LISTA 12 ZAD 2

Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1), (1,2,3,\dots,n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \dots, n-1$
- $\langle (1,2), (2,3,\dots n) \rangle = S_n$

- Chcemy pokazać, że możemy stworzyć dowolną permutację (k, l) $k, l \in \{1, \dots n\}$ $k \neq l$

DOWÓD: Mając dane i możemy wygenerować dowolne $(t, t+1)$ w następujący sposób:

$$(t, t+1) = (1,2,\dots n)^{-k+i} (i, i+1)(1,2,\dots,n)^{k-i}$$

dla $t \in \{1, \dots, n-1\}$

Możemy skorzystać z łączenia permutacji, by otrzymać $(t, t+p)$, np.

$$(t, t+2) = (t, t+1)(t+1, t+2)$$

$$(t, t+p) = (t, t+1) \dots (t+p-1, t+p)$$

Możemy zatem otrzymać (k, l) $k, l \in \{1, \dots n\}$ $\blacksquare$

• Dowód:

Możemy otrzymać permutację $(1,t)$ dla $t \in \{1, \dots, n\}$ = $(1,t) = (2,3,\dots,n)^{t+2} (1,2)(2,3,\dots,n)^{t-2}$

Możemy teraz otrzymać $(t,t+1)$:

$(t,t+1) = (1,t+1)(1,t)(1,t+1)$

Mając już to otrzymamy (k,l) $k,l \in \{1, \dots, n-1\}$ na mocy poprzedniego podpunktu. ■

LISTA 12. ZAD 5

Wyznacz permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Przedstaw permutację $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.
- Przedstaw permutację $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ oraz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.
- Jakie są rzędy permutacji z powyższych podpunktów

$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Wystarczy zamienić miejscami i uporządkować

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Szukamy cykli nie posiadających wspólnego elementu.

$1 \to 3 \to 8 \to 5 \to 11 \to 1$ $\quad$ $2 \to 7 \to 6 \to 2$ $\quad$ $4 \to 10 \to 9 \to 4$ $\quad$ $12 \to 12$

$$G = (1,3,8,5,11) \cdot (2,7,6) \cdot (4,10,9)$$

- Najpierw przedstawimy permutację jako złożenie cykli rozłącznych, a potem każdy z nich jako złożenie transpozycji.

$G = (1,5,4,3,2) = (1,2)\cdot(1,3)\cdot(1,4)\cdot(1,5) \overset{\text{lub}}{=} (1,5)\cdot(5,4)\cdot$
$\cdot(4,3)\cdot(3,2)$

$P = (1,6)\cdot(2,3)\cdot(4,5)$

- Rząd permutacji to NWW rzędów cykli rozłącznych. Natomiast rząd cyklu to jego długość.

• (1)

$G = (1,3,4,5,2)$ zatem rząd G wynosi 5.

$P = (1,4)\cdot(2,5,3)$ zatem rząd P wynosi $NWW(2,3) = 6$

• (2)

Rząd G to $NWW(5,3) = 15$

• (3)

Rząd G to 5.

Rząd P to 2.

LISTA 12 ZAD 11

Ile jest nierozróżnialnych naszyjników mających 6 równo oddalonych korali tej samej wielkości, przy czym korale mogą być białe, czerwone lub zielone, a naszyjnik można obracać oraz wpłetożyć na drugą stronę.

Naszyjnik można przedstawić jako sześciokąt foremny, co może ułatwić rozważania nad nim.
Zbiór wierzchołków naszej figury $C = \{1,2,3,4,5,6\}$
Każdy wierzchołek możemy pomalować na jeden z trzech kolorów: biały, czerwony, zielony.
Niech G będzie grupą obrotów i symetrii.

$G = \{O_0, O_{60}, O_{120}, O_{180}, O_{240}, O_{300}, H, LS, RS, V, LA, RA\}$; $|G| = 12$

O_{0-300}: obroty o X stopni

Symetrie względem: boków: H, LS, RS; wierzchołków: V, LA, RA.
Będziemy działać grupą G na zbiorze C.

Zapisujemy tabelkę:

FUNKCJA	CYKLE	LICZBA CYKLI	$\lvert fix(g) \rvert$
O_0	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	6	m^6
O_{60}	(1,2,3,4,5,6)	1	m^1
O_{120}	(1,3,5)(2,4,6)	2	m^2
O_{180}	(1,4)(2,5)(3,6)	3	m^3
O_{240}	(1,5,3)(2,6,4)	2	m^2
O_{300}	(1,6,5,4,3,2)	1	m^1
H	(1,2)(6,3)(5,4)	3	m^3
LS	(1,6)(2,5)(3,4)	3	m^3
RS	(1,4)(2,3)(5,6)	3	m^3
V	(1,5)(2,4)(3)(6)	4	m^4
LA	(1)(2,6)(3,5)(4)	4	m^4
RA	(1,3)(2)(4,6)(5)	4	m^4

Mamy 3 kolory więc $m=3$

O - zbiór orbit tego działania

$|O| = (1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4)/12$

$|O| = 1104/12$

$|O| = 92$

Mamy, więc 92 takie naszyjniki.