LISTA 8

ZAD 1 NIECH $A(x)$ BĘDZIE FUNKCJĄ TWORZĄCĄ CIĄGU a_n, PODAJ POSTAĆ FUNKCJI TWORZĄCEJ DLA CIĄGU

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

WSKAZÓWKA: TRZEBA UŻYĆ FUNKCJI TWORZĄCEJ $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

Funkcja tworząca ciągu S_n wygląda zatem następująco:

$$S(x) = a_0 + (a_0 + a_1)\cdot x + (a_0 + a_1 + a_2)\,x^2 + \ldots + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)\,x^n + \ldots$$

$A(x)$

$A(x)\cdot x$

$A(x)\cdot x^2$

$$S(x) = A(x) + A(x)\cdot x + A(x)\,x^2 + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(x)\cdot x^n = A(x)\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}$$

Scanned with CamScanner

ZAD 2 WYZNACZ FUNKCJE TWORZĄCE CIĄGÓW:

A) $a_n = n^2$

$a_0 = 0^2$
$a_1 = 1^2$
$a_2 = 2^2$
$a_3 = 3^2$
$\vdots$
$a_n = n^2$

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
$$A(x) = 1x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots + n^2 x^n + \ldots$$
$$= x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2 x^n + \ldots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot x^k$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = B(x)$$
$$B'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$
$$B'(x) \cdot x = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n + \ldots$$
$$(B'(x) \cdot x)' = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots$$
$$A(x) = (B'(x) \cdot x)' \cdot x = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots + n^2 x^n + \ldots$$

Zapiszmy $(B'(x) \cdot x)' x$ za pomocą $B(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)' \cdot x\right)' \cdot x = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$$

OBLICZENIA:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{(1)' \cdot (1-x) - 1 \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$A(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \cdot x = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Scanned with CamScanner

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(x)'\cdot(1-x)^2 - x\cdot(1-2x+x^2)'}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{1-2x+x^2 - x(-2+2x)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{1-\cancel{2x}+x^2+\cancel{2x}-2x^2}{(1-x)^4} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}\cdot x = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

B) $a_n = n^3$

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_2 = 2^3 = 8$
$a_3 = 3^3 = 27$
$\vdots$
$a_n = n^3$

$A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots$

$A(x) = x^1 + 8x^2 + 27x^3 + \ldots$

korzystając z zad. 2A

$(B'(x)\cdot x)'\cdot x = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots + n^2x^n + \ldots$

$((B'(x)\cdot x)'\cdot x)' = 1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \ldots + n^3x^{n-1} + \ldots$

$((B'(x)\cdot x)'\cdot x)'x = x + 8x^2 + 27x^3 + 64x^4 + \ldots + n^3x^n + \ldots$

$$\left(\left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right)'\cdot x\right) = \frac{(2x+1)(1-x)+3(x^2+x)}{(1-x)^4}\cdot x =$$

$$= \frac{2x-2x^2+1-x+3x^2+3x}{(1-x)^4} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}\cdot x =$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} = A(x)$$

c) $\binom{n+k}{k}$

$a_0 = \binom{k}{k} = 1 \qquad n \geq 1$

$a_1 = \binom{1+k}{k}$

$a_2 = \binom{2+k}{k}$

$\vdots$

$a_n = \binom{n+k}{k}$

$\vdots$

$$A(x) = 1 + \binom{1+k}{k} x + \binom{2+k}{k} x^2 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{(k+1)!}{k!\,1!} x + \frac{(k+2)!}{k!\,2!} x^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,n!} x^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} \cdot x^n =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \cdots (n+k) x^n =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3) \cdots (n+k) \cdot (x^{n+1})' =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4) \cdots (n+k) (x^{n+2})'' =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+k})^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n \cdot x^k)^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(x^k \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(x^k \cdot \frac{1}{1-x} \right)^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\frac{x^k}{1-x} \right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^k}{1-x} \right)^{(k)}$$

Scanned with CamScanner

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & \text{dla } q \neq 1 \end{cases}$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1} x^i$$

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^k}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-x} - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} x^i}\right)^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i\right)^{(k)} = 0$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)^{(k-1)} =$$

gdy $i < k$
(i zawsze $< k$)

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}\right)^{(k-2)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

ZAD 8 ROZWAŻMY REPREZENTACJE G: MACIERZOWĄ (ZA POMOCĄ MACIERZY SĄSIEDZTWA), LISTOWĄ. DLA KAŻDEJ Z TYCH REPREZENTACJI, OKREŚL ZŁOŻONOŚĆ WYKONANIA NA GRAFIE G NASTĘPUJĄCYCH OPERACJI:

a) OBLICZ STOPIEŃ USTALONEGO WIERZCHOŁKA

MACIERZOWA	LISTOWA
Musimy sprawdzić cały wiersz odpowiadający danemu wierzchołkowi.	Musimy policzyć długość listy danego wierzchołka
$O(n)$	$O(\deg(v_i))$

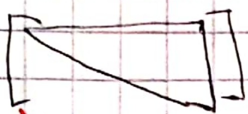
b) PRZEGLĄDNIJ WSZYSTKIE KRAWĘDZIE GRAFU

MACIERZOWA

zakładamy, że graf nieskierowany

$O\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

przechodzimy po



wraz z przekątną

LISTOWA

n - liczba wierzchołków

m - liczba krawędzi

$O(2m)$

bo dwa razy przejdziemy przez każdą krawędź

c) SPRAWDŹ CZY KRAWĘDŹ (u,v) NALEŻY DO GRAFU G

MACIERZOWA

$O(1)$

(sprawdzam kolumnę u i wiersz v)

LISTOWA

$O(deg(v))$

przechodzimy po całej liście (L_u)

D) USUŃ Z GRAFU G KRAWĘDŹ (u,v)

MACIERZOWA

$O(2) \rightarrow$ graf nieskierowany

$O(1) \rightarrow$ graf skierowany

LISTOWA

$deg(u) + deg(v)$

gdy graf nieskierowany

gdy skierowany $deg(u)$

E) WSTAW DO GRAFU G KRAWĘDŹ (u,v)

MACIERZOWA | LISTOWA

$O(2) \rightarrow$ gdy nieskierowany $\leftarrow O(2)$

$O(1) \rightarrow$ gdy skierowany $\leftarrow O(1)$

ZAD. 10 POKAŻ, ŻE JEŚLI W GRAFIE G ISTNIEJE DROGA Z u DO v, TO ISTNIEJE TEŻ ŚCIEŻKA Z u DO v.

Scanned with CamScanner

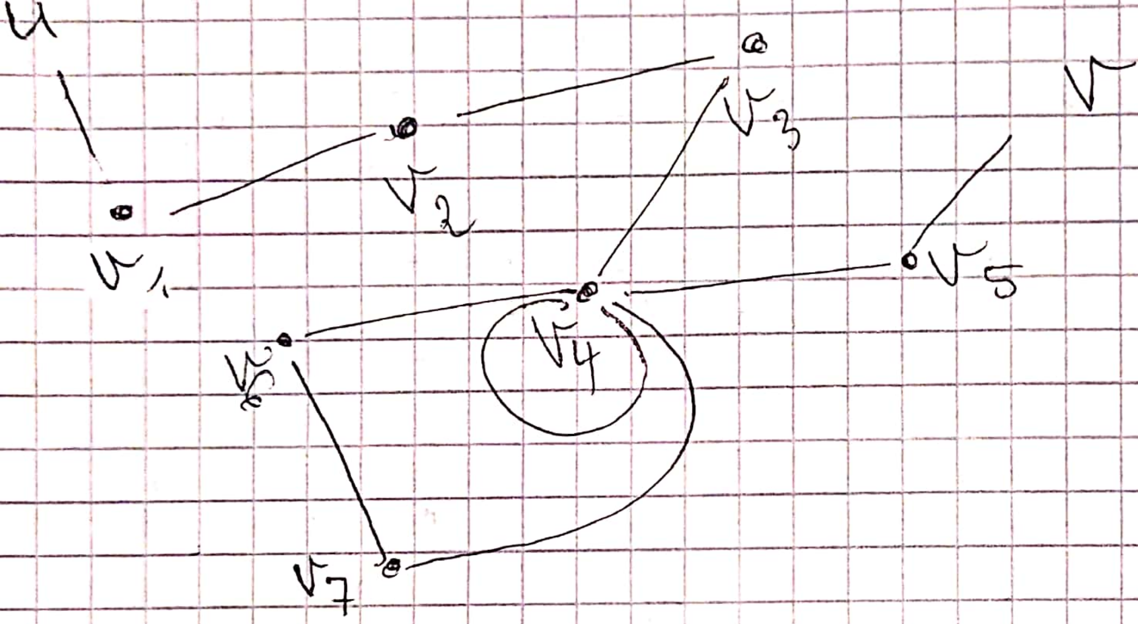
ZAD. 10 Z treści zadania wiemy, że istnieje droga z u do v. Istnieją więc dwa przypadki.

1) gdy droga jest ścieżką
2) gdy droga nie jest ścieżką,

Scanned with CamScanner

1) W tym przypadku kończy się nasz problem

2) Jeśli droga nie jest ścieżką to istnieje wierzchołek, który pojawi się co najmniej dwa razy



Możemy zauważyć że drogę (pomiędzy v_4)

$v_4 \to v_6 \to v_7 \to v_4$ jest zbędna.

Wiemy, że istnieje bezpośrednia droga z u do v_4 i z v_4 do v.

Zatem istnieje ścieżka z u do v.