EGZAMIN Z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)
8 lutego 2021 r.
Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Julita Oman

Numer części: 3 Numer zadania: 1

SCHEMAT HORNERA to sposób na dzielenie wielomianów.

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 =$$

$$= \vdots$$

$$= x(x(\dots x(\underbrace{\underbrace{x a_n}_{w_n} + a_{n-1})}_{w_{n-1}} + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0$$

ALGORYTM

$$\begin{cases} w_n = a_n \\ w_k = w_{k+1} \overset{w_{n-2}}{+} a_k \quad \text{dla } k = n-1, n-2, \dots 0 \end{cases}$$

UZASADNIENIE, ŻE SCHEMAT HORNERA JEST ALGORYTMEM NUMERYCZNIE POPRAWNYM.

Schemat Hornera to algorytm, który pozwala na dzielenie wielomianów przez dwumian $(x-a)$. Jest też sposobem obliczania wartości wielomianu przy wykorzystaniu minimalnej ilości mnożeń.

$$w_0 = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

UWZGLĘDNIJMY BŁĘDY:

$$a_0(1+\beta_0) + a_1 x(1+\alpha_1)(1+\beta_0)(1+\beta_1) + \dots + a_n x^n (1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)(1+\beta_0)\dots$$
$$\dots(1+\beta_n) =$$

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)$$

TW. O KUMULACJI BŁĘDÓW

$|\alpha_i| \le 2^{-t}$ $|\beta_i| \le 2^{-t}$

Julita Osman cz 3 z od 1

Niech $(1+\beta)$ to maksymalny błąd $(1+\beta_i)$
Niech $(1+\alpha)$ to maksymalny błąd $(1+\alpha_i)$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j) \leq \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \cdot (1+\beta)^i (1+\alpha)^i$$

Przyjmijmy, że $(1+\varepsilon)=(1+\alpha)(1+\beta)$ $|\varepsilon| \lesssim 2\cdot 2^{-t}$
Zatem

$$\sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta)^i (1+\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i [x\cdot(1+\varepsilon)]^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}^i a_i$$ } otrzymujemy zatem mało zaburzony wynik dla mało zaburzonych danych.

Schemat Hornera jest zatem algorytmem numerycznie poprawnym.