# LISTA 11

ZAD2. NIECH $P_K$ $(1 \leq K \leq N)$ BĘDZIE K-TYM WIELOMIANEM ORTOGONALNYM WZGLĘDEM ILOCZYNU SKALARNEGO $(\cdot,\cdot)_N$. POKAŻ, ŻE DLA DOWOLNEGO WIELOMIANU $w \in \Pi_{K-1}$ JEST $(w, P_K)_N = 0$.

Wiemy, że $\forall_{w \in \Pi_m} \exists! \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m \in \mathbb{R}$
$w(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k P_K(x)$, zatem

$$w(x) = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i P_i = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_{K-1} P_{K-1}$$

$$(w, P_K)_N = (\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{K-1} P_{K-1}, P_K)_N =$$

$$= (\alpha_0 P_0, P_K)_N + (\alpha_1 P_1, P_K)_N + \ldots + (\alpha_{K-1} P_{K-1}, P_K)_N$$

$$= \alpha_0 \underbrace{(P_0, P_K)_N}_{0} + \alpha_1 \underbrace{(P_1, P_K)_N}_{0} + \ldots + \alpha_{K-1} \underbrace{(P_{K-1}, P_K)_N}_{0} =$$

$$= 0$$

ZAD.7 FUNKCJA $h$ PRZYJMUJE W PUNKTACH $x_j = -10 + 5j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ ODPOWIEDNIO WARTOŚCI $3, -5, -1, -5, 3$. WYKORZYSTUJĄC ORTOGONALNOŚĆ WIELOMIANÓW SKONSTRUOWANYCH W POPRZEDNIM ZADANIU, WYZNACZ TAKI WIELOMIAN $w_2^* \in \Pi_2$, ABY WYRAŻENIE

$\ldots \sum_{j=0}^{4}[w_2^*(x_j)-h(x_j)]^2$ PRZYJMOWAŁO NAJMNIEJSZĄ MOŻLIWĄ WARTOŚĆ.

$x_0=-10,\ x_1=-5,\ x_2=0,\ x_3=5,\ x_4=10$

$h_0=3,\ h_1=-5,\ h_2=-1,\ h_3=-5,\ h_4=3$

$w_2^*(x)=\sum_{k=0}^{2} a_k P_k(x)$, gdzie $a_k=\frac{(h,P_k)_4}{(P_k,P_k)_4}$

z poprzedniego zadania mamy

$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=x^2-50,\ (P_0,P_0)_4=5$

$(P_1,P_1)_4=250$

$(P_2,P_2)_4=\sum_{k=0}^{4} P_2(x_k)P_2(x_k)=\sum_{k=0}^{4}(x_k^2-50)^2=8750$

$(h,P_0)_4=\sum_{k=0}^{4} h_k P_0(x_k)=\sum_{k=0}^{4} h_k\cdot 1=-5$

$(h,P_1)_4=\sum_{k=0}^{4} h_k x_k=-30+25+0-25+30=0$

$(h,P_2)_4=\sum_{k=0}^{4} h_k(x_k^2-50)=3(100-50)-5(25-50)-1(0-50)-$

$-5(25-50)+3(100-50)=150+125+50+125+150=600$

$a_0=\frac{(h,P_0)_4}{(P_0,P_0)_4}=\frac{-5}{5}=-1 \qquad a_1=\frac{(h,P_1)_4}{(P_1,P_1)_4}=\frac{0}{250}=0$

$a_2=\frac{(h,P_2)_4}{(P_2,P_2)}=\frac{600}{8750}=\frac{12}{175}$

$w_2^*(x)=-1\cdot 1+0+\frac{12}{175}\cdot(x^2-50)=-1+\frac{12}{175}x^2-\frac{600}{175}=$

$=\frac{12}{175}x^2-\frac{31}{7}$

ZAD 5 OD DRUGIEJ STRONY

$S=\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(x)=\sum_{k=0}^{m}(B_k-(x-c_{k+1})B_{k+1}+d_{k+2}B_{k+2})Q_k(x)=$

$=\sum_{k=0}^{m} B_k Q_k(x)-\sum_{k=0}^{m-1}(x-c_{k+1})B_{k+1}Q_k(x)+\sum_{k=0}^{m-2} d_{k+2}B_{k+2}Q_k(x)=$

$=B_0Q_0(x)+\underbrace{B_1Q_1(x)-(x-c_1)B_1Q_0(x)}_{=0 \text{ bo } Q_1(x)=x-c_1,\ Q_0(x)=1}+\sum_{k=2}^{m}[\underbrace{B_kQ_k-(x-c_k)B_kQ_{k-1}(x)+d_kB_kQ_{k-2}(x)}_{=0}]=$

bo $(x-c_k)Q_{k-1}(x)+d_kQ_{k-2}(x)=Q_n$

zatem $(Q_k-[(x-c_k)Q_{k-1}(x)+d_kQ_{k-2}(x)])\cdot B_k=0$

$=B_0Q_0(x)+0=B_0\cdot 1+0=B_0$

Scanned with CamScanner

ZAD. 6 DWOMA PODANYMI NA WYKŁADZIE SPOSOBAMI ZBUDUJ WIELOMIANY $P_0, P_1, P_2$ ORTOGONALNE NA ZBIORZE $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, GDZIE $x_j = -10+5j$ $(j = 0,1,2,3,4)$.

SPOSÓB I (ortogonalizacja Grama-Schmidta)

Dla dowolnego układu $f_0, f_1, \ldots, f_m$ $(m \leq N)$ liniowo niezależnych funkcji układ $p_0, p_1 \ldots p_m$ określony wzorami:

$$\begin{cases} p_0 = f_0 \\ p_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, p_j)}{(p_j, p_j)} p_j \quad (k = 1, 2 \ldots m) \end{cases}$$

Weźmy
$$P_0(x) = f_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} \cdot P_0 =$$
$$= x - \frac{(x, 1)_4}{(1, 1)_4} \cdot 1 = x - \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{1+1+1+1+1} \cdot 1 =$$
$$= x - \frac{(-10+0) + (-10+5) + (-10+10) + (-10+15) + (-10+20)}{5} =$$
$$= x - 0 = x$$
$$P_2(x) = f_2(x) - \left( \frac{(f_2, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} \cdot P_0 + \frac{(f_2, P_1)_4}{(P_1, P_1)_4} \cdot P_1 \right) =$$
$$= x^2 - \frac{(x^2, 1)_4}{(1, 1)_4} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)_4}{(x, x)_4} \cdot x =$$
$$= x^2 - \frac{(-10)^2 + (-5)^2 + 0^2 + 5^2 + 10^2}{5} \cdot 1 - \frac{(-10)^3 + (-5)^3 + 0^3 + 5^3 + 10^3}{(-10)^2 + (-5)^2 + 0^2 + 5^2 + 10^2} \cdot x$$
$$= x^2 - \frac{100+25+25+100}{5} \cdot 1 - 0 \cdot x = x^2 - 50$$

II SPOSÓB: Ciąg wielomianów ortogonalnych $P_m$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \ldots m) \end{cases}$$

gdzie: $c_k = \frac{(x P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}$ dla $(1 \leq k \leq m)$

$d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N}$ dla $(2 \leq k \leq m)$

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x-c_1=x-\frac{(xP_0,P_0)_4}{(P_0,P_0)_4}=x-\frac{(x,1)_4}{(x,1)_4}=$

$=x-\frac{x_0+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+1+1+1+1}=x-\frac{(-10)+(-5)+0+5+10}{5}=x$

$P_2(x)=(x-c_2)P_1(x)-d_2P_0(x)=\left(x-\frac{(xP_1,P_1)_4}{(P_1,P_1)_4}\right)P_1(x)-$

$-\frac{(P_1,P_1)_4}{(P_0,P_0)_4}\cdot P_0(x)=\left(x-\frac{(x\cdot x,x)_4}{(x,x)_4}\right)\cdot x-\frac{(x,x)_4}{(1,1)_4}\cdot 1=$

$=\left(x-\frac{0}{5}\right)\cdot x-\frac{(-10)^2+(-5)^2+0+5^2+10^2}{5}\cdot 1=x^2-50$

ZAD5 NIECH $\{Q_k\}$ BĘDZIE CIĄGIEM WIELOMIANÓW OKREŚLONYCH W NASTĘPUJĄCY SPOSÓB:

$$\begin{cases} Q_0(x)=1 \quad Q_1(x)=x-c_1, \\ Q_k(x)=(x-c_k)Q_{k-1}(x)-d_kQ_{k-2}(x) \quad (k=2,3\ldots)\end{cases}$$

GDZIE $c_k, d_k$ SĄ DANYMI STAŁYMI. UDOWODNIJ, ŻE NASTĘPUJĄCY ALGORYTM CLENSHAWA:

$B_{m+2}:=B_{m+1}=0$

$B_k=a_k+(x-c_{k+1})B_{k+1}-d_{k+2}B_{k+2} \quad (k=m,m-1,\ldots 0)$

wynik $=B_0$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^m a_kQ_k(x)$.

Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $Q_m(x)$?

$B_0=a_0+(x-c_1)B_1-d_2B_2=$

$=a_0Q_0+Q_1B_1-d_2B_2=$

$=a_0Q_0+Q_1(a_1+(x-c_2)B_2-d_3B_3)-d_2B_2=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+(x-c_2)B_2Q_1-d_3B_3Q_1-d_2B_2=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+B_2((x-c_2)Q_1-d_2)-d_3B_3Q_1=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+B_2((x-c_2)Q_1-d_2Q_0)-d_3B_3Q_1=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+B_2Q_2-d_3B_3Q_1=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+(a_2+(x-c_3)B_3-d_4B_4)Q_2-d_3B_3Q_1=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+(x-c_3)B_3Q_2-d_4B_4Q_2-d_3B_3Q_1=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+B_3((x-c_3)Q_2-d_3Q_1)-d_4B_4Q_2=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+B_3Q_3-d_4B_4Q_2=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+(a_3+(x-c_4)B_4-d_5B_5)Q_3-d_4B_4Q_2=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+a_3Q_3+(x-c_4)B_4Q_3-d_5B_5Q_3-d_4B_4Q_2=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+a_3Q_3+B_4((x-c_4)Q_3-d_4Q_2)-d_5B_5Q_3=$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+a_2Q_2+a_3Q_3+B_4Q_4-d_5B_5Q_3=$

$=\ldots$

$=a_0Q_0+a_1Q_1+\ldots+a_lQ_l+B_{l+1}Q_{l+1}-d_{l+2}B_{l+2}Q_l=$

$=\sum_{k=0}^{l}a_kQ_k+B_{l+1}Q_{l+1}-d_{l+2}B_{l+2}Q_l=$

$= \sum_{k=0}^{l} a_k Q_k + (a_{l+1} + (x - c_{l+2}) B_{l+2} - d_{l+3} B_{l+3}) \cdot$
$\cdot Q_{l+1} - d_{l+2} B_{l+2} Q_l =$

$= \sum_{k=0}^{l} a_k Q_k + a_{l+1} Q_{l+1} + (x - c_{l+2}) B_{l+2} Q_{l+1} - d_{l+3} \cdot$
$B_{l+3} Q_{l+1} - d_{l+2} B_{l+2} Q_l =$

$= \sum_{k=0}^{l+1} a_k Q_k + B_{l+2} ((x - c_{l+2}) Q_{l+1} - d_{l+2} Q_l) -$
$- d_{l+3} B_{l+3} Q_{l+1} =$

$= \sum_{k=0}^{l+1} a_k Q_k + B_{l+2} Q_{l+2} - d_{l+3} B_{l+3} Q_{l+1} =$

$= \dots$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k + \underbrace{B_{m+1}}_{=0} Q_{m+1} - d_{m+2} \underbrace{B_{m+2}}_{=0} Q_m =$

$= \sum_{k=0}^{m} a_k Q_k$

Aby obliczyć wartość $Q_m(x)$ ustalmy $a_k = 0$ $(k = 0, 1 \dots m-1)$ oraz $a_m = 1$

ZAD 4 NIECH $\{P_k\}$ BĘDZIE CIĄGIEM WIELOMIANÓW ORTOGONALNYCH WZGLĘDEM ILOCZYNU SKALARNEGO $(f, g)_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$ GDZIE $x_0, x_1, \dots x_N$ SĄ PARAMI RÓŻNYMI PUNKTAMI. USTALMY $x \in \mathbb{R}$ ORAZ LICZBĘ NATURALNĄ $n < N$. ILE I JAKICH OPERACJI ARYTMETYCZNYCH NALEŻY WYKONAĆ, ABY OBLICZYĆ WARTOŚCI $P_0(x), P_1(x) \dots P_n(x)$? UWZGLĘDNIJ WSZYSTKIE SZCZEGÓŁY OBLICZEŃ.

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 = x - \dfrac{\langle x P_0, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} \\ P_k(x) = (x - c_k) \cdot P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \end{cases}$$

gdzie: $c_k = \dfrac{(x P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}$ $(1 \leq k \leq N)$

$d_k = \dfrac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N}$ $(2 \leq k \leq N)$

•) $P_0(x) = 1$

•) $P_1(x) = x - c_1$ 1 dodawanie

$c_1 = \dfrac{\langle x P_0, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle}$ 1 mnożenie

$\langle P_0, P_0 \rangle = \sum_{k=0}^{N} 1 \cdot 1 = N+1$ 0 dodawań

$\langle x P_0, P_0 \rangle = \sum_{k=0}^{N} x_k$ N dodawań

$\boxed{N+1 \text{ dodawań}, 1 \text{ mnożenie}}$

$P_2(x) = (x - c_2) \cdot P_1(x) - d_2 \cdot P_0(x)$ 2 mnożenia 2 dodawania

•) $c_2 = \frac{\langle x P_1, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle}$ 1 mnożenie

$\langle P_1, P_1 \rangle = \sum_{k=0}^{N} (P_1(x_k))^2$ N dodawań (N+1) mnożeń

$P_1(x_k) = x_k - c_1$ (k=0,1 ... N) N+1 dodawań

$\langle x P_1, P_1 \rangle = \sum_{k=0}^{N} x_k (P_1(x_k))^2$ (N+1) mnożeń N dodawań

(pamiętamy, że $(P_1(x_k))^2$ (k=0,1 ... N) mamy zapamiętane)

$d_2 = \frac{\langle P_1, P_1 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle}$ zapamiętane 1 mnożenie

3N+3 dodawań, 2N+6 mnożeń

•) $P_n(x) = (x - c_n) \cdot P_{n-1}(x) - d_n \cdot P_{n-2}(x)$ 2 mnożenia 2 dodawania

$c_n = \frac{\langle x P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$ 1 mnożenie

$\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = \sum_{k=0}^{N} (P_{n-1}(x_k))^2$ 2N dodawań N+1 dodawań

$\langle x P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = \sum_{k=0}^{N} x_k \cdot (P_{n-1}(x_k))^2$ N+1 mnożeń N dodawań

$d_n = \frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle}$ 1 mnożeń

3N+3 dodawań, 2N+6 MNOŻEŃ

Zatem:

•) aby policzyć $P_0(x) = 1$ 0 operacji

•) aby policzyć $P_1(x)$ $\begin{cases} N+1 \text{ dodawań} \\ 1 \text{ mnożenie} \end{cases}$

•) aby policzyć $P_2(x)$ $\begin{cases} 3N+3 \text{ dodawań} \\ 2N+6 \text{ mnożeń} \end{cases}$

•) aby policzyć $P_3(x)$
potrzebujemy $P_2(x_k)$ dla k=0,1, ... N $\rightarrow$ $\begin{cases} (3N+3)+N \cdot 2 \text{ dod} \\ (2N+6)+N \cdot 2 \text{ mn} \end{cases}$
oraz $P_1(x_k)$ dla k=0,1 ... N

pamiętamy już $c_2, P_1(x_i), d_2, P_0(x_i)$

mając powyższe dane musimy wykonać jeszcze $\begin{cases} 3N+3 \text{ dodawań} \\ 2N+6 \text{ mnożeń} \end{cases}$

już mamy bo liczyliśmy je do wyznaczenia $P_2(x)$

Czyli łącznie 8N+6 dodawań
6N+12 mnożeń

•) aby policzyć $P_4(x)$
potrzebujemy wyliczyć $P_3(x)$ dla k=0,1, ... N
oraz $P_2(x)$ dla k=0,1 ... N
8N+6 dodawań + N·2 dodawań
6N+12 + N·2 mnożeń

ale je pamiętamy, bo liczyliśmy je już do wyznaczenia $P_3(x)$

mając powyższe dane musimy jeszcze 3N+3 dodawań i 2N+6 mnożeń, czyli łącznie mamy
$3N+8$ dodawań
$10N+18$ mnożeń

•) ogólnie dla $R_n(x)$ potrzebujemy: $(n \geq 2)$

$(3N+3)\cdot(N-1)+2N\cdot(N-2)$ dodawań
$(2N+6)\cdot(N-1)+2N\cdot(N-2)$ mnożeń

ZAD 1 UZASADNIJ PROCES ORTOGONALIZACJI GRAMA-SCHMIDTA.

Z WYKŁADU
Dla dowolnego wykładu $g_0, g_1, \dots g_n$ $(n \leq N)$ liniowo niezależnych funkcji układ $f_0, f_1, f_n$ określony wzorami:

$$\begin{cases} f_0 = g_0 \\ f_k = g_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)_N}{(f_j, f_j)_N} \cdot f_j \end{cases} \quad (k=1,2 \dots N)$$

jest ortogonalny względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$

* układ $f_0, f_1 \dots f_n$ jest ortogonalny gdy $i \neq j$ $(f_i, f_j)_N = 0$

TEZA: proces ortogonalizacji Grama-Schmidta działa poprawnie ($f_0, f_1 \dots f_n$ są ortogonalne)

DOWÓD INDUKCYJNY: Załóżmy, że liniowo niezależne. $g_0, g_1 \dots g_N$ są

PODSTAWA INDUKCYJNA: Dla $k=0$, $f_0 = g_0$ teza spełnia.

KROK INDUKCYJNY:
ZAŁOŻENIE INDUKCYJNE: Załóżmy, że $f_0, f_1 \dots f_{k-1}$ to układ funkcji ortogonalnych uzyskanych poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta.

Pokażemy, że wówczas $f_k = g_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)_N}{(f_j, f_j)_N} \cdot f_j$ $(k=1,2 \dots N)$ jest ortogonalny do $f_0, f_1 \dots f_{k-1}$.

Weźmy dowolne $l \in \{0, 1 \dots k-1\}$ i rozpiszmy $(f_l, f_k) = (f_l, g_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)}{(f_j, f_j)} \cdot f_j) =$

$$= (g_k, f_l) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)}{(f_j, f_j)} \cdot (f_j, f_l)$$

Z zał. ind. wiemy, że $f_0, f_1 \dots f_{k-1}$ są ortogonalne, więc dla każdego $j \neq l$ $(f_j, f_l) = 0$

Zatem: $(f_l, f_k) = (g_k, f_l) - \frac{(g_k, f_l)}{(f_l, f_l)} \cdot (f_l, f_l) =$

$= (g_k, f_l) - (g_k, f_l) = 0$

Zatem funkcja $f_k$ jest ortogonalna do każdej spośród $f_0, f_1 \dots f_{k-1}$

Zatem na mocy zasady indukcji: proces ortogonalizacji Grama-Schmidta działa poprawnie