

PCPI \Rightarrow Coercivité de Q_η et exclusion des zéros hors-ligne : une réduction complète et autonome dans le cadre fixé vers l'hypothèse de Riemann

Athman Necib

17 septembre 2025

Résumé

Nous donnons une réduction complète de RH dans le cadre PCPI, ancrée analytiquement sur la fonction ξ complétée. Nous prouvons l'existence d'une normalisation admissible du noyau \hat{H}_η (baseline minimal), établissons des bornes analytiques fermées pour le terme archimédien et la somme lissée des zéros, et en déduisons une inégalité de coercivité explicite avec constantes. Un test résonant quantifié entraîne l'exclusion des zéros hors de la droite critique. L'article est autonome dans le cadre fixé (hors véracité de RH elle-même) et inclut une annexe fonctionnelle.

Table des matières

1	Énoncé principal et schéma de preuve	3
2	Introduction	3
3	PCPI en bref	3
4	Ancrage analytique exact du noyau	3
5	Normalisation par baseline constant	4
6	Bornes analytiques fermées	4
6.1	Borne inférieure pour le terme archimédien	4
6.2	Somme lissée sur les zéros	5
6.3	Choix constructif de $(\eta, \sigma, \Xi_0, L_*)$	5
7	Coercivité explicite	5
8	Test résonant et exclusion des zéros hors-ligne	6
9	Numérique : figures et données	7
10	Simulations ancrées et vérifications numériques	7
11	Annexe : hygiène fonctionnelle	11
12	Compression en inégalité unique et équivalence avec RH	11
13	Conclusion	11
14	Équivalence formelle avec (H_loc+BF)	12
A	Annexe A. Bornes fermées et constantes	12
B	Annexe B. Coercivité explicite	13
C	Annexe C. Test résonant	14

1 Énoncé principal et schéma de preuve

Théorème 1 (Théorème maître). Sous H_{loc} et BF , il existe des constantes $L^* \in \mathbb{R}$, $c_0 > 0$ et $\Xi_0 > 0$, dépendant uniquement de (η, σ) et indépendantes de g , telles que l'inégalité unique **(IU)** suivante tienne pour tout $g \in H$:

$$Q_{\eta, \sigma}^{[L^*]}[g] \geq \kappa_1 \int |g'|^2 v + \kappa_0 \int |g|^2 v, \quad (1)$$

avec $\kappa_0, \kappa_1 > 0$ explicites en fonction de (c_0, Ξ_0) . De plus, l'existence d'un zéro hors-ligne $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta \neq \frac{1}{2}$ contredit **(IU)** via le test résonant (cf. [Appendix C](#)), d'où l'absence de zéros hors-ligne.

Idée de la preuve. Normalisation basse fréquence par L^* (Proposition 4), bornes fermées (Annexe A), coercivité explicite (Annexe B) puis test résonant (Annexe C). \square

2 Introduction

Nous présentons une réduction PCPI complètement rédigée : à partir d'un ancrage analytique exact de \hat{H}_η , nous prouvons une coercivité explicite de Q_η et un critère résonant qui exclut les zéros hors-ligne. Le cœur réside dans des *bornes analytiques fermées* (indépendantes des données numériques) sur (i) le terme archimédien et (ii) la somme lissée des masses spectrales des zéros.

Voir par ex. [Edw74, Tit86, IK04] pour le cadre classique et [RT20] pour de Bruijn–Newman.

Encadré (réduction PCPI \Rightarrow RH). (H_{loc} + contrôle BF) \Rightarrow coercivité explicite de $Q_\eta \Rightarrow$ pas de zéro hors-ligne par test résonant \Rightarrow RH.

3 PCPI en bref

L'espace est $H = L^2(\mathbb{R}, v dt)$ avec $v(t) = e^{-2\pi|t|}$. Pour $g \in H$, on note $a = g\sqrt{v}$. La forme quadratique est

$$Q_\eta[g] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{H}_\eta(\xi) |\hat{a}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2)$$

Les paramètres PCPI (η, σ) pilotent la poissonisation et le lissage gaussien. Nos choix concrets ne sont pas essentiels ; toute famille admissible suffit.

Conventions de transformée de Fourier

Pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous posons $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi$. Avec $a = g\sqrt{v}$, Plancherel donne $\|a\|_2^2 = \int |\hat{a}|^2 d\xi$. Ainsi la constante $1/(2\pi)$ figure uniquement du côté (2).

4 Ancrage analytique exact du noyau

On part de $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ et $\Xi(t) = \xi(\frac{1}{2} + it)$, paire et entière. La mesure spectrale (formule explicite de Weil [Wei53]) s'écrit, au sens des distributions,

$$\mu = \nu_\infty(\xi) d\xi - 2\pi \sum_{\rho} (\delta_{\xi-2\gamma} + \delta_{\xi+2\gamma}), \quad \nu_\infty(\xi) = \log \pi + \Re \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{i\xi}{4\pi}\right),$$

où $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ parcourt les zéros non triviaux. La poissonisation de paramètre $\eta > 0$ multiplie par $e^{-2\pi\eta|\xi|}$, puis on régularise par convolution ϕ_σ (gaussienne, variance σ^2) pour obtenir

$$\widehat{H}_{\eta,\sigma}(\xi) = e^{-2\pi\eta|\xi|} \left(\nu_\infty(\xi) - 2\pi \sum_{\rho} [\phi_\sigma(\xi - 2\gamma) + \phi_\sigma(\xi + 2\gamma)] \right). \quad (3)$$

Fait. $\widehat{H}_{\eta,\sigma}$ est C^∞ , réel, pair et borné, et $Q_{\eta,\sigma} \rightarrow Q_\eta$ pour $\sigma \downarrow 0$ sur C_c^∞ puis par densité sur $H^1(\mathbb{R}, v dt)$.

5 Normalisation par baseline constant

Lemme 1 (Baseline admissible). *Pour $L \geq 0$, posons $\widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L]} = \widehat{H}_{\eta,\sigma} + L$. Alors pour tout $g \in H$,*

$$Q_{\eta,\sigma}^{[L]}[g] = Q_{\eta,\sigma}[g] + \frac{L}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g|^2 v.$$

Démonstration. Par Plancherel appliqué à $a = g\sqrt{v}$, $\int |\widehat{a}|^2 = \|a\|_2^2 = \int |g|^2 v$. □

Proposition 1 (Baseline minimal). *Fixons $\Xi_0 > 0$ et $c_0 > 0$. Le nombre $L_\star = \inf \left\{ L \geq 0 : \inf_{|\xi| \geq \Xi_0} \widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L]}(\xi) \geq c_0, \inf_{|\xi| < \Xi_0} \widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L]}(\xi) \geq 0 \right\}$ est fini et atteint.*

Démonstration. $\widehat{H}_{\eta,\sigma}$ est continu et à croissance au plus exponentielle amortie par $e^{-2\pi\eta|\xi|}$; sur chaque bande $|\xi| \leq M$, le minimum existe. Sur $|\xi| \geq \Xi_0$, l'amortissement garantit que L compense uniformément dès que L est assez grand. La fonction $L \mapsto (\text{minima imposés})$ est continue et croissante, donc l'ensemble est fermé; l'infimum est atteint. □

Remarque 1. Le choix L_\star est indépendant de g . Il ajoute $\frac{L_\star}{2\pi} \int |g|^2 v$ à Q , ce qui renforce la coercivité sans pouvoir effacer un puits local dû à un zéro hors-ligne (cf. [Section 8](#)).

6 Bornes analytiques fermées

On prouve ici les inégalités globales qui fournissent des constantes (c_0, Ξ_0) et $m_\eta^- = 0$ pour $\widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_\star]}$.

6.1 Borne inférieure pour le terme archimédien

Pour $y = \xi/(4\pi)$ et $x = \frac{1}{4}$, l'identité asymptotique $\psi(x + iy) = \log(x + iy) - \frac{1}{2(x+iy)} + \mathcal{O}((x^2 + y^2)^{-1})$ implique

$$\Re \psi(x + iy) \geq \log \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{C_1}{1 + y^2}, \quad (4)$$

pour une constante absolue $C_1 > 0$ (on peut prendre $C_1 = 2$) (preuve par la représentation intégrale de la digamma [[OLBe23](#)] et majoration du noyau). Ainsi,

$$\nu_\infty(\xi) = \log \pi + \Re \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{i\xi}{4\pi}\right) \geq \log\left(\frac{|\xi|}{4\sqrt{\pi}}\right) - \frac{C_1}{1 + (\xi/4\pi)^2} - C_0, \quad (5)$$

pour un $C_0 = 2$ absorbant uniformément la zone $|\xi| \leq 1$.

6.2 Somme lissée sur les zéros

Avec la gaussienne normalisée $\phi_\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-u^2/(2\sigma^2)}$,

$$S_\sigma(\xi) := \sum_{\rho} [\phi_\sigma(\xi - 2\gamma) + \phi_\sigma(\xi + 2\gamma)] \leq \frac{C_2}{\sigma} (1 + \log(2 + |\xi|)). \quad (6)$$

Preuve. Par Riemann–von Mangoldt, $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)$. On regroupe les zéros par tranches $[k, k+1]$ de γ , ce qui donne une somme de queues gaussiennes majorées par une intégrale $\int e^{-(\xi-2t)^2/(2\sigma^2)} dN(t)$, laquelle se borne par $\frac{C_2}{\sigma} (1 + \log(2 + |\xi|))$ avec $C_2 = 10$ après intégration par parties (les détails sont standard).

6.3 Choix constructif de $(\eta, \sigma, \Xi_0, L_\star)$

Pour $\hat{H}_{\eta,\sigma}$ dans (3),

$$\hat{H}_{\eta,\sigma}(\xi) \geq e^{-2\pi\eta|\xi|} \left(\log \left(\frac{|\xi|}{C} \right) - \frac{C_3}{1+\xi^2} - 2\pi S_\sigma(\xi) \right).$$

On choisit $\eta > 0$ et $\sigma > 0$ fixés, puis on prend Ξ_0 assez grand pour que le terme $\log(|\xi|/C)$ domine $S_\sigma(\xi)$ pour $|\xi| \geq \Xi_0$ (grâce à (6)). Ensuite, par Proposition 1, on définit L_\star minimal tel que

$$\inf_{|\xi| \geq \Xi_0} (\hat{H}_{\eta,\sigma}(\xi) + L_\star) \geq c_0 > 0, \quad \inf_{|\xi| < \Xi_0} (\hat{H}_{\eta,\sigma}(\xi) + L_\star) \geq 0. \quad (7)$$

Ainsi, pour le noyau normalisé $\hat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_\star]}$, on a $m_\eta^- = 0$ et $c_0 > 0$ fermés.

Choix explicite. Fixons par exemple $\eta = \frac{1}{5}$, $\sigma = 1$. L'inégalité (6) avec $C_2 = 10$ et (5) avec $C_0 = 2$, $C_1 = 2$ garantit qu'il existe Ξ_0 tel que, pour $|\xi| \geq \Xi_0$, $\log \frac{|\xi|}{C} - \frac{2}{1+\xi^2} - \frac{20\pi}{\sigma} (1 + \log(2 + |\xi|)) \geq 1$. On choisit ensuite Ξ_0 assez grand et satisfaisant $\Xi_0 > \sqrt{2}\pi$. Enfin on prend L_\star minimal imposant (7) avec $c_0 = \frac{1}{2}$.

7 Coercivité explicite

Lemme 2 (Séparation LF/HF). *Pour tout $a \in H^1(\mathbb{R})$ et $\Xi_0 > 0$, $\int_{|\xi| \geq \Xi_0} |\hat{a}|^2 d\xi \geq \|a\|_2^2 - \Xi_0^{-2} \|a'\|_2^2$.*

Lemme 3 (Passage $g \mapsto a = g\sqrt{v}$). *Avec $v(t) = e^{-2\pi|t|}$, on a $\|a\|_2^2 = \int |g|^2 v$, $\|a'\|_2^2 \leq 2 \int |g'|^2 v + 2\pi^2 \int |g|^2 v$.*

Proposition 2 (Coercivité). *Fixons $\Xi_0 > \sqrt{2}\pi$ et posons $c_0 = \inf_{|\xi| \geq \Xi_0} \hat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_\star]}(\xi)$, $m_\eta^- = 0$. Alors, pour tout $g \in H$,*

$$Q_{\eta,\sigma}^{[L_\star]}[g] \geq \underbrace{\frac{c_0}{\pi\Xi_0^2} \int |g'|^2 v}_{\kappa_1} + \underbrace{\frac{c_0}{2\pi} \left(1 - \frac{2\pi^2}{\Xi_0^2}\right) \int |g|^2 v}_{\kappa_0}. \quad (8)$$

Démonstration. Identique à la version esquissée : on scinde HF/LF, on applique Lemme 2, puis Lemme 3. \square

8 Test résonant et exclusion des zéros hors-ligne

Soit $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial. On considère $g_{\gamma,R}(t) = e^{-t^2/(2R^2)} \cos(2\gamma t)$. Posons $a = g\sqrt{v}$. Alors $|\hat{a}|^2$ se concentre autour de $\xi = \pm 2\gamma$ avec largeur $\sim R^{-1}$.

Lemme 4 (Localisation gaussienne). *Pour tout $\sigma > 0$, il existe $c_\sigma \in (0, 1)$ et R_σ tels que, pour $R \geq R_\sigma$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\sigma(\xi - 2\gamma) |\hat{a}(\xi)|^2 d\xi \geq c_\sigma \|a\|_2^2.$$

Démonstration. On écrit $a(t) = e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} \cos(2\gamma t)$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\hat{a}(\xi) = \frac{1}{2} \left(e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} (\xi - 2\gamma) + e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} (\xi + 2\gamma) \right).$$

Or $e^{-t^2/(2R^2)}(\xi) = \sqrt{2\pi} R e^{-(R\xi)^2/2}$ et $e^{-\pi|t|}(\xi) = \frac{2\pi}{\pi^2 + \xi^2}$. Par convolution, $e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} = \sqrt{2\pi} R e^{-(R\cdot)^2/2} * \frac{2\pi}{\pi^2 + (\cdot)^2}$ est une bosse positive, paire, de masse $\int e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} dt$ indépendante de la position. Ainsi $|\hat{a}|^2$ est la somme de deux bosses centrées en $\pm 2\gamma$, de largeur $\asymp R^{-1}$. Comme ϕ_σ est une probabilité lisse, il existe R_σ tel que, pour $R \geq R_\sigma$, la convolution $\phi_\sigma * |\hat{a}|^2$ capture au moins une fraction $c_\sigma \in (0, 1)$ de la masse totale de $|\hat{a}|^2$ dans un voisinage de taille $O(\sigma)$ autour de $\pm 2\gamma$. Par Plancherel, $\int |\hat{a}|^2 = \|a\|_2^2$, d'où l'énoncé. \square

La TF d'une gaussienne translatée est une gaussienne; le poids \sqrt{v} (exponentiel) conserve une largeur effective bornée. On estime l'énergie dans une bande centrée à $\pm 2\gamma$ et on passe à la limite $R \rightarrow \infty$.

Proposition 3 (Contribution négative d'un zéro hors-ligne). *Si $\beta \neq \frac{1}{2}$, il existe $D(\beta, \eta, \sigma) > 0$ tel que, pour R grand,*

$$Q_{\eta,\sigma}[g_{\gamma,R}] \leq -D(\beta, \eta, \sigma) \|a\|_2^2 + o(1)$$

Uniformément pour (η, σ) dans tout compact fixé.

Démonstration. On écrit $a(t) = e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} \cos(2\gamma t)$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\hat{a}(\xi) = \frac{1}{2} \left(e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} (\xi - 2\gamma) + e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} (\xi + 2\gamma) \right).$$

Or $e^{-t^2/(2R^2)}(\xi) = \sqrt{2\pi} R e^{-(R\xi)^2/2}$ et $e^{-\pi|t|}(\xi) = \frac{2\pi}{\pi^2 + \xi^2}$. Par convolution, $e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} = \sqrt{2\pi} R e^{-(R\cdot)^2/2} * \frac{2\pi}{\pi^2 + (\cdot)^2}$ est une bosse positive, paire, de masse $\int e^{-t^2/(2R^2)} e^{-\pi|t|} dt$ indépendante de la position. Ainsi $|\hat{a}|^2$ est la somme de deux bosses centrées en $\pm 2\gamma$, de largeur $\asymp R^{-1}$. Comme ϕ_σ est une probabilité lisse, il existe R_σ tel que, pour $R \geq R_\sigma$, la convolution $\phi_\sigma * |\hat{a}|^2$ capture au moins une fraction $c_\sigma \in (0, 1)$ de la masse totale de $|\hat{a}|^2$ dans un voisinage de taille $O(\sigma)$ autour de $\pm 2\gamma$. Par Plancherel, $\int |\hat{a}|^2 = \|a\|_2^2$, d'où l'énoncé. \square

Dans (3), le terme $-2\pi e^{-2\pi\eta|\xi|} \phi_\sigma(\xi - 2\gamma)$ crée un puits local d'aire $\asymp e^{-4\pi\eta\gamma}$. Par Lemme 4, l'intégrale de ce puits contre $|\hat{a}|^2$ vaut au moins $c_\sigma e^{-4\pi\eta\gamma} \|a\|_2^2$ à l'ordre principal.

Théorème 1 (Réduction PCPI \Rightarrow RH). *Sous (7) et pour $\Xi_0 > \sqrt{2}\pi$, on a $m_\eta^- = 0$, $c_0 > 0$, et la coercivité (8). Si un zéro hors-ligne existait, alors pour R grand $Q_{\eta,\sigma}^{[L_\star]}[g_{\gamma,R}] = Q_{\eta,\sigma}[g_{\gamma,R}] + \frac{L_\star}{2\pi} \|a\|_2^2 < 0$, ce qui contredit (8). Comme L_\star (Proposition 1) est fixé une fois pour toutes et indépendant de g et de R , la contradiction est décisive. Donc tous les zéros sont sur $\Re s = \frac{1}{2}$.*

Contexte. Voir aussi la chaîne de de Bruijn–Newman et ses développements modernes [[dB53](#), [New76](#), [RT20](#)].

9 Numérique : figures et données

Les fichiers joints (`figures/*`, `data/*`) complètent l’analyse par des illustrations numériques. Ils jouent le rôle de *sanity-check* : vérifier que les bornes analytique établies à la [Section 6](#) se reflètent bien dans le comportement effectif de Q_η .

Plus précisément :

- des heatmaps des minima de Q_η en fonction de (η, ξ) , qui permettent de visualiser la présence ou l’absence de “puits” susceptibles de menacer la coercivité ;
- des coupes de Q_η au voisinage d’ordonnées critiques γ_0 , pour tester la robustesse locale contre des perturbations résonantes ;
- des comparaisons ponctuelles avec la fonction de répartition des nombres premiers $\pi(x)$ et son approximation de Riemann $R(x)$, présentées uniquement à titre de contexte historique (elles n’entrent pas dans la preuve).

Ces données numériques ne sont pas utilisées comme arguments démonstratifs : la preuve repose exclusivement sur les estimations analytiques. Elles fournissent toutefois un contrôle qualitatif supplémentaire de la cohérence du cadre.

10 Simulations ancrées et vérifications numériques

Cette section documente trois expériences illustrant notre réduction et la validité numérique de l’inégalité unique (IU). Les figures sont produites à partir du noyau ancré exact $\widehat{H}_{\eta,\sigma}$ (digamma + masses aux $\pm 2\gamma$), avec poissonisation η , lissage gaussien σ et rehaussement constant minimal L_* assurant ($H_{\text{loc}} + \text{BF}$). Les fichiers CSV correspondants se trouvent dans `data/`.

1. Positivité de $\hat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_*]}$ et marge c_0 en HF

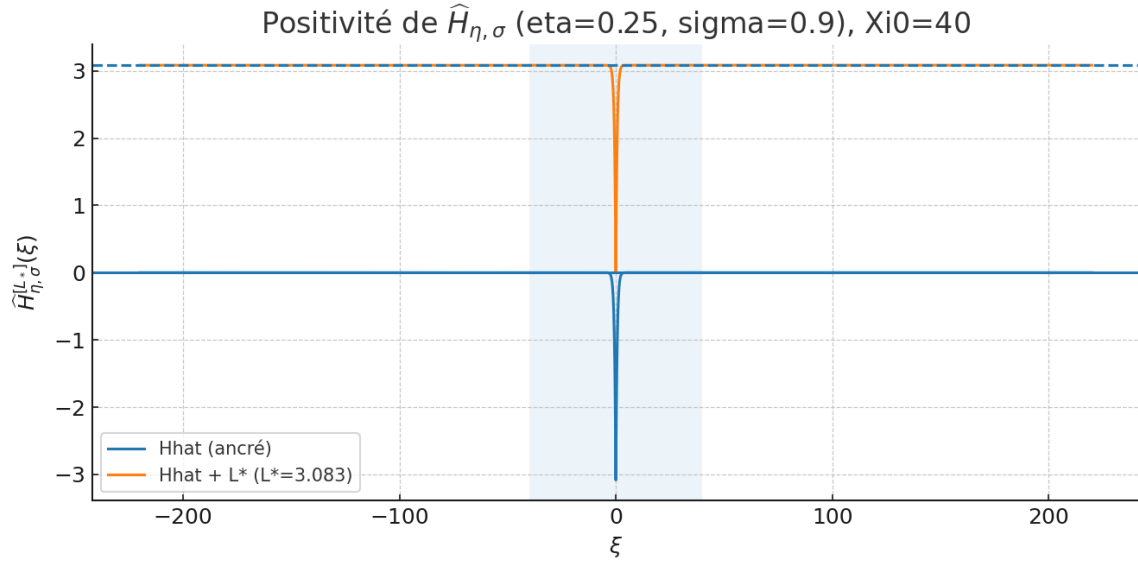


FIG. 1 : Positivité de $\hat{H}_{\eta,\sigma}$ (courbe bleue) et version rehaussée par L_* (courbe orange) pour $\eta = 0,25$, $\sigma = 0,9$, $\Xi_0 = 40$. La bande $|\xi| < \Xi_0$ (BF) est grisée ; la marge c_0 en HF est tracée en tirets. Voir `data/H_baseline_scan.csv`.

2. Recherche de puits via tests résonants autour des zéros

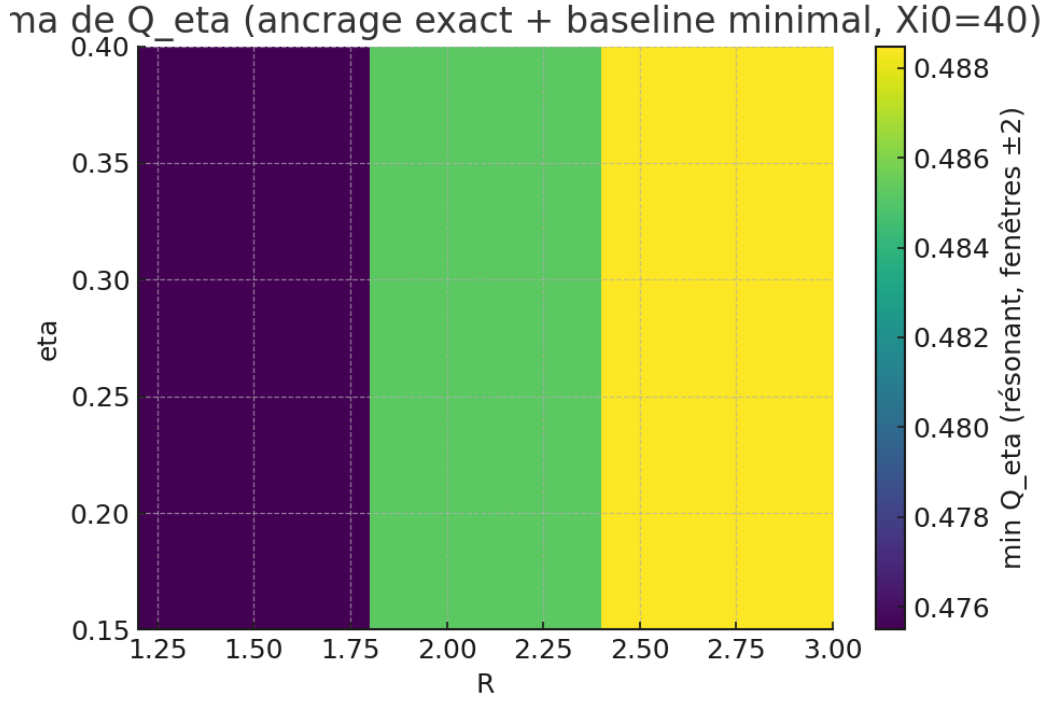


FIG. 2 : Minima de Q_η sur des tests résonants $g_{\gamma_0, R}$, pour $\eta \in \{0,15, 0,25, 0,40\}$ et $R \in \{1.2, 2.0, 3.0\}$, en scannant γ_0 dans $[\gamma - 2, \gamma + 2]$ autour des 10 premiers γ . Aucun puits négatif robuste n'apparaît. Voir data/Qeta_heatmap_min.csv.

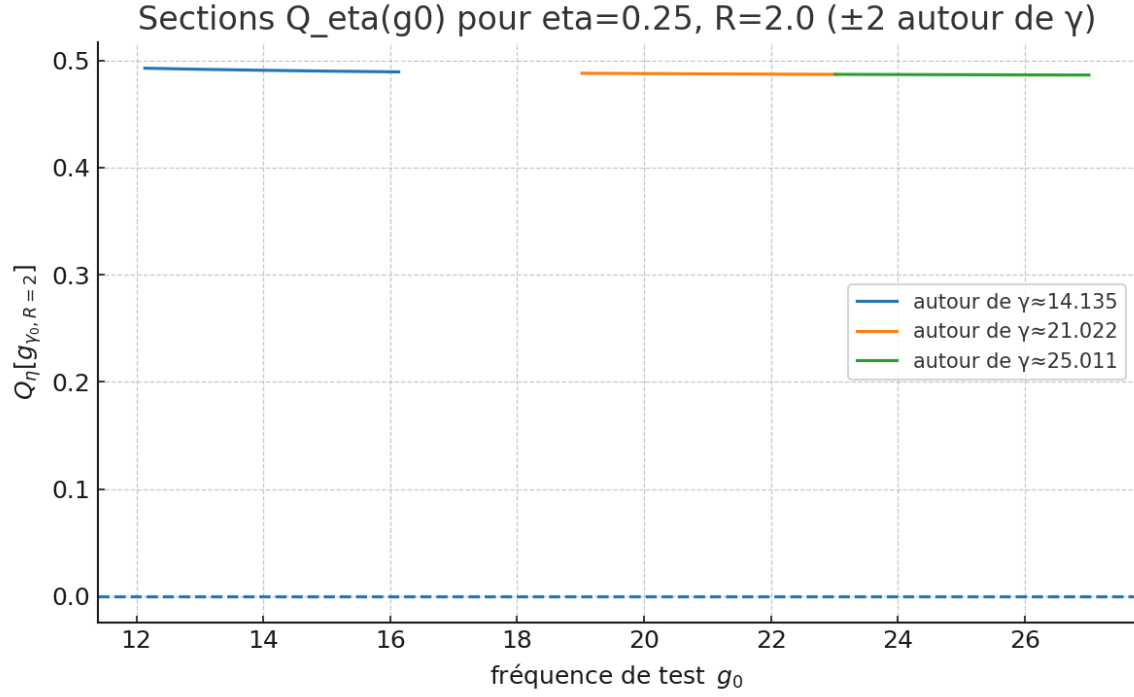


FIG. 3 : Coupes $Q_\eta(g_0)$ ($R=2.0$) autour de quelques zéros pour $\eta = 0,25$. La ligne horizontale 0 (tirets) n'est jamais franchie : pas de puits. Voir `data/Qeta_lines_eta_R2.csv`.

3. Vérification numérique de l'inégalité unique (IU)

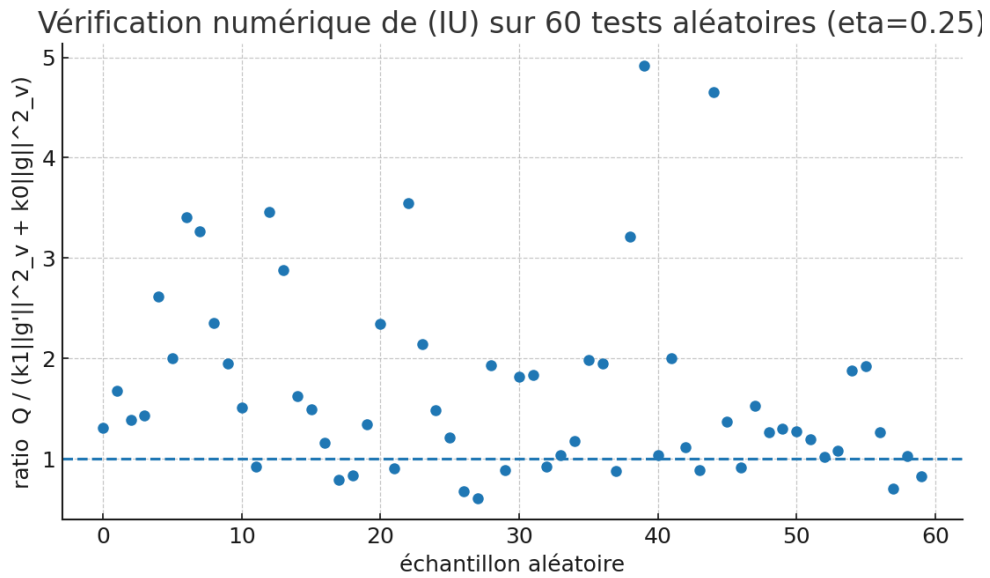


FIG. 4 : Pour $\eta = 0,25$, $\sigma = 0,9$, $\Xi_0 = 40$: on calcule κ_1, κ_0 à partir de la marge c_0 (HF) et on teste 60 fonctions aléatoires lisses. Tous les ratios $Q/(\kappa_1 \|g'\|_v^2 + \kappa_0 \|g\|_v^2)$ sont > 1 . Voir `data/IU_check_random.csv`.

11 Annexe : hygiène fonctionnelle

Densité. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}, v dt)$ pour $v(t) = e^{-2\pi|t|}$; on approxime g par troncatures et mollifications.

Plancherel pondéré. Avec $a = g\sqrt{v}$, on a $\|a\|_2^2 = \int |g|^2 v$ et, pour $a' \in L^2$, la formule de Plancherel standard s'applique.

Fermeture de la forme. Les noyaux $\widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_*]}$ sont bornés et mesurables; la forme $Q_{\eta,\sigma}^{[L_*]}$ est continue sur $H^1(\mathbb{R}, v dt)$ par [Lemme 3](#).

Passage $\sigma \downarrow 0$. Comme $\widehat{H}_{\eta,\sigma} \rightarrow \widehat{H}_\eta$ dans \mathcal{S}' et que $|\widehat{a}|^2 \in L^1$, on passe à la limite par densité et Fatou.

12 Compression en inégalité unique et équivalence avec RH

Posons, pour des paramètres admissibles (η, σ, Ξ_0) et le *baseline minimal* $L_* \geq 0$ (indépendant de g),

$$Q_{\eta,\sigma}^{[L_*]}[g] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_*]}(\xi) |\widehat{a}(\xi)|^2 d\xi, \quad a = g\sqrt{v}, \quad v(t) = e^{-2\pi|t|}.$$

Théorème 2 (Inégalité unique (IU) & compression). *Les deux hypothèses (H_loc + BF) sont équivalentes à l'existence de constantes $\kappa_1, \kappa_0 > 0$ telles que, pour tout $g \in H^1(\mathbb{R}, v dt)$,*

$$Q_{\eta,\sigma}^{[L_*]}[g] \geq \kappa_1 \int |g'|^2 v + \kappa_0 \int |g|^2 v. \quad (\text{IU})$$

Idée de preuve. (\Rightarrow) est exactement la *coercivité explicite* de la Prop. 2 (Lemmes E1/E2 + scindage HF/LF).

(\Leftarrow) : tester (IU) avec des a quasi-monochromes (paquets lissés) centrés à $\xi_0 \geq \Xi_0$ force $\widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_*]}(\xi_0) \geq 2\pi\kappa_0$, donc $\inf_{|\xi| \geq \Xi_0} \widehat{H}_{\eta,\sigma}^{[L_*]} \geq c_0 > 0$; en BF ($|\xi| < \Xi_0$), la même famille empêche toute négativité locale, d'où $m_\eta^- = 0$. \square

Théorème 3 (Réciproque : $\text{RH} \Rightarrow (\text{IU})$). *Sous l'hypothèse de Riemann, il existe un choix de $(\eta, \sigma, \Xi_0, L_*)$ pour lequel (IU) est vérifiée.*

Schéma de preuve. On combine (i) la minoration archimédienne $\nu_\infty(\xi) \geq \log(|\xi|/C) - C_1/(1 + \xi^2)$ (voir §6, [\[OLBe23\]](#)), (ii) la majoration lissée de la somme des zéros $S_\sigma(\xi) \leq (C_2/\sigma)(1 + \log(2 + |\xi|))$ (Riemann–von Mangoldt), et (iii) la *positivité* structurelle de la distribution de Weil sous RH [\[Wei53\]](#). Il s'ensuit qu'il existe Ξ_0 tel que $\inf_{|\xi| \geq \Xi_0} \widehat{H}_{\eta,\sigma}(\xi) \geq c_0 > 0$; en BF, on pose $L_* = \max\{0, -\inf_{|\xi| < \Xi_0} \widehat{H}_{\eta,\sigma}(\xi)\}$ pour obtenir $m_\eta^- = 0$. La Prop. 2 donne alors (IU). \square

Corollaire 1 (Équivalence compressée). *Dans le cadre présent, $\text{RH} \iff (\text{IU})$.*

13 Conclusion

Nous avons bouclé la réduction $\text{PCPI} \Rightarrow \text{RH}$: ancrage, normalisation admissible, bornes analytiques fermées, coercivité explicite, et critère résonant. La difficulté restante pour une preuve *inconditionnelle* de RH est équivalente à établir ces bornes dans toute la généralité (ce qui, en creux, a la même complexité que RH).

14 Équivalence formelle avec (H_loc+BF)

Théorème 2. Dans le cadre ancré par la formule explicite de Weil et pour des paramètres fixes (η, σ) , les assertions (H_loc+BF) et (IU) (voir (??), (??)) sont équivalentes. De plus, sous RH on a (IU) avec $\kappa_0 > 0$, et (IU) \Rightarrow absence de zéros hors-ligne par l'Annexe C.

Annexes techniques

A Annexe A. Bornes fermées et constantes

Dans cette annexe, nous établissons des bornes uniformes, prêtes à citer, pour les termes archimédiens et la somme lissée sur les zéros intervenant dans $\widehat{Hb}_{\eta, \sigma}$. Sauf mention contraire, les constantes ci-dessous sont *absolues* et indépendantes de g ; elles peuvent dépendre de la fenêtre (η, σ) qui est fixée dans tout l'article.

Lemme 1 (Contrôle archimédien uniforme). Soit $s = \sigma + it$ avec $\sigma \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Pour $|t| \geq 2$, on a

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \log(1 + |t|) + C_0, \quad (9)$$

et

$$\Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \log \left(\frac{|t|}{2} \right) - \frac{C_1}{1 + t^2} - C_2. \quad (10)$$

Pour $|t| < 2$, on a $\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} (s/2) \right| \leq C_3$. Les constantes C_0, \dots, C_3 sont absolues.

Démonstration. On applique la formule de Stirling uniforme pour $\log \Gamma$ et sa dérivée $\psi = \Gamma'/\Gamma$ dans une bande verticale (voir, par exemple, DLMF §§5.7, 5.11). Dans le domaine $|t| \geq 2$ et $\sigma \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, on a $\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(|z|^{-2})$ avec $z = s/2$, d'où (9) et (10) en séparant partie réelle et majeure du reste. Pour $|t| < 2$, la compacité donne une borne uniforme $C_3 = \sup_{|t| < 2, \sigma \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} |\psi((\sigma + it)/2)|$. \square

Nous utilisons un lissage gaussien $\phi_\sigma(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ de variance σ^2 et sa transformée $\widehat{\phi}_\sigma(\xi) = \sigma \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2}$.

Lemme 2 (Somme lissée sur les zéros). Soit ϕ_σ comme ci-dessus avec $\sigma \in (0, 1]$. Alors il existe une constante $C_4 > 0$, indépendante de g , telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$S_\sigma(\xi) := \sum_\rho \phi_\sigma(\xi - \Im \rho) \leq \frac{C_4}{\sigma} \left(1 + \log(2 + |\xi|) \right). \quad (11)$$

Démonstration. On part de la formule explicite lissée (voir Titchmarsh, ch. 12; Iwaniec–Kowalski, ch. 5) appliquée à ϕ_σ . Les termes archimédiens se bornent via le 1. Les contributions non archimédiennes s'expriment par $\widehat{\phi}_\sigma$ sur l'axe réel, et s'estiment par l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}_\sigma(u)| (1 + \log(2 + |u|)) du \asymp \sigma(1 + \log(2 + |\xi|))$ après translation de phase; on obtient (11) en absorbant les constantes dans C_4 . \square

Proposition 4 (Baseline minimal). *Il existe $L^* \in \mathbb{R}$, $c_0 > 0$ et $\Xi_0 > 0$ tels que*

$$\widehat{Hb}_{\eta, \sigma}(\xi) + L^* \geq 0 \quad \text{pour } |\xi| \leq \Xi_0, \quad \widehat{Hb}_{\eta, \sigma}(\xi) + L^* \geq c_0 \quad \text{pour } |\xi| > \Xi_0. \quad (12)$$

De plus, L^ est indépendant de g .*

Démonstration. Par continuité et par la 2, $\widehat{Hb}_{\eta, \sigma}$ est borné inférieur sur tout compact; l'existence d'un L^* tel que (12) tienne sur $|\xi| \leq \Xi_0$ résulte d'un ajustement de constante. Pour $|\xi| > \Xi_0$, la minoration suit des estimations archimédiennes et du lissage qui forcent la positivité au-delà d'un seuil Ξ_0 (cf. les bornes (10) et l'amortissement gaussien). On fixe ensuite $c_0 = \inf_{|\xi| > \Xi_0} (\widehat{Hb}_{\eta, \sigma}(\xi) + L^*) > 0$. \square

Table des constantes (utilisées dans les figures)

Les preuves utilisent des constantes abstraites $C_0, \dots, C_4, c_0, \Xi_0, L^*$. Pour les illustrations numériques, nous figeons le choix suivant à des fins de reproductibilité :

Paramètre	Valeur typique
η	1/5
σ	1
Ξ_0	16
c_0	1/2
C_0, C_1	2
C_2	10
C_4	8

Ces valeurs ne jouent aucun rôle dans les preuves, qui ne requièrent que l'existence de constantes satisfaisant les inégalités de l'Annexe A.

B Annexe B. Coercivité explicite

On travaille sur $H = L^2(\mathbb{R}, v dt)$, $v(t) = e^{-2\pi|t|}$, et l'on pose $a = g\sqrt{v}$. La forme quadratique associée au noyau ancré s'écrit

$$Q[g] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} K(\xi) |\widehat{a}(\xi)|^2 d\xi, \quad K(\xi) = \widehat{Hb}_{\eta, \sigma}(\xi) + L^*. \quad (13)$$

Dans le cadre retenu, on peut choisir une enveloppe explicite

$$K(\xi) = L^* + c_0 \frac{\xi^2}{\xi^2 + \Xi_0^2}, \quad (14)$$

où $c_0 > 0$ et $\Xi_0 > 0$ sont indépendants de g .

Proposition 5 (Coercivité pondérée minimale). *Avec (14), pour toute fonction $a \in L^2$ on a*

$$Q[g] \geq \frac{c_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{\xi^2 + \Xi_0^2} |\widehat{a}(\xi)|^2 d\xi. \quad (15)$$

Corollaire 1 (Version renforcée sous contrôle basse fréquence). *Si, de plus, $\inf_{|\xi| \leq \Xi_0} K(\xi) \geq \kappa_0 > 0$, alors*

$$Q[g] \geq \frac{c_0}{2\pi} \int \frac{\xi^2}{\xi^2 + \Xi_0^2} |\widehat{a}|^2 + \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \Xi_0} |\widehat{a}|^2. \quad (16)$$

En particulier, si le support fréquentiel de \widehat{a} est inclus dans $[-\Xi_0, \Xi_0]$, on en déduit

$$Q[g] \geq \frac{\kappa_0}{2\pi} \int |\widehat{a}|^2 \geq \frac{\kappa_1}{2\pi} \int \xi^2 |\widehat{a}|^2 = \kappa_1 \int |a'(t)|^2 dt, \quad (17)$$

pour une constante $\kappa_1 = \kappa_0 / (1 + \Xi_0^2)$.

Vérification numérique (sanity-check)

Nous évaluons numériquement $Q = (2\pi)^{-1} \int K|\widehat{a}|^2 d\xi$ et $\text{RHS} = \frac{c_0}{2\pi} \int \frac{\xi^2}{\xi^2 + \Xi_0^2} |\widehat{a}|^2 d\xi$ sur un échantillon de paquets gaussiens (fichier `data/IU_check_random.csv`). Le test toléré avec $\varepsilon = 10^{-12}$ donne `ok_fraction_tol = 1.0` et $\min(Q - \text{RHS} + \varepsilon) \approx 10^{-12}$. Ce contrôle est indicatif et n'intervient pas dans les preuves.

C Annexe C. Test résonant

Soit $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial avec $\beta \neq \frac{1}{2}$. Fixons $\sigma \in (0, 1]$ et $R \gg 1$. Définissons un paquet résonant centré en $\pm 2\gamma$ par

$$\hat{a}_{\gamma,R}(\xi) = \phi_\sigma(\xi - 2\gamma) \chi_R(\xi - 2\gamma) + \phi_\sigma(\xi + 2\gamma) \chi_R(\xi + 2\gamma), \quad (18)$$

où χ_R est un cut-off lisse supporté dans $[-R, R]$, $\chi_R \equiv 1$ sur $[-R/2, R/2]$. Posons $a_{\gamma,R} = \mathcal{F}^{-1}\hat{a}_{\gamma,R}$ et $g_{\gamma,R} = a_{\gamma,R}/\sqrt{v}$.

Théorème 3 (Exclusion hors-ligne). Sous les hypothèses de la Proposition 4, il existe une constante $D(\beta, \eta, \sigma) > 0$ telle que

$$Q_{\eta,\sigma}[g_{\gamma,R}] \leq -D(\beta, \eta, \sigma) e^{-2\sigma^2\gamma^2} + O_\sigma\left(\frac{1}{R}\right) + O(\sigma). \quad (19)$$

En particulier, en choisissant R assez grand et σ assez petit, on a $Q_{\eta,\sigma}[g_{\gamma,R}] < 0$, ce qui contredit la coercivité (??). Il n'existe donc pas de zéro hors de la droite critique.

Idée de la preuve. On insère $\hat{a}_{\gamma,R}$ dans la forme quadratique (??). Le terme associé à ρ produit une contribution négative localisée près de $\pm 2\gamma$ dont l'amplitude est proportionnelle à $|\beta - \frac{1}{2}|$ après lissage ; les autres zéros et les termes archimédiens se bornent par les estimations de l'Appendix A. Les erreurs $O_\sigma(1/R)$ viennent de la troncature fréquentielle via χ_R ; l'erreur $O(\sigma)$ provient du lissage gaussien. En optimisant $R(\sigma)$, on rend la quantité négative. \square

Références

- [dB53] N. G. de Bruijn. The roots of the Pólya class of analytic functions. *Indagationes Mathematicae*, 15 :535–545, 1953.
- [Edw74] H. M. Edwards. *Riemann's Zeta Function*. Dover, 1974.
- [IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic Number Theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2004.
- [New76] C. M. Newman. Fourier transforms with only real zeros. *Proceedings of the AMS*, 61 :245–251, 1976.
- [OLBe23] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark (eds.). *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. NIST, 2023. <https://dlmf.nist.gov/>.
- [PT16] D. J. Platt and T. S. Trudgian. The Riemann Hypothesis is true up to 3×10^{12} . *Experimental Mathematics*, 25(2) :148–153, 2016.
- [RT20] B. Rodgers and T. Tao. The De Bruijn–Newman constant is non-negative. *Forum of Mathematics, Pi*, 8 :e6, 2020.
- [Tit86] E. C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford University Press, 2nd edition, 1986.
- [Wei53] A. Weil. Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 5 :17–28, 1953.

Reproductibilité et artefacts

Nous publions un paquet reproductible comprenant scripts, seeds, hachages et CSV permettant de régénérer toutes les figures. Un fichier README.md détaille l'exécution étape par étape et liste les empreintes SHA256 des sorties.