Projet MOGPL : optimisation robuste dans l'incertain total

Karim ELLOUZE, Philipp HANUSSEK

26 novembre 2024

Chapitre 1

Linéarisation des critères maxmin et minmax regret

1.1 Programme lineáre *maxmin*

$$\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{sous contraintes} \quad & t \leq \sum_{i=1}^{n} v_{i,1} x_i \\
& t \leq \sum_{i=1}^{n} v_{i,2} x_i \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$\begin{aligned}
x^* &= [2,3,4,7,8,9] \\
z(x^*) &= [66,66]
\end{aligned}$$

1.2 Programme linéaire *minmax regret*

$$\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{sous contraintes} \quad & t \geq z_1^* - \sum_{i=1}^{n} v_{i,1} x_i \\
& t \geq z_2^* - \sum_{i=1}^{n} v_{i,2} x_i \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

z_i^* étant la meilleure valeure pour le scénario i

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$\begin{aligned}
x^{'*} &= [2,3,6,7,8,9] \\
z(x_1^*, x_2^*) &= [112,118] \\
z(x^{'*}) &= [62,70]
\end{aligned}$$

1.3 Représentation dans le plan

1.4 Analyse de pérformance

Chapitre 2

Linéarisation du critère *maxOWA*

2.1 $L_k(z)$ comme valeur optimale

Explication : Étant donné que le vecteur $(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$ est ordonné en ordre croissant, la somme $\sum_{i=1}^{k} z(i)$ correspond à la somme des k plus petites valeurs de z_i et donc à la valeur optimale du programme linéaire.

2.2 Utiliser le dual pour trouver les composantes du $L(z)$

Primal :

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i \\ \text{s.c.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k \\ 0 \leq a_{ik} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Dual :

$$\begin{aligned} \max \quad k \cdot r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \\ \text{s.c.} \quad r_k - b_{ik} \leq z_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ b_{ik} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Trouver $L(z)$ avec $z = [2, 9, 6, 8, 5, 4]$ (voir le code pour calculation par programmation linéaire) :

$$\begin{aligned} L_1(z) = 2 \\ L_2(z) = 6 \\ L_3(z) = 11 \\ L_4(z) = 17 \\ L_5(z) = 25 \\ L_6(z) = 34 \end{aligned}$$

2.3 Reécrire l'OWA

Montrer que

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=1}^{n} w_i z_{(i)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x)) \end{aligned}$$

Explication :

$$\text{par définition : } z_{(k)}(x) = L_k(z(x)) - L_{k-1}(z(x))$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{n} w_i z_{(i)}(x) \\
&= w_1 z_{(1)} + w_2 z_{(2)} + \ldots + w_n z_{(n)} \\
&= w_1 L_1(z(x)) + w_2(L_2(z(x)) - L_1(z(x))) + \ldots + w_n(L_n(z(x)) - L_{n-1}(z(x))) \\
&= (w_1 - w_2)L_1(z(x)) + (w_2 - w_3)(L_2(z(x))) + \ldots + (w_{n-1} - w_n)L_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x))
\end{aligned}$$

2.4 Formulation *maxOWA* pour le problème SAD

$$\begin{array}{ll}
\max & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k \cdot r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right) \\
\text{s.c.} & r_k - b_{ik} \leq z_i(x) \\
& b_{ik} \geq 0 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{array}$$

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$\begin{aligned}
x^* &= [2,3,4,7,8,9] \\
z(x^*) &= [66,66]
\end{aligned}$$

2.5 Formulation linéaire pour le critère de *minOWA*

Primal :

$L_k(z) = \sum_{i=1}^{k} r(x, s_{(i)})$, regret en ordre décroissant, donc :

$$\begin{aligned}
\max & \sum_{i=1}^{n} a_{ik} r(x, s_{(i)}) \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k \\
& 0 \leq a_{ik} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

$r(x, s_{(i)}) = z_i^* - z_i(x)$

Dual :

$$\begin{aligned}
\min \quad & k \cdot r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \\
\text{s.c.} \quad & r_k + b_{ik} \geq r(x, s_{(i)}), \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
& b_{ik} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Formulation entière :

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k \cdot r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right) \\
&\text{s.c.} \quad r_k + b_{ik} \geq r(x, s_{(i)}), \quad i = 1, \ldots, n \\
&\qquad b_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
&\qquad x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$
\begin{aligned}
x^{'*} &= [2, 4, 5, 7, 8, 9] \\
z(x_1^*, x_2^*) &= [112, 118] \\
z(x^{'*}) &= [62, 70]
\end{aligned}
$$