LISTA 2 ZAD 1

Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad R)? Rozszerz ich maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1) $(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1)$

nie może być liniowo niezależne bo mają 4 wektory

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+1-0-1-0 = 1 \neq 0$$

liniowo niezależne więc to baza

2) $(0,1,2),(1,1,1),(1,1,1)$ dwa takie same wektory!

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

, czyli wektory $(0,1,2)$ i $(1,1,1)$ są liniowo niezależne

Dokładamy 3 wektor tak aby całość była liniowo niezależna, np.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{BAZA}} \neq 0$$

Aby sprawdzić, czy wektory są liniowo niezależne można:

1) policzyć wyznacznik, gdy wyznacznik $\neq 0$ → niezależne, wyznacznik $= 0$ → zależne

2) sprawdzić, czy da się je ustawić w postaci schodkowej, jeśli tak to liniowo niezależne

3) $(1,0,1,0),(1,2,0,1),(0,2,1,1),(0,0,1,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \ldots + 0 \ldots =$$

$= 2+2-2+(-1)\cdot(-2) = 2+2 = 4 \neq 0$, więc liniowo niezależne, te wektory to baza

4) $(1,0,1,0),(0,2,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \ldots + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \ldots =$$

$= 4 + (-2) = 2 \neq 0$, czyli te wektory są bazą.

LISTA 2 ZAD 6

Wyraź w bazach $B=\{(1,2,3);(0,1,2);(0,0,1)\}$ oraz $C=\{(1,-1,2);(0,1,1);(0,-1,1)\}$ wektory:

A) $(1,0,0)$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,0,1)=(1,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ 2\cdot\alpha+\beta=0\\ 3\cdot\alpha+2\cdot\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-2\\ \gamma=1\end{cases} \qquad (1,0,0)_B=(1,-2,1)$$

$$\alpha(1,-1,2)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,-1,1)=(1,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ -\alpha+\beta-\gamma=0\\ 2\cdot\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \rightarrow \beta=1+\gamma$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1+\gamma\\ 2+1+\gamma+\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1+\gamma\\ 2\gamma=-3 \rightarrow \gamma=-3/2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1/2\\ \gamma=-3/2\end{cases} \qquad (1,0,0)_C=(1,-1/2,-3/2)$$

B) $(0,1,0)$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,0,1)=(0,1,0)$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ 2\cdot\alpha+\beta=1\\ 3\cdot\alpha+2\cdot\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\\ \gamma=-2\end{cases} \qquad (0,1,0)_B=(0,1,-2)$$

$$\alpha(1,-1,2)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,-1,1)=(0,1,0)$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ -\alpha+\beta-\gamma=1\\ 2\cdot\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1+\gamma\\ 1+\gamma+\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1/2\\ \gamma=-1/2\end{cases} \qquad (0,1,0)_C=(0,1/2,-1/2)$$

c) $(0,0,1)$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,0,1)=(0,0,1)$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\2\cdot\alpha+\beta=0\\3\cdot\alpha+2\cdot\beta+\gamma=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=1\end{cases}\qquad (0,0,1)_{\mathcal{B}}=(0,0,1)$$

$$\alpha(1,-1,2)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,-1,1)=(0,0,1)$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\-\alpha+\beta-\gamma=0\\2\cdot\alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\\beta=\gamma\\2\gamma=1\end{cases}\ \beta=1/2,\ \gamma=1/2\qquad (0,0,1)_{\mathcal{C}}=(0,1/2,1/2)$$

D) $(7,3,2)$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,0,1)=(7,3,2)$$

$$\begin{cases}\alpha=7\\2\cdot\alpha+\beta=3\\3\cdot\alpha+2\cdot\beta+\gamma=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=7\\\beta=-11\\\gamma=3\end{cases}\qquad (7,3,2)_{\mathcal{B}}=(7,-11,3)$$

$$\alpha(1,-1,2)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,-1,1)=(7,3,2)$$

$$\begin{cases}\alpha=7\\-\alpha+\beta-\gamma=3\\2\cdot\alpha+\beta+\gamma=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=7\\\beta=10+\gamma\\14+10+\gamma+\gamma=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=7\\\beta=-1\\\gamma=-11\end{cases}\qquad (7,3,2)_{\mathcal{C}}=(7,-1,-11)$$

E) $(-2,1,5)$

$$\alpha(1,2,3)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,0,1)=(-2,1,5)$$

$$\begin{cases}\alpha=-2\\2\cdot\alpha+\beta=1\\3\cdot\alpha+2\cdot\beta+\gamma=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=5\\\gamma=1\end{cases}\qquad (-2,1,5)_{\mathcal{B}}=(-2,5,1)$$

LISTA 2 ZAD 7

Wyznacz wymiary $LIN(S) \cap LIN(T)$ oraz $LIN(S) + LIN(T)$ dla

- $S = \{(1,2,0,1); (1,1,1,0)\}$ $T = \{(1,0,1,0); (1,3,0,1)\}$

$\dim(LIN(S)) = 2$
$\dim(LIN(T)) = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 - w_1]{w_2 - w_1,\ w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 + w_2]{w_3 - 2 \cdot w_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim(LIN(S) + LIN(T)) = 3$

$\dim(LIN(S) \cap LIN(T)) = 1$

ze wzoru

$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

• $S = \{(2,-1,0,-2),(3,-2,1,0),(1,-1,1,-1)\}$

$T = \{(3,-1,-1,0),(0,-1,2,3),(5,-2,-1,0)\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 = w_3 - \frac{1}{2} w_1]{w_2 = w_2 - \frac{3}{2} w_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 = w_3 + \left(-\frac{1}{7}\right) w_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{0}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$\dim(LIN(S)) = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 = w_3 - \frac{5}{3} \cdot w_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 = w_4 + \left(-\frac{1}{3}\right) w_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\dim(LIN(T)) = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_4 - 3 \cdot w_1 \\ w_6 - 5 \cdot w_1}]{\substack{w_2 - 3 \cdot w_1 \\ w_3 + 2 \cdot w_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_5 = w_5 + w_2 \\ w_6 = w_6 - 3 \cdot w_2}]{\substack{w_3 = w_3 + 3 w_2 \\ w_4 = w_4 - 2 \cdot w_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_6 = w_6 + \left(-\frac{4}{3}\right) w_4]{w_5 = w_5 + 2 \cdot w_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dim(LIN(S) + LIN(T)) = 4$$

ze wzoru

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

$$4 = 3 + 3 - \dim(S \cap T)$$

$$\dim(LIN(S) \cap LIN(T)) = 6 - 4 = 2$$

LISTA 2 ZAD 2

(Jaka jest różnica w poleceniach tego zadania, i zad 1:
- rozszerz ich maksymalny podzbiór niezależny do bazy.
- rozszerz je do bazy (odpowiedniego R^n.

Już rozumiem. Zobacz na polecenie ZAD. 1 LISTA 2.
1) Mamy sprawdzić czy układ wektorów jest niezależny i te wektory co będą niezależne rozszerzyć do bazy
polecenie ZAD. 2 LISTA 2.
1) każe wyznaczyć i rozszerzyć. ok

A) $(2,2,7,-1),(3,-1,2,4),(1,1,3,1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 - 2 \cdot w_1]{w_2 - 3 \cdot w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Baza
$(2,2,7,-1)$
$(3,-1,2,4)$
$(1,1,3,1)$
$(0,0,0,1)$

b) $(2,3,-4,-1),(1,-2,1,3)$ $\quad (2,3,-4,-1)$, $(1,-2,1,3)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - \frac{1}{2} w_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

c) $(2,3,5,-4,1)(1,-1,2,3,5)$ $\quad (2,3,5,-4,1)$, $(1,-1,2,3,5)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - \frac{1}{2} w_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 5 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

LISTA 2 ZAD 4

Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych W, W' (będących podprzestrzeniami V) zachodzi

$$\dim(W+W') = 1 + \dim(W \cap W')$$

Udowodnij, że suma $W+W'$ jest jedną z przestrzeni W, W', a przecięcie $W \cap W'$ drugą.

Przypomnijmy, że $\dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$

Porównując z zależności w treści dostajemy:

$$\dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') = 1 + \dim(W \cap W')$$

Po przeniesieniu:

$$\dim(W) + \dim(W') - 1 = 2\dim(W \cap W')$$

Zauważmy, że $\dim(W \cap W') \leq \dim(W)$
$\dim(W \cap W') \leq \dim(W')$

Wymiar jest liczbą naturalną, gdyby więc dodatkowo zachodziło

$$\dim(W \cap W') < \dim(W) + 1$$
$$\dim(W \cap W') < \dim(W') + 1$$

to mielibyśmy $2\dim(W \cap W') \leq \dim(W) + \dim(W') + 2$

co jest sprzeczne z wcześniejszą obserwacją. Czyli w przynajmniej jednym przypadku mamy równość t.j.

$$\dim(W \cap W') = \dim(W) \text{ lub}$$
$$\dim(W \cap W') = \dim(W')$$

Zauważmy teraz, że jeśli $V' \leq V$ oraz $\dim(V') = \dim(V)$ to $V' = V$. Bo bazę V' można rozszerzyć do V, a dane są tej samej mocy. Czyli dostajemy, że:

$$W \cap W' = W \text{ lub}$$
$$W \cap W' = W'$$

co oznacza $W' \leq W$ lub
$W \leq W'$

LISTA 2 ZAD5

Niech $U, W, W' \leq V$. Udowodnij zawieranie:

$$(U \cap W) + (U \cap W') \leq U \cap (W + W')$$

Pokaż, że jeśli $W \leq U$ to w zachodzi równość obu stron zawierania.

Zauważmy, że suma przestrzeni wektorowych jest monotoniczna po obu argumentach tj.

$$A \leq A', B \leq B' \Rightarrow A + B \leq A' + B'$$

co wynika wprost z definicji: $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ i każda suma postaci $a+b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$ jest też w $A' + B'$, bo $A \leq A'$, $B \leq B'$.

Przechodząc do treści zadania: zauważmy, że z jednej strony:

$$(U \cap W) \leq U, \ (U \cap W') \leq W' \Rightarrow (U \cap W) + (U \cap W') \leq U + U = U$$

Jednocześnie

$$(U \cap W) \leq W, (U \cap W') \leq W' \Rightarrow (U \cap W) + (U \cap W') \leq W + W'$$

Łącząc te dwa zawierania dostajemy

$$(U \cap W) + (U \cap W') \leq U \cap (W + W')$$

Przechodząc do drugiego punktu: przyjrzyjmy się lewej stronie, tj. $(U \cap W) + (U \cap W')$. Używając założenia można to uprościć do

$$(U \cap W) + (U \cap W') = W + (U \cap W')$$

Rozważmy dowolny wektor z prawej strony, tj.

$$U \cap (W + W')$$

jest on postaci $w + w'$, gdzie $w \in W$, $w' \in W'$, jednocześnie $w + w' \in U$. Zauważmy, że skoro $w \in U$, to również $w \in U$ i w takim razie $w' = w + w' - w \in U$, czyli $w' \in W' \cap U$. I w takim razie $w + w' \in W + (W' \cap U)$

$$= \begin{bmatrix} f_{k-1}\cdot f_{n-1} + f_k f_n & f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1} \\ f_k \cdot f_{n-1} + f_{k+1}\cdot f_n & f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Przyrównując, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} f_{n+k-1} & f_{n+k} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k-1} f_{n-1} + f_k f_n & f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1} \\ f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n & f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Aby macierze były równe, elementy na odpowiadających sobie pozycjach muszą być równe. Więc w szczególności muszą zachodzić równości

$$f_{n+k} = f_k \cdot f_{n-1} + f_{k+1} f_n$$
$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1}$$

LISTA 2 ZAD 9

Niech $W \leq V$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq V$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

A)

1) istnieje wektor $u \in V$, taki, że $U = u + W$;
2) istnieje wektor $u \in U$, taki, że $U = u + W$;
3) dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + W$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków

B)

1) istnieje wektor $u \in V$, taki, że $U - u$ jest przestrzenią liniową
2) istnieje wektor $u \in U$, taki, że $U - u$ jest przestrzenią liniową
3) dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

A) $1 \Rightarrow 2$ oczywiste, jako że $\vec{0} \in W \Rightarrow u \in U$
(jeżeli takiego wektora nie ma to tw. zachodzi)

$2 \Rightarrow 3$ weźmy dowolny $v \in U$, wówczas $v = u + w_1$, gdzie dla pewnego $w_1 \in W$

Chcemy pokazać, że $(u + w_1) + W = u + W$

rozważamy dowolny el. V, jest postaci $(u + w_1) + \underbrace{w_2}_{\in W}$

(1) Wtedy: $u+w_1+w_2 = u+(w_1+w_2) \in u+W$

(2) Rozważmy dowolny el. z $u+W$, W jest postaci $u+w$

Wtedy $u+w = v+w_1+(w-w_1) \in (w+w_1)+W$

$3 \Rightarrow 1$ oczywiste (zakładając, że $U \neq \emptyset$), jako że $U \leq V$

B) $1 \Rightarrow 2$ $\quad \vec{0} \in U-u \Rightarrow u \in U$

$2 \Rightarrow 3$ Weźmy dowolny $v \in U \setminus \{u\}$, (jeżeli takiego wektora nie ma, to tw. zachodzi)

Chcemy pokazać, że $U-v \leq V$

Weźmy dowolne dwa wektory należące do $U-v$, tj. u_1-v, u_2-v

Chcemy pokazać, że $u_1+u_2-v-v \in U-v$, tj. $u_1+u_2-v \in U$

Zauważmy, że $u_1-u, u_2-u, v-u \in U-u \Rightarrow$

$$(u_1-u)+(u_2-u)-(v-u) \in U-u$$
$$\parallel$$
$$u_1+u_2-v-u$$
$$\Downarrow$$
$$u_1+u_2-v \in U$$

Weźmy teraz dowolny skalar α

Chcemy pokazać, że $\alpha(u_1-v)\ \alpha u_1 - \alpha v = \alpha u_1-(\alpha-1)v - v \in U-v$

czyli, że $\alpha u_1 - (\alpha-1)v \in U$

Zauważmy, że $\alpha u_1 - \alpha u, (\alpha-1)v-(\alpha-1)u \in U-v \Rightarrow$

$$(\alpha u_1 - \alpha u) - ((\alpha-1)v-(\alpha-1)u) \in U-u$$
$$\parallel$$
$$\alpha u_1 - (\alpha-1)v - u$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha u_1 - (\alpha-1)v \in U$$

dodatkowo $U-v$ jest niepusty (bo $U \ni u$)

$3 \Rightarrow 1$ oczywiste (zakładając, że $U \neq \emptyset$), jako że $U \leq V$

LISTA 2 ZAD 3

Rozważmy przestrzeń nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n$ będą liniowo zależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiór wektorów

A) $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$

B) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo zależne?

WSKAZÓWKA: Można bezpośrednio z def, ale szybciej: zauważ, że $v_1, \dots, v_n$ są bazą przestrzeni liniowej (jakiej). Można na nich zastosować eliminację Gaußa.

BAZA STAND
$v_1 = (1,0)$
$v_2 = (0,1)$

$\alpha v_1 + v_2 = \alpha(1,0) + 1(0,1) = (\alpha, 1)$
$v_1 + \alpha v_2 = (1, \alpha)$

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 \neq 0$

A) odejmijmy α razy drugi wektor od pierwszego, uzyskujemy w ten sposób:

$$\{(1-\alpha^2)v_2, v_1 + \alpha v_2\}$$

Jeśli $\alpha \in \{-1, 1\}$ to ten układ jest liniowo zależny, czyli był też ten oryginalny.
W przeciwnym przypadku (nowy) układ jest liniowo niezależny: możemy pomnożyć pierwszy wektor przez $(1-\alpha^2)^{-1}$ i odjąć α raz od drugiego, uzyskując układ $\{v_2, v_1\}$, który jest niezależny. Czyli również oryginalny układ był niezależny.

B) Przyjmijmy naszą przestrzeń do generowanej przez $v_1, \dots, v_n$ i wyraźmy wektory w bazie $v_1, \dots, v_n$ i wyraźmy wektory w bazie $v_1, \dots, v_n$. Uzyskane wektory można zapisać jako (puste pole oznacza 0):

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & & \\ & 1 & 1 & \cdots & \\ & & 1 & 1 & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ \alpha & & & & 1 \end{matrix}$$

Odejmujemy od $n-1$-szego wiersza n-ty

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ -\alpha & \cdots & & 1 & 0 \\ \alpha & \cdots & & & 1 \end{matrix}$$

Potem od $n-2$-ego $n-1$-szy,
$n-3$-ego $n-2$-gi

itd...

aż od drugiego odejmiemy trzeci

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & \\ (-1)^{n-2}\cdot\alpha & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\alpha & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha & \cdots & & 1 \end{matrix}$$

tj. w i-tym wierszu (dla $i>1$) mamy

$$((-1)^{n-i}\alpha, 0 \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$$

TA JEDYNKA ZNAJDUJE SIĘ NA i-TYM MIEJSCU

W ostatnim przekształceniu od drugiego odejmujemy $(-1)^{n-2}\alpha$ razy pierwszy

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & \\ 0 & 1-(-1)^{n-2}\alpha & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha & \cdots & & 1 \end{matrix}$$

Jeśli $1-(-1)^{n-2}\alpha = 0$ ($\iff \alpha=(-1)^{n}$) to układ jest zależny (bo drugi wiersz to $\vec{0}$). W przeciwnym przypadku możemy odjąć od pierwszego wiersza wielokrotność drugiego, by uzyskać postać schodkową, czyli układ liniowo niezależny.

LISTA 2 ZAD 10

Niech $W \leq V$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset$$

Możesz skorzystać z Zad. 9, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Niech U, U' będą warstwami podprzestrzeni W. Rozważmy przecięcia $U \cap U'$. Jeśli jest puste, to teza jest spełniona. Jeśli nie jest, to niech $\vec{v} \in U \cap U'$. Wtedy zgodnie z Zadaniem 9 mamy

$$U = \vec{v} + W$$
$$U' = \vec{v} + W$$

Scanned with CamScanner

Zauważmy, że

$$U \cap U' = (\vec{v} + W) \cap (\vec{v} + W)$$

wprost z def. sumy łatwo sprawdzić, że

$$(\vec{v} + W) \cap (\vec{v} + W) = \vec{v} + W$$

co daje tezę.

LISTA 2 ZAD 11

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś U i U' warstwami jakichś (niekoniecznie takich samych) podprzestrzeni V.
Pokaż, że przecięcie $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą (jakiejś podprzestrzeni).

Rozważmy przecięcie $U \cap U'$. Jeśli jest puste, to teza jest spełniona. Jeśli nie jest, to niech $\vec{v} \in U \cap U'$.
Wtedy zgodnie z zadaniem 9 mamy:

$$U = \vec{v} + W,$$
$$U' = \vec{v} + W'$$

dla odpowiednich przestrzeni liniowych $W, W' \leq V$.
Zauważmy, że wprost z def. sumy łatwo sprawdzić, że

$$(\vec{v} + W) \cap (\vec{v} + W') = \vec{v} + (W \cap W')$$

Wiemy, że $W \cap W' \leq V$ jest podprzestrzenią, i tym samym $U \cap U'$ jest warstwą przestrzeni $W \cap W'$.