LISTA 6

ZAD 1 Uzasadnij, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

$$\text{HORNER}\begin{cases} W_n = a_n \\ W_k = W_{k+1}\cdot x + a_k & (k = n-1, n-2 \dots 0) \end{cases}$$

Schemat Hornera to algorytm, który pozwala na dzielenie wielomianów przez dwumian $(x-a)$

$$W_0 = x(\dots \underbrace{x(\underbrace{x\cdot \underbrace{a_n}_{W_n} + a_{n-1})}_{W_{n-1}} + a_{n-2})}_{W_{n-2}} + \dots + a_2) + a_1) + a_0$$

$$W_0 = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

β - dodawania
α - mnożenia
$\beta_n = 0$

UWZGLĘDNIJMY BŁĘDY

$$a_0(1+\beta_0) + a_1 x(1+\alpha_1)(1+\beta_0)(1+\beta_1) + \dots + a_n x^n (1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)(1+\beta_0)\dots(1+\beta_n) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)\right) \to X$$

Niech $(1+\beta)$ to maksymalny błąd $(1+\beta)$
Niech $(1+\alpha)$ to maksymalny błąd $(1+\alpha_i)$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta) \prod_{j=1}^{i}(1+\alpha) = Y$$

wiemy, że $X \leq Y$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta)^i (1+\alpha)^i =$$

Przyjmijmy, że $(1+\varepsilon) = (1+\alpha)(1+\beta)$, więc:

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i [x \cdot (1+\varepsilon)]^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}^i a_i$$

, a to jest dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych, więc algorytm jest numerycznie poprawny.

ZAD 3. SFORMUŁUJ I UDOWODNIJ ALG. CLENSHEWA OBLICZANIA WARTOŚCI WIELOMIANU

$$w(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_n T_n(x)$$

W PUNKCIE x, GDZIE $c_0, c_1, \ldots, c_n$ SĄ DANYMI STAŁYMI, A T_n OZNACZA N-TY WIELOMIANY CZEBYSZEWA.

$$= \sum_{k=0}^{n} {}' c_k T_k(x) \longrightarrow \text{pierwszy element} \cdot \frac{1}{2}$$

Def rekurencyjna wielom. Czebyszewa

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3 \ldots) \end{cases}$$

Algorytm Clenshewa

$$\begin{cases} B_{n+2} = B_{n+1} = 0 \\ B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \ldots, 0) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c_k = B_k - 2 \cdot x B_{k+1} + B_{k+2}$$

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{n}{}' 2x B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n-1}{}' 2x B_{k+1} T_k + \underbrace{2x B_{n+1} T_n}_{0,\ \text{bo } B_{n+2} = 0} \Big) +$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k T_k(x) -$$

$$- \underbrace{2x \cdot \frac{1}{2} B_1 T_0}_{x \cdot B_1 T_0} - 2x \sum_{k=1}^{n-1}{}' B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n-2}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 \underbrace{T_0(x)}_{1} + B_1 \underbrace{T_1(x)}_{x} + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+2}(x) -$$

$$- x B_1 \underbrace{T_0(x)}_{1} - 2x \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - \frac{1}{2} B_2 \underbrace{T_0(x)}_{1}$$

$$= \frac{1}{2} B_0 + x \cdot B_1 + \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+2}(x) - x B_1 - 2x \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_{k+1}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - \frac{1}{2} B_2 =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2 + \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{\big(B_{k+2} T_{k+2}(x) - 2x B_{k+2} T_{k+1}(x) + B_{k+2} T_k(x) \big)}_{} =$$

(to będzie równo 0, bo wiemy że $T_{k+2}(x) = 2x T_{k+1}(x) - T_k(x)$)

$$B_{k+2}(2x T_{k+1}(x) - T_k(x)) - 2x B_{k+2} T_{k+1}(x) + B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= B_{k+2} 2x T_{k+1}(x) - B_{k+2} T_k(x) - B_{k+2} 2x T_{k+1}(x) + B_{k+2} T_k(x) = 0$$

$$= \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2$$

Z WYKŁADU

Ze względów numerycznych zaleca się obliczanie wartości wielomianu podanego w post. Czebyszewa

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_k T_k(x)$$

przy pomocy następującego algorytmu Clenshawa:

$$\begin{cases} B_{n+2} = B_{n+1} = 0 \\ B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + b_k \quad (k = n, n-1, \dots, 0) \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

wtedy $w(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}$

$\sum_{k=0}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) + \underbrace{B_{n+1} T_k(x)}_{0} + \underbrace{B_{n+2} T_k(x)}_{0, \text{ bo } B_{n+2} = 0} =$

ZAD 4 Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ OZNACZA n-ty WIELOMIAN CZEBYSZEWA.

A) PODAJ POSTAĆ POTĘGOWĄ WIELOMIANU T_6

B) JAKIMI WZORAMI WYRAŻAJĄ SIĘ WSPÓŁCZYNNIKI WIELOMIANU T_n PRZY x^n i x^{n-1}?

C) KORZYSTAJĄC Z FAKTU, ŻE DLA DOWOLNEGO X Z PRZEDZIAŁU $[-1, 1]$ n-ty $(n \geq 0)$ WIELOMIAN CZEBYSZEWA WYRAŻA SIĘ WZOREM $T_n(X) = \cos(n \arccos x)$:

i. SPRAWDŹ, ŻE $|T_n(x)| \leq 1$ $(-1 \leq x \leq 1; n \geq 0)$;

ii. WYZNACZ WSZYSTKIE PUNKTY EKSTREMALNE n-TEGO WIELOMIANU CZEBYSZEWA, TJ. ROZWIĄZANIA RÓWNANIA $|T_n(X)| = 1$;

iii. UDOWODNIJ, ŻE WIELOMIAN CZEBYSZEWA T_{n+1} $(n \geq 0)$ MA $n+1$ ZER RZECZYWISTYCH, POJEDYNCZYCH, LEŻĄCYCH W PRZEDZIALE $(-1; 1)$.

A) $T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x \cdot T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x \cdot T_2 - T_1 = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x \cdot T_3 - T_2 = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) =$
$= 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2x \cdot T_4 - T_3 = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) =$
$= 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(X) = 2x \cdot T_5 - T_4 = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) =$
$= 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 =$
$= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

B) TEZA: WSPÓŁCZYNNIKI PRZY x^n, x^{n-1} wynoszą odpowiednio 2^{n-1} i 0 dla $n \geq 1$

Dowód → PODSTAWA INDUKCYJNA:

$n = 1$ $T_1(x) = x = 2^0 x^1$

$n = 2$ $T_2(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1 = 2^1 \cdot x^2 + 0x - 1$

KROK INDUKCYJNY: dla każdego < k
TEZA INDUKCYJNA: teza zachodzi

Załóżmy, że dla $T_k(x) = 2^{k-1} x^k + 0x^{k-1} - \dots$
dla $T_{k-1}(x) = 2^{k-2} x^{k-1} + 0x^{k-2} \dots$

~~dla $T_k(x)$ = mamy x^k a potem dopiero x^{k-2} więc mamy na tyle dużą różnicę przy wykładnikach, że możemy rozpatrywać tylko te przy x^k~~

Wtedy dla $T_{k+1}(x) = 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x) =$
$= 2x(2^{k-1}x^k + 0x^{k-1} - \dots) -$
$-(2^{k-2} x^{k-1} \dots) =$
$= 2^k \cdot x^{k+1} - 2^{k-2} x^{k-1} + \dots$

Zatem współczynnik przy x^{k+1} to 2^k, a przy x^k to 0.

c) i. Mamy sprawdzić czy $|T_n(x)| \leq 1$
czyli czy $|\cos(n \arccos(x))| \leq 1$

a wiemy, że $\cos(\alpha) \in \langle -1; 1 \rangle$ więc jest to prawda

ii. $|T_n(x)| = 1$
$|\cos(n \arccos(x))| = 1$

$\cos(n \arccos(x)) = 1 \vee \cos(n \arccos(x)) = -1$

$n \cdot \arccos(x) = k\pi$ $\quad k \in \langle -n; n \rangle$
$\cos(\arccos(x)) = \cos(k\pi / n)$ $\quad \cos(\arccos(x)) = x$

$x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $\quad \arccos(x) \in \langle -1; 1 \rangle$
czyli $\frac{k\pi}{n} \in \langle -1; 1 \rangle$

$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \pi \end{array}\right\} \arccos(x) = \frac{k\pi}{n}$

$0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$

$0 \leq k \leq n$

n+1 pkt. ekst.

musi się zawierać w zbiorze wartości funkcji, a zw funkcji to $\langle 0; \pi \rangle$

iii.

Chcemy, aby $\cos((n+1) \arccos x) = 0$

$\cos(\alpha) = 0$ gdy $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$, więc

$(n+1)\arccos x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\arccos x = \frac{k\pi + \pi/2}{n+1}$

Wielomian (T_{n+1}) jest stopnia n+1, to maksymalnie n+1 miejsc zerowych.

x ma rozwiązania dla przynajmniej n+1 miejsc zerowych (bo k = 0, 1 .. n)

Skoro istnieje przynajmniej n+1 miejsc zerowych i istnieje maksymalnie n+1 miejsc zerowych to jest ich dokładnie n+1

ZAD 5 WYKAŻ, ŻE DLA DOWOLNYCH $k, l \in \mathbb{N}$ ORAZ $x \in \mathbb{R}$ ZACHODZI

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x))$$

wielomian o stopniu k·l

WYKORZYSTAJ PODANĄ ZALEŻNOŚĆ DO OPRACOWANIA SZYBKIEGO ALGORYTMU WYZNACZANIA WARTOŚCI WIELOMIANU CZEBYSZEWA WYSOKIEGO STOPNIA NIEBĘDĄCEGO LICZBĄ PIERWSZĄ.

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$\arccos(\cos(x)) = x$

Dla $x \in [-1, 1] \Rightarrow$

$$T_k(T_l(x)) = \cos(k \cdot \arccos(\cos(l \cdot \arccos(x)))) =$$

$$= \cos(k \cdot l \cdot \arccos(x)) = T_{kl}(x)$$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

$T_a = T_{a_1 a_2 \dots a_n}(x)$

Mając do policzenia $T_{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n}(x)$, $a_1 \dots a_n$ - rozkład na czynniki pierwsze możemy policzyć

$T_{a_1}(T_{a_2}(\dots T_{a_n}(x))\dots))$.

Wtedy unikamy rekurencyjnego obliczenia $T_a(x)$ przy dużych a

arccos to fun. odwrotna od cos, więc ich złożenie jest identycznością

Jeżeli interesują nas tylko miejsca zerowe wielomianu, możemy przyjąć $\arccos(x) = 0$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(bo wtedy $\cos(0) = 1$ więc to nie [illegible]) więc Czebyszewa [illegible] $\langle -1; 1 \rangle$ → [illegible] przedziale na $\langle -1; 1 \rangle$ [illegible] TO

ZAD. 6 UDOWODNIJ ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZANIA ZADANIA INTERPOLACYJNEGO LAGRANGE'A

ISTNIENIE: WIELOMIAN INTERPOLACYJNY LAGRANGE'A

z wykładu → $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ $x_1, x_2 \dots$ WĘZŁY INTERPOLACJI

Chcemy pokazać, że $L_n(x_i)=y_i$ w takim wypadku $\lambda_i(x)=\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, czyli x musi być różne od x_j wpw. jeden z liczników będzie równy zero.

PRZYPADKI:

1) gdy $x=x_i$

$\lambda_i(x_i)=\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_i-x_j}{x_i-x_j}=1$

2) gdy $x\neq x_i$

$\lambda_i(x)=\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=$

$=\frac{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots\overbrace{(x_k-x_k)}^{0}\cdots(x_k-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_n)}=0$

Skoro $L_n(x)=y_0\lambda_0(x)+\dots+y_n\lambda_n(x)$ to dla $x\in\{x_0,x_1,\dots x_n\}$ mamy

$L_n(x_i)=y_0\lambda_0(x_i)+\dots+y_i\lambda_i(x_i)+\dots+y_n\lambda_n(x_i)$

wiemy że z pkt 1) i 2) $\lambda_i(x)=0$ i $\lambda_i(x_i)=1$

więc $L_n(x_i)=0+0+\dots+1\cdot y_i+\dots+0=y_i$

wychodzi na to, że $L_n(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym funkcji $f(x)$ dla $x\in\{x_0,x_1,\dots x_n\}$

JEDNOZNACZNOŚĆ:

Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa wielomiany tego samego stopnia n $w_1(x)$ i $w_2(x)$. w węzłach $x_0, x_1 \dots x_n$ przyjmują te same wartości.

Niech $w_3(x)=w_1(x)-w_2(x)$

$w_3(x)$ może być stopnia co najwyżej n

Z zał. $w_1(x_i)=w_2(x_i)$ $\forall i\in\{0,\dots,x_n\}$, czyli dla $\forall i\in\{0,\dots n\}$ $w_3(x_i)=0$; ~~żeby $w_3(x)\neq 0$ to musiałoby być $n+1$ co jest sprzeczne z tym, że $w_3(x)$ może być stopnia co najwyżej n~~

to oznacza, że ma $n+1$ miejsc zerowych (co jest sprzeczne z tym, że $w_3(x)$ może być stopnia co najwyżej n. Czyli

$w_3(x)=w_1(x)-w_2(x)=0 \iff w_1(x)=w_2(x)$, a

to jest sprzeczne z założeniem

7

ZAD 7 PODAJ POSTAĆ LAGRANGE'A WIELOMIANU INTERPOLACYJNEGO DLA DANYCH

x_k	-3	-2	0	4
y_k	0	2	6	-10

$x_0 = -3$ $\quad y_0 = 0$

$x_1 = -2$ $\quad y_1 = 2$

$x_2 = 0$ $\quad y_3 = 6$

$x_3 = 4$ $\quad y_4 = -10$

$$L_3(x) = y_0\lambda_0(x) + y_1\lambda_1(x) + y_2\lambda_2(x) + y_3\lambda_3(x)$$

$$\lambda_0 = \boxed{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}} = \frac{(x+2)\cdot(x-0)\cdot(x-4)}{\underbrace{(-3+2)}_{(-1)}\cdot\underbrace{(-3-0)}_{(-3)}\cdot\underbrace{(-3-4)}_{(-7)}} = \qquad = -21$$

$$= -\frac{1}{21}(x+2)x(x-4)$$

$$\lambda_1 = \boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}} = \frac{(x+3)(x-0)(x-4)}{\underbrace{(-2+3)}_{1}\cdot\underbrace{(-2-0)}_{(-2)}\cdot\underbrace{(-2-4)}_{(-6)}} = \qquad = 12$$

$$= \frac{1}{12}(x+3)(x-4)x$$

$$\lambda_2 = \boxed{\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}} = \frac{(x+3)(x+2)(x-4)}{\underbrace{(0+3)}_{3}\cdot\underbrace{(0+2)}_{2}\cdot\underbrace{(0-4)}_{(-4)}} =$$

$$= -\frac{1}{24}(x+3)(x+2)(x-4)$$

$$\lambda_3 = \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{(x+3)(x+2)(x+0)}{\underbrace{(4+3)}_{7}\cdot\underbrace{(4+2)}_{6}\cdot\underbrace{(4-0)}_{4}} = \qquad = 42\cdot 4 = 168$$

$$= \frac{1}{168}(x+3)(x+2)(x-0)$$

$$L_3(x) = \underbrace{0\cdot\left(-\frac{1}{21}(x+2)(x-0)(x-4)\right)}_{0} + 2\left(+\frac{1}{12}(x+3)(x+0)(x-4)\right) +$$

$$+ 6\left(-\frac{1}{24}(x+3)(x+2)(x-4)\right) + (-10)\left(\frac{1}{168}(x+3)(x+2)(x-0)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(x+3)(x+0)(x-4) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x+3)(x+2)(x-4) + \left(-\frac{5}{84}(x+3)(x+2)(x-0)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left((x^2+3x)(x-4)\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x^2+5x+6)(x-4) + \left(-\frac{5}{84}\right)(x^2+3x)(x+2) =$$

$$= \frac{1}{6}(x^3-x^2-12x) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x^3+x^2-14x-24) + \left(-\frac{5}{84}\right)(x^3+5x^2+6x) =$$

$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + 6 - \frac{5}{84}x^3 - \frac{25}{84}x^2 - \frac{30}{84}x$

$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{84}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{84}x^2 - 2x + \frac{7}{2}x - \frac{30}{84}x + 6 =$

$= \left(\frac{14}{84} - \frac{21}{84} - \frac{5}{84}\right)x^3 + \left(-\frac{14}{84} - \frac{21}{84} - \frac{25}{84}\right)x^2 + \left(-\frac{168}{84} + \frac{294}{84} - \frac{30}{84}\right)x + 6 =$

$= -\frac{12}{84}x^3 - \frac{60}{84}x^2 + \frac{96}{84}x + 6 =$

$= -\frac{1}{7}x^3 - \frac{5}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 6$

ZAD. 8 NIECH BĘDZIE $f(x) = 2020x^5 + 1977x^4 - 1410x^3 + 1845x - 1781$.

A) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 5 interpolujący funkcję f w punktach $-2020, -1845, -1410, 866, 1781, 2020$

B) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1, 0, 1$.

A) $L_4(x) = f(x)$ } z jednoznaczności z zadania 6

B)

$x_0 = -1 \qquad y_0 = -2020 + 1977 + 1410 - 1845 - 1781 = -2369$

$x_1 = 0 \qquad y_1 = -1781$

$x_2 = 1 \qquad y_2 = 2020 + 1977 - 1410 + 1845 - 1781 = 2741$

$L_2(x) = y_0\lambda_0(x) + y_1\lambda_1(x) + y_2\lambda_2(x)$

$\lambda_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(x-1)x$

$\lambda_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -1 \cdot (x+1)(x-1)$

$\lambda_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(x+1)x$

$L_2(x) = -2369 \cdot \frac{1}{2}(x-1)x + (-1781)(-1(x+1)(x-1)) + 2741\left(\frac{1}{2}(x+1)x\right)$

$= -1184\frac{1}{2}x^2 + 1184\frac{1}{2}x + (-1781)(1 - x^2) + 2741 \cdot \frac{1}{2}(x^2 + x) =$

$= -1184\frac{1}{2}x^2 + 1184\frac{1}{2}x - 1781 + 1781x^2 + 1370\frac{1}{2}x^2 + 1370\frac{1}{2}x$

$= \cancel{4336}\,x^2 + \cancel{186}\,x - 1781$

$1977 \qquad 2555$

ZAD 9 WYKAŻ, ŻE DLA WIELOMIANÓW

$$\lambda_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots n)$$

ZACHODZI

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x) \to f(x) \text{ stałe równe } 1$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \to \text{wiemy, że } f(x) \text{ jest maksymalnie stopnia } n$$

skoro tak

$$L_n(x) = f(x)$$

czyli też jest stałe równe 1, czyli

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1, \text{ a to jest to}$$

B) $$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j=0) \\ 0 & (j = 1, 2, 3 \ldots n) \end{cases}$$

$$f(x) = x^j$$

$$L(x) = L_n(f) = \sum_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(x) \equiv x^j$$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(0) = 0^j = \begin{cases} 1 : & j = 0 \\ 0 : & j = (1, 2, 3 \ldots) \end{cases}$$

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = 1$

$$f(x) = 1$$

$$1 = f(x) = L_n(fx) = \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\lambda_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x)$$

Jeśli weźmiemy punktów niż stopień wielomianu, który mamy otrzymać to zawsze otrzymamy wyjściowy wielomian