LISTA 15

L.15.12 Metoda bisekcji polega na (rekurencyjnym) wyznaczeniu środka przedziału, sprawdzeniu czy miejsce zerowe znajduje się po lewej lub po prawej stronie, a następnie przejściu na odpowiednią z nich. Ten krok należy powtarzać do momentu, w którym osiągniemy odpowiednie przybliżenie lub dokładnie miejsce zerowe.

- długość przedziału po każdym wywołaniu staje się 2 razy krótsza

  - długość k-tego przedziału to

$$|I_k| = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

- różne znaki na krańcach przedziału

L.15.13 $\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$

Stosując Metodę Newtona możemy znaleźć przybliżenie tej liczby, gdy napiszemy funkcję, ~~której~~ miejsce zerowe będzie równe $\sqrt[5]{a}$.

$$x = \sqrt[5]{a}$$

$$x = a^{\frac{1}{5}}$$

$$x^5 = a$$

METODA NEWTONA

$$f(x) = x^5 - a \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{dla } n = 0, 1, \dots)$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - a}{5x_n^4} = \frac{5x_n^5 - x_n^5 + a}{5x_n^4}$$

$$= \frac{4x_n^5 + a}{5x_n^4} = \frac{4}{5}x_n + \frac{a}{5x_n^4}$$

$$\phi(x) = \frac{4}{5}x + \frac{a}{5x^4} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{5} \cdot x^{-4}$$

$$\phi(a^{\frac{1}{5}}) = \frac{4}{5}a^{\frac{1}{5}} + \frac{a}{5a^{\frac{4}{5}}} = \frac{4}{5}a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}}$$

$$\phi'(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}a(-4)x^{-5} = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}ax^{-5}$$

$$|\phi'(x)| < 1 \longrightarrow \text{sprawdzenie zbieżności}$$

$$-1 < \frac{4}{5} - \frac{4}{5}ax^{-5} < 1 \quad \Big| -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{9}{5} < -\frac{4}{5}ax^{-5} < \frac{1}{5} \quad \Big| \cdot -\frac{5}{4}$$

.... / .... / ....

$$\frac{9x^5}{4a} > 1 > \frac{x^5}{-4a}$$

$$\frac{9x^5}{4a} > 1 \quad \wedge \quad 1 > \frac{x^5}{-4a}$$

$$x^5 > \frac{4a}{9} \quad \wedge \quad -4a < x^5$$

$$x > \sqrt[5]{\frac{4a}{9}} \quad \wedge \quad x > \sqrt[5]{-4a}$$

$$\frac{9}{4} > x^{-5}a > -\frac{1}{4} \quad | :a$$

$$\frac{9}{4a} > x^{-5} > -\frac{1}{4\cdot a} \quad | \cdot x^5$$

$$x \in \left(\sqrt[5]{-4a}\,;\ \sqrt[5]{\frac{4a}{9}}\right)$$

Metoda jest zbieżna liniowo gdy

ALGORYTM:

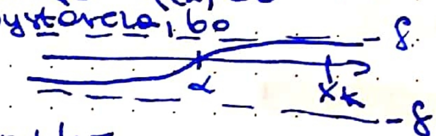
Dane:
- a
- x_n
- ilość kroków
- eps

```
for i=1; i≤ ilość kroków; i++
    x_{n+1} = 1.25 + a:(5·x·x·x·x)
    if abs(x_{n+1} - x_n) < eps:
        return x_n
    x_n = x_{n+1}
```

zwróć błąd

PWO -> warunek stopu dla metody iteracyjnej rozwiązywania równania nieliniowego $f(x)=0$

$|f(x)| < \delta$ -> niewystarczające



$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{x_k} < \varepsilon$ ∧ max ilość kroków

WARUNEK STOPU:
- jeśli osiągniemy wynik z oczekiwaną dokładnością
- przekroczyliśmy zadaną określoną ilość kroków (w przypadku gdy metoda rozbieżna).

L 15.15

$$x = \sqrt{a} \quad |^2$$
$$x^2 = a$$
$$f(x) = x^2 - a$$
$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

```
for(i=1, i< ilość kroków; i++)
    x_{n+1} = x_n/2 + a/(2·x_n)
    if abs(x_{n+1} - x_n) < eps:
        return x_n
    x_n = x_{n+1}
```

$[0, a]$

przykład: $a=9$

$x_n = 9$

$a = 9$

$x_{n+1} = 9/2 + 9/2\cdot 9 = 5$

$x_n = 5$

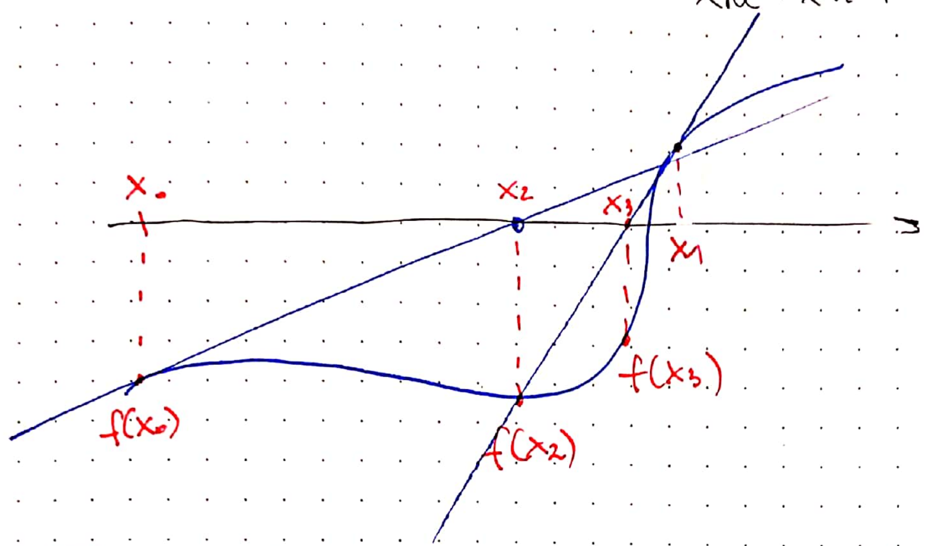
$x_{n+1} = 5/2 + 9/2\cdot 5 = 34/10$

$x_n = 3{,}4$

$x_{n+1} = 3{,}4/2 + 9/2\cdot 3{,}4 = 1{,}7 + 9/6{,}8 = 3{,}02$

L15.16 Metoda siecznych polega na wyborze punktów początkowych x_0 oraz x_1, następnie przeprowadzenie między nimi siecznej. Kolejno dla powstałego na przecięciu osi z sieczną punktu powtarzamy operację uprzednio zamieniając punkty między którymi przeprowadzimy sieczną na odpowiednie.

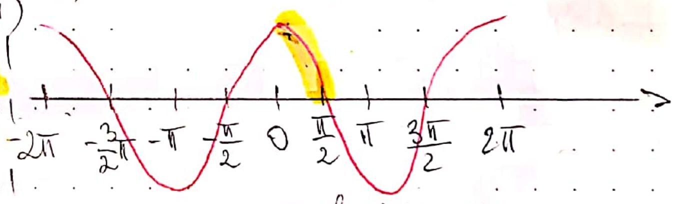
WZÓR: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$



—WARUNEK STOPU: podobny jak u Newtona.

L15.1 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ cos(x) co dla $x \in [-2\pi; 2\pi]$?

```
if(x<0)
   x=-x
if(x≥0 && x<π/2)
   PWO cos(x)
else if(x>π/2 && x<π)
   -PWO cos(π-x)
else if(x>π && x<3/2π)
   -PWO cos(x-π)
else if(x>3/2π && x<2π)
   PWO cos(2π-x)
```



desmos.com

L15.2 JAKIE ZNACZENIE Z PUNKTU WIDZENIA ANALIZY NUMERYCZNEJ MA POJĘCIE UWARUNKOWANIA ZADANIA?

Zidentyfikowanie zadania jako zadanie dobrze lub źle uwarunkowane pozwala na wybranie strategii rozwiązywanego zadaniem. W przypadku gdy zadanie jest źle uwarunkowane to mała względna zmiana danych powoduje dużą względną zmianę wyniku. W przypadku liczb zmiennoprzecinkowych często występuje ich błędne reprezentowanie.

Dobre uwarunkowanie zadania to warunek konieczny, ale nie wystarczający, aby algorytm działał zgodnie z oczekiwaniami. Do tego algorytm musi być jeszcze ...., ..., ... numerycznie poprawny.

L15.3

A) $f(x) = \ln(x)$

$$wn = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x}\cdot x}{\ln(x)}\right| = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right|$$

$$\lim_{n\to 1}\left|\frac{1}{\ln(x)}\right| = \infty$$

źle uwarunkowane odp. dla $x=1$

co tutaj wstawić jako n

B) $f(x) = (x-1)^{10}$

$$wn = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| = \left|\frac{10(x-1)^9\cdot x}{(x-1)^{10}}\right| = \left|\frac{10x}{x-1}\right|$$

$$\lim_{n\to 1}\left|\frac{10x}{x-1}\right| = \infty$$

źle uwarunkowane dla odp. dla $x=1$

LISTA 3 ZAD 5 (podobne)

L15.4

Zadanie źle uwarunkowane to takie, dla którego mała względna zmiana danych powoduje dużą względną zmianę wyniku

$f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$$wn = \left|\frac{-\sin x\cdot x}{\cos x}\right|$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left|\frac{-\sin x\cdot x}{\cos\cdot x}\right| = -\infty$$

źle uwarunkowane odp. dla $x = \pi/2 + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

L15.6

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\cdot\frac{h}{h}\right| = \left|\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h}{f(x)}\right| =$$

$$= \left|\frac{f'(x)\cdot h}{f(x)}\right| = \left|\frac{f'(x)\cdot x\cdot h}{f(x)\cdot x}\right| = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right|\left|\frac{h}{x}\right|$$

wskaźnik uwarunkowania $wn = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| = \frac{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|}{\left|\frac{(x+h)-x}{x}\right|}$ — stosunek względnej zmiany wyniku do względnej zmiany danych

$f(x) = e^{5x}$ $\qquad f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$ $\qquad f'(0{,}8) = 5 \cdot e^4$

$$w_n = \left| \frac{5 \cdot e^4 \cdot 0{,}8}{e^{5x}} \right| = \left| \frac{4 \cdot e^4}{e^4} \right| \approx 4$$

$4 = 2^2$ jeśli dana jest zaburzona na miejscu t to wynik jest zaburzony na miejscu $t-2$

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \le |w_n| \cdot \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

2^{-t}, $\; 0{,}8$

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \le 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot 2^{-t} \cdot e^4 = 5e^4 \cdot 2^{-t}$$

2^{-t} dla tutaj cyfr dwójkowych

L15.7

Utrata cyfr znaczących pojawia się w przypadku odejmowania od siebie liczb tych samych znaków, które są bardzo bliskie sobie.

$x > y > 0$, $x \approx y$

$x \to$ [+ | | | | | | | … | | |] $\cdot\, 2^c$

$y \to$ [+ | | | | | | | … | | |] $\cdot\, 2^c$

$\neq$

Jeżeli są bliskie sobie to cecha taka sama, a mantysa podobna na wielu bitach.

$x - y \to$ [+ | 0 | 0 | 0 | 0 | … | 0 | 1 | ? | ? | ?] $\cdot\, 2^c$

normalizujemy mantysę (bo $m \in [1/2 ; 1)$)

aby było z zakresu $\langle \frac{1}{2} ; 1)$

[+ | 1 | ? | ? | 0 | 0 | … | 0] $\cdot\, 2^c$

co tu wpisać?

UTRATA CYFR ZNACZĄCYCH

Znormalizowanie "obcina" początkowe zera w liczbie $x-y$, jednak wtedy ostatnie niezerowe cyfry są przesuwane na pierwsze pozycje i jeżeli $i < t$, to nie będzie wiadomo czym zapełnić pozostałe miejsca w mantysie.

Operacje "bezpieczne" to: dodawanie liczb tych samych znaków oraz odejmowanie liczb przeciwnych znaków, mnożenie i dzielenie

$(\sqrt{x^2+2} + x)^{-1}$

Operacja dzielenie jest "bezpieczna"

$\sqrt{x^2+2} + x$

utrata cyfr znaczących nastąpi gdy będziemy odejmować liczby o tych samych znakach

JAK ROZWIĄZAĆ TEN PROBLEM? w przypadku liczb dodatnich

w przypadku liczb ujemnych

$x < 0$

Problem utraty cyfr znaczących zacznie występować dla liczb o wiele mniejszych od -2

$$f(x) = (\sqrt{x^2+2} + x)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{\sqrt{x^2+2} - x} = \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{(\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+2} - x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{x^2+2-x^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2} - x)$$

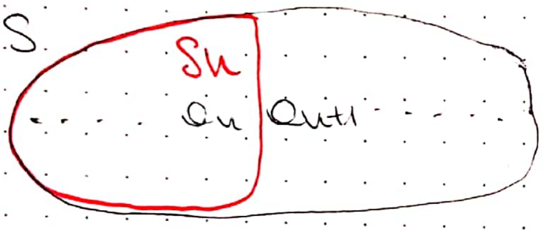
L15.8 $x^{-5}\left(\sin(3x) - 3x + 9\frac{x^3}{2}\right)$ → szereg Taylora sin.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \ldots$$

$$x^{-5}\left(\sin(3x) - 3x + 9\frac{x^3}{2}\right) = x^{-5}\left(\cancel{3x} - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \ldots - \cancel{3x} + 9\frac{x^3}{2}\right)$$

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$$



Ponieważ szereg jest naprzemienny to odjęcie sumy n pierwszych wyrazów od sumy wszystkich wyrazów będzie mniejsze lub równe od kolejnego elementu ciągu (ponieważ jest on największy z pozostałych)

$$x^{-5}\left(\frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \ldots + \underbrace{9\frac{x^3}{2} - \frac{(3x)^3}{6}}\right) =$$

$$\frac{9x^3}{2} - \frac{\cancel{27}^{9} x^3}{\cancel{6}\,2} = 0$$

$$= x^{-5}\left(\frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \frac{(3x)^9}{9!} - \ldots\right) = \left(\frac{3^5}{5!} - \frac{3^7 x^2}{7!} + \frac{3^9 x^4}{9!} - \ldots\right)$$

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{(2i+3)} x^{(2i-2)}}{(2i+3)!}(-1)^i$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{(2(n+1)+3)} x^{(2(n+1)-2)}}{(2\cdot(n+1)+1)!}(-1)^{n+1}$$

$$= \frac{3^{2n+5} x^{2n}}{(2n+5)!}(-1)^{n+1}$$

$$|S - S_n| \leq \frac{3^{2n+5} x^{2n}}{(2n+5)!} \leq 10^{-7}$$

L.15.9

Tak, jeśli zadanie jest dobrze uwarunkowane. Jeśli zaś jest źle uwarunkowane to nie. Ponieważ algorytm numerycznie poprawny nie gwarantuje nam dobrego uwarunkowania zadania. W tym przypadku może dojść do tego, że mała względna zmiana danych spowoduje dużą względną zmianę wyniku.

L.15.10

```
s = x[0]
for i from 1 to 4
  do s = 3·s + x[i]
od
return(s)
```

$$S = 3(3(3(3x_0 + x_1) + x_2) + x_3) + x_4$$

Musimy uwzględnić błędy mnożenia i odejmowania

$$S = (3(3(3(3x_0(1+\alpha_1) + x_1)(1+\beta_1)(1+\alpha_2) + x_2)(1+\beta_2)(1+\alpha_3) +$$

błąd mnożenia błąd dodawania

$$+ x_3)(1+\beta_3)(1+\alpha_4) + x_4)(1+\beta_4) =$$

$$= (3(3(3(3x_0 \underbrace{\prod_{k=1}^{4}(1+\alpha_k)\prod_{k=1}^{4}(1+\beta_k)}_{\to (1+\varepsilon_0)}) +$$

$$+ x_1 \underbrace{\prod_{k=2}^{4}(1+\alpha_k)\prod_{k=1}^{4}(1+\beta_k)}_{\to (1+\varepsilon_1)}) +$$

$$+ x_2 \underbrace{\prod_{k=3}^{4}(1+\alpha_k)\prod_{k=2}^{4}(1+\beta_k)}_{\to (1+\varepsilon_2)}) +$$

$$+ x_3 \underbrace{\prod_{k=4}^{4}(1+\alpha_k)\prod_{k=3}^{4}(1+\beta_k)}_{\to (1+\varepsilon_3)}) +$$

$$+ x_4 \underbrace{\prod_{k=4}^{4}(1+\beta_k)}_{\to (1+\varepsilon_4)}$$

czemu 8? bo dla ε_0 mamy 4 α_i i 4 β_i

$|\varepsilon_0| \leq 8 \cdot 2^{-t}$ $\quad |\varepsilon_3| \leq 3 \cdot 2^{-t}$

$|\varepsilon_1| \leq 7 \cdot 2^{-t}$ $\quad |\varepsilon_4| \leq 2^{-t}$

$|\varepsilon_2| \leq 5 \cdot 2^{-t}$

.... / .... / ....

Zapiszmy więc S za pomocą ε_i

$$S=(3(3(3(3x_0(1+\varepsilon_0)+x_1)(1+\varepsilon_1)+x_2)(1+\varepsilon_2)+x_3)(1+\varepsilon_3)+$$
$$+x_4)(1+\varepsilon_4)$$

$$S=3(3(3(3\tilde{x}_0+\tilde{x}_1)+\tilde{x}_2)+\tilde{x}_3)+\tilde{x}_4$$

ALGORYTM MOŻEMY NAZWAĆ NUMERYCZNIE POPRAWNYM, GDY SPEŁNIA JEDEN Z PONIŻSZYCH WARUNKÓW

- $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)(1+h)$ → daje mało zaburzony wynik dla mało zaburzonych danych
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)(1+h)$ → dane dokładne, ale mało zaburzony wynik
- $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ → dane mało zaburzone, a wynik dokładny

W tym przypadku dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych.

L15.14

Było takie zadanie 3 na liście 5, gdzie zostało wykazane, że jeśli

$$F(\alpha)=\alpha, \; F'(\alpha)=F''(\alpha)= \ldots =F^{(p-1)}(\alpha)=0, \; F^{(p)}(\alpha)\neq 0,$$

to rząd metody jest równy p, tzn.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}=\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}=C\neq 0$$

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{SKĄD?}$$

Z polecenia zadania $f(\alpha)=0$

$$F(\alpha)=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=0$$

$$\alpha=\frac{0}{\neq 0}=0$$

$f(\alpha) = 0$

$f'(\alpha) \neq 0$

α - pierwiastek pojedynczy funkcji

udow., że $p = 2$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} F(\alpha) = \alpha \\ F'(\alpha) = 0 \\ F''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

1) Zapiszmy daną metodę jednokrokową jako $F(x)$

2) Wiemy, że rząd metody (tzn. wykładnik zbieżności) to liczba p taka, że:

$F(\alpha) = \alpha$

$F'(\alpha) = 0$

$F''(\alpha) = 0$, ...

$F^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$

(gdzie α jest miejscem zerowym $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.)

Liczymy więc $F(\alpha) = \alpha$ i kolejne pochodne F dopóki nie trafimy na zerową pochodną. Pierwsza niezerowa pochodna F^p, daje nam p - wykładnik zbieżności.

metoda Newtona:

$$\begin{cases} x_0 \text{ - dane} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

$\downarrow$

Metoda Newtona to metoda jednokrokowa.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Big\} \text{ z wykładu}$$

$$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{0}{\neq 0} = \alpha$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$F''(x) = -\frac{[f(x) f''(x)]' \cdot f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x) \cdot 2 f'(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^4} =$$

$$= -\frac{(f(x)' f''(x) + f(x) f^{(3)}(x)) f'(x)^2 - 2 f(x) f''(x)^2 f'(x)}{f'(x)^4} =$$

$$= \frac{-f(x)^3 f''(x) + f(x) f'(x)^2 f^{(3)}(x) - 2 f(x) f'(x) f''(x)^2}{f'(x)^4} =$$

$$F''(\alpha) = \frac{-f(\alpha)^3 f''(\alpha) + f(\alpha) f'(\alpha)^2 f^{(3)}(\alpha) - 2 f(\alpha) f'(\alpha) f''(\alpha)^2}{f'(x)^4} =$$

.... / .... / ....

$$= \frac{f'(\alpha)^3 f''(\alpha)}{f'(\alpha)^4} = \underbrace{\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}}$$

$\neq 0$, więc 2 jest wykładnikiem funkcji

ZAD 4 LISTA 5

$F''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ z zał. $f'(\alpha) \neq 0$

1° Jeśli $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow F''(\alpha) \neq 0$ zbieżność kwadratowa

2° Jeśli $f''(\alpha) = 0$, to zbieżność sześcienna lub większa

L15.17

```
mnoznik = 1
liczba = 0
for (i = 0 ; i ≤ n ; i++)
    liczba += mnoznik * ai
    mnoznik *= 10
```

L15.18 Schemat Hornera to algorytm służący do bardzo szybkiego obliczania wartości wielomianu.

wykład 5 / początek

postać NEWTONA wielomianu:

$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x)$, gdzie $\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_k(x) = (x - x_{k-1}) \cdot p_{k-1}(x) \end{cases}$ $(k = 1, 2 \ldots)$

$p_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$w(x) = b_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) +$
$+ b_{n-1}(x - x_0) \ldots (x - x_{n-2}) +$
$\vdots$
$+ b_1(x - x_0) +$
$+ b_0$

$\begin{cases} w_n := b_n \\ w_k := w_{k+1}(x - x_k) + b_k \end{cases}$

wtedy $w(x) = w_0$

L15.19 lista 6 zad 3

$w(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_n T_n(x) =$
$= \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x)$

pierwszy element $\cdot \frac{1}{2}$

Def. rekurencyjna algorytmu Czebyszewa

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (k=2,3,\dots) \end{cases}$$

Algorytm Clenshawa

$$\begin{cases} B_{n+2} = B_{n+1} = 0 \\ B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \dots, 0) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

wyznaczmy $c_k = B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}$

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{n}{}' 2x B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n-1}{}' 2x B_{k+1} T_k + \underbrace{2x B_{n+1} T_n(x)}_{0}\Big) + \sum_{k=0}^{n-2}{}' B_{k+2} T_k(x) + \overbrace{B_{n+1} T_k(x)}^{0} + \overbrace{B_{n+2} T_k(x)}^{0}$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k T_k -$$

$$- \underbrace{2x \cdot \frac{1}{2} B_1 T_0}_{x B_1 T_0} - 2x \sum_{k=1}^{n-1} B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n-2}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 \underbrace{T_0(x)}_{1} + B_1 \underbrace{T_1(x)}_{x} + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+2}(x)$$

$$- x B_1 \underbrace{T_0(x)}_{1} - 2x \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - \frac{1}{2} B_2 \underbrace{T_0(x)}_{1} =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 + \cancel{B_1 x} + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+2}(x) - \cancel{x B_1} - 2x \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+1}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - \frac{1}{2} B_2 =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2 + \sum_{k=0}^{n-2} \big(B_{k+2} T_{k+2}(x) - 2x B_{k+2} T_{k+1}(x) + B_{k+2} T_k(x) \big)$$

$$B_{k+2}(2x T_{k+1}(x) - T_k(x)) - 2x B_{k+2} T_{k+1}(x) + B_{k+2} T_k(x) =$$

$$2x B_{k+2} T_{k+1}(x) - B_{k+2} T_k(x) - 2x B_{k+2} T_{k+1}(x) + B_{k+2} T_k(x) = 0$$

Zatem $= \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2$

Ze względów numerycznych zaleca się obliczanie wartości wielomianu podanego w post. Czebyszewa

$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_k T_k(x)$ przy pomocy następującego algorytmu Clenshewa:

$$\begin{cases} B_{n+2} = B_{n+1} = 0 \\ B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + b_k \end{cases} \quad (k = n, n-1, \dots 0)$$

wtedy $w(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}$

L15.2.1 lista 7 zad 1

$$f[x_i, x_{i+1} \dots x_j] = \frac{f[x_{i+1} \dots x_j] - f[x_i \dots x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

x_k	-2	-1	1	2	3
y_k	1	2	10	29	106

k	x_k	y_k				
0	-2	1				
1	-1	2	1			
2	1	10	4	1		
3	2	29	19	5	1	
4	3	106	77	29	6	1

$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2-1}{-1+2} = \frac{1}{1}$

$\frac{4-1}{1+2} = 1$

$\frac{5-1}{2+2} = 1$

$\frac{6-1}{3+2} = 1$

Obliczenia:

$\frac{10-2}{1+1} = \frac{8}{2} = 4$

$\frac{29-10}{2-1} = \frac{19}{1} = 19$

$\frac{106-29}{3-2} = 77$

$\frac{19-4}{2+1} = 5$

$\frac{77-19}{3-1} = \frac{58}{2} = 29$

$\frac{29-5}{3+1} = \frac{24}{4} = 6$

$$L_n(x) = 1 + (x-x_0) + (x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 1 + (x+2) + (x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x-1) + (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

L15.22

A)

x_k	-2	-1	0	1
y_k	2	0	2	-4

k	x_k	y_k			
0	-2	2			
1	-1	0	-2		
2	0	2	2	2	
3	1	-4	-6	-4	-2

$\frac{0-2}{-1+2} = \frac{-2}{1}$

$\frac{2+2}{0+2} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{-4-2}{1+2} = -2$

Obliczenia:

$\frac{2-0}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{-4-2}{1-0} = \frac{-6}{1} = -6$

$\frac{-6-2}{1+1} = \frac{-8}{2} = -4$

Scanned with CamScanner

x_k	1	2	-1	-2	0
y_k	-4	-30	0	2	2

k	x_k	y_k				
0	1	-4	-26	-8	-2	0
1	2	-30	-10	-2	-2	
2	-1	0	-2	2		
3	-2	2	0			
4	0	2				

$\frac{-30+4}{2-1} = -26$

$\frac{-10+26}{-1-1} = \frac{16}{-2} = -8$

$\frac{-2+8}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$

$\frac{-2+2}{0-1} = 0$

obliczenia:

$\frac{0+30}{-1-2} = \frac{30}{-3} = -10$ | $\frac{-2+10}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$ | $\frac{2+2}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$

$\frac{2-0}{-2+1} = \frac{2}{-1} = -2$ | $\frac{0+2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{2-2}{0+2} = 0$

$$L_4(x) = -4 - 26(x-x_0) - 8(x-x_0)(x-x_1) - 2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + 0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$
$$= -4 - 26(x-1) - 8(x-1)(x-2) - 2(x-1)(x-2)(x+1) =$$
$$= -4 - 26x + 26 - 8(x^2 \underbrace{-2x-x}_{-3x} + 2) - 2(x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + x^2 - 2x - x + 2) =$$
$$= 22 - 26x - 8x^2 + 16x + 24x - 16 - \underbrace{2(x^3 - 2x^2 - x + 2)}_{-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4} =$$
$$= -2x^3 - 4x^2 + 2$$

Sposób II

Możemy przestawić

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	2	0	2	-4	-30

k	x_k	y_k				
0	-2	-2				
1	-1	-1	-2			
2	0	0	2	2		
3	1	1	-6	-4	-2	
4	2	2	-26	-10	-2	0

Jeśli rozpiszemy to w ten sposób to wyjdzie to samo

lista 7 zad 5
zad 6

L15.23

$$\max_{x\in[-1;1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8}$$

Przedział odpowiedni bo powinien być $[-1;1]$.

CZEBYSZEW

$$\|f(x) - L_n(x)\| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|}{(n+1)!} \cdot \|p_{n+1}(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$|f^{(n+1)}(x)| = ?$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{16}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

więc

$$|f^{(n+1)}(x)| = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{gdy } n \text{ parzyste}} \quad \text{lub} \quad \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{gdy } n \text{ nieparzyste}}$$

Największa wartość jaką może przyjąć cos i sin to 1.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot 1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-8}$$

$$\frac{1}{(n+1)!\,2^n\cdot 2^{n+1}} \leqslant 10^{-8}$$

$$\rightarrow \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{2n+1}} \leqslant 10^{-8}$$

$$\frac{1}{10^{-8}} \leqslant (n+1)!\,2^{2n+1}$$

$$10^{8} \leqslant (n+1)!\cdot 2^{2n+1}$$

$n \geqslant 7$ Wolfram Alpha

.... , ... , ...

wyk 7 zad 5

$f(x) = \ln(2x+3)$

$f'(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot 2 = \frac{2}{2x+3}$

$f''(x) = \frac{-2}{(2x+3)^2} \cdot 2 = \frac{-4}{(2x+3)^2} = -4\cdot(2x+3)^{-2}$

$f'''(x) = -4\cdot(-2)(2x+3)^{-3} \cdot 2 = \frac{-4(-2)\cdot 2}{(2x+3)^3} = \frac{16}{(2x+3)^3}$

$\vdots$

możemy zauważyć wzór na n-tą pochodną

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n (n-1)!}{(2x+3)^n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n} \cdot \frac{2^{n+1} (n-1)!}{(2x+3)^{n+1}}$$

$$\max_{x\in[-1,0]} |f(x) - L_n(x)| \le \max_{x\in[-1,0]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[-1,0]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots|$$

$$\max_{x\in[-1,0]} \frac{\left|(-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}\cdot n!}{(2x+3)^{n+1}}\right|}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[-1,0]} \underbrace{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}_{x\in[-1,0],\ x_i\in[-1,0]\ (i\in\{1\ldots\},\ \max(x-x_i)=1}$$

$$\max_{x\in[-1,0]} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$$

$$\max_{x\in[-1,0]} |f(x) - L_n(x)| \le \max_{x\in[-1,0]} \frac{\left|(-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}\, n!}{(2x+3)^{n+1}}\right|}{(n+1)!} =$$

$$= \max_{x\in[-1,0]} \frac{2^{n+1}\, n!}{(2x+3)^{n+1}(n+1)!} =$$

$$= \max_{x\in[-1,0]} \frac{2^{n+1}\, n!}{(2x+3)^{n+1}(n+1)} =$$

chcemy obliczyć max z tego wyrażenia, więc musimy obliczyć min z mianownika

$$= \frac{2^{n+1}\, n!}{1^{n+1}(n+1)} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$\max_{x\in[-1,0]} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{2^{n+1}}{n+1} \le 10^{-6}$$

L.15.24

$$\max_{x\in[0,1]} |g(x)-L_n(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} \frac{|g^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot p_{n+1}(x)$$

ZAKŁADAMY $[-1;1]$

$$p_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'''(x) = -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$f^{(IV)}(x) = \frac{1}{16}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

zatem $|f^{(n+1)}(x)| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

lub $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$|g(x)-L_n(x)| \leq \frac{\max|g^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\cdot\left|\frac{T_{n+1}(x)}{T_n}\right| \leq \frac{\max|g^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n} \leq 10^{-15}$$

$T_0(x)=1$
$T_1(x)=x$
$T_k(x)=2xT_{k-1}(x)-T_{k-2}(x)$

My mamy $f(t)=\sin\frac{t}{2}$ $t\in[0,1]$

$g(x)=\sin\left(\frac{2x-1}{2}\right)$ $x\in[-1;1]$

$=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$t\in[0,1]$
$2x-1\in[-1;1]$
$2x\in[0;2]$
$x\in[0;1]$

Ograniczamy sin i cos przez 1 (potrzebne na wykres)

$$x_{nk} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)+\frac{1}{2}$$

$\downarrow$ max 1

$$\frac{\frac{1}{2}^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n} \leq 10^{-15}$$

$$\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)!} \leq 10^{-15}$$

L.15.26

Naturalna funkcja sklejona - NIFS3

Konstrukcja NIFS3 opiera się na znajdowaniu prostych funkcji wielomianowych trzeciego stopnia interpolujących dane (x_k, y_k), $(0\leq k\leq n)$. Dla danych $n\in\mathbb{N}$, wartość $x_0<x_1<\ldots<x_n$ oraz $y_0, y_1 \ldots y_n \in\mathbb{R}$ wprowadzamy funkcję $s:[x_0,x_n]\to\mathbb{R}$ nazywaną NIFS3 spełniającą warunki:

- $s(x_k)=y_k$ dla $k=0,1,\ldots n$ wartość funkcji w x_k wynosi y_k
- funkcje s, s', s'' są ciągłe w $[x_0,x_n]$

.... / .... / ....

obcięcie funkcji s w przedziale $[x_{k-1},x_k]$

- funkcje s, s', s'' są ciągłe w $[x_0, x_n]$
- s w każdym przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ jest wielomianem należącym do Π_3
- funkcja jest "naturalna", czyli $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

Tw NIFS3 zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie.

NIFS3 - metoda przybliżająca nieznaną funkcję (mamy dane jedynie węzły funkcji uporządkowane rosnąco) wielomianami niższego stopnia.

lista 8 zad 1

x_k	-1	0	1
y_k	-1	2	-3

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in [-1; 0] \\ S_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & x \in [0; 1] \end{cases}$$

1) $S_1(-1) = -A + B - C + D = -1$
$S_1(0) = D = 2$

2) $S_2(0) = H = 2$
$S_2(1) = E + F + G + H = -3$

$D = H$

3) $S'(x) = \begin{cases} S_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ S_2'(x) = 3Ex^2 + 2Fx + G \end{cases}$

$S_1'(0) = S_2'(0)$ $\qquad$ $S_1'(0) = C$
$S_2'(0) = G$

$C = G$

4) $S''(x) = \begin{cases} S_1''(x) = 6Ax + 2B \\ S_2''(x) = 6Ex + 2F \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} S_1''(0) = 2B \\ S_2''(0) = 2F \end{matrix}$

$S_1''(0) = S_2''(0)$

$2B = 2F$

$D = 2$
$H = 2$

$$\begin{cases} D = H \\ C = G \\ B = F \\ B = 3A \\ F = -3E \\ -A + B - C + D = -1 \\ E + F + G + H = -3 \end{cases}$$

5) Zakładamy, że druga pochodna na krańcach przedziałów jest równa zero.

$S_1''(-1) = 0 \quad \longrightarrow -6A + 2B = 0 \longrightarrow 2B = 6A \longrightarrow B = 3A$

$S_2''(1) = 0 \quad \longrightarrow 6E + 2F = 0 \longrightarrow 2F = -6E \longrightarrow F = -3E$

$$\begin{cases} D=2 \\ H=2 \\ C=G \\ B=F \\ F=-3E \\ -A+B-C+D=-1 \\ E+F+G+H=-3 \end{cases}$$

$B=3A$

$\left.\begin{matrix} B=F \\ F=-3E \end{matrix}\right\}$ $B=-3E$

$3A=-3E$

$A=-E$

$$\begin{cases} A=-2 \\ C=-1 \\ E=2 \\ G=-1 \\ F=-6 \\ B=-6 \\ D=2 \\ H=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A+B-C+2=-1 \\ -A+B-C=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E+F+G+2=-3 \\ E+F+G=-5 \\ E-3E+G=-5 \\ -2E+G=-5 \end{cases}$$

$\rightarrow 2A-C=-3$

$$\begin{cases} -2E+G=-5 \\ 2A-C=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A+C=-5 \\ 2A-C=-3 \end{cases}$$ $\rightarrow C=-5-2A$

$$\begin{cases} 2A-(-5+2A)=-3 \\ 2A+2A=-8 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A-C=-3 \\ -4+3=C \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E=-A \\ E=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=G \\ G=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F=-3E \\ F=-3\cdot 2=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=F \\ B=-6 \end{cases}$$

$S_1(x) = -2x^3-6x^2-x+2 \quad x\in[-1;0]$

$S_2(x) = 2x^3-6x^2-1+2 \quad x\in[0;1]$

L15.5

UZASADNIJ, ŻE SUMA $x_0+x_1+x_2+\dots+x_n$ ZADANIE JEST DOBRZE UWARUNKOWANE.

$y=f(x)$ $\quad \dfrac{x\cdot f'(x)}{f(x)}$

Scanned with CamScanner

$S = S(x_0, x_1, \dots, x_n)$
wiele wskaźników uwarunkowania

$\frac{x_i \cdot S'_{x_i}}{S}$

$(x_0 + x_1 + \dots + x_n)'_{x_i}$ } pochodne po każdej zmiennej

PRZYKŁAD
$z = x^2 + y^3$
$c_x = \frac{x \cdot z'_x}{z} = \frac{x \cdot 2x}{x^2+y^3}$
$c_z = \frac{y \cdot 3y^2}{x^2+y^3}$

$S = \sum_{i=0}^{n} x_i$
$|c_i| = \left|\frac{x_i \cdot S'_{x_i}}{S}\right| = \left|\frac{x_i \cdot 1}{\sum_{i=0}^{n} x_i}\right| = \left|\frac{x_i}{\sum_{i=0}^{n} x_i}\right| \leq 1$

bo x_i jest mniejsze od sumy składającej się z niego i innych wyrazów nieujemnych

kiedy źle uwarunkowane gdy $\to \infty$
$|x_i| >> 0 \quad \sum x_i \approx 0$

$c = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$
$f(x,z) \to$ $c_x = \frac{x \cdot f_x(x,z)}{f(x,z)}$ $c_z = \frac{z \cdot f_z(x,z)}{f(x,z)}$

(*) TO SAMO ZADANIE, ALE SPRAWDZENIE CZY ALGORYTM NUMERYCZNIE POPRAWNY

$\varepsilon_0 = 0 \quad |\varepsilon_i| \leq 2^{-t} \quad |\varepsilon_0| \leq 2^{-t}$

$\tilde{S}((\dots(x_0(1+\varepsilon_0) + x_1)(1+\varepsilon_1) + x_2)(1+\varepsilon_2) + \dots + x_{n-1})(1-\varepsilon_{n-1}) + x_n)(1+\varepsilon_n)$
$= x_0 \prod_{i=0}^{n}(1+\varepsilon_i) + x_1 \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i) + \dots + x_n \prod_{i=n}^{n}(1+\varepsilon_i)$

$\prod_{i=k}^{n}(1+\varepsilon_i) = 1 + E_k \qquad |E_k| \leq (n-k+1) \cdot 2^{-t}$

$\tilde{S} = \sum_{i=0}^{n} x_i(1+E_i)$ ANP.

L15.11

$w(x) = \frac{a_1 x}{3!} - \frac{a_3 x^3}{5!} + \frac{a_5 x^5}{7!} - \frac{a_7 x^7}{8!} =$

podobne do schematu Hornera (Horner jest numerycznie poprawny)

$= \frac{x}{3!}\left(a_1 - \frac{a_3}{4 \cdot 5}x^2 + \frac{a_5}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}x^4 - \frac{a_7}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}x^6\right) =$

$= \frac{x}{3!}\left(a_1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}\left(a_3 + \frac{a_5}{6 \cdot 7}x^2 - \frac{a_7}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}x^4\right)\right) =$

$= \underbrace{\frac{x}{3!}\left(a_1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}\underbrace{\left(a_3 + \frac{x^2}{6 \cdot 7}\underbrace{\left(a_5 - \frac{a_7}{8 \cdot 9}x^2\right)}_{1}\right)}_{2}\right)}_{3}$

.... / ...... / ......

$$fl\left(a_5 - \frac{a_7}{8 \cdot 9} x^2\right) = \left(a_5 \ominus a_7 / 8 / 9 \cdot x \cdot x \cdot (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)\right)(1+\varepsilon_5)$$

$|\varepsilon_i| \leq 2^{-t}$ — liczba cyfr na zapamiętanie mantysy

$(i = 1, \ldots 5)$

Tw o KUMULACJI BŁĘDÓW

$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4) = (1+E)$$

pozwala stwierdzić, że co do modułu ten błąd względny $E \lesssim 4 \cdot 2^{-t}$

prawie równy

Algorytm jest numerycznie poprawny jeśli po zasymulowaniu jego działania w arytmetyce zmiennopozycyjnej to to co wyjdzie przy uwzględnieniu wszystkich operacji zmiennopozycyjnych i tego, że każda z nich potencjalnie wprowadza błąd, jesteśmy w stanie zinterpretować jako mało zaburzony wynik dokładny dla mało zaburzonych danych.

$$\left(a_5 - \frac{a_7 x^2}{8 \cdot 9}(1+E_1)\right)(1+\varepsilon_5)$$

$$\left(a_3 + \frac{x^2}{6 \cdot 7}(1+E_2)\left(a_5 - \frac{a_7 x^2}{8 \cdot 9}(1+E_1)\right)(1+\varepsilon_5)\right)(1+\varepsilon_{10})$$

$$\left(a_1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}(1+E_3)\left(a_3 + \frac{x^2}{6 \cdot 7}(1+E_2)\left(a_5 - \frac{a_7 x^2}{8 \cdot 9}(1+E_1)\right)(1+\varepsilon_5)\right)(1+\varepsilon_{10})\right)(1+\varepsilon_{15})$$

$E_3 \lesssim 3 \cdot 2^{-t}$ $E_2 \lesssim 3 \cdot 2^{-t}$

$$\left(\frac{x}{2 \cdot 3}(1+E_4)\left(a_1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}(1+E_3)\left(a_3 + \frac{x^2}{6 \cdot 7}(1+E_2)\left(a_5 - \frac{a_7 x^2}{8 \cdot 9}(1+E_1)\right)(1+\varepsilon_5)\right)(1+\varepsilon_{10})\right)(1+\varepsilon_{15})\right)(1+\ldots$$

zmiana na indeksów 1, 2, 3, 4

$E_4 \lesssim 2 \cdot 2^{-t}$

$$\left(\left(a_5 \prod_{i=2}^{4}(1+E_i) \prod_{i=1}^{4}(1+\varepsilon_i)\right) - \left(\frac{a_7 x^2}{8 \cdot 9} \prod_{i=1}^{4}(1+E_i) \cdot \prod_{i=1}^{4}(1+\varepsilon_i)\right)\right)$$

$$\frac{x}{2 \cdot 3} \prod_{i=4}^{4}(1+E_i)\, a_1 - \frac{x^3}{5!} \prod_{i=3}^{4}(1+E_i)\, a_3 + \frac{x^5}{7!} \prod_{i=2}^{4}(1+E_i)\, a_5 - \frac{a_7 x^7}{9!} \prod_{i=1}^{4}(1+E_i)$$

?

$$\prod_{i=3}^{4}(1+\varepsilon_i) \qquad \prod_{i=2}^{4}(1+\varepsilon_i) \qquad \prod_{i=1}^{4}(1+\varepsilon_i) \qquad \prod_{i=1}^{4}(1+\varepsilon_i)$$

Mało zaburzony wynik dla mało zaburzonych danych

II

$w(x) = a_1 \cdot x/3! - a_3 x^3/5! + a_5 x^5/7! - a_7 x^7/8! =$

$= \frac{x}{3!}(a_1 - \frac{a_3}{4\cdot5}x^2 + \frac{a_5}{4\cdot5\cdot6\cdot7} \ldots$ na poprzedniej stronie

$fl(a_5 - \frac{a_7}{8\cdot8}x^2) = (a_5 - a_7/8/8 \cdot x \cdot x \underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}_{(1+E_1)})(1+\varepsilon_5)$

$|\varepsilon_i| \le 2^{-t}$ $i = 1 \ldots 5$

$\downarrow$

$|E_1| \lesssim 4 \cdot 2^{-t}$ z tw. o kumulacji błędu

$fl(a_3 - \frac{x^2}{6\cdot7}(a_5 - \frac{a_7}{8\cdot8}x^2)) = (a_3 - x \cdot x/6/7 * (a_5 - a_7/8/8 \cdot x \cdot x(1+E_1))$
$\underbrace{(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_7)(1+\varepsilon_8)(1+\varepsilon_9)}_{(1+E_2)})(1+\varepsilon_{10})$

$|\varepsilon_i| \le 2^{-t}$ $(i = 6 \ldots 10)$

$\downarrow$

$|E_2| \lesssim 5 \cdot 2^{-t}$ tw. o kumulacji błędów

$fl(a_1 - \frac{x^2}{4\cdot5}(a_3 - \frac{x^2}{6\cdot7}(a_5 - \frac{a_7}{8\cdot8}x^2))) =$
$= (a_1 - x \cdot x/4 \cdot 5 \cdot (a_3 - x \cdot x/6/7 \cdot (a_5 - a_7/8/8 \cdot x \cdot x(1+E_1))$
$(1+E_2))\underbrace{(1+\varepsilon_{10})(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{12})(1+\varepsilon_{13})(1+\varepsilon_{14})}_{(1+E_3)}(1+\varepsilon_{15})$

$|\varepsilon_i| \le 2^{-t}$ $(i = 11 \ldots 15)$

$|E_3| \lesssim 5 \cdot 2^{-t}$ z tw. o kum. błędów

$fl(w(x)) = x/2/3 \cdot (a_1 - x \cdot x/4/5 \cdot (a_3 - x \cdot x/6/7 \cdot (a_5 - a_7/8/8 \cdot x \cdot x(1+E_1))$
$(1+E_2))(1+E_3))\underbrace{(1+\varepsilon_{15})(1+\varepsilon_{16})(1+\varepsilon_{17})(1+\varepsilon_{18})}_{(1+E_4)}$

$|\varepsilon_i| \lesssim 2^{-t}$

$|E_4| \lesssim 4 \cdot 2^{-t}$

$fl(w(x)) = x/2/3 \cdot (a_1 - x \cdot x/4/5(a_3 - x \cdot x/6/7(a_5 - a_7/8/9 \cdot x \cdot x(1+E_1))(1+E_2))$
$(1+E_3))(1+E_4)$

zwinąć

+

L15.32 lista 8 2016 Część 1

NKA $= \sum_{k,j} c_k B_k^n(t) B_k^n(t) B_j^2(t)$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(t)$$

$$q(t) = \sum_{i=0}^{2} b_i B_i^2(t)$$

$B_k^n(t) \cdot B_j^2(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \cdot \binom{2}{j} t^j (1-t)^{2-j} =$

$= \underbrace{\frac{\binom{n}{k}\binom{2}{j}}{\binom{n+2}{k+j}}}_{L} t^{k+j}(1-t)^{n+2-(k+j)} \binom{n+2}{k+j} = L_{k,j} B_{k+j}^{n+2}(t)$

$$p(t)q(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(t) \cdot \sum_{j=0}^{2} b_j B_j^2(t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{2} a_i b_j B_{i+j}^{n+2} \cdot \frac{\binom{n}{i}\binom{2}{j}}{\binom{n+2}{i+j}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+2} B_i^{n+2}(t) \sum_{j=0}^{2} a_{i-j} b_j \frac{\binom{n}{i-j}\binom{2}{j}}{\binom{n+2}{i}}$$

Przyjmujemy, że dla $i<0$ $a_i = 0$, $b_i = 0$

$i > n \Rightarrow a_i = 0$

$j > 2 \Rightarrow b_j = 0$

NKA $w(t) = \sum_{k,j} L_{k,j} c_k d_j B_{k+j}^{n+2}(t)$ doprowadzić do postaci $= \sum_{i=0}^{52} e_i \cdot B_i^{n+2}(t)$

Jeśli $g \in \Pi_{50}$ to trzeba w powyższym rozwiązaniu zmienić stałą 2 na 50.

L15.30 VER 1

Niech dane będą punkty kontrolne $W_0, W_1 \dots W_n$.

Krzywa Beziera:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} W_k B_k^n(t) \quad \text{dla } t \in [0,1]$$

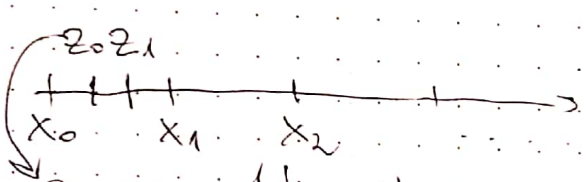
Zauważmy, że $P(t)$ (t dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych - czyli punktem na płaszczyźnie

L15.27

$x = [x_0, x_1 \dots x_{100}]$

$y = [y_0, y_1 \dots y_{100}]$

$x_0 < x_1 < \dots < x_{100}$



$z_0 = x_0 + \frac{1}{3}|x_1 - x_0|$

$z = [z_0, z_1 \dots z_m]$

Nie znamy $f(z_0), f(z_1) \dots f(z_m)$. Możemy je wyznaczyć przy pomocy Nspline3(x, y, z), który zwróci $z = [s_n(z_0), s_n(z_1), \dots s_n(z_m)]$, gdzie s_n to NIFS f.

Mając wektor z możemy stworzyć NIFS dla punktów $[x_0, z_0, z_1, x_1, z_2, z_3, x_2, z_4 \dots x_n]$, których wartości to $[y_0, s_n(z_0), s_n(z_1), y_1 \dots y_n]$.

Wyznaczamy NIFS3 (postać ogólna) dla każdego z przedziałów $[x_0, x_1], [x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n]$

.... / .... / ....

Niech g_1 odpowiednio części NIFS na przedziale $[x_0, x_1]$

Niech g_2 $[x_1, x_2]$

⋮

Niech g_n $[x_{n-1}, x_n]$

Dla każdego g_i wywołujemy solve3 dla jego współczynników (a,b,c,d, które wyliczamy z interpolacji na 4 punktach x_0, z_1, z_2, x_1, z której dostaniemy wielomian w postaci Newtona, i zamieniamy na postać ogólną)

otrzymana funkcja to wzór funkcji na danym przedziale

po użyciu jego współczynników jako argumentów funkcji solve3 zostaną zwrócone miejsca zerowe.

L.15.28

Początek zadania dokładnie taki sam jak w zadaniu 27 (bez wsadzenia współczynników (a,b,c,d) do funkcji solve3).

Scałkowanie funkcji w postaci ax^3+bx^2+cx+d da nam $\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + 0$

całka jest oznaczona dlatego po jej wyliczeniu dla każdego przedziału sumujemy je.

L.15.29

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1}\right) B_k(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} a_k B_k^{n+1}(t) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{n+1} a_{k-1} B_k^{n+1}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} a_k B_k^{n+1}(t) + \underbrace{\frac{n-n-1+1}{n+1} a_{n+1} B_{n+1}^{n+1}(t)}_{0} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+1} a_{k-1} B_k^{n+1}(t) + \underbrace{\frac{0}{n+1} a_{-1} B_0^{n+1}(t)}_{0} =$$

przesuwam indeks

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} a_k B_k^{n+1}(t) + \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+1} a_k B_{k+1}^{n+1}(t) =$$

.... / .... / ....

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} a_k \binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+1} a_k \binom{n+1}{k+1} t^{k+1} (1-t)^{n+1-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{n-k+1}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{(\cancel{n+1})!}{k!(\cancel{n+1-k})!} a_k t^k (1-t)^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{k+1}}{\cancel{n+1}} \frac{(\cancel{n+1})!}{(\cancel{k+1})!(n+1-(k+1))!} \cdot a_k \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k t^k (1-t)^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k t^{k+1} (1-t)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k t^k (1-t)^{n-k} \left((1-t)+t\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^n(t)$$

Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

Bez straty ogólności możemy założyć, że każdy dowolny wielomian Bernsteina jest tego samego stopnia jeśli porównujemy 2 krzywymi Beziera wykorzystujemy ten proces do transformacji krzywych.

L15.20
listek zad2

$$w(x) = z_0(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n)$$

Algorytm działa na zasadzie:

$$\begin{array}{r} 1x+1 \\ \cdot\; 2x+2 \\ \hline 2x+2 \\ 2x^2+2x \\ \hline 2x^2+4x+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 22 \\ \hline 22 \\ 22 \\ \hline 242 \end{array}$$

początkowo same zera

IDEA ALGORYTMU:

Bierzemy dwa wielomiany, wymnażamy je przez siebie, następnie wybieramy kolejny wielomian i przemnażamy go do dotychczasowo uzyskanego wyniku, aż do momentu wymnożenia wszystkich wielomianów.

funkcja wymnażająca dwa wielomiany

wiel_mnoz(wielomian1, wielomian2)

jeśli wielomian1 jest stopnia 0 i jego współczynnik jest równy zero to całość równa zero

jeśli wielomian2 jest stopnia 0 i jego współczynnik jest równy zero to całość równa zero

for(int i = stopień wielomianu wielomian1 ; i ≥ 0 ; i--){
for(int j = stopień wielomianu wielomian 2 ; i ≥ 0 ; i--){

współczynnik[i+j] += współczynnik wielomianu wielomian 1 [i] * współczynnik wielomianu wielomian2 [j];

na początku same zero

}

}

współczynnik[0]=1 współczynnik[1] = 3

przykład

$(x-3)(x-2)$

wielomian1 stopień 1

wielomian2 stopień 1

$\underset{0}{0}\ \underset{1}{0}\ \underset{2}{0}$

dla $i=1$ $j=1$

$\underset{0}{0}\ \underset{1}{0}\ \underset{2}{6}$

dla $i=1$ $j=0$

$\underset{0}{0}\ \underset{1}{3}\ \underset{2}{6}$

dla $i=0$ $j=1$

$\underset{0}{0}\ \underset{1}{2+3}\ \underset{2}{6} \longrightarrow \underset{0}{0}\ \underset{1}{5}\ \underset{2}{6}$

dla $i=0$ $j=0$

$\underset{0}{1}\ \underset{1}{5}\ \underset{2}{6} \longrightarrow x^2+5x+6$

$W(x) = z_0(x-z_1)(x-z_2) \cdots (x-z_n)$

↳ wielomian stopnia n + 1 miejsce dla wyrazu wolnego, więc tablica współczynniki jest wielkości $n+1$

Złożoność czasowa n^2

Zastosowanie: całkowanie numeryczne, numeryczne liczenie pochodnych

L15.25

$$x^n = c_0 + c_1(x-a_0) + c_2(x-a_0)(x-a_1) + \dots + c_n(x-a_0)\cdots(x-a_{n})$$

$f(x)$

Zauważmy, że x^n jest w postaci Newtona wielomianu.
W takim razie współczynniki c_k wyrażamy wzorem:

$$c_k = f[a_0, a_1, \dots, a_k] \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

W takim razie powyższy problem możemy rozwiązać za pomocą tablicy ilorazów różnicowych.
Aby je obliczyć potrzebujemy wartości $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)$, gdzie $f(a_0) = a_0^n$, $f(a_1) = a_1^n$, …, $f(a_n) = a_n^n$.

ALGORYTM

DANE: $A[n+1] = [a_0, a_1, \dots, a_n]$
$C[n+1] = [\ ,\ ,\ , \dots ,\ ]$

```
for (i=0; i≤n; i++)
    C[i] = A[i]
    for (j=0; j≤n-1; j++)
        C[i] *= A[i]
```

wypełnienie tablicy C wartościami

$$c = [f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)] \Leftrightarrow [a_0^n, a_1^n, \dots, a_n^n]$$

```
for (i=1; i≤n; i++)
    for (j=n; j≥i; j++)
        C[j] = (C[j] - C[j-1]) /
               (A[j] - A[j-i])
```

Tablica C zawiera teraz c_i.

Złożoność pamięciowa $O(n)$
Złożoność czasowa $O(n^2)$

L15.31

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) w_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} w_i =$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i} \qquad a = (1-t)$$

$$P_n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^{n-0} \cdot w_0 + \binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} \cdot w_1 + \binom{n}{2} t^2 (1-t)^{n-2} w_2 + \dots + \binom{n}{n-1} t^{n-1} (1-t)^{n-n+1} \cdot w_{n-1} + \binom{n}{n} t^n (1-t)^{n-n} \cdot w_n = w_0 \binom{n}{0} \cdot a^n + w_1 \binom{n}{1} t a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} t^n w_n =$$

$$= ((((w_0\binom{n}{0} \cdot a + w_1\binom{n}{1} \cdot t)a + w_2\binom{n}{2} t^2)a + \dots + w_{n-1}\binom{n}{n-1} t^{n-1}) \cdot a +$$

$$\cancel{= ((((w_0\binom{n}{0} a + w_1\binom{n}{1} t)a + w_2\binom{n}{2} t^2)a + \dots + w_{n-1}\binom{n}{n-1} t^{n-1}) \cdot a +}$$

$$+ \binom{n}{n} t^n \cdot w_n$$

```
p = w0
a = (1-t)
t0 = t
nt = n
for i=1 i≤n i++
    p = a·p + wi·t0·nt
    nt = nt·(n-i)/(i+1)
    t0 = t·t
```

L15.39 KWADRATURA lista 12 zad 2

$$Q_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

• ma rząd $\geq n+1 \Rightarrow$ jest interpolacyjna

Jeśli kwadratura ma rząd $\geq n+1$, czyli $\forall w\in\Pi_n\ Q_n(w) = \int_a^b w(x)dx$. Weźmy dowolny wielomian $w\in\Pi_n$ $w(x) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k(x)\, w(x_k)$. Weźmy dowolne λ_i.

Wiemy, że $\lambda_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Wtedy $\int_a^b \lambda_i(x)dx = Q_n(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} A_k\lambda_i(x_k) = A_i\lambda_i(x_i) = A_i$

Czyli $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b \lambda_k(x)dx =$
$= \int_a^b \sum_{k=0}^{n}\lambda_k(x) f(x_k)\,dx = \int_a^b L_n(f)dx$

• jest interpolacyjna $\Rightarrow$ ma rząd $\geq n+1$

Weźmy dowolny wielomian $f\in\Pi_n$.

$$Q_n(f) = \int_a^b L_n(f)dx \underset{\uparrow}{=} \int_a^b f(x)dx$$

bo $L_n(f)=f$ dla $f\in\Pi_n$

L15.33

$$C(t) = 2^{(At^2+2018)^{-1}} = 2^{\frac{1}{At^2+2018}}$$

$$c_k = 2^{\frac{1}{At_k^2+2018}}$$

$$\log_2 c_k = \frac{1}{At^2+2018}$$

$$\frac{1}{\log_2 c_k} = At^2+2018$$

$$At^2 = \underbrace{\frac{1}{\log_2 c_k} - 2018}_{f_k}$$

$$\min_{w(x)=At^2}\sqrt{\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\big(f_k(t_k) - \overset{At_k^2}{w(t_k)}\big)^2}_{E(a)\text{ - funkcja błędu}}}$$

$$E'(a)=0$$

$$E(a)=\sum_{k=0}^{n}\left(f_k(t_k)-At_k^2\right)^2$$

taka fun może mieć tylko minimum

$$E'(a) = 2\sum_{k=0}^{n}\left(f_k(t_k)-At_k^2\right)\cdot(-t_k^2)=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(f_k(t_k)\right)(-t_k^2) + \sum_{k=0}^{n} At_k^2\cdot t_k^2 = 0$$

$$A\sum_{k=0}^{n} t_k^4 = \sum_{k=0}^{n} f_k(t_k)t_k^2$$

$$A = \frac{\sum_{k=0}^{n} f_k(t_k)t_k^2}{\sum t_k^4}$$

L 15.34 $y(x) = \frac{ax^2-3}{x^2+1}$

$$\min_{w(x)} \sqrt{\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(y_k - y(x_k)\right)^2}}$$

$$E(a) = \sum_{k=0}^{n}\left(y_k - \frac{a x_k^2 - 3}{x_k^2+1}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(y_k - \frac{a x_k^2}{x_k^2+1} + \frac{3}{x_k^2+1}\right)^2$$

$$E'(a) = 2\sum_{k=0}^{n}\left(y_k - \frac{a x_k^2}{x_k^2+1} + \frac{3}{x_k^2+1}\right)\left(-\frac{x_k^2}{x_k^2+1}\right) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k\left(-\frac{x_k^2}{x_k^2+1}\right) + \sum_{k=0}^{n}\frac{a x_k^2}{x_k^2+1}\cdot\frac{x_k^2}{x_k^2+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{3}{x_k^2+1}\cdot\frac{x_k^2}{x_k^2+1} = 0$$

$$-\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{x_k^2}{x_k^2+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{a x_k^4}{(x_k^2+1)^2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{3x_k^2}{(x_k^2+1)^2} = 0$$

$$a\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^4}{(x_k^2+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} y_k\frac{x_k^2}{x_k^2+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{3x_k^2}{(x_k^2+1)^2} = 0$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{x_k^2}{x_k^2+1} + 3\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^2}{(x_k^2+1)^2}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^4}{(x_k^2+1)^2}} =$$

$$S_m := \sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^m}{(x_k^2+1)^2}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^2}{(x_k^2+1)^2} = 10$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^4}{(x_k^2+1)^2} = -3$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{x_k^2}{x_k^2+1} + 3\cdot 10}{-3} = \frac{\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{x_k^2}{x_k^2+1}}{-3} - 10$$

L 15.35 iloczyn skalarny $\langle f,g\rangle = \sum_{i=-2}^{2} f(i)g(i)$

A) wyznaczyć wielomiany ortogonalne P_0, P_1, P_2

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x - c_1$
$P_k(x) = (x-c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$
$k = 2, \dots m \quad m \ll \mathbb{N}$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Σ
x_i	-2	-1	0	1	2	0
x_i^2	4	1	0	1	4	10
x_i^3	-8	1	0	1	8	0

$$p_0(x)=1$$

$$c_k = \frac{\langle x p_{k-1}, p_{k-1}\rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle} \qquad d_k = \frac{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle}{\langle p_{k-2}, p_{k-2}\rangle}$$

$$p_1(x) = x - c_1 = x - \frac{\langle x p_0, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} = x - \frac{\sum_{i=0}^{4} x_k}{\sum_{i=0}^{4} 1} = x - \frac{0}{5} = x$$

ten zapis oznacza $\sum_{k=0}^{n} x_k p_{k-1}(x_k)\cdot p_{k-1}(x_k)$

$$p_2(x) = (x-c_2)p_1(x) - d_2 p_0(x) = \left(x - \frac{\langle x p_1, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle}\right)\cdot x - \frac{\langle p_1, p_1\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle}\cdot 1 =$$

$$= \left(x - \frac{\sum_{i=-2}^{2} x_i^3}{\sum_{i=-2}^{2} x_i^2}\right)x - \frac{\sum_{i=-2}^{2} x_i^2}{\sum_{i=-2}^{2} 1} = \left(x - \frac{0}{10}\right)x - \frac{10}{5} = x^2 - 2$$

B)

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	4	1	1	1	4

$$w_2^* = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) \qquad a_k = \frac{\langle f, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle}$$

$$a_0 = \frac{\langle f, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} = \frac{\sum_{i=0} f(x_k)p_0(x_k)}{\sum_{i=0} p_0(x_k)^2} = \frac{11}{5}$$

$$a_1 = \frac{\langle f, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} f(x_k)p_1(x_k)}{\sum_{i=0}^{4} p_1(x_k)^2} = \frac{\sum_{i=0}^{4} f(x_k)\cdot x_k}{\sum_{i=0}^{4} x_k^2} = \frac{0}{10}$$

$$a_2 = \frac{\langle f, p_2\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{4} f(x_k)\cdot(x_k^2-2)}{\sum_{i=0}^{n} (x_k^2-2)^2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$w_2^* = \frac{11}{5}\cdot 1 + 0\cdot(x) + \frac{6}{7}(x^2-2) = \frac{11}{5} + \frac{6}{7}(x^2-2)$$

L15.W1 KWADRATURY ZŁOŻONE

połowa wykładu 12

Malenie błędu kwadratur do zera, gdy liczba węzłów rośnie do nieskończoności można osiągnąć stosując np. kwadratury złożone.

Kwadratury złożone to kwadratury, które powstały przez sklejanie funkcji kawałkami wielomianowej interpolacji f.

$$Q(f) = \int_a^b w f(x)\,dx$$

Wzór Simpsona to sposób przybliżonego obliczania całek oznaczonych. Polega na interpolacji w 3 punktach $a, \frac{a+b}{2}, b$. Kwadratura ta wyznaczona jest wzorem.

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_n(f) + R_n^S$$

$$S_n(f) = \frac{h_n}{3}\left(2\sum_{k=0}^{m}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(t_{2k-1})\right)$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx \qquad x_i^{(k)} = -2 + i\cdot h_k \quad (i = 0,1,\dots,2^k)$$

$n = 2^k$

$h_k = \frac{3-(-2)}{2^k} = \frac{5}{2^k}$

Musimy przyjąć jakieś k. Im większe tym więcej przedziałów i lepsze przybliżenie. Dla ustalonego k wyliczamy $i = 0,1,\dots,2^k$. Dla każdego z 2^{k-1} przedziałów przybliżamy funkcję f na tym przedziale poprzez $g(x)$ - fun. kwadratową łatwą do całkowania. Skorzystamy z tablicy Romberga.

L15.42 METODA ROMBERGA

Niech $n = 2^k$ dla $k \in \mathbb{N}$

$h_k = \frac{b-a}{2^k}$ $\Big\}$ dla $i = 0,1,\dots,2^k$

$x_i^{(k)} = a + i h_k$

T_{0k} ← szukana przez nas wartość

1) wyliczamy $T_{00}, T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0k}$ ze złożonego wzoru trapezów dla $T_{2^0}, T_{2^1}, \dots, T_{2^k}$

→ złożony wzór trapezów $T_2 = h\sum_{i=0}^{2^i}{}'' f(t_i)$

$$T_{0k} = T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i^{(k)}) \text{ (złożone wzory trapezów)}$$

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1} \Big\} \text{ dla } k = 0,1,\dots \quad m = 1,2,\dots$$

$$\begin{matrix} T_{0,0} & & & \\ \downarrow & \searrow & & \\ T_{01} & \rightarrow & T_{1,0} & \\ \downarrow & \searrow & & \searrow \\ T_{02} & \rightarrow & T_{11} & \rightarrow T_{20} \end{matrix}$$

L15.44

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 8 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ A & 1 & \emptyset & \emptyset \\ B & C & 1 & \emptyset \\ D & E & F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & H & I & J \\ \emptyset & K & L & M \\ \emptyset & \emptyset & N & O \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & P \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 8 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ A & 1 & \emptyset & \emptyset \\ B & C & 1 & \emptyset \\ D & E & F & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} G & H & I & J \\ \emptyset & K & L & M \\ \emptyset & \emptyset & N & O \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & P \end{bmatrix}$$

$G\cdot 1 = 1$
$H\cdot 1 = 2$
$I\cdot 1 = -1$
$1\cdot J = 2$

$A\cdot G = -2$
$B\cdot G = 4$
$D\cdot G = -8$

$A\cdot H + 1\cdot K = -5$
$-4 + K = -5$
$K = -1$

$A\cdot I + 1\cdot L = 3$
$2 + L = 3$
$L = 1$

$H\cdot B + K\cdot C = 12$
$8 + -1\cdot C = 12$
$C = -4$

$AJ + M = -4$
$-4 + M = -4$
$M = 0$

$G = 1$, $H = 2$, $I = -1$, $J = 2$
$A = -2$, $B = 4$, $D = -8$

$K = -1$, $C = -4$, $O = 1$, $P = 8$
$N = -2$, $L = 1$, $M = 0$, $E = 8$, $F = -8$

$B\cdot I + C\cdot L + N = -10$
$-4 + (-4) + N = -10$
$N = -2$

$B\cdot J + C\cdot M + O = 9$
$8 + 0 = 9$
$O = 1$

$DJ + EM + FO + P = -16$
$-16 - 8 + P = -16$
$P = 8$

$D\cdot H + E\cdot K = -24$
$-16 - E = -24$
$E = 8$

$DI + EL + NF = 32$
$8 + 8 - 2F = 32$
$2F = -16$
$F = -8$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot U$$

$$Ax = b$$

$$(LU)x = b$$

$$L\underbrace{(Ux)}_{y} = b \longrightarrow \begin{cases} L \cdot y = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \overset{b}{\begin{bmatrix} 17 \\ -33 \\ 70 \\ -112 \end{bmatrix}}$$

$$y_1 = 17$$

$$-2y_1 + y_2 = -30 \qquad y_2 = 1$$

$$4y_1 - 4y_2 + y_3 = 70 \qquad y_3 = 6$$

$$-8y_1 + 8y_2 - 8y_3 + y_4 = -112$$

$$-136 + 8 - 48 + y_4 = -112$$

$$y_4 = 64$$

$$y = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 6 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$U \cdot x = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 6 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$8x_4 = 64 \qquad x_4 = 8$$

$$-2x_3 + x_4 = 6 \qquad x_3 = 1$$

$$-1x_2 + x_3 = 1 \qquad x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 17$$

$$x_1 = 17 + 1 - 16 = 2$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

4.15.38

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - c_1 = x - \frac{\langle x P_0, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = x - \frac{0}{8} = x$$

$$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 P_0(x) = \left(x - \frac{\langle x P_1, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle}\right) P_1(x) -$$

$$- \frac{\langle P_1, P_1 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0(x) = \left(x - \frac{\sum x_i^3}{\sum x_i^2}\right) x - \frac{\sum x_i^2}{8} \cdot 1 = x^2 - 7{,}5$$

$$a_0 = \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{\sum_{i=0}^{n=7} f(x_k) P_0(x_k)}{\sum_{i=0}^{n=7} P_0(x_k)^2} = \frac{0}{8} = 0$$

$$a_1 = \frac{\langle f, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{\sum f(x_k) P_1(x_k)}{\sum P_1(x_k) P_1(x_k)} = \frac{\sum f(x_k) x_k}{\sum x_k^2} = \frac{\overset{44{,}4}{(22 + 15 + 6{,}4 + 1) \cdot 2}}{\underset{30}{(16 + 9 + 4 + 1) \cdot 2}} = \frac{88{,}8}{60} = \frac{222}{15}$$

.... / .... / ....

$$a_2 = \frac{<f, P_2>}{<P_2, P_2>} = \frac{\sum f(x_k)(x^2 - 7{,}5)}{\sum (x^2 - 7{,}5)^2} = \frac{0}{} = 0$$

$16 - 7{,}5 - 8{,}5 \cdot (-5{,}5) =$

$8{,}5 \cdot 5{,}5 -$

$$w_2^* = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \qquad w_2^* = \frac{222}{15} x$$

L.15.43 KWADRATURY ZŁOŻONE

Przewaga kwadratur złożonych nad zwykłymi kwadraturami:

- ze względów numerycznych nie zaleca się stosowania kwadratur Newtona-Cotesa dla $n>7$
- w przypadku Newtona-Cotesa może wystąpić efekt Rungego i duży błąd interpolacji

Gdy mamy już wyznaczony wzór trapezów to za pomocą tablicy Romberga możemy poprawić zbieżność metody - dokładność aproksymacji

Pod względem rzędu kwadratury Newtona-Cotesa są bardzo słabej jakości (bo jesteśmy przy dolnej granicy oszacowania rzędu kwadratury interpolacyjnej).
$\begin{cases} n+1 \text{ dla } n \text{ nieparzystych} \\ n+2 \text{ dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

CZĘŚĆ 1

L15.37

Ciąg wielomianów $P_0, P_1 \dots P_n$ $(n \le N)$ nazywamy ciągiem wielomianów ortogonalnych względem utworzonego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$, jeśli

$$\begin{cases} P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1} \quad (\Pi_{-1} = \emptyset) & \text{k-ty element jest dokładnie k-tego stopnia} \\ (P_k, P_l)_N = 0 \quad (k \ne l) \\ (P_k, P_k)_N > 0 \end{cases}$$

Najlepiej wyznaczyć wielomiany z użyciem związku rekurencyjnego:

$$\begin{cases} P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \dots, m) \end{cases}$$

$$c_k = \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \quad (1 \le k \le m)$$

$$d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N} \quad (2 \le k \le m)$$

Wtedy elementy możemy wyznaczyć jeden po drugim. $P_0\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \dots$

Koszt użycia zw. rek: liniowy względem n.

L15.37 Kuliskiego skrypt 5.3.4 CZĘŚĆ 1

Jak efektywnie wyznaczać taki wielomian? z rekurencyjnego związku ($O(n)$)

Zastosowanie:

Dzięki nim można wyprowadzić jawny wzór na współczynniki wielomianu t.że jest rozwiązaniem wielomianowej aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym.

L15.40/ lista 12 zad 3

L15.46 1) ROZKŁADAMY MACIERZ A NA MACIERZ L i U

$O(n^3)$

2) ZNAJDUJEMY MACIERZE ODWROTNE L^{-1} i U^{-1}

3) $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$ } WYSTARCZY WYMNOŻYĆ OBIE MACIERZE

Złożoność $O(n^3)$

L15.30 VER 2

Krzywa Béziera: $P(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) \cdot W_k$

Zauważmy, że $B_k^n(t)$ to liczba rzeczywista (dla ustalonego k).

$$\underbrace{\underbrace{\binom{n}{k}}_{\in R}\underbrace{t^k}_{\in R}\underbrace{(1-t)^{n-t}}_{\in R}}_{\in R} = B_k^n(t), \quad t \in [0,1]$$

W_k to natomiast punkty na płaszczyźnie. Z wykładu wiemy, że $\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) \equiv 1$ zatem z def. $P(t)$ to kombinacja barycentryczna punktów kontrolnych $W_0, W_1 \ldots W_k \in R^2$, a zatem punkt na płaszczyźnie

L15.32 CZĘŚĆ 2

$w(t) = \sum_{kj} \underbrace{c_k d_j \cdot d_{kj}}_{\text{szukane współczynniki}} \cdot B_{k+j}^{n+2}(t)$ chcemy doprowadzić do postaci $\sum_{i=0}^{52} e_i \cdot B_i^{n+2}(t)$

......../......./.......

Scanned with CamScanner

1) Bierzemy $p(t)$, $q(t)$ i wywołujemy na nich procedurę BezierCoeffs (otrzymujemy współczynniki c_k - od $p(t)$, d_k - od $q(t)$)

2) Wyznaczamy stałą $\alpha_{k,j} = \dfrac{\binom{n}{k}\binom{2}{j}}{\binom{n+2}{k+j}}$

3) Szukane współczynniki wielomianu $w(t)$ to $c_k d_j \alpha_{k,j}$

Jeśli przyjmiemy, że $g(t) \in \Pi_{50}$ to liczymy współczynniki jak wyżej tylko musimy (analogicznie) wyznaczyć odpowiednią stałą $\alpha_{k,j}$

L15.37 część 2

W aproksymacji śr. □ używając iloczynu skalarnego i ciągu wielomianów ortogonalnych wzg. tego iloczynu, możemy podać jawny wzór na w_m^* (czyli na wielomian przybliżający funkcję f)

$w_m^*(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$ ← najlepiej dopasowany do danych

gdzie $P_0, P_1 \ldots P_m$ - wielomiany ortogonalne wzgl. iloczynu skalarnego postaci

$$(g,h)_N = \sum_{k=0}^{N} g(x_k)h(x_k),$$

tzn.

$$(p_i, p_j)_N = 0 \text{ dla } i \neq j \text{ oraz } (p_i, p_i)_N > 0$$

oraz $a_k = \dfrac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N}$ $(k = 0, 1, \ldots m)$

L15.47

- Znaleźć rozkład LU macierzy A
- znaleźć macierze L^{-1} i U^{-1}
- wyznaczyć $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$
- wyliczyć $x = A^{-1} \cdot B$

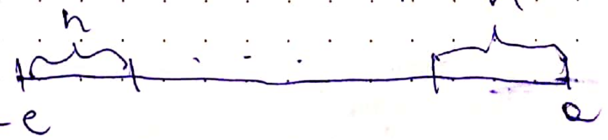
Koszt czasowy → $O(n^3)$
Koszt pamięciowy → $O(n^2)$

L15.38

$x_0 = -a$

$x_{k+1} - x_k = -a + \dfrac{2a(k+1)}{N} + a - \dfrac{2ak}{N} = \dfrac{2ak + 2a - 2ak}{N} = \dfrac{2a}{N}$ h

$x_N = -2 + \dfrac{2aN}{N} = 2$



........./........./.........

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = (x - \beta_1) p_0(x) \qquad \beta_1 = \dfrac{\langle x p_0, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle}$

zauważmy, że jeśli $\beta_1 = 0$, to $p_1(x)$ jest f. nieparzystą

$\langle x p_0, p_0\rangle = \langle x, 1\rangle = \sum_{k=0}^{N} x_k \cdot 1 = 0$ ← bo węzły są równoodległe od $-a$ do a, więc wynikiem sumy tych el. to 0

ZAŁ. p_{k-1}, p_{k-2} spełniają powyższe warunki

$p_k(x) = (x - \beta_k) p_{k-1}(x) - \gamma_k p_{k-2}(x)$

chcemy, żeby $\beta_k = 0$

$\beta_k = \dfrac{\langle x p_{k-1}, p_{k-1}\rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle}$

$\langle x p_{k-1}, p_{k-1}\rangle = \sum_{k=0}^{N} x_k \cdot p_{k-1}^2(x_k) = \sum_{k=0}^{N} g(x_k)$

$g = x p_{k-1}^2$ — pomyłka... parzyste; nieparzyste

L15.48

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & & c_1 \\ & a_2 & & & c_2 \\ & & a_3 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ b_1 & b_2 & \cdots & & a_n \end{bmatrix}$$

Znajdźmy rozkład A_n na L_n i U_n

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & & & c_1 \\ & a_2 & & c_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{n-1} \\ & & & u_n \end{bmatrix}$$

MUSIMY WYZNACZYĆ WARTOŚCI $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$ i u_n

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ l_1 & l_2 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 & & & & c_1 \\ & a_2 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

I) Zauważmy, że elementy na przekątnej nie ulegają zmianie $(a_1, \dots, a_{n-1})$

II) Podobnie $(c_1, \dots, c_{n-1})$ zostają mnożone przez 1, więc się nie zmieniają

III) Elementy $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ i a_n wyznaczamy w następujący sposób

$l_1 \cdot a_1 = b_1 \rightarrow l_1 = \dfrac{b_1}{a_1}$

$l_2 \cdot a_2 = b_2 \rightarrow l_2 = \dfrac{b_2}{a_2}$

$\vdots$

$l_{n-1} \cdot a_{n-1} = b_{n-1} \rightarrow l_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$

.... / .... / ....

$$a_1 = l_1 c_1 + l_2 c_2 + \dots l_{n-1} c_{n-1} + u_n$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} l_i c_i + u_n \;\rightarrow\; u_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} l_i c_i$$

Udało nam się wyznaczyć wzory na $l_1 \dots l_{n-1}, u_n$

Aby więc rozłożyć macierz A_n na L i U, tworzymy macierze w takiej postaci i uzupełniamy jej komórki zgodnie z wyznaczonym wzorami.