LOGIKA SEM 1

1. INDUKCJA MATEMATYCZNA

def. 1

Niech X będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$, że

1. $0 \in X$, oraz

2. dla wszystkich liczb naturalnych n spełniona jest implikacja: jeśli $n \in X$ to $n+1 \in X$

wtedy $X = \mathbb{N}$.

~ przykład 1

Rozważmy $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną $f(0)=0$ $f(n+1)=f(n)+2$. Pokażemy, że $f(n)=2n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n)=2n\}$

1. Ze wzoru $f(0)=0$ wynika, że $0 \in X$

2. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i załóżmy, że $n \in X$. Wtedy z zał. wynika, że $f(n)=2n$ a z wzoru $f(n+1)=f(n)+2$ otrzymujemy $f(n+1)=2n+2$ czyli $f(n+1)=2(n+1)$, a stąd $n+1 \in X$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej (ZIM) otrzymujemy, że $X=\mathbb{N}$, czyli warunek $f(n)=2n$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych.

def. 2 Niech W będzie własnością liczb naturalnych spełniających następujące dwa warunki:

- $W(0)$ jest prawdą, oraz

- dla wszystkich liczb naturalnych n, jeśli $W(n)$ jest prawdą to także $W(n+1)$ jest prawdą.

Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność W.

def. 3 Niech $a \in \mathbb{N}$ i niech W będzie własnością liczb naturalnych spełniającą następujące dwa warunki:

- $W(a)$ jest prawdą, oraz
- dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq a$, jeśli $W(n)$ jest prawdą, to $W(n+1)$ też jest prawdą.

Wtedy dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq a$ zachodzi $W(n)$.

W praktyce 3 kroki indukcyjne:

1) Wykazujemy prawdziwość twierdzenia dla pewnego n_0.

ZAŁOŻENIA 2) Zakładamy prawdziwość tego tw. dla pewnego $n \geq n_0$.

TEZA 3) Wykazujemy prawdziwość tw. dla $n+1$

Zad 1. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}_{L} = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{P}$$

1° Pokazujemy, że tw. jest prawdziwe dla $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} L = 1 \\ P = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \end{array}\right\} \quad L = P$$

Zatem tw. jest prawdziwe dla $n=1$.

2° Zakładamy, że tw. jest prawdziwe dla pewnego $n \geq 1$

ZAŁOŻENIE: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

3° Wykazujemy, że tw. jest prawdziwe dla $n+1$

$$\underbrace{1+2+\ldots+n+(n+1)}_{L} = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$L = 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2+3n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P \qquad L=P$$

Teza jest więc prawdziwa, co wszystko dowodzi prawdziwości tw. na mocy zasady indukcji matematycznej.

Zad. 2 Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ $5 | n^5 - n$

1° Pokazujemy, że tw jest prawdziwe dla $n=3$

$5 | 3^5 - 3$
$5 | 243 - 3$
$5 | 240 \rightarrow$ Zatem tw. prawdziwe dla $n=3$

2° Zakładamy, że tw. jest prawdziwe dla pewnego $n \geq 3$

$5 | n^5 - n$, $\underset{k \in \mathbb{N}}{\exists}$ $n^5 - n = 5k$

3° Wykazujemy, że jest prawdziwe dla $n+1$

TEZA $5 | (n+1)^5 - (n+1)$, $\underset{l \in \mathbb{N}}{\exists}$ $(n+1)^5 - (n+1) = 5l$

$L = (n+1)^5 - (n+1) =$
$= \binom{5}{0} n^5 + \binom{5}{1} n^4 1^1 + \binom{5}{2} n^3 1^2 + \binom{5}{3} n^2 1^3 + \binom{5}{4} n \cdot 1^4 + \binom{5}{5} 1^5 - n - 1 =$
$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 =$
$= n^5 + 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 + 5n - n =$
$= \underbrace{n^5 - n}_{5k} + 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 + 5n = 5\underbrace{(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{l}$

Zatem istnieje pewna liczba naturalna $l = k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$, że $L = 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5l = P$

Teza jest spełniona. Co kończy dowód.

Zad. 3 Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

1° Pokazujemy, że tw. jest prawdziwe dla $n=2$

$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 \rightarrow$ Zatem tw jest prawdziwe dla $n=2$

2° Zakładamy, że tw. jest prawdziwe dla $n \geq 1$

ZAŁOŻENIE: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

3° Wykazujemy, że tw. prawdziwe dla $n+1$

TEZA: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$
$= (n+1)!(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 = P$

Teza jest prawdziwa.

Zad. 2 Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ $5 \mid n^5 - n$

(1°) Pokazujemy, że tw jest prawdziwe dla $n=3$

$5 \mid 3^5 - 3$
$5 \mid 243 - 3$
$5 \mid 240 \rightarrow$ Zatem tw. prawdziwe dla $n=3$

(2°) Zakładamy, że tw. jest prawdziwe dla pewnego $n \geq 3$

$5 \mid n^5 - n \quad , \quad \exists_{k \in \mathbb{N}} \; n^5 - n = 5k$

(3°) Wykazujemy, że jest prawdziwe dla $n+1$

TEZA $\quad 5 \mid (n+1)^5 - (n+1) \quad , \quad \exists_{l \in \mathbb{N}} \; (n+1)^5 - (n+1) = 5l$

$L = (n+1)^5 - (n+1) =$
$= \binom{5}{0} n^5 + \binom{5}{1} n^4 1^1 + \binom{5}{2} n^3 1^2 + \binom{5}{3} n^2 1^3 + \binom{5}{4} n \cdot 1^4 + \binom{5}{5} 1^5 - n - 1 =$
$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 =$
$= n^5 + 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 + 5n - n =$
$= \underbrace{n^5 - n}_{5k} + 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 + 5n = 5(\underbrace{k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n}_{l})$

Zatem istnieje pewna liczba naturalna $l = k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$, że $L = 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5l = P$

Teza jest spełniona. Co kończy dowód.

Zad. 3 Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

(1°) Pokazujemy, że tw. jest prawdziwe dla $n=2$

$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 \rightarrow$ Zatem tw jest prawdziwe dla $n=2$

(2°) Zakładamy, że tw. jest prawdziwe dla $n \geq 1$

ZAŁOŻENIE: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(3°) Wykazujemy, że tw. prawdziwe dla $n+1$

TEZA: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$
$= (n+1)!(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 = P$

Teza jest prawdziwa.

2. RACHUNEK ZDAŃ

PIERWSZEŃSTWO

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

$[(p \vee q) \vee r]$

$\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ łączą w lewo

$\Rightarrow$ łączy w prawo

$\perp$	T
F	T

φ	$\neg\varphi$
F	T
T	F

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

FORMUŁA JEST:

- SPEŁNIONA przy danym wartościowaniu zmiennych, jeżeli przy tym wartościowaniu ma ona wartość T;
- SPEŁNIALNA, jeżeli istnieje wartościowanie zmiennych, dla którego ta formuła jest spełniona;
- PRAWDZIWA (jest TAUTOLOGIĄ), jeśli jest spełniona dla każdego wartościowania zmiennych;
- SPRZECZNA, jeśli nie jest spełniona (ma wartość F) dla żadnego wartościowania zmiennych.

SPOSOBY SPRAWDZANIA CZY DANA FORMUŁA JEST TAUTOLOGIĄ:

~ metoda zero - jedynkowa

~ skrócona metoda zero - jedynkowa (sprawdzamy kiedy fałsz) WHITEBOOK STR. 15/16

RÓWNOWAŻNE

Mówimy, że formuły φ i ψ są równoważne jeśli dla każdego wartościowania przyjmują tę samą wartość logiczną (tj. gdy formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią.

$\boxed{\phi \equiv \psi}$

~ przykład

$\neg(p \vee q)$ i $\neg p \wedge \neg q$

1* ZASADA INDUKCJI STRUKTURALNEJ

Niech X będzie takim podzbiorem zbioru formuł rachunku zdań, że:

1. formuły $\bot$ i $\top$ należą do zbioru X.
2. każda zmienna zdaniowa należy do zbioru X.
3. dla wszystkich formuł φ, φ_1 i φ_2, jeżeli φ, φ_1 i φ_2 należą do zbioru X, to także $(\neg\varphi), (\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ oraz $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ należą do zbioru X.

Wtedy X jest zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań.

2* POSTACI NORMALNE FORMUŁ ZDANIOWYCH

PRAWA NEGOWANIA FORMUŁ:

$$\neg\neg p \equiv p$$
$$\neg\bot \equiv \top$$
$$\neg\top \equiv \bot$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$$
$$\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \neg q$$
$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Negacyjna Postać Normalna = NNF $\{$ $\neg$ tylko przy p i q?

Przykład 1) Jeśli ϕ i ψ to tautologie to pokaż, że ϕ i ψ też jest tautologią.

Weźmy dowolne ϕ i ψ i załóżmy, że są tautologią. Weźmy dowolne wartościowanie σ. Ponieważ ϕ i ψ są tautologiami to $\hat{\sigma}(\psi) = T$ i $\hat{\sigma}(\psi) = T$, a stąd $\hat{\sigma}(\varphi \wedge \psi) = T$. Zatem $\phi \wedge \psi$ jest spełniona przy każdym wartościowaniu, czyli jest tautologią.

Przykład 2) Jeśli $\phi \Rightarrow \psi$ jest spełnialne to $\phi \wedge \neg\psi$ nie jest tautol.

Weźmy dowolne ϕ i ψ i załóżmy, że $\phi \Rightarrow \psi$ jest spełnialne. Weźmy takie wartościowanie σ, że $\hat{\sigma}(\phi \Rightarrow \psi) = T$ i rozważmy dwa przypadki. Jeśli $\hat{\sigma}(\phi) = F$ to oczywiście $\hat{\sigma}(\phi \wedge \neg\psi) = F$. Jeśli natomiast $\hat{\sigma}(\phi) = T$ to z faktu, że $\hat{\sigma}(\phi \wedge \neg\psi) = T$ wywnioskujemy, że $\hat{\sigma}(\psi) = T$, a stąd że $\hat{\sigma}(\neg\psi) = F$ i $\hat{\sigma}(\phi \wedge \neg\psi) = F$. Oznacza to, że $\phi \wedge \neg\psi$ nie jest tautologią.

DNF

ALTERNATYWA KONIUNKCJI
DYSJUNKCYJNA POSTAĆ NORMALNA

szukasz T i negujesz F

$$\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}\right) \qquad (\ \wedge\ \wedge\ ) \vee (\ \wedge\ \wedge\ ) \vee (\ldots$$

gdzie l_{ij} są literałami, dla $i=1,\ldots,n$ oraz $j=1,\ldots,m_i$.

~ $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Leftrightarrow (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T
F	T	F	F	T
T	F	F	F	F
F	F	F	F	T

DNF $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

CNF $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

CNF

KONIUNKCYJNA POSTAĆ NORMALNA

szukasz F negujesz T

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij}\right)$$

Zbiór spójników logicznych jest zupełny, jeżeli dowolną funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne.

ZBIORY ZUPEŁNE	ZBIORY NIEZUPEŁNE
$\{\wedge, \vee, \neg\}$	$\{\vee, \wedge\}$
$\{\wedge, \neg\}$	$\{\vee, \wedge, \Leftrightarrow, \Rightarrow\}$
$\{\vee, \neg\}$	$\{\Leftrightarrow, \bot\}$
$\{\Rightarrow, \bot\}$	$\{\wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$
$\{\Rightarrow, \neg\}$	

na kartkach
dowody zbiorów zupełnych i niezupełnych są kolokwium 1

REZOLUCJA DLA RACHUNKU ZDAŃ

Literał - w rachunku zdań to zmienna zdaniowa lub negacja zmiennej zdaniowej.
Klauzula - nazywamy alternatywę skończenie wielu literałów. Alternatywę zero literałów nazywamy klauzulą pustą i oznaczamy $\bot$.

$$\frac{\bigcirc \lor \square \qquad \Delta \lor \neg\square}{\bigcirc \lor \Delta}$$

DEDUKCJA NATURALNA

REGUŁY WPROWADZANIA:

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \land \beta}(\land i) \qquad \frac{\alpha}{\alpha \lor \beta}(\lor i_1) \qquad \frac{\beta}{\alpha \lor \beta}(\lor i_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \beta\end{array}}}{\alpha \Rightarrow \beta}(\Rightarrow i) \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \\ \bot\end{array}}}{\neg\alpha}(\neg i) \qquad \frac{}{\top}(\top i)$$

$$\frac{\alpha \lor \beta \qquad \boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \gamma\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\beta\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}}{\gamma}(\lor e)$$

REGUŁY ELIMINACJI:

$$\frac{\alpha \land \beta}{\alpha}(\land e_1) \qquad \frac{\alpha \land \beta}{\beta}(\land e_2)$$

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}(\Rightarrow e) \qquad \frac{\alpha \qquad \neg\alpha}{\bot}(\neg e) \qquad \frac{\bot}{\alpha}(\bot e)$$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}(\neg\neg e)$$

1)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}(p \Rightarrow q) \land p \ \text{zał.}\\ \\ \dfrac{\dfrac{(p\Rightarrow q)\land p}{p \Rightarrow q}(\land e_2) \qquad \dfrac{(p\Rightarrow q)\land p}{p}(\land e_1)}{q}(\Rightarrow e)\end{array}}}{((p \Rightarrow q) \land p) \Rightarrow q}(\Rightarrow i)$$

2)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}(p \Rightarrow q) \land (\neg q) \ \text{zał.}\\ \frac{\boxed{\begin{array}{c}p \ \text{zał.}\\ \dfrac{\dfrac{(p\Rightarrow q)\land(\neg q)}{p\Rightarrow q}(\land e_1)}{q}(\Rightarrow e) \qquad \dfrac{(p\Rightarrow q)\land(\neg q)}{\neg q}(\land e_2)\end{array}}}{\neg p}(\neg i)\end{array}}}{[(p \Rightarrow q) \land (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)}(\Rightarrow i)$$

3) $(p \vee q) \Rightarrow r$ zał.

p zał.

$\dfrac{p}{p \vee q}$ $(\vee i_1)$ $\quad (p \vee q) \Rightarrow r$ $(\Rightarrow e)$

r

$p \Rightarrow r$ $(\Rightarrow i)$

$[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ $(\Rightarrow i)$

9) $p \Rightarrow (\neg p)$ zał.

p zał.

$\dfrac{p \quad p \Rightarrow \neg p}{\neg p}$ $\quad p$

$\bot$

$\neg p$

$[p \Rightarrow (\neg p)] \Rightarrow (\neg p)$

4) $(p \vee q) \Rightarrow r$ zał.

q zał.

$\dfrac{q}{p \vee q}$ $(\vee i_2)$ $\quad (p \vee q) \Rightarrow r$ $(\Rightarrow i)$

r

$q \Rightarrow r$ $(\Rightarrow i)$

$((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

10) $p \wedge \neg p$ zał.

$\dfrac{p \wedge \neg p}{p}$ $(\wedge e_1)$ $\quad \dfrac{p \wedge \neg p}{\neg p}$ $(\wedge e_2)$

$\bot$ $(\neg e)$

$\neg(p \wedge \neg p)$ $(\bot e)$

5) $p \wedge q$ zał.

$\dfrac{p \wedge q}{p}$ $(\wedge i)$

$(p \wedge q) \Rightarrow p$ $(\Rightarrow i)$

11) $p \Rightarrow q$ zał.

$q \Rightarrow r$ zał.

p zał.

$\dfrac{p \quad p \Rightarrow q}{q}$ $\quad q \Rightarrow r$

r

$p \Rightarrow r$

$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

6) q zał.

$\dfrac{q}{p \vee q}$ $(\vee i_2)$

$q \Rightarrow p \vee q$ $(\Rightarrow i)$

12) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ zał.

p zał.

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

$\dfrac{p \quad p \Rightarrow q}{q}$

$p \Rightarrow q$ $\quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

p

$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

7) p zał.

q zał.

p

$q \Rightarrow p$ $(\Rightarrow i)$

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ $(\Rightarrow i)$

13) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ zał.

p zał.

q zał.

$\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$ $\quad (p \wedge q) \Rightarrow r$ $(\Rightarrow e)$

r

$q \Rightarrow r$ $(\Rightarrow i)$

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ $(\Rightarrow i)$

$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ $(\Rightarrow i)$

8) $\neg p$ zał.

p zał.

$\neg p$ $\quad p$ $(\neg e)$

$\bot$

q $(\bot e)$

$p \Rightarrow q$ $(\Rightarrow i)$

$(\neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ $(\Rightarrow i)$

14) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)$ zał.

p zał. $\quad q$ zał.

$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)$ $\quad (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)$

$\dfrac{p \Rightarrow r \quad p}{r}$ $(\Rightarrow e)$ $\quad \dfrac{q \Rightarrow r \quad q}{r}$ $(\Rightarrow e)$

$p \vee q$

r $(\vee e)$

$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow r$ $(\Rightarrow i)$

15)

$$\boxed{\begin{array}{c} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \text{zał} \\ \boxed{\begin{array}{c} p \wedge q \quad \text{zał} \\ \dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}(\wedge e_2) \qquad \dfrac{\dfrac{p\wedge q}{p}(\wedge e_1) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)}{q \Rightarrow r}(\Rightarrow e)}{r}(\Rightarrow e) \end{array}} \\ (p \wedge q) \Rightarrow r \quad (\Rightarrow i) \end{array}}$$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r) \quad (\Rightarrow i)$$

RACHUNEK KWANTYFIKATORÓW

Zmienne formuł rachunku kwantyfikatorów

$$\neg(\forall x \phi) \Leftrightarrow \exists x \neg \phi$$

$$\neg(\exists x \phi) \Leftrightarrow \forall x \neg \phi$$

$$(\forall x (\phi \wedge \psi)) \Leftrightarrow (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$$

$$(\exists x (\phi \vee \psi)) \Leftrightarrow (\exists x \phi) \vee (\exists x \psi)$$

$$(\forall x (\phi \vee \psi)) \Leftrightarrow (\phi \vee \forall x \psi)$$

$$(\forall x (\phi \wedge \psi)) \Leftrightarrow (\phi \wedge \forall x \psi)$$

$$(\exists x (\phi \vee \psi)) \Leftrightarrow (\phi \vee \exists x \psi)$$

$$(\exists x (\phi \wedge \psi)) \Leftrightarrow (\phi \wedge \exists x \psi)$$

REGUŁY WPROWADZANIA:

$$\frac{\alpha[x/t]}{\exists x \alpha} (\exists i)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \alpha[x/x_0] \end{array}}}{\forall x \alpha} (\forall i)$$

REGUŁY ELIMINACJI:

$$\frac{\exists x \alpha \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0 - \text{św. zmienne} \\ \alpha[x/x_0] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}}{\beta} (\exists e)$$

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[x/t]} (\forall e)$$

$\forall x(\phi \vee \psi)$ zał.

x₀ – św. zmienne

$\forall x(\phi \vee \psi)$

$\phi \vee \psi [x \backslash x_0]$

$\phi[x \backslash x_0]$

$\forall x \phi$

$(\forall x \phi) \vee (\forall x \psi)$

$(\forall x(\phi \vee \psi)) \Rightarrow (\forall x \phi) \vee (\forall x \psi)$

$(\forall x \phi) \vee (\forall x \psi)$

x₀ – św. zmienne

$\forall x \phi \vee \forall x \psi$

$\phi[x \backslash x_0] \vee \psi[x \backslash x_0]$

$(\phi \vee \psi)[x \backslash x_0]$

$\forall x(\phi \vee \psi)$

$(\forall x \phi) \vee (\forall x \psi) \Rightarrow \forall x(\phi \vee \psi)$

$\forall x(\phi \wedge \psi)$ zał.

x₀ – św. zm.

$\forall x(\phi \wedge \psi)$

$\phi \wedge \psi [x \backslash x_0]$

$\phi[x \backslash x_0]$

x₁ – św. zm.

$\forall x(\phi \wedge \psi)$

$\phi \wedge \psi [x \backslash x_0]$

$\psi[x \backslash x_0]$

$\forall x \phi$ $\qquad$ $\forall x \psi$

$(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$

$(\forall x(\phi \wedge \psi)) \Rightarrow (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$

$\forall x \phi \Rightarrow \forall x \psi$

x₀ – św. zmienne

$\phi[x \backslash x_0]$

$\forall x \phi \Rightarrow \forall x \psi$

$\phi[x \backslash x_0]$ $\qquad$ $\phi[x \backslash x_0] \Rightarrow \psi[x \backslash x_0]$

$\psi[x \backslash x_0]$

$(\phi \Rightarrow \psi)[x \backslash x_0]$

$\forall x(\phi \Rightarrow \psi)$

$((\forall x \phi) \Rightarrow (\forall x \psi)) \Rightarrow (\forall x(\phi \Rightarrow \psi))$

$\forall x(\phi \Rightarrow \psi)$ zał.

$\exists x \phi$ zał.

x₀ – św. zmienne

$\phi[x \backslash x_0]$ $\qquad$ $\phi[x \backslash x_0] \Rightarrow \psi[x \backslash x_0]$

$\psi[x \backslash x_0]$

$\forall x \psi$

$\exists x \phi \Rightarrow \forall x \psi$

$(\forall x(\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow [(\exists x \phi) \Rightarrow (\forall x \psi)]$

KONTRPRZYKŁAD:

$\underbrace{(\forall x(\phi \Rightarrow \psi))}_{T} \Rightarrow \underbrace{[\underbrace{(\exists x \phi)}_{T} \Rightarrow \underbrace{(\forall x \psi)}_{F}]}_{F}$

UNIWERSUM: {1,2}

$\phi: x = 1$

$\psi: x = 1$

$(\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)$ zał.

$\exists x(\phi \wedge \psi)$

$[(\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)] \Rightarrow (\exists x(\phi \wedge \psi))$

KONTRPRZYKŁAD

$\underbrace{[(\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)]}_{T} \Rightarrow \underbrace{(\exists x(\phi \wedge \psi))}_{F}$

UNIWERSUM: {1,2}

$\phi: x = 1$

$\psi: x = 2$

$\exists x(\phi \wedge \psi)$ zał.

$(\phi \wedge \psi)[x \backslash x_0]$

$\phi \wedge \psi [x \backslash x_0]$

$\phi[x \backslash x_0]$

$\exists x \phi$

$\exists x(\phi \wedge \psi)$

$(\phi \wedge \psi)[x \backslash x_0]$

$(\phi \wedge \psi)[x \backslash x_0]$

$\psi[x \backslash x_0]$

$\exists x \psi$

$\exists x(\phi \wedge \psi)$ $\qquad$ $\exists x(\phi \wedge \psi)$

$\exists x \phi$ $\qquad$ $\exists x \psi$

$(\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)$

$(\exists x(\phi \wedge \psi)) \Rightarrow (\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)$

$\exists x(\phi \Rightarrow \psi)$ zał

- $\exists x \phi$
  - $\phi[x \backslash x_0]$
    - $\exists x(\phi \Rightarrow \psi)$
    - $\phi \Rightarrow \psi [x \backslash x_1]$ $\phi[x \backslash x_1]$
    - $\psi[x \backslash x_1]$
    - $\exists x \psi$
  - $\exists x(\phi \Rightarrow \psi)$
  - $\exists x \psi$
- $\exists x \phi$
- $\exists x \psi$

$(\exists x \phi) \Rightarrow (\exists x \psi)$

$(\exists x(\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow [(\exists x \phi) \Rightarrow (\exists x \psi)]$

KONTRPRZYKŁAD:

UNIWERSUM: $\{1, 2\}$

$\phi: x = 1$

$\psi: 1$

- $\forall x \phi$ zał
  - $\exists x \psi$ zał
    - $\psi[x \backslash x_0]$ zał
      - $\phi[x \backslash x_0]$ zał
      - $\psi[x \backslash x_0]$
    - $\phi \Rightarrow \psi[x \backslash x_0]$
    - $\exists x(\phi \Rightarrow \psi)$
  - $\exists x \psi$
  - $\exists x(\phi \Rightarrow \psi)$
- $(\exists x \psi) \Rightarrow (\exists x(\phi \Rightarrow \psi))$

$(\forall x \phi) \Rightarrow ((\exists x \psi) \Rightarrow (\exists x(\phi \Rightarrow \psi)))$

zad.

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \underbrace{(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|)}_{\varphi}$$

po $\forall$ $\Rightarrow$

po $\exists$ $\wedge$

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (pamiętaj o nawiasach)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow (\forall \epsilon > 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0 \wedge (\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi)))$$

$$\forall x_0 \notin \mathbb{R} \vee (\forall \epsilon \leq 0 \vee (\exists \delta > 0 \wedge (\forall x \notin \mathbb{R} \vee \varphi)))$$

$$\forall x_0 \notin \mathbb{R} \vee (\forall \epsilon \leq 0 \vee \exists \delta \forall x (\delta > 0 \wedge (x \notin \mathbb{R} \vee \varphi)))$$

$$\forall x_0 \notin \mathbb{R} \vee \forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon \leq 0 \vee \delta > 0 \wedge (x \notin \mathbb{R} \vee \varphi))$$

$$\forall x_0 \forall \epsilon \exists \delta \forall x (x_0 \notin \mathbb{R} \vee \epsilon \leq 0 \vee \delta > 0 \wedge (x \notin \mathbb{R} \vee \varphi))$$

$$\{n \mid \exists m \in \mathbb{N} (n = 3m)\} = \{3m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Zbiór, którego elementami są zbiory nazywamy rodziną zbiorów. Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru A nazywamy zbiorem potęgowym zbioru A i oznaczamy P(A)

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

$$x \in A \cup B \overset{df}{\iff} x \in A \vee x \in B$$
$$x \in A \cap B \overset{df}{\iff} x \in A \wedge x \in B$$
$$x \in A \setminus B \overset{df}{\iff} x \in A \wedge x \notin B$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

RÓŻNICA SYMETRYCZNA

$$x \in A \div B \overset{df}{\iff} x \in A \iff x \notin B$$

wszystko co nie wspólne

OPERACJE NIESKOŃCZONE NA ZBIORACH

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists X \in \mathcal{A} (x \in X)\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall X \in \mathcal{A} (x \in X)\}$$

$$\{A_s\}_{s \in S} = \{A_s \mid s \in S\}$$

$$\{A_{s,t}\}_{\substack{t \in T \\ s \in S}}$$

Jeżeli $S = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq n\}$ $\{A_i\}_{i=n}^{\infty}$

$$x \in \bigcup_{s \in S} A_s \overset{df}{\iff} \exists s \in S (x \in A_s)$$

$$x \in \bigcap_{s \in S} A_s \overset{df}{\iff} \forall s \in S (x \in A_s)$$

Rodzina zbiorów $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępująca jeżeli $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i wstępująca gdy $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$

RELACJE

Para uporządkowana (para) a i b $\langle a,b\rangle$

$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ gdy $a=c$, $b=d$

Iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych złożonych z elementów tych zbiorów:

$$A \times B = \{\langle a,b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Zamiast $A \times A$ piszemy A^2

Dowolny podzbiór $R \subseteq A \times B$ produktu kartezjańskiego zbiorów A i B nazywamy relacją dwuargumentową (binarną).

RELACJA $R \subseteq A \times A$ jest:

- zwrotna, jeśli dla wszystkich $a \in A$ zachodzi aRa
- symetryczna, jeśli dla wszystkich $a,b \in A$ zachodzi implikacja $aRb \Rightarrow bRa$
- przechodnia, jeśli dla wszystkich $a,b,c \in A$ zachodzi $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
- antyzwrotna, jeśli dla wszystkich $a \in A$ zachodzi $\neg(aRa)$
- antysymetryczna, jeśli dla wszystkich $a,b \in A$ zachodzi implikacja $aRb \Rightarrow \neg(bRa)$
- słabo antysymetryczna, jeśli dla wszystkich $a,b \in A$ zachodzi implikacja $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Relacja RÓWNOWAŻNOŚCI jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Relacja częściowego porządku jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna

ZŁOŻENIE RELACJI P i Q $\quad P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$

inny zapis $Q\,P$, $Q \circ P$, $Q \cdot P$

$$P;Q = \{\langle a,c\rangle \mid \exists b(aPb \wedge bQc)\} \subseteq A \times C$$

RELACJA ODWROTNA DO P

$$P^{-1} = \{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in P\} \subseteq B \times A$$

$R \subseteq A \times B$

$S \subseteq B \times C$

$T \subseteq C \times D$

$$(R;S);T = R;(S;T)$$

$$(R;S)^{-1} = S^{-1};R^{-1}$$

Relacja R^+ przechodnie (tranzytywne) domknięcie R. Najmniejsza relacja przechodnia zawierająca relację R

FUNKCJE

Relację $f \subseteq A \times B$ nazywamy funkcją o dziedzinie A i zbiorze wartości (przeciwdziedzinie) B, jeżeli spełnia ona dwa warunki

1. dla każdego $a \in A$ istnieje taki $b \in B$, że $\langle a, b \rangle \in f$,
2. dla dowolnych $a \in A$ oraz $b_1, b_2 \in B$ jeśli $\langle a, b_1 \rangle \in f$ oraz $\langle a, b_2 \rangle \in f$, to $b_1 = b_2$.

$f \in B^A \;=\; f : A \to B$

RÓŻNOWARTOŚCIOWA (INJEKCJA)

dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$, jeśli $a_1 \neq a_2$, to $f(a_1) \neq f(a_2)$.

„NA" (SURJEKCJA)

dla dowolnego $b \in B$ istnieje taki $a \in A$, że $f(a) = b$

Funkcja f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym (bijekcja), jeśli jest różnowartościowa i „na".

$(A \times B)^C \equiv \{f \mid f : C \to A \times B\}$

FUNKCJE ODWROTNE I ZŁOŻENIE FUNKCJI

Jeśli f i g są funkcjami to:

$gf \xrightarrow{\text{oznacza}}$ złożenie $g \circ f$ relacji f i g, czyli relację $f \cdot g$.

$f : A \to B \quad g : B \to C$

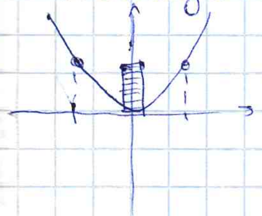
$gf \subseteq A \times C$ oraz $gf(a) - g(f(a))$

Jeżeli obie funkcje są różnowartościowe to gf też jest różnowartościowa.
Jeżeli obie funkcje są „na" to gf też jest „na"

Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Wtedy funkcja $g : B \to C$ jest funkcją odwrotną do f, jeśli $gf = 1_A$ oraz $fg = 1_B$

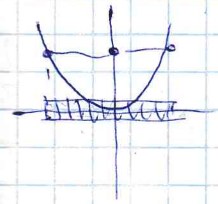
OBRAZ I PRZECIWOBRAZ

Niech $f: A \to B$ będzie funkcją i niech $X \subseteq A$. Obrazem zbioru X w odwzorowaniu f nazywamy zbiór



$$f[X] = \{b \in B \mid \exists a \in X \; f(a)=b\}$$

Przeciwobrazem zbioru $Y \subseteq B$ w odwzorowaniu f nazywamy zbiór



$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

$f[(0;2)] = (0;4)$ | $f^{-1}[(0;1)] = (-1;1)\setminus\{0\}$

$f = x^2$ $\quad f[(0,1)] = (0,1)$ | $f[(-1;-1)] = \langle 0;1)$ | $f^{-1}[(-1;1)] = (-1;1)$

f^{-1} może oznaczać fun. odwrotną, relację odwrotną, lub przeciwobraz ?

Niech $f: A \to B$ będzie funkcją, $\mathcal{X}$ rodziną podzbiorów zbioru A, zaś $\mathcal{Y}$ rodziną podzbiorów zbioru B. Wtedy

$$f[\bigcup \mathcal{X}] = \bigcup\{f[X] \mid X \in \mathcal{X}\}$$

Jeśli $\mathcal{X} \neq \emptyset$, to $f[\bigcap \mathcal{X}] = \bigcap\{f[X] \mid X \in \mathcal{X}\}$

$$f^{-1}[\bigcup \mathcal{X}] = \bigcup\{f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{Y}\}$$

Jeśli $\mathcal{Y} \neq \emptyset$, to $f^{-1}[\bigcap \mathcal{X}] = \bigcap\{f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{Y}\}$

RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI

Klasą abstrakcji elementu $a \in A$ względem relacji równoważności $\sim \subseteq A \times A$ nazywamy zbiór

$$[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Rodzinę zbiorów $A/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$ nazywamy zbiorem ilorazowym relacji $\sim$.

Relację R^* nazywamy zwrotnym i przechodnim domknięciem. 2

TEORIA MOCY

Zbiory A i B są równoliczne, jeżeli istnieje bijekcja $f: A \to B$. Piszemy wówczas $A \sim B$.

Dla dowolnych zbiorów A, B, C

1. $A \sim A$
2. Jeśli $A \sim B$ to $B \sim A$,
3. Jeśli $A \sim B$ oraz $B \sim C$ to $A \sim C$

ZBIORY SKOŃCZONE

Napis $\underline{n}$ oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od n, tj. zbiór $= \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Zbiór A jest zbiorem skończonym, jeśli istnieje taka liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, że $A \sim \underline{n}$. Zbiór, który nie jest skończony jest nieskończony.

1. Dla żadnego $n \in \mathbb{N}$ nie istnieje funkcja różnowartościowa z $\underline{n+1}$ w $\underline{n}$

2. Jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa z $\underline{m}$ w $\underline{n}$, to $\underline{m} \subseteq \underline{n}$.

3. Jeżeli $\underline{m} \sim \underline{n}$, to $m = n$.

4. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\underline{n} \nsim \mathbb{N}$.

Jeśli więc zbiór A jest skończony, to istnieje dokładnie jedna taka liczba naturalna n, że $A \sim \underline{n}$.

Niech A będzie zbiorem skończonym. Liczbę n taką, że $A \sim \underline{n}$ nazywamy liczbą elementów zbioru A i oznaczamy $|A|$. Liczbę elementów zbioru $|A|$ nazywamy też mocą zbioru A zwłaszcza gdy jednocześnie zajmujemy się zbiorami skończonymi i nieskończonymi.

Zbiór pusty ma zatem 0 elementów. Zbiór ma n elementów, jeżeli jego elementy można ponumerować bez powtórzeń liczbami $0, \ldots, n-1$

Moc zbioru liczb naturalnych (a więc i dowolnego zbioru równolicznego ze zbiorem liczb naturalnych) oznaczamy

$\aleph_0$

Moc zbioru liczb rzeczywistych to continuum

$\mathfrak{c}$

Zatem

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

$\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$

pytanie:

jakiś sposób z grafem na szybkie przedstawienie?

Zbiór jest przeliczalny, jeśli jest skończony lub jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiorem mocy continuum.

Moc zbioru A jest nie większa niż moc zbioru B i piszemy $|A| \preceq |B|$, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa: $f: A \to B$

Moc zbioru A jest mniejsza niż moc zbioru B i piszemy $|A| \prec |B|$, jeśli $|A| \preceq |B|$ oraz $A \not\sim B$.

1) Dla dowolnego zbioru A zachodzi $|A| \preceq |A|$

2) Jeśli $|A| \preceq |B|$ i $|B| \preceq |C|$, to $|A| \preceq |C|$

3) Jeśli $n < m$ to $|\underline{n}| \prec |\underline{m}|$.

4) Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $|\underline{n}| \prec |\mathbb{N}|$.

CANTOR-BERNSTEIN. Jeśli $|A| \preceq |B|$ oraz $|B| \preceq |A|$, to $|A| = |B|$.

Zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zatem zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ma moc continuum

Zbiór jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$ lub istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ na A.

Ciągiem elementów zbioru A nazywamy funkcję $f: \mathbb{N} \to A$

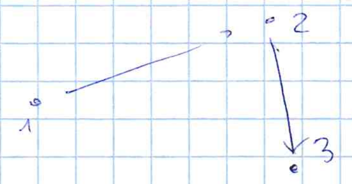
FAKT. Zbiór niepusty jest przeliczalny, gdy wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg

1. Podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.

2. Jeśli A i B są przeliczalne, to $A \times B$ jest przeliczalny.

3. Jeśli $\{A_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalny (czyli I jest przeliczalny i każdy ze zbiorów A_i jest przeliczalny) to $\bigcup_{i \in I} A_i$ jest przeliczalny.

4. Jeśli $f: A \to B$ i $X \subseteq A$ jest przeliczalny to $f(X)$ też.



1. relacja R

2 przechodnie domknięcie R^+

1) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \sim Parz$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$ itd

2) $\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

3) Tw. Cantora $A \not\sim P(A)$

4) $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$

$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

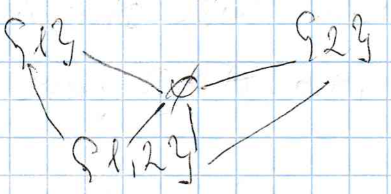
$\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$

$(P(\{1,2\}), \subseteq)$

$=$

$(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \subseteq)$

częściowego porządku
- zwrotne
- symet
- przechodn



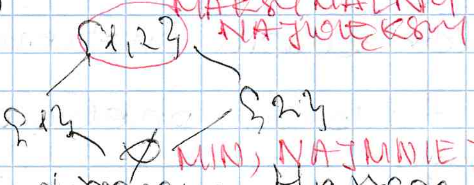
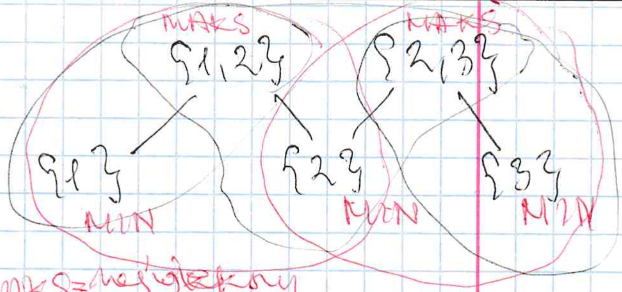


diagram Hassego

MAKSYMALNY – najwiekszy w śród tych z którym mogę porównać (nie ma od niego większego)
NAJWIĘKSZY – maksymalny w całym zbiorze

$(\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}, \subseteq)$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$



MAKS = większy z tego z czym go mogę porównać

$(\mathbb{N}, \leq)$ ma MIN, nie ma MAX

$(\mathbb{Z}, \leq)$ MIN nie, MAX nie

$(\mathbb{R}, \leq)$ —"—

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex})$ $(0,0)<(0,1)<(0,2)<\dots$
$\dots(1,0)<(1,1)<(1,2)<\dots$
$(8,0)<(8,1)<(8,2)<\dots$

LOGICZNA KONSEKWENCJA ...

Czy formuła $p \vee q$ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł $\{$ ~~...~~ $q \Rightarrow \neg p, \neg p \Rightarrow \neg q\}$

$\neg p$	p	q	$\neg p$	$q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$p \vee q$
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1

nie nie jedynki czyli nie logiczna kon.

nie spełniane → więc mnie nie obchodzi

odp. nie logiczna kon., bo

$\sigma(p)=0$ $\sigma(q)=0$

$0 \to F$
$1 \to T$

$\hat{\sigma}(q \Rightarrow \neg p) = 1$

$\hat{\sigma}(\neg p \Rightarrow \neg q) = 1$

$\hat{\sigma}(p \vee q) = 0$

Jeżeli jest wartościowanie które spełnia wszystkie z Σ i $\hat{\sigma}(\varphi)=T$ to jest logiczna konsekwencja

porządek liniowy $\{1,2\}$ / $\{1\}$ / $\emptyset$

regularny - $(\mathbb{N}, \leq)$ nie da się być nieskończenie w dół

porządek = porządek częściowy