Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Σήματα και Συστήματα
Εργασία 2

Ονοματεπώνυμο: Κανελλοπούλου Αθανασία — Αριθμός Μητρώου: 0015202000065

ΛΥΣΕΙΣ

1 Ερώτημα 1– Μετασχηματισμός Fourier

1.1 Υποερώτημα 1.1

Επειδή το σήμα είναι 0 για ,τ,'3, ο μετασχηματισμός FOURIER είναι:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jWt}dt$$

$\implies X(w) = \int_{-1}^{+1} x(t)(-e^{-jwt})dt + \int_{1}^{3} x(t)e^{-jwt}dt$
$\implies X(w) = \frac{j}{w}e^{-3jwt} - \frac{j}{w}e^{-jwt} - \frac{j}{w}e^{-jw} + \frac{j}{w}e^{jw}$
$\implies X(w) = -\frac{j}{w}cosw + \frac{3j^2}{w}sinw + \frac{j}{w}cos3w - \frac{j^2}{w}sin3w$

1.2 Υποερώτημα 1.2

Έχουμε δεδομένη σχέση

$$X(w) = \frac{12 + 7jw - w^2}{(w^2 - 2jw - 1)(-w^2 + jw - 6)}$$

$$X(w) = \frac{12 + 7jw - w^2}{(w^2 - 2jw + j^2)(-w^2 + jw - 6)}$$

$$X(w) = \frac{12 + 7jw - w^2}{(w - j)^2(-w^2 + jw - 6)}$$

Μετατρέπουμε τον παρανομαστή σε μορφή γινομένου και στη συνέχεια «σπάμε» το κλάσμα σε δύο επιμέρους κλάσματα, οπότε έχουμε:

$$X(w) = \frac{12 + 7jw - w^2}{(w - j)^2(-w^2 + jw - 6)} = \frac{-1}{-w^2 + jw - 6} + \frac{A}{(w - j)^2}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο προκύπτει ότι:

$$x(t) = F^{-1}[X(w)] = F^{-1}[\frac{-1}{-w^2 + jw - 6}] + F^{-1}[\frac{\frac{2}{3}j}{(w-j)^2}] =$$
$$= -1e^{jt}u(t) + \frac{2}{3}je^{-2jt}u(t)$$

2 Ερώτημα 2 – Μετασχηματισμός Fourier και Σήματα

2.1 Υποερώτημα 2.1

2.2 Υποερώτημα 2.2

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης μεταφοράς έχουμε:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{jw + 4}{6 - w^2 + 5jw}$$

$$Y(w)(6 + 5jw - w^2 = X(w)(jw + 4)$$
$$(jw)^2Y(w) + 5jwY(w) + 6Y(w) = jwX(w) + 4X(w)$$

Μετατρέπουμε την παραπάνω σχέση σε διαφορική εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη ότι από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Φουριερ, ισχύει:

$$F[\frac{d^2y(t)}{dt^2}] = (jw)^2Y(w)$$
$$F[\frac{dy(t)}{dt}] = jwY(w)$$
$$F[\frac{dx(t)}{dt}] = jwX(t)$$

οπότε λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

3 Ερώτημα 3– Μετασχηματισμός Laplace

3.1 Υποερώτημα 3.1

Η δοθείσα συνάρτηση αναλύεται στο άθροισμα $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, ·όπου :

$$x_1(t) = u(t)$$
$$x_2(t) = -e^{3t}u(t)$$
$$x_3(t) = te^{-3t}u(t)$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace των παραπάνω συναρτήσεων είναι:

$$X_1 = \frac{1}{s}, Re(s) > 0$$

$$X_2 = \frac{1}{s+3}, Re(s) > -3$$

$$X_3 = \frac{1}{(s+3)^2}, Re(s) > -3$$

Χρησιμοοοιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας βρίσκουμε ότι:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{4s+9}{s(s+3)^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των τριών επιμέρους περιοχών σύγκλισης, άρα $Re(s) > 0$.

3.2 Υποερώτημα 3.2

Ο παρανομαστής έχει μία πραγματική διπλή ρίζα τη $\lambda_1 = 1$

και $c_1 = \lim_{x \to -1} (s+1) \frac{s+2}{(s+1)^2} = 1$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

4 Ερώτημα 4 – Μετασχηματισμός Laplace και Συστήματα

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου είναι:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Επειδή είναι γνωστό ότι :

$$e^{-at} cos(wt) u(t) - -L - - > \frac{s+a}{(s+a)^2 + w^2}$$

και για τιμές $a = -1$ και $w = 4$ προκύπτει ότι :

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{s+1^2+16}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2+16} = 10 \frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+17}$$

Η συνάρτηση $H(s)$ διαθέτει ένα διπλό μηδενικό στη θέση $s = -1$ και δύο απλούς πόλους στις θέσεις $s_1 = -1 + 4i$ και $s_2 = -1 - 4i$

Η κρουστική απόκριση $h(s)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον αντίστροφο ML της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$, ως εξής:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2+16} = 10 - 40 \frac{4}{(s+1)^2+4^2}$$

Προκύπτει ότι:

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = 10L^{-1}[1] - 40L^{-1}[\frac{4}{(S+1)^2+4^2}]$$

$=10\delta(t) - 40e^{-4} sin(4t) u(t)$ που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε τους αντίστροφους ML

$1 — L^{-1} —› \delta(t)$

$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$ —— L^{-1} —› $e^{-at} sin(wt) u(t)$