Projet MOGPL : optimisation robuste dans l'incertain total

Karim ELLOUZE, Philipp HANUSSEK

27 novembre 2024

Chapitre 1

Linéarisation des critères maxmin et minmax regret

1.1 Programme lineáre *maxmin*

$$\begin{aligned}
\max \quad & t \\
\text{sous contraintes} \quad & t \leq \sum_{i=1}^{n} v_{i,1} x_i \\
& t \leq \sum_{i=1}^{n} v_{i,2} x_i \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$\begin{aligned}
x^* &= [2,3,4,7,8,9] \\
z(x^*) &= [66,66]
\end{aligned}$$

1.2 Programme linéaire *minmax regret*

$$\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{sous contraintes} \quad & t \geq z_1^* - \sum_{i=1}^{n} v_{i,1} x_i \\
& t \geq z_2^* - \sum_{i=1}^{n} v_{i,2} x_i \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

z_i^* étant la meilleure valeure pour le scénario i

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$\begin{aligned}
x^{'*} &= [2,3,6,7,8,9] \\
z(x_1^*, x_2^*) &= [112,118] \\
z(x^{'*}) &= [62,70]
\end{aligned}$$

1.3 Représentation dans le plan

1.4 Analyse de pérformance

Chapitre 2

Linéarisation du critère *maxOWA*

2.1 $L_k(z)$ comme valeur optimale

Explication : Étant donné que le vecteur $(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$ est ordonné en ordre croissant, la somme $\sum_{i=1}^{k} z(i)$ correspond à la somme des k plus petites valeurs de z_i et donc à la valeur optimale du programme linéaire.

2.2 Utiliser le dual pour trouver les composantes du $L(z)$

Primal :

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k \\ & 0 \leq a_{ik} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Dual :

$$\begin{aligned} \max \quad & k \cdot r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \\ \text{s.c.} \quad & r_k - b_{ik} \leq z_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ & b_{ik} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Trouver $L(z)$ avec $z = [2, 9, 6, 8, 5, 4]$ (voir le code pour calculation par programmation linéaire) :

$$\begin{aligned} L_1(z) &= 2 \\ L_2(z) &= 6 \\ L_3(z) &= 11 \\ L_4(z) &= 17 \\ L_5(z) &= 25 \\ L_6(z) &= 34 \end{aligned}$$

2.3 Reécrire l'OWA

Montrer que

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=1}^{n} w_i z_{(i)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x)) \end{aligned}$$

Explication :

$$\text{par définition : } z_{(k)}(x) = L_k(z(x)) - L_{k-1}(z(x))$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{n} w_i z_{(i)}(x) \\
&= w_1 z_{(1)} + w_2 z_{(2)} + \ldots + w_n z_{(n)} \\
&= w_1 L_1(z(x)) + w_2(L_2(z(x)) - L_1(z(x))) + \ldots + w_n(L_n(z(x)) - L_{n-1}(z(x)) \\
&= (w_1 - w_2) L_1(z(x)) + (w_2 - w_3)(L_2(z(x))) + \ldots + (w_{n-1} - w_n) L_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x))
\end{aligned}$$

2.4 Formulation *maxOWA* pour le problème SAD

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k \cdot r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right) \\
\text{s.c.} \quad & r_k - b_{ik} \leq z_i(x) \\
& b_{ik} \geq 0 \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$\begin{aligned}
x^* &= [2,3,4,7,8,9] \\
z(x^*) &= [66,66]
\end{aligned}$$

2.5 Formulation linéaire pour le critère de *minOWA*

Primal :

$L_k(z) = \sum_{i=1}^{k} r(x, s_{(i)})$, regret en ordre décroissant, donc :

$$\begin{aligned}
\max & \sum_{i=1}^{n} a_{ik} r(x, s_{(i)}) \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k \\
& 0 \leq a_{ik} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

$r(x, s_{(i)}) = z_i^* - z_i(x)$

Dual :

$$\begin{aligned}
\min \quad & k \cdot r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \\
\text{s.c.} \quad & r_k + b_{ik} \geq r(x, s_{(i)}), \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
& b_{ik} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Formulation entière :

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k \cdot r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right) & \\
\text{s.c.} \quad r_k + b_{ik} \geq r(x, s_{(i)}), \quad & i = 1, \ldots, n \\
b_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n & \\
\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W & \\
x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \ldots, n &
\end{aligned}
$$

Solution optimale trouvé avec Gurobi :

$$
\begin{aligned}
x^{'*} &= [2, 4, 5, 7, 8, 9] \\
z(x_1^*, x_2^*) &= [112, 118] \\
z(x^{'*}) &= [62, 70]
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Application à la recherche d'un chemin robuste dans un graphe

3.1 Modelisation du problème de plus court chemin comme problème du flot de coût minimum

$G = (V, E)$, source : $s \in V$, puit : $t \in V$
$a(u, v)$: cout pour passer de u à v, $f(u, v) = 1$ si $(u, v) \in$ plus court chemin

Programme linéaire :

$$\begin{aligned}
\min & \sum_{(u,v)\in E} a(u,v)f(u,v) & \\
s.c. & \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v,w) \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\} & \text{, contrainte de conservation du flux} \\
& \sum_{s,v\in E} f(s,v) >= 1 & \text{, contrainte de flux sortant de la source} \\
& f(u,v) \in (0,1) \quad \forall (u,v) \in E &
\end{aligned}$$

3.2 Application aux exemples

Solution optimale trouvé avec Gurobi pour l'instance 1 :

$$\begin{aligned}
x_1^* &= [a, b, d, f] \\
x_2^* &= [a, c, d, f] \\
z(x^*) &= [8, 4]
\end{aligned}$$

Pour l'instance 2 :

$$\begin{aligned}
x_1^* &= [a, d, c, f, g] \\
x_2^* &= [a, c, e, g] \\
z(x^*) &= [5, 6]
\end{aligned}$$

3.3 Programmes linéaires pour trouver un chemin robuste

x est une solution valide si :

$$\begin{aligned}
& \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v,w) \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\} & \text{, contrainte de conservation du flux} \\
& \sum_{s,v\in E} f(s,v) >= 1 & \text{, contrainte de flux sortant de la source} \\
& f(u,v) \in \{0,1\} \quad \forall (u,v) \in E &
\end{aligned}$$

minmax

Comme on veut trouver le plus court chemin, on calcule le *min* des solutions maximales pour un chemin X. Programme linéaire pour n scénarios :

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ s.c. \quad & t \geq \sum_{(u,v)\in E} a_i(u,v) f(u,v) && i \in \{1,\ldots,n\} \\ & x \in X \\ & f(u,v) \in \{0,1\} \quad \forall (u,v) \in E \end{aligned}$$

minmax des regrets

Programme linéaire pour n scénarios :

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ s.c. \quad & t \geq \sum_{(u,v)\in E} \big(a_i(u,v) f(u,v)\big) - z_i^* && i \in \{1,\ldots,n\} \\ & x \in X \\ & f(u,v) \in \{0,1\} \quad \forall (u,v) \in E \end{aligned}$$

minOWA

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^{n} w'_k & \left(k \cdot r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right) \\ \text{s.c.} \quad & r_k + b_{ik} \geq z_i(x) \quad i = 1,\ldots,n \\ & x \in X \\ & b_{ik} \geq 0, \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

minOWA des regrets

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^{n} w'_k & \left(k \cdot r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right) \\ \text{s.c.} \quad & r_k + b_{ik} \geq r(x, s_{(i)}), \quad i = 1,\ldots,n \\ & b_{ik} \geq 0, \quad i = 1,\ldots,n \\ & x \in X \end{aligned}$$

Résultats

minMax et minMax des regrets

Instance	Méthode	Chemin	Valeur de la fonction objectif	Vecteur_z
Instance 0	minmax	a,b,d,f	9	[8, 9]
	minMax des regrets	a,b,e,f	3	[11, 7]
Instance 1	minmax	a,b,e,g	10	[10, 10]
	minMax des regrets	a,b,e,g	5	[10, 10]

TABLE 3.1 – Comparaison des résultats des méthodes minmax et minMax des regrets.

minOWA et minOWA des regrets

Méthode	**Instance**	k	**Chemin**	**Vecteur_z**	**Valeur de la fonction objectif**
minOWA	0	2	a,b,d,f	[8, 9]	26
		4	a,b,d,f	[8, 9]	44
		8	a,b,d,f	[8, 9]	80
		16	a,b,d,f	[8, 9]	152
	1	2	a,b,e,g	[10, 10]	30
		4	a,b,e,g	[10, 10]	50
		8	a,b,e,g	[10, 10]	90
		16	a,b,e,g	[10, 10]	170
minOWA des regrets	0	2	a,b,e,f	[11, 7]	9
		4	a,b,e,f	[11, 7]	15
		8	a,b,e,f	[11, 7]	27
		16	a,b,e,f	[11, 7]	51
	1	2	a,d,f,g	[6, 12]	13
		4	a,b,e,g	[10, 10]	24
		8	a,b,e,g	[10, 10]	44
		16	a,b,e,g	[10, 10]	84

Table 3.2 – Comparaison des méthodes minOWA et minOWA des regrets.

Instance	z^*
0	[8, 4]
1	[5, 6]

Table 3.3 – Valeurs de z^* pour chaque instance