LISTA 6

ZAD 4. WYKAŻ, ŻE ILOCZYN DOWOLNYCH KOLEJNYCH K LICZB NATURALNYCH JEST PODZIELNY PRZEZ K!

$n \geq k$

$n, k \in Z$

$k > 0$

kolejne k liczby zapisujemy jako

$$m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)(n-k)(n-k+1)$$

Mamy pokazać że jest podzielne przez k!

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

Widzimy, że ułamek po przemnożeniu przez 1 w postaci $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ przekształca się do

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)!}$$

po zwinięciu $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Wiemy że dwumian Newtona przy spełnionych warunkach, że $n \geq k$, $n,k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 0$ zawsze jest liczbą całkowitą.

$\downarrow$

Weźmy początkowy ułamek, ~~który~~ nie został jeszcze pomnożony przez 1 w formie $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots k}$$

Zauważmy że:
- w liczniki i w mianowniku jest tyle samo liczb
- w liczniku i w mianowniku zapisany iloczyn kolejnych liczb

- w każdych kolejnych dwuch liczbach naturalnych jest liczba podzielna przez 2

- w każdych kolejnych trzech liczbach naturalnych jest liczba podzielna przez 3

itd

Czyli wiemy, że liczba $(n-1)\cdot n$ będzie podzielna przez 2, liczba $n(n-1)(n-2)$ przez 3 i tak dalej.

ZAD 5. WYPROWADŹ ZALEŻNOŚĆ REKURENCYJNĄ DLA LICZBY NIEPORZĄDKÓW:

$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. JAKIE NALEŻY PRZYJĄĆ WARUNKI POCZĄTKOWE DLA TEJ ZALEŻNOŚCI?

Nieporządek - permutacja elementów zbioru, która nie pozostawia żadnego elementu na swoim oryginalnym miejscu.

$A = \{1, 2 \ldots n\}$

$d_0 = 1$
$d_1 = 0$
$d_2 = 1$
$d_3 = 2$
$d_4 = 9$

$$d_n = n!\underbrace{\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)}_{\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}}$$

Zad 4 lista 5

Wyprowadź wzór na d_n (liczbę nieporządków) stosując zasadę włączeń i wyłączeń.

Rozważmy permutacje niebędące nieporządkami. Permutacja nie jest nieporządkiem gdy na jakimś miejscu j ma wartość j. Oznaczę A_j - zbiór permutacji n-elementowych σ t.ż $\sigma(j) = j$. Oznaczę A - zbiór wszystkich n-elementowych permutacji.

$|A| = n!$
$|A_j| = (n-1)!$ ← 1 miejsce ustalone
$|A_j \cap A_n| = (n-2)!$ ← 2 miejsca ustalone

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$
$$= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}0! =$$
$$= n!\left(\frac{(n-1)!}{1!(n-1)!} - \frac{(n-2)!}{2(n-2)!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}\right) = n! \cdot f(x)$$

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |\Omega| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - n! f(x) =$$
$$= n!(1 - f(x)) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$d_n = n(n-1)!\left(\frac{d_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n\cdot(n-1)!}\right) = n\cdot d_{n-1} + (-1)^n$

$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1} = n\cdot d_n + d_n + (-1)^{n+1} =$
$= n\cdot d_n + n d_{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$

ZAD. 1 (-) STOSUJĄC METODĘ PODSTAWIANIA ROZWIĄŻ NASTĘPUJĄCE ZALEŻNOŚCI REKURENCYJNE.

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n>1$ i $t_1 = 3$
(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n>1$ i $h_1 = 1$

A) $t_n = t_{n-1} + 3^n = t_{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = \ldots =$
$= t_1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n =$
$= 3\frac{3^n - 1}{3-1}$

B) $h_n = (-1)^{n+1} n + h_{n-1} = (-1)^{n+1} n + (-1)^n (n-1) + h_{n-2} =$
$= \ldots = (-1)^{n+1} n + (-1)^n (n-1) + (-1)^{n-1}(n-2) + \ldots +$
$+ (-1^3) 2 + 1 =$

$$= \begin{cases} ((n-1) + (n-3) + \ldots + 1) - (n + (n-2) + \ldots + 2) & \text{GDY } n \text{ PARZYSTE} \\ (n + (n-2) + \ldots + 1) - ((n-1) + (n-3) + \ldots + 2) & \text{GDY } n \text{ NIEPARZYSTE} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1+n-1}{2}\cdot\frac{n}{2} - \frac{2+n}{2}\cdot\frac{n}{2} & \text{GDY N PARZYSTE} \\ \frac{1+n}{2}\cdot\frac{n+1}{2} - \frac{2+n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} & \text{GDY N NIEPARZYSTE} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{2}\left(\frac{n-n-2}{2}\right) & \text{GDY N PARZYSTE} \\ \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1-n+1}{2}\right) & \text{GDY N NIEPARZYSTE} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{GDY N PARZYSTE} \\ \frac{n+1}{2} & \text{GDY N NIEPARZYSTE} \end{cases}$$

$= (-1)^{n+1}\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ZAD. 2 ROZWIĄŻ NASTĘPUJĄCE ZALEŻNOŚCI REKURENCYJNE:

(a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|, a_0 = a_1 = 1$

(b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right|, b_0 = 8$

(c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}, c_0 = 0, c_1 = 1$

A) $a_{n+1} = \left|\sqrt{\underbrace{a_n^2}_{\text{zawsze liczba dodatnia}} + \underbrace{a_{n-1}^2}_{\text{zawsze liczba dodatnia}}}\right|, a_0 = a_1 = 1$

możemy więc ściągnąć wart. bezwz. a pierwiastek z liczby ≥ 0 to liczba ≥ 0

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}$$

podnieśmy obustronnie do kwadratu $|^2$

$$\underbrace{a_{n+1}^2} = a_n^2 + a_{n-1}^2$$

podstawmy pod to wyrażenie X_{n+1}

$X_n = a_n^2$

$X_{n-1} = a_{n-1}^2$

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$$

czyli

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$$

ANIHILATOR:

ze wzoru $X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$

$$E^2\langle X_n\rangle = \langle X_{n+2}\rangle = (X_2, X_3, \dots) =$$

$$= (X_1 + X_0, X_2 + X_1, X_3 + X_2, \dots) = \langle X_{n+1}\rangle + \langle X_n\rangle =$$

$$= E\langle X_n\rangle + \langle X_n\rangle = (E+1)\langle X_n\rangle$$

wychodzi na to że

$$E^2\langle X_n\rangle = (E+1)\langle X_n\rangle$$

$$(E^2 - E - 1)\langle X_n\rangle = 0 \quad |:\langle X_n\rangle$$

$$(E^2 - E - 1) = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ $\rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\rightarrow x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

dla $n=0$

$x_0 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1$

$\alpha + \beta = 1$

dla $n=1$

$x_1 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$

$\alpha = 1 - \beta$

$(1-\beta)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\frac{1+\sqrt{5} - \cancel{\beta} - \beta\sqrt{5} + \cancel{\beta} - \beta\sqrt{5}}{2} = 1$

$\frac{1+\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\beta}{2} = 1 \quad | \cdot 2$

$1+\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\beta = 2$

$-1+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\beta \quad | : 2\sqrt{5}$

$\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad | \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$\beta = \frac{-\sqrt{5}+5}{10}$

$\alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{10}{10} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{10-5+\sqrt{5}}{10} =$

$= \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$$x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$x_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_n = \sqrt{x_n}$$

$$a_n = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

B) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2+3}\right|, \; b_0 = 8$

zawsze liczba dodatnia — zawsze liczba dodatnia,

pierwiastek z liczby dodatniej to liczba dodatnia

ściągamy wartość bezwzględną

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n^2+3} \quad |^2$$

$$b_{n+1}^2 = b_n^2 + 3$$

$$b_{n+1}^2 = x_{n+1}$$

$$b_n^2 = x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + 3$$

$$x_0 = 64$$

ANIHILATOR

$(E-1)\langle x_n\rangle = E\langle x_n\rangle - 1\langle x_n\rangle = (64+3, 64+6, \dots) - (64, 64+3, 64+6, \dots) = (3,3,3\dots) = \langle 3\rangle$

jeszcze raz nakładamy $(E-1)$

$(E-1)\langle 3\rangle = (3,3,3\dots) - (3,3,3\dots) = \langle 0\rangle$

więc $(E-1)^2\langle x_n\rangle = \langle 0\rangle$

$E^2 - 2 + 1$

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$x = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{2}{2} = 1$

$$x_n = \alpha\cdot(1)^n + \beta\cdot(1)^n = \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta = 64$$

ALE ŁATWIEJ DA SIĘ TO ZROBIĆ

Scanned with CamScanner

$x_n = b_n^2$

$x_0 = b_0^2 = 8^2 = 64$

$x_1 = b_0^2 + 3 = 64 + 3 = 67$

$x_2 = (b_0^2 + 3) + 3 = (64+3) + 3) = 70$

WZÓR

$$x_n = 64 + 3n \quad |\sqrt{\ }$$

$$b_n = \sqrt{64 + 3n}$$

c) $c_{n+1} = (n+1) \cdot c_n + (n^2 + n) c_{n-1}$ $\quad c_0 = 0$, $c_1 = 1$

$\cancel{c_{n+1} = (n+1) c_n + n(n+1) c_{n-1}}$

$\cancel{c_{n+1} = (n+1)(c_n + n \cdot c_{n-1})}$

$c_{n+1} = (n+1) c_n + (n^2 + n) c_{n-1} \quad | : (n+1)!$

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} \cdot c_n + \frac{n \cdot (n+1)}{(n+1)!} \cdot c_{n-1}$$

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}$$

podstawmy:

$x_n = \frac{c_n}{n!}$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $\quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1$

$\underbrace{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}_{\text{CIĄG FIBBONACIEGO}}$

ANIHILATOR $\to$ 2 wykładu $(E^2 - E - 1)$

$x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ podobny w podpkt. A

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}$$

$\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \leftarrow \beta = -\alpha$

$$\frac{\alpha + \alpha\sqrt{5} - \alpha + \alpha\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\sqrt{5}\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \rightarrow \alpha = -\beta$$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$x_n = \frac{c_n}{n!}$$

$$c_n = x_n \cdot n!$$

$$c_n = n! \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$c_n = n! \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ZAD 8 ZNAJDŹ OGÓLNĄ POSTAĆ ROZWIĄZAŃ NASTĘPUJĄCYCH RÓWNAŃ REKURENCYJNYCH ZA POMOCĄ ANIHILATORÓW I ROZWIĄŻ JEDNO Z RÓWNAŃ DO KOŃCA.

A) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1 \qquad a_0 = a_1 = 0$

$$a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2} + 3^n - 1$$

ANIHILATOR ze wzoru

$$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \langle 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1\rangle =$$

$$= 2\langle a_{n+1}\rangle - \langle a_n\rangle + \langle 3^n - 1\rangle = 2E^1\langle a_n\rangle -$$

$$- \langle a_n\rangle + \langle 3^n - 1\rangle = (2E-1)\langle a_n\rangle + \langle 3^n - 1\rangle$$

$$E^2\langle a_n\rangle = (2E-1)\langle a_n\rangle + \langle 3^n - 1\rangle$$

$$E^2\langle a_n\rangle - (2E-1)\langle a_n\rangle = \langle 3^n - 1\rangle$$

$$(E^2 - 2E + 1)\langle a_n\rangle = \langle 3^n - 1\rangle$$

anihilujemy

$$(E-3)\langle 3^n-1\rangle = \langle 2\rangle$$

$$(E-1)\langle 2\rangle = \langle 0\rangle$$

$$3^{n+1}-1-3\cdot 3^n+3 = -1+3 = 2$$

Podsumowując

$$(E^2-2E+1)(E-3)(E-1)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$(E-1)^3(E-3)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$a_n = \alpha\cdot 1^n + \beta\cdot n\cdot 1^n + \gamma\cdot n^2\cdot 1^n + \delta\cdot 3^n$$

dla $n=0$

$$a_0 = \alpha\cdot 1^0 + \beta\cdot 0\cdot 1^0 + \gamma\cdot 0^2\cdot 1^0 + \delta\cdot 3^0 = \alpha+\delta$$

$$a_0 = \alpha+\delta = 0$$

dla $n=1$

$$a_1 = \alpha\cdot 1^1 + \beta\cdot 1\cdot 1^1 + \gamma\cdot 1^2\cdot 1^1 + \delta\cdot 3^1 = \alpha+\beta+\gamma+3\delta$$

$$a_2 = \alpha+\beta+\gamma+3\delta = 0$$

dla $n=2$

$$a_2 = \alpha\cdot 1^2 + \beta\cdot 2\cdot 1^2 + \gamma\cdot 2^2\cdot 1^2 + \delta\cdot 3^2 = \alpha+2\beta+4\gamma+9\delta$$

$$a_2 = \alpha+2\beta+4\gamma+9\delta = 0$$

dla $n=3$

$$a_3 = \alpha\cdot 1^3 + \beta\cdot 3\cdot 1^3 + \gamma\cdot 3^2\cdot 1^3 + \delta\cdot 3^3 = \alpha+3\beta+9\gamma+27\delta$$

$$a_3 = \alpha+3\beta+9\gamma+27\delta = 2$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \alpha+\beta+\gamma+3\delta = 0 \\ \alpha+2\beta+4\gamma+9\delta = 0 \\ \alpha+3\beta+9\gamma+27\delta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta+\gamma+3\delta-\delta = 0 \\ 2\beta+4\gamma+9\delta-\delta = 0 \\ 3\beta+9\gamma+27\delta-\delta = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -\gamma-2\delta \\ 2\beta = -4\gamma-8\delta \\ 3\beta = -9\gamma-26\delta+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -\gamma-2\delta \\ 2(-\gamma-2\delta) = -4\gamma-8\delta \\ 3(-\gamma-2\delta) = -9\gamma-26\delta+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -\gamma - 2\delta \\ -2\gamma - 4\delta = -4\gamma - 8\delta \\ -3\gamma - 6\delta = -9\gamma - 26\delta + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -\gamma - 2\delta \\ 2\gamma = -4\delta \\ 6\gamma = -20\delta + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -\gamma - 2\delta \\ 2\gamma = -4\delta \\ -12\delta = -20\delta + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -\gamma - 2\delta \\ 2\gamma = -4\delta \\ 8\delta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = 1/4 \\ 2\gamma = -1 \\ \beta = +1/2 - 2\cdot 1/4 \\ \alpha = -1/4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \delta = 1/4 \\ \gamma = -1/2 \\ \beta = 0 \\ \alpha = -1/4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

Auu

$$a_n = -1/4 \cdot 1^n + 0 \cdot n \cdot 1^n + \left(-\frac{1}{2}\right) n^2 \cdot 1^n + 1/4 \cdot 3^n$$

$$a_n = -\frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}\cdot 3^n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}\cdot 3^n$$

B) $a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 4a_n + n \cdot 2^{n+1}$, $a_0 = a_1 = 1$

ANIHILATOR:

$$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \langle 4a_{n+1} - 4a_n + n\cdot 2^{n+1}\rangle =$$

$$= 4\langle a_{n+1}\rangle - 4\langle a_n\rangle + \langle n\cdot 2^{n+1}\rangle$$

$$4E\langle a_n\rangle - 4\langle a_n\rangle + \langle n\cdot 2^{n+1}\rangle = 0$$

$$4E\langle a_n\rangle - 4\langle a_n\rangle + \langle n\cdot 2^{n+1}\rangle = 0$$

$$E^2\langle a_n\rangle = 4E\langle a_n\rangle - 4\langle a_n\rangle + \langle n\cdot 2^{n+1}\rangle = 0$$

$$E^2\langle a_n\rangle - 4E\langle a_n\rangle + 4\langle a_n\rangle = \langle n\cdot 2^{n+1}\rangle$$

$$(E-2)^2\langle a_n\rangle = \langle n\cdot 2^{n+1}\rangle \longrightarrow \text{anihilujemy}$$

Scanned with CamScanner

$$(E-2)\langle n\cdot 2^{n+1}\rangle =$$
$$=\langle (n+1)\cdot 2^{n+2} - n\cdot 2^{n+2}\rangle = \langle 2^{n+2}(n+1-n)\rangle =$$
$$=\langle 2^{n+2}\rangle$$
$$(E-2)\langle 2^{n+2}\rangle =$$
$$=\langle 2^{n+3} - 2\cdot 2^{n+2}\rangle = \langle 0\rangle$$
$$(E-2)^2\langle n\cdot 2^{n-1}\rangle = \langle 0\rangle$$

czyli

$$(E-2)^4\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$a_n = \alpha\cdot 2^n + \beta\cdot n\cdot 2^n + \gamma\cdot n^2\cdot 2^n + \delta\cdot n^3\cdot 2^n$$

c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2\cdot a_{n+1} - a_n \qquad a_0 = a_1 = 1$

$$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+1}} - 2\cdot a_{n+1} - a_n\right\rangle =$$
$$=\left\langle \frac{1}{2^{n+1}}\right\rangle - 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle$$
$$E^2\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+1}}\right\rangle - 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle$$
$$E^2\langle a_n\rangle + 2E\langle a_n\rangle + \langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+1}}\right\rangle$$

anihilujemy

$$\left(E-\frac{1}{2}\right)\left\langle \frac{1}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+1+1}} - \frac{1}{2^{n+1}\cdot 2}\right\rangle = \langle 0\rangle$$

czyli

$$(E^2+2E+1)(E-\tfrac{1}{2})\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$(E+1)^2(E-\tfrac{1}{2})\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$
$$a_n = \alpha\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \beta\cdot n\cdot(-1)^n + \gamma(-1)^n$$

ZAD. 6 ROZWIĄŻ ZALEŻNOŚĆ REKURENCYJNĄ

$a_n^2 = 2\cdot a_{n-1}^2 + 1$ Z WARUNKIEM $a_0 = 2$ I ZAŁOŻENIEM, ŻE $a_n > 0$ DLA KAŻDEGO NATURALNEGO n.

$$a_n^2 = 2 \cdot a_{n-1}^2 + 1 \qquad a_0 = 2$$

$$x_n = a_n^2$$
$$x_{n-1} = a_{n-1}^2$$

$$x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 1 \qquad x_0 = 4$$

$$(E-2)\langle x_n\rangle = \langle x_{n+1} - 2x_n\rangle = \langle x_{n+1}\rangle - \langle 2x_n\rangle$$
$$= \langle 5, 11, 23 \ldots\rangle - \langle 2\cdot 2, 2\cdot 5, 11\cdot 2 \ldots\rangle =$$
$$= \langle 1\rangle$$
$$(E-1)\langle 1\rangle = \langle 0\rangle$$
$$(E-2)(E-1)\langle x_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$x_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 1^n = \alpha \cdot 2^n + \beta$$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \cdot 2^0 + \beta = \alpha + \beta = 4 \longrightarrow \alpha = 4 - \beta \\ x_1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta = 2 \cdot \alpha + \beta = 9 \end{cases}$$

$$(4-\beta)2 + \beta = 9$$
$$8 - 2\beta + \beta = 9$$
$$8 - 9 = \beta$$
$$\beta = -1$$
$$\alpha = 4 - \beta \rightarrow \alpha = 4 + 1 = 5$$

$$x_n = 5 \cdot 2^n - 1$$
$$a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$$

ZAD. 7 ILE JEST WYRAZÓW ZŁOŻONYCH Z n LITER NALEŻĄCYCH DO 25-LITEROWEGO ALFABETU

Scanned with CamScanner

Oznaczmy:

a_n – wyraz złożony z n liter należących do 25-literowego alfabetu, zawierający parzystą liczbę liter "a".

$a_0 = 1$

$a_1 = 24$ ← pozostałe 24 litery alfabetu łacińskiego

2 SPOSOBY UTWORZENIA KOLEJNEGO WYRAZU:

I SPOSÓB

$\underbrace{\_\ \_\ \ldots\ \_}_{\text{ciąg niepoprawny}}\ a$ } ciąg poprawny

$$\underbrace{(25^{n-1}}_{\text{wszystkie możliwe ciągi liter o długości } n-1} - \underbrace{a_{n-1})}_{\text{poprawne wyrazy o długości } n-1} \cdot \underbrace{1}_{\text{na ile sposobów można wybrać ostatnią literę}}$$

"a"

II SPOSÓB

$\underbrace{\_\ \_\ \ldots\ \_}\ \_$

wszystko tylko nie a czyli 24 możliwości

wszystkie możliwe ciągi liter o długości $n-1$, które są poprawne

$$a_{n-1} \cdot 24$$

Wzór na utworzenie wyrazu o długości n zgodnego ze specyfikacją zadania to

$$a_n = (25^{n-1} - a_{n-1}) \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 24 = 25^{n-1} + 23a_{n-1}$$

Scanned with CamScanner

ANIHILATOR

$$E\langle a_n\rangle = \langle 25^n - 23a_n\rangle = \langle 25^n\rangle - \langle 23a_n\rangle$$

$$E\langle a_n\rangle - \langle 23a_n\rangle = \langle 25^n\rangle$$

$$(E-23)\langle a_n\rangle = \langle 25^n\rangle$$

$$(E-25)\langle 25^n\rangle = \langle 25^{n+1} - 25^{n+1}\rangle = \langle 0\rangle$$

$$(E-25)(E-23)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$a_n = \alpha\cdot 23^n + \beta 25^n$$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\cdot 23^0 + \beta\cdot 25^0 = \alpha+\beta = 1 \\ a_1 = \alpha\cdot 23^1 + \beta\cdot 25 = \end{cases}$$

$$\alpha = 1-\beta$$

$$= \alpha 23 + \beta 25 = 24$$

$$(1-\beta)23 + \beta 25 = 24$$

$$23 - 23\beta + 25\beta = 24$$

$$23 + 2\beta = 24$$

$$2\beta = 1$$

$$\beta = 1/2$$

$$\alpha = 1-\beta$$

$$\alpha = 1 - 1/2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot 23^n + \frac{1}{2}\cdot 25^n$$

ZAD 9. NIECH c_n OZNACZA LICZBĘ CIĄGÓW
DŁUGOŚCI n ZŁOŻONYCH Z n CYFR ZE
ZBIORU $\{0,1,2\}$, NIE ZAWIERAJĄCYCH DWÓCH
NASTĘPUJĄCYCH PO SOBIE ZER I DWÓCH
NASTĘPUJĄCYCH PO SOBIE JEDYNEK. WYPROWADŹ
ZALEŻNOŚĆ REKURENCYJNĄ, JAKĄ SPEŁNIAJĄ
LICZBY c_n PRZYJMUJĄC $c_0 = 1$. ROZWĄŻ

OTRZYMANA ZALEŻNOŚĆ REKURENCYJNA

x_n - ciągi poprawne kończące się na 0
y_n - ciągi poprawne kończące się na 1
z_n - ciągi poprawne kończące się na 2

$c_n = x_n + y_n + z_n$

Z definicji mamy:

$x_n = y_{n-1} + z_{n-1}$ (nie może być 2 zer po sobie)
$y_n = x_{n-1} + z_{n-1}$ (nie może być 2 jedynek po sobie)
$z_n = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}$

$z_n = c_{n-1}$ → zależność

$c_n = x_n + y_n + z_n = \underbrace{y_{n-1} + z_{n-1} + x_{n-1}}_{z_n} + z_{n-1} + z_n =$
$= 2z_n + z_{n-1} =$
$= 2c_{n-1} + c_{n-2}$

ANIHILATOR:
$(E^2 - 2E - 1) = (E - (1-\sqrt{2}))(E - (1+\sqrt{2}))$
$a_n = \alpha(1-\sqrt{2})^n + \beta(1+\sqrt{2})^n$

$x_1 = y_1 = z_1 = 1$ → $c_1 = 3$
$x_2 = y_2 = 2$ $z_2 = 3$ → $c_2 = 7$

Znając dwa początkowe (c_1, c_2) wyliczamy α, β.

$\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ $\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Zatem: $a_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n$

ZAD. 10 NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA ROZDAĆ n RÓŻNYCH NAGRÓD WŚRÓD CZTERECH OSÓB A, B, C, D TAK, ABY:

(a) A DOSTAŁA PRZYNAJMNIEJ JEDNĄ NAGRODĘ

Dajemy nagrodę na wszystkie sposoby
↳ 4^n

Odejmujemy przypadki, w których wszyscy

dostali nagrodę oprócz osoby A.
↳ 3^n odp. $4^n - 3^n$

(b) A lub B NIE DOSTAŁY NIC

2^n (n nagród tylko dla C i D)

3^n (gdy B nic nie dostanie)

$3^n + 3^n - 2^n = 2 \cdot 3^n - 2^n$ (zasada włączeń i wyłączeń)

(c) ZARÓWNO A JAK I B DOSTAŁA PRZYNAJMNIEJ JEDNĄ NAGRODĘ

$3^n \to$ A nic nie dostanie

$3^n \to$ B nic nie dostanie

$2^n \to$ A i B nic nie dostanie

$4^n - 3^n - 3^n + 2^n = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$

(d) PRZYNAJMNIEJ JEDNA SPOŚRÓD A, B, C NIC NIE DOSTANIE

$2^n \cdot 2^n \cdot 2^n \to$ A i B, B i C, C i A nic nie dostały

$1 \to$ D dostało wszystko (A, B, C nie dostały)

$3^n \cdot 3^n \cdot 3^n \to$ A, B, C (lub lub) nie dostaną nic

$3^n + 3^n + 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1$ (zasada włączeń i wyłączeń)

(e) KAŻDA Z 4 OSÓB COŚ DOSTAŁA

$4^n - (4 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n + 4)$ — A i B i C itd. nic nie ma

wszystkie

A lub B lub C lub D nie dostał

A i B, B i C ... nie ma