LISTA 10 ZAD 2

Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów

- $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$
- $(2/3, 1/3, 2/3), (2/3, 1/3, -2/3)$

Z def. 10.8 układ wektorów $v_1, \dots, v_n$ jest układem ortogonalnym jeśli dla $i \neq j$ mamy $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ i ortonormalnym jeśli $\langle v_i, v_i \rangle = 1$

- $v_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, $v_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$

uzupełnienie do bazy

$v_3 = (a, b, c, d)$, $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_3, v_3 \rangle = 1$

$$\begin{cases} 1/2 a + 1/2 b + 1/2 c + 1/2 d = 0 \\ 1/2 a + 1/2 b - 1/2 c - 1/2 d = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -d \\ a = -b \\ 2b^2 + 2d^2 = 1 \end{cases}$$

$$v_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$v_4 = (e, f, g, h)$, $\langle v_1, v_4 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_4 \rangle = 0$, $\langle v_3, v_4 \rangle = 0$

$\langle v_4, v_4 \rangle = 1$

$$\begin{cases} 1/2 e + 1/2 f + 1/2 g + 1/2 h = 0 \\ 1/2 e + 1/2 f - 1/2 g - 1/2 h = 0 \\ -1/2 e + 1/2 f + 1/2 g - 1/2 h = 0 \\ e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} e = -f \\ g = -h \\ f = h \\ 2f^2 + 2h^2 = 1 \end{cases} \quad v_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ i $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ i $\langle v_2, v_2 \rangle = 1$ dlatego układ jest zortonormalizowany

- $v_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$ $v_2 = (2/3, 1/3, -2/3)$

$v_3 = (a, b, c)$ $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$ $\langle v_3, v_3 \rangle = 1$

$$\begin{cases} 2/3 a + 1/3 b + 2/3 c = 0 \\ 2/3 a + 1/3 b - 2/3 c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \quad v_3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

korzystając z algorytmu 10.6

$\langle v_1, v_1 \rangle = 4/9 + 1/9 + 4/9 = 1$

$\langle v_2, v_1 \rangle = 4/9 + 1/9 - 4/9 = 1/9$

$v_2 = v_2 - \frac{1}{9} \cdot v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{27}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) = \left(\frac{16}{27}, \frac{8}{27}, -\frac{20}{27}\right)$

$\langle v_2 \neq v_2 \rangle = 80/81$

$v_2 = v_2 / \sqrt{\frac{80}{81}} = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$\langle v_2, v_2 \rangle = 1$

$\langle v_3, v_1 \rangle = \frac{2\sqrt{5}}{15} - \frac{2\sqrt{5}}{15} = 0$

$\langle v_3, v_2 \rangle = 4/15 - 4/15 = 0$

$\langle v_3, v_3 \rangle = 1$

LISTA 10 ZAD 4

Udowodnij, że złożenie izometrii jest izometrią

Niech

$f: V \to V$
$g: V \to V$ będą izometriami

Weźmy dowolne $\vec{v}, \vec{w} \in V$, wtedy

$\langle (f \circ g)(\vec{v}), (f \circ g)(\vec{w}) \rangle = \langle f(g(\vec{v})), f(g(\vec{w})) \rangle =$

$= \langle g(\vec{v}), g(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Czyli z definicji złożenie $f \circ g$ jest izometrią.

LISTA 10 ZAD 5

Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną to $\det(M) \in \{-1, 1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli F jest izometrią, to $\det F \in \{-1, 1\}$.

Załóżmy, że M jest macierzą ortogonalną. Wtedy $M^{-1} = M^T$. Korzystając z własności wyznacznika macierzy:

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}, \quad \det(M^T) = \det(M)$$

otrzymujemy

$$\det(M) = \frac{1}{\det(M)} \quad \text{zatem} \quad \det(M)^2 = 1$$

więc $\det(M) \in \{-1, 1\}$

Wyznacznikiem przekształcenia jest wyznacznik macierzy tego przekształcenia wyrażonej w dowolnej bazie. Jeżeli F jest izometrią, to macierz tego przekształcenia w bazie ortonormalnej jest zgodnie z lematem 11.7 macierzą ortogonalną, a więc $\det(F) \in \{-1, 1\}$.

LISTA 10 ZAD. 7

Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

Fakt 12.6

Macierz M jest dodatnio określona wtw gdy:

1) jest symetryczna oraz
2) dla każdego wektora $\vec{v} \neq 0$ zachodzi
$\vec{v}^T M \vec{v} = 0$

Tw. 12.8 (Kryterium SYLVESTERA)

Symetryczna macierz M jest dodatnio $\Leftrightarrow$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$ macierz M_k spełnia $\det(M_k) > 0$

1)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Macierz M nie jest symetryczna ($M^T \neq M$), więc z faktu 12.6 nie jest też dodatnio określona.

2)
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
macierz M jest symetryczna.

Sprawdźmy kryt. Sylwestera

$$M_1 = [2], \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(M_1) = 2 > 0$
$\det(M_2) = 0 \rightarrow$ więc nie jest dodatnio określona

3)
$$M = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Macierz M jest symetryczna.

$\det(M_1) = 6 > 0$
$\det(M_2) = 2 > 0$
$\det(M_3) = 4 > 0$

z tw. 12.8 macierz M jest dodatnio określona

4)
$$M = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Macierz M jest symetryczna.

$\det(M_1) = 6 > 0$
$\det(M_2) = 41 > 0$
$\det(M_3) = 316 > 0$

$\det(M_4) = 144 > 0$

z tw. 12.8 macierz M jest dodatnio określona.

LISTA 10 ZAD 8

Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci B^TB.

WSKAZÓWKA: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA}, gdzie E to baza standardowa zaś A: baza ortonormalna.

(lemat 12.3)

$$M^B = M_{BA}^T \cdot M^A \; M_{BA} = M_{BA}^T \; M_{BA}$$

TUTAJ MACIERZ ILOCZYNU SKALARNEGO W BAZIE ORTONORMALNEJ, CZYLI MACIERZ JEDNOSTKOWA.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• ortonormalizacja (algorytm Grama-Schmidta)

weźmy bazę standardową $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{[1\,0\,0]\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{3}$$

$$y_2 = v_2 - u_1\langle v_2, u_1\rangle$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[0\,1\,0]\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \sqrt{[-2/3\;1\;0]\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$u_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = v_3 - (u_1\langle v_3, u_1\rangle + u_2\langle v_3, u_2\rangle)$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|y_3\| = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}\sqrt{\frac{8}{5}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{8}}{8\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{8}{5}} \end{bmatrix}$$

Zatem baza ortonormalna to:

$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$

$u_2 = \left(-1/6, \sqrt{3/8}, 0\right)$

$u_3 = \left(-\sqrt{8}/4\sqrt{5}, -\sqrt{8}/8\sqrt{5}, \sqrt{8/5}\right)$

• macierz zamiany bazy

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/6 & -\sqrt{8}/4\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{3/8} & -\sqrt{8}/8\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{8/5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & \sqrt{6}/12 \\ 0 & 0 & \sqrt{10}/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & \sqrt{6}/12 \\ 0 & 0 & \sqrt{10}/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3}/3 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/12 & \sqrt{10}/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|y_2\| = \sqrt{[0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{4} = 2$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|y_3\| = \sqrt{9} = 3$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$u_1 = (1,0,0)$ $u_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ $u_3 = (0, 0, 1/3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

LISTA 10 ZAD 9

Pokaż, że:

A) • suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona

B) • macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

A) Weźmy dodatnio określone macierze A i B, pokażemy, że macierz $M = A + B$ jest dodatnio określona. Pokażemy równoważnie, że spełnia ona warunki z faktu 12.6: jest symetryczna oraz dla każdego wektora $\vec{v} \neq 0$ zachodzi $\vec{v}^T M \vec{v} > 0$.

Pierwszy warunek jest oczywiście spełniony, bo suma macierzy symetrycznych jest zawsze symetryczna. Aby pokazać drugi warunek, weźmy dowolny wektor i zauważmy, że:

$$\vec{v}^T M \vec{v} = \vec{v}^T (A+B)\vec{v} = \vec{v}^T A \vec{v} + \vec{v}^T B \vec{v}$$

Ponieważ oba składniki sumy są dodatnie z założenia, więc również ich suma jest dodatnia, co spełnia drugi warunek na dodatnią określoność macierzy.

B) Weźmy dodatnio określoną macierz M. Z lematu 12.7 wiemy, że istnieje taka odwracalna macierz A, że $M = A^T A$. Wtedy zachodzi:

$$M^{-1} = (A^T A)^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$$

Ponieważ istnieje taka odwracalna macierz A^{-1}, że $M^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$, więc z lematu 12.7 macierz M^{-1} jest dodatnio określona.