Tutorial Fisika Statistik

15 April 2025

Mencari laju rata-rata, laju rms, dan laju dengan probabilitas terbesar untuk molekul/atom gas (memenuhi statistik Maxwell-Boltzmann)

Jumlah partikel yang menempati tingkat energi ke-i utnuk partikel gas (partikel klasik)

$$n_i = g_i e^{\alpha - \epsilon_i/kT}$$

Persamaan ini berlaku untuk ssietm dengan energi diskrit. Pakai indeks.

Bagaimana persamaan untuk sistem yang memiliki energi kontinu? Contohnya adalah partikel gas. Energi = kinetik daan potensial = kontinu.

Transformasi dikrit -> kontinu

$$n_i = g_i e^{\alpha - \epsilon_i/kT}$$

$$n_i \rightarrow dN$$

$$\epsilon_i \rightarrow \epsilon$$

Jika gas tidak berinterkasi maka energi hanya enewrgi kinetik

$$\epsilon_i \rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$g_i = Bd\Gamma = Bdxdydzdp_xdp_ydp_z$$

Sehingga

$$n_i = g_i e^{\alpha - \epsilon_i/kT}$$

Menjadi

$$dN = Bdxdydzdp_xdp_ydp_z e^{\alpha - p^2/2mkT}$$

Jumlah pattikel per satuan volume (konsentrasi partikel)

$$dn = \frac{dN}{dxdydz} = Bdp_xdp_ydp_z e^{\alpha - p^2/2mkT}$$

Unutk mudahnya kita transfoemasi dari koordinat kartesian ke koordinat polar

$$dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp$$

Maka

$$dn = B 4\pi p^2 dp e^{\alpha - p^2/2mkT}$$

$$dn = 4\pi B p^2 e^{\alpha - p^2/2mkT} dp$$

Kita ubah ke variabel laju karena kita ingin mencari laju rata-rata

$$p = mv$$

$$dp = mdv$$

Maka

$$dn = 4\pi B m^2 v^2 e^{\alpha - m^2 v^2/2mkT} mdv$$

$$dn = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv$$

Kita definisikan

$$dn = f(v)dv$$

Sehingga

$$f(v)dv = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv$$

Di mana

$$f(v) = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT}$$

Pertanyaan:

Berapa laju yang menghasilan probabilitas terbesar?

Berapa v yang menghasilkan f(v) maksimal?

$$\frac{df}{dv} = 0$$

$$f(v) = 4\pi B m^3 e^{\alpha} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

$$\frac{df}{dv} = 4\pi B m^3 e^{\alpha} \frac{d}{dv}\left[v^2 e^{-mv^2/2kT}\right]$$

$$= 4\pi B m^3 e^{\alpha}\left[2ve^{-mv^2/2kT} + v^2 e^{-mv^2/2kT}\left(-\frac{2mv}{2kT}\right)\right]$$

$$= 4\pi B m^3 e^{\alpha} 2e^{-mv^2/2kT} v\left[1 + v\left(-\frac{mv}{2kT}\right)\right]$$

$$= 4\pi B m^3 e^{\alpha} 2e^{-mv^2/2kT} v\left[1 - \frac{mv^2}{2kT}\right] = 0$$

maka

$$1 - \frac{mv^2}{2kT} = 0$$

$$\frac{mv^2}{2kT} = 1$$

$$v^2 = \frac{2kT}{m}$$

Laju dengan probabilitas maksimal

$$v_{pm} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Jadi, paling banyak molekul has memiliki laju v_{pm}.

Berapa laju rata-rata molekul gas

Dari

$$f(v)dv = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv$$

Laju rata-rata

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty v \times f(v)dv}{\int_0^\infty f(v)dv}$$

$$= \frac{\int_0^\infty v \times 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv}$$

$$= \frac{\int_0^\infty v \times \cancel{4\pi B m^3} v^2 e^{\cancel{\alpha} - mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty 4\pi B m^3 v^2 e^{\cancel{\alpha} - mv^2/2kT} dv}$$

$$= \frac{\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv}$$

Misalkan

$$\frac{mv^2}{2kT} = x^2$$

$$v^2 = \frac{2kT}{m} x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} x$$

$$v^3 = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} x^3$$

$$dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

Integral pada pembilang

$$\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv = \int_0^\infty \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} x^3 e^{-x^2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

$$= \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$$

$$= \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2$$

$$\int_0^\infty x^3 \exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}$$

Penyebut

$$\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv = \int_0^\infty \frac{2kT}{m} x^2 e^{-x^2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

$$= \frac{2kT}{m} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

$$= \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}$$

Jadi, laju rata-rata

$$\bar{v} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Laju rms root-mean-square

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

Yahg dilakukan adalah cari rata-rata dari v2.

Laju diakarkan

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty v^2 \times f(v)dv}{\int_0^\infty f(v)dv}$$

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty v^2 \times 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv}$$

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv}$$

Pembilang

$$\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv$$

trandfpemaso

$$v^2 = \frac{2kT}{m} x^2$$

$$\frac{mv^2}{2kT} = x^2$$

$$dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

$$\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv = \int_0^\infty \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 x^4 e^{-x^2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

$$= \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx$$

$$= \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

Penyebut

$$\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Sama dengan nilai saat menghitung laju rata-rata

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}$$

Jadi

$$\overline{v^2} = \frac{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{8}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}} = \frac{3kT}{m}$$

Jadi

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Rangkuman

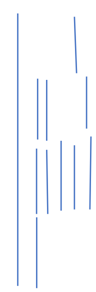
$$v_{pm} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Soal 2

Misalkan kita memiliki N buah batang sejenis yang memiliki panjang L. Batang tersebut dapat disusun ke atas atau ke bawah pada ujung batang sebelumnya. Senhingga diperoleh jarak ujung pertama sampai ujung terakhir.



Misalkan probabilitas menyusun batang dengan arah ke atas adalah a dan probilitas menyusun batang ke arah bawah adalah b.

Karena hanay ada duya arah

$$a + b = 1$$

Jika terdapat n batang yang menghadap ke atas dan N-n batang yang menghadap ke bawah, berapa jumlah cara penyusunan tersebut?

Jumlah total sampel N

Jumlah sampel yang menghadap ke atas adalah n

Jumlah sampel yang menghadap ke bawah $N - n$

Jika semua batang identyik, maka jumlah cara penyusunan

$$= \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

Tetapi karena peluang menghadap ke atas dan ke bawah berbeda, maka jumlah cara dikoereksi menjadi

$$W(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} a^n b^{N-n}$$

Berapa nilah n yang menghasilkan konfigurasi maksimal

Berapa n yang menghasilkan W(n) maksimal.

$$\frac{dW(n)}{dn} = 0$$

Mendifereiansila faktorial sulit. Maka kita diferensialkan logaritmanya.

$$\frac{d \ln W}{dn} = 0$$

$$\ln W = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n \ln a + (N-n) \ln b$$

Aproksimasi Striling

$$\ln N! = N \ln N - N$$

$$\ln n! = n \ln n - n$$

$$\ln(N-n)! = (N-n) \ln(N-n) - (N-n)$$

Jadi

$$\ln W = N \ln N - N - n \ln n + n - (N-n) \ln(N-n) + (N-n) + n \ln a + (N-n) \ln b$$

$$\frac{d\ln W}{dn} =$$

$$= 0 - 0 - \ln n - n \times \frac{1}{n} + 1 - (-1)\ln(N-n) - (N-n)\frac{1}{N-n}(-1) + (-1) + \ln a + (-1)\ln b$$

$$= -\ln n + \ln(N-n) + \ln a - \ln b$$

$$= \ln\left(\frac{(N-n)}{n}\frac{a}{b}\right)$$

Agar

$$\frac{d\ln W}{dn} = 0$$

$$\frac{(N-n)}{n}\frac{a}{b} = 1$$

$$(N-n) = n\frac{b}{a}$$

$$N = n\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

Akhirnya diperoleh jumlah batang yang menghadap ke atas agar diperoleh konfigurasi maksimal adalah

$$n = \frac{N}{1 + \frac{b}{a}}$$

Berapa jarak ujung ke ujung batang.

Tiap hadap ke atas menambah panjang batang sebesar L dan tiap hadap ke bawah mengurangi panjang sebesar L.

Maka jarak ujung ke ujung batang

$$R = nL - (N - n)L$$

$$= (2n - N)L$$

$$= (2\frac{N}{1 + \frac{b}{a}} - N)L$$

$$= \left(\frac{2}{1 + \frac{b}{a}} - 1\right)NL$$

$$= \left(\frac{2 - 1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}\right)NL$$

$$R = \left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}\right)NL$$

Jika probabiliyast menghadap ke atas a = 1, b = 0 maka

$$R = \left(\frac{1 - \frac{0}{1}}{1 + \frac{0}{1}} \right) NL = NL$$

Jika probabiliyast menghadap ke atas a = 0, b = 1 maka

$$R = \left(\frac{1 - \frac{1}{0}}{1 + \frac{1}{0}} \right) NL = \left(\frac{1 - \infty}{1 + \infty} \right) NL = \frac{-\infty}{+\infty} NL = -NL$$

Jika probabiliyast menghadap ke atas a = 1/2, b = 1/2 maka

$$R = \left(\frac{1 - \frac{1/2}{1/2}}{1 + \frac{1/2}{1/2}} \right) NL = 0$$

$$n_i = g_i e^{\alpha - \epsilon_i/kT}$$

$$n_i = dN$$

$$g_i = Bd\Gamma = Bdxdydzdp_x dp_y dp_z$$

$$\epsilon_i = K = \frac{p^2}{2m}$$

$$dN = Bdxdydzdp_x dp_y dp_z e^{\alpha - p^2/2mkT}$$

Per satuan volum

$$dn = \frac{dN}{dxdydz} = Bdp_x dp_y dp_z e^{\alpha - p^2/2mkT}$$

Ubah dari koordinat kartesian menjaid kooeidnat polar

$$dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp$$

$$dn = 4\pi B p^2 e^{\alpha - p^2/2mkT} dp$$

Nyatakan dalam variabel laju

$$p = mv$$

$$dp = mdv$$

$$dn = 4\pi B m^2 v^2 e^{\alpha - m^2 v^2/2mkT} mdv$$

$$dn = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv$$

$$f(v)dv = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT} dv$$

$$f(v) = 4\pi B m^3 v^2 e^{\alpha - mv^2/2kT}$$