

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

НЕПОЗИЦИОННАЯ

ПОЗИЦИОННАЯ

ДВОИЧНАЯ

ВОСЬМЕРИЧНАЯ

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ВВЕДЕНИЕ

**Система счисления** — это способ записи (представления) чисел.

Система счисления:

- даёт представления множества чисел (целых и/или вещественных);
- даёт каждому числу уникальное представление;
- отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Например, вы видите перед собой несколько деревьев. Ваша задача — их посчитать.

Для этого можно: загибать пальцы, делать зарубки на камне или дереве, выкладывать палочки на земле — т.е. сопоставлять определенному количеству какой-нибудь предмет. Например, одно дерево — это один загнутый палец, одна зарубка, одна палочка на земле. В первом случае число представляется как «строка» из загнутых пальцев или зарубок, во втором — композиция выложенных палочек.

Виды систем счисления:

- позиционные;
- непозиционные.

Подвиды позиционных систем:

- однородные;
- смешанные.

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## НЕПОЗИЦИОННАЯ

Является самой древней системой.

Возникла, когда люди впервые начали что-то подсчитывать и использовали для этого палочки, узелки или собственные пальцы. Позже они начали «группировать» цифры в числа и возникли позиционные системы счисления.

Каждая цифра числа имеет величину, не зависящую от ее позиции (разряда). При этом может накладываться ограничения на положение цифр.

Т.е., в непозиционной системе ***знак имеет значение, а не его положение***.

Наиболее распространенные непозиционные системы счисления:

- ***римские цифры***

Например, римская «X» всегда будет означать число «10», а «V» - «5» - вне зависимости в каком бы месте их не поставили.

Непозиционные системы используются редко.

В них нет нуля, нет дробных чисел и других инструментов (например, математических), которые бывают важны в современных вычислениях.

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ПОЗИЦИОННАЯ

Значение каждой цифры зависит от ее позиции (разряда) в числе.

Например, рассмотрим число 453 (четыреста пятьдесят три).

Цифра «4» обозначает количество сотен (четыре сотни) и соответствует числу «400».

Цифра «5» - количество десятков и соответствует числу «50».

Цифра «3» - количество единиц и соответствует числу «3».

Чем больше разряд (вес) цифры, тем выше ее значение.

Разряд увеличивается справа налево (**арабская система счисления**).

Итоговое число получается как сумма значений всех разрядов:  $400+50+3=453$ .

Наиболее употребляемые позиционные системы:

- **двоичная / binary** (в дискретной математике, электронике, информатике);
- **восьмеричная / octal** (в цифровой электронике и информатике);
- **десятичная / decimal** (используется повсеместно);
- **шестнадцатеричная / hexadecimal** (в программировании, цифровой документации);
- **шестидесятеричная / sexagesimal** (единицы измерения времени, углов, координат).

Чтобы не путать в какой системе счисления записано число, его снабжают соответствующим цифровым указателем (обычно справа внизу в нижнем индексе):

- для двоичной:  $1101_2$ ,  $1101_b$  или  $0b1101$
- для восьмеричной:  $7_8$
- для десятичной:  $453_{10}$  или 453 (просто, без указателя)
- для шестнадцатеричной:  $05A3_{16}$ ,  $05A3_h$  или  $0x05A3$

### Однородная

Для всех разрядов числа (позиций) набор допустимых символов одинаков.

Например, в повсеместно используемой, 10-тичной системе счисления при записи числа в каждом разряде находится исключительно одна цифра от 0 до 9.

### Смешанная

В каждом разряде числа (позиции) набор допустимых символов может отличаться.

Например, в 16-ричной системе — в каждом разряде может находиться как цифра от 0 до 9, так и буква от A до F.

Другой пример, система измерения (представления) времени, где

- в разрядах часов, минут и секунд находятся числовые символы:
  - при этом, в разряде секунд и минут возможно 60 чисел (от 00 до 59),
  - но в разряде часов — только 24 числа (от 00 до 23);
- в разрядах разделителей могут находиться нечисловые символы (двоеточие, пробел).

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ДВОИЧНАЯ

### Binary

В основном используется в электронике (вычислительной технике), так как почти каждое цифровое электронное устройство (микросхема, процессор, контроллер) реализовано на логических вентилях (базовый элемент, значение которого может иметь значение 0 или 1: выключено или включено, контакт разомкнут или замкнут, нет электрического тока или есть ток, нет питания или есть питание, нет данных или есть данные; самый простой пример: выключатель, транзистор, контакт реле).

Таким образом, вычислительные машины на низком уровне оперируют двоичными значениями (состояниями), и, соответственно, все значения из иных систем счисления, а также текст, предварительно будут преобразованы в двоичное представление.

Эта система счисления наиболее простая и, соответственно, электронные устройства, построенные на ее основе, просты в изготовлении, дешевле и имеют меньшие размеры.

Например, первая вычислительная машина, созданная Паскалем, строилась на базе 10-ричной системы и оказалась неудобной: имела большие габариты, имелись сложности в изготовлении (соответственно, выше цена).

Основание:

- 2

Для записи используются две цифры:

- 0 или 1

В каждом разряде числа допустима только одна цифра:

- либо 0, либо 1

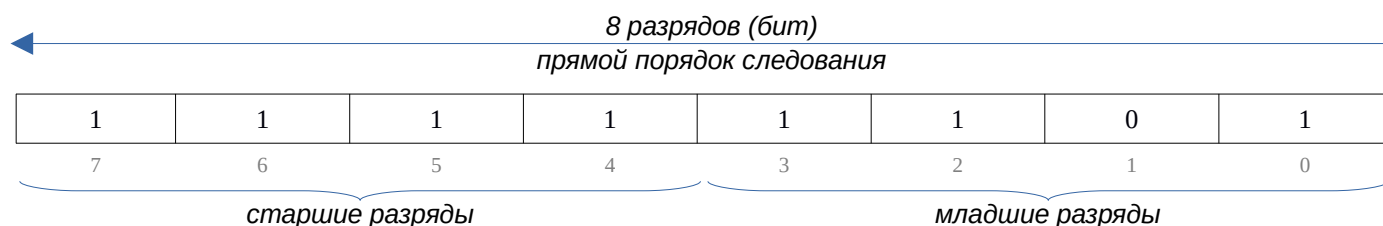
Порядок следования (чтения) битов:

- прямой порядок (справа налево, арабская система, по-умолчанию)  
 $1101_2$ ,  $1101_b$  или  $0b1101$  (один ноль один один)
- обратный порядок (слева направо)  
 $1011_2$ ,  $1011_b$  или  $0b1011$  (один ноль один один)

В цифровой электронике и информатике:

- один разряд (позиция) — **бит**
- общее количество разрядов — количество бит — **разрядность** (4-, 8-, 16-, 32-, 64-бит)
- начальные разряды (биты) — **младшие** (low)
- конечные разряды (биты) — **старшие** (high)

### Пример 1



$$11111101_2 = 253_{10} = FD_{16} = 375_8$$

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ДВОИЧНАЯ

### Преобразование числа из двоичной системы в десятичную

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cdot 2^k)$$

где:

k — номер разряда / бита (начиная с нуля)

n — количество разрядов / битов

$\alpha$  — значение цифры в разряде / значение бита (0 или 1)

2 — основание системы счисления

$$\begin{aligned} 11111101_2 &= (1 \cdot 2^7) + (1 \cdot 2^6) + (1 \cdot 2^5) + (1 \cdot 2^4) + (1 \cdot 2^3) + (1 \cdot 2^2) + (0 \cdot 2^1) + (1 \cdot 2^0) = \\ &= (128) + (64) + (32) + (16) + (8) + (4) + (0) + (1) = 253_{10} \end{aligned}$$

Можно записать с помощью таблицы:

128	64	32	16	8	4	2	1
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
128	64	32	16	8	4	0	1
253 <sub>10</sub>							

где:

1-я строка — это значения  $2^k$  (где, k — номер разряда, начиная с 0)

2-я строка — двоичное представление числа (прямой порядок, справа налево)

3-я строка — результат умножения значений 1-й и 2-й строк

4-я строка — сумма всех значений 3-й строки

### Преобразование числа из десятичной системы в двоичную

Применяется метод «Деление десятичного числа на два с остатком»:

- деление числа на основание системы (2), пока не получится ноль
- остаток записывается в прямом порядке (справа налево)

$$19_{10} = 10011_2$$

$$19/2 = 9 \text{ (} 18/2 \text{) остаток } 1$$

$$9/2 = 4 \text{ (} 8/2 \text{) остаток } 1$$

$$4/2 = 2 \text{ (} 4/2 \text{) остаток } 0 \text{ (без остатка)}$$

$$2/2 = 1 \text{ (} 2/2 \text{) остаток } 0 \text{ (без остатка)}$$

$$1/2 = 0 \text{ (} 0/2 \text{) остаток } 1 \text{ (конец)}$$

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ДВОИЧНАЯ

### Двоичный код

Это способ представления данных в виде кода, где в одном или нескольких двоичных разрядах (битах) может находиться значение любой системы счисления (эти значения будут **закодированы / упакованы в двоичный код**).

#### Пример 1

Имеется три лампочки: L1, L2, L3

Состояние каждой лампочки можно определить: выключена или включена (0 или 1)

Состояние можно передать на компьютер (одно сообщение занимает 8-бит).

Таким образом, передать состояния всех четырех лампочек на компьютер потребуется:

- три сообщения (состояние одной лампочки — одно сообщение)

L1



определение состояния: включена (1)



формирование сообщения для отправки

0	0	0	0	0	0	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0



отправка сообщения

L2



определение состояния: выключена (0)



формирование сообщения для отправки

0	0	0	0	0	0	0	0
7	6	5	4	3	2	1	0



отправка сообщения

L3



определение состояния: выключена (0)



формирование сообщения для отправки

0	0	0	0	0	0	0	0
7	6	5	4	3	2	1	0



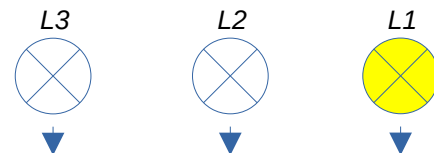
отправка сообщения

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ДВОИЧНАЯ

### Двоичный код (продолжение)

- одно сообщение (состояния всех лампочек «упакованы» в двоичный код)



▼ формирование сообщения для отправки

0	0	0	0	0	0	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

▼ отправка сообщения

Таким образом, для второго варианта:

- + требуется всего одно сообщение
- + тратится меньше времени на пересылку состояний всех лампочек
- программа на стороне компьютера должна знать структуру сообщения

### Пример 2

Имеется текстовая строка «ТЕХТ».

Эту строку необходимо передать на компьютер (одно сообщение занимает 8-бит).

Как ранее было сказано, вычислительные устройства оперируют числами в двоичном представлении. В то же время, текст нам выводится на экране в виде графических символов. Как быть?

Для вычислительного устройства, каждому графическому текстовому символу сопоставлен какой-то числовой код (**таблица кодировки символов**).

Например, таблица кодировки ASCII, где один символ кодируется 8-битным числом.

32 пробел	48 0	64 @	80 P	96 `	112 p
33 !	49 1	65 A	81 Q	97 a	113 q
34 "	50 2	66 B	82 R	98 b	114 r
35 #	51 3	67 C	83 S	99 c	115 s
36 \$	52 4	68 D	84 T	100 d	116 t
37 %	53 5	69 E	85 U	101 e	117 u
38 &	54 6	70 F	86 V	102 f	118 v
39 '	55 7	71 G	87 W	103 g	119 w
40 (	56 8	72 H	88 X	104 h	120 x
41 )	57 9	73 I	89 Y	105 i	121 y
42 *	58 :	74 J	90 Z	106 j	122 z
43 +	59 ;	75 K	91 [	107 k	123 {
44 ,	60 <	76 L	92 \	108 l	124
45 -	61 =	77 M	93 ]	109 m	125 }
46 .	62 >	78 N	94 ^	110 n	126 ~
47 /	63 ?	79 O	95 _	111 o	127

Обычно, при работе со строками, программы автоматически выполняют кодирование (преобразование текста в набор чисел) и декодирование (преобразование набора чисел в набор символов, образующих строку).



# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ДВОИЧНАЯ

### Двоичный код (продолжение)

**T**

▼ преобразование символа в числовой код ASCII ( $84_{10} = 01010100_2$ )

▼ формирование сообщения для отправки

0	1	0	1	0	1	0	0
7	6	5	4	3	2	1	0

▼ отправка сообщения

---

**E**

▼ преобразование символа в числовой код ASCII ( $69_{10} = 01000101_2$ )

▼ формирование сообщения для отправки

0	1	0	0	0	1	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

▼ отправка сообщения

---

**X**

▼ преобразование символа в числовой код ASCII ( $88_{10} = 01011000_2$ )

▼ формирование сообщения для отправки

0	1	0	1	1	0	0	0
7	6	5	4	3	2	1	0

▼ отправка сообщения

---

**T**

▼ преобразование символа в числовой код ASCII ( $84_{10} = 01010100_2$ )

▼ формирование сообщения для отправки

0	1	0	1	0	1	0	0
7	6	5	4	3	2	1	0

▼ отправка сообщения

---

Таким образом, для отправки строки «TEXT»:

+ требуется четыре сообщения

- программа на стороне компьютера должна знать тип кодировки

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ВОСЬМЕРИЧНАЯ

### Octal

В основном используется в электронике (вычислительной технике), но чуть реже, чем двоичная и шестнадцатеричная. Характеризуется легким переводом в десятичную и двоичную системы, а также обратно.

Основание:

- 8

Для записи используются цифры:

- от 0 до 7

### Преобразование числа из восьмеричной системы в десятичную

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cdot 8^k)$$

где:

k — номер разряда (начиная с нуля)

n — количество разрядов

$\alpha$  — значение цифры в разряде (от 0 до 7)

8 — основание системы счисления

$$254_8 = (2 \cdot 8^2) + (5 \cdot 8^1) + (4 \cdot 8^0) = (128) + (40) + (4) = 172_{10}$$

Можно записать с помощью таблицы:

2097152	262144	32768	4096	512	64	8	1
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>4</b>
0	0	0	0	0	128	40	4
172 <sub>10</sub>							

где:

1-я строка — это значения  $8^k$  (где, k — номер разряда, начиная с 0)

2-я строка — восьмеричное представление числа

3-я строка — результат умножения значений 1-й и 2-й строк

4-я строка — сумма всех значений 3-й строки

### Преобразование числа из десятичной системы в восьмеричную

Применяется метод «Деление десятичного числа на восемь с остатком»:

- деление числа на основание системы (8), пока результат не будет < 8
- остаток записывается в прямом порядке (справа налево)

$$122_{10} = 172_8$$

$$122/8 = 15 \text{ (} 120/8 \text{) остаток } 2 \text{ (} 15 > 7, \text{ продолжаем деление)}$$

$$15/8 = 1 \text{ (} 8/8 \text{) остаток } 7 \text{ (} 8 > 7, \text{ продолжаем деление)}$$

$$8/8 = 1 \text{ (} 8/8 \text{) остаток } 0 \text{ (} 1 < 7, \text{ конец)}$$

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ

### Hexadecimal

Широко используется в программировании, компьютерной документации и графике.

Значение одного байта информации (8 бит, число от 0 до 255) в шестнадцатеричной системе записывается всего двумя символами (например,  $255_{10} \text{ — } FF_{16}$ ).

В низкоуровневом программировании в шестнадцатеричной системе выполняется обозначение адресов памяти (ОЗУ, FLASH и т. п.). Например, в языке HTML цвет часто кодируется в шестнадцатеричной системе (например, белый - #FFFFFF, черный - #000000).

Характеризуется легким переводом в десятичную и двоичную системы, а также обратно.

Основание:

- 16

Для записи используются :

- цифры от 0 до 9
- буквы от A до F (где, A — число 10, B — 11, ..., F - 15)
- В каждом разряде числа допустима только одна цифра или буква

### Преобразование числа из шестнадцатеричной системы в десятичную

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cdot 16^k)$$

где:

k — номер разряда (начиная с нуля)

n — количество разрядов

$\alpha$  — цифровое значение в разряде (от 0 до 9, для A — 10, ..., для F - 15)

16 — основание системы счисления

$$2A3_{16} = (2 \cdot 16^2) + (10 \cdot 16^1) + (3 \cdot 16^0) = (512) + (160) + (3) = 675_{10}$$

Можно записать с помощью таблицы:

$2.68 \times 10^8$	16777216	1048576	65535	4096	256	16	1
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>A</b>	<b>3</b>
0	0	0	0	0	512	160	3
675 <sub>10</sub>							

где:

1-я строка — это значения  $16^k$  (где, k — номер разряда, начиная с 0)

2-я строка — шестнадцатеричное представление числа

3-я строка — результат умножения значений 1-й и 2-й строк

4-я строка — сумма всех значений 3-й строки

# СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

## ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ

### Преобразование числа из десятичной системы в шестнадцатеричную

Применяется метод «Деление десятичного числа на шестнадцать с остатком»:

- деление числа на основание системы (16), пока результат не будет  $< 16$
- остаток записывается в прямом порядке (справа налево)

$$500_{10} = 1F4_{16}$$

$$500/16 = 31 \text{ (} 496/16 \text{) остаток } 4 \text{ [4] (} 31 > 16, \text{ продолжаем деление)}$$

$$31/16 = 1 \text{ (} 16/16 \text{) остаток } 15 \text{ [F] (} 15 > 16, \text{ продолжаем деление)}$$

$$16/16 = 1 \text{ (} 16/16 \text{) остаток } 0 \text{ [1] (} 1 < 16, \text{ конец)}$$