Iteraciones paso a paso: RK2 y RK4

Iteración con RK2

Partimos del sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ v'(t) = -\dfrac{c}{m}v(t) - \dfrac{k}{m}x(t), \end{cases}$$

con $m = 1$, $c = 1.2566$, $k = (2\pi)^2 \approx 39.4784$, y condiciones iniciales:

$$y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Usamos paso $h = 0.1$. El método RK2 se define como:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \qquad y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \tfrac{h}{2}\,k_1, \qquad k_2 = f\left(t_n + \tfrac{h}{2},\, y_{n+\frac{1}{2}}\right), \qquad y_{n+1} = y_n + h\,k_2.$$

Paso 1: cálculo de k_1

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{bmatrix} v_0 \\ -1.2566\,v_0 - 39.4784\,x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2566(1) - 39.4784(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -40.735 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: punto intermedio

$$y_0 + \tfrac{h}{2}k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05\begin{bmatrix} 1 \\ -40.735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0.05(1) \\ 1 + 0.05(-40.735) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ -1.0367 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: cálculo de k_2

$$k_2 = f(0.05, \begin{bmatrix} 1.05 \\ -1.0367 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -1.2566(-1.0367) - 39.4784(1.05) \end{bmatrix}.$$

Resolviendo:

$$-1.2566(-1.0367) = 1.301, \qquad 39.4784(1.05) = 41.452,$$

$$-1.2566(-1.0367) - 39.4784(1.05) = 1.301 - 41.452 = -40.151.$$

Entonces:

$$k_2 = \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -40.151 \end{bmatrix}$$

Paso 4: actualización

$$y_1 = y_0 + h\,k_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -40.151 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.1037 \\ 1 - 4.0151 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8963 \\ -3.0151 \end{bmatrix}.$$

Resultado en $t = 0.1$

$$x(0.1) \approx 0.896, \qquad v(0.1) \approx -3.02.$$

Iteración con RK4

Recordemos el esquema de Runge–Kutta de orden 4:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\big(t_n + \tfrac{h}{2},\, y_n + \tfrac{h}{2} k_1\big)\,, \\ k_3 &= f\big(t_n + \tfrac{h}{2},\, y_n + \tfrac{h}{2} k_2\big)\,, \\ k_4 &= f(t_n + h,\, y_n + h k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Partimos de las condiciones iniciales:

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad h = 0.1, \qquad m = 1,\ c = 1.2566,\ k = (2\pi)^2 \approx 39.4784.$$

Paso 1: cálculo de k_1

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2566(1) - 39.4784(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -40.735 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: cálculo de k_2

$$y_0 + \tfrac{h}{2} k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} 1 \\ -40.735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ -1.0367 \end{bmatrix}.$$

$$k_2 = f\left(0.05, \begin{bmatrix} 1.05 \\ -1.0367 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -1.2566(-1.0367) - 39.4784(1.05) \end{bmatrix}.$$

Cálculo numérico:

$$-1.2566(-1.0367) = 1.301, \qquad 39.4784(1.05) = 41.452,$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -40.151 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: cálculo de k_3

$$y_0 + \tfrac{h}{2}k_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -40.151 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9482 \\ -1.0076 \end{bmatrix}.$$

$$k_3 = f\left(0.05, \begin{bmatrix} 0.9482 \\ -1.0076 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1.0076 \\ -1.2566(-1.0076) - 39.4784(0.9482) \end{bmatrix}.$$

Cálculo numérico:

$$-1.2566(-1.0076) = 1.265, \qquad 39.4784(0.9482) = 37.430,$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} -1.0076 \\ -36.165 \end{bmatrix}.$$

Paso 4: cálculo de k_4

$$y_0 + hk_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -1.0076 \\ -36.165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8992 \\ -2.6165 \end{bmatrix}.$$

$$k_4 = f\left(0.1, \begin{bmatrix} 0.8992 \\ -2.6165 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2.6165 \\ -1.2566(-2.6165) - 39.4784(0.8992) \end{bmatrix}.$$

Cálculo numérico:

$$-1.2566(-2.6165) = 3.287, \qquad 39.4784(0.8992) = 35.510,$$

$$k_4 = \begin{bmatrix} -2.6165 \\ -32.223 \end{bmatrix}.$$

Paso 5: resultado de la iteración

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Suma de contribuciones:

$$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -40.735 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1.0367 \\ -40.151 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1.0076 \\ -36.165 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.6165 \\ -32.223 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2.073 - 2.015 - 2.617 \\ -40.735 - 80.302 - 72.330 - 32.223 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.705 \\ -225.59 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{0.1}{6} \begin{bmatrix} -5.705 \\ -225.59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.095 \\ 1 - 3.760 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.905 \\ -2.760 \end{bmatrix}.$$

Resultado en $t = 0.1$

$$x(0.1) \approx 0.905, \qquad v(0.1) \approx -2.76.$$