Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Σήματα και Συστήματα
Εργασία 1

Ονοματεπώνυμο: Κανελλοπούλου Αθανασία Αριθμός Μητρώου: 0015202000065

ΛΥΣΕΙΣ

1 Ερώτημα 1– Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Υποερώτημα 1.1

1.

$$\begin{aligned} &Re\{z\} = Acos(Wt+f) \\ &\implies Re\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{4}) \\ &\implies Re\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \implies Re\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

2.

$$\begin{aligned} &Im\{z\} = Asin(Wt+f) \\ &\implies Im\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{2}sin(\frac{\pi}{4}) \\ &\implies Im\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \implies Im\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \tag{2}$$

3.

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Re\{z\}^2 + Im\{z\}^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \sqrt{\frac{2}{16}+\frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

4.

$$argz = f = tan^{-1}1(\frac{y}{x}) = tan^{-1}1(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}) = tan^{-1}1(1) = \frac{\pi}{4} \tag{4}$$

5.

$$z + z^* = |z|(cos(f) + jsin(f)) + x - jy = \frac{1}{2}(cos\frac{\pi}{4}) + jsin\frac{\pi}{4} + Re\{z\} - Im\{z\} \quad (5)$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j) + \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j+1-j) = \frac{\sqrt{2}}{4}2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1.2 Υποερώτημα 1.2

Έχουμε δεδομένη σχέση:

$$e^{jx} = cosx + jsinx$$

και από αυτήν πηγάζουν τα επόμενα Επίσης από προηγούμενες μαθηματικές μας γνώσεις ισχύουν

$$cos(-x) = cosx$$

$$sin(-x) = -sinx$$

1. A $= cosx$
   $\implies cosx = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$
   $\implies cosx = \frac{1}{2}cosx + jsinx + cos(-x) + jsin(-x)$
   $\implies cosx = \frac{1}{2}cosx + jsin + cosx + j(-sinx)$
   $\implies cosx = \frac{1}{2}2cosx$
   $\implies cosx = cosx$
   $\implies cosx = A$

που ισχύει.

2. B $= sinx$
$\implies sinx = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$
$\implies sinx = \frac{1}{2j}cosx + jsinx - (cos(-x) + jsin(-x))$
$\implies sinx = \frac{1}{2j}cosx + jsin - cosx - j(-sinx)$
$\implies sinx = \frac{1}{2j}jsinx + jsinx$
$\implies sinx = \frac{1}{2j}2jsinx$
$\implies sinx = sinx$
$\implies sinx = B$

που ισχύει.

2 Ερώτημα 2 – Σήματα

2.1 Υποερώτημα 2.1

Έχουμε δεδομένη σχέση:

$$x(t) = cos(w(t + r) + j)$$

1. Για

   $$w = \frac{\pi}{3}, r = 0, j = 2\pi$$

   Ισχύει ότι:

$$x(t) = cos(\frac{\pi}{3}(t+0) + 2\pi)$$

$$\implies x(t) = cos(\frac{\pi}{3}t + 2\pi)$$

$$\implies x(t) = cos(\frac{\pi}{3}t)cos(2\pi) - sin(\frac{\pi}{3}t)sin(2\pi)$$

$$\implies x(t) = cos(\frac{\pi}{3}t) * 1 - sin(\frac{\pi}{3}t) * 0$$

$$\implies x(t) = cos(\frac{\pi}{3}t)$$

Ξέρουμε ότι:

$$w = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Άρα

$$w = \frac{\pi}{3}$$

$$\implies \frac{\pi}{3} = 2\pi f_0$$

$$\implies f_0 = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}$$

$$\implies f_0 = \frac{1}{6}Hz$$

και

$$w = \frac{\pi}{3}$$

$$\implies \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\implies T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$$

$$\implies T = 6$$

2. Για

$$w = \frac{3\pi}{4}, r = \frac{1}{2}, j = \frac{\pi}{4}$$

Ισχύει ότι:

$$x(t) = cos(\frac{3\pi}{4}(t + \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{4})$$

$$\implies x(t) = cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4})$$

$$\implies x(t) = cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{5\pi}{8})$$

Από την ήδη υπάρχουσα σχέση, ξέρουμε ότι: Άρα

$$w = \frac{3\pi}{4}$$

$$\implies \frac{3\pi}{4} = 2\pi f_0$$

$$\implies f_0 = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi}$$
$$\implies f_0 = \frac{3}{8}Hz$$

και

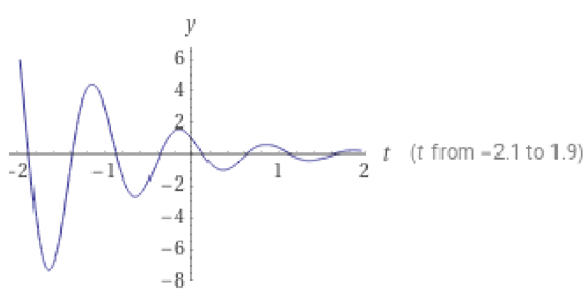
$$w = \frac{3\pi}{4}$$
$$\implies \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{T}$$
$$\implies T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}$$
$$\implies T = \frac{8}{3}$$

2.2 Υποερώτημα 2.2

1. $$X(t) = \sqrt{2}(1+j)e^{j\frac{\pi}{4}}e^{(-1+j2\pi)t} = \sqrt{2}(1+j)e^{-t+j2\pi t+j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+j)e^{-t}e^{j(2\pi t+\frac{\pi}{4})}$$

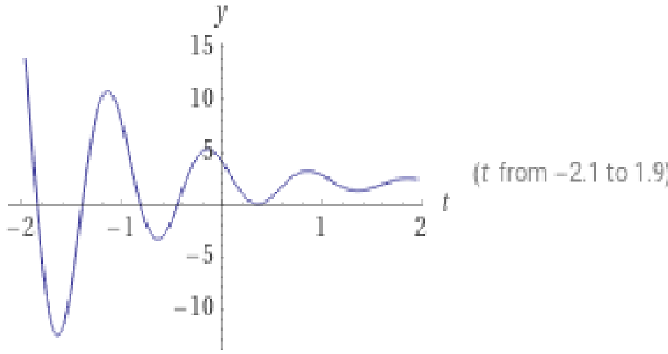
$$Re(x(t)) = Re\sqrt{2}(1+j)e^{-t}e^{j(2\pi t+\frac{\pi}{4})}t$$
$$Re(x(t)) = cos(2\pi t + \frac{\pi}{4})Re\sqrt{2}(1+j)e^{-t}$$
$$Re(x(t)) = (cos(2\pi t)cos(\frac{\pi}{4}) - sin(2\pi)sin(\frac{\pi}{4}))\sqrt{2}Re(e^{-t} + je^{-t})$$
$$Re(x(t)) = (cos(2\pi)\frac{\sqrt{2}}{2} - sin(2\pi)\frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{2}Re(e^{-t} + je^{-t})$$
$$Re(x(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cos(2\pi) - sin(2\pi))\frac{\sqrt{2}}{2}Re(e^{-t} + je^{-t})$$

Η γραφική παράσταση είναι:



2. Γενικά ξέρουμε ότι το σήμα είναι γραμμικό και από τις ιδιότητες ισχύει $x(t+2) + x^*(t+2) = 2Re(x(t)+2)$ και εξαιτίας της γραμμικότητας $2Re(x+2) = 2R(x(t)) + 2$

   Η γραφική παραστάση της εξίσωσης είναι:



2.3 Υποερώτημα 2.3

1. Έχουμε την δεδομένη σχέση $y(t) = ax(bt)$ και ξέρουμε ήδη ότι η ενέργεια του $x(t) = Ex$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$
   Δηλαδή, $Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

   Άρα, για $y(t)$ ισχύει:

   $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |ax(bt)|^2 dt$ θετουμε οτι ($bt = v$ αρα και $bdt = dv$
   Οπότε:
   $Ey = \int_{-\infty}^{+\infty} |ax(v)|^2 \frac{1}{b} dv = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 |x(v)|^2 dv = \frac{a^2}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(v)|^2 dv = \frac{a^2}{b} Ex$

2. Έχουμε την δεδομένη σχέση $y(t) = ax(bt)$ και ξέρουμε ήδη ότι η ενέργεια του $x(t) = Px$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$
   Δηλαδή, $Px = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$
   Άρα, για $y(t)$ ισχύει:
   $Py = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(bt)^2 dt$
   Θέτουμε για $v = bt, dv = bdv, t_1 = v_1, t_2 = v_2$
   $a^2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{v_1}^{v_2} |x(v)|^2 \frac{1}{b} dv = a^2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} |x(v)|^2 dv = a^2 Px$
   Άρα $Py = a^2 Px$

2.4 Υποερώτημα 2.4

Τα σήματα $x_1(t)+x_2(t)$ είναι περιοδικά υπό την προϋπόθεση ότι για καθένα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ισχύει $x_1(t+T_1) = x_1$ και $x_2(t+T_2) = x_2$ και ταυτόχρονα $x_1(t)+x_2(t) = (x_1+x_2)(t+T_1+T_2)$ και με βάση των λόγο ακεραίων, δηλαδή $\frac{T_1}{T_2} = \frac{y}{u}$ όπου u, y ακέραιοι αριθμοί.

3 Ερώτημα 3– Συστήματα

3.1 Υποερώτημα 3.1

1. Έχουμε ως δεδομένο $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT) = y(t)$

   Για να είναι ένα σύστημα γραμμικό θα πρέπει:
   α) Να έχει την ιδιότητα της ομογένειας δηλαδή: $ax(t) -> ay(t)$
   $ax(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax(t)\delta(t - nT) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT) = ay(t)$ που ισχύει.
   β)Να έχει την ιδιότητα της αθροιστικότητας,δηλαδή :$x_1(t) + x_2(t) -> y_1(t) + y_2(t)$
   $x_1(t) + x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t)\delta(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(t)\delta(t - nT) = y_1(t) + y_2(t)$ που ισχύει.

Άρα, το σύστημα είναι γραμμικό.

2. Για να είναι χρονικά αναλοίωτο θα πρέπει να ισχύει:

$$x(t)->y(t), x(t-t_0)->y_(t-t_0)$$

Δηλαδή: $x(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\delta(t-nT) \neq y_(t-t_0)$

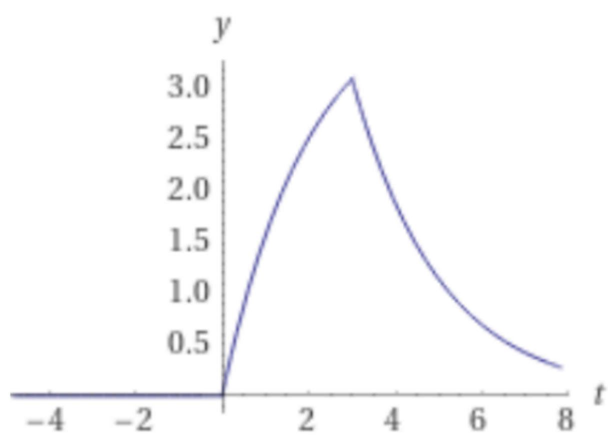
Άρα, το σύστημα δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο.

3.2 Υποερώτημα 3.2

1. Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοή,θεια της συνέλιξης με τον τύπο:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)h(t-T)dT$$

Για $t < 0$ ισχύει $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)h(t-T)dT$ και λόγω unit step signal: $u(t) = 0$
Άρα, $y(t) = \int_{-\infty}^{0} u(t)u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = 0$
Για $t > 0$ ισχύει $u(t) = 1$ και $y(t) = \int_{0}^{t} u(t)u((T-t)e^{\frac{t-T}{2}}dT = \int_{0}^{t} 1e^{\frac{T-t}{2}}dT = 2[1-e^{\frac{-t}{2}}]$
Η γραφική παράσταση της εξίσωσης είναι:



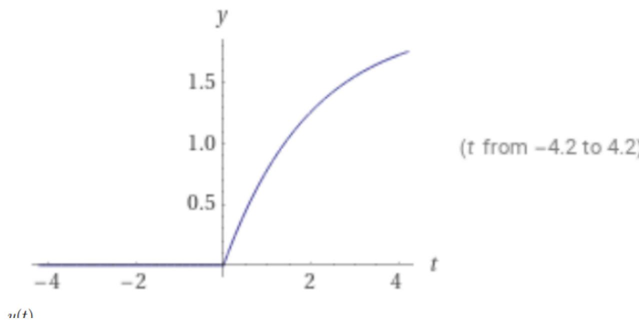
2. Για $t < 0$ ισχύει $x(t) = 0$ $y(t) = \int_{-\infty}^{0} x(t)u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = 0$
Για $t \geq 0$ και $3 \geq t$ ισχύει $y(t) = \int_{0}^{3} x(t)u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = \int_{0}^{3} 2u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = 4[e^{\frac{3-t}{2}} - e^{\frac{-t}{2}}]$
Για $t > 3$ ισχύει $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = \int_{0}^{3} x(T)u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)u((t-T)e^{\frac{T-t}{2}}dT = \int_{0}^{3} 2e^{\frac{T-t}{2}}dT = 4[e^{\frac{3}{2}-\frac{t}{2}} - e^{\frac{-t}{2}}]$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης είναι:

3.3 Υποερώτημα 3.3

Η σχέση αναλύεται ως εξής :

$$y(t) = x(t)h_2^{-1}[h_1h_1h_2 + h_2h_2h_1 - h_1h_2h_1 + h_1^{-1}]$$



$$\implies y(t) = x(t)h_2^{-1}[h_2h_2h_1 + h_1^{-1}]$$
$$\implies y(t) = x(t)h_2^{-1}h_2h_2h_1 + x(t)h_2^{-1}h_1^{-1}$$
$$\implies y(t) = x(t)h_1h_2 + x(t)h_2^{-1}h_1^{-1}$$
$$\implies y(t) = x(t)[h_1h_2 + h_2^{-1}h_1^{-1}]$$

Άρα, το ζητούμενό μας είναι $h_1h_2 + h_2^{-1}h_1^{-1}$

4 Ερώτημα 4 – Σειρές Φουριερ

4.1 Υποερώτημα 4.1

Έχουμε την σχέση :$[1 + cos(2\pi t)][sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})]$ Αναλύοντας την σχέση προκύπτει ότι:

$$sin(10\pi t + \frac{\pi}{6}) + cos(2\pi t)sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$\implies sin(10\pi t)cos(\frac{\pi}{6}) + cos(10\pi t)sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{sin(8\pi t + \frac{\pi}{6}) + sin(12\pi t + \frac{\pi}{6})}{2}$$

$$\implies sin(10\pi t)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}cos(10\pi t) + \frac{\sqrt{3}sin(8\pi t) + cos(2\pi t) + \sqrt{3}sin(12\pi t) + cos(12\pi t)}{4}$$

$$\implies \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{e^{j8\pi} - e^{-j8\pi}}{2j} + \frac{1}{4}\frac{e^{j8\pi} - e^{-j8\pi}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{e^{12\pi} - e^{-j12\pi}}{2j} + \frac{1}{4}\frac{e^{j12\pi} - e^{-j12\pi}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{j10\pi} - e^{-j10\pi}}{2j} + \frac{1}{2}\frac{e^{j10\pi} + e^{-j10\pi}}{2}$$

$$\implies \frac{\sqrt{3} + j}{8j}e^{j8\pi} + \frac{j - \sqrt{3}}{8j}e^{-j8\pi} + \frac{\sqrt{3} + j}{8j}e^{j12\pi} + \frac{j - \sqrt{3}}{8j}e^{-j12\pi} + \frac{\sqrt{3} + j}{4j}e^{j10\pi} + \frac{j - \sqrt{3}}{4j}e^{-j10\pi}$$

Στην συνέχεια βρίσκουμε τον ΜΚΔ των 8, 10 , 12 , το οποίο είναι το 2 Άρα, προκύπτει ότι οι συντελεστές είναι: στο $8\pi = 4w_0$, $10\pi = 5w_0$ και $12\pi = 6w_0$ δηλαδή:

$$a_{-4} = \frac{j - \sqrt{3}}{8j}$$

$$a_{-5} = \frac{j - \sqrt{3}}{4j}$$

$$a_{-6} = \frac{j - \sqrt{3}}{8j}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{3} + j}{8j}$$

$$a_5 = \frac{\sqrt{3} + j}{4j}$$

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}+j}{8j}$$

$$a_k = 0 \ otherwise$$

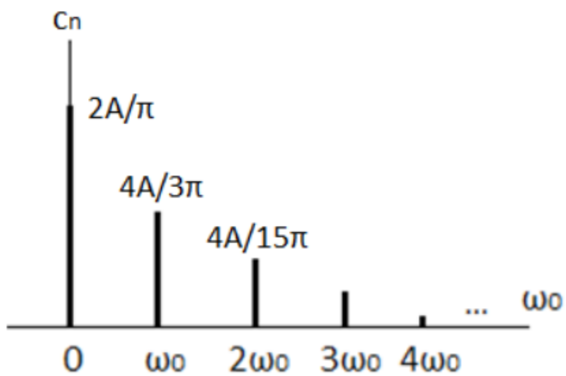
4.2 Υποερώτημα 4.2

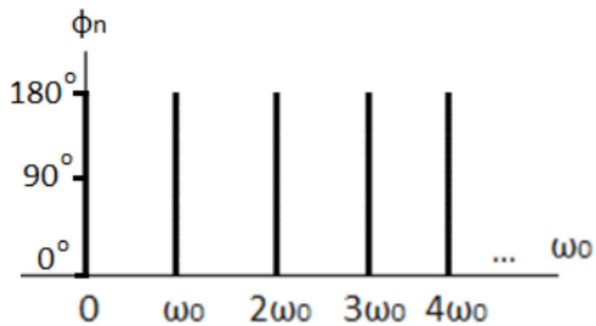
Για δεδομένο σήμα $x(t) = |Asin(\pi t)|$
Ξέρουμε ότι η θεμελειώδης συχνότητα του σήματος είναι: $w_0 = 2\pi f_0 = 2\pi = 1(Hz)$
Άρα η θεμελειώδης περίοδος είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1(sec)$

συντελεστές: $a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \int_0^1 Asin(\pi t)dt = \frac{2A}{\pi}$
$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)cos(nw_0 t)dt = -\frac{4A}{\pi(4n^2-1)}$
$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin(nw_0 t)dt = 0$

$c_0 = a_0 = \frac{2A}{\pi}$
$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{4A}{\pi(4n^2-1)}$
$f_n = -tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n}) = 0^0 = 180^0$

Ξέρουμε ότι το φάσμα πλάτους μονής πλευράς ισούται με $c_n = c_n(w_n)$ και το φάσμα της φάσης $f_n = f_n(w_n)$
Η γραφική παράσταση του σήματος για το φάσμα πλάτους και φάσης είναι:





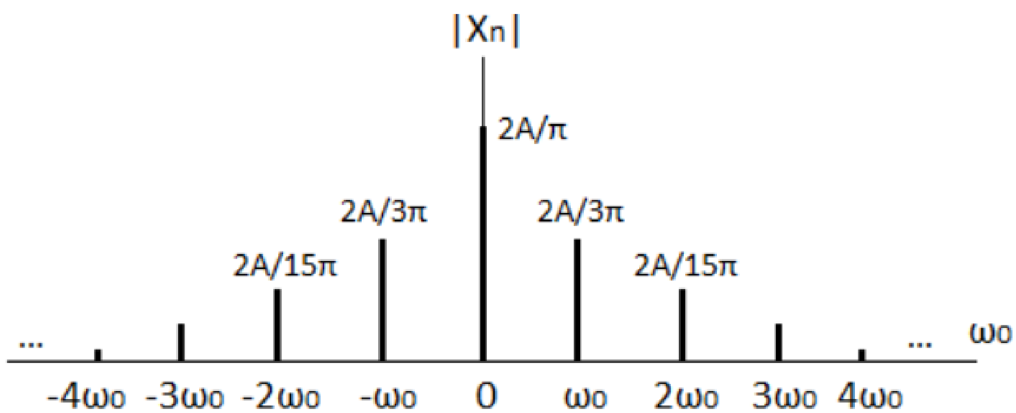
Επομένως το ανάπτυγμα του σήματος σε τριγωνομετρική μορφή είναι

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(nw_0 t)}{(1-4n^2)}$$

Στην συνέχεια οι συντελεστές για την εκθετική μορφή αποτελούνται από: $x_0 = a_0 = \frac{2A}{\pi}$ και $x_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{a_n}{2} = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)}$ και $f_n = -tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n}) = 0^0 = 180^0$

Το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς είναι:
Το φάσμα της φάσης παραμένει το ίδιο και οι εκθετική μορφή είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4n^2)} e^{j2\pi nt}$$


|Xn|
2A/π
2A/3π
2A/3π
2A/15π
2A/15π
...
...
ω0
-4ω0 -3ω0 -2ω0 -ω0 0 ω0 2ω0 3ω0 4ω0