LISTA 8

ZAD1 ZNAJDŹ NATURALNĄ INTERPOLACYJNĄ FUNKCJĘ SKLEJANĄ TRZECIEGO STOPNIA DLA DANYCH

Robię tak jak na wykładzie.

A)

x_k	0	2	4
y_k	-8	8	-8

$$s(x) = \begin{cases} S_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in [0;2] \\ S_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & x \in [2;4] \end{cases}$$

$$S_1(0) = D = -8$$

$$S_1(2) = A\cdot 8 + B\cdot 4 + C\cdot 2 + D = 8$$

$S_2(2) = E\cdot 8 + F\cdot 4 + G\cdot 2 + H = 8$

3° $S_2(4) = E\cdot 64 + F\cdot 16 + G\cdot 4 + H = -8$

$$S'(x) = \begin{cases} S_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ S_2'(x) = 3Ex^2 + 2Fx + G \end{cases}$$

$S_1'(2) = 3A4 + 2B2 + C = 12A + 4B + C$

$S_2'(2) = 3E4 + 2F2 + G = 12E + 4F + G$

$S_1'(2) = S_2'(2)$ $\downarrow$ więc

4° $12A + 4B + C = 12E + 4F + G$

$$S''(x) = \begin{cases} S_1''(x) = 6Ax + 2B \\ S_2''(x) = 6Ex + 2F \end{cases}$$

$S_1''(2) = 6A\cdot 2 + 2B = 12A + 2B$

$S_2''(2) = 6E\cdot 2 + 2F = 12E + 2F$

$S_1''(2) = S_2''(2)$

5° $12A + 2B = 12E + 2F$

6° Załadomy, że druga pochodna na krańcach przedziałów jest równa zero

$S_1''(0) = 0 \rightarrow -2B = 0 \rightarrow B = 0$

$S_2''(4) = 0 \rightarrow 24E + 2F = 0 \rightarrow 12E = -F$

$$\begin{cases} D = -8 \\ 8A + 4B + 2C + D = 8 \\ 8E + 4F + 2G + H = 8 \\ 64E + 16F + 4G + H = -8 \\ 12A + 4B + C = 12E + 4F + G \\ 12A + 2B = 12E + 2F \\ B = 0 \\ 12E = F \end{cases} \longrightarrow \cancel{\begin{cases} D = -8 \\ 12E = F \\ B = 0 \\ 8A + 2C - 8 = 8 \\ 8E + 48E + 2G + H = 8 \\ 64E + 192E + 4G + H = \\ 12A + C = F + 4F + G \\ 12A = 12E - 24E \end{cases}}$$

Podstawiam $B=0$ i $D=-8$

$$\begin{cases} 8A+2C+(-8)=8 \\ 8E+4F+2G+H=-8 \\ 64E+16F+4G+H=-8 \\ 12A+C=12E+4F+G \\ 12A=12E+2F \\ 12E=-F \end{cases}$$

$56E+12F+2G+8=-8$

$56E+12F+2G=-16$

$12A=F$ i $A=-E$

$$\begin{cases} C=-4A+8 \\ 56E+12F+2G=-16 \\ 12A+C=12E+4F+G \\ 12E=-F \\ 12A=F \\ A=-E \end{cases}$$

$12A-4A+8=-F+4F+G$

$8A+8=3F+G$

$8A+8=36A+G$

$28A=8-G$

$G=8-28A$

$$\begin{cases} C=-4A+8 \\ 56E+12F+2G=-16 \\ G=8-28A \\ 12E=-F \\ 12A=F \\ A=-E \end{cases}$$

$56E+144A+16-56A=-16$

$56E+88A=-32$

$56E-88E=-32$

$-32E=-32$

$\boxed{E=1}$

$\boxed{A=-E=-1}$

$\boxed{F=-12E=-12}$

$\boxed{C=-4A+8=4+8=12}$

$\boxed{G=8-28A=8+28=36}$

$H=8-2G-4F-8E$

$H=8-2\cdot 36-4(-12)-8\cdot 1=8-72+48-8$

$\boxed{H=-24}$

$A=-1$

$B=0$

$C=12$

$D=-8$

$E=1$

$F=-12$

$G=36$

$H=-24$

B)

x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_k	4	2	-6	-24

Wzór z wykładu:

$$S(x) = h_k^{-1}\Big[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 +$$
$$+ \big(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\big)(x_k - x) +$$
$$+ \big(f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2\big)(x - x_{k-1})\Big]$$

y_{k-1}

y_k

$h_k \Rightarrow$ odległość między dwoma kolejnymi węzłami

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

$$M_k = S''(x_k)$$

nie mamy, więc musimy obliczyć momenty M_1, M_2 (wiem, że $M_0 = M_3 = 0$)

$M_0 = M_n$

wzór:

$$\lambda_k \cdot M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6 \cdot f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

czyli

$$\begin{cases} \lambda_1 M_0 + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = 6 \cdot f[x_0, x_1, x_2] \\ \lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = 6 \cdot f[x_1, x_2, x_3] \end{cases}$$

POLICZMY

k	x_k	y_k	$f[x_0,x_1]$, $f[x_1,x_2]$, $f[x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2]$, $f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	-1	4			
1	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{2-4}{-\frac{1}{2}+1} = -2\cdot 2 = -4$		
2	$\frac{1}{2}$	-6	$\frac{-6-2}{1} = \frac{-8}{1} = -8$	$\frac{-8+4}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-4}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$	
3	1	-24	$\frac{-24+6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-18}{\frac{1}{2}} = -36$	$\frac{-36+8}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-28}{\frac{3}{2}} = -\frac{56}{3}$	$\frac{-\frac{48}{3}}{2} = -8$

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \qquad \lambda_1 = \frac{1/2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$h_1 = x_1 - x_0 = -\tfrac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$h_2 = x_2 - x_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

$$h_3 = x_3 - x_2 = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_2 + h_3} = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot M_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) M_2 = 6 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \\ \frac{2}{3} \cdot M_1 + 2 M_2 = \cancel{6}^{\,2} \left(-\frac{56}{\cancel{3}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2M_1 + \frac{2}{3} M_2 = -16 & \mid \cdot 3 \\ \frac{2}{3} M_1 + 2 M_2 = -112 & \mid \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6M_1 + 2M_2 = -48 \\ 2M_1 + 6M_2 = -336 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2M_2 &= -48 - 6M_1 \\ 6M_2 &= -144 - 18 M_1 \end{aligned}$$

$$2M_1 - 144 - 18 M_1 = -336$$

$$-16 M_1 = -192$$

$$M_1 = 12$$

$$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{12}^{\,4} + 2M_2 = -112$$

$$8 + 2M_2 = -112$$

$$2M_2 = -120$$

$$M_2 = -60$$

$$S_1(x) = h_1^{-1} \left[\frac{1}{6} M_0 (x_1 - x)^3 + \frac{1}{6} M_1 (x - x_0)^3 + \left(y_0 - \frac{1}{6} M_0 h_1^2\right)(x_1 - x) + \left(y_1 - \frac{1}{6} M_1 h_1^2\right)(x - x_0) \right] =$$

$x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$

$$= 2\left[\frac{1}{6} 12 \cdot (x+1)^3 + 4\left(-\frac{1}{2} - x\right) + \left(2 - \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot \frac{1}{4}\right)(x+1)\right] = 2\left[2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 2 - 4x + \left(2 - \frac{1}{2}\right)(x+1)\right] = 2\left[2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 - 2 - 4x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right] = 4x^3 + 12x^2 + 7x + 3$$

$x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ $S_2(x) = h_2^{-1}\left[\frac{1}{6}M_1(x_2-x)^3 + \frac{1}{6}M_2(x-x_1)^3 +\right.$

$+ (f(x_1) - \frac{1}{6}M_1 h_2^2)(x_2 - x) + (f(x_2) - \frac{1}{6}M_2 h_2^2)(x-x_1)$

$= [\frac{1}{6}\cdot 12(\frac{1}{2}-x)^3 + \frac{1}{6}\cdot(-60)(x+\frac{1}{2})^3 + (2 - \frac{1}{6}\cdot 12 \cdot 1)(\frac{1}{2}-x) +$

$+ (-6 - \frac{1}{6}\cdot(-60)\cdot 1)(x+\frac{1}{2}) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{4} +$

$+ (-10)(x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{1}{8}) + 4(x+\frac{1}{2}) =$

$= -2x^3 + 3x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{4} - 10x^3 - 15x^2 - \frac{15x}{2} - \frac{10}{8} + 4x + 2 =$

$= -12x^3 - 12x^2 - 5x + 1$

$x \in [\frac{1}{2}; 1]$ $S_3(x) = h_3^{-1}\left[\frac{1}{6}M_2(x_3-x)^3 + \frac{1}{6}M_3(x-x_2)^3 +\right.$

$\left.+ (y_2 - \frac{1}{6}M_2 h_3^2)(x_3 - x) + (y_3 - \frac{1}{6}M_3 h_3^2)(x - x_2)\right] =$

$= 2[\frac{1}{6}\cdot(-60)(1-x)^3 + (-6 - \frac{1}{6}\cdot(-60)\cdot\frac{1}{4})(1-x)$

$= 2[(-10)(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1) + (-3\frac{1}{2})(1-x) + (-24)(x - \frac{1}{2})$

$= 2(10x^3 - 30x^2 + 30 - 10 - 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}x - 24x + 12 =$

$= 20x^3 - 60x^2 + 60x - 20 - 7 + 7x - 48x + 24 =$

$= 20x^3 - 60x^2 + 19x - 3 =$

ZAD 2 CZY FUNKCJA

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 18x + 13 & \text{dla } -2 \le x \le -1, \\ -5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla } -1 \le x \le 0, \\ 5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla } 0 \le x \le 1, \\ -x^3 + 6x^2 - 18x + 13 & \text{dla } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

JEST NATURALNA INTERPOLACYJNA FUNKCJA SKLEJANA TRZECIEGO STOPNIA?

1) $f(x_k) = y_k$

2) ciągłość $f(x)$:

Scanned with CamScanner

$\lim_{x\to -1^-} (x^3+6x^2+18x+13) = -1+6-18+13=0$
$\lim_{x\to -1^+} (-5x^3-12x^2+7) = 5-12+7=0$

$\lim_{x\to 0^-} (-5x^3-12x^2+7) = 7$
$\lim_{x\to 0^+} (5x^3-12x^2+7) = 7$

$\lim_{x\to 1^-} (5x^3-12x^2+7) = 5-12+7=0$
$\lim_{x\to 1^+} (-x^3+6x^2-18x+13) = -1+6-18+13=0$

3) ciągłość $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+12x+18 & x\in[-2;-1] \\ -15x^2-24x & x\in[-1;0] \\ 15x^2-24x & x\in[0;1] \\ -3x^2+12x-18 & x\in[1;2] \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^-} (3x^2+12x+18) = 3-12+18=9$
$\lim_{x\to -1^+} (-15x^2-24x) = -15+24=9$

$\lim_{x\to 0^-} (-15x^2-24x) = 0$
$\lim_{x\to 0^+} (15x^2-24x) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} (15x^2-24x) = 15-24=-9$
$\lim_{x\to 1^+} (-3x^2+12x-18) = -3+12-18=-9$

4) ciągłość $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x+12 & x\in[-2;-1] \\ -30x-24 & x\in[-1;0] \\ 30x-24 & x\in[0;1] \\ -6x+12 & x\in[1;2] \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^-} (6x+12) = -6+12 = 6$$
$$\lim_{x\to -1^+} (-30x-24) = 30-24 = 6$$

$$\lim_{x\to 0^-} (-30x-24) = -24$$
$$\lim_{x\to 0^+} (30x-24) = -24$$

6) $f(x) \in \Pi_3$

$$\lim_{x\to 1^-} (30x-24) = 6$$
$$\lim_{x\to 1^+} (-6x+12) = 6$$

5) $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$

$f''(-2) = -6\cdot(-2)+12 = 0$

$f''(2) = -6\cdot 2+12 = 0$

Czyli $f(x)$ jest NIFS3.

ZAD 3 CZY ISTNIEJĄ TAKIE STAŁE a, b, c, d ŻE FUNKCJA

$$f(x) = \begin{cases} 2020x & \text{dla } -2 \le x \le -1, \\ ax^3+bx^2+cx+d & \text{dla } -1 \le x \le 1, \\ -2020x & \text{dla } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

JEST NATURALNĄ INTERPOLACYJNĄ FUNKCJĄ SKLEJANĄ TRZECIEGO STOPNIA?

1) ciągłość $f(x)$

$$\lim_{x\to -1^-} (2020x) = -2020$$
$$\lim_{x\to -1^+} (ax^3+bx^2+cx+d) = -a+b-c+d$$

$$\underline{-a+b-c+d = -2020}$$

$$\lim_{x\to 1^-} (ax^3+bx^2+cx+d) = a+b+c+d$$
$$\lim_{x\to 1^+} (-2020x) = -2020$$

$$\underline{a+b+c+d = -2020}$$

2) ciągłość $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases}2020 & x\in[-2;-1]\\ 3ax^2+2bx+c & x\in[-1;1]\\ -2020 & x\in[1;2]\end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^-} 2020 = 2020$

$\lim_{x\to -1^+} (3ax^2+2bx+c) = 3a-2b+c$

$\longrightarrow$ $\underline{2020 = 3a-2b+c}$

$\lim_{x\to 1^-} (3ax^2+2bx+c) = 3a+2b+c$

$\lim_{x\to 1^+} -2020$

$\longrightarrow$ $\underline{3a+2b+c=-2020}$

3) ciągłość $f''(x)$

$$f''(x)=\begin{cases}0 & x\in[-2;-1]\\ 6ax+2b & x\in[-1;1]\\ 0 & x\in[1;2]\end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^-} 0$

$\lim_{x\to -1^+} 6ax+2b = -6a+2b$

$\underline{-6a+2b=0}$

$\lim_{x\to 1^-} 6ax+2b = 6a+2b$

$\lim_{x\to 1^+} 0$

$\longrightarrow$ $\underline{6a+2b=0}$

$$\begin{cases}-a+b-c+d=-2020\\ a+b+c+d=-2020\\ 3a-2b+c=2020\\ 3a+2b+c=-2020\\ -6a+2b=0\\ 6a+2b=0\end{cases}$$

$\left.\begin{matrix}-a+b-c+d=-2020\\ a+b+c+d=-2020\end{matrix}\right\}\ b+d=-4040$

$\left.\begin{matrix}3a-2b+c=2020\\ 3a+2b+c=-2020\end{matrix}\right\}\ 4b=-4040,\quad b=-1010$

$\left.\begin{matrix}-6a+2b=0\\ 6a+2b=0\end{matrix}\right\}\ 4b=0,\quad b=0$

SPRZECZNOŚĆ

ZAD. 4 NIECH S BĘDZIE NATURALNĄ FUNKCJĄ SKLEJANĄ TRZECIEGO STOPNIA INTERPOLUJĄCĄ FUNKCJĘ f W WĘZŁACH $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$. JAK WIEMY, MOMENTY $M_k := S''(x_k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ SPEŁNIAJĄ UKŁAD RÓWNAŃ

(1) $\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k=1,2,\ldots,n-1)$

GDZIE $M_0 = M_n = 0$ ORAZ

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k = \frac{h_k}{h_k+h_{k+1}}$$

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

SFORMUŁUJ I UZASADNIJ OSZCZĘDNY ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA UKŁADU (1) JAKI JEST KOSZT JEGO REALIZACJI.

Rozpiszmy dla różnych k:

$k=1$

$$d_1 = 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2$$

$$d_2 = \lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3$$

$$d_3 = \lambda_3 M_2 + 2\cdot M_3 + (1-\lambda_3)M_4$$

$\vdots$

$$d_{n-1} = \lambda_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1}$$

WYCIĄGNIJMY M_1

$$M_1 = \frac{d_1-(1-\lambda_1)M_2}{2} = \underbrace{\frac{d_1}{2} + \frac{\lambda_1-1}{2}\cdot M_2}_{a_1 + b_1\cdot M_2}$$

ROZPISZMY d_2 ALE podstawmy

$$d_2 = \lambda_2(a_1 + b_1\cdot M_2) + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3$$

$$d_2 = \lambda_2\cdot a_1 + \lambda_2 b_1\cdot M_2 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3$$

WYCIĄGNIJMY M_2

$$(\lambda_2 b_1 + 2)M_2 = d_2 - \lambda_2 a_1 + (\lambda_2-1)\cdot M_3$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{d_2-\lambda_2 a_1}{(\lambda_2 b_1+2)} + \frac{\lambda_2-1}{\lambda_2 b_1+2}\cdot M_3}_{a_2 + b_2\cdot M_3}$$

$b_0 = 0$
$a_0 = 0$

ZAUWAŻMY:

$$a_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_1 - \lambda_1 \cdot a_0}{\lambda_1 b_0 + 2}$$

$$b_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{2} = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 \cdot b_0 + 2}$$

$$a_2 = \frac{d_2 - \lambda_2 \cdot a_1}{\lambda_2 b_1 + 2}$$

$$b_2 = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 b_1 + 2}$$

~~TEN WZÓR MOŻEMY ZAOBSERWOWAĆ NA OSTATNIM PRZYKŁADZIE~~

$$d_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot M_{n-2} + 2M_{n-1}$$

WYCIĄGNIJMY M_{n-2}

$$M_{n-2} = \frac{d_{n-1} - 2M_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = \underbrace{\frac{d_{n-1}}{\lambda_{n-1}} - \frac{2}{\lambda_{n-1}} M_{n-1}}$$

$$M_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2} \cdot M_{n-1}$$

$$d_{n-1} = \lambda_{n-1}(a_{n-2} + b_{n-2} \cdot M_{n-1}) + 2M_{n-1}$$

$$d_{n-1} = \lambda_{n-1} a_{n-2} + \lambda_{n-1} b_{n-2} M_{n-1} + 2M_{n-1}$$

WZÓR na M_{n-1}

$$(\lambda_{n-1} b_{n-2} + 2) M_{n-1} = d_{n-1} - \lambda_{n-1} a_{n-2}$$

$$M_{n-1} = \frac{d_{n-1} - \lambda_{n-1} a_{n-2}}{\lambda_{n-1} b_{n-2} + 2}$$

ALGORYTM

$a_0 = 0$

$b_0 = 0$

$$M_k = \frac{d_k - \lambda_k \cdot a_{k-1}}{\lambda_k b_{k-1} + 2} + \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k b_{k-1} + 2} M_{k+1}$$

$p_k = \lambda_k b_{k-1} + 2$ $\quad p_k \quad a_k \quad b_k$

$a_k = (d_k - \lambda a_{k-1}) / p_k$

$b_k = (\lambda_k - 1) / p_k$

dla $k = 1, 2 \dots n$

bo według tego wzoru druga część po "+" będzie równo 0 bo $M_n = 0$

$M_{n-1} = a_{n-1}$

$M_k = a_k + b_k \cdot M_{k+1}$ $\quad (k = n-2, n-3 \dots 1)$

Moment wyliczamy w czasie $O(n)$.

POKAŻMY, ŻE TO DZIAŁA (dowód indukcyjny):

- dla $k = 1$

$$d_1 = \lambda_1 \overset{0}{M_0} + 2M_1 + (1-\lambda_1) M_2$$

$$2M_1 = d_1 - (1-\lambda_1) M_2$$

$$M_1 = \frac{d_1}{2} - \frac{(1-\lambda_1)}{2} \cdot M_2$$

pod 2 podstawmy: $p_1 = 2$

$$M_1 = \frac{d_1}{p_1} - \frac{(1-\lambda_1)}{p_1} M_2 = a_1 + b_1 M_2$$

- załóżmy, że dla k zachodzi, pokażmy że dla $k+1$ też

(B) $d_{k+1} = \lambda_{k+1} M_k + 2M_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2}$

$M_k = a_k + b_k \cdot M_{k+1} \quad | \cdot \lambda_{k+1}$

(A) $M_k \cdot \lambda_{k+1} = a_k \cdot \lambda_{k+1} + b_k \cdot \lambda_{k+1} \cdot M_{k+1}$

A-B=

$$M_k \cdot \lambda_{k+1} = a_k \cdot \lambda_{k+1} + b_k \cdot \lambda_{k+1} M_{k+1}$$
$$-\ \lambda_{k+1} M_k + 2M_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2} = d_{k+1}$$

$$\cancel{M_k \cdot \lambda_{k+1}} - \cancel{\lambda_{k+1} M_k} - 2M_{k+1} - (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2} =$$
$$= a_k \cdot \lambda_{k+1} + b_k \cdot \lambda_{k+1} M_{k+1} - d_{k+1}$$

$$-2M_{k+1} - b_k \cdot \lambda_{k+1} \cdot M_{k+1} - (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2} =$$
$$= a_k \cdot \lambda_{k+1} - d_{k+1}$$

$$(2 + b_k \cdot \lambda_{k+1}) M_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) M_{k+2} = d_{k+1} - a_k \cdot \lambda_{k+1}$$

WYZNACZMY M_{k+1}

$$M_{k+1} = \frac{d_{k+1} - a_k \cdot \lambda_{k+1}}{b_k \cdot \lambda_{k+1} + 2} + \underbrace{\frac{(\lambda_{k+1} - 1)}{b_k \cdot \lambda_{k+1} + 2}}_{\text{oznaczmy jako } p_{k+1}} \cdot M_{k+2}$$

$$M_{k+1} = \frac{d_{k+1} - a_k \cdot \lambda_{k+1}}{p_{k+1}} + \frac{\lambda_{k+1} - 1}{p_{k+1}} \cdot M_{k+2}$$

$$M_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} \cdot M_{k+2}$$

ZAD 5 NIECH BĘDZIE $X = [x_0, x_1, \ldots x_n]$ $(x_0 < x_1 < \ldots x_n)$

Do każdego przedziału $[x_i, x_{i+1}]$ dodajemy dwa punkty z. W ten sposób stosując interpolację Newtona uzyskamy dokładne przybliżenie $S_n(x)$ na tym przedziale (bo $S_n(x)$ jest wielomianem stopnia ≤ 3). Obliczamy wartości $S_n(z_i)$ obliczając wektor z przy pomocy procedury NSpline3(x, y, z).

Wiemy, że wielomiany interpolacyjne dobrze przybliżają $S_n(x)$, zatem użyjmy ich do obliczenia ekstremów S_n. Obliczając pochodne wielomianów interpolacyjnego otrzymamy wielomiany stopnia ≤ 2 o 2 tokach. Łatwo możemy wyznaczyć miejsca zerowe.

Pochodne możemy wyznaczyć stosując algorytm przekształcający wielomiany z postaci Newtona do postaci potęgowej. wtedy

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$