LISTA 7

ZAD 5. PODAJ FUNKCJĘ TWORZĄCĄ DLA CIĄGU $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$

Rozpiszmy $0 + 0x + 0x^2 + x^3 + 3x^4 + 7x^5 + 15x^6 + \ldots$

czyli $x^3 + 3x^4 + 7x^5 + 15x^6 + 31x^7 + \ldots$

$1, 3, 7, 15, 31 \ldots$

Zauważmy wzór:

$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad n > 1 \quad a_0 = 1$

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad n > 1 \quad a_0 = 1$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \underline{\quad\quad} + 1 \\
a_1 x &= 2 a_0 x + 1x \\
a_2 x^2 &= 2 a_1 x^2 + 1x^2 \\
a_3 x^3 &= 2 a_2 x^3 + 1x^3 \\
&\vdots \\
a_n x^n &= 2 \cdot a_{n-1} x^n + 1x^n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} 2 a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} x^n \to 1 + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = 2x \cdot A(x) + \frac{1}{1-x}$$

$$A(x)(1-2x) = \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$$

ALE PRZESUNIĘCIE

$x^0 \; x^1 \; x^2 \; x^3$

$0, 0, 0, 1, 3, 5, 7$

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-2x)}$$

ZAD. 6 NIECH $A(x)$ BĘDZIE FUNKCJĄ TWORZĄCĄ CIĄGU a_n. POKAŻ, ŻE FUNKCJA TWORZĄCA CIĄGU b_n POSTACI $(0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2 \ldots)$, TAKIEGO, ŻE $b_{k+i} = a_i$ ORAZ $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$ JEST FUNKCJĄ $x^k \cdot A(x)$

A JAK OTRZYMAĆ FUNKCJĘ TWORZĄCĄ CIĄGU c_n POSTACI $(a_k, a_{k+1} \ldots)$, CZYLI TAKIEGO, ŻE $c_i = a_{k+i}$?

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$B(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0 \cdot x^{k-1} + a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} 0 \cdot x^i + \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i =$$

$$= 0 + \ldots + 0 + \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i =$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+k} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot x^k = x^k \cdot A(x)$$

$$C(x) = a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \ldots + a_{k+n} x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i = \sum_{i=k}^{\infty} a_k x^{i-k} =$$

$$= \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_k \cdot x^i\right) \cdot \underbrace{x^{-k}}_{\left(\frac{1}{x}\right)^k} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k =$$

$$= \frac{\left(A(x) - \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^i\right)}{x^k}$$

LICZBY CATALANA

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

dla $n \geq 0$

REKURENCYJNY WZÓR

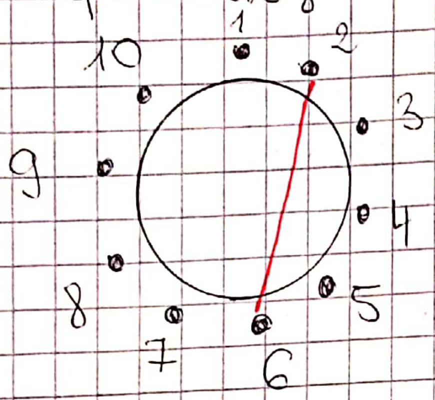
$$C_0 = 1, \quad C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}$$

POCZĄTKOWE WARTOŚCI:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862 ...

ZAD. 3 ILE NIE KRZYŻUJĄCYCH SIĘ UŚCISKÓW DŁONI MOŻE WYKONAĆ JEDNOCZEŚNIE n PAR OSÓB SIEDZĄCYCH ZA OKRĄGŁYM STOŁEM?

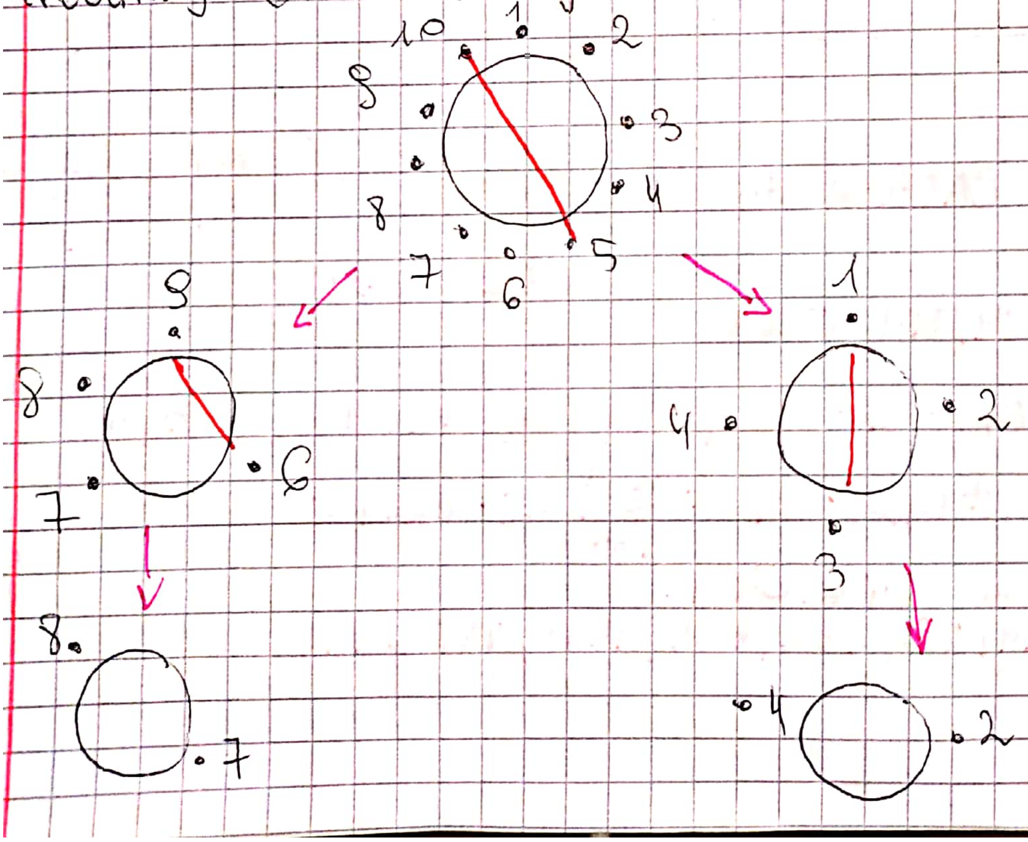
Mamy n par czyli 2n osób.



Zauważmy, że jeśli osoba 6 poda rękę osobie 2 to po jednej stronie mamy 3 osoby, a nie parzysta liczba osób nie może podać sobie ręki, bo dojdzie do skrzyżowania rąk.

Z tego wynika, że osoba musi podać rękę osobie o przeciwnej parzystości.

Możemy zauważyć że po wskazaniu dwóch osób które mogą sobie podać ręce dzielimy problem na dwa problemy czyli z jednego stołu robimy dwa stoły.



Zatem liczba układów uścisków dłoni n par to n-ta liczba Catalana

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-1-i}$$

$c_0 = 1$

ZAD 7. PODAJ POSTAĆ FUNKCJI TWORZĄCEJ DLA LICZBY PODZIAŁÓW LICZBY NATURALNEJ n (CZYLI ROZKŁADÓW LICZBY n NA SUMĘ SKŁADNIKÓW NATURALNYCH, GDY ROZKŁADÓW RÓŻNIĄCYCH SIĘ KOLEJNOŚCIĄ NIE UZNAJEMY ZA RÓŻNYCH):

A) NA DOWOLNE SKŁADNIKI

Z wykładu funkcja tworząca dla p_n to $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

B) NA RÓŻNE SKŁADNIKI NIEPARZYSTE

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2i-1})$$

wzór fun. tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n to $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i)$

C) NA SKŁADNIKI MNIEJSZE OD M

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^i}$$

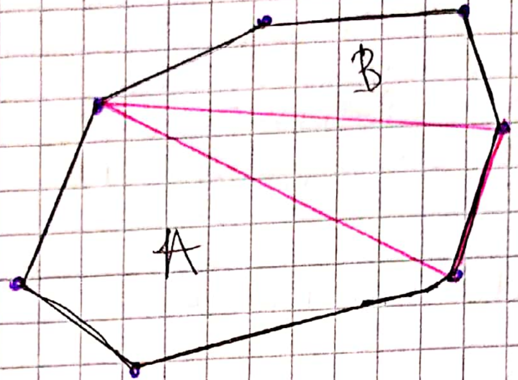
D) NA RÓŻNE POTĘGI LICZBY 2

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2^i})$$

ZAD. 1. UDOWODNIJ, ŻE LICZBA SPOSOBÓW NA JAKI MOŻNA PODZIELIĆ (n+2)-KĄT WYPUKŁY NA PŁASZCZYŹNIE NA ROZŁĄCZNE TRÓJKĄTY ZA POMOCĄ n-1 NIEPRZECINAJĄCYCH SIĘ PRZEKĄTNYCH JEST RÓWNA n-TEJ LICZBIE CATALANA

Zacznijmy od $n=1$, uzyskujemy wtedy trójkąt. Nie możemy dokonać jakichkolwiek podziałów, ponieważ trójkąt nie ma przekątnych.

Gdy $n=2$, uzyskujemy czworokąt. Figura ta posiada dwie przekątne, zatem istnieje dwie możliwości podziału.



Dla $n+2$ weźmy jeden z boków wielokąta i uczyńmy go podstawą trójkąta o trzecim wierzchołku w jednym z pozostałych wierzchołków figury.

W ten sposób uzyskujemy podział figury na trójkąt i dwa wielokąty A i B.

Analogicznie postępujemy z figurami A i B.

Tym sposobem przy każdym podziale powstaje nowy trójkąt, aż do podzielenia całej figury na trójkąty.

Zauważmy, że liczba możliwych podziałów $(n+2)$-kąta to

$$x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_2 + x_n \cdot x_3 + x_{n-1} \cdot x_4 + \dots + x_2 \cdot x_{n+1}$$

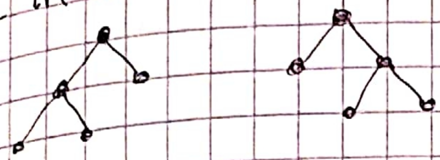
Liczba x_{n+2} to liczba Catalana

$$x_{n+2} = C_n = \sum_{i=0}^{n} C_{i-1} C_{n-1-i}$$

ZAD 2. OKREŚL LICZBĘ DRZEW BINARNYCH ZAWIERAJĄCYCH N WIERZCHOŁKÓW WEWNĘTRZNYCH. W DRZEWIE BINARNYM KAŻDY

WIERZCHOŁEK MA ZERO LUB DWÓCH SYNÓW.

- dla $n=0$ to $a_0=1$
- dla $n=1$ to $a_1=1$
- dla $n=2$ to $a_2=2$



n - liczba wierzchołków wewnętrznych

a_n - liczba drzew binarnych

Dla n wierzchołków wewnętrznych korzeń tego drzewa ma dwójkę dzieci (lewe i prawe poddrzewo). Mamy więc wierzchołek wewnętrzny, który jest korzeniem oraz $n-1$ wierzchołków wewnętrznych znajdujących się w poddrzewach.

Oznaczmy l jako liczba wierzchołków w lewym poddrzewie
r jako liczba wierzchołków w prawym poddrzewie

Więc $n-1 = l+r \Rightarrow r = n-1-l$

zatem
$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} \qquad a_0=1$$

n-ta liczba Catalana

ZAD 9 DANYCH JEST 12 RÓŻNYCH LICZB DWUCYFROWYCH. WYKAŻ, ŻE WŚRÓD NICH ISTNIEJĄ TAKIE DWIE, KTÓRYCH RÓŻNICA JEST LICZBĄ DWUCYFROWĄ O JEDNAKOWYCH CYFRACH.

Liczby dwucyfrowe o jednakowych cyfrach: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, ...

Liczby $n \leq 100$, $n \bmod 11 = 0$ 0, 11, 22, 33, ...

Mamy 12 liczb 2-cyfrowych. Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją takie 2 różne z nich, oznaczmy a i b, które spełniają $a \equiv_{11} b$ (bo jest 11 możliwych reszt).

Bez straty ogólności założę $a>b$.

wtedy $a-b>0$ (bo $a>b$)
oraz $a-b<100$ (bo $a<100$)

czyli $a-b$ jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

ZAD 10 NIECH a I b BĘDĄ CAŁKOWITE. POKAŻ, ŻE $a^3|b^2 \Rightarrow a|b$

$a^3|b^2 \Rightarrow b^2 = a^3 c$, $c \in N$

$a^2|a^2 \Rightarrow a^2|a^3 c \iff a^2|b^2$

$a = \underbrace{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}_{\text{rozkład na czynniki pierwsze}} \Rightarrow a^2 = a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2$ (analogicznie dla b)

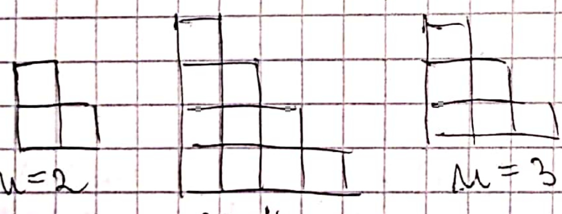
$a^2|b^2 \Rightarrow b^2 = a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \cdot b_j^2 \cdot b_{j+1}^2 \dots b_m^2$

$b = a_1 a_2 \dots a_n b_j b_{j+1} \dots b_m \Rightarrow$

$\Rightarrow a|b$

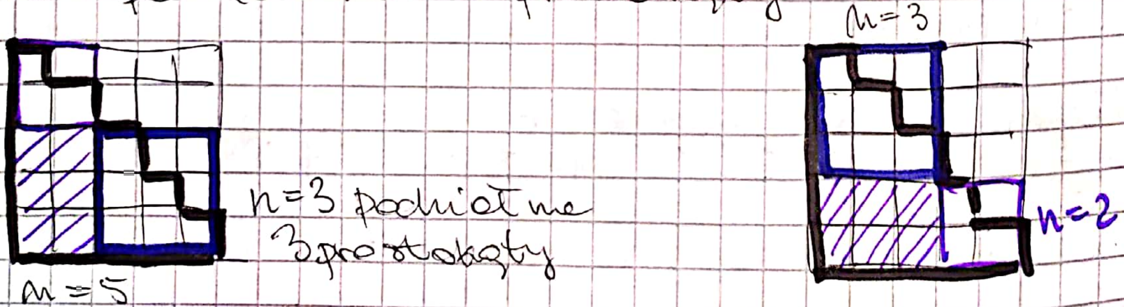
ZAD 4.

Z MACIERZY $n \times n$ USUWAMY CZĘŚĆ NAD PRZEKĄTNĄ OTRZYMUJĄC MACIERZ "SCHODKOWĄ". NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA JĄ PODZIELIĆ NA n PROSTOKĄTÓW

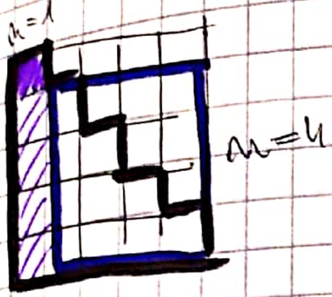


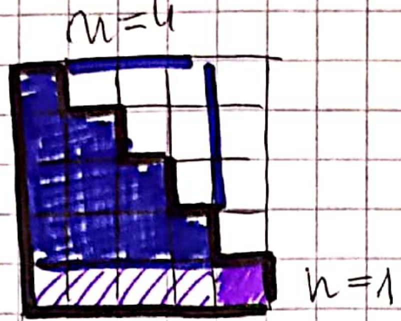
$n=2$ $n=4$ $n=3$

tu mamy $n=2$ podział na 2 prostokąty



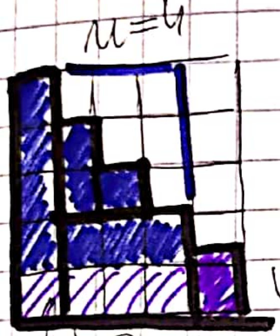
Zauważmy, z fioletowego ($n=2$) i niebieskiego ($n=3$) podproblemu daje nam już 5 prostokątów zatem ten fioletowy zakreskowany obszar //// musimy połączyć z prostokątami już istniejącymi dla $n=2$ lub n=3, ale jeśli policzymy osobno przypadek, w którym łączymy zakreślony obszar z fioletowym, a osobno z niebieskim to policzymy kilkukrotnie ten sam przypadek.





Przyjmijmy zatem, że łączymy siłory, zakreskowany obszar zawsze z odpowiednimi prostokątnymi z obszaru „u góry"

np.



te pole łączymy z tym powyżej

te pole łączymy z odpowiadającymi trzema polami powyżej

Możemy zatem zauważyć, że rozwiązanie tego problemu dla danego n>1 sprowadza się do znalezienia wszystkich podziałów liczby n na sumę dwóch liczb naturalnych większych niż 1 i rozwiązania problemów dla nich

Zatem niech
C_n - ilość sposobów na jaką można podzielić na n prostokątów

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} \end{cases}$$