LISTA 13

ZAD. 3 JAK NALEŻY DOBRAĆ n, ABY STOSUJĄC ZŁOŻONY WZÓR SIMPSONA S_n OBLICZYĆ PRZYBLIŻONĄ WARTOŚĆ CAŁKI

$$\int_{-\pi/5}^{\pi/2} \cos(3x - \pi/3)\,dx$$

Z BŁĘDEM WZGLĘDNYM $\leq 10^{-8}$?

Chodzi o to aby przybliżyć całkę

$$I = \int_{-\pi/5}^{\pi/2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) dx$$

, a (błąd względny) $\to |E_n| \leq 10^{-8}$.

BŁĄD ZŁOŻONY WZORU SIMPSONA

$$E_n = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\eta)$$

pochodna 4 stopnia w punkcie pośrednim eta

1) Musimy coś podstawić pod n
2) oszacować pochodną

$$f^{4}(x) = \cos(3x - \pi/3) \cdot 3^4$$

pochodna funkcji wewnętrznej

$$f'(x) = -\sin$$
$$f''(x) = -\cos$$
$$f'''(x) = \sin$$
$$f^{IV}(x) = \cos$$

$$\left[-\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad |E_n| = \frac{(b-a)^5 \cdot 3^4}{180 n^4}$$

$$b - a = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$$

$$\frac{\frac{7^5}{10^5}\pi^5 \cdot 3^4}{180 \cdot n^4} \leq 10^{-8} \quad \Big/ \cdot n^4$$

n na pewno nieujemne

$$\frac{\frac{7^5}{10^5}\pi^5\cdot 3^4}{180\cdot 10^{-8}} \le m^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{\frac{7^5}{10^5}\pi^5\cdot 3^4}{180\cdot 10^{-8}}} \le m \qquad 220 \le n$$

ZAD. 7 WYKAŻ, ŻE CIĄG ELEMENTÓW DOWOLNEJ KOLUMNY TABLICY ROMBERGA, UTWORZONEJ DLA FUNKCJI $f\in C[a,b]$, JEST ZBIEŻNY DO CAŁKI $\int_a^b f(x)dx$.

$$\left\{\begin{array}{l} T_{0,k} = T_{2^{k+1}} \\ T_{i,j} = \dfrac{4^i\, T_{i-1,j-1} - T_{i-1,j-2}}{4^i-1} \end{array}\right\} \text{ WZÓR Z WYKŁADU}$$

Podstawa ind. (z zad. 1) $\lim_{m\to\infty} T_{0,m} = I = \int_a^b f(x)dx$

Krok ind.

Załóżmy, że dla $m-1$ metoda ta jest zbieżna do $\int_a^b f(x)dx$. Pokażmy, że dla $m+1$ też

$$\lim_{m\to\infty} T_{m,k} = \frac{4^i \lim_{k\to\infty} T_{i-1,j-1} - \lim_{k\to\infty} T_{i-1,j-2}}{4^i-1} = \frac{4^i I - I}{4^i-1} = I$$

ZAD 1 WYKAŻ, ŻE DLA DOWOLNEJ FUNKCJI F CIĄGŁEJ W PRZEDZIALE $[a,b]$ CIĄG ZŁOŻONYCH WZORÓW TRAPEZÓW $\{T_n(f)\}$ JEST ZBIEŻNY DO WARTOŚCI CAŁKI $\int_a^b f(x)dx$, gdy $n\to\infty$.

$$T_n(f) = \underbrace{\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))}_{\text{wzór trapezów na pierwszym podprzedziale}} + \underbrace{\frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2))}_{\text{wzór trap. na drugim podprzedziale}} + \ldots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n))$$

Weźmy wyrażenie na podprzedziale $[x_{i-1}, x_i]$ $\quad \frac{h}{2}(f_{i-1}+f_i)$

Oblicamy pole trapezu na tym podprzedziale

$$h m_i \le \frac{h}{2}(f_{i-1}+f_i) \le h\cdot M_i$$

OZNACZENIA

$m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$M_i = \max_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$

funkcja jest ciągła więc na domkniętym przedziale osiąga swoje ekstrema

$$\sum_{i=1}^{n} h \cdot m_i \leq T_n(f) \leq \sum_{i=1}^{n} h M_i$$

zsumowanie tego daje nam złożony wzór trapezów

Jeśli $n \to \infty$ to

sumy dolne ← → sumy górne

Funkcja jest całkowalna jeśli długość podprzedziału maleje do zera to ciąg sum dolnych ma granicę równą granicy ciągów sum górnych.

Czyli jeśli $n \to \infty$ to suma dolna i górna dążą do $\int_a^b f(x)$.

Zatem z twierdzenia o 3 ciągach $T_n(f)$ również dąży do $\int_a^b f(x)$

złożony wzór trapezów

ZAD 2. O FUNKCJI CIĄGŁEJ F WIADOMO, ŻE $\max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < 2$. ZAŁÓŻMY, ŻE DLA DOWOLNEGO $x \in \mathbb{R}$ POTRAFIMY Z DUŻĄ DOKŁADNOŚCIĄ OBLICZAĆ $f(x)$. OPRACUJ ALGORYTM WYZNACZANIA PRZYBLIŻONEJ WARTOŚCI CAŁKI $\int_a^b f(x)dx$ Z BŁĘDEM BEZWZGLĘDNYM NIEPRZEKRACZAJĄCYM ε, GDZIE $a, b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$ ORAZ $\varepsilon > 0$ SĄ DANE

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < 2 \qquad \left| \int_a^b f(x)dx - Q_n(f) \right| = |E| \leq \varepsilon$$

złożony wzór trapezów $\qquad$ n - liczba podprzedziałów

$$E_n(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi) = -\frac{(b-a)^2}{12n^2}(b-a)f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$$

$$\left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)\right| < \frac{(b-a)^3}{6n^2} < \varepsilon$$

$$n^2 > \frac{(b-a)^3}{6\varepsilon}$$

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{6\varepsilon}}$$

- $m = \left\lceil \sqrt[3]{\frac{(b-a)^3}{6\varepsilon}} + 1 \right\rceil$
- $h = \frac{b-a}{m}$, $x_0 = a$
- policz $x_i = x_0 + ih$ dla $i = 0, 1 \ldots n$
- policz $T_m = \sum_{i=0}^{m}{}'' f(x_i)$

ZAD 4 SPRAWDŹ, ŻE CIĄG ZŁOŻONYCH WZORÓW TRAPEZÓW SPEŁNIA ZWIĄZEK

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

GDZIE

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right) \qquad h_n = \frac{b-a}{n}$$

KORZYSTAJĄC Z TEJ OBSERWACJI SFORMUŁOWAĆ OSZCZĘDNY ALGORYTM KONSTRUKCJI TABLICY ROMBERGA.

$$T_{2n}(f) = h_{2n} \sum_{i=0}^{2n}{}'' f(x_i) = h_{2n} \sum_{j=0}^{n}{}'' f(x_{2j}) + h_{2n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) =$$

$$h_{2n} = \frac{h_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} h_n \sum_{j=0}^{n}{}'' f(x_{2j}) + \frac{1}{2} h_n \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[T_n(f) + h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right]$$

OSZCZĘDNY ALGORYTM ROMBERGA:

Liczymy wartość $T_{00}, T_{01}, T_{02}, \ldots$ ze wzoru z treści zadania i zapisujemy w tablicy

$T_{00} = T_0$, $T_{01} = T_2$, $T_{02} = T_4$

Następnie liczymy kolejne wartości T_{1k} ($k = n-1, \ldots 0$) $T_{2k} = (k' = n-2, \ldots 0)$ zaczynając od dołu i nadpisując sąsiednie wartości w tablicy. Dzięki temu algorytm jest oszczędny pamięciowo

$$\begin{array}{llll}
T_1 = T_{00} & & & \\
T_2 = T_{01} & T_{1,0} & & \\
T_4 = T_{02} & T_{1,1} & T_{2,0} & \\
T_8 = T_{03} & T_{1,2} & T_{2,1} & T_{3,0}
\end{array}$$

ZAD 6 ROZWAŻMY ZADANIE OBLICZANIA PRZYBLIŻONEJ WARTOŚCI CAŁKI $I := \int_{-1}^{1} f(x)dx$ (f - funkcja ciągła) METODĄ ROMBERGA. W ILU, I W KTÓRYCH

PUNKTACH PRZEDZIAŁU $[-1,4]$ WYSTARCZY WYZNACZYĆ WARTOŚĆ FUNKCJI f, ABY OBLICZYĆ PRZYBLIŻENIE $T_{11,0}$ CAŁKI I?

$$T_{11,0} = T_{2^{11}}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^{11}} f(x_i)$$

Aby obliczyć $T_{11,0}$ wystarczy policzyć wartość f w $2^{11}+1 = 2048+1 = 2049$ punktach

$$x_i = -1 + ih = -1 + i \cdot \frac{b-a}{2^{11}} = -1 + i\frac{4+1}{2^{11}} = -1 + i\frac{5}{2048}$$

$(i = 0, \dots 2048)$

ZAD 8 DOBIERZ WĘZŁY x_0, x_1, x_2 ORAZ WSPÓŁCZYNNIKI A_0, A_1, A_2 KWADRATURY

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

W TAKI SPOSÓB ABY RÓWNOŚĆ

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = Q_2(f)$$

ZACHODZIŁA DLA WSZYSTKICH WIELOMIANÓW STOPNIA ≤ 5.

ZMIANA PRZEDZIAŁU CAŁKOWANIA

$x \in [-3,2]$

$x+3 \in [0,5]$

$\frac{2}{5}(x+3) \in [0,2]$

$\frac{2}{5}x + \frac{6}{5} \in [0,2]$

$t = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$

$x = \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}$

$dx = \frac{5}{2}$

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{5}{2}t - \frac{1}{2}\right)dt = \underbrace{\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt}_{\text{KWADRATURA GAUSSA-LEGENDRE'A}}, \text{ gdzie}$$

$$g(t) = f\left(\frac{5t+(-1)}{2}\right)$$

Chcemy, aby równość zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 5, tzn. aby rząd $Q_n(f) = 6$.

Czyli $t_0, \dots t_n$ – m. zer. wielomian P_{n+1}

oraz $A_0, \dots A_n$ – $\int_{-1}^{1} \lambda_k(t)\,dt$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \\ P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2} \end{cases}$$

$$P_2(x) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} x \cdot x - \frac{2-1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3} x \cdot P_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x) = \frac{5}{3}x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}x = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x = \frac{5}{2}x^3 - \frac{9}{6}x = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t = \frac{1}{2}t(5t^2 - 3) = 0$$

$$t_0 = 0 \qquad t_1 = -\sqrt{\tfrac{3}{5}} \qquad t_2 = \sqrt{\tfrac{3}{5}}$$

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}dt = \int_{-1}^{1} \frac{(t+\sqrt{\frac{3}{5}})(t-\sqrt{\frac{3}{5}})}{(0+\sqrt{\frac{3}{5}})(0-\sqrt{\frac{3}{5}})}dt =$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{5}}\int_{-1}^{1}\left(t^2 - t\sqrt{\tfrac{3}{5}} + t\sqrt{\tfrac{3}{5}} - \tfrac{3}{5}\right)dt = -\frac{5}{3}\int_{-1}^{1}\left(t^2-\tfrac{3}{5}\right)dt = -\frac{5}{3}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{5}t\right]\Big|_{-1}^{1} = -\frac{5}{3}\left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{8}{9}$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}dt = \int_{-1}^{1}\frac{(t-0)\left(t-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}-0\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}dt = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} t^2 - t\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,dt =$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2\sqrt{3/5}}{2}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}dt = \int_{-1}^{1}\frac{(t-0)\left(t+\sqrt{3/5}\right)}{\left(\sqrt{3/5}-0\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}dt = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} t^2 + t\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,dt =$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2\sqrt{3/5}}{2}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = A_0 g(t_0) + A_1 g(t_1) + A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2) = \qquad g(t) = f\left(\frac{5t-1}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) =$$

$$= \frac{8}{9}f\Big(\underbrace{\frac{5\cdot 0-1}{2}}_{-\frac{1}{2}}\Big) + \frac{5}{9}f\Big(\underbrace{\frac{5\cdot\left(-\sqrt{3/5}\right)-1}{2}}_{-\sqrt{15}-1}\Big) + \frac{5}{9}f\Big(\underbrace{\frac{5\sqrt{3/5}-1}{2}}_{\sqrt{15}-1}\Big) =$$

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \underline{\frac{5}{2}\left(\frac{8}{9}f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}+1}{2}\right) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right)\right)}$$

Scanned with CamScanner