LISTA 7

ZAD 1. PODAJ POSTAĆ NEWTONA WIELOMIANU INTERPOLACYJNEGO DLA NASTĘPUJĄCYCH DANYCH

SPOSÓB I

A)

x_k	-3	-1	0	1
y_k	-16	0	-16	32

Z WYKŁADU:

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i$$

$$f[x_i, x_{i+1} \dots x_j] = \frac{f[x_{i+1} \dots x_j] - f[x_i \dots x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

k	x_k	y_k			
0	-3	-16			
1	-1	0	8		
2	0	-16	-16	-8	
3	1	32	48	32	

$$f[x_0, x_1] = \frac{0-(-16)}{-1-(-3)} = \frac{16}{2} = 8$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-16-8}{0-(-3)} = \frac{-24}{3} = -8$$

$$\frac{32-(-8)}{1-(-3)} = \frac{40}{4} = 10 \to f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{48-(-16)}{1-(-1)} = \frac{64}{2} = 32$$

$$L(x) = -16 + 8(x+3) - 8(x+3)(x+1) + 10(x+3)(x+1)(x-0)$$

SPOSÓB II (na początku wykładu 6)

$$L_n(x) = b_0 + b_1\underbrace{(x-x_0)}_{p_1(x)} + b_2\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{p_2(x)} + \dots +$$

$$+ b_n\underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{p_n(x)}$$

$y_0 = L_n(x_0) = b_0 \quad \to \quad b_0 = -16$

$y_1 = L_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \quad \to \quad -16 + b_1(-1-(-3)) = 0$

$b_1 \cdot 2 = 16$

$b_1 = 8$

$y_2 = L_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = -16$

$\cancel{-16} + 8(0-(-3)) + b_2(0-(-3))(0-(-1)) = \cancel{-16}$

$b_2 \cdot 3 = -8 \cdot 3$

$3b_2 = -24$

$b_2 = -8$

$y_3 = L_n(x_3) = b_0 + b_1(x_3 - x_0) + b_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + b_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

$-16 + 8 \cdot 4 + (-8) \cdot 4 \cdot 2 + b_3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 32$

$8 \cdot b_3 = 48 - 32 + 64$

$8b_3 = 80 \to b_3 = 10$

B)

x_k	0	1	3	-1	-3
y_k	-16	32	560	0	-16

$$b_1 = \frac{32-(-16)}{1-0} = 48$$

$$b_2 = \frac{264-48}{3-0} = 72$$

k	x_k	y_k				
0	0	-16 → b_0				
1	1	32	48			
2	3	560	264	72		
3	-1	0	140	62	10 → b_2	
4	-3	-16	8	22	10	0 → b_3

obliczenia:

$$\frac{560-32}{3-1} = \frac{528}{2} = 264$$

$$\frac{0-560}{-1-3} = \frac{-560}{-4} = 140$$

$$\frac{-16-0}{-3-(-1)} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$\frac{10-10}{-3-0} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\frac{140-264}{-1-1} = \frac{-124}{-2} = 62$$

$$\frac{8-140}{-3-3} = \frac{-132}{-6} = 22$$

$$\frac{62-72}{-1-0} = \frac{-10}{-1} = 10 \rightarrow b_2$$

$$\frac{22-62}{-3-1} = \frac{-40}{-4} = 10$$

$$L_n(x) = -16 + 48(x-x_0) + 72(x-x_0)(x-x_1) + 10(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

C)

x_k	-1	1	0	-3
y_k	0	-8	-16	-16

k	x_k	y_k			
0	-1	0 → b_0			
1	1	-8	-4		
2	0	-16	8	12	
3	-3	-16	0	2	5

$$b_1 = \frac{-8-0}{1-(-1)} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$b_2 = \frac{8-(-4)}{0-(-1)} = \frac{12}{1} = 12$$

$$b_4 = \frac{2-12}{-3-(-1)} = \frac{-10}{-2} = 5$$

OBLICZENIA:

$$\frac{-16-(-8)}{0-1} = \frac{-8}{-1} = 8 \qquad \frac{0-8}{-3-1} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\frac{-16-(-16)}{-3-0} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$L_n(x) = -4(x-x_0)+12(x-x_0)(x-x_1)+5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

ZAD6 FUNKCJE $f(x)=e^{x/3}$ INTERPOLUJEMY WIELOMIANEM $L_n \in \Pi_n$ W $n+1$ RÓWNOODLEGŁYCH PUNKTACH PRZEDZIAŁU $[-1,1]$. ZNAJDŹ MOŻLIWIE NAJMNIEJSZĄ WARTOŚĆ n, DLA KTÓREJ

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)-L_n(x)| \le 10^{-16} ?$$

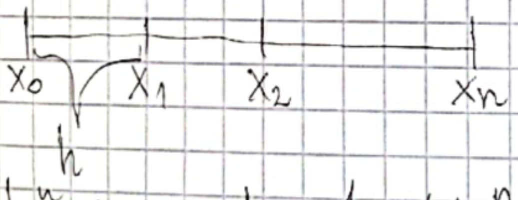
JAK ZMIENI SIĘ SYTUACJA, GDY ZA WĘZŁY PRZYJMIEMY ZERA WIELOMIANU CZEBYSZEWA?

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{x/3}$$
$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot e^{x/3}$$
$$f'''(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot e^{x/3}$$

ze wzoru $[f(x)\cdot g(x)]' = \underbrace{f'(x)g(x)}_{\emptyset} - f(x)\cdot g'(x)$

zauważamy zależność $f^{(n)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot e^{x/3}$

Z REPETYTORIUM:



$$\left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right| < \frac{1}{4} n!\, h^{n+1}$$

$$\|f^{(n+1)}\| \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{x/3}$$

równoodległe $[x_0, x_n]$

$$\|p_{n+1}\| \le \frac{1}{4}\cdot n!\, h^{n+1}$$

$$\|f - L_n\| \le \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot \|p_{n+1}(x)\|$$

$h = \frac{2}{n}$ ← $[-1;1]$ ← ilość podprzedziałów

$$\|p_{n+1}\| \leq \frac{1}{4} n! \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1}$$

Kiedy możemy być pewni, że dokładność będzie rzędu 10^{-16}?

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{1/3} \cdot \frac{1}{4} n! \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-16}$$

$(n+1)$ $\quad$ $\to n$ $\quad$ $(n+1)$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{1/3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^{n+1}}{n^{n+1} \cdot (n+1)} \leq 10^{-16}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot 2^{n+1}}{n^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{10^{-16} \cdot 4}{e^{1/3}}$$

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1} \cdot n^{n+1}(n+1)} \leq \frac{10^{-16} \cdot 4}{e^{1/3}}$$ Najmniejsze $\boxed{n = 12}$

z poprzedniej listy

CZEBYSZEWA

$$\|f(x) - L_n(x)\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot \|p_{n+1}(x)\|$$

$$p_{n+1}(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{2^n} \to \cos(x)$$

$$\|p_{n+1}(x)\| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot e^{1/3} \cdot \frac{1}{2^n}}{(n+1)!} \leq 10^{-16}$$

$$\frac{e^{1/3}}{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot 2^n} \leq 10^{-16}$$

$$\frac{1}{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot 2^n} \leq \frac{10^{-16}}{e^{1/3}}$$ Najmniejsze $\boxed{n = 12}$

ZAD 7. JĘZYK PROGRAMOWANIA PWO++ MA BOGATĄ BIBLIOTEKĘ FUNKCJI I PROCEDUR NUMERYCZNYCH. WŚRÓD NICH ZNAJDUJE SIĘ M.IN. PROCEDURA Interp_Newton(x,f) ZNAJDUJĄCA DLA WEKTORA $x := [x_0, x_1, \ldots x_n]$ PARAMI RÓŻNYCH LICZB RZECZYWISTYCH I WEKTORA $f := [f_0, f_1, \ldots f_n]$ WSPÓŁCZYNNIKI b_k ($k = 0,1,\ldots n$) POSTACI NEWTONA WIELOMIANU INTERPOLACYJNEGO $L_n \in \Pi_n$,

$$L_n(x) := b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + b_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

SPEŁNIAJĄCEGO WARUNKI $L_n(x_i) = f_i$ DLA $i = 0,1,\ldots n$. NIESTETY PROCEDURA TA MA PEWNĄ WADĘ, MIANOWICIE n MUSI BYĆ MNIEJSZE NIŻ 31. W JAKI SPOSÓB WYKORZYSTUJĄC PROCEDURĘ Interp_Newton TYLKO RAZ, MOŻNA SZYBKO WYZNACZYĆ WSPÓŁCZYNNIK POSTACI NEWTONA WIELOMIANU $L_{31} \in \Pi_{31}$ SPEŁNIAJĄCEGO WARUNKI

$$L_{31}(z_i) = h_i \qquad (i = 0,1 \ldots 31;\ z_i \neq z_j \text{ dla } i \neq j)$$

$L_{31}(x)$ możemy zapisać jako $L_{31}(x) = L_{30}(x) + b_{31} \cdot p_{31}(x)$

b_0

$L_n(x) = L_{n-1}(x) + b_n \cdot p_n(x)$ ze wzoru

$$L_n(x) = \underbrace{b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots}_{L_{n-1}(x)} + b_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$b_n = \frac{L_n(x) - L_{n-1}(x_n)}{p_n(x_n)}$$

SKĄD? $L_n = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

$L_n = L_{n-1}(x_n) + b_n \cdot p_n(x_n)$

$b_n \cdot p_n(x_n) = L_n - L_{n-1}(x_n)$

$b_n = \frac{L_n - L_{n-1}(x_n)}{p_n(x_n)}$

$L_{n-1}(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})$

$= b_0 + (x-x_0)(b_1 + b_2(x-x_1) + \ldots + b_{30}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})) =$

$= b_0 + (x-x_0)(b_1 + (x-x_1)(b_2 + b_3(x-x_2) + \ldots + b_{30}(x-x_\cdot)\cdots(x-x_n))$

$= b_0 + (x-x_0)(b_1 + (x-x_1)(b_2 + (x-x_2)(\ldots b_{n-1} + (x-x_{n-1}) \cdot b_n)))))$

$p_n(x_n) = (x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})$

ZAD 3 KORZYSTAJĄC Z WIEDZY ANALIZY MATEMATYCZNEJ, ZNAJDŹ TAKIE WARTOŚCI PARAMETRÓW $a, b > 0$ BY WYRAŻENIA

$$\max_{x\in[-1;1]} |(x-a)(x+a)|, \quad \max_{x\in[-1;1]} |(x-b)x(x+b)|$$

PRZYJMOWAŁY NAJMNIEJSZĄ MOŻLIWĄ WARTOŚĆ. JAKIE I DLACZEGO PŁYNĄ STĄD WNIOSKI DLA SPOSOBU WYBORU WĘZŁÓW INTERPOLACJI?

A) $f(x) = |(x-a)(x+a)| = |(x^2 - a^2)|$

$f'(x) = 2x$

$f'(0) = 0$

krańce przedziałów -1 i 1

$\Big\}$ więc $x \in \{-1, 0, 1\}$

$f(-1) = |1 - a^2|$

$f(1) = |1 - a^2|$

$f(0) = |-a^2|$