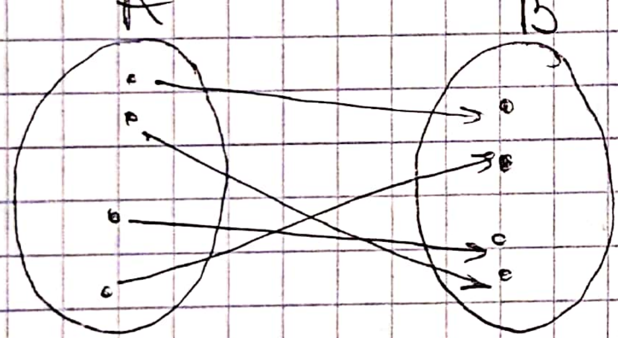
LISTA 1

ZAD 1. UDOWODNIJ PRZEZ INDUKCJĘ, ŻE LICZBA FUNKCJI RÓŻNOWARTOŚCIOWYCH Z M-ELEMENTOWEGO ZBIORU A W N-ELEMENTOWY ZBIÓR B WYNOSI $\frac{n!}{(n-m)!}$

(na ile sposobów można przyporządkować elementowi ze zbioru A element ze zbioru B)



m-elem. n-elem.

$m > n$ → źle, czyli założenie $n \geq m$

1) Załóżmy, że dla m działa
2) Chcemy pokazać, że dla m+1 też działa

$$\frac{n!}{(n-(m+1))!}$$

$$n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!} =$$

$(n-1)!$ → tyle zostało bo przyporządkowaliśmy już jeden element ze zbioru A

n ↑ ze zbioru B

Z ZAŁOŻENIA! – pozostałe m elementów przyporządkowano do $n-1$

– pierwszy element ze zbioru A możemy przyporządkować na n sposobów.

ZAD 2. CZY WŚRÓD LICZB $1 \dots 10^{10}$ JEST WIĘCEJ TYCH CO ZAWIERAJĄ CYFRĘ 9, CZY TYCH CO NIE ZAWIERAJĄ?

Zastanówmy się ile jest liczb, które nie zawierają 9.

Przedstawiamy wszystkie liczby w tej samej formie. Niezależnie od długości dopisujemy z przodu tyle zer, aby całkowita długość wynosiła 11 cyfr, np.

123 → 00000000123

Ile jest więc liczb nie zawierających 9?

9 to wszystkie cyfry bez "9" $\in \langle 0; 8 \rangle$

$$\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9} = 9^{10}$$

- Liczbę 10^{10} rozważymy i doliczymy później.
- Odejmiemy również liczbę złożoną z samych zer.

$$9^{10} (+1) (-1) = 9^{10} \approx 3.486.784.401$$

$10^{10} - 9^{10}$ → ilość liczb zawierających cyfrę "9" $\approx 6.513.215.599$

$$9^{10} < 10^{10} - 9^{10}$$

ODP. WIĘCEJ JEST TYCH LICZB, KTÓRE ZAWIERAJĄ "9"

Scanned with CamScanner

ZAD. 3 ILE JEST PODZBIORÓW N-ELEMENTOWEGO ZBIORU A O NIEPARZYSTEJ ILOŚCI ELEMENTÓW? A O PARZYSTEJ?

$|A|=n$

Ilość podzbiorów A o parzystej liczbie elementów: $\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}$ k-parzyste

Ilość podzbiorów A o nieparzystej liczbie elementów: $\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}$ k-nieparzyste

Zauważmy, że:

$$0 = (1+(-1))^n \overset{\text{dwumian Newtona}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{0\leq k\leq n}^{k \text{ parzyste}} \binom{n}{k} - \sum_{0\leq k\leq n}^{k \text{ nieparzyste}} \binom{n}{k} = 0$$

Zatem $\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ parz.}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ niepar.}}} \binom{n}{k}$, to oznacza, że podzbiorów A o nieparzystej i parzystej l. elementów jest tyle samo: $\frac{1}{2}\cdot 2^n = 2^{n-1}$

ZAD. 4 MIESZKAŃCY OSADY X MOGĄ SIĘ ZAPISYWAĆ NA DWIE JEDNODNIOWE WYCIECZKI, JEDNĄ DO KANIONU K, DRUGĄ NAD WODOSPAD W. WYCIECZKI TE ODBĘDĄ SIĘ W DWIE RÓŻNE SOBOTY. ILE JEST MOŻLIWOŚCI UFORMOWANIA SIĘ WYCIECZEK, JEŚLI W OSADZIE X MIESZKA N OSÓB? MOŻNA BRAĆ UDZIAŁ W OBU WYCIECZKACH?

Każdy z mieszkańców może dokonać wyboru spośród 4 opcji:

ILOŚĆ OPCJI

1. Nie pojechać na żadną z 2 wycieczek.
2. Pojechać na wycieczkę K.
3. Pojechać na wycieczkę W.
4. Pojechać na obie wycieczki.

$$\underbrace{\underline{4}\cdot\underline{4}\cdot\underline{4}\cdots\underline{4}}_{n \text{ mieszkańców}} = 4^n$$

ODP. MAMY 4^n MOŻLIWOŚCI.

a) ZAD 5. NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA POSADZIĆ 3 KOBIETY I 3 MĘŻCZYZN?
b) A JEŚLI MĘŻCZYŹN I KOBIETY MUSZĄ SIEDZIEĆ NA PRZEMIAN?

A) $\underline{6}\cdot\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1} = 6!$

B) $\underline{3}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1}\cdot\underline{1} = 36$

ale wynik to $36\cdot 2 = 72$, bo musimy uwzględnić że możemy zacząć też od mężczyzny.

ZAD 6. CHCEMY WYBRAĆ PARĘ LICZB NATURALNYCH (a,b) TAKĄ, ŻE (i) LICZBY a,b SĄ Z PRZEDZIAŁU $[1,n]$ ORAZ (ii) SUMA $a+b$ JEST PARZYSTA. NA ILE SPOSOBÓW MOŻEMY TO ZROBIĆ?

$a,b \in [1,n]$

Suma a i b ma być parzysta, więc:

- a i b muszą być parzyste (△)

lub

- a i b muszą być nieparzyste (□)

I) gdy $n \to$ parzyste

Mamy $\frac{n}{2}$ możliwości wyboru liczb parzystych i tyle samo możliwości wyboru liczb nieparzystych.

$$\underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}_{\triangle} + \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}_{\square} = 2\cdot\frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$$

II) gdy $n \to$ nieparzyste $\triangle\ \frac{n-1}{2}$ $\square\ \frac{n+1}{2}$

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} =$$

$$= \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-2n+1+n^2+2n+1}{4} = \frac{2\cdot n^2+2}{4} = \frac{n^2+1}{2}$$

Scanned with CamScanner

(-) ZAD 7. ILE JEST MOŻLIWYCH REJESTRACJI SAMOCHODOWEJ ZŁOŻONYCH Z 3 LITER, PO KTÓRYCH NASTĘPUJĄ 4 CYFRY?

Zadanie rozwiązuje przy założeniach że liter w alfabecie jest 35 (bez polskich).

$$\underbrace{\underline{35}\cdot\underline{35}\cdot\underline{35}}_{3 \text{ LITERY}} \cdot \underbrace{\underline{10}\cdot\underline{10}\cdot\underline{10}\cdot\underline{10}}_{4 \text{ CYFRY } \in \langle 0;9\rangle} =$$

$$= \underbrace{35^3 \cdot 10^4}_{\text{odp.}}$$

(-) ZAD 8. POKAŻ, ŻE DLA DOWOLNEJ LICZBY RZECZYWISTEJ X I DOWOLNEJ LICZBY CAŁKOWITEJ N ZACHODZI $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

Def. sufitu

$$\lceil x \rceil = k \iff k-1 < x \leq k$$

Niech $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{C}$:

$$\lceil x+n \rceil = k \iff k-1 < x+n \leq k$$

$$k-n-1 < x \leq k-n$$

$$\iff \lceil x \rceil = k-n$$

$$\lceil x \rceil + n = k$$

Z tego wynika, że $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

✓ ZAD 9. PODAJ WARUNEK KONIECZNY I DOSTATECZNY NA TO, ABY $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ GDZIE N JEST LICZBĄ NATURALNĄ.
PODPOWIEDŹ: WARUNEK POWINIEN ZAWIERAĆ FUNKCJĘ CZĘŚĆ UŁAMKOWA $\{x\}$.

Scanned with CamScanner

$\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$

$\lfloor n(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = n\lfloor x \rfloor$

$\lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor = n\lfloor x \rfloor$

liczba całkowita razy liczba całkowita to liczba całkowita

udowodnijmy, że: $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
$x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{C}$

def podłogi $\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k+1$

$\lfloor x+n \rfloor = k \iff k \leq x+n < k+1$

$k-n \leq x < k+1-n$

$\lfloor x \rfloor = k-n$

$\lfloor x \rfloor + n = k$

Możemy wyciągnąć

$n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor = n\lfloor x \rfloor$

czyli $\lfloor n\{x\} \rfloor = 0$

$n \cdot \{x\} \in \langle 0; 1)$

ZAD 10. NIECH $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. CZY PRAWDZIWE JEST STWIERDZENIE: $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$?

$\forall_{x \geq 0} \ \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$

Fakt $n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^+$
$n \leq y \iff n \leq \lfloor y \rfloor$

Niech $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = m$

$m \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1 \quad |^2$

$\lfloor x \rfloor \leq x$

$\to m^2 \leq \lfloor x \rfloor < (m+1)^2$

$m^2 \leq x < (m+1)^2 \quad |\sqrt{\ }$

zdjęcie podłogi z faktu

$m \leq \sqrt{x} < m+1$

$m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$

Scanned with CamScanner

ZAD. 11. ILE JEST N-ELEMENTOWYCH PERMUTACJI, KTÓRE W ROZKŁADZIE NA CYKLE MAJĄ TYLKO JEDEN CYKL?

Rozpiszmy cykle

x	1
$f(x)$	1

jest 1 taki cykl (1)

$0! = 1$

x	1	2
$f(x)$	2	1

jest 1 taki cykl (2 1)

$1! = 1$

x	1	2	3
$f(x)$	~~1~~	~~2~~	~~3~~
	~~1~~	~~3~~	~~2~~
	~~2~~	~~1~~	~~3~~
	2	3	1
	3	1	2
	~~3~~	~~2~~	~~1~~

Są 2 takie cykle (1 2 3) i (1 3 2)

$2! = 2$

po rozpisaniu dla 4, łatwo zobaczyć że to $(n-1)!$

4 1 2 3	4 1 3 2
1 4 2 3	1 4 3 2
1 2 4 3	1 3 4 2
_ 1 _ 2 _ 3	_ 1 _ 3 _ 2

czyli cykle dla $n=3$ że wstawiamy "4" (następny element) na jedno z n miejsc na $n-1$ możne

ZAD 12. DWOJE DZIECI ZEBRAŁO 16 BŁAWATKÓW, 10 RUMIANKÓW, 14 NIEZAPOMINAJEK? NA ILE SPOSOBÓW MOGĄ SIĘ PODZIELIĆ KWIATKAMI?

10 rumianków pomiędzy 2 dzieci możemy rozdzielić na 11 sposobów

I	II
0	10
1	9
⋮	
10	0

16 na 17 sposobów

14 na 15 sposobów

$11 \cdot 17 \cdot 15 = 2805$