LISTA 3

√ **ZAD. 1** WYKAŻ, ŻE WŚRÓD n+1 RÓŻNYCH LICZB WYBRANYCH SPOŚRÓD 2n KOLEJNYCH LICZB NATURALNYCH ZACZYNAJĄC OD 1 ISTNIEJE PRZYNAJMNIEJ JEDNA PARA, Z KTÓRYCH JEDNA LICZBA DZIELI DRUGĄ.

Ustawmy n szuflad, a numer i-ty szuflady

$$S_i = 2i - 1$$

$S_1 = 1 \quad S_2 = 3 \quad \dots \quad S_n = 2n-1$

(czyli numer szuflad to liczby nieparzyste z $[1, 2n]$)

Każdą liczbę a naturalną z przedziału $[1, 2n]$ możemy więc każdą liczbę zapisać jako

$2^b \cdot k$ gdzie: k - nieparzyste, b - największa możliwa naturalna

Wkładamy a do szufladki o numerze k.

Z zasady szufladkowej: zawsze gdzie co najmniej 1 szufladka z conajmniej dwoma liczbami, z których tę mniejsza dzieli większą.

ZAD 2. NA KARTCE W KRATKĘ ZAZNACZONO 5 PUNKTÓW KRATOWYCH (CZYLI PUNKTÓW O OBU WSPÓŁRZĘDNYCH CAŁKOWITOLICZBOWYCH). WYKAŻ, ŻE ŚRODEK ODCINKA ŁĄCZĄCEGO PEWNE DWA SPOŚRÓD TYCH PUNKTÓW JEST TAKŻE PUNKTEM KRATOWYM.

Wzór na współrzędne punktu środka odcinka dwóch punktów A i B

$$S(x_S, y_S) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

czyli $x_a + x_b$ oraz $y_a + y_b$ muszą być parzyste.

MOŻLIWOŚCI:

$$S_1 = \left\{(x, y) \middle| \begin{array}{l} x - \text{parzyste} \\ y - \text{nieparzyste} \end{array}\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x, y) \middle| \begin{array}{l} x - \text{nieparzyste} \\ y - \text{parzyste} \end{array}\right\}$$

$$S_3 = \left\{(x, y) \middle| \begin{array}{l} x - \text{parzyste} \\ y - \text{parzyste} \end{array}\right\}$$

$$S_4 = \left\{(x, y) \middle| \begin{array}{l} x - \text{nieparzyste} \\ y - \text{nieparzyste} \end{array}\right\}$$

Potraktujmy każdą z tych możliwości jako szufladkę.

Mamy więc 4 szufladki a punktów kratowych 5, czyli w przynajmniej jednej szufladce będą przynajmniej dwa punkty.

ZAD 3 DANY JEST CIĄG LICZB NATURALNYCH $a_1, a_2, \ldots, a_n$. POKAŻ, ŻE ISTNIEJĄ TAKIE i ORAZ j, $i \le j$, ŻE SUMA $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ JEST PODZIELNA PRZEZ N.

Mamy ciąg:

$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \ldots a_n$

Zapiszmy każdy element ciągu jako $a_i \% n$.

$a_1 \% n, a_2 \% n, \ldots \ldots a_n \% n$

Skorzystajmy z sum prefiksowych

Jeśli ciąg składa się z n elementów to sum prefiksów mamy dokładnie n.

Zapisując każdą sumę jako suma% n możemy stwierdzić, że każda suma może mieć inną wartość od 0 do n-1 wtedy wybieram sumę która $\% n = 0$. Jeśli nie to oznacza że przynajmniej 2 sumy mają taką samą wartość i możemy je od siebie odjąć a ich różnica da podzbiór którego suma $\% n = 0$

$a_1, a_2 \ldots a_i, a_{i+1}, \ldots a_j \ldots a_n$

$$\sum_{k=1}^{j} a_k - \sum_{k=1}^{i} = a_i + a_{i+2} + \ldots + a_j$$

Z metody szufladkowej

ZAD. 4 WYKAŻ, ŻE DLA KAŻDEJ LICZBY NATURALNEJ N ISTNIEJE LICZBA PODZIELNA PRZEZ N, KTÓREJ ZAPIS DZIESIĘTNY ZŁOŻONY JEST TYLKO Z ZER I JEDYNEK.

$1, 11, 111, 1111, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{n}$

Zapiszmy ten ciąg %n

$1\%n, 11\%n, 111\%n, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{n}\%n$

Jeśli każdy element będzie miał inną wartość modulo n to trafiliśmy, jeśli nie to przynajmniej 2 elementy %n mają taką samą wartość (z metody szufladkowej)*

1- bo to oznacza że jedno z nich to 0

Jeśli odejmiemy 2 takie elementy to dostaniemy liczbę której %n = 0 a jej postać wygląda tak

(1...0...)

odejmiemy mniejszy od większego.

metoda szufladkowa
możliwe wyniki %n to [0, n-1] czyli n możliwości, ale teraz wykluczamy 0 czyli możliwych wartości wyników jest n-1, wyników to uporządkowania w szufladkach (których jest n-1) jest n, więc przynajmniej 2 wyniki trafią do tej samej szufladki.

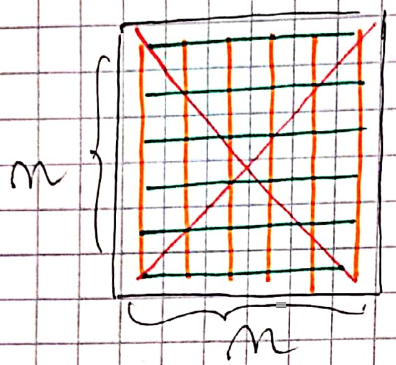
DLACZEGO W ZAD 3 i 4 KORZYSTAM Z

Jeśli $a \bmod n \neq 0 \wedge b \bmod n \neq 0$ i odejmę $a-b$ to wynikiem będzie liczba której $\%n = 0$

$a' = n\cdot k' + r$
$a'' = n\cdot k'' + r$

$a'' - a' = (n\cdot k'' + r) - (n\cdot k' + r) =$
$= n\cdot k'' + r - nk' - r = n\cdot k'' + n\cdot k' =$
$= n\cdot(k'' - k')$

ZAD5. W KAŻDE POLE SZACHOWNICY $n \times n$ WPISUJEMY JEDNĄ Z LICZB: $-1, 0, 1$. NASTĘPNIE DODAJEMY DO SIEBIE LICZBY STOJĄCE W TEJ SAMEJ KOLUMNIE, W TYM SAMYM WIERSZU I NA TEJ SAMEJ PRZEKĄTNEJ. UDOWODNIJ, ŻE WŚRÓD OTRZYMANYCH SUM CO NAJMNIEJ DWIE SĄ RÓWNE.



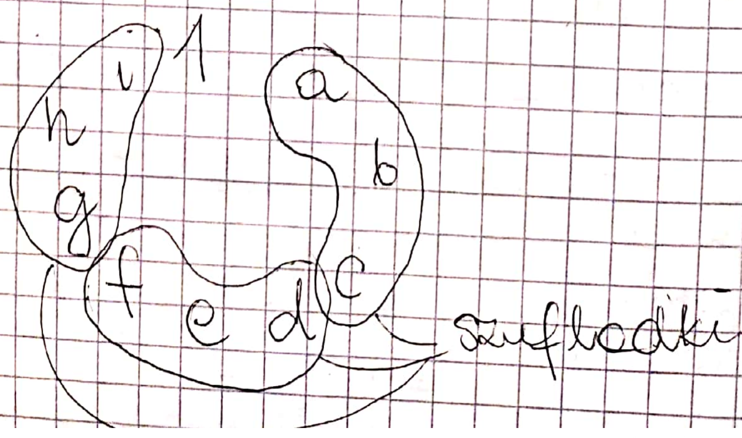
Czyli mamy n wierszy, n kolumn i 2 przekątne, czyli łącznie $2n+2$

możliwości sumy pól w kolumnach, wierszach i na przekątnych wynosi

od $-n$ do n, czyli $2n+1$ możliwości włącznie z zerem.

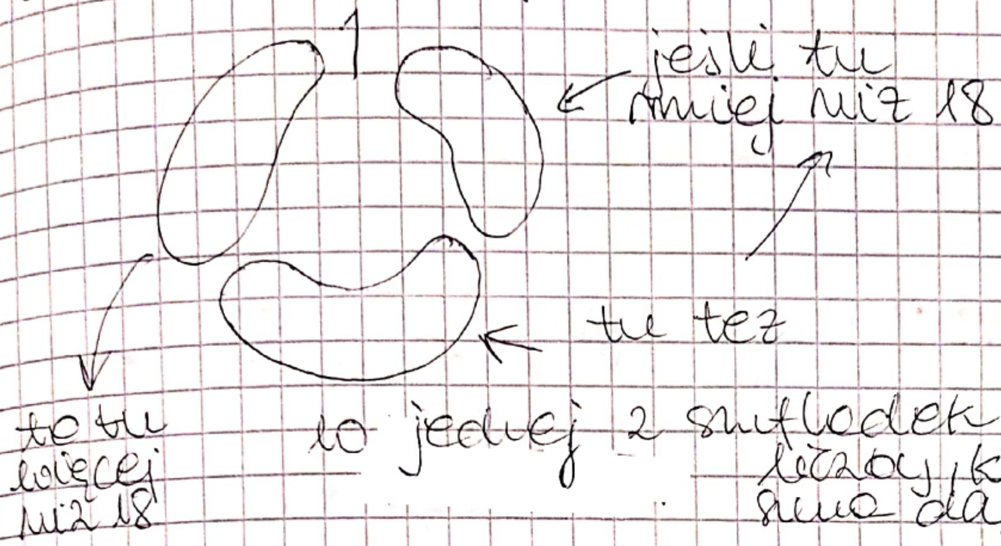
mamy więc $2n+1$ szufladek i $2n+2$ kulek co oznacza, że przynajmniej 2 kulki są w jednej szufladce.

ZAD6. NA OKRĘGU ZAPISUJEMY W DOWOLNEJ KOLEJNOŚCI KOLEJNOŚCI LICZBY NATURALNE OD 1 DO 10. WYKAŻ, ŻE ZAWSZE ZNAJDĄ SIĘ TRZY SĄSIEDNIE, KTÓRYCH SUMA WYNOSI PRZYNAJMNIEJ 18.



suma liczb 1, 2, ... 10 bez 1 to 54

$\frac{54}{3} = 18$ } średnio suma w każdej szufladce



to jednej z 2 szufladek będą liczby, których suma daje przynajmniej 18

ZAD. 7. NIECH A I B BĘDĄ DOWOLNYMI LICZBAMI NATURALNYMI TAKIMI, ŻE $a+b>0$. POKAŻ, ŻE LICZBY $\frac{a}{NWD(a,b)}$ i $\frac{b}{NWD(a,b)}$ SĄ WZGLĘDNIE PIERWSZE.

liczby względnie pierwsze - liczby całkowite, których największym wspólnym dzielnikiem jest jeden

Niech a, b będą dowolnymi liczbami naturalnymi, takimi że $a+b>0$ pokazać, że $\frac{a}{NWD(a,b)}$ $\frac{b}{NWD(a+b)}$ są względnie pierwsze załóżmy nie wprost, że $\frac{a}{NWD(a,b)}$, $\frac{b}{NWD(a,b)}$ nie są względnie pierwsze wówczas istnieje

$c \in \mathbb{N}$, $c>1$ takie że $c \mid \frac{a}{NWD(a,b)}$ i $c \mid \frac{b}{NWD(a,b)}$ wówczas $c \cdot NWD(a,b) \mid a$ i $c \cdot NWD(a,b) \mid b$, ale to oznaczałoby, że istnieje liczba naturalna większa od 1 c, która po przemnożeniu przez NWD(a,b) dzieli zarówno a jak i b co oznaczałoby, że $c \cdot NWD(a,b) = NWD(a,b)$

Zatem zał. było fałszywe czyli $\frac{a}{NWD(a,b)}$ $\frac{b}{NWD(a,b)}$ są względnie pierwsze sprzeczność

ZAD 9 OBLICZ NWD(8,13) ORAZ CAŁKOWITE LICZBY x, y TAKIE, ŻE $8x+13y = NWD(8,13)$.

a	b	$\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$	x	y
8	13	1		
8	5	1		
5	3	1		
3	2	1		
2	1	2		
1	0			

$13-8=5$

$8-5=3$

$5-3=2$

$3-2=1$

$2-1\cdot 1=1$

są względnie pierwsze

$1 = 3-2 = 3-(5-3) = (8-5)-(5-(8-5)) =$

$= 8-5-5+8-5 = 2\cdot 8 - 3\cdot 5 = 2\cdot 8 - 3(13-8) =$

$= 5\cdot \underline{8} - 3\cdot \underline{13} = 1$

$x = 5$

$y = 3$

ZAD 10 NIECH A, B, N BĘDĄ DODATNIMI LICZBAMI NATURALNYMI. POKAŻ, ŻE JEŚLI $a \perp n$ i $b \perp n$, TO $ab \perp n$

$a, b, n \in \mathbb{N}^+$

Zał. $a \perp n$ i $b \perp n$ teza: $ab \perp n$

Załóżmy, nie wprost, że ab nie jest względnie pierwsza z n, wówczas istnieje $c \in \mathbb{N}$ i $c > 1$ takie, że

$c | ab \wedge c | n$

zapiszmy $c = c_1 \cdot c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$

(skoro $c > 1$ i $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ to c_1 i c_2 nie mogą być jednocześnie równe 1)

zapiszmy $c | ab \iff c_1 c_2 | ab$,

$c | n \iff c_1 \cdot c_2 | n$ bez straty ogólności

$c_1 | a \wedge c_2 | b$

skoro $c_1 \cdot c_2 | n$ to $c_1 | n$ i $c_2 | n$

z zał. $a \perp n$ zatem skoro $c_1 | n$ i $c_1 | a$ to $c_1 = 1$

$b \perp n$ zatem skoro $b \perp n$ i $c_2 | n$ i $c_2 | b$ to $c_2 = 1$

wtedy $c = c_1 \cdot c_2 = 1 \cdot 1 = 1$ sprzeczność z zał. $c > 1$

zatem $ab \perp n$.