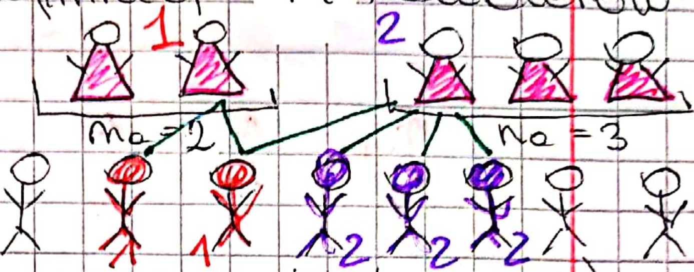
LISTA 12

ZAD 3. (PROBLEM HAREMU). NIECH A I B BĘDĄ DWOMA ROZŁĄCZNYMI ZBIORAMI OSÓB. ZAŁÓŻMY, ŻE KAŻDA OSOBA Z NALEŻĄCA DO ZBIORU A CHCE POŚLUBIĆ (NARAZ) CO NAJMNIEJ $n_a \geq 1$ OSÓB ZE ZBIORU B. JAKI JEST WARUNEK KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY, ABY TEN PROBLEM MIAŁ ROZWIĄZANIE? WSKAZÓWKA: ZASTOSUJ KLONOWANIE I TW. HALLA.

TW. HALLA

Z WYKŁADU: Niech $G=(V,E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków. Sąsiedztwo W oznaczone jako $N(W)$ definiujemy jako zbiór $\{v \in V : \exists\, w \in W \ \{v,w\} \in E\}$.
Niech $G=(A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.
Problem kojarzenia małżeństw ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy każde m panien zna łącznie co najmniej m kawalerów ($m=1,2,\dots p$) ilość panien



A - zbiór kobiet
B - zbiór mężczyzn

Każdą kobietę (czyli każdy wierzchołek $a_i \in A$) sklonujmy $n_a - 1$ razy (czyli łącznie będzie tyle wierzchołków od jednego wierzchołków ile kobieta chce mieć mężczyzn). Każdy z klonów powinien mieć przyporządkowanego mężczyznę spośród wszystkich mężczyzn, które miała przyporządkowane a_i.

Dzięki zastosowaniu sklonowania problem haremu upraszcza się do problemu małżeństw.

Jeśli każde $a_i \in A$ (łącznie z klonami) będzie skojarzone z jednym mężczyzną z B to $a_i \in A$ stworzy swój harem.

WARUNEK KONIECZNY: Po sklonowaniu liczba kobiet nie może być większa od liczby mężczyzn.

$$|A^*| \leq |B|$$

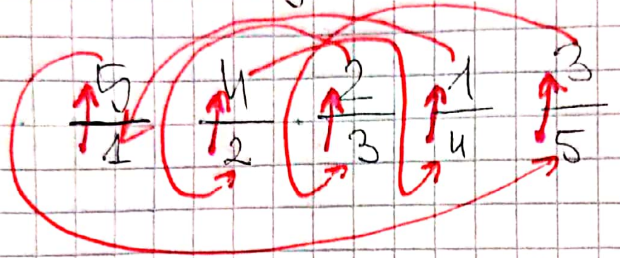
$$|A^*| = \sum n_{a_i}$$

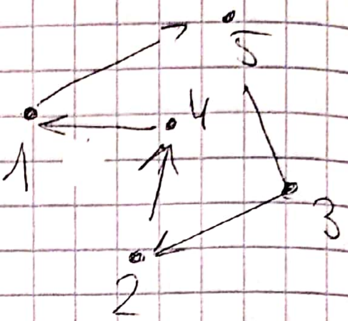
WARUNEK WYSTARCZAJĄCY: Dla każdego podzbioru zbioru A liczba sąsiednich wierzchołków z B nie może być mniejsza od sumy ilości osób, które mają być w haremie tego podzbioru.

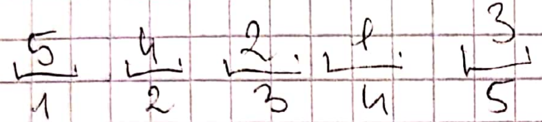
ZAD 4. ILE JEST NIEIDENTYCZNYCH DIGRAFÓW O WIERZCHOŁKACH 1,2,...n, W KTÓRYCH NIE MA PĘTLI ANI KRAWĘDZI RÓWNOLEGŁYCH I STOPNIE WCHODZĄCY I WYCHODZĄCY KAŻDEGO WIERZCHOŁKA WYNOSI 1

Wierzchołki digrafu są ponumerowane numerami od 1 do n.

Przedstawmy digraf w innej formie:







numer szufladki to wierzchołek, z którego krawędź wychodzi, a wartość w szufladce to wierzchołek, do którego ~~którego~~ ta krawędź wchodzi.

Żaden wierzchołek nie może więc stać na szufladce o takiej samej wartości.

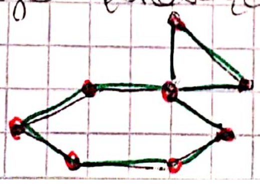
Zadanie to stało się więc zadaniem o ilości możliwych nieporządków n-elementowych

Wzór na liczbę nieporządków

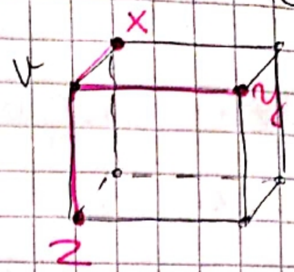
$$D(n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

ZAD. 1 (-) UDOWODNIJ LUB OBAL: NIE ISTNIEJE GRAF EULEROWSKI (tj. ZAWIERAJĄCY CYKL EULERA) O PARZYSTEJ LICZBIE WIERZCHOŁKÓW I NIEPARZYSTEJ LICZBIE KRAWĘDZI

Graf Eulerowski - da się w nim skonstruować cykl Eulera, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz



ZAD 8 POKAŻ, ŻE GRAF $G=(V,E)$, W KTÓRYM KAŻDY WIERZCHOŁEK MA STOPIEŃ 3 ZAWIERA CYKL O PARZYSTEJ DŁUGOŚCI.



Wyznaczmy ścieżkę o najdłuższej długości i oznaczmy jeden z jej końców jako wierzchołek jako v.

Każdy wierzchołek jest stopnia 3, czyli ma 3 sąsiadów. Sąsiadów v oznaczmy jako x, y, z. Dodatkowo wiemy, że x, y, z należą do tej ścieżki, ponieważ gdyby nie należały to moglibyśmy je dołączyć do ścieżki sprawiając, że będzie ona dłuższa co jest sprzeczne z założeniem, że jest ona najdłuższa.

z v do x
z v do y
z v do z
} prowadzą przynajmniej 3 ścieżki

Rozpatrzmy 3 ścieżki dla v i x (sąsiad)

1° z v do x (1 krawędź)
2° z v do y, ścieżka z y do x
3° z v do z, ścieżka z z do x

Mamy 3 ścieżki z czego dwie z nich (2° i 3°) są tej samej długości o jakiejś parzystości.

Połączenie 2 ścieżek o tej samej parzystości stworzy cykl o długości parzystej.

ZAD. 10 KWADRATEM ŁACIŃSKIM NAZYWAMY KWADRAT $n \times n$, W KTÓRYM NA KAŻDYM POLU STOI LICZBA ZE ZBIORU $\{1,2 \ldots n\}$ TAK ŻE W KAŻDEJ KOLUMNIE ORAZ W KAŻDYM WIERSZU JEST DO JEDNEJ LICZBIE $\{1,2 \ldots n\}$.
PROSTOKĄTEM ŁACIŃSKIM NAZYWAMY PROSTOKĄT O n KOLUMNACH I m WIERSZACH, $1 \leq m \leq n$, W KTÓRYM NA KAŻDYM POLU STOI LICZBA ZE ZBIORU $\{1,2,\ldots n\}$ TAK, ŻE W KAŻDYM WIERSZU KAŻDA Z LICZB $\{1,2,\ldots n\}$ WYSTĘPUJE DOKŁADNIE RAZ ORAZ W KAŻDEJ KOLUMNIE CO NAJWYŻEJ RAZ

CZY KAŻDY PROSTOKĄT ŁACIŃSKI o $m<n$ WIERSZACH MOŻNA ROZSZERZYĆ O JEDEN WIERSZ?

Gdy $m=n$ nie możemy dodać wiersza ponieważ to oznacza że jest to kwadrat.

Aby dodać nowy wiersz do prostokąta w którym wierszy jest mniej niż kolumn tworzymy graf $G=(A \cup B, E)$
A to zbiór liczb $\{1,2 \ldots n\}$ (numery kolumn)

B to zbiór liczb $\{1,2 \ldots n\}$ (liczby, którymi wypełniamy nowy wiersz)

$a \in A$ łączy krawędź z $b \in B$ gdy liczba b nie wystąpiła w kolumnie a, więc

$$\forall a \in A \quad |N(\{a\})| = n-m \geq 1$$

Zauważmy, że liczbę możemy wpisać w kolumny, w których jeszcze nie wystąpiła czyli $n-m$.

Zatem warunek Halla
$\forall A' \subseteq A \; |N(A')| \geq |A'|$ oraz $\forall B' \subseteq B$
$|N(B')| \geq |B'|$
jest spełniony, więc istnieje skojarzenie doskonałe.

ZAD 2 MINIMALNYM CIĘCIEM W GRAFIE JEST PODZBIÓR JEGO KRAWĘDZI, KTÓRYCH USUNIĘCIE ROZSPAJA GRAF, A USUNIĘCIE ŻADNEGO Z NIM ZAWARTEGO PODZBIORU KRAWĘDZI W NIM NIE ROZSPAJA GRAFU, WYKAŻ, ŻE GRAF SPÓJNY ZAWIERA CYKL EULERA WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY KAŻDE MINIMALNE CIĘCIE ZAWIERA PARZYSTĄ LICZBĘ KRAWĘDZI.
UWAGA: TO ZADANIE NIE JEST TAK PROSTE, JAK SIĘ WYDAJE.

Musimy pokazać, że graf spójny zawiera cykl Eulera (drogę zamkniętą która zawiera każdą krawędź) wtedy gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

=> ZAŁÓŻMY GRAF G ZAWIERA CYKL EULERA.
POKAŻMY, ŻE KAŻDE MINIMALNE CIĘCIE ZAWIERA PARZYSTĄ LICZBĘ KRAWĘDZI.

Każde minimalne cięcie dzieli graf G na dwie spójne składowe. Wybierzmy jedno takie cięcie i oznaczmy spójne składowe odpowiednio H_1 i H_2. Warunek konieczny na istnienie cyklu Eulera mówi, że każdy wierzchołek jest stopnia parzystego.

Skoro minimalne cięcie dzieli graf na dwie spójne składowe to musiało zawierać parzystą liczbę krawędzi (bo H_1 i H_2 muszą łączyć parzystą liczbę krawędzi)

<= ZAŁÓŻMY, ŻE MINIMALNE CIĘCIE ZAWIERA PARZYSTĄ LICZBĘ KRAWĘDZI
POKAŻMY, ŻE GRAF G ZAWIERA CYKL EULERA

Wybierzmy dowolny wierzchołek z grafu G i usuńmy wszystkie krawędzie tego wierzchołka. Pozostało nam n spójnych składowych, a każda z nich była połączona z tym wierzchołkiem poprzez minimalne cięcie, które wiemy, że ma parzystą liczbę krawędzi. Czyli v miał parzystą liczbę krawędzi. Zatem każdy wierzchołek jest parzystego stopnia, czyli ma parzystą liczbę krawędzi. Zatem graf ten posiada cykl Eulera.