**Métodos Numéricos y Optimización - Segundo semestre 2024**
Universidad de San Andrés

**Guía 1:** *Punto flotante. Resolución de ecuaciones no lineales. Interpolación*

# 1. Representaciones numéricas

## Aproximaciones y errores

1.1 Calcular el error absoluto y relativo de las siguientes aproximaciones a $p$ por $p^*$:

a) $p = e^{10}$, $p^* = 22000$,

b) $p = 10^{\pi}$, $p^* = 1400$,

c) $p = 8!$, $p^* = 39900$,

d) $p = 9!$, $p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$.

1.2 Encuentre el intervalo más grande en donde $p^*$ puede estar de forma que el error relativo al aproximar los siguientes $p$ no sea mayor a $10^{-4}$.

a) $\pi$,

b) $e$,

c) $\sqrt{2}$,

d) $7^{1/3}$.

1.3 El número $\pi$ se puede obtener a partir de las siguientes igualdades.

a) $\pi = 4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$,

b) $\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

Para cada uno de los casos, calcule una aproximación a $\pi$ considerando los primeros 3 términos no nulos de la serie de Taylor de la arcotangente

$$\arctan(x) \approx x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5,$$

Usando todos los dígitos disponibles en la calculadora. ¿Cuál fórmula llevó a un menor error? Argumente la razón de la diferencia.

1.4 Demostrar que:

a) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$

1.5 Encuentre la tasas de convergencia de las siguientes secuencias cuando $n \to \infty$.

a) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$,

b) $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n^2} = 0$,

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 = 0$,

d) $\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$.

## Aritmética de punto flotante

1.6 Encuentre numéricamente en *python* el valor del epsilon de máquina en *doble precision*, *simple precision* y *half precision*.

1.7 Utilice aritmética de punto flotante redondeando a tres dígitos para realizar los siguientes cálculos. Calcule el error absoluto y relativo, con el valor exacto determinado a al menos cinco dígitos.

a) $133 + 0{,}921$,

b) $133 - 0{,}499$,

c) $(121 - 0{,}327) - 119$,

d) $(121 - 119) - 0{,}327$.

1.8 Suponga que $fl(y)$ es una aproximación de redondeo de $k$-dígitos a $y$. Muestre que

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0{,}5 \times 10^{-k+1}.$$

Ayuda: si $d_{k+1} < 5$, entonces $fl(y) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$, si $d_{k+1} \geq 5$ entonces $fl(y) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$.

1.9 El desarrollo de Taylor de la función $e^x$ proporciona una forma muy inestable de calcular este valor cuando $x$ es negativo. Evalúe numéricamente el desarrollo de Taylor hasta grado $n$ de la función $e^x$ en $x = -12$, para $n = 1, .., 100$. Comparar con el valor exacto: $0{,}000006144212353328210$... ¿Cuáles son las principales fuentes de error? Proponer un método alternativo para estimar $e^{-12}$. Verificar si la aproximación obtenida es mejor.

1.10 Considere la función $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ y analice su comportamiento numérico para valores de $x$ cercanos a cero, $x = 10^{-k}$, $k = 1, \ldots$ Evalúe la función en doble precisión para una serie de valores decrecientes de $x$ y compare los resultados con el valor límite $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ (no olvide usar escala logarítmica para visualizar). Justifique la pérdida de precisión observada y reformule la expresión de $f(x)$ de manera algebraicamente equivalente que mejore la estabilidad numérica. Compare los resultados obtenidos con ambas expresiones.

1.11 ¿Cuántas multiplicaciones y cuántas sumas se necesitan para realizar la siguiente operación en la forma en la que está dada?

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_i b_j.$$

Modifique la suma de modo tal que reduzca el número de operaciones necesarias. Compare la *performance* de ambos algoritmos en *python* usando un vector aleatorio de *numpy*.

1.12 **Método de Horner**: Dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar el poliomio en un cierto $x_0$ ? Horner propone como alternativa escribir a $p$ como $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_{n-1} + xa_n)))$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar $p$ bajo esta forma?

# 2. Ecuaciones no-lineales

## Método de la bisección

2.1 Realice 3 iteraciones del método de bisección en papel sobre las siguientes funciones. Luego, cree una función en *python* que tome como entrada $f$ (cualquier función $f(x)$), $a$ y $b$ (intervalo inicial), $N$ (número máximo de iteraciones), y $\mathrm{tol}$ (tolerancia, que será la cota superior del error). Encuentre aproximaciones a las raíces tomando la tolerancia $\mathrm{tol} = 10^{-5}$ y $N = 1000$. Puede elegir tomar el criterio de terminación en la iteración $i$ como

$$|p_i - p_{i-1}| < \mathrm{tol}, \quad \frac{|p_i - p_{i-1}|}{|p_i|} < \mathrm{tol}, \text{ o } \quad |f(p_i)| < \mathrm{tol}. \tag{1}$$

a) $3x - e^x = 0$ con $x \in [1, 2]$,

b) $2x + 3\cos x - e^x = 0$ con $x \in [1, 2]$,

c) $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ con $x \in [1, 2]$ y $x \in [2, 4]$,

d) $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ con $x \in [0, 0{,}5]$ y $x \in [0{,}5, 1]$.

2.2 Sea $f(x) = (x + 2)(x + 1)^2 x(x - 1)^3(x - 2)$. ¿A qué cero de $f$ converge el método de la bisección cuando se aplica en los siguientes intervalos?

a) $[-1{,}5, 2{,}5]$,

b) $[-0{,}5, 2{,}4]$,

c) $[-0{,}5, 3]$,

d) $[-3, -0{,}5]$.

2.3 Una partícula cae desde el reposo por un plano inclinado cuyo ángulo $\theta$ cambia a una tasa constante

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0.$$

La distancia desde el punto de partida de la partícula a tiempo $t$ está dado por la siguiente fórmula

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin \omega t\right).$$

Suponga que la partícula se movió $0{,}5\,\mathrm{m}$ en $1\,\mathrm{s}$ y asuma que $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Encuentre una aproximación de $\omega$ con error menor a $10^{-5}$ (elegir uno de los 3 criterios).

2.4 Sea $f \in C[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Muestre que el método de la bisección genera una secuencia $\{p\}_{n=1}^{\infty}$ que aproxima a $p$ tal que

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n},$$

cuando $n \geq 1$. Muestre que esta cota de error converge linealmente a $0$.

2.5 Encuentre una cota al número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con error menor a $10^{-3}$ a la solución de $x^3 = -x + 4$ en el intervalo $[1,4]$. Encuentre la aproximación.

2.6 Sea $f(x) = (x-1)^{10}$, $p = 1$ y $p_n = 1 + 1/n$. Muestre que $|f(p_n)| < 10^{-3}$ para cualquier $n > 1$ pero que para tener $|p - p_n| < 10^{-3}$ se necesita $n > 1000$.

## Método de punto fijo

2.7 Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Para resolver $f(x) = 0$ se proponen los siguientes cuatro problemas de punto fijo. Verifique que los puntos fijos de las funciones $g(x)$ se corresponden con raíces de $f(x)$. Escriba una función de *python* que tome como entrada $g$ (cualquier función $g(x)$), $p_0$ (valor inicial), $N$ (número máximo de iteraciones), y $\mathrm{tol}$ (tolerancia). Encuentre aproximaciones a las raíces tomando la tolerancia $\mathrm{tol} = 10^{-8}$ y $N = 1000$.

a) $g(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 1)$, $p_0 = \frac{1}{2}$,

b) $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, $p_0 = \frac{1}{2}$,

c) $g(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$, $p_0 = \frac{1}{2}$,

d) $g(x) = -\sqrt[3]{1 - 2x}$, $p_0 = \frac{1}{2}$,

2.8 Para las funciones de punto fijo del ejercicio anterior, encuentre cuáles cumplen las condiciones de convergencia de punto fijo y en qué intervalo.

2.9 a) Demuestre el teorema de punto fijo (*Burden Faires 2.4*).

b) Demuestre que si $g$ satisface las hipótesis del teorema de punto fijo, entonces las cotas de error de la iteración de punto fijo son

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a,\ b - p_0\},$$

y

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

2.10 Los siguientes cuatro métodos son propuestos para computar $21^{1/3}$. Asumiendo $p_0 = 1$, ordénelos de mayor a menor con respecto a su velocidad aparente de convergencia.

a) $p_n = \dfrac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$

b) $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

c) $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$

d) $p_n = \left(\dfrac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

2.11 Utilice un método de iteración de punto fijo para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones con una precisión de $10^{-2}$.

a) $x^3 - x - 1 = 0$, intervalo de interés: $[1, 2]$ y $p_0 = 1$.

b) $e^{-x} - x = 0$, intervalo de interés: $[0, 1]$ y $p_0 = 1$.

c) $\sin(\ln(x)) - (x^3 - x^2) = 0$, intervalo de interés: $[0{,}1,\ 1]$ y $p_0 = 0{,}1$.

2.12 Muestre que $g(x) = 2^{-x}$ tiene un único punto fijo en $[1/3, 1]$. Utilice iteración de punto fijo para encontrarlo con una precisión de $10^{-4}$. Encuentre una cota al número de iteraciones necesarias para llegar a esta tolerancia partiendo de $p_0 = 1.$ y compárela con el que obtuvo empíricamente.

2.13 Encuentre un valor aproximado iterando 3 veces para $\sqrt[3]{25}$ utilizando el método de la bisección y el método de iteración de punto fijo. Compare los resultados. Busque el número de iteraciones necesarias para tener una precisión de $10^{-4}$.

2.14 Sea $g \in C^1[a, b]$ y $p \in (a, b)$ con $g(p) = p$ y $|g'(p)| > 1$. Muestre que existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |p_0 - p| < \delta$, entonces $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. Es decir, no importa que tan cerca esté $p_0$ de $p$, la siguiente iteración $p_1$ siempre estará más lejos, por lo que el método de iteración de punto fijo no converge si $p_0 \neq p$.

2.15 Encuentre una función $g$ definida en $[0, 1]$ que no cumple ninguna de las hipótesis del teorema de punto fijo pero igual tiene un único punto fijo en $[0, 1]$.

## Método de Newton

2.16 Utilice el método de Newton para encontrar soluciones con de los siguientes problemas

a) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$, con $x \in [1, 2]$,

b) $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0$, con $x \in [1{,}3, 2]$,

c) $(x - 2)^2 - \ln x = 0$, con $x \in [1, 2]$.

Primero resuelva un par de iteraciones a mano, partiendo de algún $p_0$ dentro de los intervalos, y luego implemente una función de *python* para converger con una tolerancia de $10^{-5}$.

2.17 La ecuación $x^2 - 10\cos x = 0$ tiene dos soluciones $\pm 1{,}3793646$. Utilice el método de Newton para aproximar las soluciones con los siguientes $p_0$

a) $p_0 = -100$,

b) $p_0 = -50$,

c) $p_0 = -25$,

d) $p_0 = 25$,

e) $p_0 = 50$,

f) $p_0 = 100$.

2.18 La función $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0{,}4x} \cos \pi x$ tiene un número infinito de ceros.

a) Determine, con precisión de $10^{-6}$, el único cero negativo.

b) Determine, con precisión de $10^{-6}$, los cuatro ceros positivos más pequeños.

c) Determine una aproximación inicial razonable para encontrar el n-ésimo cero positivo más pequeño.

d) Utilice el resultado del inciso anterior para encontrar el 25avo cero positivo más pequeño.

2.19 Utilice el método de Newton para resolver la ecuación

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

con $p_0 = \pi/2$. ¿Algo le resultado llamativo? Repita con $p_0 = 5\pi$ y $p_0 = 10\pi$.

2.20 La ecuación de anualidades ordinaria

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}],$$

se utiliza para calcular cuanto se debe pagar de una hipoteca en un período fijo de tiempo. $A$ es el monto de la hipoteca, $P$ es el monto de cada pago, e $i$ es la tasa de interés por período por los $n$ períodos de pago. Suponga que es necesaria una hipoteca a 30 años con un valor de \$135000 y que el prestatante puede pagar como máximo \$1000 por mes. ¿Cuál es el interés máximo que puede pagar el prestatante?

2.21 La ecuación de iteración para el método de la secante se puede escribir de la siguiente forma

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Explique por qué, en general, es probable que esta ecuación sea menos precisa que la vista en clase.

2.22 Derive la siguiente formula de error para el método de Newton

$$|p - p_{n+1}| \leq \frac{M}{2|f'(p_n)|}|p - p_n|^2,$$

asumiendo que las hipótesis del teorema visto en clase se cumplen, que $|f'(p_n)| \neq 0$ y que $M = \max |f''(x)|$. Ayuda: utilice la derivación del método de Newton a partir de la serie de Taylor de $f(p)$ vista en clase.

2.23 Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el método Newton-Raphson generalizado consiste en realizar la iteración vectorial

$$x_{k+1} = x_k - (DF|_{x_k})^{-1} F(x_k),$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $(DF|_{x_k})^{-1}$ es la inversa de la matriz diferencial de $F$ evaluada en $x_k$ . Usar Newton-Raphson generalizado para hallar una raíz de la función

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}.$$

2.24 Muestre que las siguientes secuencias convergen sublinealmente a $p = 0$. ¿Qué tan grande debe ser $n$ para que $|p_n - p| \leq 5 \times 10^{-2}$?

a) $p_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$,

b) $p_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$.

2.25 Se puede demostrar que si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia dada por el método de la secante que converge a $p$, la solución de $f(x) = 0$, entonces existe una constante $C$ tal que

$$|p_{n+1} - p| \approx C|p_n - p||p_{n-1} - p|.$$

Asuma que $\{p_n\}$ converge con orden $\alpha$, es decir, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda,$$

con $\lambda > 0$ una constante, utilice esta información para mostrar que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Ayuda: la suposición sobre el orden de convergencia quiere decir que puede tomar* $|p_{n+1} - p| \approx \lambda|p_n - p|^{\alpha}$.

# 3. Interpolación

3.1 Sea $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}6$ y $x_2 = 0{,}9$. Construya interpolaciones de primer o segundo grado para aproximar $f(0{,}45)$ dadas las siguientes funciones

a) $f(x) = \cos x$,

b) $f(x) = \sqrt{1 + x}$,

c) $f(x) = \ln(x + 1)$,

d) $f(x) = \tan x$.

Encuentre cotas para el error de las aproximaciones.

3.2 Use los interpolinomios de Lagrange apropiados de grado 1, 2 y 3 para aproximar lo siguiente

a) $f(8{,}4)$ con $f(8{,}1) = 16{,}94410$, $f(8{,}3) = 17{,}56492$, $f(8{,}6) = 18{,}50515$, $f(8{,}7) = 18{,}82091$.

b) $f(-1/3)$ con $f(-0{,}75) = -0{,}0718125$, $f(-0{,}5) = -0{,}02475$, $f(-0{,}25) = 0{,}33493750$, $f(0) = 1{,}101$.

c) $f(0{,}25)$ con $f(0{,}1) = 0{,}62049958$, $f(0{,}2) = -0{,}28398668$, $f(03) = 0{,}00660095$, $f(0{,}4) = 0{,}2484244$.

3.3 Los datos del ejercicio anterior fueron generados con las siguientes funciones. Use la formula del error para encontrar una cota a éste y compárelo con el error obtenido en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

a) $f(x) = x \ln x$,

b) $f(x) = x^3 + 4{,}001x^2 + 4{,}002x + 1{,}101$,

c) $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$.

3.4 Construya los polinomios interpoladores de Lagrange para las siguientes funciones y encuentre una cota para el error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a) $f(x) = e^{-2x} \sin 3x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/4$, $n = 2$,

b) $f(x) = \log_{10} x$, $x_0 = 3{,}0$, $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 3{,}5$, $n = 2$,

c) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $x_0 = -0{,}3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}3$, $n = 2$,

d) $f(x) = \cos(2 \ln(3x))$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1{,}0$, $n = 3$,

3.5 Sea $f(x) = e^x$ con $x \in [0, 2]$.

a) Aproxime $f(0{,}25)$ utilizando interpolación lineal con $x_0 = 0$ y $x_1 = 0{,}5$.

b) Aproxime $f(0{,}75)$ utilizando interpolación lineal con $x_0 = 0{,}5$ y $x_1 = 1$.

c) Aproxime $f(0{,}25)$ y $f(0{,}75)$ utilizando el segundo polinomio interpolador con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

d) ¿Cuál aproximación es mejor y por qué?

3.6 Suponé que necesitás construir tablas con ocho cifras decimales para la función logaritmo común, o en base 10, desde $x = 1$ hasta $x = 10$, de manera que la interpolación lineal sea precisa dentro de un margen de error de $10^{-6}$. Determina un límite para el tamaño del paso en esta tabla. ¿Qué elección de tamaño de paso harías para asegurar que $x = 10$ esté incluido en la tabla?

3.7 Muestre que $\text{máx}_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| = h^2/4$ con $g(x) = (x - jh)(x - (j + 1)h)$.

3.8 Muestre que el polinomio que interpola los siguientes datos tiene grado 3: $f(-2) = 1$, $f(-1) = 4$, $f(0) = 11$, $f(1) = 16$, $f(2) = 13$, $f(3) = -4$.

3.9 Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$ (función de Runge).

*a*) En *python* (empleando funciones propias o de librerías), construya el polinomio interpolador de Lagrange para $f(x)$ de grado $n$ usando varios valores de $n$ empleando:

a) $n + 1$ nodos equiespaciados.

b) $n + 1$ nodos de Chebyshev de primer tipo dados por:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k + 1}{2(n + 1)}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

*b*) Graficar en cada caso la función $f(x)$ y el polinomio interpolador en el intervalo $[-1, 1]$.

*c*) Calcular y graficar el error absoluto $|f(x) - P_n(x)|$ en una malla fina de puntos y comparar ambas formas de colocación de nodos.

# 4. Ejercicios integradores

4.1 El proceso de trilateración es una forma de determinar la posición de un objeto conocida solamente su posición relativo a un conjunto de sensores y es una de las bases de como funcionan los sistemas de GPS. Arme un sistema de trilateración en tres dimensiones asumiendo conocimiento perfecto de las mediciones. La posición de la partícula puede recuperarse resolviendo ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} &= d_1, \\
\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} &= d_2. \\
\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2} &= d_3,
\end{aligned}$$

donde $(x, y, z)$ es la posición de la partícula en el momento dado, $(x_i, y_i, z_i)$ con $i = 1, 2, 3$ son las posiciones (conocidas) de los 3 sensores y $d_i$ son las mediciones realizadas.

Utilizando los datos provistos en los archivos *4.1.measurements.txt* y *4.1.sensor_positions.txt*, recupere la trayectoria de la partícula $\mathbf{r}(t_i) = [x(t_i), y(t_i), z(t_i)]$ resolviendo el sistema de ecuaciones mediante el método de Newton-Raphson generalizado para los tiempos medidos $t_i$.

Interpole las posiciones obtenidas para generar un trayectoria en función del tiempo $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ y evalúe las funciones en los tiempos de la trayectoria ground truth (*4.1.trajectory.txt*) para así obtener un error de la interpolación.