EGZAMIN 2020 ZAD 3.

ZNAJDŹ OGÓLNĄ POSTAĆ ROZWIĄZANIA NASTĘPUJĄCEGO RÓWNANIA REKURENCYJNEGO ZA POMOCĄ ANIHILATORÓW

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + \frac{\binom{n}{2}}{2^n}, \text{ GDY } a_0 = a_1 = 0$$

$$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = 5\langle a_{n+1}\rangle - 6\langle a_n\rangle + \left\langle \frac{\binom{n}{2}}{2^n}\right\rangle$$

$$E^2\langle a_n\rangle = 5E\langle a_n\rangle - 6\langle a_n\rangle + \left\langle \frac{\binom{n}{2}}{2^n}\right\rangle$$

$$(E^2 - 5E + 6)\langle a_n\rangle - \underbrace{\left\langle \frac{\binom{n}{2}}{2^n}\right\rangle}_{\text{MUSIMY ZANIHILOWAĆ}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\binom{n}{2}}{2^n} = \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{2^n} = \frac{\frac{\cancel{(n-2)!}\,(n-1)\cdot n}{2\cdot\cancel{(n-2)!}}}{2^n} = \frac{n^2-n}{2^{n+1}}}$$

$$\left(E - \frac{1}{2}\right)\left\langle \frac{n^2-n}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2^{n+1+1}}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \frac{n^2-n}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2^{n+2}}\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle \frac{n^2-n}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle \frac{(n+1)^2 - n - 1 - n^2 + n}{2^{n+2}}\right\rangle = \left\langle \frac{n^2+2n+1-1-n^2}{2^{n+2}}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{2n}{2^{n+2}}\right\rangle = \left\langle \frac{n}{2^{n+1}}\right\rangle$$

$$\left(E - \frac{1}{2}\right)\left\langle \frac{n}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle \frac{n+1}{2^{n+2}}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \frac{n}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle \frac{n+1-n}{2^{n+2}}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+2}}\right\rangle$$

$$\left(E - \frac{1}{2}\right)\left\langle \frac{1}{2^{n+2}}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+1+2}}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{2^{n+2}}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2^{n+3}}\right\rangle - \left\langle \frac{1}{2^{n+3}}\right\rangle = \langle 0\rangle$$

CZYLI

$$(E^2 - 5E + 6)\left(E - \frac{1}{2}\right)^3\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$(E-6)(E+1)\left(E - \frac{1}{2}\right)^3\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

# JAK ROZPISYWAĆ UKŁADU RÓWNAŃ

......./......./.........

$$(E-1)^3(E-3)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$\underbrace{\alpha n^2\cdot 1^n + \beta\cdot n\cdot 1^n + \gamma\cdot 1^n}_{} + \sigma\cdot 3^n = a_n$$

| SEQUENCE | ANIHILATOR |
|---|---|
| $\langle\alpha\rangle$ | $E-1$ |
| $\langle\alpha\cdot a^i\rangle$ | $E-a$ |
| $\langle\alpha a^i+\beta b^i\rangle$ | $(E-a)(E-b)$ |
| $\langle\alpha_0 a_0^i+\alpha_1 a_1^i+\ldots+\alpha_n a_n^i\rangle$ | $(E-a_0)(E-a_1)\ldots(E-a_n)$ |
| $\langle\alpha i+\beta\rangle$ | $(E-1)^2$ |
| $\langle(\alpha i+\beta)a^i\rangle$ | $(E-a)^2$ |
| $\langle(\alpha i+\beta)a^i+\gamma b^i\rangle$ | $(E-a)^2(E-b)$ |
| $\langle(\alpha_0+\alpha_1 i+\ldots+\alpha_{n-1}i^{n-1})a^i\rangle$ | $(E-a)^n$ |

## EGZAMIN POP 2018 ZAD 3

$$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n + \frac{n}{2^n} \qquad a_0 = a_1 = 0$$

$$E^2\langle a_n\rangle = \langle a_{n+2}\rangle = \frac{3}{2}\langle a_{n+1}\rangle - \frac{1}{2}\langle a_n\rangle + \left\langle\frac{n}{2^n}\right\rangle$$

$$E^2\langle a_n\rangle = \frac{3}{2}E\langle a_n\rangle - \frac{1}{2}\langle a_n\rangle + \left\langle\frac{n}{2^n}\right\rangle$$

$$\left(E^2 - \frac{3}{2}E + \frac{1}{2}\right)E\langle a_n\rangle - \underbrace{\left\langle\frac{n}{2^n}\right\rangle}_{\text{ANIHILUJEMY}} = 0$$

$$\left(E-\frac{1}{2}\right)\left\langle\frac{n}{2^n}\right\rangle = \left\langle\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{n}{2^n}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{2^{n+1}}\right\rangle$$ 13

$$\left(E-\frac{1}{2}\right)\left\langle\frac{1}{2^{n+1}}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}}\right\rangle = \langle 0\rangle$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \qquad \sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2} = 1$$

$$\left(E-\frac{1}{2}\right)(E-1)\left(E-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\alpha\cdot\frac{1}{2}^n + \beta\cdot 1^n + \gamma\cdot n\cdot\frac{1}{2}^n + \sigma\cdot\frac{1}{2}^n = a_n$$

## EGZAMIN 2018

$$a_{n+1} = -a_n + \frac{n}{3^n} \qquad a_0 = a_1 = 0$$

$$E\langle a_n\rangle = -\langle a_n\rangle + \left\langle\frac{n}{3^n}\right\rangle$$

$$(E+1)\langle a_n\rangle = \underbrace{\left\langle\frac{n}{3^n}\right\rangle}_{\text{ANIHILUJEMY}}$$

$$\left(E-\frac{1}{3}\right)\left\langle\frac{n}{3^n}\right\rangle = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\left(E-\frac{1}{3}\right)\left\langle\frac{1}{3^{n+1}}\right\rangle = \frac{1}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+2}} = 0$$

$$(E+1)\left(E-\frac{1}{3}\right)^2\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$\alpha(-1)^n + \beta\cdot n\cdot\frac{1}{3}^n + \gamma\cdot\frac{1}{3}^n = a_n$$

$a_0 = a_1 = 0$

## EGZAMIN 2017

$a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n + n \cdot 3^n - 1$ ......./......./..........

$E^2\langle a_n\rangle = 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle + \langle n \cdot 3^n\rangle - 1$

$(E^2 - 2E + 1)\langle a_n\rangle = \langle \underbrace{n \cdot 3^n \quad - 1}\rangle$

$(E-3)\langle n \cdot 3^n - 1\rangle = [(n+1)3^{n+1} - 1] - [n \cdot 3^{n+1} - 3] = 3^{n+1} + 2$

$(E-3)\langle 3^{n+1} + 2\rangle = \langle 3^{n+2} + 2\rangle - 3\langle 3^{n+1} + 2\rangle = -4$

$(E-1)\langle -4\rangle = \langle -4\rangle - \langle -4\rangle = \langle 0\rangle$

$(E-1)(E^2 - 2E + 1)(E-3)^2$

## EGZAMIN 2018

$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n + 7n2^n \qquad a_0 = a_1 = 0$

$E^2\langle a_n\rangle = 7E\langle a_n\rangle - 10\langle a_n\rangle + \langle 7n2^n\rangle$

$(E^2 - 7E + 10)\langle a_n\rangle = \langle \underbrace{7n2^n}\rangle$

$(E-2)\langle 7n2^n\rangle = \langle 7(n+1)2^{(n+1)} - 7n2^{(n+1)}\rangle =$

$= (n+1-n)7 \cdot 2^{n+1} = 7 \cdot 2^{n+1}$

$(E-2)\langle 7 \cdot 2^{n+1}\rangle = \langle 7 \cdot 2^{n+2} - 7 \cdot 2^{n+2}\rangle = \langle 0\rangle$

$(E^2 - 7E + 10)(E-2)^2$

## EGZAMIN

$a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n + 5^{2n} \qquad a_0 = a_1 = 0$

$E^2\langle a_n\rangle = 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle + \langle 5^{2n}\rangle$

$(E^2 - 2E + 1)\langle a_n\rangle = \langle \underbrace{5^{2n}}\rangle$

$(5^2)^n = 5^{2n} = 25^n$

$(E-25)\langle 25^n\rangle = \langle 0\rangle$

$(E-5) = \langle 5^{2(n+1)} - 5^{2n+1}\rangle = \langle 5^{2n+2} - 5^{2n+1}\rangle =$

$= 5^{2n+1}(5-1) = 4 \cdot 5^{2n+1}$

## EGZAMIN 2017 ZAD 5 POP

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + n \cdot 3^n - 1 \qquad a_0 = a_1 = 0$

$E^2\langle a_n\rangle = 4E\langle a_n\rangle - 3\langle a_n\rangle + n \cdot 3^n - 1$

$(E^2 - 4E + 3)\langle a_n\rangle = \underbrace{n \cdot 3^n - 1}_{\text{ANIHILUJEMY}}$

$(E-3)\langle n \cdot 3^n - 1\rangle = \langle (n+1)3^{n+1} - 1 - (n3^{n+1} - 3)\rangle = \langle 3^{n+1} + 2\rangle$

$(E-3)\langle 3^{n+1} + 2\rangle = \langle 3^{n+2} + 2 - 3^{n+2} - 6\rangle = \langle -4\rangle$

$(E-1)\langle -4\rangle = \langle -4 + 4\rangle = \langle 0\rangle$

$(E^2 - 4E + 3)(E-3)^2(E-1) = a_n$

## EGZAMIN POP 2018 ZAD 4

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 5^{2n} \qquad a_0 = a_1 = 0$

$E^2\langle a_n\rangle = 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle + 5^{2n}$

$(E^2 - 2E + 1)\langle a_n\rangle = \underbrace{5^{2n}}_{\text{ANIHILUJEMY}}$

$(5^2)^n = 25^n$

$(E-25)\langle 25^n\rangle = \langle 25^{n+1} - 25^{n+1}\rangle = \langle 0\rangle$

$(E^2 - 2E + 1)(E-25) = a_n$

$(E-1)(E-1)(E-25) = a_n$

$(E-1)^2(E-25) = a_n$

$\alpha 1^n \cdot n + \beta 1^n + \gamma 25^n = a_n$

Scanned with CamScanner

## EGZAMIN POP 2018 ZAD 4

Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0,0,1\cdot 2^1,0,0,2\cdot 2^2,0,0,3\cdot 2^3, \dots$

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 2^0 x^0 + 2^1 \cdot x^1 + 2^2 \cdot x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots = \sum_{i\geq 0} 2^i x^i$$

$$A(x^3) = 2^0 (x^3)^0 + 2^1 \cdot x^3 + 2^2 (x^3)^2 + \dots + 2^n x^{3n} + \dots$$

$$A(x^3) = 1 + 2 \cdot x^3 + 2^2 x^6 + \quad + 2^n x^{3n} + \dots \quad 1,0,0,2,0,0,4,0$$

$$A'(x^3) = 2 \cdot 3x^2 + 2^2 \cdot 6x^5 + \dots + 3n \cdot 2^n \cdot x^{3n-1} + \dots =$$

$$\frac{1}{3} \cdot A'(x^3) = 1 \cdot 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2^2 x^5 + \dots + n \cdot 2^n x^{3n-1}$$

$$A(x) = \frac{1}{1-2x}$$

$$\frac{1}{3}(A'(x^3)) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{(1-2x^3)^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{(1-2x^3)^2} = \frac{x^2}{(1-2x^3)^2}$$

## EGZAMIN 2020 ZAD 4

dla ciągu $a_n = 1+2+\dots+2^n + (-\sqrt{2})^n$

$$1+2+4+\dots+2^n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{(1-2^{n+1})}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

$$a_n = 2^{n+1} - 1 + (-\sqrt{2})^n$$

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^{i+1} - 1 + (-\sqrt{2})^i\right) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} (-\sqrt{2})^i x^i =$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i - \sum_{i=0}^{\infty} (x)^i + \sum_{i=0}^{\infty} (-\sqrt{2}x)^i =$$

$$= \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\sqrt{2}x}$$

Scanned with CamScanner

……/……/………

# EGZAMIN 2019 ZAD 4

dla ciągu $a_n = \binom{n}{2}$

$$a_n = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2-i}{2}\cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2}\cdot x^i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i - \sum_{i=0}^{\infty} i x^i\right)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$B(x) = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)}$$

$$B'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \left(\frac{1}{(1-x)}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$B'(x)\cdot x = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2} \leftarrow \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot x^i$$

$$(B'(x)x)' = 0 + 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x^2)}{(1-x)^4}$$

$$(B'(x)x)'\cdot x = 0 + x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots = \frac{(1-x^2)x}{(1-x)^4} \leftarrow \sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i$$

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i - \sum_{i=0}^{\infty} i x^i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x^2)x}{(1-x)^4} - \frac{x}{(1-x)^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(1-x^2)x - x(1-x)^2}{(1-x)^4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x - x^3 - x(1-2x+x^2)}{(1-x)^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x - x^3 - x + 2x^2 - x^3}{(1-x)^4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x^3 + 2x^2}{(1-x)^4}\right) = \frac{-x^3 + x^2}{(1-x)^4}$$

# EGZAMIN 2018 ZAD 5 POP

dla ciągu $(1, 0, 0, \pi, 0, 0, \pi^2, 0, 0, \pi^3, \ldots)$

$$A(x) = \pi^0 x^0 + \pi^1 x^1 + \pi^2 x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-\pi x)}$$

$$A(x^3) = (x^3)^0 + (x^3)^1 + (x^3)^2 + \ldots = \frac{1}{(1-\pi x^3)}$$

# EGZAMIN 2017 ZAD 7 POP

dla ciągu $(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 9, \frac{1}{8}, 27, \ldots)$

$$A(x) = \frac{1}{2^1} x^0 + \frac{1}{2^1} x^2 + \frac{1}{2^2} x^3 + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \sum \frac{1}{2}^{i+1} x^i$$

$$A(x^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2}x^2)}$$

$$A(x^2)\cdot x^3 = \frac{x^3}{2(1-\frac{1}{2}x^2)} = \frac{x^3}{2-x^2}$$

Scanned with CamScanner

$$B(x) = 3^1x^0 + 3^2x^1 + 3^3x^2 + \dots = \sum 3^{i+1}\cdot x^i = 3\sum 3^i\cdot x^i = 3\frac{1}{1-3x}$$

....... / ....... / ..........

$$B(x^2) = \frac{3}{1-3x^2}$$

$$B(x^2)x^4 = \frac{3x^4}{1-3x^2}$$

$$A(x^2)x^3 + B(x^2)x^4 = \frac{x^3}{2-x^2} + \frac{3x^4}{1-3x^2} = \frac{x^3(1-3x^2)+3x^4(2-x^2)}{(2-x^2)(1-3x^2)}$$

$$= \frac{x^3-3x^5+6x^4-3x^6}{(2-x^2)(1-3x^2)} = \frac{-3x^6-3x^5+6x^4+x^3}{(2-x^2)(1-3x^2)} = \frac{x^3(-3x^3-3x^2+6x+1)}{(2-x^2)(1-3x^2)}$$

## EGZAMIN 2017 ZAD. 11

dla ciągu $(0,0,0,1,3,7,15,31,\dots)$

$1,3,7,15\dots$

$$A(x) = 0^0x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty}(2^n-1)x^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}2^nx^n - \sum_{i=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1(1-x)-(1-2x)}{(1-2x)(1-x)} =$$

$$= \frac{1-x-1+2x}{1-x-2x+2x^2} = \frac{x}{2x^2-3x+1}$$

$$A(x)x = \frac{x^3}{2x^2-3x+1}$$

## EGZAMIN 2018 ZAD. 4

dla ciągu $a_i = i2^i$

$0,\ 1\cdot 2,\ 2\cdot 2^2,\ 3\cdot 2^3$

$$A(x) = 2^0x^0 + 2^1x^1 + 2^2x^2 + \dots = \frac{1}{1-2x}$$

$$A'(x) = 0 + 2 + 2\cdot 2^2x + 3\cdot 2^3x^2 + \dots = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{-1\cdot(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

nie chcemy tego 0 bo $a_0 = 1$

$$A'(x)\cdot x = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Scanned with CamScanner

# EGZAMIN 2018 ZAD 2

NWD(30,18) = 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 div 18 = 1 | 30 mod 18 = 11 | 30 = 18·1 + 11 |
| 18 div 11 = 1 | 18 mod 11 = 8 | 18 = 11·1 + 8 |
| 11 div 8 = 1 | 11 mod 8 = 3 | 11 = 8·1 + 3 |
| 8 div 3 = 2 | 8 mod 3 = 2 | 8 = 2·3 + 2 |
| 3 div 2 = 1 | 3 mod 1 = 1 | 3 = 2·1 + 1 |
| 2 div 1 = 2 | 2 mod 1 = 0 | 2 = 2·1 + 0 |

gdy otrzymujemy resztę 0, to NWD liczb jest poprzednia reszta

NAJLEPIEJ W FORMIE TABELKI

| A | B | $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ | x | y | |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 18 | 1 | 7 | −4−7 = | −11 |
| 18 | 11 | 1 | −4 | 3−(−4) | = 7 |
| 11 | 8 | 1 | 3 | −1−(3) = | −4 |
| 8 | 3 | 2 | −1 | 1−(−1)(2) | = 3 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | +0 − 1·1 | = −1 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | | | | |

najpierw uzupełniamy tą część tabeli

x y

$7 \cdot a + (-11) \cdot b = NWD(...)$

$7 \cdot 30 - 11 \cdot 18 = 1$

INNY SPOSÓB

$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 2 \cdot 3) = 3 \cdot 3 - 8 = 3(11-8) - 8$

$= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 = 3 \cdot 11 - 4(18 - 11) = 7 \cdot 11 - 4 \cdot 18$

$= 7(30 - 18) - 4 \cdot 18 = \underline{7 \cdot 30 - 11 \cdot 18}$

EGZAMIN 2018 ZAD 2 POP

....../....../........

$NWD(17, 60) = 1$

| A | B | $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ | x | y | |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 17 | 3 | 2 | $-1-6$ | $=-7$ |
| 17 | 9 | 1 | $-1$ | $1+1=$ | 2 |
| 9 | 8 | 1 | 1 | $0-1=-$ | 1 |
| 8 | 1 | 8 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | | | | |

$2 \cdot a - 7 \cdot b = NWD(17, 60)$

$2 \cdot 60 - 7 \cdot 17 = 1$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \end{cases}$

EGZAMIN 2017 ZAD 2

$7x + 19y$

$NWD(7, 19) = 1$

| A | B | $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ | y | x | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 2 | 3 | $-2-6=-$ | 8 |
| 7 | 5 | 1 | $-2$ | $1+2=3$ | |
| 5 | 2 | 2 | 1 | $0-2=-2$ | |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | | | | |

$7 \cdot (-8) + 19 \cdot 3 =$

$= NWD(7, 19)$

$\begin{cases} x = -8 \\ y = 3 \end{cases}$

EGZAMIN 2017 ZAD 3

$27^{162} \pmod{41}$

$(3^3)^{162}$

$(3^3)^{162} = 3^{486} = (3^4)^{121} \cdot 3^2$

$3^1 \equiv 3 \mod 41$

$3^2 \equiv 9 \mod 41$

$3^3 \equiv 27 \mod 41$

$3^4 \equiv 81 \mod 41 = 40 = -1$

$(3^4)^{121} \equiv (-1) \mod 41$

$3^{484} \cdot 3^2 \equiv (-1) \cdot 3^2 \mod 41 \equiv -9 \mod 41$

$\equiv 32 \mod 41$

......./......./.........  EGZAMIN 2018 ZAD 7

$30 \mid n^8 - n$

$n^8 - n = n(n^8-1) = n(n^4-1)(n^4+1) = n(n^2-1)(n^2+1)(n^4+1)$

$= n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1)$

• jedna z tych liczb jest podzielna przez 6

• przynajmniej jedna z tych liczb jest podzielna przez 2

musimy więc zatem udowodnić że $n^8-n$ jest podzielne przez 5 lub inaczej niż więc $n = 0,1,2,3,4$ (mod

$n = 0 \longrightarrow 0$

$n = 1 \longrightarrow 0$

$n = 2 \longrightarrow 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ → $n^2+1 \bmod 5 = 0$

$n = 3 \longrightarrow 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 81$ → $n^2+1 \bmod 5 = 0$

$n = 4 \longrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 64 \cdot 4$ → $n+1 \bmod 5 = 0$

Czyli gdy:

- $n \equiv 0 \bmod 5$ ✓
- $n \equiv 1 \bmod 5$
  $(n-1) \equiv 0 \bmod 5$
- $n \equiv 2 \bmod 5$
  $n^2 \equiv 4 \bmod 5$
  $(n^2+1) \equiv 0 \bmod 5$
- $n \equiv 3 \bmod 5$
  $n^2 \equiv 4 \bmod 5$
  $(n^2+1) \equiv 0 \bmod 5$
- $n \equiv 4 \bmod 5$
  $(n+1) \equiv 0 \bmod 5$

EGZAMIN 2018 POP ZAD 5

SPOSÓB I:

$33 \equiv 12 \bmod 21$

$33^2 \equiv 12^2 \bmod 21$

$33^2 \equiv 144 \bmod 21$

$33^2 \equiv 18 \bmod 21$

$33^4 \equiv 18^2 \bmod 21$

$33^4 \equiv 9 \bmod 21$

$33^8 \equiv 9^2 \bmod 21$

$33^8 \equiv 18 \bmod 21$

$33^{16} \equiv 9 \bmod 21$

$33^{35} \equiv 18 \cdot 33^3 \bmod 21$

$33^{35} \equiv 646866 \bmod 21$

$33^{35} \equiv 3 \bmod 21$

SPOSÓB II

JAK TO ZROBIĆ Z CHIŃSKIEGO TW. O RESZTACH

$$33^{35} \bmod 21 = ?$$

$$\begin{cases} 33^{35} \bmod 7 = x \\ 33^{35} \bmod 3 = y \end{cases}$$

$33 \bmod 7 = 5$

$33^2 \bmod 7 = 5^2$

$33^2 \equiv 4 \bmod 7$

$33^4 \equiv 16 \bmod 7$

$33^4 \equiv 2 \bmod 7$

$33^8 = 4 \bmod 7$

$33^{16} = 16 \bmod 7$

$33^{16} = 2 \bmod 7$

$33^{32} = 4 \bmod 7$

$33^2 \cdot 3^{32} = (4 \cdot 4) \bmod 7$

$33^{34} = 2 \bmod 7$

$33^{35} = 66 \bmod 7$

$33^{35} = 3 \bmod 7$

$\{3, 10, 17, 24 \dots\}$

$33 \bmod 3 = 0$

$33 = 0 \bmod 3$

$33^{35} = 0 \bmod 3$

$\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 \dots\}$

$x = 3$

SPOSÓB III:

$(33)^{35} \equiv_{21} (12)^{35} \equiv_{21} (12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12)^7 \equiv_{21} (144 \cdot 144 \cdot 12)^7 \equiv_{21}$

$\equiv_{21} (\underbrace{18 \cdot 18}_{324} \cdot 12)^7 \equiv_{21} (9 \cdot 12)^7 \equiv_{21} (3)^7 \equiv_{21} (9)^7 \equiv_{21} (3^3 \cdot 3^3 \cdot 3) \equiv_{21}$

$(6 \cdot 6 \cdot 3) \equiv_{21} (36 \cdot 3) \equiv_{21} (15 \cdot 3) \equiv_{21} (45) \equiv_{21} 3$

EGZAMIN 2020 ZAD 9 — lista 7 zad 8

EGZAMIN 2019 ZAD 1 — lista 14 zad 9

EGZAMIN 2019 ZAD 2 — lista 14 zad 10

## EGZAMIN 2018 ZAD 5

Drzewo rozpinające - drzewo, które zawiera wszystkie wierzchołki grafu G, zaś zbiór krawędzi drzewa jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu.
- musi być spójny
- prosty (może być cykl jednego koloru, ale wtedy musi istnieć też krawędź innego koloru)

Zawsze, ponieważ jeśli Graf posiada conajmniej dwa kolory krawędzi to jesteśmy w stanie znaleźć drzewo ~~które~~ będzie posiadać krawędzie o 2 różnych kolorach

## EGZAMIN 2018 ZAD 1

Ilość bukietów składających się z jednego gatunku kwiatów - 5

wybór 2 gatunków z 5

z dwóch gatunków $\binom{5}{2} \cdot \binom{14}{1}$ ułożenie

z trzech gatunków $\binom{5}{3} \cdot \binom{14}{2}$

z czterech gatunków $\binom{5}{4} \cdot \binom{14}{3}$

z pięciu gatunków $\binom{5}{5} \cdot \binom{14}{4}$

ilość różnych bukietów, w których są dokładnie dwa gatunki kwiatów (1,14)(2,13)(3,12)...

Aby bukiety się nie powtarzały widzimy, że pomiędzy 15 kwiatami jest 14 przerw. Wybieramy 1 z nich.

## EGZAMIN 2018 ZAD 5

$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ % $n = 0$

Każda z liczb osobno mod n da inną resztę ponieważ są to kolejne liczby.

Jedna z nich da resztę 0. Ponieważ możliwych reszt do uzyskania jest n (od 0 do n-1) a liczb mamy n, czyli każda reszta zmniejszy swoją liczbę.

Dlaczego n musi być nie parzyste?

Ponieważ 1 reszta $a_i$ mod $n = 0$ zostaje $n-1$ liczb (czyli parzyście wiele). Każda z reszt zwięźlej dla pary reszty tak aby ich suma dała $n$, a $n \% n = 0$

Zatem liczba podzielna przez $n$.

Przykład:

| | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mod 7 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

7 mod 7 = 0 7 mod 7 = 0 7 mod 7 = 0

## EGZAMIN 2017 ZAD 6

720 ile dzielników?

$720 = 2^a \cdot 3^b \cdot \ldots$

$2^{4} \cdot 3^{2} \cdot 5^{1}$

$(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$

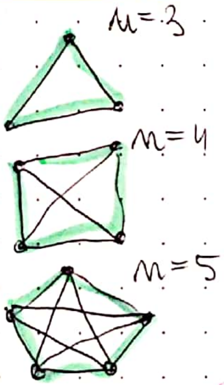
tyle dzielników ma liczba 720.

| | |
|---|---|
| 1 | 720 |
| 2 | 360 |
| 3 | 240 |
| 4 | 180 |
| 5 | 144 |
| 6 | 120 |
| 8 | 90 |
| 9 | 80 |
| 10 | 72 |
| 12 | 60 |
| 15 | 48 |
| 16 | 45 |
| 18 | 40 |
| 20 | 36 |
| 24 | 30 |

$15 \cdot 2 = 30$

## EGZAMIN 2018 ZAD 6

a)



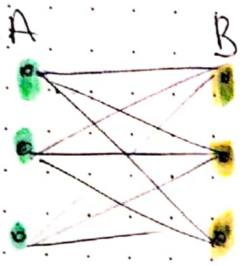

W grafie pełnym $K_n$, $n \geq 3$ cykl Hamiltona i droga Hamiltona występuje zawsze. Zignorujmy wszystkie krawędzie wewnętrzne kliki. Mamy cykl. Jeśli cykl to też droga.

Graf pełny to klika.

Aby w grafie istniał cykl Eulera wszystkie jego wierzchołki mają stopień parzysty. Aby spełnić tą zasadę $n$ musi być nieparzyste. Ponieważ jeśli graf ma $n$ wierzchołków to stopień każdego z nich jest równy $n-1$.

b) cykl Hamiltona istnieje jeśli $n = m$
droga Hamiltonowska istnieje jeśli $|m-n| \leq 1$

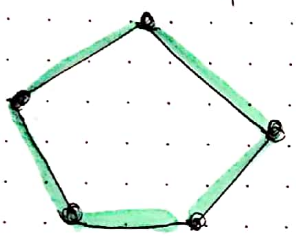
cykl Eulerowski istnieje gdy każdy wierzchołek jest stopnia parzystego ($M$ jest parzyste, $m$ jest parzyste)
droga Eulerowska istnieje gdy 0 lub 2 wierzchołki są stopnia nieparzystego




Graf pełny dwudzielny to graf który ma każdy wierzchołek z A połączony z każdym wierzchołkiem ze zbioru B, a wierzchołek z B z każdym z A.

Czyli wtedy kiedy jeden z podzbiorów jest mocy 2, a drugi podzbiór jest mocy nieparzystej lub gdy oba podzbiory są parzyste.

c)



- cykl Hamiltona istnieje

droga Hamiltona to cykl Hamiltona, ale bez jednej z krawędzi

cykl Eulera wygląda jak cykl Hamiltona

droga Eulera jest cyklem Eulera

## EGZAMIN 2018 ZAD 7

1 1 13
1 2 12
1 3 11
1 4 10
1 5 9
1 6 8
1 7 7
2 2 11
2 3 10
2 4 9
2 5 8
2 6 7
3 3 9
3 4 8
3 5 7
3 6 6
4 4 7
4 5 6
5 5 5

15
1 14
2 13
3 12
4 11
5 10
6 9
7 8

ilość pól jednego koloru w rzędzie (minimalna ilość, aby 1 kolor się nigdy nie powtarzał)

Rozpatrzmy jeden z kolorów. Aby w zapewnić sobie gwarancję, że w żadnym rzędzie nie wystąpi tyle samo pól o tym samym kolorze to ustalmy, że w każdym rzędzie będzie takich pól o jeden więcej (zaczynając od zera)

0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14

$1+2+3+ \dots +13+14=105$

Aby mieć pewność w stosunku do trzech kolorów musimy tak zrobić dla każdego z nich.
Czyli zajmie to $105 \cdot 3$ pól czyli 315 → Aby nigdy nie powtórzyła się jakaś ilość danego koloru. ARLMANE tylko 225

$a^{-1} \bmod b = c \iff a \cdot c \bmod b = 1$

## EGZAMIN 2017 ZAD. 4

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

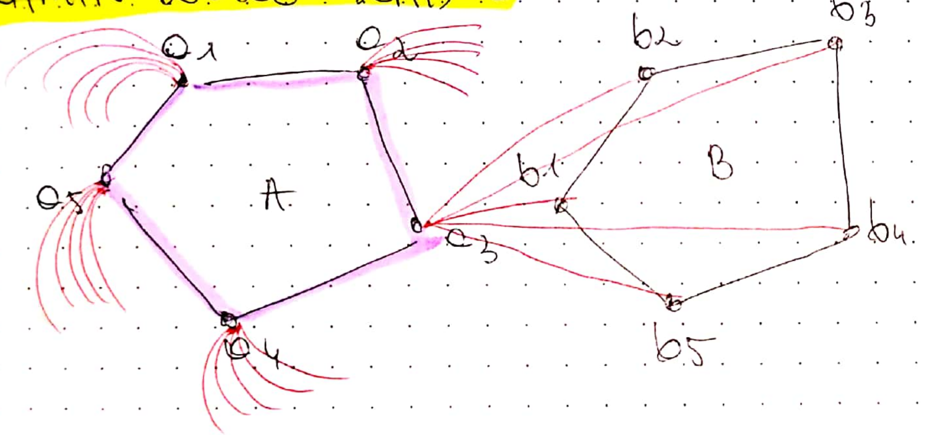
wynik to liczba, która przemnożona przez $m_i$ mod $n_i$ da 1

| $n_i$ | $a_i$ | $m_i = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}{n_i}$ | $m_i^{-1} \bmod n_i$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | $4 \cdot 5 = 20$ | $2^{-1} \bmod 3 = 2$ |
| 4 | 3 | $3 \cdot 5 = 15$ | $3^{-1} \bmod 4 = 3$ |
| 5 | 4 | $3 \cdot 4 = 12$ | $2^{-1} \bmod 5 = 8$ |

$$\left(\sum_i a_i m_i (m_i^{-1} \bmod n_i)\right) \bmod (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k)$$

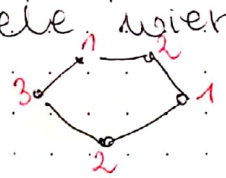
$$(2 \cdot 20 \cdot 2 + 3 \cdot 15 \cdot 3 + 4 \cdot 12 \cdot 8) \bmod (3 \cdot 4 \cdot 5) =$$
$$= (80 + 135 + 384) \bmod 60 = 599 \bmod 60 = 59$$

## EGZAMIN 2020 ZAD 1

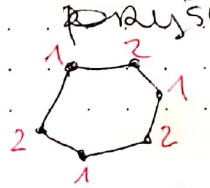



Ile kolorów minimalnie można użyć do pokolorowania grafu A?

W przypadku gdy A posiada nieparzyście wiele wierzchołków → 3 kolory

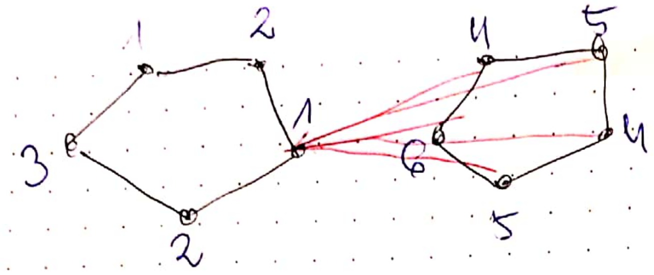



parzyście wiele → 2




Graf B, który jest cyklem jak graf a o takiej samej ilości wierzchołków potrzebuje do jego pokolorowania tyle samo kolorów. Lecz ponieważ każdy wierzchołek z A ma krawędź z każdym wierzchołkiem z B to nie możemy użyć tych samych kolorów.

....... / ....... / .........




W przypadku parzystej ilości wierzchołków potrzebujemy 4 kolory, np. w. 6.

## EGZAMIN 2018 ZAD 10

Mamy 5 pokoi

Zasada w poleceniu zadania, że w żadnych dwóch pokojach nie może być tyle samo osób dla minimalnej ilości osób zostanie spełniona dla → 10 osób dlaczego?

0 1 2 3 4

$1+2+3+4=10$

Zaczynamy od 0 i do każdego kolejnego pokoju wstawiamy jedną osobę więcej.

Co z większą ilością osób?

Każdą kolejną osobę należy dostawić do pokoju w którym osób jest najwięcej nie licząc pokoju który posiada już dla niego maksymalną liczbę osób.

→ JAKA JEST MAKSYMALNA LICZBA OSÓB POKOJU?

11 12 13 14 15 CZEMU?

Jeśli przekroczymy tą liczbę to pojawią się dwa pokoje, które mają taką samą liczbę osób.

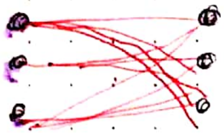
$11+12+13+14+15=65$

Zatem warunek zadania spełniony jest dla minimum 10 osób i maksimum 65.

## EGZAMIN 2018 ZAD 11

Mamy 15 kulek jednego koloru i 15 drugiego. Na każdej znajduje się inna liczba z zakresu [1, 100]. Oznacza to, że minimalna sumę jaką możemy stworzyć to 3 (1+2) a maksymalna to 199 (99+100)

wiedząc to widzimy, że mamy łącznie 197 możliwych sum do uzyskania. ....... / ....... / .........
Niech one będą naszymi szufladkami.
kulkami są zaś kombinacje utworzonych sum



Każdą kulkę ze zbioru kulek czerwonych możemy połączyć z każdą kulką ze zbioru kulek zielonych. Co daje 15 · 15 możliwych sum do utworzenia.

$$15 \cdot 15 = 225$$

Z zasady szufladkowej Dirichlet mamy 197 szufladek i 225 kulek zatem na pewno jakaś suma zostanie powtórzona.

Gdyby kulek było 14 to możliwych sum do utworzenia byłoby $14 \cdot 14 = 196$ więc mamy mniej kulek niż szufladek.

## EGZAMIN 2017 ZAD 1 POP

$n, m \in \mathbb{N}$ A) $n^2 \not\equiv_3 2$

- $n \bmod 3 = 0$
  $n^2 \bmod 3 = 0^2$
- $n \bmod 3 = 1$
  $n^2 \bmod 3 = 1$
- $n \bmod 3 = 2$
  $n^2 \bmod 3 = 1$

B) $n^2 + m^2 \equiv_3 0 \Rightarrow n \equiv_3 0 \wedge m \equiv_3 0$

tak samo z m

$n = 1 \quad m = 1$
$n = 0 \quad m = 0$
$n = 1 \quad m = 0 \rightarrow$ na odwrót to to samo

mamy więc 3 przypadki

$1 + 1 \equiv_3 2$
$0 + 1 \equiv_3 1$
$0 + 0 \equiv_3 0 \rightarrow$ PRAWDA

## EGZAMIN 2017 ZAD 2 POP

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

1, 3, 5, 7, 9,
2, 7, 12, 17, 22
1, 11

| $n_i$ | $a_i$ | $m_i = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k}{n_i}$ | $m_i^{-1} \bmod n_i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $5 \cdot 11 = 55$ | $1^{-1} \bmod 2 = 1$ |
| 5 | 2 | $2 \cdot 11 = 22$ | $2^{-1} \bmod 5 = 3$ |
| 11 | 1 | $2 \cdot 5 = 10$ | $10^{-1} \bmod 11 = 10$ |

$m_i^{-1} \Longleftrightarrow (m_i \bmod n_i)^{-1}$

wynik to liczba, która przemnożona przez $m_i$ mod $n_i$ da 1

$(a_1 \cdot m_1 (m_1^{-1} \bmod n_1) + \ldots$

$(1 \cdot 55 (\cdot 1) + 2 \cdot 22 \cdot 3 + 1 \cdot 10 \cdot 10) \bmod (2 \cdot 5 \cdot 11) =$

$= (55 + 132 + 100) \bmod 110 =$

$= 287 \bmod 110 = 67$

## EGZAMIN 2017 ZAD 6 POP

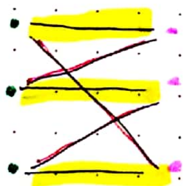
$2^n \cdot n!$

## EGZAMIN 2017 ZAD 3 POP

Oznaczamy każdy wierzchołek jako nieodwiedzony i robimy DFS lub BFS po grafie. Po jego wykonaniu do ilości istniejących spójnych składowych dodajemy 1. Operacja jest powtarzana do momentu istnienia nieodwiedzonego wierzchołka.

## EGZAMIN 2017 ZAD 4 POP

Nieporządek – ustawienie, że żadna liczba nie stoi na swoim miejscu.



dla $n = 3$ 2

Generalnie ilość permutacji zbioru $n$-elementowego

~~1 2 3~~
~~1 3 2~~
~~2 1 3~~
2 3 1
3 1 2
3 2 1

= 35

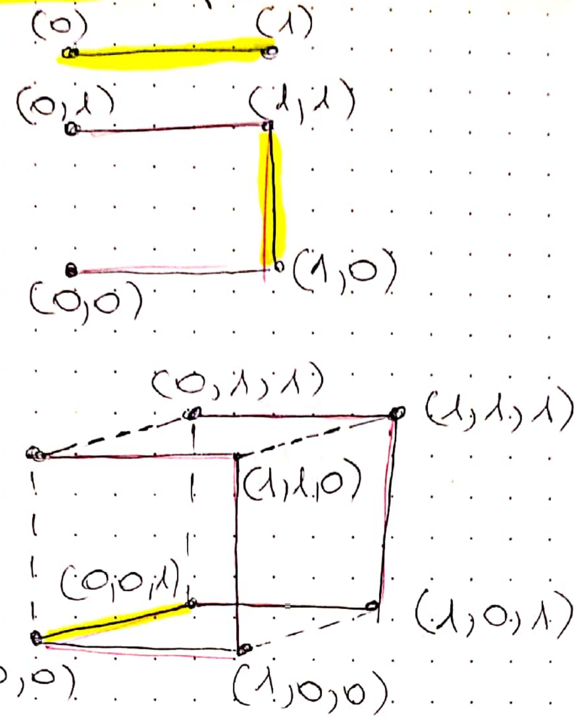
....../....../.........

EGZAMIN 2017 ZAD 8 POP

1. wymiar

2 wymiar

3 wymiary




każda n+1 wymiarowa kostka jest połączeniem dwóch kostek n-wymiarowych.

DOWÓD INDUKCYJNY:

TEZA! n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona

PODSTAWA IND.: dla kostki 1-wymiarowej istnieje ścieżka Hamiltona

KROK IND.: Załóżmy, że dla n-wymiarowej kostki teza jest spełniona. Pokażmy, że dla (n+1)-wymiarowej kostki również zachodzi

Z zał. ind dla n wymiarowej ścieżki ścieżka Hamiltona istnieje. Weźmy zatem dwie takie same n wymiarowe kostki i jedną „połóżmy" w (n+1) sym wymiarze na współrzędnej 0, a drugą na 1. Następnie połączmy końce ich ścieżek Hamiltona. Powstała ścieżka Hamiltona dla kostki (n+1) wymiarowej.

Na mocy zasady indukcji n-wymiarowa kostka ma ścieżkę Hamiltona (dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$)

odp Hamiltonowski dla $k \geq 1$ $k \in \mathbb{N}$

Eulerowski → cykl Eulerowski istnieje gdy stopnie wszystkich wierzchołków są parzyste, więc gdy k jest parzyste.

Jak istnieje cykl Eulerowski to istnieje droga Eulerowska.

Scanned with CamScanner

2017

....../....../...... EGZAMIN POP*** ZAD. 1

$|\{7, 77, 777, 7777, \ldots, \underbrace{7\ldots77}_{n+1 \text{ wyraz}}\}| = n+1$

cyfry z samych siódemek

$|\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| = n$

jakie reszty możemy dostać po wykonaniu operacji mod n. Jest ich n. Potraktujmy n jak szufladki

kulki $\underset{1}{\sqcup}$ $\underset{2}{\overset{x}{\underset{y}{\sqcup}}}$ . . . $\underset{n}{\sqcup}$

Ponieważ kulek jest więcej niż szufladek to do jednej szufladki wpadną dwie liczby, które mod n dają taką samą liczbę. Nazwijmy je x i y i załóżmy bez straty ogólności, że $x > y$

czyli wiemy, że $x \equiv y \mod n$

czyli $x - y$ jest podzielne przez n
czyli $(x-y) \mod n = 0$

$a \equiv b \pmod c \rightarrow c \mid a - b$

x i y składają się z samych "7" zatem po odjęciu mniejszej z nich od większej liczba otrzymana składać się będzie z samych "0" i "7".

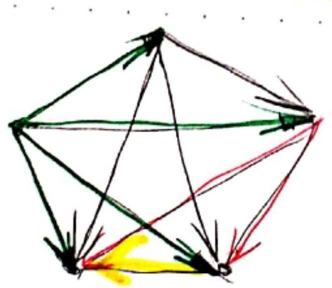
EGZAMIN 2017* ZAD 4

k osób
2n-k osób

$\dfrac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{n-2k}{k}}{3!}$ ⟶ 6 permutacji

k osób
3 osób

EGZAMIN 2017* ZAD 5



Turniej to klika skierowana.

Mamy pokazać, że jeśli w T (turniej) istnieje cykl wtw gdy istnieje cykl o długości 3.

w turnieju T ∃ cykl => to ten cykl jest długości 3 ....../....../........

Załóżmy, że w T jest cykl.

W przypadku gdy dł. T = 1 to nie ma cyklu
W przypadku gdy dł. T = 2 to nie ma cyklu

Z tego wynika że cykl musi być długości co-najmniej 3.

Załóżmy, że ten cykl ma dł ≥ 4. $n \geq 4$ o wierzchołkach $v_1, \dots v_n$

Rozważmy krawędź m/ $v_2$ i $v_n$.
Jeśli jest: $(v_2, v_n) \to$ to mamy cykl $(v_1, v_2, v_n, v_1)$
$(v_n, v_2) \to$ wtedy $(v_2, v_3 \dots v_n, v_2)$

Ale są mniejsze cykle, więc musi mieć cykl 3.

EGZAMIN 2017 * ZAD. 1

$$8! - [\underbrace{7 \cdot 2 \cdot 6!}_{\text{MLEKO+OGÓREK}} + \underbrace{7 \cdot 2 \cdot 6!}_{\text{PIWO+WINO}}] + \binom{6}{2} \cdot 2^2 \cdot 5! =$$

dodajemy przypadek gdy i piwo stoi koło mleka i wino koło piwa

wszystkie możliwości

1 zestaw (para) możemy wstawić na 1 z 7 miejsc

pozostałe miejsca mogą się może zmienić

dwa miejsca dla dwóch par

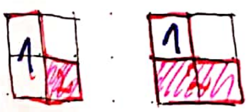
pozostałe miejsce

zmiana mleko/ogórek ogórek/mleko

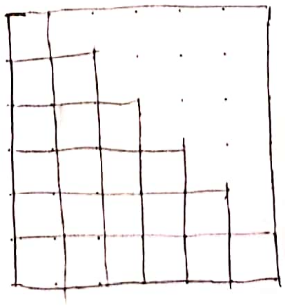
$$= 8! - 28 \cdot 6! + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 5! = 5!(8 \cdot 7 \cdot 6 - 28 \cdot 6 + 15 \cdot 4) =$$

$$= 5!(336 - 168 + 60) = 5! \cdot 228 = 27\,360$$

EGZAMIN 2020 ZAD 7



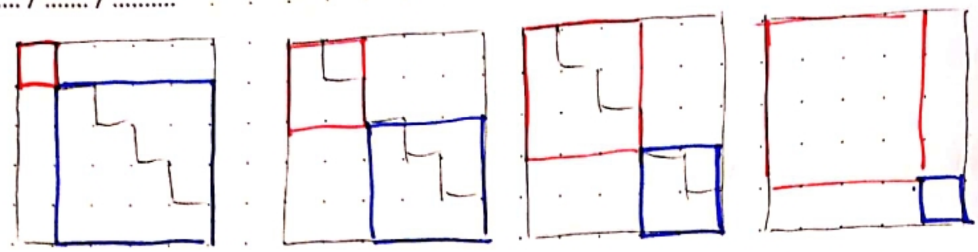
dla n=2 2 sposoby
dla n=3 4 sposoby



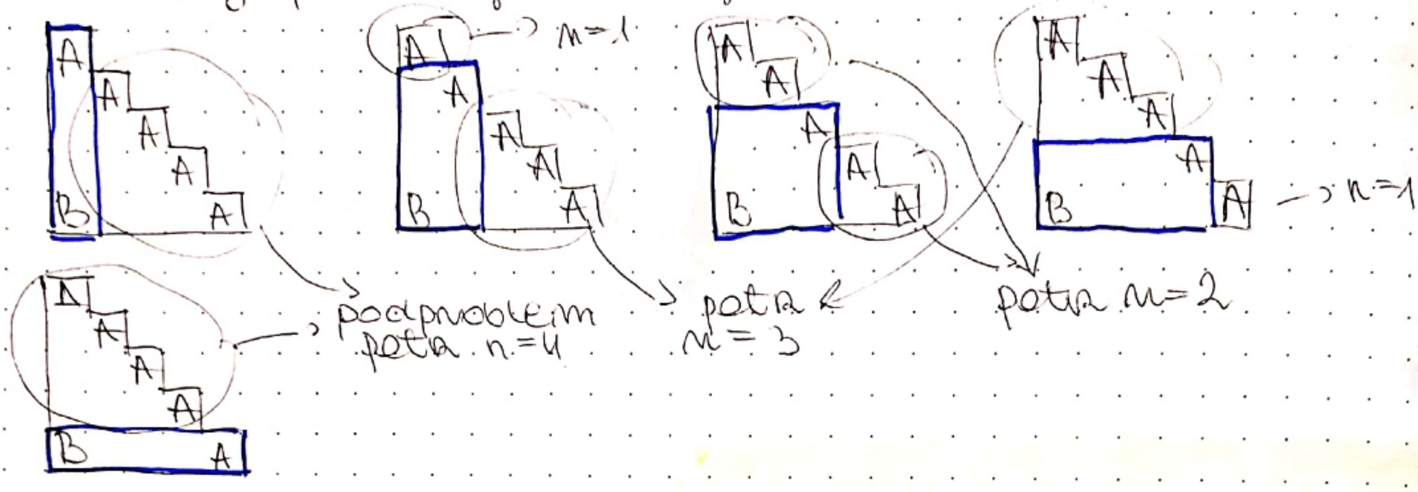
lista 7 2004

....../....../.........

I SPOSÓB



II SPOSÓB. Oznaczamy lewy dolny róg jako B. Oznaczamy prawe górne rogi czyli przekątne jako A

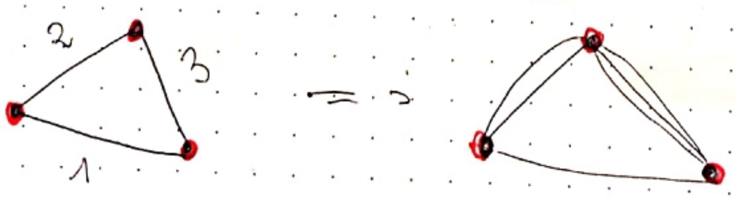



Mamy n pól A, czyli każdy prostokąt będzie zawierał to pole. Ustalmy, w którym prostokącie znajduje się B. Dzielimy problem na podproblemy. Zauważmy, że rozwiązaniem tego problemu dla macierzy schodkowej $n \times n$ jest rozwiązanie podproblemów zgodnie ze wzorem Catalana

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1} \quad (\text{gdzie } c_0 = 1)$$

Liczbę podziałów to n-ta liczba Catalana.

**EGZAMIN 2020 ZAD 6**




Po zwizualizowaniu widzimy, że problem sprowadza się do szukania drogi Eulera.

Wiemy, że droga Eulera istnieje wtedy gdy istnieją 0 lub 2 wierzchołki o stopniu nieparzystym.

Idea algorytmu polega na przejściu po każdym wierzchołku grafu i sprawdzeniu, czy suma krawędzi z nim połączonych spełnia warunek istnienia drogi Eulera.

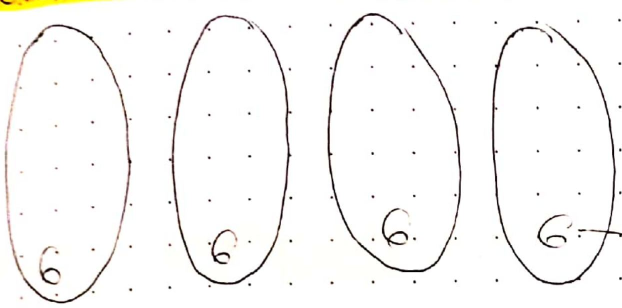
# ALGORYTM

1) każdą krawędź duplikujemy pe-1 razy
2) licznik = 0
3) dla każdego wierzchołka:
   jeśli deg(w) % 2 == 1
   licznik++

4) jeśli licznik == 0 && licznik = 2
   istnieje
   wpw. Nie istnieje

## EGZAMIN 2020 ZAD 8

A → 12
B → 12



6 osób w przedziale

A) 4 przedziały

- ILE JEST SPOSOBÓW UŁOŻENIA, TAK ABY W ŻADNYM 6-OSOBOWYM PRZEDZIALE NIE BYŁO TYLE Z A CO Z B..

$$\underbrace{\binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6}} = \binom{24}{6}\cdot\binom{18}{6}\binom{12}{6}$$

na ile sposobów można podzielić 12 osób na 4 przedziały wiedząc, że każdy przedział mieści 6 osób

- NA ILE SPOSOBÓW W 1 PRZEDZIALE MOŻE BYĆ TYLE SAMO Z A i Z B.

$$\binom{4}{1}\underbrace{\binom{12}{3}\binom{12}{3}}_{\text{tyle samo osób w przedziale 6-osobowym (2A, 2B)}}\binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6}$$

→ 3 pozostałe przedziały

- NA ILE SPOSOBÓW W 2 PRZEDZIALE MOŻE BYĆ TYLE SAMO 2 A i 2 B

$$\binom{4}{2}\underbrace{\binom{12}{3}\binom{12}{3}}_{\text{jeden wagon}}\underbrace{\binom{9}{3}\binom{9}{3}}_{\text{jeden wagon}}\binom{12}{6}\binom{6}{6}$$

→ 2 pozostałe przedziały

...../...../.........

• NA ILE SPOSOBÓW W 3 PRZEDZIAŁACH MOŻE BYĆ TYLE SAMO Z A CO W B

$$\binom{4}{3}\underbrace{\binom{12}{3}\binom{12}{3}}_{\text{wagon jeden}}\underbrace{\binom{9}{3}\binom{9}{3}}_{\text{wagon dwa}}\underbrace{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}_{\text{wagon trzy}}\binom{6}{6}$$

→ reszta przedziałów

• NA ILE SPOSOBÓW W 4 PRZEDZIAŁACH MOŻE BYĆ TYLE SAMO Z A CO W B.

$$\binom{4}{4}\underbrace{\binom{12}{3}\binom{12}{3}}_{\text{wagon 1}}\underbrace{\binom{9}{3}\binom{9}{3}}_{\text{wagon 2}}\underbrace{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}_{\text{wagon 3}}\underbrace{\binom{3}{3}\binom{3}{3}}_{\text{wagon 4}}$$

Podsumowując:
Skorzystajmy z zasady włączeń i wyłączeń

$$\binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6}-\binom{4}{1}\binom{12}{3}\binom{12}{3}\binom{18}{6}\binom{12}{6}+\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{12}{3}$$

$$\binom{9}{3}\binom{9}{3}\binom{12}{6}\binom{6}{6}-\binom{4}{3}\binom{12}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{6}{3}\binom{6}{6}+$$

$$+\binom{4}{4}\binom{12}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\binom{3}{3}$$

B) • ILE SPOSOBÓW UŁOŻENIA TAK ABY SUMARYCZNA LICZBA W PRZEDZIAŁACH 1 i 2 KIBICÓW A NIE BYŁA TAKA SAMA JAK W B

$$\underbrace{\binom{12}{6}\binom{12}{6}}\binom{12}{6}\binom{6}{6}$$

→ reszta przedziałów

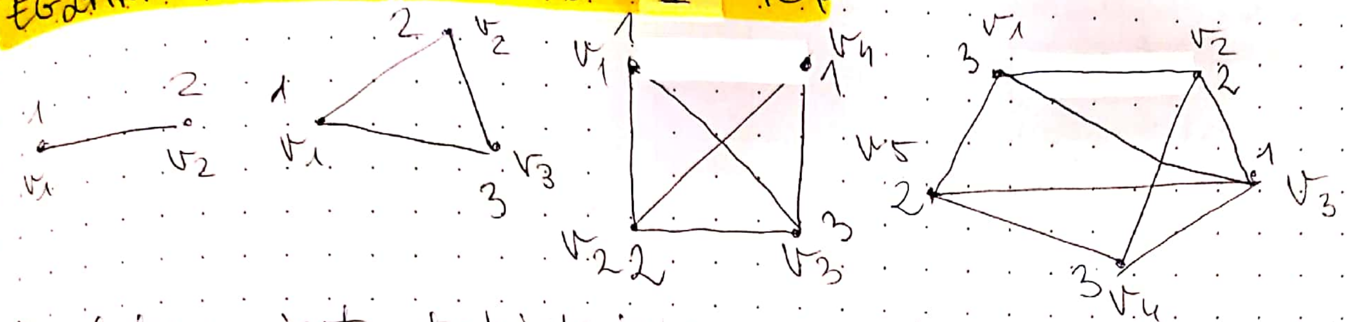
Myślimy o przedziale 1 i 2 jak o jednym przedziale i wybieramy po równo osób.

EGZAMIN 2019 ZAD 6

Weźmy 2020 różnych liczb naturalnych $x_1, x_2 \ldots x_{2020}$ teraz rozważmy $3^{x_1}, 3^{x_2} \ldots 3^{x_{2020}}$
Zauważmy, że jest to 2020 różnych liczb. Możliwych reszt do uzyskania z dzielenia przez 2019 jest 2019 (0, 1 ... 2018). Reszty z dzielenia potraktujmy jako szufladki. Liczby $3^{x_1}, 3^{x_2} \ldots 3^{x_{2020}}$ potraktujmy jako kulki. Każdą liczbę przyporządkowujemy do szufladki która odpowiada jej reszcie z dzielenia przez 2019.

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika ......./......./.......... więc, że w conajmniej jednej szufladce są conajmniej dwie liczby o tej samej reszcie wtedy ich różnica jest podzielna przez 2019.

## EGZAMIN 2019 ZAD 1 POP

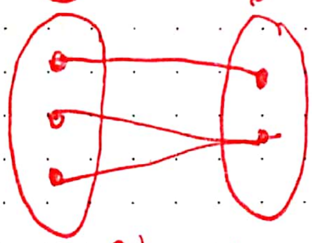
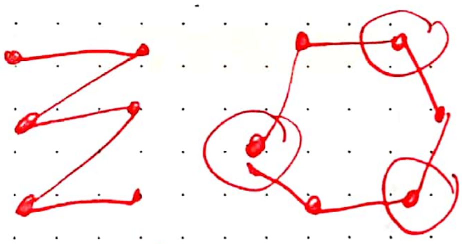
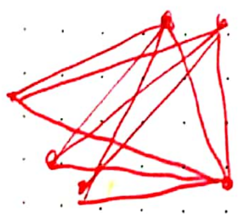



Graf ten jest trójdzielny, ponieważ krawędź między wierzchołkami istnieje gdy $i \neq j$. Zauważmy, że gdy indeks przy $v$ podamy operacji %3 to dostaniemy już numerację kolorów.

## EGZAMIN 2019 POP ZAD 2

cykl Eulera gdy liczba wierzchołków $(n) \bmod 3 == 0$

dwudzielny dla $n \geq 0 \wedge n \leq 2$

| | CYKLE EULERA | CYKL HAMILTONA |
|---|---|---|
| $K_{a,b}$ (graf pełny dwudzielny)  |   $2 \mid a,b$ |  $a = b > 1$ |
| $K_{a,b,c}$ (graf pełny trójdzielny)  $K_{1,2,3}$ | $2 \mid b+c$ $2 \mid a,b,c$ <br> $2 \mid a+c \iff$ lub <br> $2 \mid b+a$ $2 \nmid a,b,c$ | $a \leq b+c$ <br> $b \leq a+c$ <br> $b \leq a+b$ |

## EGZAMIN 2018 ZAD 6 POP

Dwa drzewa minimalne istnieją w grafie jeśli w grafie istnieje chociaż jeden cykl, który posiada dwie krawędzie o tej samej największej wadze.

Idea Algorytmu:
Przejść po każdym grafie i sprawdzić czy w nim cykl zawiera przynajmniej dwie krawędzie o największej wadze spośród krawędzi w tym cyklu. Jeśli tak zakończyć i zwrócić informację, że tak. Jeśli przejdziemy po wszystkich cyklach i w żadnym z nich powyższa zasada nie zostanie spełniona to zwrócić informację, że nie.

## EGZAMIN 2018 POP ZAD 7 (SZEJK SKURWYSYN)

Ponieważ palmy nie są rozróżnialne i musi ich być w każdej alei po każdej stronie przynajmniej 20 to odejmujemy 95-80= 15 i zmieniamy zadanie na problem rozmieszczenia wszystkich 15 palm w 4 rozróżnialnych zbiorach tak, aby dwa z nich nie miały takiej samej ilości palm.

- MOŻLIWE ROZMIESZCZENIA

$\binom{18}{3}$ → CZEMU? ze wzoru $\binom{n+k-1}{k-1}$

szufladki → zbiory(4)
kulki → palmy

n - szufladek
k - kulek

• ZŁE PRZYPADKI

2 miejsca na których postawimy powtarzające się liczby

15-14=1

77 _ _ (01, 10)

66 _ _

55 _ _

44 _ _

33 _ _

22 _ _

11 _ _

00 _ _

1, 0 dwie kulki

$\binom{4}{2}\cdot 2$

$\binom{4}{2}\cdot 4$

$\binom{4}{2}\cdot(6-2)$

$\binom{4}{2}\cdot(8-2)$

$\binom{4}{2}\cdot(10-2)$

$\binom{4}{2}\cdot(12-2)$

$\binom{4}{2}\cdot(14-2)$

$\binom{4}{2}\cdot(16-2)$

15-14=1 jedna kulka (dwie szufladki)

$\binom{1+3-1}{1-1}=\binom{3}{0}$

15-12=3 → kulki 2 szufladki

Czemu 2?

50 43
05 34 ...

W TYCH PRZYPADKACH POJAWIA SIĘ PROBLEM

5550 5550 5550 3 te same przypadki odejmijmy je więc

(są to przypadki, w których 3 razy powtarza się ta sama liczba)

• MUSIMY WIĘC OSOBNO DODAĆ DOBRE PRZYPADKI Z WYSTĄPIENIAMI TRZECH TYCH SAMYCH LICZB:

5550 5505 5055 0555

Dla 5, 4, 3, 2, 1 i 0 są po 4 przypadki

$4\cdot 6=24$

CZYLI

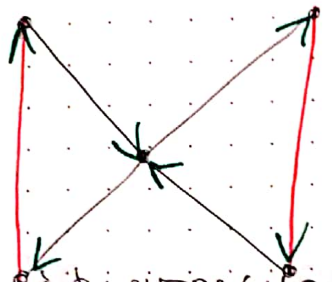
$$\binom{18}{3}-\binom{4}{2}\left[2+4+4+6+8+10+12+14\right]+24=$$

$$=\frac{18\cdot 17\cdot 16}{6}-6\cdot 60+24=432$$

Scanned with CamScanner

# EGZAMIN 2019 POP ZAD 12

....../....../......



**I) GDY ILOŚĆ WIERZCHOŁKÓW O STOPNIU NIEPARZYSTYM JEST PARZYS**

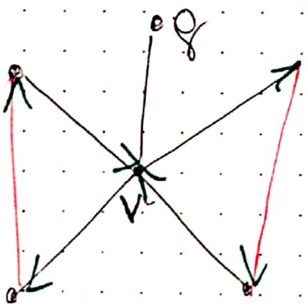
Aby stworzyć cykl Eulera w grafie musi on posiadać 0 wierzchołków o stopniu nieparzystym.. Dostawiamy, więc nowe krawędzie tak aby każdy wierzchołek był stopnia parzystego. → Tych krawędzi będzie $\frac{n}{2}$.

Po tej zmianie możemy stworzyć cykl.

Jeżeli udało się nam stworzyć cykl to oznacza to że ilość $deg^+(v)$ i $deg^-(v)$ każdego wierzchołka jest sobie równa.

Jeżeli więc teraz usuniemy krawędzie dodane to różnica stopnia wierzchołka krawędzi wchodzących i wychodzących zmieni się z zera na maks 1.

**II) GDY ILOŚĆ WIERZCHOŁKÓW O STOPNIU NIEPARZYSTYM JEST NIEPARZYSTA**




Ignorujemy jeden z wierzchołków o nieparzystym stopniu i w podgrafach grafu, które powstały na skutek zignorowania jednej z krawędzi wierzchołka, o którym mowa w zdaniu pierwszym wykonujemy operacje z podpunktu I)

Wiemy że zignorowany wierzchołek g jest połączony „zignorowaną" krawędzią z wierzchołkiem v o stopniu parzystym (kiedy tą krawędź ignorujemy).

Dodatkowo wiemy że żadna z krawędzi wierzchołka v nie została dorysowana celowej zmianie stopnia, ponieważ to by świadczyło o wierzchołka v na nieparzysty. Czyli $|deg^+(v) - deg(v)| = 0$ Nieważne

więc jak skierujemy krawędź v–g to $|deg^{\pm}(v)^{+} - deg(v)^{-}| = 1$

bez krawędzi v–g

EGZAMIN 2019 POP ZAD 10

....... / ....... / ..........

0 świateł

1 światło → CZER, → ZIEL, → ŻÓŁTY

2 światła → CZER + ZIEL, → CZER + ŻÓŁTY, → ŻÓŁTY + ZIELONY

3 światła → CZER + ZIELON + ŻÓŁTY

8 szufladek ile kulek? żeby conajmniej 7

$6 \cdot 8 + 1 = 49$

w conajmniej 1 szufladce conajmniej 2 kulki

6 6 6 6 6 6 6 7

EGZAMIN 2018 ZAD 8

= BEZ

• ILE JEST ZESTAWÓW LICZB KTÓRE SPEŁNIAJĄ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70$$

(Na ile sposobów 70 kulek do 5 szuflad)

$$\binom{74}{4}$$

• ROZWIĄZANIA, W KTÓRYCH $x_i > 20$ $Z_i$

$|Z_1|$ $x_1 = 21 + n_1$

tylko jeden x przekracza 20

$$21 + n_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70$$

$$n_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 49$$

$$\binom{49+5-1}{5-1} = \binom{53}{4} = |Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = |Z_4| = |Z_5|$$

....../....../.......

$|Z| = |Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 \cup Z_5| =$
$= |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + |Z_4| + |Z_5| -$
$- |Z_1 \cap Z_2| - |Z_2 \cap Z_3| - \dots$
$+ |Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3| + \dots$
$- |Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \cap Z_4| - \dots$
$+ |Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \cap Z_4 \cap Z_5|$

- $|Z_i \cap Z_j|$ $\quad x_i, x_j > 20$

$|Z_1 \cap Z_2| = n_1 + n_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70 - 21 - 21 = 28$

$\binom{28+5-1}{5} = \binom{32}{4}$

- $Z_i \cap Z_j \cap Z_k$

$|Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3| = n_1 + n_2 + n_3 + x_4 + x_5 = 70 - 21 - 21 - 21 = 7$

$\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$

- $Z_i \cap Z_j \cap Z_k \cap Z_l$

$|Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \cap Z_4| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + x_5 = -14$ niemożliwe

$= \emptyset$

- $|Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \cap Z_4 \cap Z_5| = \emptyset$

$\binom{74}{4} - 5\binom{53}{4} + \binom{5}{2}\binom{32}{4} - \binom{5}{3}\binom{11}{4}$

EGZAMIN 2018 ZAD 9

$(AA^{C1})_{14} = 150^{169}$

$150 \equiv_{186} 150$
$150^2 \equiv_{186} 22500 \equiv_{186} 156$
$150^4 \equiv_{186} 156^2 \equiv_{186} 24336 \equiv_{186} 32$
$150^8 \equiv_{186} 32^2 \equiv_{186} 1024 \equiv_{186} 44$
$150^{16} \equiv_{186} 44^2 = 1936 \equiv_{186} 172$
$150^{32} \equiv_{186} 172^2 \equiv_{186} 29584 \equiv_{186} 184$

$150^{64} \equiv_{186} 184^2 \equiv_{186} 33856 \equiv_{186} 144$
$150^{128} \equiv_{186} 144^2 \equiv_{186} 20736 \equiv_{186} 156$

Scanned with CamScanner

$150^{128} \cdot 150^{32} = 150^{60} =_{186} 156 \cdot 184 =_{186} 27600 =_{186} 160$

$150^{160} \cdot 150^{8} \cdot 150 = 150^{168} = 160 \cdot 44 \cdot 150 =_{186} 1056000 =_{186}$

$= 148 = A8$

## EGZAMIN 2018 ZAD 11 lista 12 zad 9

Niech X to zbiór zawierający koła i towarzystwa.

Niech Y to zbiór studentów.

Wykorzystamy tw. Halla (mamy graf dwudzielny dla zbioru A bierzemy każdy podzbiór i moc sąsiedztwa dowolnego podzbioru jest większa bądź równa i na odwrót)

N(W) bo każde tow. koło ma k osób

Weźmy dowolny podzbiór $W \subseteq X$. Ilość krawędzi w W to $|W| \cdot k$. Zatem w N(W) jest conajmniej $\frac{|W| \cdot k}{2}$ studentów. Wpp jakiś student miałby 3 krawędzie a to jest sprzeczność.

$|W| \cdot k \geq \frac{|W| k}{2}$

1 osoba do koła i do tow.

Ponieważ $k \geq 2$ to $|N(W)| \geq |W|$ najgorszy przypadek $\frac{|W| \cdot 2}{2} = |W|$

Zatem istnieje taka delegacja 2n studentów.

## EGZAMIN 2017 (***) ZAD 2

Niech G będzie prostym grafem planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach. Wówczas liczba krawędzi m tego grafu nie przekracza $3m-6$. Jeśli dodatkowo G nie zawiera żadnego trójkąta, to $m \leq 2n-4$.

Dowód:

$n - m + f = 2$

wierzchołki, krawędzie, ściany

wzór na sumę długości granic ścian

$\Sigma f_i = 2m$

długość granicy dowolnej ściany $f_i \geq 3$ bo nie ma krawędzi równoległych

$3f \leq \Sigma f_i = 2m$

$3f \leq 2m$

$f \leq \frac{2}{3}m$

$f = 2 + m - n \leq \frac{2}{3}m$

$2 + \frac{1}{3}m \leq n$

$m \leq 3n - 6$

$f_i \geq 4$ bo nie może być $\Delta$

$\Sigma f_i = 2m$

$4f \leq \Sigma f_i = 2m$

$4f \leq 2m$

$f \leq \frac{m}{2}$

$n - m + f = 2$

$f = 2 + m - n \leq \frac{m}{2}$

$\frac{m}{2} \leq n - 2$

$m \leq 2n - 4$

Scanned with CamScanner

...../...../.......... EGZAMIN 2017 (***) ZAD 4

a) • ASIA, BOLEK I ANTEK w jednym zespole

$$\begin{pmatrix} \text{ASIA} \\ \text{BOLEK} \\ \text{ANTEK} \\ ? \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

5 osób ma miejsce znaku zapytania, czyli 5 możliwości

• ASIA I BOLEK są w jednej grupie

$$\binom{5}{2} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{ASIA} \\ \text{BOLEK} \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

• ASIA I ANTEK

$$\begin{pmatrix} \text{ASIA} \\ \text{ANTEK} \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \longrightarrow \binom{5}{2}$$

ODP

$$5 + 2\binom{5}{2}$$

b) OD WSZYSTKICH KOMBINACJI ODEJMUJEMY PRZYPADEK, W KTÓRYM TADEK, ANTEK I BOLEK SĄ W JEDNEJ GRUPIE

• $\binom{8}{4}\binom{4}{4}$

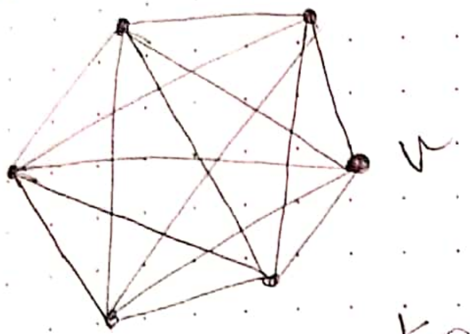
• $\begin{pmatrix} \text{TADEK} \\ \text{ANTEK} \\ \text{BOLEK} \end{pmatrix} \longrightarrow \binom{5}{1}$

$$\binom{8}{4}\binom{4}{4} - 5$$

c) $\begin{pmatrix} \text{NATALIA} \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{KAROL} \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$

$$\binom{6}{3}\binom{3}{3}$$

EGZAMIN 2017 (***) ZAD 5 ....../....../......




Wierzchołki to ludzie
Krawędzie to relacje. Mogą być one odpowiednio dwóch kolorów
niebieski - jeśli się nie znają
zielony - jeśli się znają.

Każdy wierzchołek w grafie n wierzchołkowym ma n-1 relacji. Dla n=6 z zasady szufladkowej dirichleta wiemy więc, że każdy wierzchołek/osoba ma przynajmniej 3 z ludźmi których zna lub nie zna (5 kulek i 2 szufladki (kolory))
Im większe n tym więcej sąsiadów których zna lub nie zna.

Jeśli założymy się, że przynajmniej 2 sąsiadów v sąsiaduje ze sobą to mamy K3 ludzi znających się lub nie. Jeśli tak nie jest to pozostałe krawędzie tworzą K3 ludzi znających się lub nie.

(Najlepiej rozpisać ten dowód dla ludzi znających się a potem napisać że dowód dla ludzi nieznających się jest identyczny)

**EGZAMIN 2018 ZAD 12**

....... / ....... / ..........

Dla jakich rozłożeń wag osiągnięte jest maksimum

Należy wagi rozłożyć tak aby jak najwięcej wierzchołków posiadało wszystkie swoje krawędzie incydentne o wadze 2.

$m$ - liczba wierzchołków
$n$ - krawędzie o wadze 1

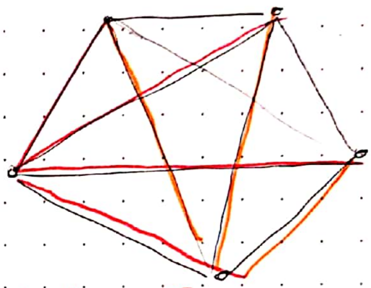
$\frac{m^2-m}{2}$ - ilość wszystkich krawędzi

$\frac{m^2-m-2n}{2} = \frac{m^2-3n}{2}$

ciąg arytmetyczny, bo za każdym razem kolejny wierzchołek, którego krawędzie incydentne chcemy zaznaczyć wagą 2, ma o jedną krawędź mniej.

$a_1 = (n-1)$
$r = -1$

$m$ - ilość wyrazów




$\frac{m^3-3n}{2} \geq \frac{2(n-1)+(m-1)(-1)}{2} \cdot m$

$m^3-3n \geq (2n-2-m+1)\cdot m$

$m^3-3n \geq 2nm - m^2 - m$

$m^2-(2n-1)m+(n^2-3n) \geq 0$

Czyli ile wierzchołkom możemy zapewnić nadanie każdej z jego krawędzi incydentnej wagi 2 tak aby zostało conajmniej $n$ krawędzi, które oznaczymy wagą 0.

**EGZAMIN 2017* ZAD. 2**

Tw. Heawooda
każdy graf prosty planarny jest $\leq$ 5-kolorowalny.

ze wzoru Eulera $v - m + f = 2$

$v$ - wierzchołki, $m$ - krawędzie, $f$ - ściany

Jeśli graf nie zawiera trójkątów to każdy cykl posiada minimalnie 4 krawędzie.

Jeśli graf nie posiada żadnego trójkąta to dodatkowo $m \leq 2v - 4$

$$\left.\begin{array}{l} 4f/2 < m \\ f < m/2 \end{array}\right\} \quad v > m/2 + 2$$

Jeśli każdy wierzchołek jest stopnia $\geq 4$ to

$4v/2 < m$

$v < m/2$      sprzeczność

Więc nie możemy nie mieć trójkątów i jednocześnie stopień jakiegokolwiek wierzchołka nie może być $> 4$

$v - m + f = 2$

$v = 2 - f + m$    $f < m/2$

$v > m/2 + 2$

EGZAMIN 2017 * ZAD 3

$$S(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}, \frac{z_a + z_b}{2}\right)$$

czyli $x_a + x_b$, $y_a + y_b$ oraz $z_a + z_b$ muszą być parzyste

$S_1 = \{(x, y, z) \mid$ x - parzyste, y - parzyste, z - nieparzyste $\}$

$S_2 = \{(x, y, z) \mid$ x - parzysty, y - parzysty, z - parzysty $\}$

$S_3 = \{(x, y, z) \mid$ x - nieparzysty, y - nieparzysty, z - parzysty $\}$

$S_4 = \{(x, y, z) \mid$ x - nieparzysty, y - nieparzysty, z - nieparzysty $\}$

$S_5 = \{(x, y, z) \mid$ x - parzysty, y - nieparzysty, z - parzysty $\}$

$S_6 = \{(x, y, z) \mid$ x - parzysty, y - nieparzysty, z - nieparzysty $\}$

$S_7 = \{(x, y, z) \mid$ x - nieparzysty, y - parzysty, z - parzysty $\}$

$S_8 = \{(x, y, z) \mid$ x - nieparzysty, y - parzysty, z - nieparzysty $\}$

Potraktujmy każdą z tych możliwości jako szufladkę. Mamy więc 8 szufladek zatem potrzebujemy przynajmniej 9 punktów kratowych

# EGZAMIN 2017 * ZAD 6.

Załóżmy, że graf pełny $K_n$ zawiera drzewo spinające jednego koloru, załóżmy niebieskiego. Jeżeli teraz dołożymy kolejny wierzchołek, czyli tworzymy graf $K_{n+1}$, to jeśli jedna z krawędzi incydentnych tego nowego wierzchołka jest niebieska to mamy drzewo spinające niebieskie. Jeśli zaś wszystkie krawędzie incydentne nowego wierzchołka są innego koloru (np. czerwonego) to istnieje drzewo spinające jednego koloru, ponieważ $K_{n+1}$ to klika, czyli krawędzie nowego wierzchołka stworzą nowe jednokolorowe drzewo spinające.

EGZAMIN 2017 ZAD 1

sklejemy kulki po dwie, czyli $\binom{n}{k/2}$

EGZAMIN 2017 ZAD 9 ZAD 8 LISTA 13

EGZAMIN 2017 ZAD 5

klocki niebieskie - otwierające nawiasy
klocki żółte - zamykające nawiasy

czyli liczby Catalana.

EGZAMIN 2017 ZAD 7

$\binom{\binom{n}{2}}{k}$ → wszystkie możliwe krawędzie → k krawędzi

EGZAMIN 2017 ZAD 10 LISTA 8 ZAD 6

EGZAMIN 2017 ZAD 12 → wierzchołek → krawędzi

listowej → $O(n+m)$

macierzowej → $O(n*n)$

EGZAMIN 2019 ZAD 9 POP

$\binom{8}{5}$

- 2 z 3 wagonach ludzie siedzą tak samo

$\binom{3}{2}\binom{8}{5}\binom{8}{5}$ → wagon 3

- 3 z 3 wagonów ludzie siedzą tak samo

$\binom{3}{3}\binom{8}{5}$

$$\binom{8}{5}^3-\binom{3}{2}\binom{8}{5}\binom{8}{5}+\binom{3}{3}\binom{8}{5}=56^3-3\cdot 56\cdot 56+1\cdot 56$$

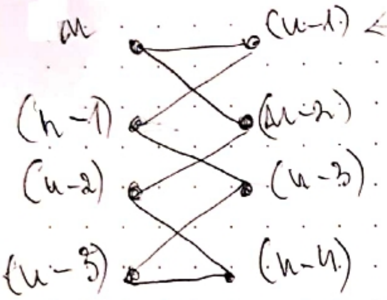
# EGZAMIN POP 2018 ZAD 1

$\frac{n!}{n}$ → ile możliwych cykli w klice

dzielimy przez n bo taki cykl który który rozpoczyna się od 5 to ten sam cykl co rozpoczyna się od 2, 1, 4 i 3


$\frac{(n-1)!}{2}$ → na dwa bo cykl 5 3 1 4 2 5 to ten sam cykl co 5 2 1 4 3 5

GRAF DWUDZIELNY



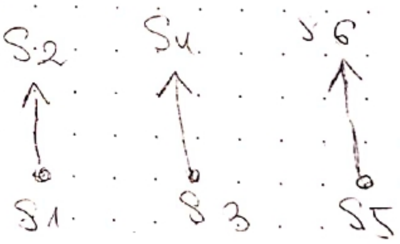

wybór pierwszego wierzchołka

$$2n\,\frac{(n-1)!\cdot n!}{2n} = (n-1)!\cdot n!$$

$$\frac{n!(n-1)!}{2}$$

# EGZAMIN POP 2018 ZAD 3

Decydujemy kto zajmie 1 miejsce na n sposobów (np. $S_2$)




Decydujemy kto zajmie 2 miejsce na 1 sposób (bo "odblokowaliśmy" 1 sportowca, np. S1) lub na (n-1) sposobów

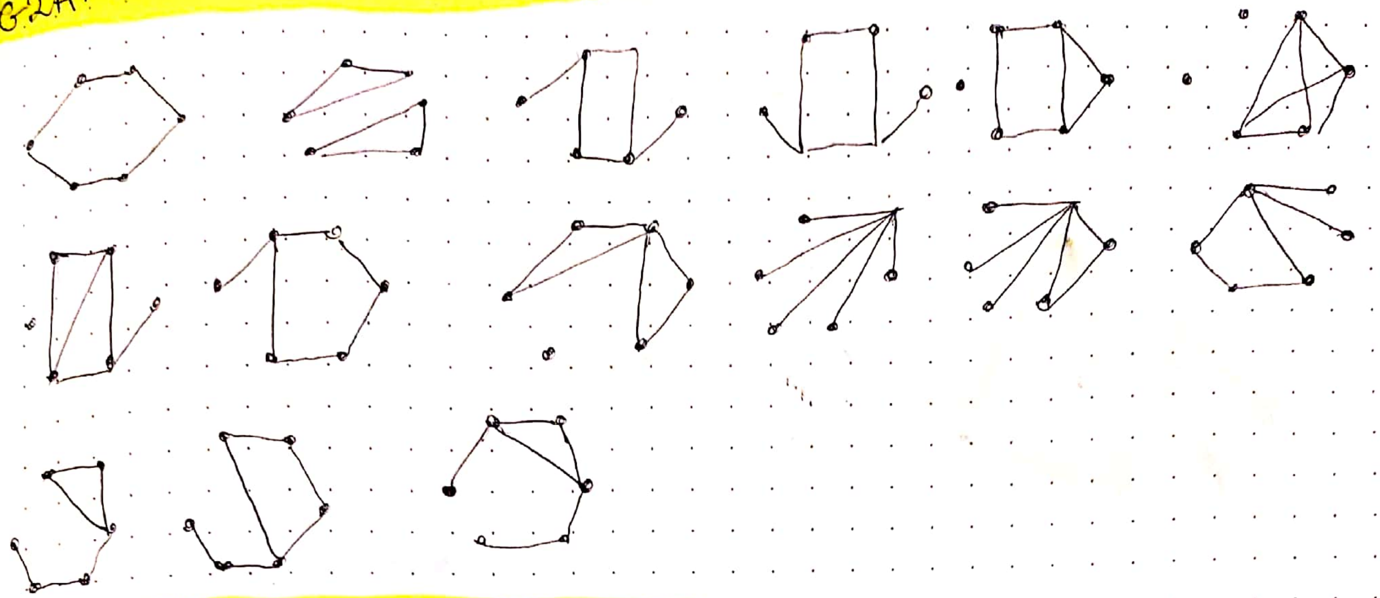
Decydujemy kto zajmie 3 miejsce na 1 sposób lub na (n-1) lub na (n-2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | n | n | n |
| II | 1 | (n-1) | (n-1) |
| III | (n-1) | 2 | (n-2) |

odp. $n\cdot 1(n-1) + n(n-1)\cdot 2 + n(n-1)(n-2)$

....... / ....... / ..........

# EGZAMIN POP 2018 ZAD 6



# EGZAMIN POP 2018 ZAD 7

zera – zamykające nawiasy
jedynki – otwierające nawiasy

Catalan

# EGZAMIN POP 2018 ZAD 8

Cykl Eulera istnieje gdy $m$ i $n$ są parzyste.
Cykl Hamiltona istnieje gdy spełniona jest nierówność trójkąta, czyli:

$$|A_1| \leq |A_2| + |A_3|$$
$$|A_2| \leq |A_1| + |A_3|$$
$$|A_3| \leq |A_1| + |A_2|$$

$$m \leq 2n$$
$$n \leq m+n$$

# EGZAMIN POP 2018 ZAD 9

DOWÓD INDUKCYJNY:
dla $n=0$ zachodzi $5 \mid F_5 \rightarrow F_5 = 5$

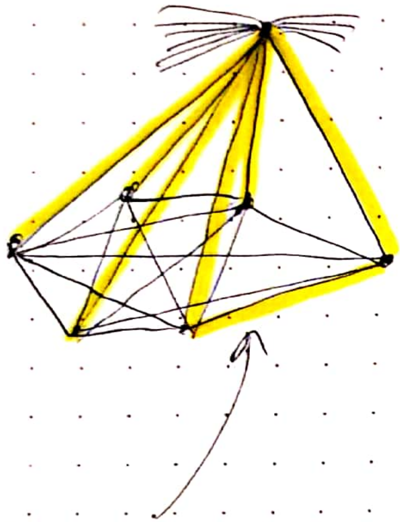
Załóżmy, że dla $n$, które jest podzielne przez 5 $F_n$ jest również podzielne przez 5.

Pokażmy dla $n+5$

$$F_{n+5} = F_{n+3} + F_{n+4} = F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+2} =$$
$$= F_{n+1} + F_n + F_{n+1} + \underbrace{F_{n+2}}_{F_n + F_{n+1}} + F_{n+1} + F_{n+1} + F_n = \underbrace{3F_n}_{\text{z zał. } F_n \text{ jest podzielne przez 5}} + \underbrace{5F_{n+1}}_{\text{podzielne przez 5}}$$

## EGZAMIN POP 2018 ZAD 10

W klice 17 wierzchołkowej ($K_{17}$) każdy wierzchołek ma 16 krawędzi incydentnych. Z zasady szufladkowej dirichleta wiemy, że conajmniej 6 z nich będzie jednego koloru. Bez straty ogólności załóżmy żółtego.



Zauważmy, że jeśli w grafie nie wystąpi ani jedna krawędź więcej żółtego koloru, to istnieje trójkąt monochromatyczny (pokazaliśmy na ćwiczeniach, że jeśli klikę $K_6$ pomalujemy na dwa kolory to powstanie przynajmniej jeden monochromatyczny trójkąt)

Jeśli zaś, którakolwiek krawędź (chodź jedna) będzie koloru żółtego to powstanie (przynajmniej jeden) trójkąt.

## EGZAMIN 2019 ZAD 9

$2^{25}$

↓

wszystkie możliwości