WYKŁADY

WYKŁAD 1

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m.

Innymi słowy: $|\{f: A \to B\}| = n^m$

TOMEK CHCIAŁBY WYSŁAĆ PO WIDOKÓWCE DO KAŻDEGO Z 7 SWOICH PRZYJACIÓŁ. NA ILE SPOSOBÓW MOŻE TO ZROBIĆ, JEŚLI WIDOKÓWEK NA ULICZNYM STRAGANIE JEST 13 RODZAJÓW?

13^7

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru A do B wynosi

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

TOMEK CHCIAŁBY WYSŁAĆ PO WIDOKÓWCE DO KAŻDEGO Z 7 SWOICH PRZYJACIÓŁ. NA ILE SPOSOBÓW MOŻE TO ZROBIĆ, JEŚLI WIDOKÓWEK JEST 13 RODZAJÓW, ALE Z KAŻDEGO RODZAJU ZOSTAŁO TYLKO JEDNA?

$13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 7$

....../....../........

LICZBA PODZBIORÓW

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach. Wtedy $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$.

PARA PODZBIORÓW

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy wybrać dwa jego podzbiory A i B takie że $A \subseteq B$.

$|\{(A,B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \to \{0,1,2\}\}| = 3^n$

PERMUTACJE

Niech U będzie zbiorem n-elementowych. Na ile sposobów możemy ustawić w rzędzie jego elementy? Na tyle ile jest fun. różnowartościowych

$|\{f : U \to \{1,2 \ldots n\}, 1-1\}| = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

SUFIT PODŁOGU

Niech $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$

$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n+1$ podłoga z x

$\lceil x \rceil = n \iff n-1 < x \leq n$ sufit z x

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ część ułamkowa x

SUFIT PODŁOGA - WŁASNOŚCI

Niech $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{Z}$

$\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, bo
$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$

$\lceil x + m \rceil = m + \lceil x \rceil$

$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

WYKŁAD 2

PODZBIORY K-ELEMENTOWE

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

$|U| = \{1,2, \ldots, n\}$

$P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$

Porównajmy P_n^k z wariacjami k-elementowymi bez powtórzeń.

$|D| = \{1,2 \ldots k\}$

$F_{k,n}^{1-1} = \{f : D \to U : f$ różnowartościowe$\}$

Dla $k = 1$ zachodzi $|F^{1-1}_{k,n}| = |P^k_n|$

Dla $k > 1$ zachodzi $|F^{1-1}_{k,n}| > |P^k_n|$

ILE JEST K-ELEMENTOWYCH PODZBIORÓW ZBIORU N-ELEMENTOWEGO?

- Elementy k-elementowego podzbioru U możemy ustawić na $k!$ sposobów.
- Każdemu k-elem. podzbiorowi A odpowiada $k!$ funkcji różnowartościowych $\{1,2,\dots,k\} \to A$
- Każdemu k-elem. podzbiorowi A odpowiada $k!$-elem zbiór Z^A
- $F^{1-1}_{k,n} = \bigcup_{A \subseteq U, |A|=k} Z^A$
- $|F^{1-1}_{k,n}| = k!|P^k_n|$
- $\frac{n!}{(n-k)!} = k!|P^k_n|$
- $|P^k_n| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

SYMBOL NEWTONA - własności

Niech $k,n \in \mathbb{N}$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Niech $k,n \in \mathbb{N}$ takie, że $0 \leq k < n$
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

KULKI I SZUFLADKI

Na ile sposobów można wrzucić n (nierozróżnialnych) kulek do k (rozróżnialnych) szuflad?

Zakodujmy każdą kulkę jako zer i każdy oddzielacz szufladki jako „zero"
PRZYKŁAD: 001000 oznacza 2 kulki w pierwszej, 0 kulek w drugiej, 3 kulki w trzeciej.

Na tyle, ile jest ciągów złożonych z n zer i k-1 jedynek

Każdy taki ciąg ma długość $n+k-1$.
Trzeba wybrać $k-1$ miejsc spośród $n+k-1$, na których postawimy jedynkę.

ODP. $\binom{n+k-1}{k-1}$

DWUMIAN NEWTONA

Dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

ASYMPTOTYKA - FUNKCJA DUŻE O

Niech $f, g: N \to R_{\geq 0}$

$f(n) = O(g(n)) \iff \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq c \cdot g(n)$

ASYMPTOTYKA - FUNKCJA MAŁE O

Niech $f, g: N \to R_{\geq 0}$

$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

CZY $f(n) = O(f(n))$?
$n_0 = 0$, $c = 1$

CZY $f(n) = O\left(\frac{f(n)}{100}\right)$?
$n_0 = 0$, $c = 100$

CZY $10^6 n = O(n^2)$?
$n_0 = 10^6$, $c = 1$

CZY $f(n) = o(f(n))$? NIE

CZY $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ TAK

CZY $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow g(n) = o(f(n))$ NIE

DUŻE O

Niech $c, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$

- $\forall_{\alpha, \beta}\ \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1}\ n^c = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0}\ (\ln n)^c = O(n^\alpha)$

INNE FUNKCJE

- $f(n) = \Omega(g(n)) \iff \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \geq c g(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \omega(g(n)) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

SUMA HARMONICZNA

$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

$G_k = \{ i : \frac{1}{2^k} < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \}$

FUNKCJA TWORZĄCA

ciąg $(a_0, a_1, a_2 \ldots) \longleftrightarrow$ fun. tworząca $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

PRZYKŁADY:

$(1, 1, \ldots 1) \longleftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

$(1, 2, 4, \ldots) \longleftrightarrow 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \frac{1}{1-2x}$

$(0, 0, 1, 1 \ldots) \longleftrightarrow x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{x^2}{1-x}$

....../....../.........

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$ jego funkcją tworzącą.

Funkcja tworząca dla ciągu $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, \dots)$ to $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_i x^{2i} + \dots = A(x^2)$

Funkcja tworząca dla ciągu $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, \dots)$ to $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \dots + a_i x^{3i} + \dots = A(x^3)$

ZAD. Jak znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$ jego funkcją tworzącą.

$$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \dots + a_i (-x)^i + \dots$$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2}$$

ZAD. Jak znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu: $(0, a_1, 0, a_3, 0, \dots)$

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$ jego funkcja tworząca.

$$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots + a_i (-x)^i + \dots$$

$$\frac{A(x) - A(-x)}{2}$$

ZAD. Jak znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$?

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$ jego funkcja tworząca.

$$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + i a_i x^{i-1} + \dots$$

$$A'(x) \cdot x$$

ANIHILATOR

/....../.........

PEŁNE OPERATORY KTÓRE DZIAŁAJĄ NA CIĄGI

OPERATOR PRZESUNIĘCIA

$\langle a_n \rangle = (a_0, a_1, \dots a_n \dots)$

$E \langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = (a_1, a_2 \dots a_n \dots)$

$E^2 \langle a_n \rangle = E(E\langle a_n \rangle) = (a_2, a_3 \dots a_n \dots)$

OPERATOR DODAWANIA

$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = (a_0+b_0, a_1+b_1 \dots)$

PRZEMNOŻENIE PRZEZ STAŁĄ

$c \cdot \langle a_n \rangle = \langle c \cdot a_n \rangle = (c \cdot a_0, c \cdot a_1, \dots)$

ANIHILATOR CIĄGU - operator O jest anihilatorem ciągu $\langle a_n \rangle$ jeśli $O\langle a_n \rangle = \langle \emptyset \rangle = \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset \dots \rangle$

Operator mnożenia przez $\emptyset$ jest trywialnym anihilatorem każdego ciągu dlatego nie jest traktowany jako anihilator.

PRZYKŁADY

JAKI OPERATOR ANIHILUJE ... ?

1) ciąg $\langle \pi \rangle = (\pi, \pi, \pi \dots)$

$(E-1)\langle \pi \rangle = (\pi, \pi, \pi \dots) - (\pi, \pi, \dots) = (0, 0, 0 \dots)$

2) ciąg $\langle 2^n \rangle = (1, 2, 4, 8 \dots)$

$(E-2)\langle 2^n \rangle = (2, 4, 8 \dots) - (2, 4, 8 \dots) = (0, 0, \dots)$

3) ciąg $\langle \pi \cdot 2^n \rangle = (\pi, 2\pi, 4\pi \dots 2^n\pi \dots)$

$(E-2)\langle \pi \cdot 2^n \rangle = (2\pi, 4\pi \dots) - (2\pi, 4\pi \dots)$

4) ciąg $\langle 2^n + 3^n \rangle = (2, 5, 13 \dots 2^n + 3^n \dots)$

$(E-2)\langle 2^n + 3^n \rangle = E\langle 2^n + 3^n \rangle - 2\langle 2^n + 3^n \rangle =$

$= \langle 2^{n+1} + 3^{n+1} - 2^{n+1} + 3^n \cdot 2 \rangle = \langle 3^{n+1} - 3^n \cdot 2 \rangle =$

$= \langle 3 \cdot 3^n - 3^n \cdot 2 \rangle = \langle 3^n \cdot 1 \rangle = \langle 3^n \rangle$

$(E-3)\langle 3^n \rangle = \langle 0 \rangle$

czyli

$(E-3)(E-2)\langle 2^n + 3^n \rangle = \langle 0 \rangle$

$(E-2)(E-3)\langle 2^n + 3^n \rangle = \langle 0 \rangle$

5) ciąg $\langle n \cdot 2^n \rangle = (0, 2, 8, 24, \ldots)$ ....../....../...

$$(E-2)\langle n \cdot 2^n \rangle = E\langle n \cdot 2^n \rangle - 2\langle n \cdot 2^n \rangle =$$
$$= \langle n+1 \cdot 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+1} \rangle = \langle 2^{n+1}(n+1-n) \rangle =$$
$$= \langle 2^{n+1} \cdot 1 \rangle = \langle 2^{n+1} \rangle$$

$$(E-2)\langle 2^{n+1} \rangle = \langle 0 \rangle$$

$$(E-2)(E-2)\langle n \cdot 2^n \rangle = \langle 0 \rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$(E^2 - 4E - 4)\langle n \cdot 2^n \rangle = \langle 0 \rangle$$

6) ciąg $\langle n^2 \cdot 2^n \rangle$

$(E-2)^3$

7) ciąg $n^2 \cdot 2^n - \frac{2^n}{3} + 7^n$

$(E-2)^3 (E-7)$

TAKI CIĄG ANIHILUJE OPERATOR ...?

1) $(E-2)$

$$(E-2)\langle a_n \rangle = 0$$
$$\forall n \geq 0 \ \langle a_{n+1} - 2a_n \rangle = 0$$
$$a_{n+1} = 2a_n \leftarrow \text{ciąg geometryczny o ilorazie 2}$$

Wyraz początkowy tego ciągu może być dowolny.

2) $(E-a)$ $\quad \alpha \cdot a^n$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad$ ciąg geometryczny o ilorazie a

3) $(E-2)^k$ $\quad \langle 2^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i \rangle$

4) $(E-c)^k$ $\quad \langle c^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i \rangle$

TRUDNIEJSZE

1) $a_0 = \pi$

$a_1 = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$

$E\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2 \ldots \rangle = \langle 7a_0, 7a_1 \ldots \rangle = 7\langle a_n \rangle$

W takim razie $(E-7)$ to anihilator $\langle a_n \rangle$

$\langle a_n \rangle = \langle \alpha 7^n \rangle$

Aby obliczyć α, rozwiążemy równanie $\alpha \cdot 7^0 = a_0 = \pi$ zatem $\alpha = \pi$.

2) $F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n>1$

JAKI OPERATOR ANIHILUJE $\langle F_n \rangle$

$E^2\langle F_n\rangle = \langle F_{n+2}\rangle = (F_2, F_3, \dots) = (F_0+F_1, F_1+F_2, \dots) =$
$= (F_0, F_1 \dots) + (F_1, F_2 \dots) = \langle F_n\rangle + E\langle F_n\rangle = (1+E)\langle F_n\rangle$

$\Delta = 5$

$x_1 = \frac{1-\sqrt5}{2}$ $\quad x_2 = \frac{1+\sqrt5}{2}$

$E^2 - (1+E)$
$E^2 - E - 1$ anihiluje $\langle F_n\rangle$

$E^2 - E - 1 = (E - \frac{1-\sqrt5}{2})(E + \frac{1-\sqrt5}{2})$

$F_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$

Aby obliczyć α i β rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} F_0 = 0 = \alpha + \beta \\ F_1 = 1 = \alpha\frac{1-\sqrt5}{2} + \beta\frac{1+\sqrt5}{2} \end{cases}$$

3) $a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n$ dla $n>1$

JAKI JEST ANIHILATOR $\langle a_n \rangle$?

$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \langle 4a_{n+1} - 4a_n + (n+2)2^{n+2}\rangle =$
$= 4\langle a_{n+1}\rangle - 4\langle a_n\rangle + \langle (n+2)2^{n+2}\rangle =$
$= 4E\langle a_n\rangle - 4\langle a_n\rangle + \langle (n+2)2^{n+2}\rangle =$
$= (4E-4)\langle a_n\rangle + \langle (n+2)2^{n+2}\rangle$

anihilowane przez $(E-2)^2$

$(E^2 - (4E-4))\cdot(E-2)^2 = (E^2-4E+4)(E-2)^2 = (E-2)^4$ to anihiluje

$2^n(\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta)$

$$\begin{cases} a_0 = 0 = 1\cdot\delta \\ a_1 = 1 = 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\ a_2 = 4\cdot1 - 4\cdot0 + 2\cdot2^2 = 4(8\alpha+4\beta+2\gamma+\delta) \\ a_3 = \quad = 8(27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta) \end{cases}$$

4) $a_0 = a_1 = 0$
$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + n$

$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \langle a_2, a_3, \dots\rangle = \langle 5a_1 - 6a_0 + 0\rangle = \langle 5a_{n+1} - 6a_n + (n+2)\rangle$
$= 5E\langle a_n\rangle - 6\langle a_n\rangle + \langle n+2\rangle$
$(E^2 - 5E + 6)\langle a_n\rangle = \langle n+2\rangle$
$(E^2-5E+6)(E-1)^2 = (E-2)(E-3)(E-1)^2$

5) $a_0 = a_1 = 0$
$a_{n+2} = a_n + 3 - \frac{1}{2^n}$

$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \langle a_n + 3 - \frac{1}{2^n}\rangle = \langle a_n\rangle + \langle 3 - \frac{1}{2^n}\rangle$

$(E^2-1)\langle a_n\rangle = \langle \underbrace{3 - \frac{1}{2^n}}_{(E-\frac12)(E-1)}\rangle$

WYKŁAD 3

ZASADA SZUFLADKOWA
Niech A i B będą skończonymi zbiorami. Wówczas jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A do B.

ZASADA SZUFLADKOWA
Niech $k, s \in \mathbb{N} > 0$
Jeśli wrzucimy $k > s \cdot i$ kulek do s szufladek, to w którejś szufladzie będą $i+1$ kulki

MODULO

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$

$n \bmod d = n - \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \cdot d$

$n \bmod d = r \iff 0 \leq r < d \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ n = kd + r$

$(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$

$(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$

SPOSOBY PRZEDSTAWIANIA MODULO

$a \equiv_n b \iff a \bmod n = b \bmod n$

$\Updownarrow$

$a \equiv b \mod n$

PODZIELNOŚĆ

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$

$d | n \iff \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ n = kd$

$d | n \iff n \bmod d = 0$

$d | n_1 \wedge d | n_2 \implies d | (n_1 + n_2)$

NWD $a, b \in \mathbb{N}$
$NWD(a,b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d | a \wedge d | b\}$

ALGORYTM EUKLIDESA
$a \geq b > 0$
$NWD(a,b) = NWD(b, a \bmod b)$
$NWD(a,0) = a$

ROZSZERZONY AL. E
$a \geq b > 0$
$\exists_{x,y \in \mathbb{Z}}\ xa + yb = NWD(a,b)$

LICZBY WZGLĘDNIE PIERWSZE

a i b są względnie pierwsze gdy $NWD(a,b)=1$

WYKŁAD 4

WZÓR WŁĄCZEŃ I WYŁĄCZEŃ

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I|=k} |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

$$|B \cup S \cup T \cup P| = |B| + |S| + |T| + |P| -$$
$$- |B \cap S| - \dots$$
$$+ |B \cap S \cap T| + \dots$$
$$- |B \cap S \cap T \cap P|$$

FIBONACCI

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n>1$

WYKŁAD 5 → ANIHILATORY

WYKŁAD 6

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \quad \equiv \quad C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n$$

C_n – liczby Catalana

$C_0 = 0$, dla $n>0$: $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$

↓

- liczba nawiasowania mnożenia
- liczba ścieżek
- liczba drzew binarnych (C_n → drzewa o n liściach)
- liczba monotonicznych ścieżek kratowych
- liczba podziałów Δ (C_n → wielokąt wypukły, na $(n+2)$ wierzchołków)

FUNKCJA TWORZĄCA (WCZEŚNIEJ)

Niech $\langle p_n \rangle$ = liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 5-złotówek

$p_n = 1$ dla n podzielnych przez 5, $p_n = 0$ w.p.p.

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^{5i} = \frac{1}{1-x^5}$$

Niech $\langle d_n \rangle$ = liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 2-złotówek.

$d_n = 1$ dla n podzielnych przez 2, $p_n = 0$ w p.p.

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} = \frac{1}{1-x^2}$$

Niech $\langle r_n \rangle$ = liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 2-złotówek oraz 5-złotówek

$r_0 = 0 \quad r_1 = 0 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 0 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = 1$

$r_{10} = 2 \qquad P(x)D(x) = \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^2}$

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots) =$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + x^5 + \ldots + 2x^{10}$$

Jaki współczynnik stoi przy x^{17}? równy mocy $\{x^5 \cdot x^{12}, x^{15} \cdot x^{2}\}$

Jaki przed x^{44}? równy mocy $\{x^{10} x^{32}, x^{20} x^{24}, x^{30} x^{14}, x^{40} x^{4}\}$
$\to \{(i,j) \; 5i + 2j = 44\}$

— to samo, tylko 1-zł, 2-zł, 5 zł

$\frac{1}{1-x^5} \quad \frac{1}{1-x^2} \quad \frac{1}{1-x}$ Jaki przed x^7
$\{(i,j,k) : 5i + 2j + k = 7\}$

LICZBA PRZEDSTAWIEŃ n ZA POMOCĄ DOWOLNEJ LICZBY SKŁADNIKÓW

Niech $\langle r_n \rangle$ = liczba rozkładów n na składniki naturalne, gdy kolejność nie jest ważna.

LICZBA ROZKŁADÓW n

Funkcja tworząca dla r_n to $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

LICZBA PRZEDSTAWIEŃ n ZA POMOCĄ RÓŻNYCH SKŁADNIKÓW

Niech $\langle r_n \rangle$ = liczba rozkładów n na różne składniki naturalne, gdy kolejność nie jest ważna
np. $5 = 2 + 2 + 1$

LICZBA ROZKŁADÓW n NA RÓŻNE SKŁADNIKI

Funkcja tworząca dla r_n to $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i)$

WYKŁAD 7 → FUNKCJE TWORZĄCE ....../....../.........

REKURSJA UNIWERSALNA

Niech a, b, c będą dodatnimi stałymi. Rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{dla } n=1 \\ a \cdot T(n/c) + bn & \text{dla } n>1 \end{cases}$$

dla n będących potęgą liczby c jest

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & \text{jeżeli } a<c \\ O(n \log n) & \text{jeżeli } a=c \\ O(n^{\log_c a}) & \text{jeżeli } a>c \end{cases}$$

GRAFY

GRAF NIESKIEROWANY – to para zbiorów (V,E), gdzie $E = \{\{u,v\} : u,v \in V\}$. V nazywamy zbiorem wierzchołków, a E krawędzi.

PĘTLA – to krawędź w postaci $\{v,v\}$

KRAWĘDZIE RÓWNOLEGŁE – dwie lub więcej krawędzi łączące dwa wierzchołki u, v $(u \neq v)$.

Graf $G=(V,E)$ jest **PROSTY** jeśli nie zawiera pętli ani krawędzi równoległych.

GRAF SKIEROWANY – to para zbiorów (V,E), gdzie $E = \{(u,v) : u,v \in V\}$. V nazywamy zbiorem wierzchołków, a E krawędzi skierowanych lub łuków.

Krawędź e jest INCYDENTNA do wierzchołka u, jeśli jeden z końców e to u.

STOPIEŃ WIERZCHOŁKA u, oznaczamy $\deg(u)$, to liczba krawędzi incydentnych do u. (Każda pętla incydentna do u dokłada się do stopnia o liczbę 2)

LEMAT

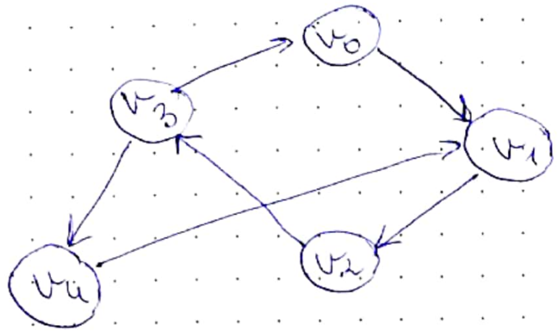
Niech $G=(V,E)$ będzie grafem nieskierowanym. Wtedy

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

……/……/……

REPREZENTACJE GRAFÓW

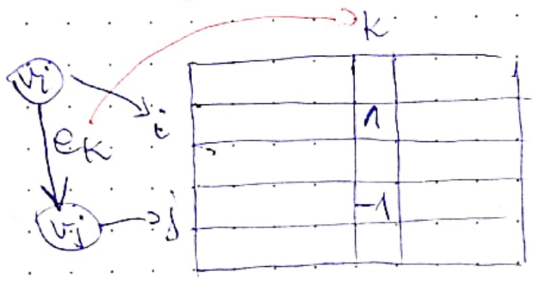
- listowa



0	1
1	2
2	3
3	0 4
4	1

Lista reprezentuje wierzchołek startowy. Na liście są przechowywane numery wierzchołków końcowych.

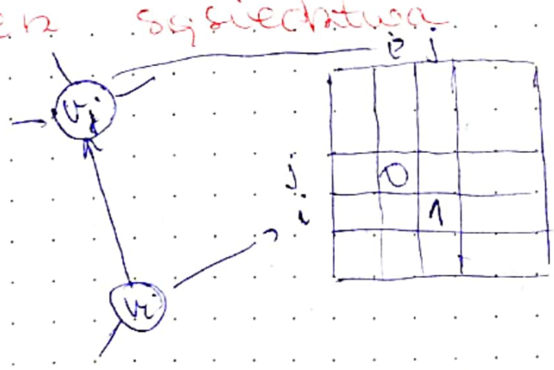
- macierz incydencji



$$A[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } v_i \text{ nie należy do } e_j \\ 1, & \text{jeśli } v_i \text{ jest początkiem } e_j \\ -1, & \text{jeśli } v_i \text{ jest końcem } e_j \end{cases}$$

Macierz o wymiarach $n \times m$, n oznacza liczbę wierzchołków w grafie, a m liczbę jego krawędzi. Każdy wiersz odzwierciedla jedną krawędź.

- macierz sąsiedztwa



Macierz o wymiarach $n \times n$, gdzie n oznacza liczbę wierzchołków w grafie.

IZOMORFIZM GRAFÓW

Dwa grafy nieskierowane $G=(V,E)$ $H=(V',E')$ są izomorficzne wtw, gdy $\exists$ bijekcja $f: V \to V'$ taka że

$$\forall_{u,v \in V} \{u,v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$$

MARSZRUTA o długości k jest ciąg $(v_0, v_1 \ldots v_k)$ taki, że $\forall_{0 \le i < k} \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

DROGA to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie.

ŚCIEŻKA to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.

CYKL to marszruta, w której pierwszy wierzchołek jest taki sam jak ostatni, a poza tym żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.

u-v marszruta to marszruta taka, że $v_0 = u$ i $v_k = v$.
Analogicznie definiujemy u-v drogę i u-v-ścieżkę.

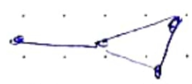
Marszruta/droga jest zamknięta, jeśli $v_0 = v_k$.
Zamknięta ścieżka to cykl.

Nieskierowany graf $G=(V,E)$ jest **SPÓJNY**, jeśli "z każdego wierzchołka da się dojść do każdego innego", tzn. $\forall_{u,v \in V}$ w G istnieje u-v-ścieżka. (ścieżka łącząca u i v)

PODGRAFEM grafu $G=(V,E)$ jest dowolny graf $H=(V',E')$ taki, że $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.
Podgraf H jest właściwy, jeśli $G \neq H$.

SPÓJNA SKŁADOWA grafu G to dowolny podgraf spójny $H=(V',E')$ grafu G, który jest maksymalny ze względu na zawieranie tzn. taki, że nie istnieje podgraf spójny H', którego podgrafem właściwym jest H.

INACZEJ
→ spójne składowe to największe grupy wierzchołków, które są wzajemnie połączone ze sobą ścieżkami.



1 spójna składowa

2 spójne składowe

Graf $G=(V,E)$ jest **ACYKLICZNY**, jeśli nie zawiera żadnego cyklu.

LAS to acykliczny graf.
DRZEWO to acykliczny graf spójny.
LIŚĆ to wierzchołek o stopniu 1.

} SPÓJNE SKŁADOWE lasu to drzewa.

Scanned with CamScanner

.... / .... / ....

Drzewo to najmniejszy graf spójny na zbiorze wierzchołków V.

Każde drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach ma przynajmniej dwa liście

CHARAKTERYZACJA DRZEWA

Niech $G=(V,E)$ będzie n-wierzchołkowym grafem nieskierowanym $(n \geq 1)$. Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

- G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem)
- G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
- G jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi.
- $\forall u,v \in V$ G zawiera dokładnie jedną $u-v$ ścieżkę.

MOST to krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu. (żaden most nie leży na cyklu)

Graf $G=(V,E)$ jest **DWUDZIELNY** wtw, gdy istnieje podział zbioru wierzchołków V na zbiory A i B taki, że $\forall_{e \in E}$ jeden koniec e należy do A, a drugi do B.
Podział wierzchołków nie zawsze jest jednoznaczny.

Graf $G=(V,E)$ jest dwudzielny wtw, gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

LEMAT

Każda zamknięta marszruta o nieparzystej długości zawiera cykl o nieparzystej długości

GRAFY O MINIMALNYM STOPNIU K

Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k. Wtedy G zawiera ścieżkę o długości k. Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$

ALGORYTM DFS (DEPTH FIRST SEARCH)

PRZESZUKIWANIE W GŁĄB

Oznaczamy bieżący wierzchołek jako odwiedzony. Przechodzimy do kolejnych sąsiadów wierzchołka bieżącego i wykonujemy dla nich tą samą operację.

- visited[v] ← true
- Przetwórz wierzchołek v
- Dla każdego sąsiada u wierzchołka v wykonuj
  jeśli visited[u] = false
  DFS(u)
- Przetwórz wierzchołek
  Zakończ

ALGORYTM BFS (BREADTH-FIRST SEARCH)

PRZESZUKIWANIE WSZERZ

Zaczynamy odwiedzanie od wierzchołka startowego. Następnie odwiedzamy wszystkich jego sąsiadów. Dalej odwiedzamy wszystkich nieodwiedzonych jeszcze sąsiadów sąsiadów.

Q - kolejka

K01 • Q.push(v)
K02 • visited[v] ← true
K03 • Dopóki Q.empty() = false
wykonuj kroki K04 … K10
K04 • v ← Q.front()
K05 • Q.pop()
K06 • przetwórz wierzchołek v
K07 • Dla każdego sąsiada u wierzchołka v
wykonuj K08 … K10
K08 • Jeśli visited[u] = true
to następny obieg pętli K07
K09 • Q.push(u)
K10 • visited[u] ← true
K11 • Zakończ

WYKŁAD 9

Niech G = (V, E) będzie grafem spójnym. **DRZEWO ROZPINAJĄCE** grafu G to podgraf T = (V, E'), który jest drzewem. T zawiera wszystkie wierzchołki G.

Niech G = (V, E) będzie grafem niekoniecznie spójnym. **LAS ROZPINAJĄCY** grafu G to podgraf F = (V, E'), który jest lasem, którego liczba spójnych składowych jest taka sama jak liczba spójnych składowych G.

Scanned with CamScanner

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
DRZEWO ROZPINAJĄCE grafu G to podgraf $T=(V,E')$, który jest drzewem.
WAGA DRZEWA ROZPINAJĄCEGO $c(T) = \sum_{e \in E'} c(e)$

(MST) MINIMALNE DRZEWO ROZPINAJĄCE grafu G to drzewo rozpinające G o minimalnej wadze.

PROBLEM -> wyznaczanie MST

ALGORYTM KRUSKALA

IDEA: Tworzymy pusty zbiór krawędzi T oraz listę L wszystkich grafu uporządkowaną według rosnących wag. Dopóki w T nie mamy wszystkich wierzchołków grafu, wybieramy z listy L krawędź, i jeśli nie tworzy ona cyklu z krawędziami już obecnymi w T, dodajemy ją do zbioru T. Gdy algorytm zakończy pracę, w T będzie MST

ALGORYTM PRIMA

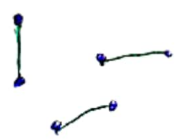
IDEA: Wybieramy w grafie dowolny wierzchołek startowy. Dopóki drzewo nie pokrywa całego grafu, znajdujemy krawędź o najniższym koszcie spośród wszystkich krawędzi prowadzących od wybranych już wierzchołków do wierzchołków jeszcze niewybranych. Znalezioną krawędź dodajemy do drzewa rozpinającego.

ALGORYTM BORUVKI

IDEA: Algorytm działa dla grafu, który ma wszystkie krawędzie o różnej wadze. Jeśli tak nie jest możne przypisać każdej krawędzi o tej samej wadze unikatowy indeks, a potem wybrać tę o najniższym indeksie.

1) Dla każdego wierzchołka w grafie G przejrzyj zbiór incydentnych z nim krawędzi. Dołóż najlżejszą z nich do rozwiązania 2) Po tym etapie utwórz graf G', w którym wierzchołki stanowiące spójne składowe zostaną ze sobą „sklejone" (nowe wierzchołki -> "super-wierzchołki"). Dopóki nie otrzymamy jednej spójnej składowej, wywołujemy kroki 1 i 2, za graf G podstawiając graf G'.

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym. SKOJARZENIE grafu G to dowolny podzbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca.



SKOJARZENIE NAJWIĘKSZE grafu G to skojarzenie o maksymalnej liczbie krawędzi

ŚCIEŻKA ALTERNUJĄCA

- Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym, a M jakimś skojarzeniem w G. Wierzchołek $v \in V$ jest **skojarzony** w M, jeśli jest końcem jakiejś krawędzi z M.
- Wierzchołek $v \in V$ jest **nieskojarzony / wolny** w M, jeśli żadna krawędź z M nie jest z nim incydentna.

Ścieżka P w grafie G jest **alternująca (względem M)** jeśli krawędzie na P na przemian należą i nie należą do M.

Ścieżka P w grafie G jest **powiększająca (względem M)**, jeśli jest alternująca (wzgl. M) i jej końce są nieskojarzone (w M).

Skojarzenie doskonałe / pełne grafu G to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V jest skojarzony.

CYKL ALTERNUJĄCY

Cykl C w grafie G jest alternujący (względem M) jeśli krawędzie na C na przemian należą i nie należą do M.

TWIERDZENIE BERGE'A

SKOJARZENIE NAJWIĘKSZE

Skojarzenie M grafu G jest największe wtw, gdy G nie zawiera ścieżki powiększającej względem M.

WARUNEK HALLA

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków.

Sąsiedztwem W oznaczone jako $N(W)$ definiujemy jako zbiór $\{v \in V : \exists_{w \in W} \{v,w\} \in E\}$.

Niech $G=(A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

WARUNEK HALLA

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$

SKOJARZENIE DOSKONAŁE W GRAFIE DWUDZIELNYM

Graf dwudzielny G zawiera skojarzenie doskonałe wtw. gdy spełniony jest w nim warunek Halla.

WYKŁAD 10

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c: E \to \mathbb{R} \geq 0$.

WAGA ŚCIEŻKI P – to suma wag krawędzi leżących na P.

NAJLŻEJSZA / NAJKRÓTSZA (względem c) ŚCIEŻKA Z S DO T – to ta ze ścieżek z s do t, która ma najmniejszą wagę.

....../....../.........

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c: E \rightarrow R>0$, a s ustalonym wierzchołkiem z V.

Niech $S \subseteq V$. Ścieżka P z s do v jest **prawie S-owa / osiągalna bezpośrednio z S** jeśli wszystkie wierzchołki na P oprócz v są w S.
$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z s do v
$t(v)$ - waga najkrótszej prawie S-owej ścieżki z s do v, jeśli takiej ścieżki nie ma, to $t(v)=\infty$.

ALGORYTM DIJKSTRY

Rozwiązuje problem znalezienia ścieżki o najniższym koszcie.

IDEA: Tworzymy dwa zbiory wierzchołków Q i S. Początkowo zbiór Q zawiera wszystkie wierzchołki grafu, a S jest pusty. Dla wszystkich wierzchołków u grafu za wyjątkiem startowego v ustawiamy koszt dojścia $d(u)$ na nieskończoność. Koszt dojścia $d(v)$ zerujemy. Dodatkowo ustawiamy poprzednik $p(u)$ każdego wierzchołka u grafu na niezdefiniowany. Poprzedniki będą wyznaczały w kierunku odwrotnym najkrótsze ścieżki od wierzchołków u do wierzchołka startowego v. Teraz w pętli dopóki zbiór Q zawiera wierzchołki, wykonujemy następujące czynności:

1. Wybieramy ze zbioru Q_k wierzchołek u o najmniejszym koszcie dojścia $d(u)$
2. Wybrany wierzchołek u usuwamy ze zbioru Q i dodajemy do zbioru S.
3. Dla każdego sąsiada w wierzchołka u, który jest wciąż w zbiorze Q_k sprawdzamy, czy
   $d(w) > d(u) +$ waga krawędzi u-w
   Jeśli tak, to wyznaczamy nowy koszt dojścia do wierzchołka w jako:
   $d(w) \leftarrow d(u) +$ waga krawędzi u-w
   Następnie wierzchołek u czynimy poprzednikiem w:
   $p(w) \leftarrow u$

$S \leftarrow \{s\}$ $d(s) \leftarrow 0$
dla każdego sąsiada v wierzchołka s: $t(v) \leftarrow c(s,v)$
dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$
dopóki $S \neq V$ wykonaj:
  $u \leftarrow \text{argmin} \{t(u) : u \notin S\}$
  dodaj u do S
  zaktualizuj wartość $t(v)$:
  dla każdego sąsiada $v \notin S$ wierzchołka u:
  $t(v) \leftarrow \min\{t(v), d(u) + c(u,v)\}$

$O(n^2)$ • nie działa dla wag ujemnych

POKRYCIE WIERZCHOŁKOWE

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem. Pokrycie wierzchołkowe grafu G to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V'.

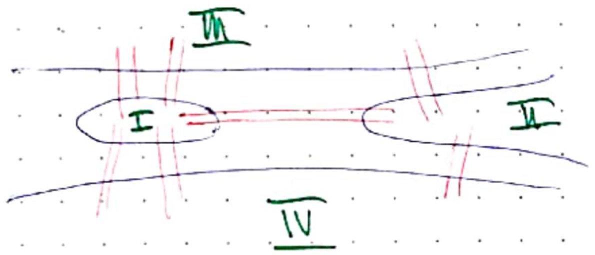
Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu G to to spośród pokryć wierzchołkowych G, które zawiera najmniej wierzchołków.

Niech M będzie skojarzeniem G a W jakimś pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|W| \geq |M|$

TWIERDZENIE KOENIGA

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem dwudzielnym, M_{max} największym skojarzeniem G a W_{min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{max}|=|W_{min}|$

WYKŁAD 11.



Chcemy przejść przez wyspy tak aby po każdym moście przejść tylko raz. Punkt startu i zakończenia jest taki sam, ale można go sobie wybrać.
Czy da się to zrobić

DROGA I CYKL EULERA

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym, niekoniecznie prostym.

DROGA EULERA grafu G to droga (krawędzie się nie powtarzają, wierzchołki mogą), która zawiera każdą krawędź $e \in E$.

CYKL EULERA grafu G to droga zamknięta (wierzchołek startowy jest taki sam jak końcowy), która zawiera każdą krawędź $e \in E$.

WARUNKI ISTNIENIA DROGI/CYKLU EULERA

Spójny graf G posiada drogę Eulera wtw, gdy zawiera 0 lub 2 wierzchołki o stopniu nieparzystym.
Spójny graf G posiada cykl Eulera wtw, gdy wszystkie jego wierzchołki mają stopień parzysty.

ŚCIEŻKA I CYKL HAMILTONA

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym.

ŚCIEŻKA HAMILTONA grafu G to ścieżka (wierzchołki się nie powtarzają), która zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.

CYKL HAMILTONA grafu G to cykl (wierzchołki się nie powtarzają), który zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.

(Sprawdzenie, czy graf $G=(V,E)$ zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona jest problemem trudno obliczeniowym)

WARUNKI KONIECZNE NA ISTNIENIE CYKLU HAMILTONA

- Jeśli graf $G=(A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A|=|B|$
- Jeśli graf $G=(V,E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G-S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

TWIERDZENIE DIRACA
Jeśli $G=(V,E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(v) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

TWIERDZENIE ORE'A
Jeśli $G=(V,E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i takim, że dla każdego dwóch wierzchołków u i v niepołączonych krawędzią zachodzi $\deg(u)+\deg(v) \geq |V|$, to G zawiera cykl Hamiltona.

KOLOROWANIE GRAFU

Niech $G=(V,E)$ będzie grafem prostym.
KOLOROWANIEM WIERZCHOŁKOWYM grafu G nazywamy funkcję $f: V \to \text{Kolory}$ taką, że $\forall_{(u,v) \in E}\, f(u) \neq f(v)$.

...... / ...... / ....

$\chi(G)$ – LICZBA CHROMATYCZNA G to najmniejsza liczba kolorów, jaką można pokolorować graf G.

$\omega(G)$ to wielkość największej kliki zawartej w G

Zauważmy, że $\chi(G) \geq \omega(G)$

$\Delta(G)$ to największy stopień wierzchołka w G

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$$

TWIERDZENIE BROOKSA

Jeśli G nie jest kliką ani nieparzystym cyklem, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$

WYKŁAD 13

Graf G jest PLANARNY, gdy da się go narysować na płaszczyźnie w taki sposób, by żadne dwie krawędzie się nie przecinały.

ŁAMANA (linia wielokątna, linia łamana) to ciąg skończenie wielu odcinków, z których każdy zaczyna się tam, gdzie poprzedni kończy; poza tym żadne dwa odcinki nie mają wspólnych punktów.

RYSUNEK grafu $G=(V,E)$ na płaszczyźnie to funkcja różnowartościowa f:

1) odwzorowująca każdy wierzchołek $v \in V$ na punkt $f(v)$ płaszczyzny oraz
2) każdą krawędź (u,v) na łamaną łączącą $f(u)$ z $f(v)$

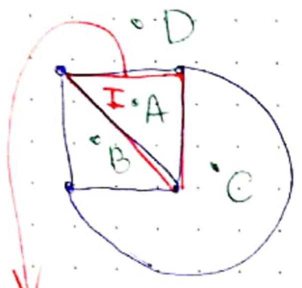
Mówimy, że rysunek nie ma przecięć, jeśli dla dowolnych dwóch krawędzi e, e' $f(e) \cap f(e')$ może zawierać jedynie obrazy wspólnych końców e i e'.

Graf G jest PLANARNY, jeśli posiada rysunek bez przecięć.
Konkretny rysunek bez przecięć grafu G nazywamy GRAFEM PŁASKIM.

ŚCIANA w grafie płaskim G to spójny obszar płaszczyzny po usunięciu linii reprezentujących krawędzie. Innymi słowy, ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi.

GRANICA ŚCIANY zawiera krawędzie styczne z tą ścianą.

DŁUGOŚĆ GRANICY ŚCIANY to długość zamkniętej marszruty przechodzącej przez wszystkie krawędzie granicy tej ściany.

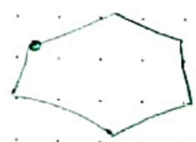


} 4 ściany

granice ściany I

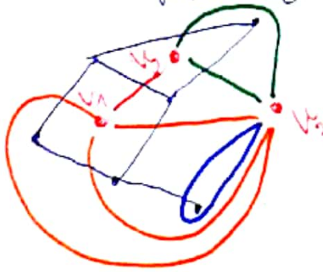
Niech f_i oznacza długość granicy i-tej ściany grafu planarnego $G=(V,E)$, a l liczbę ścian G. Wtedy
$$\sum_{i=1}^{l} f_i = 2|E|$$

TWIERDZENIE JORDANA
Zamknięta nieprzecinająca się łamana C o skończonej liczbie odcinków dzieli płaszczyznę na dokładnie dwie ściany, z których każda ma C jako granicę.

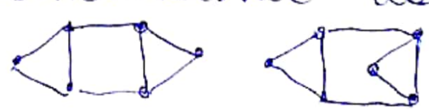


GRAF DUALNY
Niech $G=(V,E)$ będzie grafem planarnym. Graf dualny G^* dla grafu płaskiego G tworzy się następująco:

- dla każdej ściany (włącznie z ścianą zewnętrzną) grafu G dodajemy wierzchołek
- jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź e, łączymy wierzchołki utworzone w poprzednim kroku odpowiednie dla sąsiadujących ścian krawędzią przecinającą tylko krawędź e.



Graf dualny grafu planarnego G nie jest wyznaczony jednoznacznie – zależy od rysunku G.



WZÓR EULERA

Niech G będzie spójnym grafem planarnym (niekoniecznie prostym) o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach.

Wówczas $n - m + f = 2$

LICZBA KRAWĘDZI GRAFU PLANARNEGO

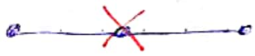
Niech G będzie prostym grafem planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach. Wówczas liczba krawędzi m tego grafu nie przekracza $3n-6$. Jeśli dodatkowo G nie zawiera żadnego trójkąta, to $m \leq 2n-4$.

GRAFY HOMEOMORFICZNE

Grafy G i H są homeomorficzne, gdy jeden można przekształcić do drugiego za pomocą skończonej liczby operacji następujących dwóch typów:

1) zamian krawędzi na ścieżkę o długości 2 tj. w ten sposób dodajemy również jeden nowy wierzchołek.

2) zamiana ścieżki $P=(u,v,w)$ takiej, że v ma stopień 2 na krawędź (u,w) jednocześnie usuwając v.



TWIERDZENIE KURATOWSKIEGO

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z $K_{3,3}$ lub K_5.

klika

graf dwudzielny

TWIERDZENIE HEAWOODA

Każdy graf planarny prosty jest ≤ 5-kolorowalny

WYKŁAD 14

SIEĆ to graf skierowany (digraf) $D=(V,E)$ z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami $s,t \in V$ zwanymi źródłem i ujściem i funkcją przepustowości $c: E \to R_{\geq 0}$ na krawędziach.

Niech $f: E \to R$

dla $v \in V$ definiujemy $f^+(v) = \sum_{e=(v,w): e \in E, w \in V} f(v,w)$

oraz $f^-(v) = \sum_{e=(w,v): e \in E, w \in V} f(w,v)$

Funkcja f jest **PRZEPŁYWEM**, jeśli

- spełnia warunki przepustowości $\forall_{e \in E}\ 0 \leq f(e) \leq c(e)$, oraz
- jeśli spełnia warunek zachowania przepływu: $\forall_{v \in V \setminus \{s,t\}}\ f^+(v) = f^-(v)$.

Wartość przepływu f, oznaczana jako $|f|$ to $f^-(t) - f^+(t)$

Ścieżka powiększająca P dla przepływu f to ścieżka postaci $(s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \dots e_k, v_k, e_{k+1}, t = v_{k+1})$ taka, że

- $\forall\ 0 \leq i \leq k\ \ e_{i+1} \in E \wedge (e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \vee e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i))$
- $\forall\ 0 \leq i \leq k\ \ e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \Rightarrow f(e_{i+1}) < c(e_{i+1})$ (krawędź w przód)
- $\forall\ 0 \leq i \leq k\ \ e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i) \Rightarrow f(e_{i+1}) > 0$ (krawędź wsteczna)

LUZ ścieżki powiększającej P to minimum z dwóch minimów:
$\min\{c(e) - f(e)\}$ po wszystkich krawędziach w przód ścieżki oraz
$\min\{f(e)\}$ po wszystkich krawędziach wstecznych.

ZASTOSOWANIE ŚCIEŻKI POWIĘKSZAJĄCEJ
Niech $P = (s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots e_k, v_k, e_{k+1}, t = v_{k+1})$ to ścieżka powiększająca dla przepływu f o luzie ε.
Zastosować P do przepływu f oznacza funkcję f' taką, że

- dla $e \in E \setminus P$: $f'(e) = f(e)$
- dla $e \in P$ w przód: $f'(e) = f(e) + \varepsilon$,
- dla $e \in P$ wstecznej: $f'(e) = f(e) - \varepsilon$

LEMAT
f' jest przepływem takim, że $|f'| = |f| + \varepsilon$

ALGORYTM FORDA - FULKERSONA

$D = (V, E)$ - digraf spójny, $c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $s, t \in V$

$\forall_{e \in E}\ f(e) \leftarrow 0$

dopóki istnieje ścieżka powiększająca P dla f wykonaj:
 zastosuj P do f, otrzymując f'
 $f \leftarrow f'$

ZNAJDOWANIE ŚCIEŻKI POWIĘKSZAJĄCEJ

....../....../........

$R \leftarrow \{s\}$
dopóki można wykonać:
jeśli istnieje krawędź $e=(u,v): u \in R, v \notin R, f(e)<c(e)$
to dodaj v do R
jeśli istnieje krawędź $e=(v,u): u \in R, v \notin R, f(e)>0$
to dodaj v do R
Jeśli R zawiera t, to znaczy, że istnieje ścieżka pow. P dla f.

PRZEPUSTOWOŚĆ PRZEKROJU

$[S,T]$ to s-t przekrój, jeśli $s \in S$, $t \in T$, $S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$.
Przepustowość przekroju $c([S,T]) = \sum_{e=(u,v)\in E: u \in S, v \in T} c(e)$

LEMAT

Niech $U \subset V$. Wtedy $f^+(U) - f^-(U) = \sum_{v \in V} f^+(v) - f^-(v)$
Dla dowolnego s-t przekroju $[S,T]$ zachodzi
$|f| \leq c([S,T])$

TWIERDZENIE

Przepływ f obliczony przez algorytm Forda-Fulkersona ma wartość równą przepustowości pewnego s-t przekroju. Zatem jest maksymalny.*

PRZEPŁYW CAŁKOWITOLICZBOWY

Jeśli przepustowość każdej krawędzi w sieci jest liczbą całkowitą, to istnieje przepływ f maksymalny, który jest całkowitoliczbowy.

ZASTOSOWANIE PRZEPŁYWÓW

- znajdowanie największego skojarzenia w grafach dwudzielnych
- znajdowanie największego b-skojarzenia w grafach dwudzielnych

Niech $b: V \to \mathbb{N}$. Wtedy $M \subseteq E$ jest b-skojarzeniem, jeśli $\forall_{v \in V} \deg_M(v) \leq b(v)$ (liczba krawędzi z M incydentna do v nie przekracza $b(v)$).

WYKŁAD 15.

* Jeśli przepustowość każdej krawędzi w sieci jest liczbą całkowitą, to istnieje przepływ f maksymalny, który jest całkowitoliczbowy.

....../....../..........

KLASA NP

Niech A będzie problemem decyzyjnym. Mówimy, że A znajduje się w klasie NP - problemów niedeterministycznie wielomianowych, jeśli rozwiązanie dla niego można zweryfikować w czasie wielomianowym. Przykład: czy graf G zawiera cykl/ścieżkę Hamiltona, czy graf G jest k-kolorowalny.

PROBLEMY NP-TRUDNE

Niech A będzie problemem (niekoniecznie decyzyjnym). Mówimy, że A jest NP-trudny, jeśli istnienie algorytmu (deterministycznie) wielomianowego dla A oznaczałoby istnienie algorytmu wielomianowego dla każdego problemu z klasy NP.

Problem A jest NP-zupełny, jeśli jest NP-trudny i należy do NP

REDUKCJA JEDNEGO PROBLEMU DO INNEGO

Mówimy, że problem A redukuje się wielomianowo do problemu B, jeśli istnienie wielomianowego algorytmu dla B pociąga ze sobą istnienie wielomianowego algorytmu dla A.

Na czym polega redukcja wielomianowa problemu A do problemu B? (Oba problemy są decyzyjne).

Na wielomianowej procedurze F przekształcającej dowolną instancję I problemu A na instancję F(I) problemu B takiej, że odpowiedź dla F(I) dla problemu B jest TAK wtw, gdy odpowiedź dla I dla problemu A jest TAK.

PROBLEMY NP-zupełne

Problemy: SAT, 3-SAT, istnienie cyklu/ścieżki Hamiltona w grafie G są NP-zupełne.

NP-zupełność 3-kolorowalność

3-SAT można zredukować wielomianowo do 3-kolorowalności