LICZBY ZESPOLONE

POSTAĆ KARTEZJAŃSKA / ALGEBRAICZNA $z = x + iy$
wektor

POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\varphi = x/|z|$
$\sin\varphi = y/|z|$

POSTAĆ WYKŁADNICZA $z = |z|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$ $r \geq 0$

WZÓR EULERA: $\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = e^{i\varphi}$

$z = r\cdot e^{i\varphi}$

$\bar{z} = r\cdot e^{-i\varphi}$

$|z| = r$

część urojona $Im(z)$ jednostka urojona

$z = a + bi$ $Re(z)$

część rzeczywista

ĆWIARTKI

$\pi < \alpha$ $\pi + \alpha$

	I	II	III	IV
cos	+	−	−	+
sin	+	+	−	−

$Im\, z = y$
$Re\, z = x$

$z = x + iy$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\bar{z} = x - iy$

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$\sqrt{\text{PIERWIASTKI}}$

POTĘGI $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z^n = |z|^n(\cos n\cdot\varphi + i\cdot\sin n\cdot\varphi)$

$z = x + iy$

$z = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\cdot0\cdot\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\cdot0\cdot\pi}{n}\right)$

$w_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\cdot1\cdot\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\cdot1\cdot\pi}{n}\right)$ zamiast tego można $w_k = w_{k-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

CO TRZEBA UMIEĆ?

TYPY:

1) $-6+6i$
2) $\sqrt[2]{-3-4i}$ → 10^2
3) $\sqrt[4]{1+i}$
4) $(2+i\sqrt{12})^5$

+ zwykłe działania

ZWYKŁE DZIAŁANIA

1) $(3-3i)(2+8i)=6+24i-6i-24i^2=30+18i$

2) $\dfrac{20+9i}{6-i}=\dfrac{(20+9i)}{(6-i)}\cdot\dfrac{(6+i)}{(6+i)}=\dfrac{120+20i+54i+9i^2}{36-i^2}$

$=\dfrac{111+74i}{37}=3+2i$

3) $(1+2i)^2+(3-2i)^2=1+4i+4i^2+9-12i+4i^2=$

$=10-8-8i=2-8i$

4) $(7+6i)-(12-9i)=7+6i-12+9i=-5+15i$

1) $-6+6i$

$z=6\sqrt{2}\left(-\dfrac{6}{6\sqrt{2}}+\dfrac{6}{6\sqrt{2}}\cdot i\right)=$

$=6\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)=$

$=6\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\sin\dfrac{3\pi}{4}\cdot i\right)$

$\cos\pi$

$\pi-\alpha_0 \quad \alpha_0=\dfrac{\pi}{4}$

$|z|=\sqrt{72}$

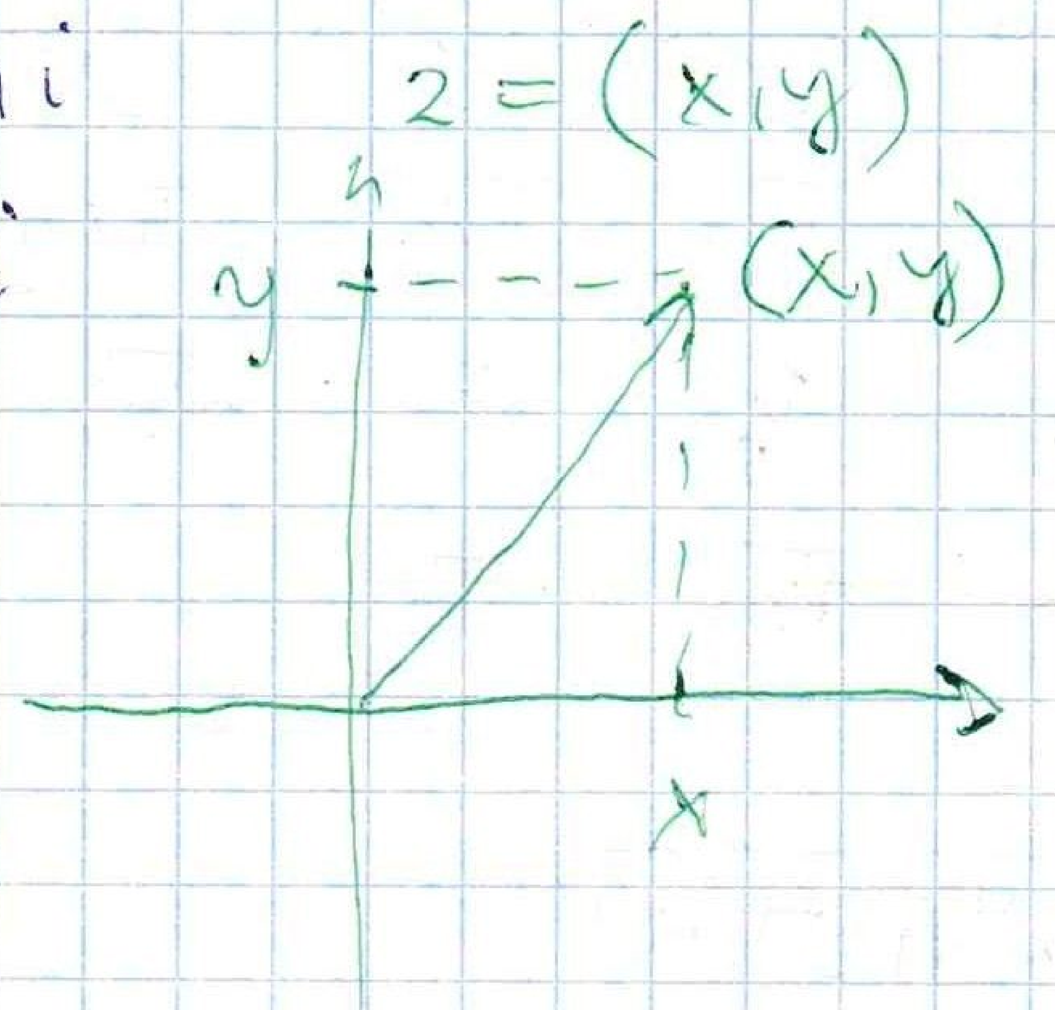
$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$z=x+iy$

2) $\sqrt{-7+24i}=x+yi \quad |()^2$

$x^2+2xy\cdot i+y^2i^2=-7+24i$

$x^2+2xyi-y^2=-7+24i$



$$\begin{cases} x^2-y^2=-7 \\ 2xy=24 \\ x^2+y^2=\sqrt{49+576}=25 \end{cases}$$

$x^2-y^2+x^2+y^2=25-7$

$2x^2=18$

$x^2=9$

$x=3$, $y=4$ $\qquad$ $x=-3$, $y=-4$

$3+4i$ $\qquad$ $-3-4i$

2*) $\sqrt{8i}=\sqrt{0+8i}=x+y\cdot i \quad |()^2$

$x^2+2xy\cdot i+y^2\cdot i^2=8i$

$x^2+2xyi-y^2=8i$

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=8 \\ x^2+y^2=\sqrt{64}=8 \end{cases}$$

$x^2-y^2+x^2+y^2=0+8$

$2x^2=8$

$x^2=4$

$x=-2$, $y=-2$ $\quad \vee \quad$ $x=2$, $y=2$

$-2-2i$ $\qquad$ $2+2i$

2*) $\sqrt[6]{64} = x + y \cdot i$

$z = 64 = 64(\cos 0 + i \cdot \sin 0)$

$64 = 2^6$

1 • $\sqrt[6]{64} = 2(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2(1+0) = 2$

2 • $\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) =$ ćw. II

$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 + \sqrt{3} i$

3 • $\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{6}\right) = 2\left(\cos \pi - \frac{\pi}{3} + i \sin \pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -1 + \sqrt{3} i$ ćw. II $\alpha_0 = 0$

4 • $\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{6\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{6\pi}{6}\right) = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) =$

$= 2(-1 + 0 \cdot i) = -2$

5 • $\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{8\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(\cos \pi + \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -1 - \sqrt{3} i$

ćw. III $\alpha_0 = \pi/3$ ćw. IV

6 • $\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{10\pi}{6}\right) = 2\left(\cos \pi + \frac{2\pi}{3} + \sin \pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

$2\pi - \pi/3$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) = 1 - \sqrt{3} i$

3) $\sqrt[4]{1+i} =$

PIERWIASTKOWE:
KROK 1) $z = x + iy$
KROK 2) $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
KROK 3) $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

$z = \sqrt{2}$

$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}$

$w_0 = 2^{1/8}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \cdot \sin\frac{\pi}{16}\right)$

$w_1 = 2^{1/8}\left(\cos\frac{8\pi}{16} + i \cdot \sin\frac{8\pi}{16}\right)$

$w_2 = 2^{1/8}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i \cdot \sin\frac{17\pi}{16}\right)$

$w_3 = 2^{1/8}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i \cdot \sin\frac{25\pi}{16}\right)$

4) $(1+\sqrt{3} i)^{12}$

POTĘGOWANIE do 2 łatwo np.
$(1-\sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} i + 3i^2 = -2 - 2\sqrt{3} i$

$|z| = \sqrt{4} = 2$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ ćw. I, $\varphi = \alpha_0 = \frac{\pi}{3}$

$(1+\sqrt{3} i)^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(12 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(12 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2^{12}(\cos 4\pi + i \cdot \sin 4\pi) = 2^{12}(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2^{12}(1 + i \cdot 0) =$

$= 2^{12}$

5) PRZEDSTAW W POSTACI TRYGONOMETRYCZNEJ

$z = -\sqrt{3} - i$ $\quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ znak dod. $\quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}$ znak ujem. $\Big\}$ IV $\downarrow$ $\varphi = 2\pi - \alpha_0$ $\quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \sin\frac{11\pi}{6}\cdot i\right)$

ćw. IV $2\pi - \alpha_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

3*) $\sqrt[4]{-i}$ $\quad x + yi = 0 - 1i$ $\quad$ ćw IV

$|z| = 1$ $\quad z = 1\left(\cos\frac{0}{1} + \sin\frac{-1}{1}\right) = \cos 0 - \sin 1 \cdot i =$

$= \cos \pi - \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin 2\pi - \frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{4} + \sin\frac{\frac{3}{2}\pi}{4}\cdot i\right) = \cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\cdot i$

$z_2 = 1\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + \frac{4\pi}{2}}{4} + \sin\frac{\frac{7\pi}{2}}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8} i$

$z_3 = \cos\frac{\frac{3}{2}\pi + \frac{8}{2}\pi}{4} + \sin\frac{\frac{11\pi}{2}}{4} = \cos\frac{11}{8}\pi + \sin\frac{11\pi}{8}\cdot i$

$z_4 = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + \frac{12\pi}{2}}{4} + \sin\frac{\frac{15}{2}\pi}{4} = \cos\frac{15}{8}\pi + \sin\frac{15}{8}\pi\cdot i$

3*) $\sqrt[3]{2-2i}$

$(2-2i) = \sqrt{8}\left(\frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{8}} i\right) = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{8} = \sqrt{2}^3$ $\quad w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{15\pi}{12}\right)$

$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{23}{12}\pi\right)$

CO ROBIĆ GDY:

1) $\frac{4-3i}{4+3i} = x + yi$

przez sprzężenie

$\frac{(4-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$\vdots$

$4 - 3i = (x + yi)(4 + 3i)$

$4 - 3i = 4x + 3xi + 4yi + 3yi^2$

$4 - 3i = 4x - 3y + 3xi + 4yi$

$\begin{cases} 4 = 4x - 3y \\ -3 = 3x + 4y \end{cases}$

2) $z = \sqrt[3]{-8}$ STOSOWANIE = Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone 3 stopnia liczby -8.

3*) $\sqrt[2]{3-4i} = x + yi \quad | ()^2$

$3-4i = (x+yi)^2$

$3-4i = x^2 + 2xyi + y^2 \cdot i^2$

$$\begin{cases} 3 = x^2 - y^2 \\ -4 = 2yx \\ x^2+y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases}$$

$x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 3+5$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

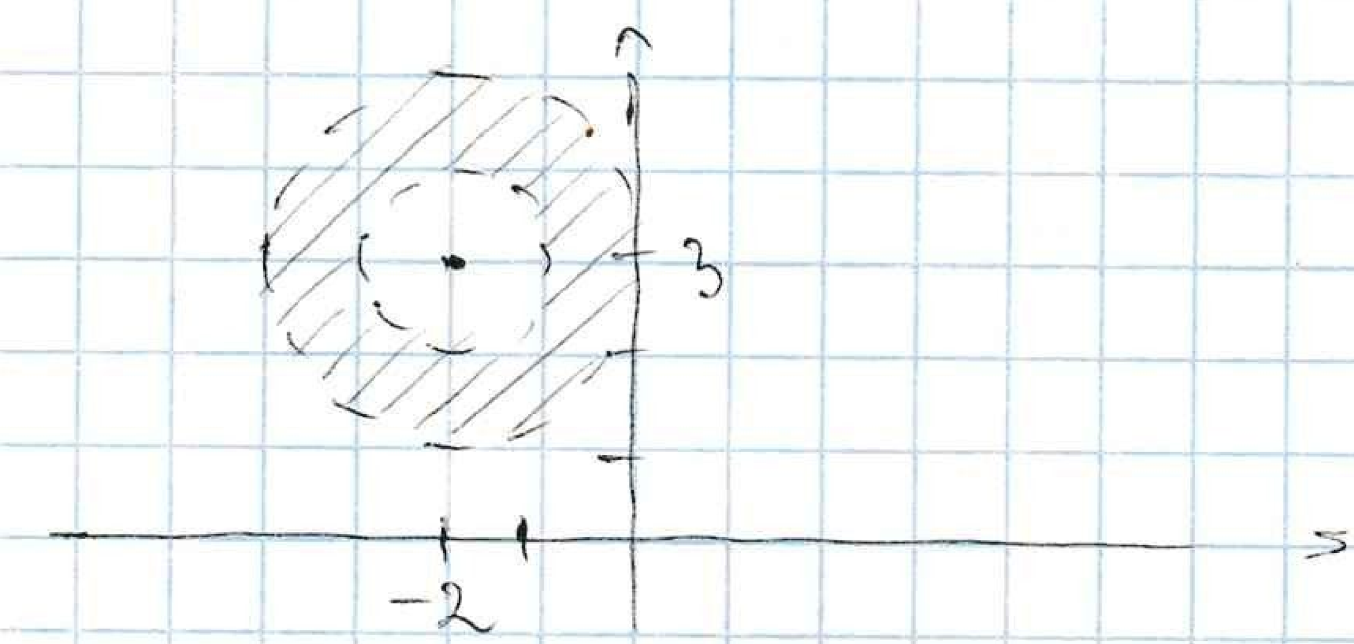
$x = 2$, $y = -1$ $\qquad$ $x = -2$, $y = 1$

LICZBY ZESPOLONE NA PŁASZCZYŹNIE

$1 \leq |z+2-3i| \leq 2 \qquad |z-(-2+3i)|$

$r \leq |z-z_0| \leq R \qquad z_0 = -2+3i$

$(-2;3)$



PIERDOŁY

1) KRESY

Korzystając z def. znajdź kres dolny i górny odcinka $(1;2)$

$\sup A = 2 \rightarrow$
- $\forall x \in A \quad x \leq S$
- $\forall u < S \quad \exists x \in A \quad x > u$

$\inf A = 1 \rightarrow$
- $\forall x \in A \quad x \geq k$
- $\forall l > k \quad \exists x \in A \quad x < l$

Jeżeli zbiór A nie jest ograniczony:

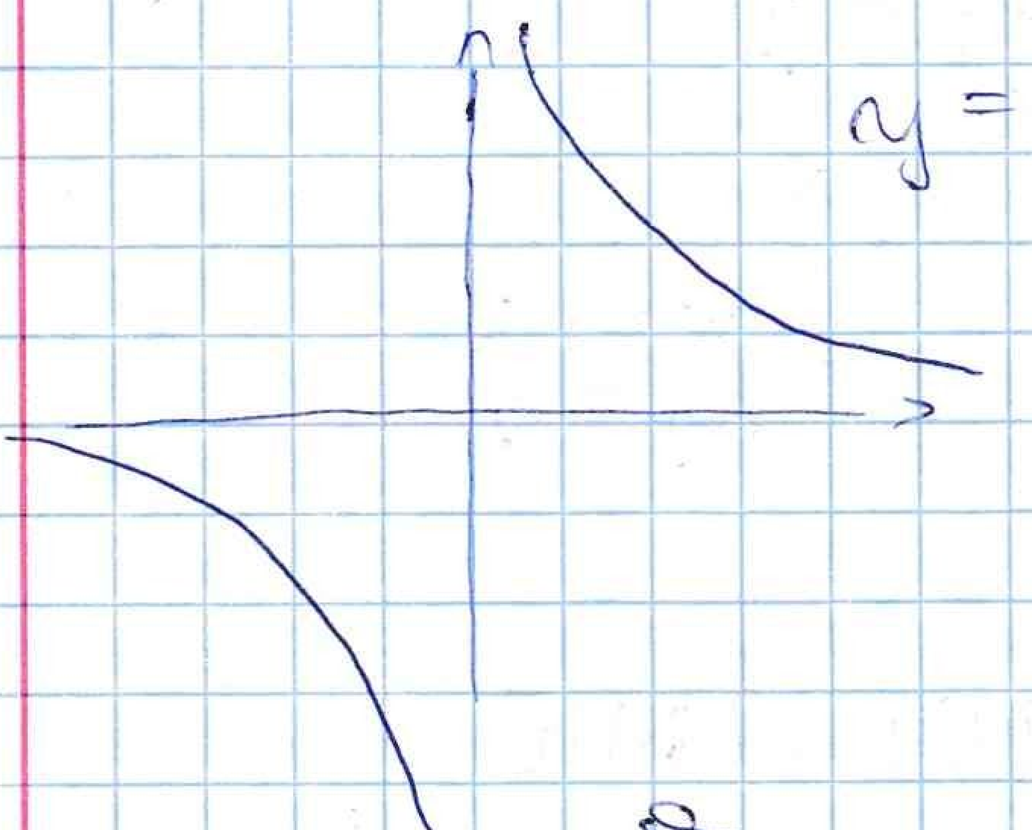
$\sup A = +\infty$

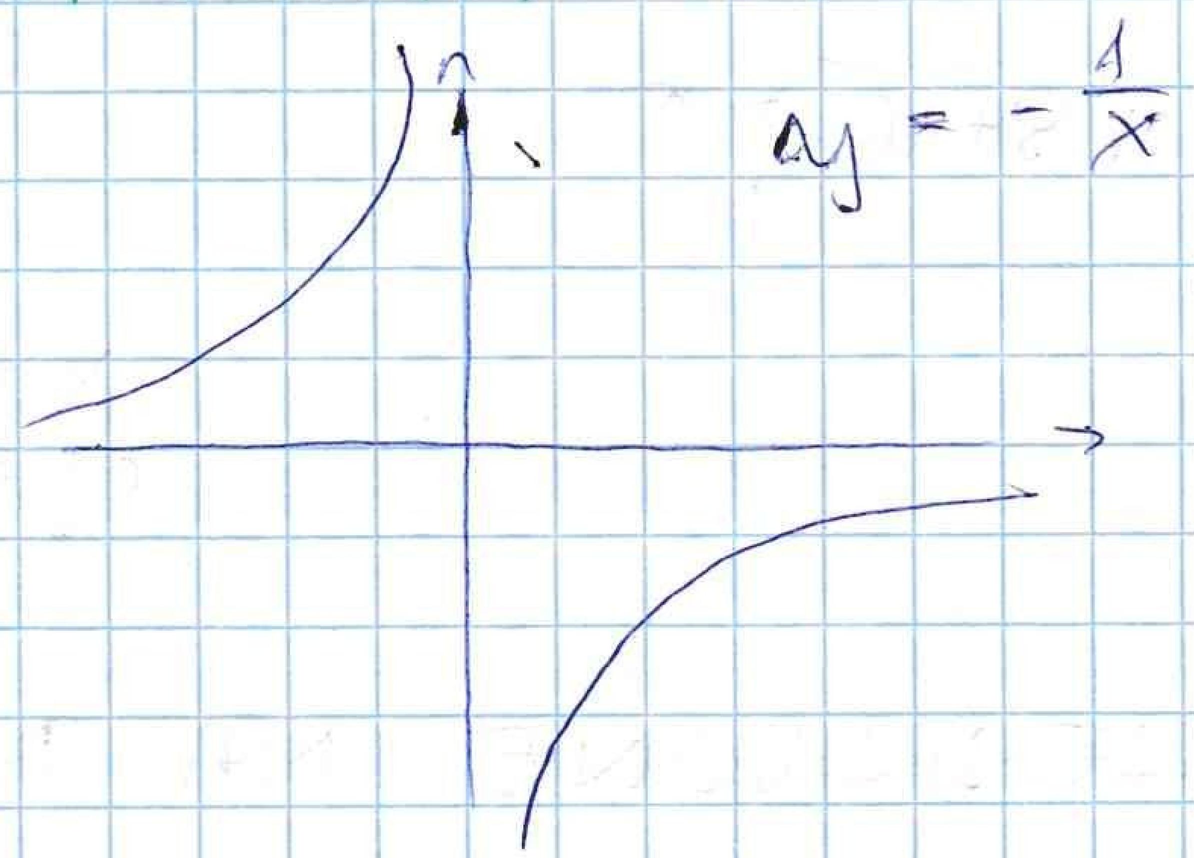
$\inf A = -\infty$

2) DWUMIAN

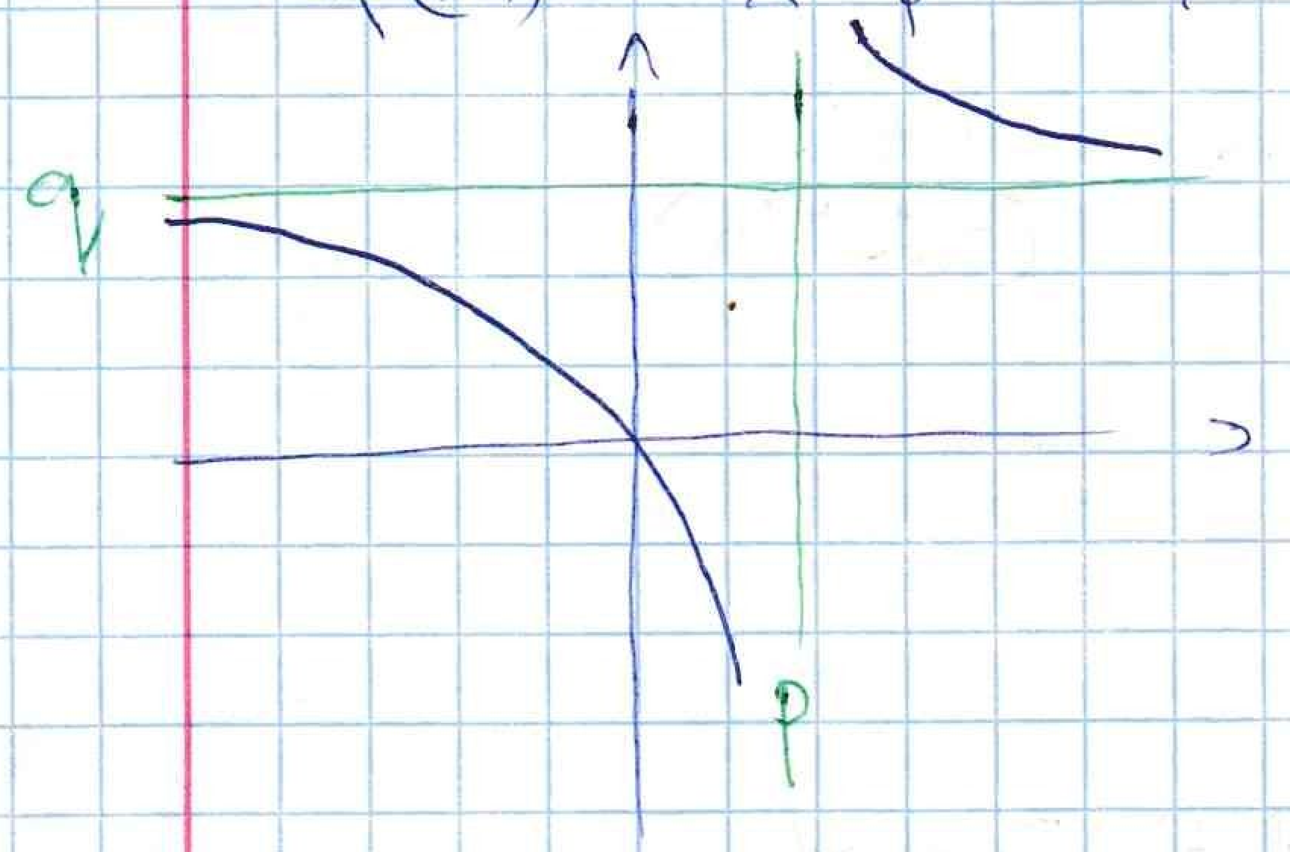
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3) FUN. HOMOGRAFICZNA





$$f(x) = \frac{a}{x-p} + q$$



4) DEF. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do g jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon$$

1. Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ $\quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} g$
2. Przykład $\frac{1}{n}$

$$|a_n - g| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$n > 1/\varepsilon$$

wystarczy więc

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

np. zad.

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2-1}$$

$$\left|\frac{n^2+2}{2n^2-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n^2+4-2n^2+1}{2(2n^2-1)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{5}{2(2n^2-1)} < \varepsilon$$

$n \geq 1 \qquad n > 5/2\varepsilon$

$$a_n = \frac{3n^2-2n^2-7n+5}{4n^3+n-6}$$

$\lim a_n \to 3/4$

$$\left|\frac{3n^2-2n^2-7n+5}{4n^3+n-6} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{-8n^2-31n+38}{4(4n^3+n-6)}\right| < \varepsilon$$

Jak bez uczenia?
największa wartość 38
ilość składników 3
największa potęga n^2

$$\frac{38\cdot 3 n^2}{16n^3} < \varepsilon \qquad \frac{10}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{10}{\varepsilon}$$

$$\approx \frac{160n^2}{16n^3} \leq \varepsilon \qquad n_0 = \left[\frac{10}{\varepsilon}\right] + 1$$

SZEREGI

ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU Z DEF. (suma szeregu)
nieformalnie szereg = suma

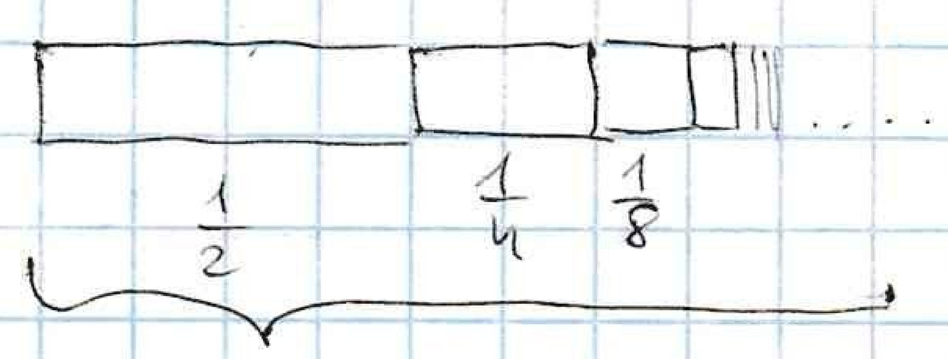
$1+1+1+1$ szereg 4 wyrazowy $= \sum_{n=1}^{4} 1$

$1+1+1+1+\ldots$ szereg nieskończony $= \sum_{n=1}^{\infty} 1$

RODZAJE SZEREGÓW:

$\sum_{n=1}^{\infty} n$ $\quad 1+2+3+4+5+6+7+\ldots$ szereg rozbieżny

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ szereg zbieżny – sumuje się do skończonej wartości



nieprzekroczy 1

• WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI SZEREGU

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $\quad$ – $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$ $\quad$ Jeżeli ↓ to szereg może być zbieżny

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ale szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ $\quad = 1 \,|\, 1\frac{1}{2} \,|\, 1\frac{5}{6} \,|\, 2 \,|\, 2\frac{1}{6} \ldots +\infty$

Suma rozbiega w nieskończoność.

OBLICZANIE SUMY SZEREGÓW:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{1(1+1)}}_{S_1} + \frac{1}{2(2+1)}}_{S_2} + \frac{1}{3(3+1)}}_{S_3} + \ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+$$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

1) ROZPISAĆ
2) S_1, S_2, S_3
3) S_n
4) GRANICA

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$? $\quad$ PROTIP: rozłożyć ułamek na ułamki proste

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \quad | \cdot n(n+1)$ $\qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$1 = A(n+1) + Bn$

$1 = An + A + Bn$

$\begin{cases} 0 = A+B \\ A = 1 \Rightarrow B = -1 \end{cases}$

↓

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \right) = 1$$

ZBADAJ ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU Z DEF.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2 \cdot 4}$$
$$S_2 = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6}$$
$$S_3 = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8}$$
$$S_n = \frac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+2)}$$
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+2)} \right)$$

$$\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{A}{2n} + \frac{B}{2n+2} \quad \Big| \cdot 2n(2n+2)$$

$$1 = A(2n+2) + B(2n)$$
$$1 = A2n + A2 + B2n$$

$$\begin{cases} A2 + B2 = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+2} = \underbrace{\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4}}_{\text{bez sensu}}$$

look

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{6} + \ldots + \frac{\frac{1}{2}}{2n} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+2} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+2} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} \right) = \frac{1}{4}$$

szereg jest zbieżny

ZNAJDŹ SUMĘ SZEREGU

$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$

$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \Big| (n)(n+1)(n+2)$

$1 = A(n+1)(n+2) + B(n+2)n + C(n+1)\cdot n$

$1 = A(n^2+3n+2) + Bn^2 + 2Bn + Cn^2 + Cn$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

$1 = An^2 + 3An + 2A + Bn^2 + 2Bn + Cn^2 + Cn$

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$ $\quad A=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $B=-1$

skracanie OSP

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{-1}{2} + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{3}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4}\right) + \dots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right)\right)$

P S O

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

zad. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{6^n} + \frac{4^n}{6^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

suma $= \frac{a_1}{1-q}$

$a_1 = \frac{1}{3} \quad q = \frac{1}{3}$

suma $= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

suma $= \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$

suma $= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1} = 2$

KRYTERIUM D'ALAMBERTA I CAUCHY'EGO

- D'ALAMBERTA -

- szereg jest zbieżny, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

- szereg jest rozbieżny, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

UWAGA:

1° kryteria dla szeregów o wyrazach nieujemnych

2° w przypadku gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nie rozstrzyga o zbieżności szeregu

ZAD. D'ALAMBERTA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} =$$

$$= \frac{n+1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2}$$

$\to \frac{1}{2}$ $\quad \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n}$

NA MOCY KRYTERIUM D'ALAMBERTA SZEREG JEST ZBIEŻNY

ZAD.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^3} = \frac{(n+2)^3 \cdot n!}{n! \cdot n\,(n+1)^3} = \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}{n \cdot n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{n} = 0$$

NA MOCY KRYTERIUM D'ALAMBERTA SZEREG JEST ZBIEŻNY

- CAUCHY -

- szereg jest zbieżny gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
- szereg jest rozbieżny gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$

UWAGA:

1° tylko dla szeregu o wyrazach nieujemnych

2° Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nie rozstrzyga o zbieżności szeregu.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}$$ ZAD.

NA MOCY KRYT. CAUCHY'EGO SZEREG JEST ZBIEŻNY

ZAD.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{5n-1}\right)^{3n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n-1}\right)^{3n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n}{5n-1}\right)^{3n-1}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n}{5n-1}\right)^{3-\frac{1}{n}}\right] = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

$\frac{1}{n} \to 0$

NA MOCY KRYTERIUM CAUCHE'GO SZEREG JEST ZBIEŻNY

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i inny szereg $\sum b_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych wtedy:

ZBIEŻNY: Jeżeli $a_n \leq b_n$ od pewnego n (dla $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$) i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, wtedy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

ROZBIEŻNOŚĆ: Jeżeli $a_n \geq b_n$ od pewnego n (dla $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$) i szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny, wtedy szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

logiczne. Jeżeli od dołu będzie go ograniczał rozbieżny to rozbieżny, jeżeli od góry zbieżny to zbieżny

SZEREG DIRICHLETA

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{zbieżny } \alpha > 1 \\ \text{rozbieżny } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$\leq$ $\geq$

SZEREG HARMONICZNY: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots$ jest rozbieżny.

1. Zdecyduj co wykażesz
2. ciąg $\leq / \geq$
3. Znajdujesz ciąg b_n

ZAD.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$ z Dirichleta ograniczony, że rozbieżny.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\text{rozbieżny}}$$

wiem, że rozbieżny z DIRICHLETA

ODP. Z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^{1/2}}$ na mocy kryterium porównawczego wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

ZAD.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$$ zbieżny

$$\frac{1}{n\cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{1} = \frac{1}{2}$$

NA MOCY KRYT. D'ALAMBERTA SZEREG $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ JEST ZBIEŻNY.

ODP. NA MOCY KRYT. PORÓWNAWCZEGO ZE ZBIEŻNOŚCI SZEREGU $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ WYNIKA ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$.

ZAD.

$$\frac{n+3}{(n+4)(n+1)} \to \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$ rozbieżny

$$\frac{n+3}{(n+4)(n+1)} \geq \frac{n}{(n+n)(n+n)} = \frac{n}{2n\cdot 2n} = \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$

z dirichleta rozbieżny $\alpha = 1$

NA MOCY KRYT. PORÓWNAWCZEGO Z ROZBIEŻNOŚCI SZEREGU WYNIKA ROZBIEŻNOŚĆ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+4)(n+1)}$.

ZAD.

$$\frac{1}{n^2-2n+2} \qquad \frac{1}{n^2}$$ zbieżny

$$\frac{1}{n^2-2n+2} \leq \frac{1}{(n-1)^2+1} \leq \frac{1}{(n-1)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

szereg dirichleta

ZE ZBIEŻNOŚCI SZEREGU $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ WYNIKA NA MOCY KRYTERIUM PORÓWNAWCZEGO ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+2}$

ZAD.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} = \frac{1}{n}$$ rozbieżny

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}\cdot n}$$ ← rozbieżny z dirichleta

Z ROZBIEŻNOŚCI SZEREGU $\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{6n^3}}$ WYNIKA NA MOCY KRYTERIUM PORÓWNAWCZEGO ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n}}$

ZAD.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}} \qquad \frac{1}{(n^{3/2})^{1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$$ rozbieżny

$$\frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+n}}} = \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{n\cdot\sqrt{2}\sqrt{n}}} = \frac{1}{2^{1/4}\cdot\sqrt{n\cdot n^{1/2}}} = \frac{1}{2^{1/4}\cdot n^{3/4}}$$

$\sqrt{n^{3/2}}$ z dirichleta rozbieżny

Z ROZBIEŻNOŚCI SZEREGU $\sum \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{2n}}}$ WYNIKA NA MOCY KRYTERIUM PORÓWNAWCZEGO ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU $\sum \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}$

SZEREGI NAPRZEMIENNE

gdy jego wyrazy są naprzemiennie dod. i ujem.

KRYTERIUM LEIBNIZA

szereg naprzemienny jest zbieżny gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

ZAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

szereg Dirichleta zbieżny

ODP. SZEREG $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ JEST ZBIEŻNY (bezwzględnie)

ZAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{200}}{2^n}$$

sprawdź czy jest zbieżny bezwzględnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{200}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} 1^{n-1} \cdot \frac{n^{200}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{200}}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{200}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{200}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{200}}{2 \cdot n^{200}} = \frac{1}{2}$$

NA MOCY KRYTERIUM D'ALAMBERTA SZEREG $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{200}}{2^n}$ JEST ZBIEŻNY

ODP. SZEREG $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{200}}{2^n}$ JEST ZBIEŻNY BEZWZGLĘDNIE.

LEIBNITZ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-3} = 0$$

$$\frac{1}{4\cdot 1-3} \geq \frac{1}{4\cdot 2-3} \geq \frac{1}{4\cdot 3-3} \geq \frac{1}{4\cdot 4-3} \geq \dots ?$$

$$1 \geq \frac{1}{5} \geq \frac{1}{9} \geq \frac{1}{13}$$

SZEREGI ZBIEŻNIE ABSOLUTNIE

Jeżeli szereg $\Sigma |a_n|$ jest zbieżny to szereg Σa_n jest zbieżny absolutnie.

SZEREGI POTĘGOWE

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Szereg potęgowy jest rozbieżny poza przedziałem $\langle -R; R\rangle$

Szereg potęgowy może (ale nie musi) być zbieżny dla $x=R$ i $x=-R$

1° Liczymy R (promień zbieżności) ze wzoru

$$R = \left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]}\right] \text{ lub } R = \left[\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{a_n}\right]}\right]$$

2° Liczymy zbieżność szeregu w punktach $x=R$ i $x=-R$ (przechodzące na szeregi liczbowe)

ZAD. Oblicz obszar zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \cdot x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{8^{n+1}}{8^n}\right| = 8 \qquad R=\frac{1}{8}$$

szereg jest zbieżny dla $x\in\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$

dla $x=\frac{1}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 8^n\left(\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 8^n\cdot\frac{1}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

szereg rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu)

dla $x=-\frac{1}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n\left(-\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 8^n\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

szereg rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu)

ODP. Obszar zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^n$ to $\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$

ZAD. Oblicz obszar zbieżności szeregu:

WZÓR NA SUMĘ SZEREGU POT: $a_1\frac{1}{1-q}$ $|q|<1$ jeśli nie to rozbi.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}}\right| = \frac{1}{(n+1)2^n}\cdot\frac{n\cdot 2^{n-1}}{1} = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

OGÓLNA $a_1\frac{1-q^n}{1-q}$

$R=2$ szereg jest zbieżny dla $x\in(-2;2)$

dla $x=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot(2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n} \rightarrow \text{szereg rozbieżny}$$

dla $x=-2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cdot(-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2}{n}\cdot(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2}{n}\right|$$

rozbieżny, ale z Leibnitze bo to naprzemienny

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

ciąg nierosnący, bo mianownik rośnie, a licznik stały.

$$\frac{2}{1} \geq \frac{2}{2} \geq \frac{2}{3} \geq \frac{2}{4} \ldots$$

na mocy kryterium Leibnitza

ODP. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^{n-1}}$ jest zbieżny dla $x \in \langle -2;2)$

ZAD

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$$R = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

ODP. SZEREG POTĘGOWY ZBIEŻNY TYLKO W PUNKCIE $x=0$.

BADAM ZBIEŻNOŚĆ

$|a_n|$

badamy dowolnym kryterium

TAK

zbieżny absolutnie KONIEC

NIE

rozbieżny KONIEC lub jeśli szereg naprzemienny LEIBNIZ

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_{n+1} \leq a_n$

TAK

zbieżny KONIEC

NIE

rozbieżny KONIEC

D'ALAMBERT potęgi, silnie

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ZBIEŻNY

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ROZBIEŻNY

wszystkie mają te same $\frac{2^n+4^n}{6^n}$ lub generalnie w dużych nawiasach

CAUCHY

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ZBIEŻNY

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ ROZBIEŻNY

LEIBNIZ naprzemienne

$\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$ $\quad a_{n+1} > a_n$

DIRICHLET

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha > 1$ ZBIEŻNY $\quad \alpha \leq 1$ ROZBIEŻNY

WARUNEK KONIECZNY:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny gdy $\lim_{n\to\infty} a = 0$

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

1) Dirichlet

$\frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha > 1 \quad \geq$

$\quad \alpha > 1 \quad \leq$

SZEREGI POTĘGOWE

$|a_n|$

dowolne kryterium

$R = \left[\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]}\right]$ lub $R = \left[\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{a_n}\right]}\right]$ $\Big\}$ promień zbieżności

↓ wyznaczenie obszaru zbieżności

sprawdzenie czy zbieżny jeśli pod x podstawimy R i $-R$

szereg zbieżny gdy $|x| < 1$

szereg rozbieżny gdy $|x| > 1$

LICZBA $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

4) GRANICE

METODY:
1) wyciąganie przed nawias ( )
2) mnożenie przez sprzężenie
3) ze wzorem na liczbę e
4) Rozkład na czynniki
5) wzory na granicę
6) De' Hospital

CIĄG OGRANICZONY – ciąg liczbowy, którego zbiór wyrazów jest zbiorem ograniczonym.

ciąg ograniczony z góry $\exists M \forall n \in N \; a_n \leq M$

ciąg ograniczony z dołu $\exists M \forall n \in N \; a_n \geq M$

CIĄG MONOTONICZNY –

- ciąg NIEMALEJĄCY $\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} \geq a_n$ } jeśli nierówność ostra → rosnący
- ciąg NIEROSNĄCY $\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} \leq a_n$ } — " — → malejący

Liczbę g nazywamy GRANICĄ ciągu nieskończonego (a_n), jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność: $|a_n - g| < \varepsilon$

Ciągiem zbieżnym (rozbieżnym) nazywamy ciąg, który posiada granicę (nie posiada granicy).

TWIERDZENIA:

1) Jeśli ciąg posiada granicę, to tylko jedną.

2) Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (mówimy, że jest rozbieżny do $+\infty$)

$$\begin{cases} |a| < 1 & \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \; ? \\ a > 1 & \lim_{n\to\infty} a^n = \infty \\ a \leq 1 & \lim_{n\to\infty} a^n = 1 \end{cases}$$

CIĄG OGRANICZONY $\exists M \forall n \in N \; |a_n| < M$

$a_n = \frac{n^2+2n-2}{3n^2+6n-1}$ → zauważ, że mianownik jest zawsze dodatni i rosnący

$\frac{n^2+2n-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}}{3n^2+6n-1} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{3n^2+6n-1}$ } malejące, czyli całość rośnie

ograniczenie, liczba zawsze mniejsza od $\frac{1}{3}$

JAK ŁADNIE PISAĆ GRANICE?

zad. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2} = \frac{n\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{n(3-2/n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}$$

GRANICE

PLiK ANALIZA KOLOKWIUM 2

- Funkcje odwrotne
- granice (funkcji)
- ciągłość fn w pkt.

ROZSZERZENIE

FUNKCJA ODWROTNA

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \quad x\in D_f$

zad. $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad D_f = \{x : x \neq 1\}$

$g(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad D_g = \mathbb{R}$

Dziedzina złożenia $f\circ g$ to punkty $x\in D_g$ dla których $g(x)\in D_f$

$1 = g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$1 = \frac{1}{x^2+1} \to x^2+1=1 \to x^2=0 \to x=0$

$D_{f\circ g} = \{x : x\neq 0\}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{\frac{1}{x^2+1}-1} = \frac{1}{\frac{1-x^2-1}{x^2+1}} =$$

$$= 1\cdot\frac{x^2+1}{-x^2} = -\frac{x^2+1}{x^2} = -1+\frac{1}{x^2}$$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \quad x\geq 0$

$y = \sqrt[3]{x^2+1} \to x = \sqrt{y^3-1}$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x^3-1}$

blah

$D(f^{-1}) = \{x : x\geq 1\}$

bo $x^3-1\geq 0$

$x\geq 1$

$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad a>1$

$\lim_{n\to\infty} a^n = 1 \quad a<1$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-5x+2) = \infty$, bo $x^2\left(1-5\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right) = [1\cdot\infty] = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^5+2x^3+3x}{x^2-1} = x^3\frac{\left(-3+\frac{2x^3}{x^5}-\frac{3x}{x^5}\right)}{1} = x^4\cdot(-3) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x) = x\sqrt{1+\frac{5}{x}}+x = x(\sqrt{1}+1) = 2x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{x^4-2x^3} = x\cdot x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}} = x^3\cdot 1 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+1}{4x^2-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2} = |x| = -x$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5}-x) = \left(-x\sqrt{1+\frac{5}{x}}-x\right) = -x(1+1) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{x} = \frac{x(x^2-2)}{x} = x^2-2 = -2$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x^3-2^3)}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}} = x^2+2x+4 = 12$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^4-1^4)}{(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 4$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3} = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x} =$ dla $x>0$ $\frac{3}{x}\to\infty$, dla $x<0$ $\frac{3}{x}\to-\infty$ nie istnieje granica z Heinego

ł) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty$ dla $x>0$ $2/x^2\to\infty$, dla $x<0$ $2/x^2\to\infty$

m) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{5}{x-2} = -\infty$

n) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5}{x-2} = +\infty$

o) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \frac{|(x-1)(x+1)|}{(x-1)} = \frac{|x-1||x+1|}{(x-1)} = -|x+1| = -2$ $\quad -(x+1)$

q) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \frac{|(x-1)(x+1)|}{(x-1)} = 2$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5 = 5$

r) $\lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin 4x}{7x} = \frac{4}{7}\cdot 2\cdot\frac{\sin 4x}{4x} = \frac{8}{7}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{|x|} = \frac{1}{|x|\to 0^+} = +\infty$

t) $\lim\limits_{x \to -\pi/2} \frac{\cos x}{x+\pi/2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \frac{-\sin x}{1} = 1$

u) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3-x}{\sin\frac{\pi x}{3}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \frac{-1}{\cos\frac{\pi x}{3}\cdot\left(\frac{\pi x}{3}\right)'} \frac{-1}{\left(\cos\frac{\pi x}{3}\right)\pi/3} = \frac{-1}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{\pi}$

w) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{x-\pi/2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{1} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1$

y) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2^x-1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \frac{\cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{x\cdot \ln 2}} = \cos 2x \cdot 2 \cdot x \cdot \ln 2 = 0$

z) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x}\cdot 3x} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$

ź) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3}$

ż) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\cos 5x} = \frac{\frac{\cos x}{x}\cdot x}{\frac{\cos 5x}{5x}\cdot 5x} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$

a') $\lim\limits_{x \to 0} \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x = \frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$

b') $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{x^2} = e^3$

c') $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2+1} = \left(\frac{x^2-5+8}{x^2-5}\right)^{x^2+1} = \left(1+\frac{8}{x^2-5}\right)^{x^2+1} =$

$= \left[\left(1+\frac{8}{x^2-5}\right)^{x^2-5}\right]^{\frac{x^2+1}{x^2-5}} = \left[e^8\right]^1 = e^8$

d') $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x^2} = \frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{x} = 1\cdot\frac{1}{x}$ $\left.\begin{matrix}\frac{1}{0^-} \to -\infty \\ \frac{1}{0^+} \to +\infty\end{matrix}\right\}$ nie istnieje

g') $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x-3^x}{x} = \frac{3^x\left(\frac{5^x}{3^x}-1\right)}{x} = 3^x\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

CIEKAWE GRANICE

$a_n = \sin(n!)\cdot\frac{n}{n^2+1} + \frac{2n}{3n+1}\cdot\frac{n}{1-3n}$

1. Zajmujemy się pierwszą częścią. Wiemy, że

$-\frac{n}{n^2+1} \le \sin(n!)\cdot\frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1}$ $\quad -1 \le \sin(x) \le 1$

Ciągi skrajne mają wspólną granicę:

$\frac{n\cdot 1}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, czyli $\sin(n!)\cdot\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

2. Zajmiemy się drugą częścią.

$\frac{2n}{3n+1}\cdot\frac{n}{1-3n} = \frac{n\cdot 2}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{n\cdot 1}{n\left(\frac{1}{n}-3\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

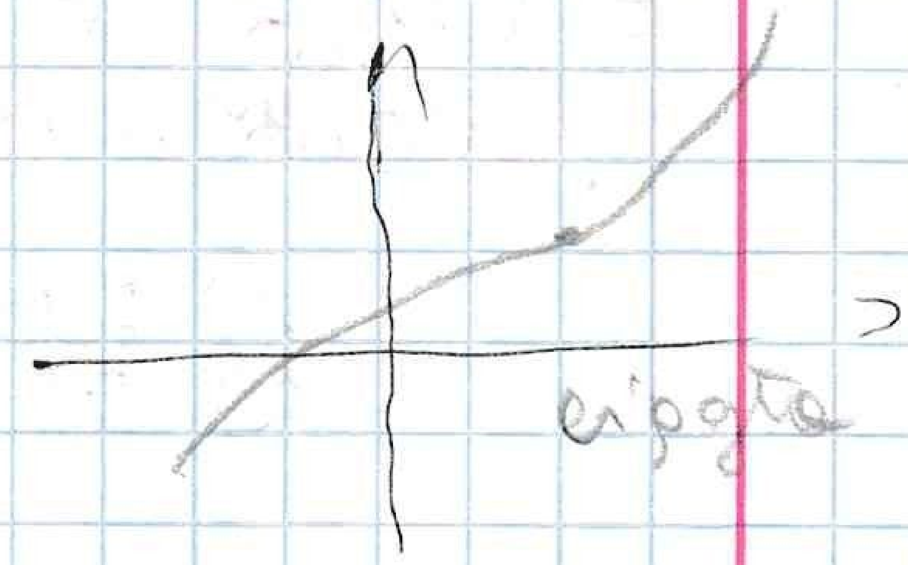
3. Dodajemy dwie granice $-\frac{2}{9}+0 = -\frac{2}{9}$

ZWRACAJ UWAGĘ DO CZEGO DĄŻY:

Zad. $\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\sqrt[4]{1-x}}{(x^2-1)} = \frac{(x+1)\sqrt[4]{1-x}}{\cancel{(x+1)}(x-1)} =$ i teraz podstawiam $\boxed{-1}$

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Zad.
$$f(x) = \begin{cases} x & : |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & : |x| > 1 \end{cases}$$



$\lim_{x \to -1^-} = (-1)^2 - a + b = 1 - a + b$

POWSTAŁ UKŁAD RÓWNAŃ

$\lim_{x \to -1^+} = -1$

$$\begin{cases} 1 - a + b = -1 \\ 1 + a + b = 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} = 1$

$1 + 2 + b + b = 1$

$2b = -2$

$\boxed{\begin{matrix} b = -1 \\ a = 1 \end{matrix}}$

$\lim_{x \to 1^+} = 1 + a + b$

2.* $|x^2-1|$ to oprócz tych zasad liczymy dla $|x^2-1|=0$ tutaj $f(-1)$ i $f(-2)$... Potem liczymy pochodną dla obu podzbiorów $f'(x) =$ pkt. krytyczny

TYPY ZADAŃ

1) Znajdź warto. min i max na przedziale $[y; x]$

   1) $\left.\begin{matrix} f(y) \\ f(x) \end{matrix}\right\}$ wartość na krańcach przedziału

   2) $f'(x) = 0$ i wartości w tych punktach

   3) wyznaczenie min i max

2) Funkcja ma pochodną w punkcie x_0

   Czy funkcja jest różniczkowalna

   1) ciągłość $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

   2) $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

3) Wyznacz punkty ciągłości i nieciągłości

   1) ciągłość $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \to$ jeśli nie to nieciągła w tym pkt.

4) Punkty przegięcia

$f''(x) = 0$

wklęsło $f'' > 0$

wypukło $f'' < 0$

5) Znajdź punkty różniczkowalności i nieróżniczkowalności funkcji

1) Zbadaj ciągłość
2) Zbadaj ciągłość pochodnej

6) ASYMPTOTY

AS. PIONOWA / $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty$

x_0 – pkt. które nie należą do dziedziny

AS. UKOŚNA / 1° $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

jeśli $a = 0$ to AS. POZIOMA

2° $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$

$y = ax + b$

zad. $|x^2-1| + x$

1 $f(-2) = \dots$
$f(1) = \dots$

$|x^2-1| = 0$
$x = 1 \lor x = -1$

$f(-1) = \dots$
$f(1) = \dots$

$|x^2-1| \begin{cases} x^2-1 & x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ 1-x^2 & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{cases}$

$[-2; 1]$

$f(x) = 1 - x^2 + x$
$f'(x) = -2x + 1$
$f'(0) = 0$

$x = \frac{1}{2} \in D$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$

$f(x) = x^2 - 1 + x$
$f'(x) = 2x + 1$
$f'(0) = 0$

$x = -\frac{1}{2} \notin D$

PLIK OBLICZANIE POCHODNEJ
PLIK SZEREGI TAYLORA I MACLAURINA
PLIK CAŁKI OZNACZONE
NIEOZNACZONE

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

RODZAJ I

$\infty \to \varepsilon$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_a^{\varepsilon} f(x)dx = \ldots$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx = \ldots$$

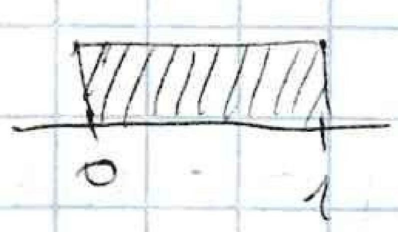
$-\infty \to \varepsilon$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{a} f(x)dx + \lim_{a \to \infty} \int_{a}^{a} f(x)dx$$

RODZAJ II

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx = \ldots$$



$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \to 2^-} \int_{-2}^{\varepsilon} \frac{dx}{x-2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx = \ldots$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} \int_{a}^{\varepsilon} f(x)dx = \ldots$$

$\infty \to \varepsilon$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}dx = \ldots$$

KROKI:
1) Obadajesz który to rodzaj całki → i robisz ZAD
2) liczysz zwykłą całkę
3) liczysz całkę oznaczoną
4) podstawiasz pod lim

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{1-2}x^{-1} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\ldots = \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^{\varepsilon} = \left[-\frac{1}{\varepsilon}\right] - \left[-\frac{1}{1}\right] = -\frac{1}{\varepsilon} + 1$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) = \boxed{1}$$

$$\left[-\frac{1}{\infty} + 1\right]$$

ZAD

1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ldots$

$x^2+1 \neq 0$

$-\infty \to \varepsilon$

2) $\int \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int t^{-1}\,dt = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

$t = x^2+1$
$dt = 2x\,dx$
$\frac{dt}{2} = x\,dx$

3) $\ldots = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]\Big|_{\varepsilon}^{0} = \left[\frac{1}{2}\ln|0^2+1|\right] - \left[\frac{1}{2}\ln|\varepsilon^2+1|\right] = \frac{1}{2}\ln|1| - \frac{1}{2}\ln|\varepsilon^2+1| = -\frac{1}{2}\ln|\varepsilon^2+1|$

4) $\lim_{\varepsilon \to -\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln|\varepsilon^2+1|\right) = -\infty$ } całka rozbieżna

$\left[-\frac{1}{2}\ln|(-\infty)^2+1|\right] = \left[\frac{1}{2}\ln\infty\right] = [\infty]$

ZAD.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

1) $x^2+1 \neq 0$

$-\infty \to \varepsilon$

$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2+1}\,dx}_{J_2} = \ldots = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) $J_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

$J_2 = \operatorname{arctg} x + C$

3) $\ldots = [\operatorname{arctg} x]\Big|_{\varepsilon}^{0} = [\operatorname{arctg} 0] - [\operatorname{arctg}\varepsilon] = -\operatorname{arctg}\varepsilon$

4) $\lim_{\varepsilon \to -\infty} -\operatorname{arctg}\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

$[-\operatorname{arctg}(-\infty)] = [-(-\operatorname{arctg}(\infty))] = [\operatorname{arctg}\infty] = \left[\frac{\pi}{2}\right]$

$\lim_{\varepsilon \to \infty} \operatorname{arctg}\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

$[\operatorname{arctg}(\infty)] = \left[\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to \infty}$$

ZAD.

$$\int x e^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} = \underline{-xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

$u = x \quad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \quad v = -e^{-x}$

$$\ldots = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]\Big|_0^{\varepsilon} = \left[-\varepsilon e^{-\varepsilon} - e^{-\varepsilon}\right] - \left[-0 \cdot e^{-0} - \overset{1}{e^{-0}}\right] =$$

$$= \underline{\underline{-\varepsilon e^{-\varepsilon} - e^{-\varepsilon} + 1}}$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon} - e^{-\varepsilon} + 1\right) = \underline{\underline{1}}$$

symbol nieoznaczony

$$\left[-\infty e^{-\infty} - e^{-\infty} + 1\right] = \left[-\infty \frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{\infty}} + 1\right] - \left[-\frac{\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty} + 1\right]$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(-\varepsilon \frac{1}{e^{\varepsilon}}\right) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(\frac{-\varepsilon}{e^{\varepsilon}}\right) \underset{H}{=} \frac{(-\varepsilon)'}{(e^{\varepsilon})'} =$$

$\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$

REGUŁA DE L'HOSPITALA

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(\frac{-1}{e^{\varepsilon}}\right).$$

$$\left[\frac{-1}{e^{\infty}}\right] = \left[\frac{-1}{\infty}\right] = [0]$$

$$\lim_{x \to \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \left[\frac{0}{0}\right]$

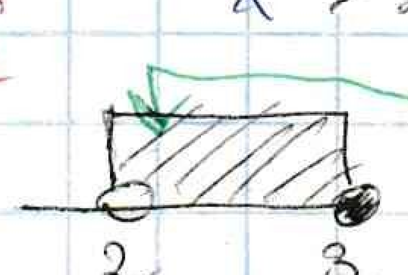
ZAD

1) $$\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 2^{+}} \int_{\varepsilon}^{3} \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\, dx =$$

2) $x-2 < 0$

$x > 2$

ε



2) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\, dx = \int \frac{t+3}{\sqrt{t}} = \int \frac{t}{\sqrt{t}} + \int \frac{3}{\sqrt{t}} =$$

$t = x-2 \quad x = t+2$

$dt = dx$

$$= \int t^{\frac{1}{2}} + 3\int t^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} t^{3/2} + 6t^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \underline{\frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + 6(x-2)^{1/2} + C}$$

lub

$t = \sqrt{x-2} \quad /(\,)^2$

$t^2 = x-2$

$2t\,dt = dx$

$$\int \frac{t^2+3}{t} 2t\, dt$$

TO SAMO

3) $$\ldots = \left[\frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + 6(x-2)^{1/2}\right]\Big|_{\varepsilon}^{3} = \left[\frac{2}{3}(\sqrt{3-2})^{3/2} + 6(3-2)^{\frac{1}{2}}\right] -$$

$$- \left[\frac{2}{3}(\varepsilon-2)^{3/2} + 6(\varepsilon-2)^{1/2}\right] = \frac{2}{3} + 6 - \left[\frac{2}{3}(\varepsilon-2)^{3/2} + 6(\varepsilon-2)^{1/2}\right] = \underline{\underline{6\tfrac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}(\varepsilon-2)^{3/2} + 6(\varepsilon-2)^{1/2}\right]}}$$

4) $$\lim_{\varepsilon \to 2^{+}} \left[6\tfrac{2}{3} - \left[\frac{2}{3}(\varepsilon-2)^{3/2} + 6(\varepsilon-2)^{1/2}\right]\right] = \underline{\underline{6\tfrac{2}{3}}}$$

$$\left[6\tfrac{2}{3} - \underbrace{\frac{2}{3}(2-2)^{3/2}}_{0} + \underbrace{6(2-2)^{1/2}}_{0}\right] = 6\tfrac{2}{3}$$

ZAD 1) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 1^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x-1}\,dx = \ldots$

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

2) $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \underline{\ln|x-1|+C}$

$t = x-1$

$dt = dx$

3) $[\ln|x-1|]\Big|_0^{\varepsilon} = [\ln|\varepsilon-1|] - [\ln|0-1|] = [\ln|\varepsilon-1|] - \ln 1 =$

$= \underline{\underline{\ln|\varepsilon-1|}}$

4) $\lim_{\varepsilon \to 1^-} \ln|\varepsilon-1| = \quad =$ całka rozbieżna

$[\ln|1-1|] = [\ln 0] = -\infty$

ZAD.

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx =$

$x^2 \neq 0$

$x \neq 0$

$= \underbrace{\lim_{\to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{J_2} = \ldots$

$J_1 = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{-1} x^{-1} + C = \underline{\frac{-1}{x} + C}$

$J_2 = J_1$

$\ldots = \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_{-1}^{\varepsilon} = \left[-\frac{1}{\varepsilon}\right] - [1] = \underline{\underline{-\frac{1}{\varepsilon} - 1}}$

$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \left(-\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) =$ całka rozbieżna (jeżeli jedna całka jest rozbieżna to cała jest rozbieżna)

$\left[-\frac{1}{0} - 1\right] = \pm\infty$

ZAD 1) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ldots$

$x^2 - 2x + 1 \neq 0$

$(x-1)^2 = 0$ gdy $x=1$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=1$

$\Delta = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b}{2a} = 1$

$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 1^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^2}}_{J_1} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 1^+} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx}_{J_2} = \ldots$

2) $J_1 = \int \frac{1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-1)} = \int \frac{1}{(x-1)^2} = \left| \begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix} \right.$

$= \int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{x-1} + C$

3)

$\ldots = \left[-\frac{1}{x-1}\right]\Big|_1^{\varepsilon} = \left[-\frac{1}{\varepsilon-1}\right] - \left[-\frac{1}{-1-1}\right] = -\frac{1}{\varepsilon-} - \frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{\varepsilon \to 1^-} \left(-\frac{1}{\varepsilon-} - \frac{1}{2}\right) =$ całka rozbieżna

$\left[-\frac{1}{\underbrace{1-1}} - \frac{1}{2}\right] = \pm\infty$

ZAD.

$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+6}} = \int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{-(x+2)(x-3)}} dx =$

$-x^2+x+6 > 0$ $\qquad = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-(x+2)(x-3)}}dx \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{-(x+2)(x-3)}}dx =$

$\Delta = 1+24 = 25$

$x_1 = \frac{-1+5}{-2} = -2$ $\qquad = \lim\limits_{\varepsilon \to -2^+} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{-(x+2)(x-3)}}dx}_{J_1} + \lim\limits_{\varepsilon \to 3^-} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{-(x+2)(x-3)}}dx}_{J_2} = \ldots$

$x_2 = \frac{-1-5}{-2} = 3$

$J_1 = \int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{-(x+2)(x-3)}_{\text{więtok kołowiłne}}}} = \int \frac{1}{\sqrt{-1\left[(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}\right]}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{25}{4}}}dx =$ $\begin{matrix} t = x-\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{matrix}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{-t^2+\frac{25}{4}}} = \int \frac{1}{\sqrt{(\frac{5}{2})^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{\frac{5}{2}} + C = \arcsin \frac{2t}{5} + C$

$\ldots = \left[\arcsin \frac{2t}{5}\right]\Big|_{\varepsilon}^{0} = \left[\arcsin \frac{2}{5}(0-\frac{1}{2})\right] - \left[\arcsin \frac{2}{5}(\varepsilon - \frac{1}{2})\right] =$

$= \arcsin(-\frac{1}{5}) - \arcsin \frac{2}{5}(\varepsilon - \frac{1}{2}) = -\arcsin\frac{1}{5} - \arcsin \frac{2}{5}(\varepsilon - \frac{1}{2})$

$\lim\limits_{\varepsilon \to -2^+} \left(-\arcsin \frac{1}{5} - \arcsin \frac{2}{5}(\varepsilon - \frac{1}{2})\right)$

$\left[-\arcsin\frac{1}{5} - \arcsin\frac{2}{5}(2-\frac{1}{2})\right] = \left[-\arcsin\frac{1}{5} + \arcsin 1\right] =$

$= \left[-\arcsin\frac{1}{5} + \frac{\pi}{2}\right]$

$J_2 = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+6}}dx = \arcsin\frac{2}{5}(x-\frac{1}{2}) + C$

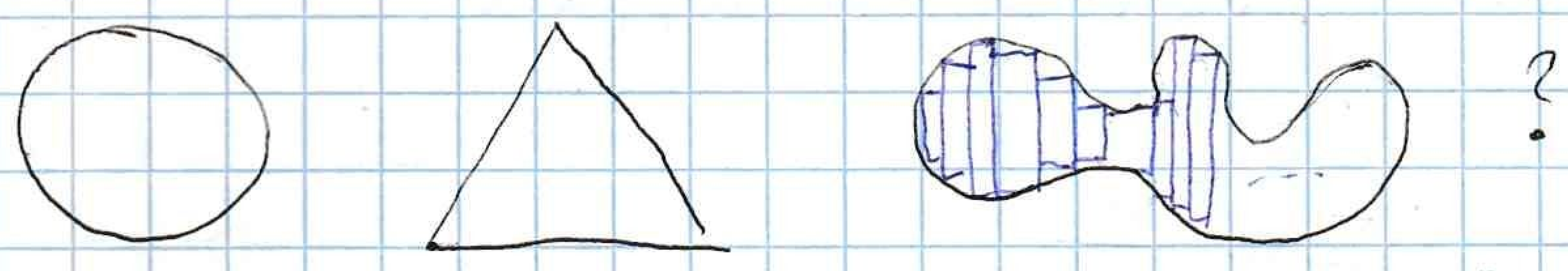
$\ldots = \left[\arcsin\frac{2}{5}(x-\frac{1}{2})\right]\Big|_0^{\varepsilon} = \left[\arcsin\frac{2}{5}(\varepsilon-\frac{1}{2})\right] - \left[\arcsin\frac{2}{5}(0-\frac{1}{2})\right] =$

$= \arcsin\frac{2}{5}(\varepsilon-\frac{1}{2}) - \arcsin(-\frac{1}{5}) = \arcsin\frac{2}{5}(\varepsilon-\frac{1}{2}) + \arcsin\frac{1}{5} =$

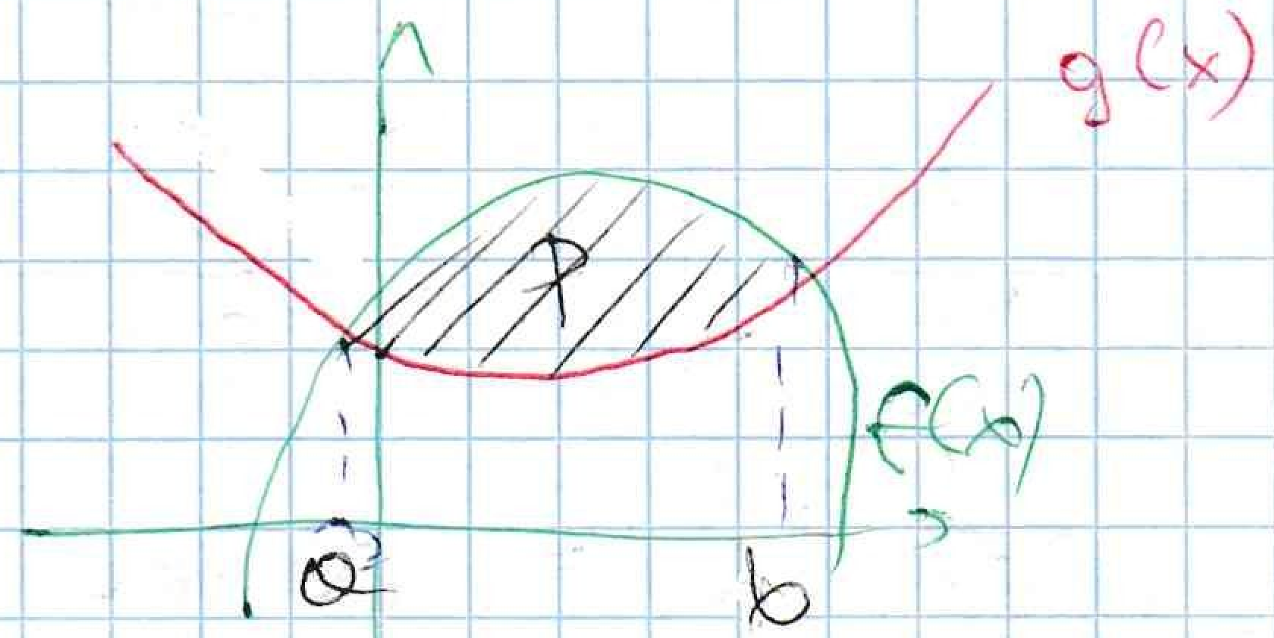
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin\frac{2}{5}(\varepsilon-\frac{1}{2}) + \arcsin\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin$

$\left[\arcsin 1 + \arcsin\frac{1}{5}\right] = \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{5}\right]$ $\qquad$ ODP. $= J_1 + J_2 = \pi$

OBLICZANIE PÓL OBSZARÓW



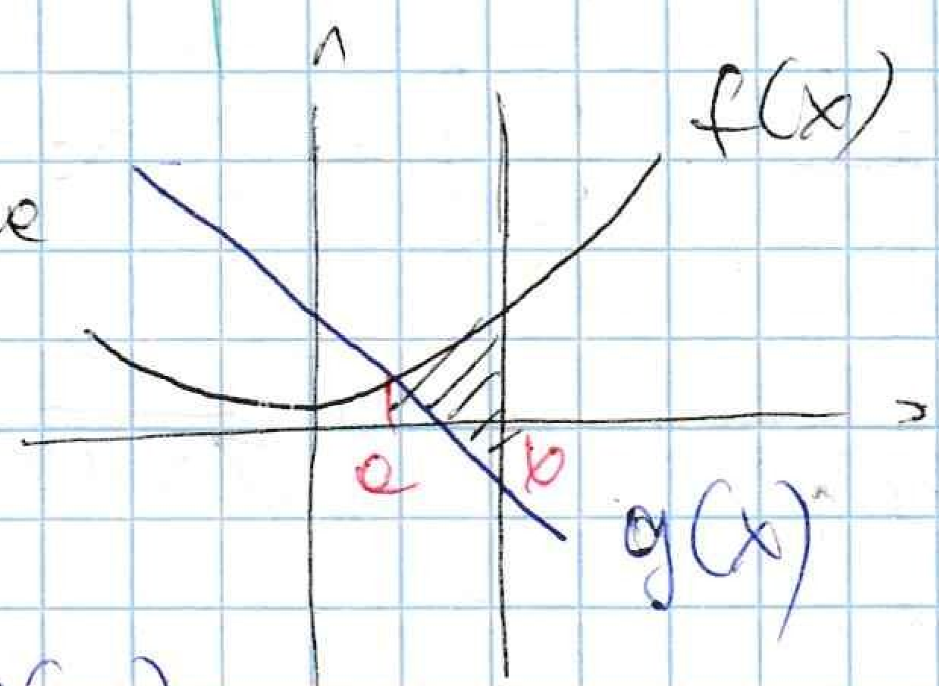
$P = \pi r^2$ $\quad$ $P = \frac{1}{2}ah$

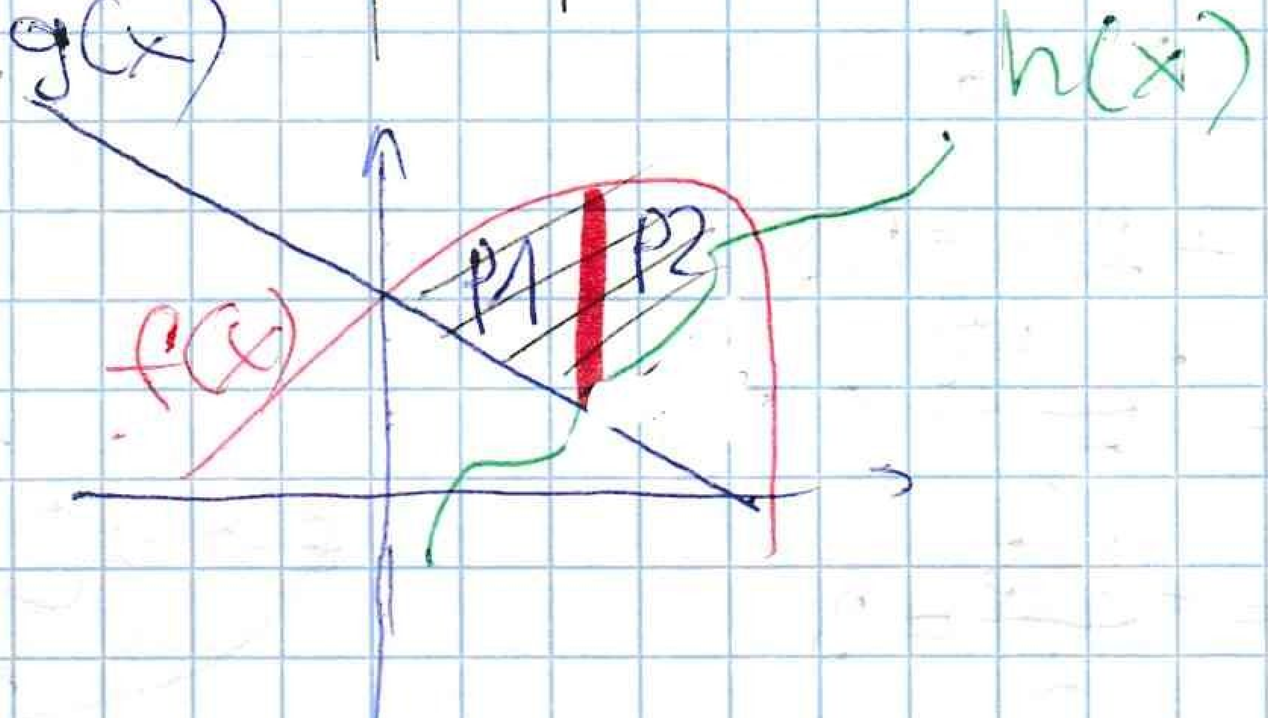


$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

fun. ograniczająca z góry

fun. ograniczająca z dołu

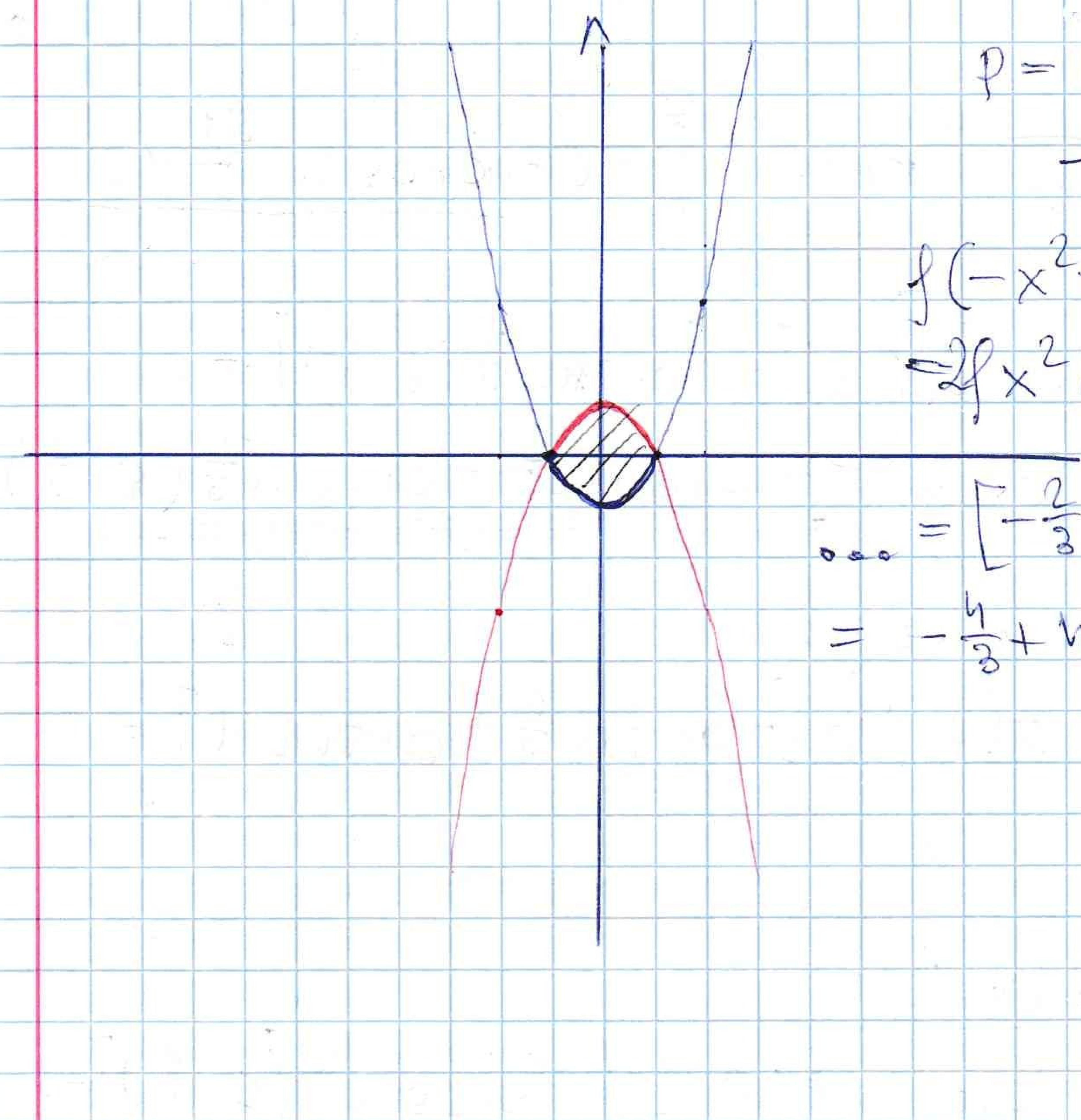




$$P_1 = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

$P_2 =$

zad. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2 - 1$ i $y = -x^2 + 1$

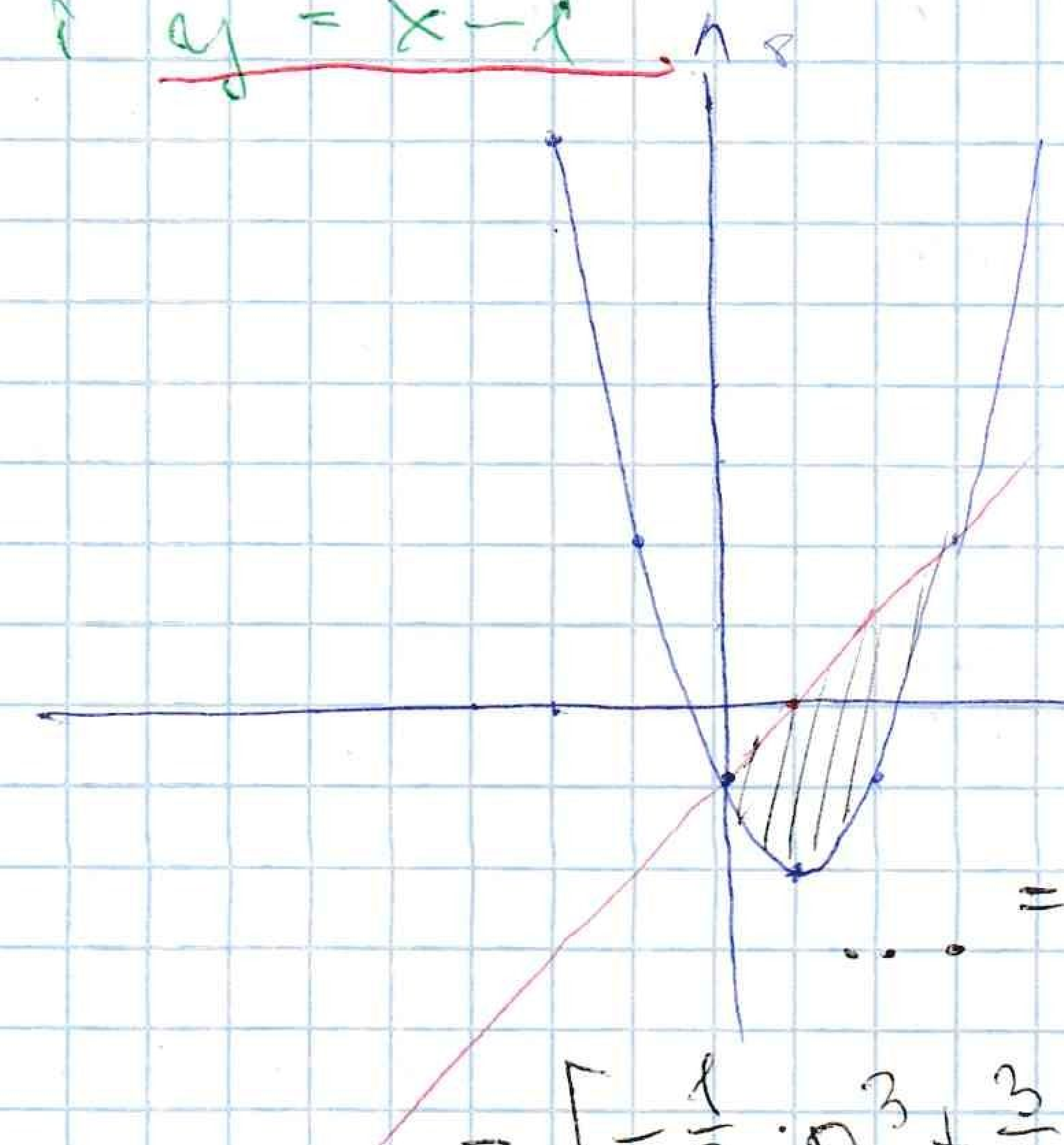


$$P = \int_{-1}^{1} [-x^2 + 1 - (x^2 - 1)]\,dx = \ldots$$

$$\int(-x^2 + 1 - x^2 + 1) = \int(-2x^2 + 2) =$$
$$= -2\int x^2\,dx + 2\int dx = -\frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

$$\ldots = \left[-\frac{2}{3}x^2 + 2\right]\Big|_{-1}^{1} = \left[-\frac{2}{3} + 2\right] - \left[+\frac{2}{3} + 2\right] =$$
$$= -\frac{4}{3} + 4 = 2\frac{2}{3}$$

zad. oblicz pole obszaru ograniczonego $y = x^2 - 2x - 1$ i $y = x - 1$



$$P = \int_0^3 [x - 1 - (x^2 - 2x - 1)]\,dx$$

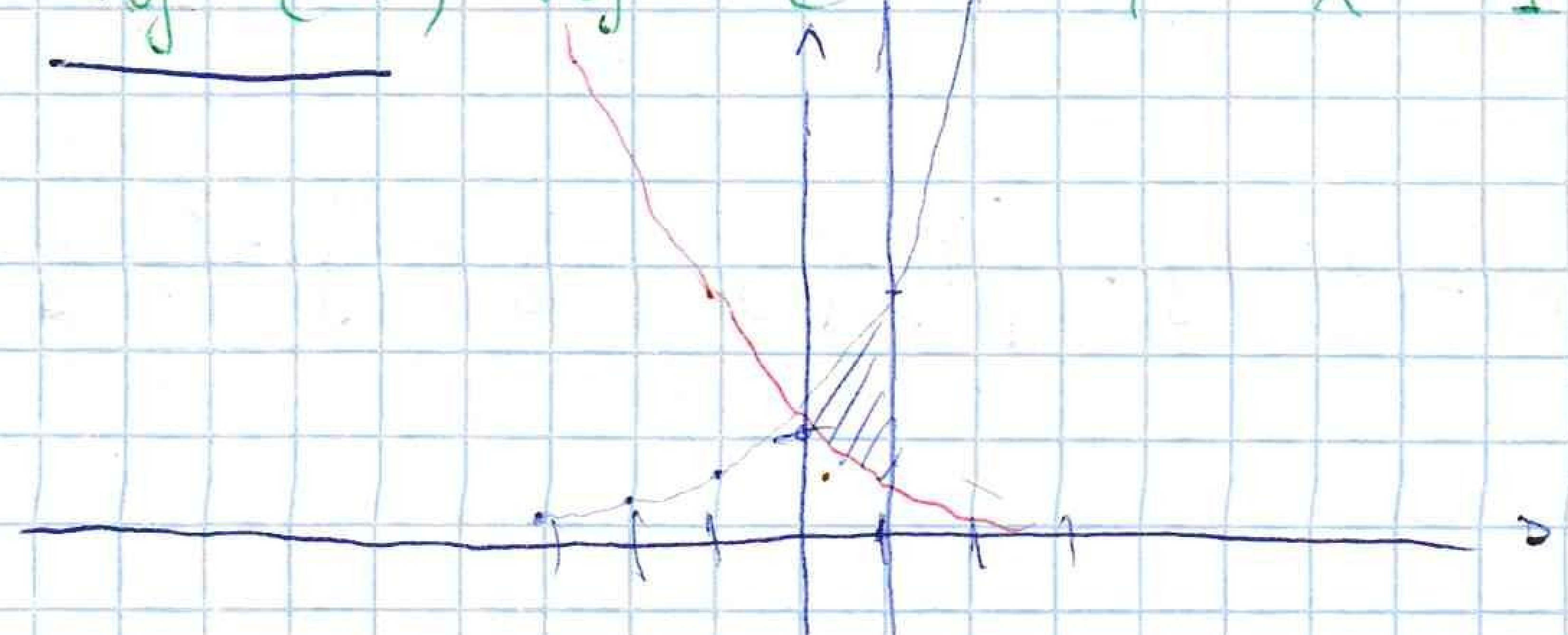
$$\int (-x^2 + 3x)\,dx = -\int x^2\,dx + 3\int dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\ldots = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]\Big|_0^3 = \left[-\frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{3}{2}\cdot 3^2\right] -$$

$$- \left[-\frac{1}{3}\cdot 0^3 + \frac{3}{2}\cdot 0^2\right] = -9 + \frac{27}{2} = 4\frac{1}{2}$$

zad. oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i $x = 1$



$e \approx 2{,}7 \approx 3$

$y = e^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0,05	0,13	0,37	1	2,7	7,29	

$y = e^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	19,68	7,29	2,7	1	0,37	0,13

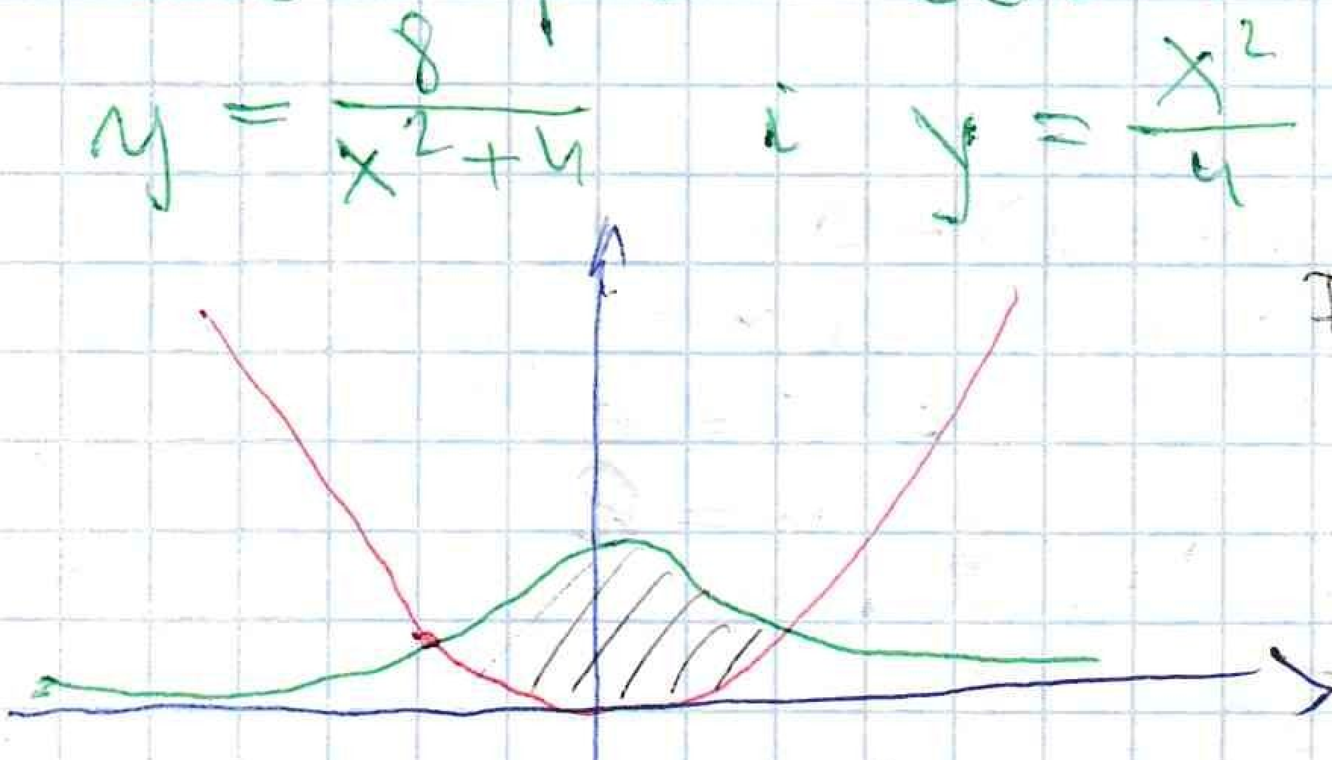
$$e^x = e^{-x}$$
$$\underbrace{x = -x}_{x=0}$$

$$P = \int_0^1 [e^x - e^{-x}]\,dx = \ldots \quad 1^+$$

$$\int (e^x - e^{-x})\,dx = \int e^x\,dx - \int e^{-x}\,dx = e^x + e^{-x} + C$$

$$\ldots = [e^x + e^{-x}]\Big|_0^1 = [e^1 + e^{-1}] - [e^0 + e^{-0}] = e + e^{-1} - 2$$

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \frac{8}{x^2+4}$ i $y = \frac{x^2}{4}$



$$P = \int_{-2}^{2} \left[\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right] dx = \ldots$$

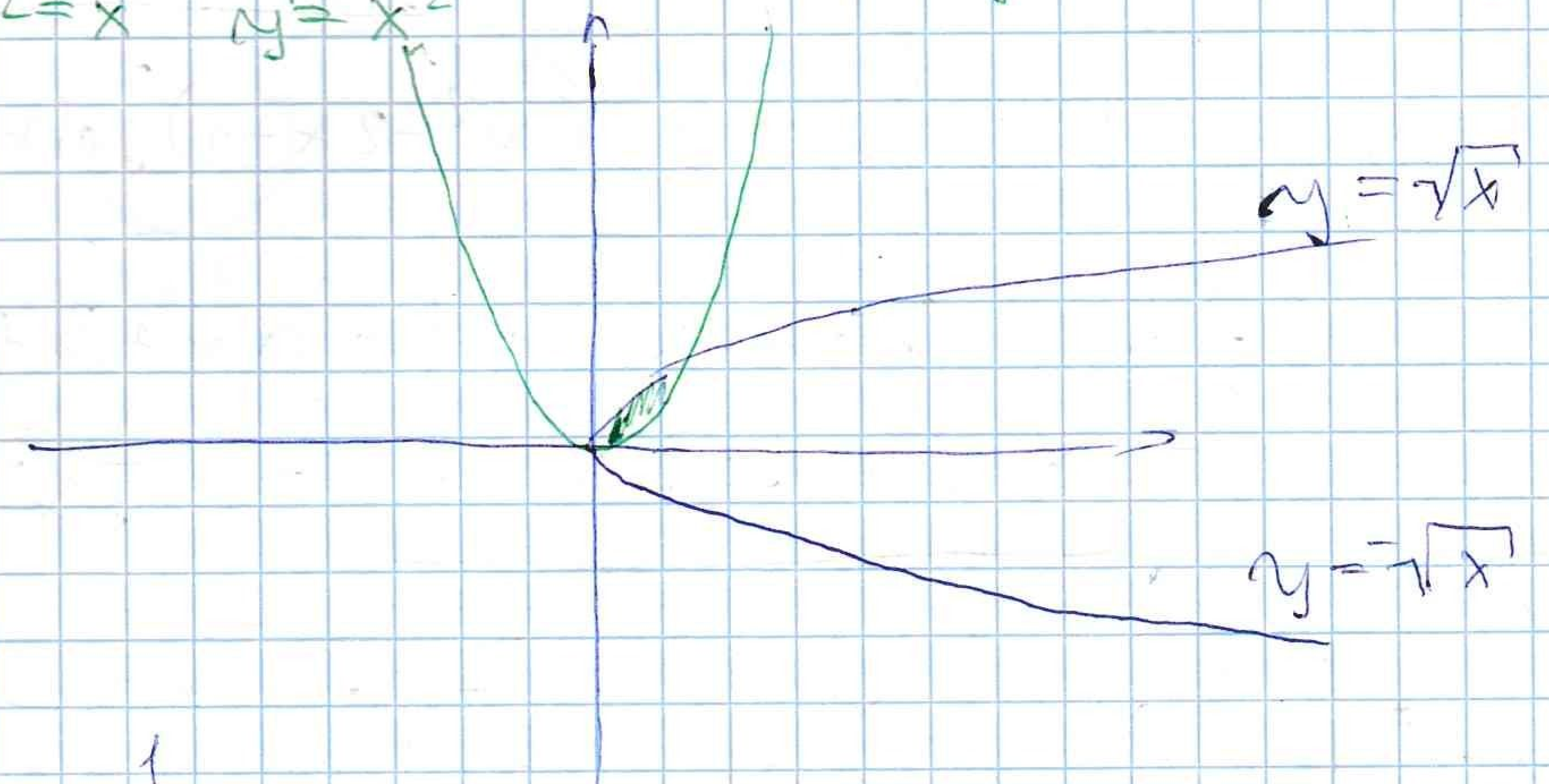
$$\int \frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\,dx = 8\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx - \int \frac{x^2}{4}\,dx =$$

$$= 8\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^3 + C$$

$$\ldots = \left[4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^3\right]\Big|_{-2}^{2} = \left[4\operatorname{arctg}\frac{2}{2} - \frac{1}{12}\cdot 2^3\right] - \left[4\operatorname{arctg}\frac{-2}{2} - \frac{1}{12}(-2)^3\right]$$

$$= 4\operatorname{arctg}1 - \frac{8}{12} - \left[4\operatorname{arctg}(-1) + \frac{8}{12}\right] = 2\pi - \frac{4}{3}$$

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi
$y^2=x$ $\quad y=x^2$



$$P=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

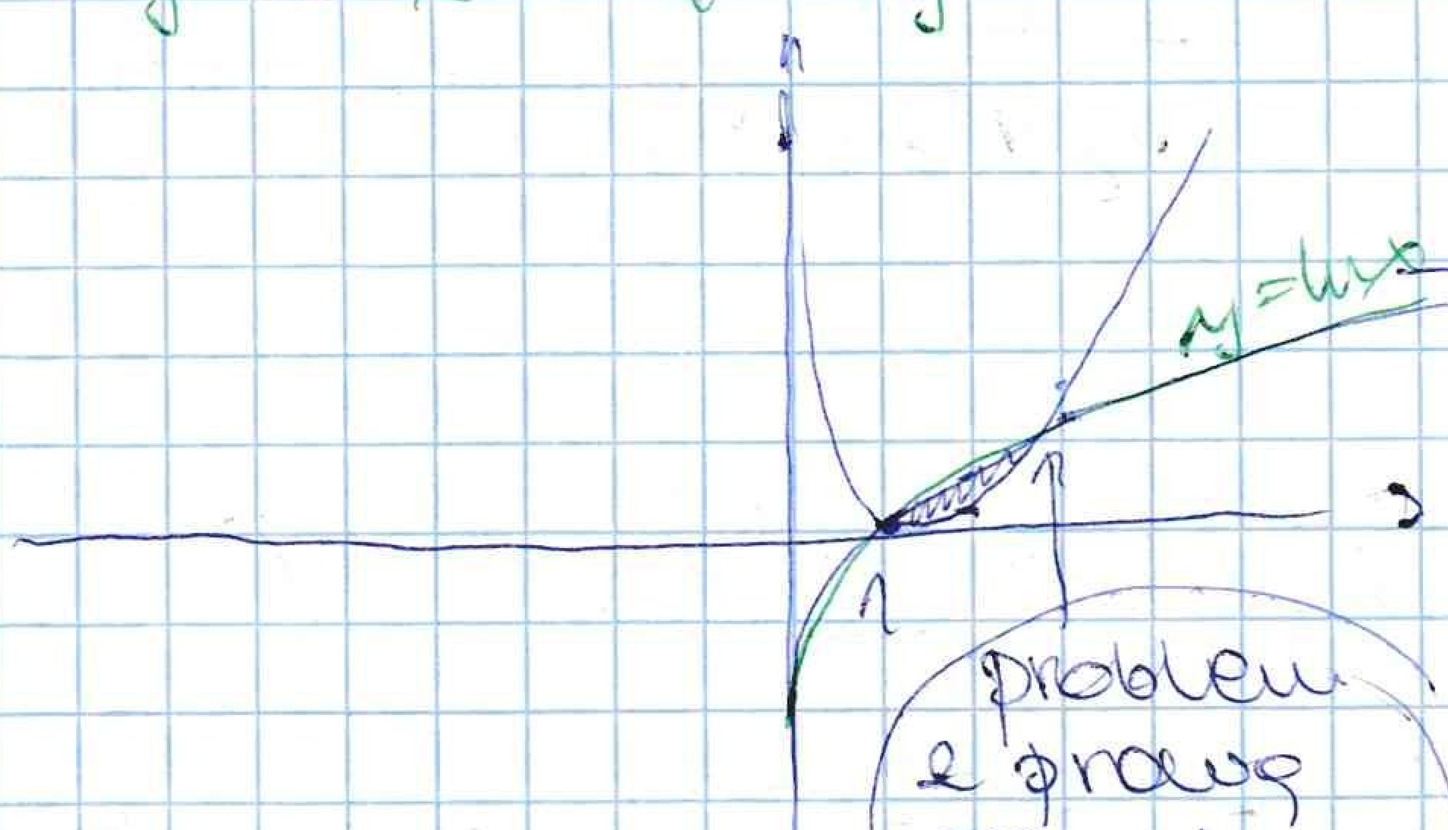
$$\int(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^2dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{3}x^3+C$$

$$\ldots=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_0^1=\left[\frac{2}{3}\sqrt{1^3}-\frac{1}{3}\cdot1\right]-\left[\frac{2}{3}\sqrt{0^3}-\frac{1}{3}\cdot0^3\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}$$

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi
$y=\ln x$ i $y=\ln^2 x$



$y=\ln x$

x	-1	0	1	2	3	4
y	x	x	0	0,7	1,1	1,4

$y=\ln^2 x$

x	-1	0	1	2	3	4
y	x	x	0	0,5	1,2	1,9

problem z prawą granicą całkowania

$\ln x=\ln^2 x$
$\ln^2 x-\ln x=0$
$\ln x(\ln x-1)=0$
$\ln x=0 \quad \vee \quad \ln x=1$
$x=1 \qquad e^{\ln x}=e^1$
$x=e$

$$P=\int_1^e[\ln x-\ln^2 x]\,dx=\ldots$$

$$\int(\ln x-\ln^2 x)\,dx=\overbrace{\int\ln x\,dx}^{J_2}-\overbrace{\int\ln^2 dx}^{J_3}=\ldots$$

$I_1 = \int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx = \underline{x\ln x - x + C}$

$u = \ln x \quad v' = 1$
$u' = 1/x \quad v = x$

$I_2 = \int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x = x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int dx) =$

$u = \ln^2 x \quad v' = 1 \qquad u = \ln x \quad v' = 1$
$u' = 2\ln x \frac{1}{x} \quad v = x \qquad u' = 1/x \quad v = x$

$= \underline{x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C}$

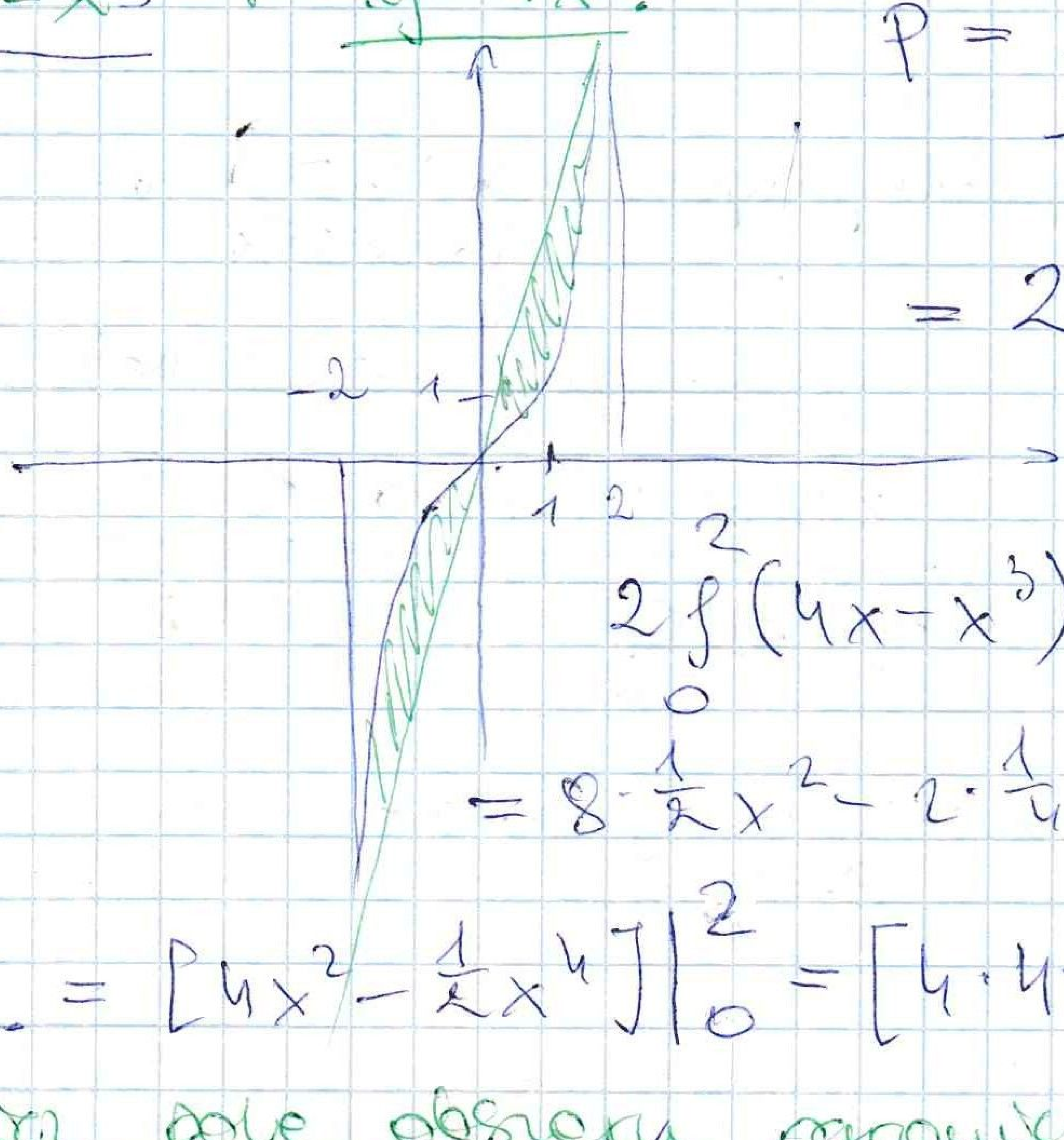
$\ldots = x\ln x - x - (x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + C =$

$= -x\ln^2 x + 3x\ln x - 3x + C$

$\ldots = [-x\ln^2 x + 3x\ln x - 3x]\Big|_1^e = [-e\ln^2 e + 3e\ln e - 3e] -$

$- [-1\ln^2 1 + 3\cdot 1\ln 1 - 3\cdot 1] = -e + 3$ odp.

oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^3$ i $y = 4x$.



$P = \int_{-2}^{0} [x^3 - 4x]dx + \int_0^2 [4x - x^3]dx =$

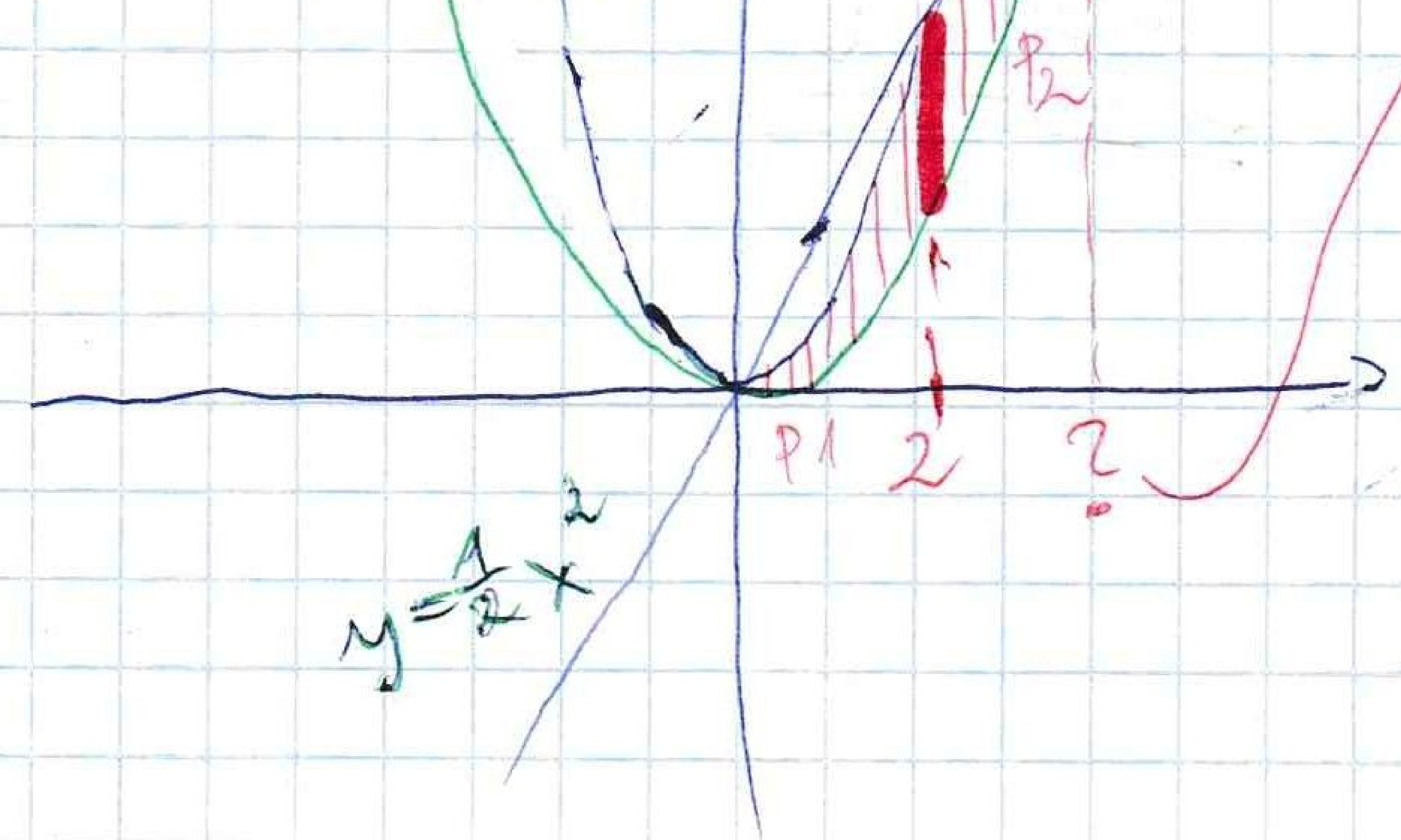
$= 2\int_0^2 [4x - x^3]dx$ } możemy tak zrobić bo wiemy, że są takie same

$2\int_0^2 (4x - x^3)dx = 8\int x\,dx - 2\int x^2 dx =$

$= 8\cdot\frac{1}{2}x^2 - 2\cdot\frac{1}{4}x^4 + C = \underline{4x^2 - \frac{1}{2}x^4 + C}$

$\ldots = [4x^2 - \frac{1}{2}x^4]\Big|_0^2 = [4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2^4] - [4\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^4] = 16 - 8 = 8$

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $y = 1/2 x^2$, $y = 2x$



$\frac{1}{2}x^2 = 2x$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$

$x(\frac{1}{2}x - 2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$

$$P = \underbrace{\int_0^2 \left[x^2 - \frac{1}{2}x^2\right] dx}_{P_1} + \underbrace{\int_2^4 \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right] dx}_{P_2}$$

$$P_1 = \int_0^2 \left[x^2 - \frac{1}{2}x^2\right] dx$$

$$\int \left[x^2 - \frac{1}{2}x^2\right] dx = \int \frac{1}{2}x^2 = \underline{\frac{1}{6}x^3 + C}$$

$$\ldots = \left[\frac{1}{6}x^3\right]\Big|_0^2 = \left[\frac{1}{6}\cdot 2^3\right] - \left[\frac{1}{6}\cdot 0^3\right] = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

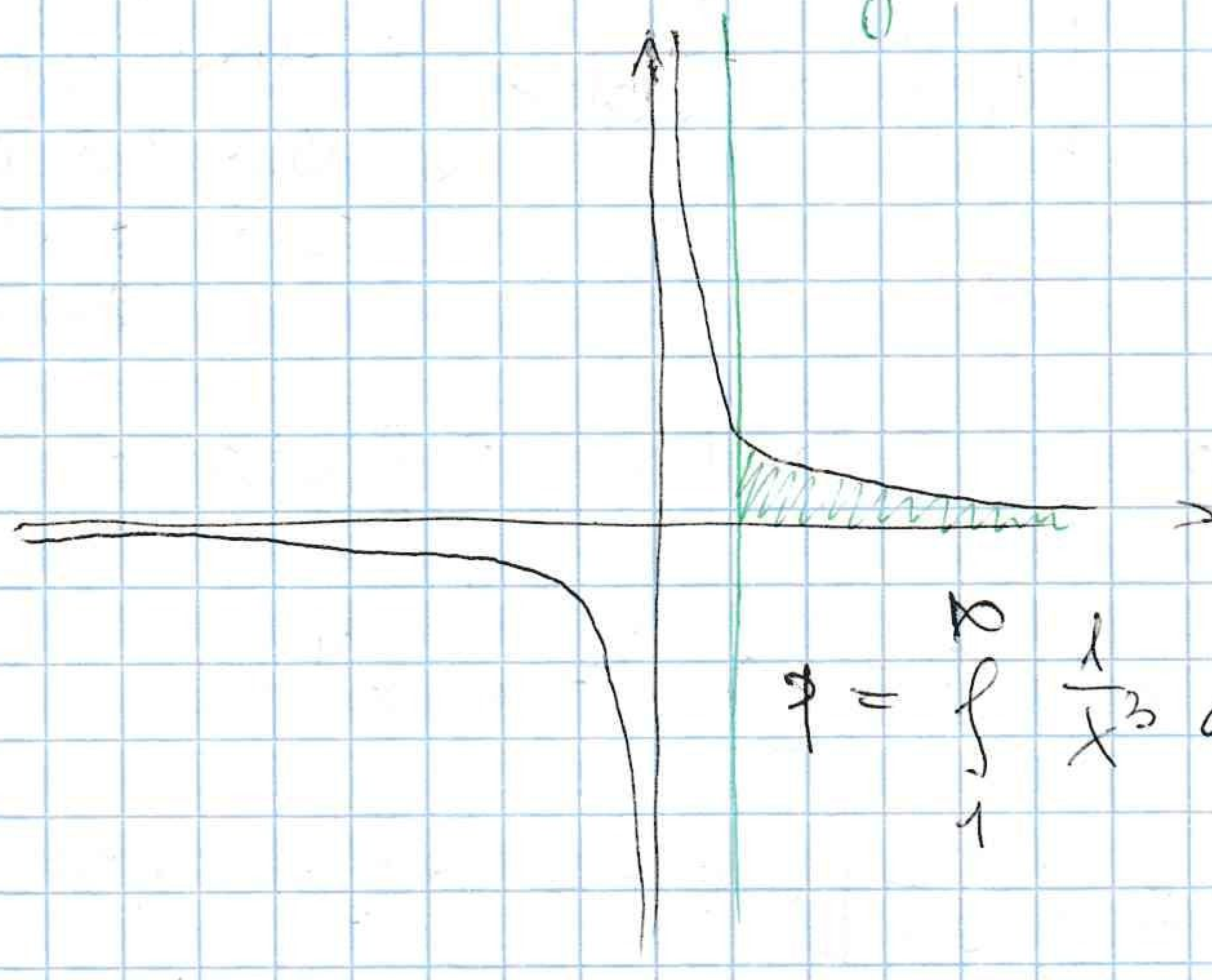
$$P_2 = \int_2^4 \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right] dx = \ldots$$

$$\int \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right] dx = \int 2x\,dx - \int \frac{1}{2}x^2 dx = 2\int x\,dx - \frac{1}{2}\int x^2 dx =$$
$$= \underline{x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C}$$

$$\ldots = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]\Big|_2^4 = \left[4^2 - \frac{1}{6}\cdot 4^3\right] - \left[2^2 - \frac{1}{6}2^3\right] = 12 - \frac{56}{6} = 2\frac{2}{6} = 2\frac{2}{3}$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{4}{3} + 2\frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi ($x^3 y = 1$), $x = 1$ i osią OX



$y = \frac{1}{x^3}$ dla $x \in \langle 1; \infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	-1	X	1	$\frac{1}{8}$

$$P = \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^\varepsilon \frac{1}{x^3} dx = \ldots$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \underline{-\frac{1}{2x^2} + C}$$

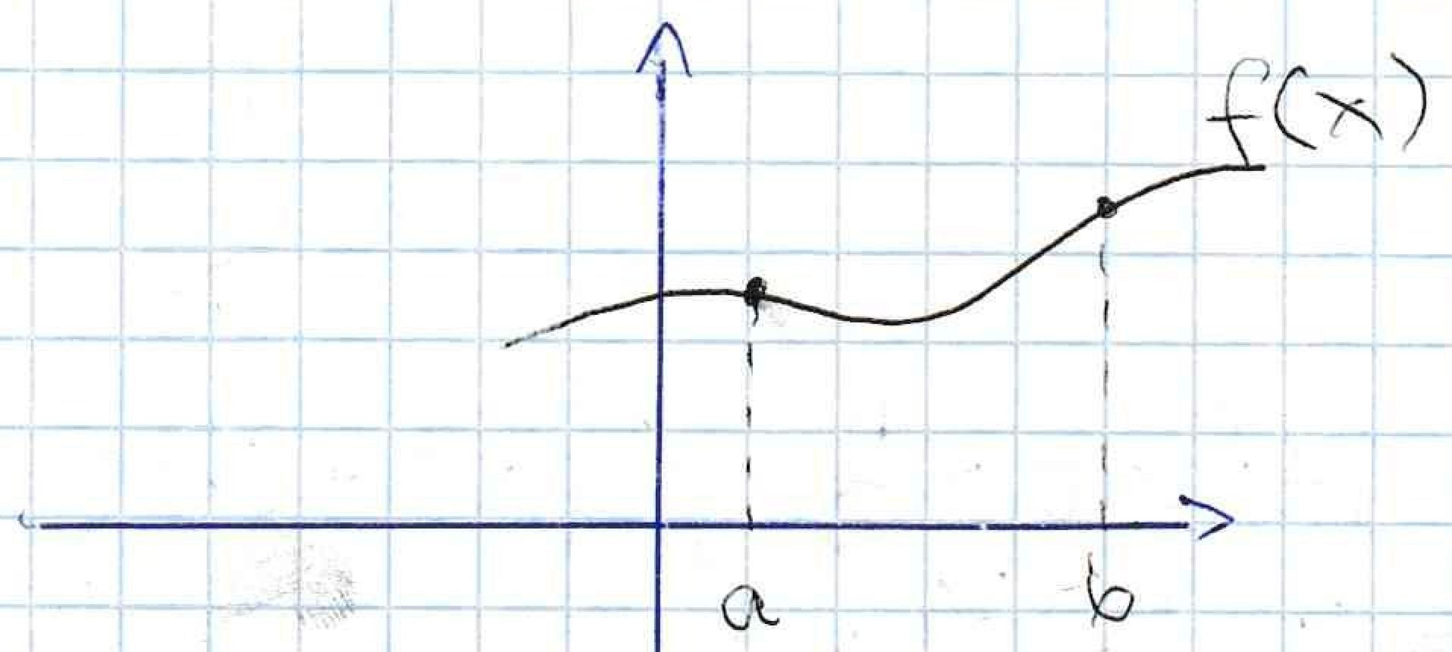
$$\ldots = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]\Big|_1^\varepsilon = \left[-\frac{1}{2\varepsilon^2}\right] - \left[-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[-\frac{1}{2\cdot\infty^2} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right]$$

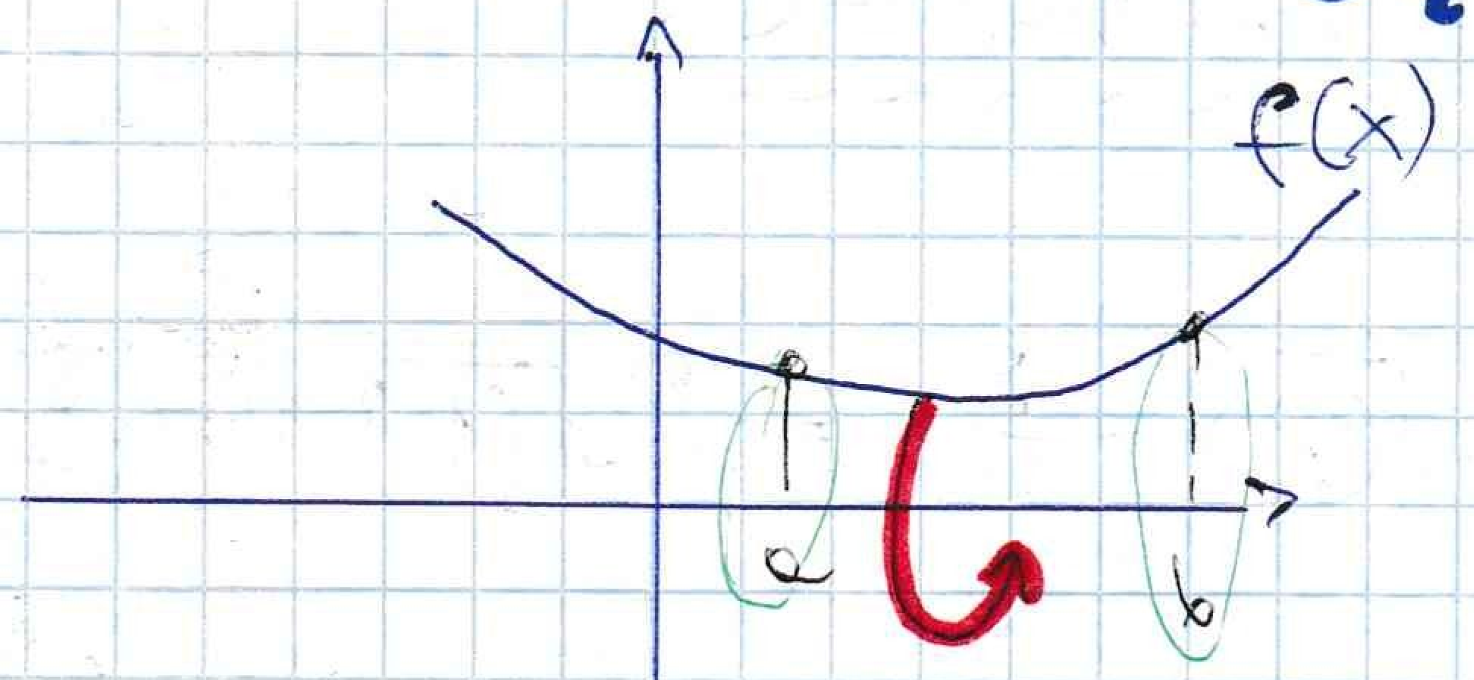
OBLICZANIE DŁ. ŁUKÓW, OBJĘTOŚCI I PÓL POWIERZCHNI BRYŁ OBROTOWYCH

DŁ. ŁUKU



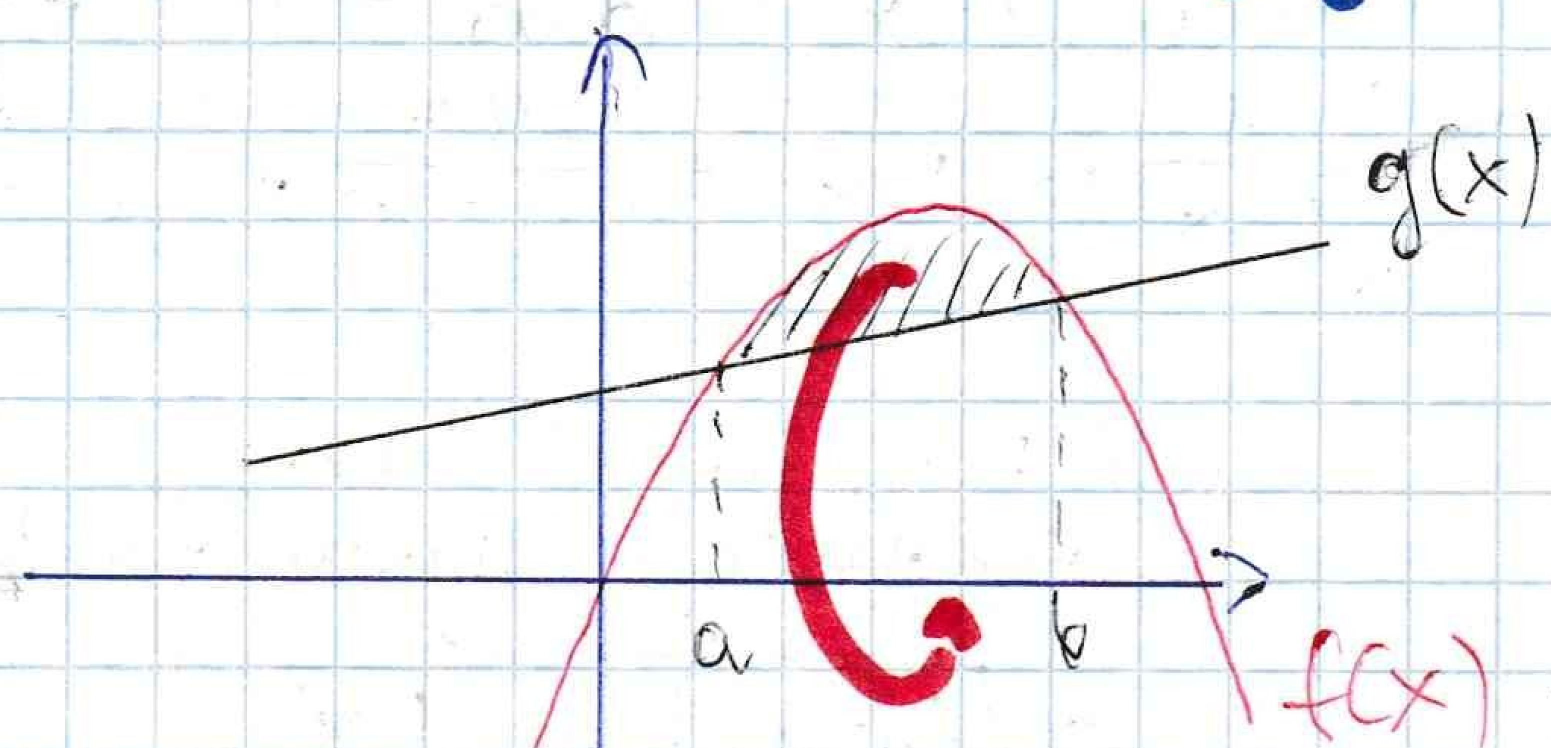
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

OBJĘTOŚĆ I



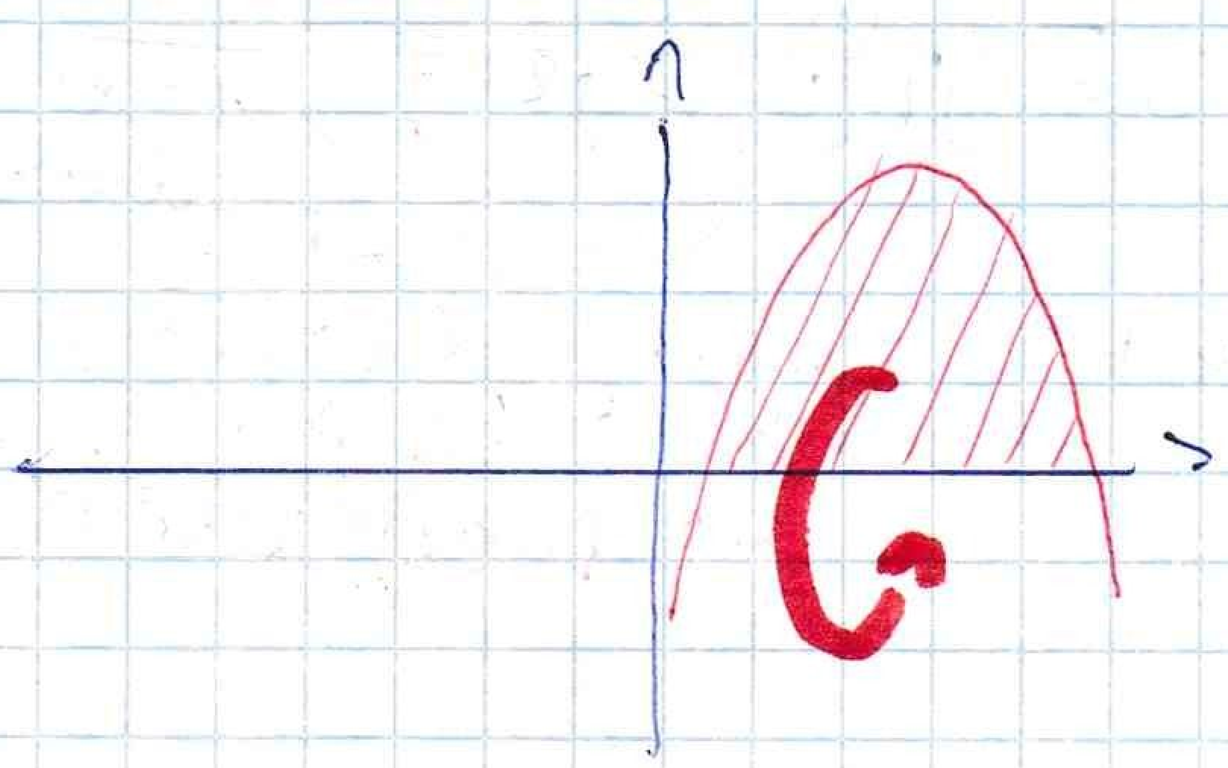
$$V = \pi \int_a^b [f^2(x)]\, dx$$

OBJĘTOŚĆ II



$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx$$

POLE POWIERZCHNI



$$P_p = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

dla $f(x) > 0$

Oblicz długość łuku krzywej $y=\sqrt{x^3}+2$ dla $x\in\langle 0,2\rangle$

WZÓR $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2x}\,dx=\dots$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}=\int\sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}dt=\frac{4}{9}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{3}{2}}+C=$$

$t=1+\frac{9}{4}x$

$dt=\frac{9}{4}dx$

$\frac{4dt}{9}=dx$

$$=\frac{8}{27}t^{3/2}+C=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}+C$$

$$\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}+C$$

$$\dots=\left[\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right]\Big|_0^2=$$

$$=\left[\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{2}\right)^3}\right]-\left[\frac{8}{27}\sqrt{(1)^3}\right]=\frac{8}{27}\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^3}-\frac{8}{27}=\frac{8}{27}\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2\cdot\frac{11}{2}}-\frac{8}{27}=$$

$$=\frac{44}{27}\sqrt{\frac{11}{2}}-\frac{8}{27}$$

Oblicz dł. łuku krzywej $y=\ln(1-x^2)$ dla $-\frac{1}{2}\le x\le 0$

$$y'=(\ln(1-x^2))'=\frac{1}{1-x^2}(1-x^2)'=\frac{1}{1-x^2}\cdot -2x=\frac{-2x}{1-x^2}$$

$$L=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{1+\left[\frac{-2x}{1-x^2}\right]^2}\,dx=\dots$$

MYK: sprowadź do wspólnego mianownika

$$\int\sqrt{1+\left[\frac{-2x}{1-x^2}\right]^2}dx=\int\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}dx=$$

$$=\int\sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int\sqrt{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$

dla $x>0$

$\sqrt{x^2}=|x|$

mogę ominąć || bo całkuję w przedziale $(0;\frac{1}{2})$

CAŁKA WYMIERNA

$$=\int\left(-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$\frac{-1}{(x^2+1):(-x^2+1)}$$
$$\frac{-x^2+1}{2}$$

$$=-\int dx+2\int\frac{1}{x^2+1^2}=$$

$$=-x+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

$$\dots=\left[-x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}=\left[-0-\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|\right]-\left[+\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right|\right]=$$

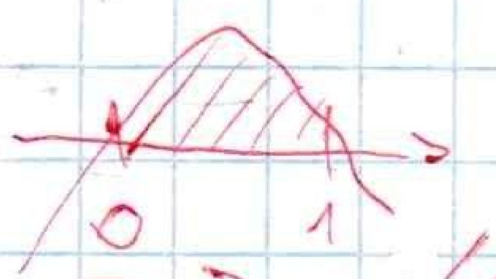
$$=-\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=-\frac{1}{2}+\ln\left|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\right|=-\frac{1}{2}+\ln 3$$

Oblicz dł. łuku krzywej $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$

Nie mamy podanych granic całkowania

- argumentami arcsin $(-1;1)$
- $x \geq 0$ 1)
- $x-x^2 \geq 0$ 2)

$x(1-x)\geq 0$



$x=0 \vee x=1 \Rightarrow \langle 0;1\rangle$

3) $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Czyli $\rightarrow$ $x\in\langle 0;1\rangle$ przedział całkowania

$$y'=(\arcsin\sqrt{x})'+(\sqrt{x-x^2})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})'+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot(x-x^2)'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}(1-2x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}+\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2-2x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}=\frac{1-x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left[\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right]^2}\,dx=\ldots$$

$$\int\sqrt{1+\frac{1-x}{x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1-x}{x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1}{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+C=\underline{2\sqrt{x}+C}$$

$$\ldots=[2\sqrt{x}]\Big|_0^1=[2\sqrt{1}]-[2\sqrt{0}]=2$$

Oblicz dł. łuku krzywej $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$ dla $2\leq x\leq 4$

$$y'=(e^{x/2})'+(e^{-x/2})'=e^{x/2}\left(\frac{x}{2}\right)'+e^{-x/2}\left(-\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}e^{x/2}-\frac{1}{2}e^{-x/2}$$

$$L=\int_2^4\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}e^{x/2}-\frac{1}{2}e^{-x/2}\right]^2}\,dx=\ldots$$

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{2}e^{0}+\frac{1}{4}e^{-x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-x}}\,dx=$$

$$=\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{x/2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}e^{x/2}\frac{1}{2}e^{-x/2}+\left(\frac{1}{2}e^{-x/2}\right)^2}\,dx=\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{x/2}+\frac{1}{2}e^{-x/2}\right)^2}\,dx=$$

$= \frac{1}{2}\int e^{x/2}dx + \frac{1}{2}\int e^{-x/2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} + C =$

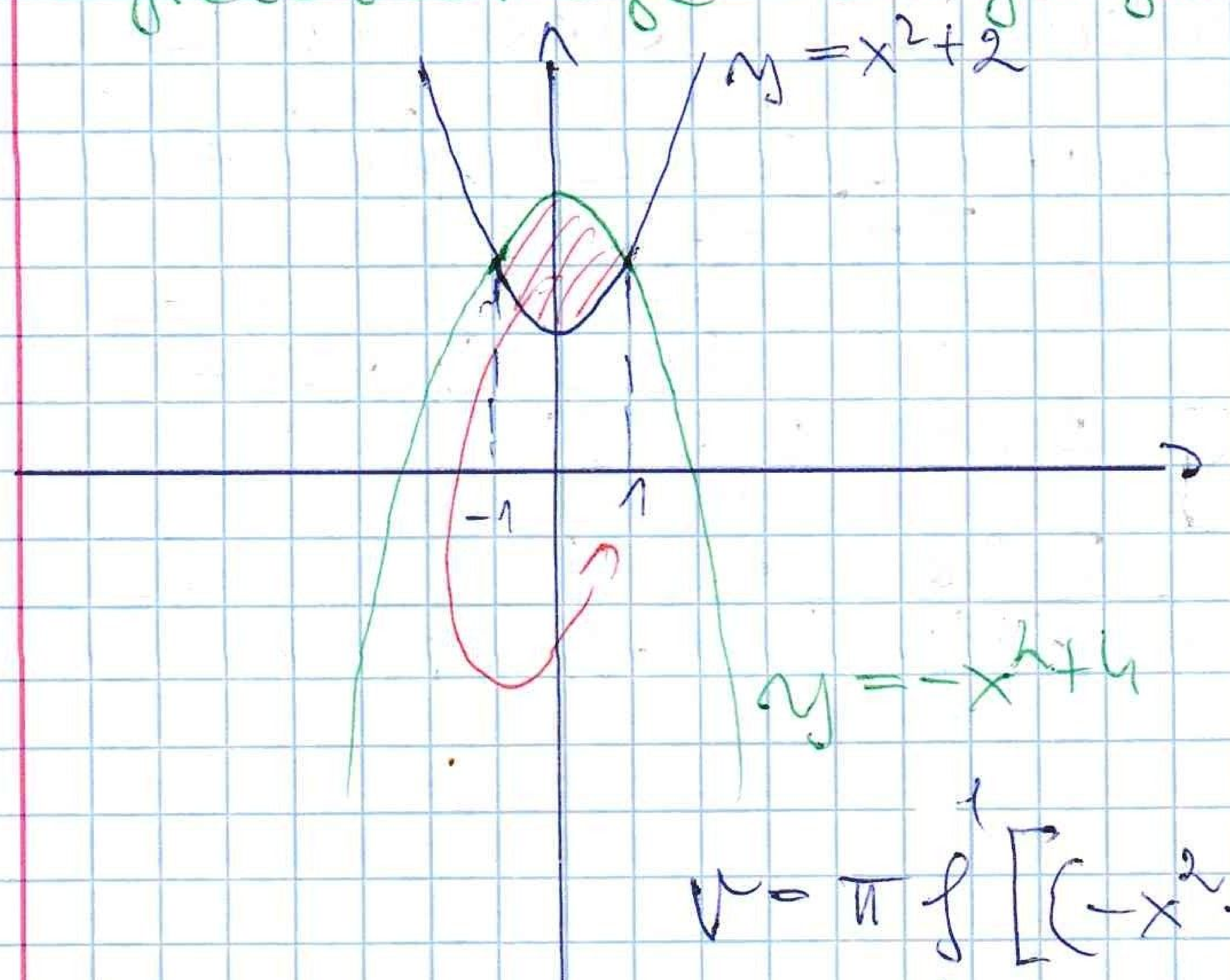
$= e^{x/2} - e^{-x/2} + C$

$\dots = [e^{x/2} - e^{-x/2}]\Big|_2^4 = [e^2 - e^{-2}] - [e - e^{-1}] =$

$= e^2 - e^{-2} - e + e^{-1}$

Oblicz V bryły obrotowej powstałej poprzez obrót ograniczonego krzywymi $y = x^2+2$ $y = -x^2+4$

(kręci się dookoła osi OX)



$V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

$V = \pi\int_{-1}^{1}[(-x^2+4)^2 - (x^2+2)^2]dx = \dots$

$\int[(-x^2+4^2) - (x^2+2)^2]dx = \int[(4-x^2)^2 - (x^4+4x^2+4)]dx =$

$= \int[16 - 8x^2 + x^4 - x^4 - 4x^2 - 4]dx = \int[12 - 12x^2]dx = 12\int dx - 12\int x^2 =$

$= 12x - 4x^3 + C$

$\dots = [12x - 4x^3]\Big|_{-1}^{1} = \pi[12-4] - \pi[-12+4] = 8\pi + 8\pi = 16\pi \ [j^3]$

Oblicz pole powierzchni bryły obrotowej powstałej poprzez obrót krzywej $f(x) = \sqrt{x+1}$ dla $0 \le x \le 1$ dookoła osi OX

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot(x+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\qquad P_p = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

$P_p = 2\pi\int_0^1\sqrt{x+1}\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]^2}dx$

$\int\sqrt{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x+1)}}dx = \int\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{4(x+1)}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)}}dx = \int\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{4x+4+1}{4(x+1)}} =$

$= \int\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{4x+5}{4(x+1)}}dx = \int\cancel{\sqrt{x+1}}\frac{\sqrt{4x+5}}{2\cancel{\sqrt{x+1}}} = \frac{1}{2}\int\sqrt{4x+5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int t^{1/2}dt =$

$t = 4x+5 \quad dt = 4dx \quad \frac{dt}{4} = dx$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{3/2}+C = \frac{1}{12}x^{3/2} = \frac{1}{12}(4x+5)^{3/2}+C = \frac{1}{12}\sqrt{(4x+5)^3}+C$$

$$\ldots = 2\pi\left[\frac{1}{12}\sqrt{(4x+5)^3}\right]\Big|_0^1 = 2\pi\left[\frac{1}{12}\sqrt{(4\cdot 1+5)^3}\right] - 2\pi\left[\frac{1}{12}\sqrt{(4\cdot 0+5)^3}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\sqrt{9^3} - \frac{\pi}{6}\sqrt{5^3} = \frac{\pi}{6}\cdot 27 - \frac{\pi}{6}5\sqrt{5} = \frac{9}{2}\pi - \frac{5}{6}\pi\sqrt{5}$$

KRYTERIUM CAŁKOWE ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

Mamy szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Tworzymy do niego funkcję $f(x)$, taką że $f(n) = a_n$ (zastępujemy n w ciągu x-em).

Jeśli funkcja ta jest malejąca, dodatnia dla $x \geq n_0$, liczymy całkę $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$

Jeżeli całka $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Jeżeli całka $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna, szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty}$ też jest rozbieżny.

ZBADAMY ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln x}$ dla $x \geq 2$

- $f(x)$ jest dodatnia, bo $x>0$ i $\ln x>0$
- $f(x)$ jest malejąca, bo x i $\ln x$ rosną

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\int_2^{\varepsilon}\frac{1}{x\ln x}dx\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\ln|\ln x|\right]\Big|_2^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\underbrace{\ln|\ln\varepsilon|}_{\to\infty} - \ln|\ln 2|\right) = \infty$$

Na mocy kryt. całkowego szereg jest rozbieżny

SZEREGI FUNKCYJNE