LISTA 14

ZAD 1 NIECH BĘDZIE

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix} \quad \tilde{x} := \begin{bmatrix} 0,999 \\ -1,001 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} := \begin{bmatrix} 0,341 \\ -0,087 \end{bmatrix}$$

OBLICZ WEKTORY RESZT

$\tilde{r} = A\tilde{x} - b$, $\hat{r} = A\hat{x} - b$

ORAZ WEKTORY BŁĘDÓW $\tilde{e} = \tilde{x} - x$, $\hat{e} = \hat{x} - x$, GDZIE x JEST ROZWIĄZANIEM UKŁADU $Ax = b$. KTÓRY Z WEKTORÓW $\tilde{x}, \hat{x}$ JEST LEPSZYM PRZYBLIŻENIEM ROZWIĄZANIA UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH? JAKI STĄD WNIOSEK?

$A \cdot \tilde{x}$

$$\begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,999 \\ -1,001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \cdot 0,999 + 563(-1,001) \\ 913 \cdot 0,999 + 659(-1,001) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 215,657 \\ 252,428 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \tilde{x} - b = \tilde{r}$

$$\begin{bmatrix} 215,657 \\ 252,428 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215,657 - 217 \\ 252,428 - 254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,343 \\ -1,572 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \hat{x}$

$$\begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,341 \\ -0,087 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \cdot 0,341 + 563 \cdot (-0,087) \\ 913 \cdot 0,341 + 659(-0,087) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 265,98 - 48,981 \\ 311,333 - 57,333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208,009 \\ 254 \end{bmatrix}$$

$A\hat{x} - b$

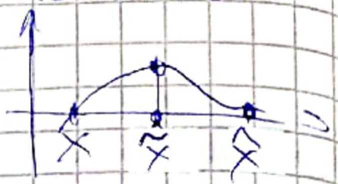
$$\begin{bmatrix} 208,009 \\ 254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,991 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{e} = \tilde{x} - x$

wtedy $A \cdot x = b$

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} 0,999 \\ -1,001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ 0,001 \end{bmatrix}$$

Źle uwarunkowane dla



$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0,341 \\ -0,081 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,658 \\ 0,813 \end{bmatrix}$$

ZAD. 2 ZNAJDŹ ROZKŁAD LU MACIERZY

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 5 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix}$$

$R_2 = R_2 + 2 \cdot R_1$ $\qquad$ $R_3 = R_3 + 3 \cdot R_1$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 8 & -4 & 5 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix} =$$

$R_4 = R_4 + 5 \cdot R_1$ $\qquad$ $R_3 = R_3 - 4 \cdot R_2$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 12 & -14 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -14 & 14 \end{bmatrix} =$$

$R_4 = R_4 - 6 \cdot R_2$ $\qquad$ $R_4 = R_4 + 7 \cdot R_3$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rząd

odwracam znak

kolumna

$R_2 = R_2 + 2 \cdot R_1$
$R_3 = R_3 + 3 \cdot R_1$
$R_4 = R_4 + 5 R_1$
$R_3 = R_3 - 4 R_2$
$R_4 = R_4 - 6 R_2$
$R_4 = R_4 + 7 \cdot R_3$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 5 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$\det(A) = \det(U) * \det(L) = 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 16$$

Oblicz A^{-1}. wiemy, że $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$

$$\bullet [L|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 = R_2 + 2 \cdot R_1}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 + 3 \cdot R_1}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = R_4 + 5R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 - 4R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = R_4 - 6R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -7 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = R_4 + 7R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -42 & -34 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ -42 & 34 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 = \frac{R_1}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 = \frac{R_2}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = \frac{R_3}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = \frac{R_4}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 = R_1 - \frac{1}{2} \cdot R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (L\,U)^{-1} = L^{-1} \cdot U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ -42 & -34 & -7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27/2 & 21/2 & -9/4 & -1/4 \\ 22 & 35/2 & -7/2 & -1/2 \\ -5/2 & -2 & 1/2 & 0 \\ -21 & -17 & 7/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ZAD. 3 STOSUJĄC METODĘ FAKTORYZACJI ROZWIĄŻ UKŁAD RÓWNAŃ $Ax = b$, GDZIE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ -1 & -3 & 0 & 11 \\ -2 & -10 & 5 & 25 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ZAD. 3 STOSUJĄC METODĘ FAKTORYZACJI ROZWIĄŻ UKŁAD RÓWNAŃ $Ax = b$, GDZIE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ -1 & -3 & 0 & 11 \\ -2 & -10 & 5 & 25 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$R_2 = R_2 + R_1$ $\qquad$ $R_3 = R_3 + 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -10 & 5 & 25 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 5 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix} =$$

$R_4 = R_4 + 3R_1$ $\qquad$ $R_3 = R_3 - 4 \cdot R_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 5 \\ 0 & -10 & -13 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -13 & -5 \end{bmatrix} =$$

$R_4 = R_4 - 5R_2$ $\qquad$ $R_4 = R_4 + 6R_3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = L \cdot U$

$Ax = b$

$(L \cdot U)x = b$

$L(\underbrace{U \cdot x}_{y}) = b$

$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ Ux = y \end{cases}$$

FAKTORYZACJA

$A\vec{x} = \vec{b}$; $\vec{x}$ - szukane

$L \cdot U\vec{x} = \vec{b}$

$L(U\vec{x}) = \vec{b}$

$U\vec{x} = \vec{y}$ (*)

$L\vec{y} = \vec{b}$ (**)

najpierw liczymy $\vec{y}$ z (**), potem obliczamy $\vec{x}$ z (*)

Scanned with CamScanner

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 31 \\ -3 & 5 & -6 & 1 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 = R_4 + 3R_1]{R_2 = R_2 + R_1,\ R_3 = R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 5 & -6 & 1 & -31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 = R_4 - 5R_2]{R_3 = R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -46 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = R_4 + 6R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \qquad y = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 = -\frac{1}{4} R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 = R_3 - R_4]{R_1 = R_1 + 10R_4,\ R_2 = R_2 - R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = \frac{1}{3} R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = R_2 - R_3]{R_1 = R_1 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 = -\frac{1}{2} R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ZAD. 4 UDOWODNIJ NASTĘPUJĄCE TWIERDZENIA

A) ILOCZYN DWÓCH MACIERZY TRÓJKĄTNYCH DOLNYCH (GÓRNYCH) JEST MACIERZĄ TRÓJKĄTNĄ DOLNĄ (GÓRNĄ)

Niech A, B - macierze trójkątne dolne
$C = AB$

$[c_{ij}] = [a_{ij}][b_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i<j$
$b_{ij} = 0$ dla $i<j$

Niech $i<j$
wtedy $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj}}_{\underbrace{a_{i,i+1}}_{0} + \underbrace{a_{i,i+2}}_{0} b_{i+2,j} + \ldots + \underbrace{a_{in}}_{0} b_{nj}} =$

$= \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} + b_{kj}}_{\underbrace{a_{i1} b_{1j}}_{0} + \underbrace{a_{i2} b_{2j}}_{0} + \ldots + \underbrace{a_{i,j-1} b_{j-1,j}}_{0}} + \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj}$

$= \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} = \emptyset$
bo $i<j$

$c_{ij} = 0$ dla $i<j$, więc C jest macierzą trójkątną dolną, czyli iloczyn macierzy trójkątnych dolnych to macierz trójkątna dolna.

Skoro A, B, C to macierze trójkątne dolne, to A^T, B^T, C^T to macierze trójkątne górne.

$AB = C$, więc $B^T A^T = C^T$, czyli iloczyn dwóch macierzy trójkątnych górnych to macierz trójkątna górna.

B) JEŚLI L JEST MACIERZĄ TRÓJKĄTNĄ DOLNĄ Z JEDYNKAMI NA PRZEKĄTNEJ GŁÓWNEJ TO L^{-1} RÓWNIEŻ JEST MACIERZĄ TEGO TYPU

Niech L - macierz trójkątna dolna z jedynkami na przekątnej głównej.

Scanned with CamScanner

wtedy $\det(\mathcal{L}) = 1 \neq 0$, czyli $\mathcal{L}^{-1}$ istnieje

$$[L \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & 0 & 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 & 0 & & & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2 - l_{21}R_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & -l_{21} & 1 & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 & & & \\ l_{n1} & \cdots & & 1 & & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 = R_3 - l_{32}R_2]{R_3 = R_3 - l_{31}R_1}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & & -l_{21} & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & -l_{31}+l_{32}l_{21} & -l_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & & 0 & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{sposób tak długo dopóki nie otrzymamy z niej } I]{\text{Przekształcamy } \mathcal{L} \text{ w ten}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & \cdots & & \\ & 1 & 0 & & & & - & \\ & & 1 & & & - & & \\ 0 & & & 1 & & & - & \end{array}\right] = [I, L^{-1}]$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy macierz odwrotną do $\mathcal{L}$ i jest ona macierzą trójkątną dolną oraz ma na przekątnej same jedynki (bo operacje jakie wykonywaliśmy nie mają wpływu na przekątną ani na pola pod nią).

ZAD 6 OPRACUJ OSZCZĘDNY ALGORYTM ZNAJDOWANIA ROZKŁADU LU MACIERZY TRÓJPRZEKĄTNIOWEJ, PRZY ZAŁOŻENIU, ŻE ROZKŁAD TEN ISTNIEJE.

Macierz trójprzekątniowa ma postać

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

$$A = U \cdot L$$

U – trójkątna górna z jedynkami na przekątnej

L – trójkątna dolna z pełnymi wartościami na przekątnej

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ l_1 & 1 & & & \\ & l_2 & 1 & & \\ & & l_3 & \ddots & \\ 0 & & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & b_1 & & & 0 \\ & u_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & & u_n \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że przekątną U mamy "za darmo" bo składa się z samych jedynek. Tak samo dane b_i, które znajdują się nad główną przekątną macierzy L.

Musimy więc dostrzec wzór na u_i i l_i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & l_2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & l_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & b_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & u_3 & b_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & \vdots \\ & & c_3 & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

ZAUWAŻMY!

$1 \cdot u_1 = a_1$

$l_1 \cdot u_1 = c_1$

$\Downarrow$

$l_1 = \frac{c_1}{u_1}$

$l_1 \cdot b_1 + 1 \cdot u_2 = a_2$

$\Downarrow$

$u_2 = a_2 - l_1 b_1$

wzór ogólny

$l_i = \frac{c_i}{u_i}$

$u_i = a_i - l_{i-1} b_{i-1}$