LISTA 2

ZAD 1. DLA $k \geq 1$ WYKAŻ TOŻSAMOŚĆ ABSORBCYJNĄ:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

CZY POTRAFISZ UDOWODNIĆ TO KOMBINATORYCZNIE?

ALGEBRAICZNIE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

KOMBINATORYCZNIE

KONKURS
n - uczestników
k - laureatów
w tym 1 zwycięzca

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad | \cdot k$$

$$k \cdot \binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA WYBRAĆ ZWYCIĘZCÓW?

wybierasz k laureatów

zwycięzca

$$\binom{n}{k} \cdot k = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

1 zwycięzca

pozostali laureaci

ZAD 2. PODAJ INTERPRETACJĘ NASTĘPUJĄCEJ TOŻSAMOŚCI W TERMINACH ZBIORÓW:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-k}{m-k}$$ skąd $\binom{n-m}{k-m}$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!}\cdot\frac{\cancel{k!}}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,m!\,(k-m)!}$$

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-k)!(n-m-(n-k))!} = $$

$$= \frac{n!}{m!\cancel{(n-m)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-m)!}}{(n-k)!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!}$$

ZAD. 3 WYKAŻ PRAWDZIWOŚĆ TOŻSAMOŚCI CAUCHY'EGO:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

CZY POTRAFISZ UDOWODNIĆ JĄ KOMBINATORYCZNIE?

INDUKCYJNIE:

ZAŁOŻENIE.

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

POKAŻEMY

$$\binom{m+1+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m+1}{i}\binom{n}{r-i}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m+1}{i}\binom{n}{r-i} = \sum\left(\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}\right)\binom{n}{r-i} =$$

Możemy tak zrobić z faktu

$$* \binom{m+1}{i} = \binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}$$

dowód

$$\frac{(m+1)!}{i!(m+1-i)!} = \frac{m!}{i!(m-i)!} + \frac{m!}{(i-1)!(m-i+1)!} =$$

$$= \frac{m!}{(i-1)!\cdot i\cdot(m-i)!} + \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!(m-i+1)} =$$

$$= \frac{m!(m-i+1) + m!\,i}{(i-1)!\,i\cdot(m-i)!(m-i+1)} = \frac{m!(m-i+1+i)}{i!(m-i+1)!}$$

$$= \frac{(m+1)!}{i!(m-i+1)!} = \binom{m+1}{i}$$

$$= \sum \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} + \sum \binom{m}{i-1}\binom{n}{r-i} =$$

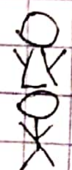
$$= \binom{m+n}{r} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m}{i-1}\binom{n}{r-(i+1)} =$$

$$\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}$$

$$= \binom{m+n}{r} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i-1} =$$

$$= \binom{m+n}{r} + \binom{m+n}{r-1} = \binom{m+n+1}{r}$$

$m \to$
$n \to$



$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

reprezentacja do której wybieramy nie ważne ile kobiet i mężczyzn

osobno kobiety i mężczyźni

ZAD 4. UDOWODNIJ INDUKCYJNIE, ŻE DLA KAŻDEGO NATURALNEGO N ZACHODZI:

ZAŁ. $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

DLA $n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \underbrace{\binom{n+1}{i}} a^i b^{n+1-i} = (a+b)^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right] \cdot a^i b^{n+1-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} =$$

$$= b \cdot (a+b)^n + \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{\to 0} a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{i=0}^{n+1-1} \binom{n}{i-1+1} a^{i+1} b^{n+1-(i+1)} =$$

$$= b(a+b)^n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} =$$

$$= b(a+b)^n + a(a+b)^n = (a+b)^n (a+b) =$$

$$= (a+b)^{n+1}$$

ZAD 5. POKAŻ, ŻE LICZBA PRZEDSTAWIEŃ LICZBY NATURALNEJ N W POSTACI SUMY K LICZB NATURALNYCH (RÓŻNYCH OD ZERA) WYNOSI $\binom{n-1}{k-1}$ JEŚLI PRZEDSTAWIENIA RÓŻNIĄCE SIĘ KOLEJNOŚCIĄ SKŁADNIKÓW UWAŻAMY ZA RÓŻNE. ILE JEST PRZEDSTAWIEŃ LICZBY N W POSTACI SUMY DOWOLNEJ ILOŚCI LICZB NATURALNYCH?

Scanned with CamScanner

Zauważmy, że każdą liczbę naturalną możemy przedstawić jako sumę jedynek.

$$n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$$

Pomiędzy jedynkami możemy stawiać "ściany".

$$\binom{n-1}{k-1}$$

żeby rozbić sumę na k worków trzeba postawić k-1 ścian

Scanned with CamScanner

ZAD 11 NIECH Z BĘDZIE DOWOLNYM SKOŃCZONYM ZBIORU. ZBUDUJ BIJEKCJĘ MIĘDZY ZBIORAMI JEGO PODZBIORÓW PARZYSTYCH I NIEPARZYSTYCH. (PODZBIÓR JEST PARZYSTY / NIEPARZYSTY, JEŚLI MA PARZYSTĄ / NIEPARZYSTĄ MOC)

Scanned with CamScanner

Niech A to zbiór o mocy $n > 0$. Wyróżnijmy element $\{a\}$ z A. Niech P to zbiór podzbiorów „parzystych" A, N – „nieparzystych" A.

Rozważmy funkcję $f: P \to N$, $f(p) = p \Delta \{a\}$, gdzie „Δ" to różnica symetryczna. Pokażę, że f jest bijekcją:

- różnowartościowość: weźmy dow. $p_1, p_2 \in P$ i zał. $f(p_1) = f(p_2)$, wtedy $p_1 \Delta \{a\} = p_2 \Delta \{a\}$, zatem $p_1 = p_2$, czyli f jest różnowartościowa.

- „na": weźmy dowolne $n \in N$. Niech $p = n \Delta \{a\}$ wtedy $f(p) = n$, czyli f jest „na"

Zatem f jest bijekcją.

ZAD 8 SPRAWDŹ PRAWDZIWOŚĆ NASTĘPUJĄCYCH RELACJI:

$n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$

- $\exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad n^2 \leq c \cdot n^3$

$$1 \leq c \cdot n$$

Już dla $c = 1$ zachodzi dla każdego n

- $n^3 \in O(n^{2.99})$

$\exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad n^3 \leq c \cdot n^{2.99}$

$$n^{0.01} \leq c$$

$$\sqrt[100]{n} \leq c$$

Nie zachodzi

Fakt 1. Jeśli $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ to $f(x) = O(g(x))$

Fakt 2. Jeśli $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ to $f(x) \neq O(g(x))$.

A) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 < \infty$ czyli $n^2 \in O(n^3)$

B) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^{2,99}} = \lim_{n\to\infty} n^{0,01} = \infty$ czyli $n^3 \notin O(n^{2,99})$

C) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 < \infty$ czyli $2^{n+1} \in 2^n$

D) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$ czyli $(n+1)! \in O(n!)$

E) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{d'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot\ln 2} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n\cdot\ln 2} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

$(\log_2 n)' = 1/(n\cdot\ln 2)$

$(\sqrt{n})' = 1/(2\cdot\sqrt{n})$

czyli $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$

F) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log_2 n} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\cdot\ln 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\ln 2}{2\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{2} = \sqrt{n} \to \infty$

czyli $\sqrt{n} \notin O(\log_2 n)$

ZAD. 10 NIECH f i g BĘDĄ DOWOLNYMI WIELOMIANAMI O STOPNIACH k i l TAKIMI, ŻE $k < l$. POKAŻ, ŻE WTEDY $f(n) = o(g(n))$.

Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$. Pokaż że wówczas $f(n) = o(g(n))$

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} =$$

wystarczy k razy → Używamy k razy reguły De L'Hospitala

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{0}{g^{(k)}(n)} = 0$$