

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Υπεύθυνη Καθηγήτρια: Παρασκευή Ρούπα
Χειμερινό Εξάμηνο: 2023-24

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ Εργασία

28 Δεκεμβρίου 2023

1. Έστω $d = (686, 728, 2028)$. Να βρεθούν $x, y, z \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε:

$$d = 686x + 728y + 2028z.$$

2. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $(a, b) = 1$. Να δείξετε ότι $(2a + b, a + 2b) = 1$ ή 3.

3. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n > 2$. Να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής:

$$2^n + (-1)^{n+1}$$

είναι σύνθετος.

4. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$17 \mid 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}.$$

5. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$30 \mid (n^5 - n).$$

6. Να εξετάσετε αν ισχύει:

$$31 \mid 525^{305} + 305^{525}.$$

7. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του 482^{828} δια του 829.

8. Να λυθούν οι γραμμικές ισοδυναμίες:

$$(\alpha') \quad 25x \equiv 15 \pmod{45}$$

$$(\beta') \quad 38x \equiv 45 \pmod{72}$$

$$(\gamma') \quad 5x_1 + 2x_2 \equiv 8 \pmod{10}.$$

9. Να λύσετε τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών ισοδυναμιών:

(α')

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{9} \\ x &\equiv 11 \pmod{24} \end{aligned}$$

(β')

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 3 \pmod{5} \\ 2x &\equiv 6 \pmod{12} \end{aligned}$$

10. Να λύσετε τις ακόλουθες πολυωνυμικές ισοδυναμίες:

$$(\alpha') \quad f(x) = 3x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{35}$$

$$(\beta') \quad f(x) = 6x^4 + 7x^3 + 21x + 16 \equiv 0 \pmod{25}$$

11. α) Να εξετάσετε αν έχει λύση η ισοδυναμία $x^2 \equiv -525 \pmod{641}$.

β) Να υπολογίσετε το σύμβολο Jacobi $\left(\frac{70}{1287}\right)$.

12. Να βρείτε τους περιττούς πρώτους αριθμούς p για τους οποίους το -3 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο \pmod{p} .

13. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:

$$75x + 195y = 465.$$

14. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 143 μπορεί να γραφεί στη μορφή $23x + 49y$.
Αν ναι, να βρεθούν τα πιθανά ζεύγη αριθμών (x, y) .

Οδηγίες Υποβολής

Θα υποβάλετε στις “Εργασίες” της e-class ένα αρχείο pdf έχοντάς το μετονομάσει ως “Ονοματεπώνυμο_ΑΜ”. Στην πρώτη σελίδα του αρχείου θα έχετε γράψει το Ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας (ΑΜ).