LISTA 5

ZAD 1. ILE JEST PODZBIORÓW ZBIORU n KOLEJNYCH LICZB NATURALNYCH, W KTÓRYCH NIE WYSTĘPUJĄ DWIE KOLEJNE LICZBY?

Niech $P(n)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru n kolejnych liczb naturalnych tj. $\{1, 2, \ldots, n\}$, w których $\underbrace{\text{nie występują}}_{*}$ dwie kolejne liczby.

dla $n=0$ $P(0)=\{\emptyset\}$ zatem $|P(0)|=1$
dla $n=1$ $P(1)=\{\emptyset,\{1\}\}$ zatem $|P(1)|=2$

Tworząc podzbiory zbioru n-elementowego możemy to zrobić na dwa sposoby ze względu na n. Możemy stworzyć podzbiór zawierający n — wówczas podzbiór taki możemy otrzymać z dowolnego podzbioru zbioru $\{1,2,\dots,n-2\}$ ($n-2$ a nie $n-1$, bo skoro nasz podzbiór zawiera n to może zawierać $n-1$) i spełniającego warunek (*). Możemy też stworzyć podzbiór nie zawierający liczby n. Wówczas liczba takich podzbiorów jest równa liczbie podzbiorów zbioru $\{1,2,\dots,n-1\}$ spełniających warunek (*).

Oznaczmy zatem liczbę podzbiorów zbioru $\{1,2,\dots,k\}$, $k\in\mathbb{N}$, w których nie występują dwie kolejne liczby jako $L(k)$. $(L(k)=|P(k)|)$

Wówczas z powyższej reguły możemy zapisać, że dla $k\in\mathbb{N} \wedge k>1$

$$L(k)=L(k-1)+L(k-2)$$

(oczywiście możemy dodać liczby tych podzbiorów, ponieważ do każdego z podzbiorów $P(k-2)$ dodaliśmy element k, natomiast żaden z podzbiorów $P(k-1)$ nie zawiera liczby k.

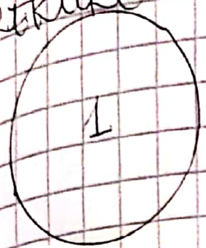
Otrzymujemy więc w ogólności wzór:

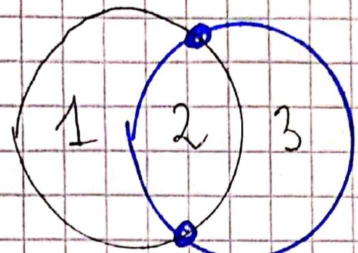
$$L(n)=\begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \\ 2 & \text{dla } n=1 \\ L(n-1)+L(n-2) & \text{dla } n>1 \end{cases}$$

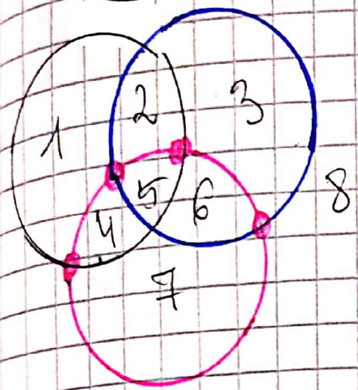
Zauważmy, że jest to przeindeksowany ciąg Fibbonacciego

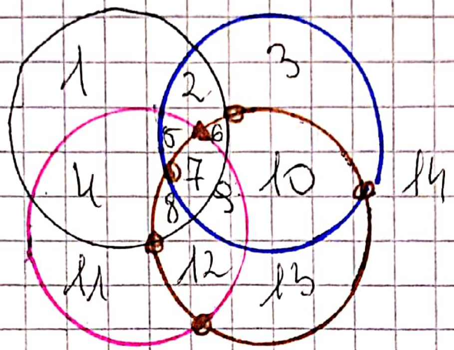
$$L(n)=F_{n+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ZAD 7 NA PŁASZCZYŹNIE DANYCH JEST N OKRĘGÓW. JAKA JEST MAKSYMALNA LICZBA OBSZARÓW, NA KTÓRE DZIELĄ ONE PŁASZCZYZNĘ. WYPROWADŹ ROZWIĄZANIE ZA POMOCĄ ODPOWIEDNIEJ ZALEŻNOŚCI REKURENCYJNEJ.









dotyczące maksymalnej ilości pkt przecięcia

$K(1) = 2$ obszary $\quad K(3) = 8$

$K(2) = 4$ obszary $\quad K(4) = 14$

Wprowadźmy obserwacje:

Okrąg 1 ma 0 pkt wspólnych (z innymi okręgami)

Okrąg 2 ma 2 pkt wspólne (ze wszystkimi okręgami)

Okrąg 3 ma 4 pkt wspólne —"—

Okrąg 4 ma 6 pkt wspólnych —"—

⋮

Okrąg n ma $2(n-1)$ pkt wspólnych z poprzednimi $(n-1)$ okręgami

Zauważmy, że liczba obszarów okręgu n to liczba obszarów już wyznaczonych przez n-1 okręg dodać ilość pkt wspólnych okręgu n.

$O(n)$ - liczba obszarów jaką możemy maksymalnie wyznaczyć przez podział płaszczyzny n okręgami

więc
$$O(n) = \begin{cases} 2 & \text{dla } n=1 \\ O(n-1)+2(n-1) & n>1,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$O(n-1)+2(n-1) = O(n-2)+2(n-2)+2(n-1) =$$
$$= O(n-3)+2(n-3)+2(n-2)+2(n-1) =$$
$$= O(1)+2(2-1)+\ldots+2(n-2)+2(n-1) =$$
$$= 2+2(1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)) = 2+2\left(\frac{(1+n-1)\cdot n}{2}\right) =$$
$$= 2+n^2$$

ZAD 2. WŚRÓD LICZB NATURALNYCH 1,2, ... 800, ILE JEST TAKICH, KTÓRE NIE SĄ PODZIELNE PRZEZ 7, ALE SĄ PODZIELNE PRZEZ 6 LUB PRZEZ 8

- Ile jest liczb podzielnych przez 6?

$$\left\lfloor \frac{800}{6} \right\rfloor = 133$$

- Ile jest liczb podzielnych przez 8?

$$\left\lfloor \frac{800}{8} \right\rfloor = 100$$

- Liczb podzielnych przez 6 i 8 jest więc $100 + 133 = 233$, ale liczby podzielne jednocześnie przez 6 i 8 policzyliśmy 2 razy. Odejmujmy je:

$$233 - \left\lfloor \frac{800}{NWW(6,8)} \right\rfloor = 233 - \left\lfloor \frac{800}{24} \right\rfloor = 233 - 33 = 200$$

- Ale od tego wyniku musimy odjąć jeszcze

A) - liczby podzielne przez 6 i 7
B) - liczby podzielne przez 7 i 8
C) - po odjęciu podpunktu A i B okaże się, że dwukrotnie odjęliśmy liczby podzielne przez 6, 7 i 8

A) $\left\lfloor \frac{800}{NWW(6,7)} \right\rfloor = \frac{800}{42} = 19$ B) $\left\lfloor \frac{800}{NWW(7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{800}{56} \right\rfloor = 14$

C) $\left\lfloor \frac{800}{NWW(6,7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{800}{168} \right\rfloor = 4$

ODP. $200 - 19 - 14 + 4 = 171$

ZAD 3. KORZYSTAJĄC Z ZASADY WŁĄCZEŃ-WYŁĄCZEŃ OBLICZ, ILE JEST SPOSOBÓW USTAWIENIA LITER a, a, a, a, b, b, b, c, c W TAKI SPOSÓB, ABY TAKIE SAME LITERY NIE TWORZYŁY JEDNEGO BLOKU, T.J.N. USTAWIENIE a, a, a, a, b, c, b, c, b JEST ZAKAZANE, ALE USTAWIENIE a, a, a, b, a, c, b, c, b

Scanned with CamScanner

JEST DOBRE

$$|\Omega| = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 1260$$

ILE JEST WSZYSTKICH USTAWIEŃ?

dla c dla b dla a

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „a" W BLOKU?

$$6 \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{6 \cdot 5!}{2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 60$$

ustawienie c na pozostałych miejscach

sposoby ułożenia bloku

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „b" W BLOKU?

$$7 \cdot \binom{6}{2} = \frac{7 \cdot 6!}{2!(6-2)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6}^{3} \cdot 5}{\cancel{2}} = 105$$

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „c" W BLOKU?

$$8 \cdot \binom{7}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 280$$

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „a" i „b" W BLOKACH?

$$2 \cdot \binom{4}{2} = 3 \cdot 4 = 12$$

bo „a" zamiennie z „b"

na jeden blok a
na jeden blok b
_ _ _ _ i 2×c

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „a" i „c" W BLOKACH

$$2 \cdot \binom{5}{3} = 2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 20$$

_ _ _ _ _

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „b" i „c" W BLOKACH

$$2 \cdot \binom{6}{4} = 2 \cdot \frac{6!}{4! \, 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 30$$

• ILE JEST MOŻLIWOŚCI USTAWIEŃ „a", „b" i „c" W BLOKACH?

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Korzystając ze wzoru włączeń i wyłączeń obliczamy:

Scanned with CamScanner

$1260-(60+105+280-12-20-30+6)=$
$=1260-389=\underbrace{871}_{\text{odp.}}$

ZAD. 2* liczba $\in\langle 1;800\rangle$ podzielna przez p wyraża się wzorem $\left\lfloor \frac{800}{p} \right\rfloor$

$a_n = 800$
$a_1 = p$
$r = p$

$a_n = (n-1)\cdot r + a_1$
$800 = (n-1)\cdot r + a_1$
$800 = rn - r + a_1$
$800 = p\cdot n - p + p$
$800 = p\cdot n$
$n = \left\lfloor \frac{800}{p} \right\rfloor$

ZAD. 10 ILE JEST RÓŻNYCH SPOSOBÓW WEJŚCIA PO SCHODACH ZBUDOWANYCH Z N STOPNI, JEŚLI W KAŻDYM KROKU MOŻNA POKONAĆ JEDEN LUB DWA STOPNIE.

S_n - schodek o numerze n

Na pierwszy schodek możemy wejść na 1 sposób $S_1 = 1$

Na drugi na dwa sposoby $S_2 = 2$

Na n-ty schodek możemy wejść z $(n-1)$ schodka lub $(n-2)$ schodka

Zauważmy, że na wejście na n-ty schodek możemy zapisać następującą zależnością rekurencyjną:

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = 2 \\ S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad \text{dla } n > 2 \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że S_n opisuje $(n+1)$ liczbę Fibonacciego zatem $S_n = F_{n+1}$.

Wiemy, że wzór ogólny ciągu Fibonacciego jest równy:

$$F_n = 1/\sqrt{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Zatem na n-ty schodek możemy

wejść na F_{n+1} sposobów, gdzie

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$ odpowiednio jest odpowiednio liczba Fib.

ZAD. 11 BALTAZAR GĄBKA MA 7 PRZYJACIÓŁ. OKREŚL, NA ILE SPOSOBÓW MOŻE ZAPRASZAĆ PO 3 Z NICH NA KOLACJĘ PRZEZ 7 KOLEJNYCH DNI TAK, ABY KAŻDY Z NICH ZOSTAŁ ZAPROSZONY CONAJMNIEJ RAZ

Na ile sposobów Baltazar może zaprosić po 3 przyjaciół na 7 dni − conajmniej jeden znajomy nie został zaproszony ani razu. (tutaj kilkukrotnie odjęliśmy sytuacje, w których 2 znajomych nie zostało zaproszonych TRZEBA JE DODAĆ

$$\binom{7}{3}^7 - \binom{7}{1}\binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7 =$$

SYTUACJA, GDY nie zaprosimy ani razu 1 osoby

nie zaprosimy ani razu 2 osób

3 osób

4 osób

wybieramy 3 osoby z pozostałych 6

$$= 35^7 - 7\cdot 20^7 + 21\cdot 10^7 - 35\cdot 4^7 + 35 =$$

$$= 55588723470$$

ZAD. 6 PODWÓJNA WIEŻA HANOI SKŁADA SIĘ Z 2N KRĄŻKÓW N RÓŻNYCH ROZMIARÓW PO 2 KRĄŻKI KAŻDEGO ROZMIARU. W JEDNYM KROKU PRZENOSIMY DOKŁADNIE JEDEN KRĄŻEK, NIE MOŻEMY KŁAŚĆ WIĘKSZEGO KRĄŻKA NA MNIEJSZYM. ILE KROKÓW JEST POTRZEBNYCH, ABY PRZENIEŚĆ WIEŻĘ Z PRĘTA A NA PRĘT B, POSŁUGUJĄC SIĘ PRZY TYM PRĘTEM C?

Zależność rekurencyjna dla regularnej wieży Hanoi:

$$\begin{cases} L(1) = 1 \\ L(n) = L(n-1) + 1 + L(n-1) & n > 1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

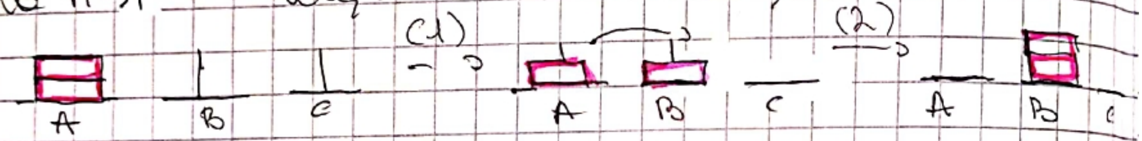
gdzie $L(n)$ -> liczba kroków które trzeba wykonać aby przenieść wieżę złożoną z n krążków

-> Skąd?

1) przełożenie wieży o wysokości $(n-1)$ z pręta A na pręt C to $L(n-1)$ ruchów
2) przełożyć k-ty krążek na pręt B to 1 ruch
3) przełożyć wszystkie krążki na pręt B z pręta C to $L(n-1)$ ruchów.

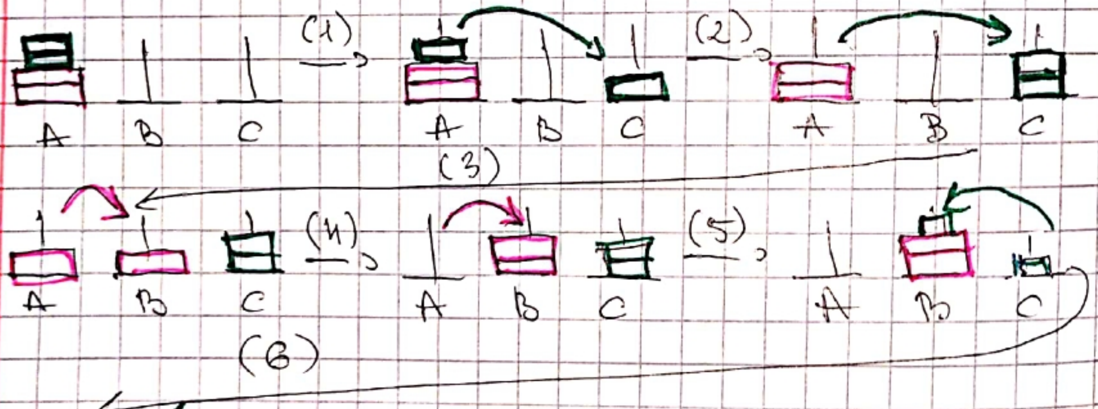
Podwójna wieża Hanoi:

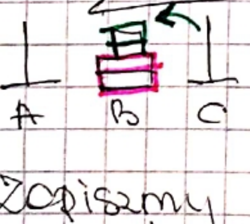
dla $n=1$ -> wieża składa się z 2 klocków



Zrobiliśmy to w 2 ruchach

dla $n=2$ -> wieża składa się z 4 klocków





Zrobiliśmy to w 6 ruchach.

Zapiszmy zależność rekurencyjną dla podwójnej wieży Hanoi

$$\begin{cases} H(2) = 2 \\ H(n) = H(n-2) + 2 + H(n-2) & n > 2 \end{cases}$$

$H(2n)$ - to liczba kroków, w których przeniesiemy $2n$ krążków.

Scanned with CamScanner

Skąd się bierze ta złożoność?
1) przełożenie wieży o wysokości n-2 z pręta A na pręt C to H(n-2) kroków
2) przełożyć 2n-ty i (2n-1)-krążek z pręta A na pręta B (2 kroki)
3) przełożyć wieżę o wysokości (2n-2) na pręt C z pręta B to H(n-2) ruchów.