsilon_0 c n_1^2 w_0^2 \pi} \frac{\omega^2 \chi_{\text{eff}}^2}{4n_2^2 c^2} z_R^2 \left| \int_{-L/2z_R}^{L/2z_R} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_R \zeta}}{1+i\zeta} d\zeta \right|^2 \\ &= \frac{\omega^3 \chi_{\text{eff}}^2}{2\varepsilon_0 c^4 \pi n_1 n_2} z_R \left| \int_{-L/2z_R}^{L/2z_R} \frac{e^{-i\Delta k_{\text{eff}} z_R \zeta}}{1+i\zeta} d\zeta \right|^2 \\ &= \boxed{\frac{\omega^3 \chi_{\text{eff}}^2 L}{2\varepsilon_0 c^4 \pi n_1 n_2} h(a, b)} \\ \text{avec } &\boxed{a = \frac{L}{2z_R}, b = -\Delta k_{\text{eff}} z_R \text{ et } h(a, b) = \frac{1}{4a} \left| \int_{-a}^a \frac{e^{ib\zeta}}{1+i\zeta} d\zeta \right|^2} \end{aligned}$$

Notons au passage que l'on retrouve bien le résultat pour les ondes planes dans la limite  $a \ll 1$ .

Le profil de  $h$  est tracé figure 6 et sera discuté plus bas en relation avec la réalisation expérimentale du doublage.

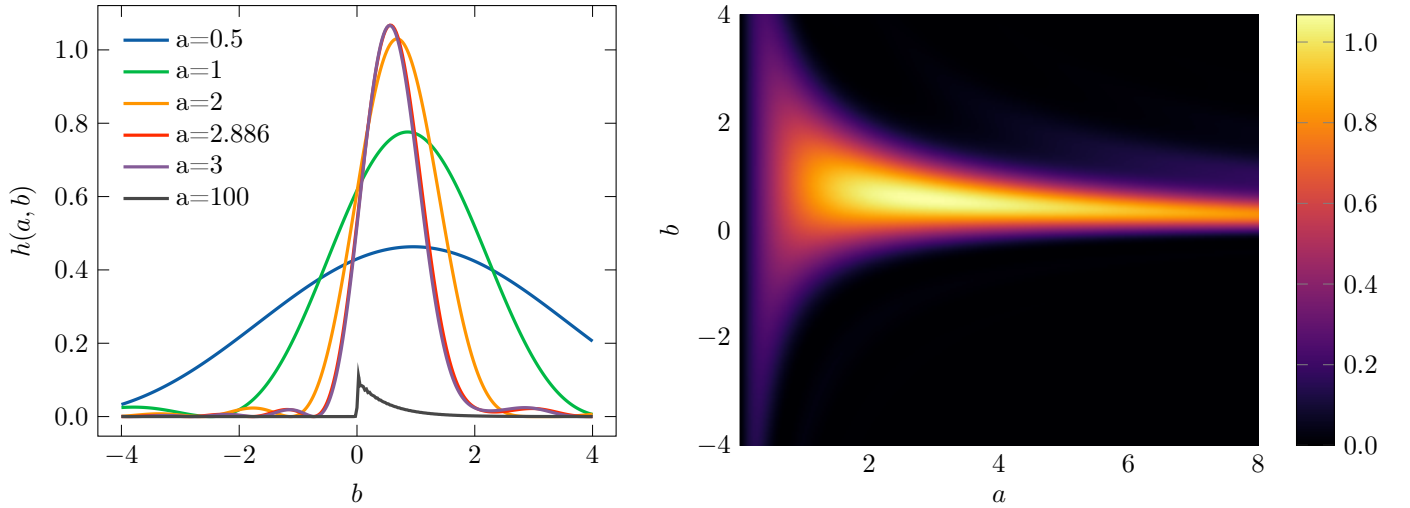


FIGURE 6 – Facteur de Boyd-Kleinman

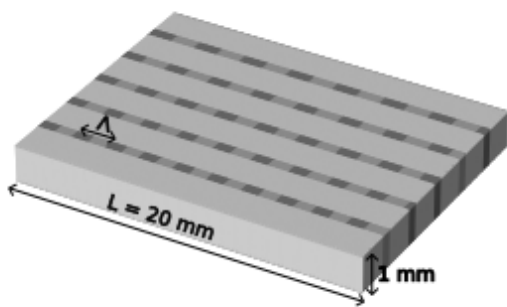
## 4 Réalisation de la génération de seconde harmonique

### 4.1 Choix du cristal doubleur

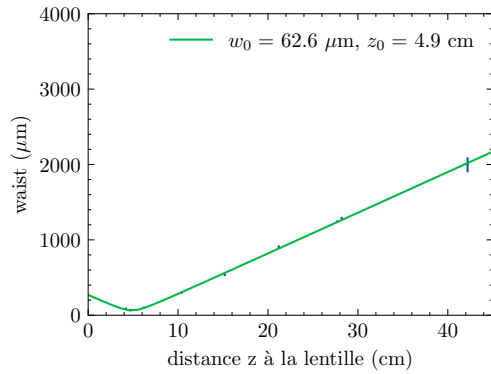
Le cristal doubleur choisi pour mon stage est un cristal de niobate de lithium périodiquement pôle dopé au magnésium (Mgo:PPLN). Il présente l'avantage d'avoir un  $\chi^{(2)}$  important selon l'axe extraordinaire et donc une bonne efficacité de conversion, mais présente en revanche une dégradation optique plus importante. Il est donc avantageux lorsque l'on ne cherche pas à produire plus de 2 ou 3 watts de vert, ce qui est notre cas.

Le cristal commandé chez Covision a une longueur  $L = 20$  mm et présente 5 bandes avec des inversions de périodes différentes :  $\Lambda = 6, 83; 6, 86; 6, 90; 6, 93$  et  $6, 96\mu\text{m}$  (figure 7a).

### 4.2 Montage et alignement



(a) Schéma du cristal



(b) Profil du faisceau incident sur le cristal

FIGURE 7

Tout d'abord, on place une lentille devant le cristal afin d'obtenir un faisceau incident focalisé au centre du cristal et avec le bon waist.

Les premières mesures ont été réalisées avec le faisceau issu de la fibre à cristaux photoniques et une lentille de focale 5 cm, sachant que le faisceau incident sur la lentille est collimaté. Le profil du faisceau obtenu a été vérifié à la caméra en mesurant le waist à différentes positions (figure 7b). Avec le

waist obtenu de  $62.6 \mu\text{m}$ ,  $a = \frac{L}{2z_R} = 0.4$  ( $z_R = \frac{n_1 \pi w_0^2}{\lambda_1} = 2.4 \text{ cm}$ ), ce qui est suboptimal mais correspond à un pic en  $b$  plus large et donc plus facile à trouver.

Il s'agit ensuite d'optimiser la température du cristal (contrôlée à l'aide d'un four Covesion) et l'alignement du faisceau incident à l'aide des deux miroirs (cf. schéma figure 8).

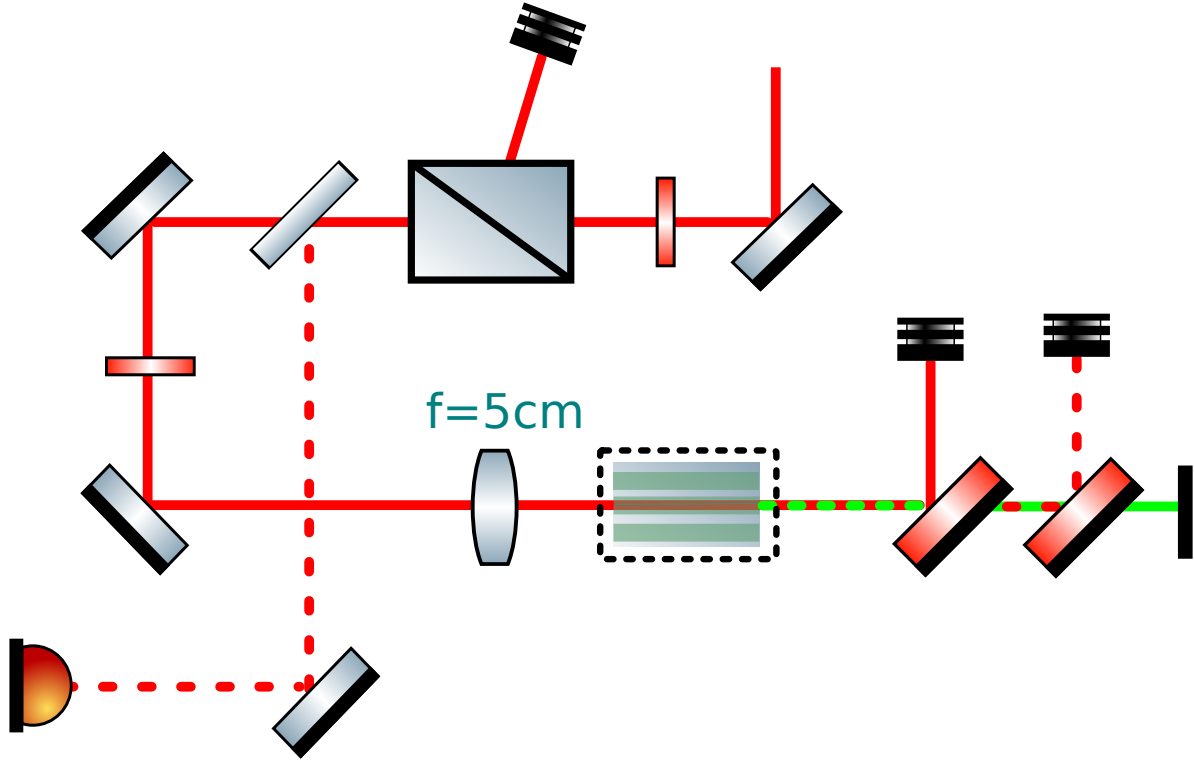


FIGURE 8 – Schéma du montage

De façon plus détaillée, l'ajustement se fait ensuite selon le protocole suivant :

1. À l'aide des quatre vis des deux miroirs, on cherche à obtenir un faisceau le plus droit possible à la hauteur du cristal, d'abord sans puis avec lentille. La procédure est analogue à celle pour coupler la fibre.
2. On place ensuite le cristal au point focal de la lentille et on le translate transversalement (à l'aide d'une platine de translation) jusqu'à faire passer le faisceau par la bande avec la bonne période d'inversion.
3. On tourne la lame demi-onde devant le cristal afin d'aligner la direction de polarisation avec l'axe extraordinaire du cristal (alignement signé par un maximum de puissance).
4. On se place à une température élevée que l'on laisse décroître et on attend de voir apparaître le pic principal.
5. Lorsque l'alignement n'est pas bon, le pic principal et les pics secondaires sont d'amplitudes comparables et il est difficile de trouver la température optimale. Il s'agit donc d'alterner optimisation de l'alignement et de la température.
6. Une fois dépassé quelques dizaines de  $\mu\text{W}$  de vert, on peut passer d'une estimation de la puissance à l'œil à une mesure au puissance-mètre.
7. On fait une dernière recherche fine d'optimum de température (en variant par pas de  $0.2^\circ\text{C}$  sur une plage de  $1^\circ\text{C}$ ).
8. On optimise finement l'alignement. On note que changer un seul angle influence très fortement la puissance de vert produite, mais que la variation de l'angle correspondant sur le deuxième miroir permet de retrouver une puissance optimale semblable. Il faut donc 'beam-walker' considérablement afin de trouver le véritable optimum. De plus, il y a une certaine compensation

entre alignement (et donc  $\Lambda$  effective pour l'angle du faisceau) et température (et donc  $\Delta k$ , mais aussi  $\Lambda$  à travers la dilatation thermique).

## 5 Étude à basse puissance

L'étude du doublage est d'abord faite à basse puissance afin d'éviter les effets thermiques qui, comme nous le verrons, compliquent considérablement le comportement à haute puissance.

On vérifie tout d'abord que la puissance générée est bien quadratique en la puissance incidente, comme en témoignent les données présentées figure 9a. On fait ensuite varier la température autour de l'optimum, en gardant les autres paramètres fixés. On obtient alors les mesures figure 9b. On observe un pic principal et un très petit maximum secondaire, plutôt en accord avec l'allure prédite par la théorie de Boyd et Kleinman.

En effet, le tracé de  $\alpha$  en fonction de la température correspond, modulo la variation du préfacteur  $\frac{\chi_{\text{eff}}^2 L}{n_1 n_2}$ , à la variation de  $h(a, b)$  avec  $a$  fixé et  $b = -\Delta_{\text{eff}} z_R$  variant avec les indices optiques. Si on linéarise la variation d'indices optiques au voisinage de l'optimum de température, on a alors

$$\delta b = b \left( -\frac{\frac{\partial n_2 - n_1}{\partial T}}{\frac{\lambda_2}{\Lambda} - (n_2 - n_1)} + \frac{\partial n_1}{\partial T} \right) \delta T \approx 0.1b \delta T$$

et les graphes de  $\alpha(T)$  et de  $h(a, b)$  à  $a$  fixé (figure 6) sont reliés par dilatation des deux axes.

L'accord quantitatif pose plus de difficultés. En effet, on ne peut se fier avec certitude ni à la valeur de température indiquée par le module de contrôle du four (dont la sonde est au niveau de la monture en cuivre et non à l'intérieur du cristal chauffé par le laser), qui indiquait d'ailleurs 30 °C laser et asservissement éteints dans une salle à 25 °C, ni à la valeur exacte de la période d'inversion  $\Lambda$  (qui varie d'ailleurs aussi avec la dilatation thermique), ni à la valeur de  $\chi_{\text{eff}}$  qui varie d'un cristal à un autre. Covesion annonce d'ailleurs  $\chi_{\text{eff}} = 28$  pm/V alors que la valeur théorique correspondant à  $\chi^{(2)} = 50$  pm/V est  $\chi_{\text{eff}} = 32$  pm/V, ce qui fait passer le facteur devant  $h$  de 5.5 %W<sup>-1</sup> à 4.2 %W<sup>-1</sup>.

Une autre source d'incertitude est la détermination du waist du faisceau incident dont  $z_R$  dépend quadratiquement. D'ailleurs, avec le waist déterminé à 62.6  $\mu\text{m}$ ,  $a = 0.41$  ce qui correspond à un maximum de  $h = 0.39$  et donc un maximum de seulement 5.5 %W<sup>-1</sup> même pour  $\chi_{\text{eff}} = 32$  pm/V. Il apparaît donc que  $a$  a été sous-estimé et donc que le waist a été surestimé. Il faudrait plutôt  $a = 0.7$ , ce qui correspond à un waist  $\sqrt{2}$  fois plus petit.

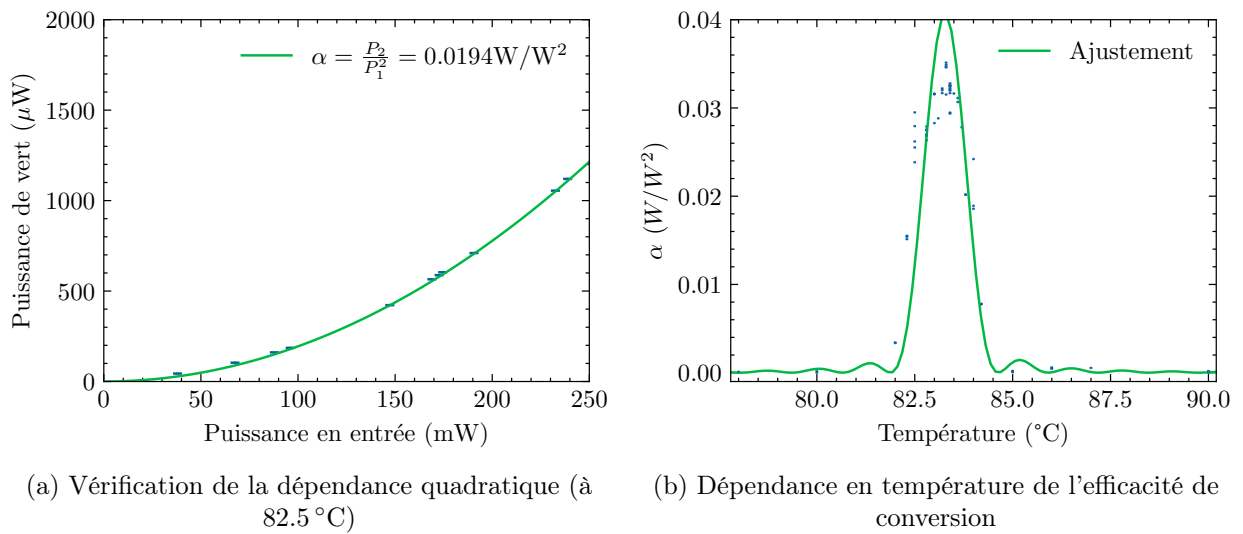


FIGURE 9 – Efficacité de conversion mesurée à basse puissance

On peut également s'intéresser au profil du faisceau vert généré.  
Discussion de l'hypothèse d'égalité des longueurs de Rayleigh

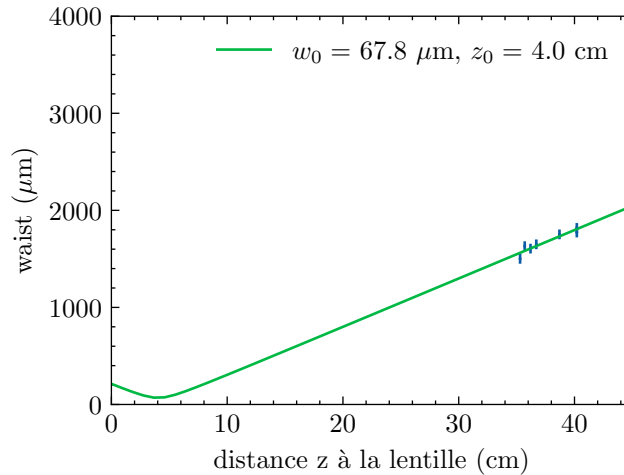


FIGURE 10 – Profil du faisceau vert généré

## 6 Étude à haute puissance

### 6.1 Caractérisation à haute puissance

### 6.2 Recherche d'un régime exploitable

## 7 Conclusion

### A Équation d'onde non-linéaire

À partir des éqts de Maxwell, terme négligé (angle de double réfraction Joffre [2010]) Boyd [2008]

### B Validité de l'hypothèse de non déplétion

### C Efficacité de conversion dans un cristal périodiquement pôlé

Étude par TF dans le plan (cf Dareau)

## Références

- [1] Brice Bakkali-Hassani. *Testing scale invariance in a two-dimensional Bose gas : preparation and characterization of solitary waves*. Theses, Sorbonne Université, December 2021. URL <https://theses.hal.science/tel-03591031>.
- [2] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller, and Yurii B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. volume 42 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 95–170. Academic Press, 2000. doi : [https://doi.org/10.1016/S1049-250X\(08\)60186-X](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(08)60186-X). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X0860186X>.
- [3] Philip St.J. Russell. Photonic-crystal fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 24(12) :4729–4749, 2006. doi : 10.1109/JLT.2006.885258.
- [4] Philip Russell. Photonic crystal fiber :finding the holey grail. *Opt. Photon. News*, 18(7) :26–31, Jul 2007. doi : 10.1364/OPN.18.7.000026. URL <https://www.optica-opn.org/abstract.cfm?URI=opn-18-7-26>.

- [5] Manuel Joffre. Optique non-linéaire en régimes continu et femtoseconde. Lecture, 2010. URL <https://cel.hal.science/cel-00092964>.
- [6] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Third Edition*. Academic Press, Inc., USA, 3rd edition, 2008. ISBN 0123694701.