LISTA 9

ZAD 3 POKAŻ, ŻE GRAF G JEST DRZEWEM WTEDY I TYLKO WTEDY GDY DLA DOWOLNEJ PARY WIERZCHOŁKÓW $u, v \in G$ w G ISTNIEJE DOKŁADNIE JEDNA ŚCIEŻKA JE ŁĄCZĄCE.

Drzewo to acykliczny graf spójny.

Gdyby istniało więcej niż 1 ścieżka z wierzchołka u do v to powstał by cykl, co spowodowałoby, że graf przestałby być acykliczny, a co za tym idzie przestałby być drzewem.

Gdyby zaś nie istniało żadna ścieżka z wierzchołka u do v to graf nie byłby spójny, a co za tym idzie przestałby być drzewem

Gdy z punktu u do punktu v da się poprowadzić 1 ścieżkę to nie łamie to żadnego warunku aby graf był drzewem.

ZAD 8 UDOWODNIJ, ŻE W GRAFIE SPÓJNYM KAŻDE DWIE NAJDŁUŻSZE ŚCIEŻKI MAJĄ WSPÓLNY WIERZCHOŁEK.

Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie ścieżki o długości n w grafie G.

$S1 = \langle v_0, v_1 \dots v_n \rangle$

$S2 = \langle u_0, u_1 \dots u_n \rangle$

Jeżeli G jest grafem spójnym to dla jakichś $i, j \in [1, n]$ istnieje ścieżka S' łącząca v_i i u_j, że S' nie ma wspólnych wierzchołków z $S1 \cup S2$ innych niż v_i i u_j

Czyli $S' = \langle v_i, \dots\dots u_j \rangle$

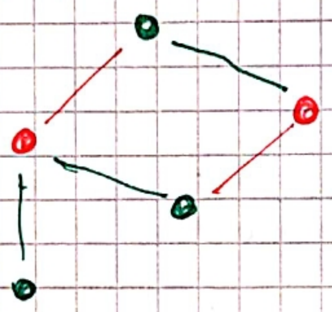
Możemy zauważyć że w takim razie istnieje również ścieżka w postaci $P = \langle v_0 \dots v_i \dots u_j \dots u_n \rangle$

Oczywiście P ma długość conajmniej $n+1$

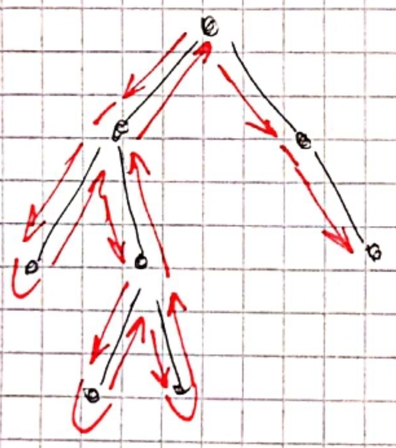
Dwie dowolne ścieżki o długości n muszą więc przecinać się z conajmniej jednym wierzchołkiem.

ZAD 1 PRZEDSTAW ALGORYTM, SŁUŻĄCY DO SPRAWDZANIA, CZY DANY GRAF JEST DWUDZIELNY, KORZYSTAJĄCY Z PRZEGLĄDANIA GRAFU METODĄ W GŁĄB. ZŁOŻONOŚĆ TWOJEGO ALGORYTMU POWINNA BYĆ $O(n+m)$

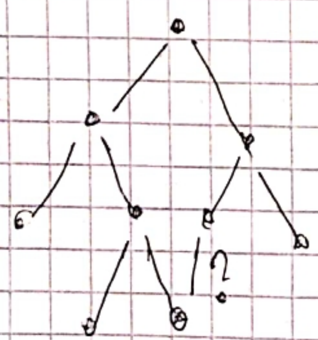
Graf $G=(V,E)$ jest dwudzielny wtw, gdy istnieje podział zbioru wierzchołków V na zbiory A i B taki, że $\forall e \in E$ jeden koniec e należy do A, a drugi do B, np.



PRZESZUKIWANIE W GŁĄB



PROBLEM POJAWIA SIĘ GDY



Zrobimy więc listę która przechowywać będzie informacje o

byliśmy już w tym wierzchołku.
będzie do przetrzymywało informacje
jakiego koloru jest wierzchołek.

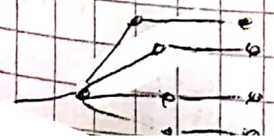
$$odwiedzone = [\underbrace{0, -1, -1, \dots -1}_{\text{elementów tyle ile wierzchołków w grafie}}]$$

```
def czy_dwudzielny(v, kolor, odwiedzone):
    if odwiedzone[v] != (-1):
        if odwiedzone[v] != kolor:
            return false
            exit(0)
        else return true
    odwiedzone[v] = kolor
    for dziecko in v.dzieci:
        if kolor == 1
            czy_dwudzielny(dziecko, 0, odwiedzone)
        else czy_dwudzielny(dziecko, 1, odwiedzone)
```

ZAD 5 NIECH $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ BĘDZIE CIĄGIEM LICZB NATURALNYCH WIĘKSZYCH OD ZERA. WYKAŻ, ŻE d JEST CIĄGIEM STOPNI WIERZCHOŁKÓW PEWNEGO DRZEWA O N WIERZCHOŁKACH WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.
Uwaga! W zadaniu tym trzeba pokazać implikacje w obie strony.

POKAZAĆ, ŻE JEŚLI MAMY CIĄG LICZB DODATNICH $(d_1, d_2, \dots d_n)$ O SUMIE $2(n-1)$ TO ISTNIEJE DRZEWO O DOKŁADNIE TAKICH STOPNIACH.
OCZYWIŚCIE STWIERDZENIE, ŻE JEŚLI STOPNIE WIERZCHOŁKÓW JAKIEGOŚ GRAFU TO DODATNIE $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ O SUMIE $2(n-1)$, TO GRAF TEN JEST DRZEWEM NIE JEST PRAWDZIWE. MOŻNA POKAZAĆ WIELE KONTRPRZYKŁADÓW.

Przykład $n=10$



$d=(1,5,2,2,2,2,1,1,1,1)$

$\sum_{i=1}^{10} d_i = 18$ $2(n-1)=18$

1° ZAŁÓŻMY, ŻE d JEST CIĄGIEM STOPNI WIERZCHOŁKÓW PEWNEGO DRZEWA O n WIERZCHOŁKACH.

$n > 0$ POKAŻEMY, ŻE WÓWCZAS $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

Suma stopni wierzchołków $\to$ $deg(v_1) + deg(v_2) + \dots deg(v_n) =$
$= \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2m$ $\to$ m - krawędź
$\to$ na mocy lematu o uściskach dłoni

a wiemy z definicji drzewa, które mówi, że drzewo jest acyklicznym grafem spójnym, więc $m = n-1$

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2m = 2(n-1)$$

2° ZAŁÓŻMY, ŻE $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. POKAŻMY TERAZ, ŻE d

$n > 0$ JEST CIĄGIEM STOPNI WIERZCHOŁKÓW PEWNEGO DRZEWA O n WIERZCHOŁKACH. (ISTNIEJE DRZEWO O DOKŁADNIE TAKICH STOPNIACH)

PODSTAWA INDUKCYJNA:
dla $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} d_i = d_1 = 2(1-1) = 0$

ZAŁOŻENIE INDUKCYJNE:
Załóżmy, że dla n, dla którego zachodzi $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ istnieje drzewo takie, że $d_1, d_2 \dots d_n$ tworzy ciąg stopni wierzchołków tego drzewa.

Pokażmy, że jeśli $\sum_{i=1}^{n+1} d_i' = 2((n+1)-1)$ to $d_1', d_2' \dots d_n', d_{n+1}'$ jest ciągiem stopni wierzchołków drzewa.

Zauważmy, że jeśli do drzewa dołożymy nowy wierzchołek to dodany wierzchołek będzie stopnia 1, a wierzchołek, do którego dodamy nowy wierzchołek zwiększy ten stopień o jeden. Czyli $d_{n+1} = 1$, a jakiś wierzchołek k $(1 \le k \le n)$ $d_k = d_k + 1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} d_i' = 2n \qquad \sum_{i=1}^{n+1} d_i' = \sum_{i=1}^{n} d_i + 1 + 1 = \sum_{i=1}^{n} d_i + 2$$

Dodatkowo załóżmy, że nowy wierzchołek zostanie doklejony do liścia (każde drzewo ma przynajmniej 1 liść). $d_k = 1$ $d_k + 1 = 2$.

$$\langle d_i' \rangle = \langle d_1, d_2 \dots \underbrace{d_k+1}_{2}, \dots d_n, 1 \rangle$$

Jeżeli zamienimy miejscami

to $\langle d_i' \rangle = \langle d_1, d_2, \dots 1, \dots d_n, 2 \rangle$, a to możemy rozpisać jako $\sum_{i=1}^{n+1} d_i' = \sum_{i=1}^{n} d_i + 2$

Udowodniliśmy więc, że $\langle d_i \rangle$ jest ciągiem spełniającym $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa.

ZAD. 2 NIECH t_i OZNACZA LICZBĘ WIERZCHOŁKÓW STOPNIA i W DRZEWIE. WYPROWADŹ DOKŁADNY WZÓR NA t_1, LICZBĘ LIŚCI W DOWOLNYM DRZEWIE. DLACZEGO TA LICZBA NIE ZALEŻY OD t_2?

• Z charakterystyki drzewa podanej na wykładzie wiemy, że drzewo jest grafem spójnym i ma $n-1$ wierzchołków możemy więc zapisać:

$m = n-1$ — liczba wierzchołków

m — liczba krawędzi

Możemy zapisać to jako $m = \sum_{i=1}^{n-1} t_i - 1$

ilość wierzchołków o stopniu i

• Wykorzystując lemat o uściskach dłoni

Suma stopni wierzchołków jest równa ilości krawędzi * 2

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$$

bo każdą krawędź liczymy dwa razy

$$\|$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot t_i = 2m$$

to jest nic innego jak ilość wierzchołków danego stopnia razy stopień (czyli ilość krawędzi wychodzących z tego wierzchołka).

PORÓWNAJMY OBIE KROPKI

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i - 1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot t_i}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i - 1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot t_i$$

$$t_1 + \sum_{i=2}^{n-1} t_i - 1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot t_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1} i\cdot t_i$$

$$t_1 - \frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=2}^{n-1} i\cdot t_i - \sum_{i=2}^{n-1} t_i + 1$$

$$\frac{1}{2}t_1 = \sum_{i=2}^{n-1} t_i\left(\frac{1}{2}i - 1\right) + 1 \quad \Big|\cdot 2$$

$$t_1 = \underbrace{\sum_{i=2}^{n-1} t_i(i-2)} + 2$$

Zauważmy że dla $t_2(2-2) = 0$

możemy więc wzór na t_1 zapisać w ten sposób

$$t_1 = \underbrace{\sum_{i=3}^{n-1} t_i(i-2) + 2}$$

LICZBA TA NIE ZALEŻY WIĘC OD t_2

ZAD6 NIECH Q_k OZNACZA GRAF K-WYMIAROWEJ KOSTKI TZN. ZBIÓR WIERZCHOŁKÓW TEGO GRAFU TWORZĄ WSZYSTKIE K-ELEMENTOWE CIĄGI ZER I JEDYNEK I DWA WIERZCHOŁKI SĄ SĄSIEDNIE WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ODPOWIADAJĄCE IM CIĄGI RÓŻNIĄ SIĘ DOKŁADNIE JEDNĄ WSPÓŁRZĘDNĄ. WYKAŻ, ŻE JEST TO GRAF DWUDZIELNY

W grafie Q_k dwa wierzchołki są sąsiednie, gdy różnią się dokładnie jedną współrzędną tzn. gdy na pewnym miejscu znajduje się 0 w jednym wierzchołku to w sąsiadującym wierzchołku zamiast jakiegoś zero występuje 1
W takim razie sąsiednie wierzchołki mają różną parzystość wystąpień 1.

W takim razie możemy podzielić dwa podzbiory

A – zbiór wierzchołków, w których 1 występuje parzysta ilość razy

B – zbiór wierzchołków, w których 1 występuje niepowiętą ilość nowy.

Skoro dwa sąsiednie wierzchołki mają różną parzystość wystąpień 1, to nie mogą należeć do tego samego podzbioru, zatem graf jest dwudzielny.

ZAD4. NIECH $d(u,v)$ OZNACZA ODLEGŁOŚĆ WIERZCHOŁKÓW u i v, CZYLI DŁUGOŚĆ NAJKRÓTSZEJ ŚCIEŻKI ŁĄCZĄCEJ u i v. DLA KAŻDEGO WIERZCHOŁKA v GRAFU G DEFINIUJEMY $r(v) = \max\{d(u,v) : u \in V(G)\}$. WIERZCHOŁEK w, DLA KTÓREGO $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ NAZYWA SIĘ WIERZCHOŁKIEM CENTRALNYM GRAFU G, A LICZBA $r(G) = r(w)$ – PROMIENIEM GRAFU G.

A) (JORDAN) WYKAŻ, ŻE ZBIÓR WIERZCHOŁKÓW CENTRALNYCH DRZEWA SKŁADA SIĘ Z JEDNEGO WIERZCHOŁKA ALBO Z PARY WIERZCHOŁKÓW SĄSIEDNICH.

$d(u,v)$ – długość najkrótszej ścieżki łączącej wierzchołek u i v

$r(v) = \max\{d(u,v) : u \in V(G)\}$

$r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$

Zauważmy, że usunięcie wszystkich liści w drzewie tworzy mniejsze poddrzewo, które posiada to samo centrum.

Wiemy, że centrum