

LISTA 12 ZAD 2

Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów.
Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2), \dots, (n-1, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \dots, n-1$

- $\langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \rangle = S_n$

Chcemy pokazać, że możemy stworzyć dowolną permutację (k, l) $k, l \in \{1, \dots, n\}$ $k \neq l$

Dowód: Mając dane i możemy wygenerować dowolne $(t, t+1)$ w następujący sposób:

$$(t, t+1) = (1, 2, \dots, n)^{-k+i} (i, i+1) (1, 2, \dots, n)^{k-i}$$

dla $t \in \{1, \dots, n-1\}$

Możemy skorzystać z łączenia permutacji, by otrzymać $(t, t+p)$, np.

$$(t, t+2) = (t, t+1)(t+1, t+2)$$

$$(t, t+p) = (t, t+1) \dots (t+p-1, t+p)$$

Możemy zatem otrzymać (k, l) $k, l \in \{1, \dots, n\}$



• Dowód:

Możemy otrzymać permutację $(1, t)$ dla $t \in \{1, \dots, m\}$
 $(1, t) = (2, 3, \dots, m) (1, 2) (2, 3, \dots, m)^{-1}$

Możemy także otrzymać $(t, t+1)$:

$$(t, t+1) = (1, t+1)(1, t)(1, t+1)$$

Mając już to otrzymamy (k, l) $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$
 ma mocy poprzedniego podpunktu.

LISTA 12. ZAD 5

Wymagal permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
 oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

• Przedstaw permutacje $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.

• Przedstaw permutacje $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ oraz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.

• Jaki ss między permutacji z powyższych podpunktów

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

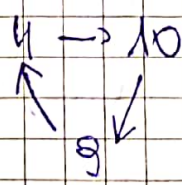
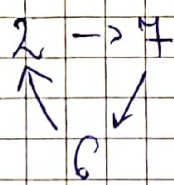
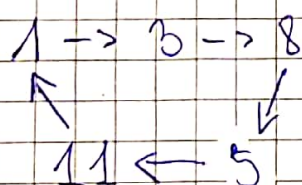
Wystarczy zamienić miejscami i uporządkować

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Szukamy cykli nie posiadających wspólnego elementu



122

$$G = (1, 3, 8, 5, 11) \cdot (2, 7, 6) \cdot (4, 10, 9)$$

- Najpierw przedstawimy permutacje jako złożenie cykli rozłącznych, a potem każdy z nich jako złożenie transpozycji.

$$G = (1, 5, 4, 3, 2) = (1, 2) \cdot (1, 3) \cdot (1, 4) \cdot (1, 5) \stackrel{\text{lub}}{=} (1, 5) \cdot (5, 4) \cdot (4, 3) \cdot (3, 2)$$

$$P = (1, 6) \cdot (2, 3) \cdot (4, 5)$$

- Rząd permutacji to NWW rządów cykli rozłącznych. Natomiast rząd cyklu to jego długość.

• (1)

$$G = (1, 3, 4, 5, 2) \quad \text{Zatem rząd } G \text{ wynosi } 5.$$

$$P = (1, 4) \cdot (2, 5, 3) \quad \text{Zatem rząd } P \text{ wynosi NWW}(2, 3) = 6$$

• (2)

$$\text{Rząd } G \text{ to NWW}(5, 3) = 15$$

• (3)

$$\text{Rząd } G \text{ to } 5.$$

$$\text{Rząd } P \text{ to } 2.$$

LISTA 12 ZAD 11

Ile jest nierozróżnialnych morzyneków mających 6 równo oddalonych koralu tej samej wielkości, przy czym koralu mogą być białe, czerwone lub zielone, a morzynek można obrócić oraz przetrząsnąć.

Morzynek można przedstawić jako sześciokąt foremny, co może ułatwić rozważania nad nim.

Zbiór wierzchołków naszej figury $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ każdy wierzchołek możemy pomalować na jeden z trzech kolorów: biały, czerwony, zielony. Niech G będzie grupą obrotów i symetrii.

$$G = \{O_0, O_{60}, O_{120}, O_{180}, O_{240}, O_{300}, H, LS, RS, V, LA, RA\}; |G| = 12$$

O_0 - O_{300} : obroty o x stopni

Symetrie względem: boków: H, LS, RS ; wierzchołków: V, LA, RA .
Będziemy działać grupą G na zbiorze C .

Zapisujemy tabelkę:

| Funkcja | Cykle | Wzrost cykli | $ fix(g) $ |
|--------------|--------------------|--------------|------------|
| ϕ | (1)(2)(3)(4)(5)(6) | 6 | m^6 |
| ϕ_{60} | (1,2,3,4,5,6) | 1 | m^1 |
| ϕ_{120} | (1,3,5)(2,4,6) | 2 | m^2 |
| ϕ_{180} | (1,4)(2,5)(3,6) | 3 | m^3 |
| ϕ_{240} | (1,5,3)(2,6,4) | 2 | m^2 |
| ϕ_{360} | (1,6,5,4,3,2) | 1 | m^1 |
| ψ | (1,2)(6,3)(5,4) | 3 | m^3 |
| ψ_S | (1,6)(2,5)(3,4) | 3 | m^3 |
| ψ_S | (1,4)(2,3)(5,6) | 3 | m^3 |
| ψ | (1,5)(2,4)(3)(6) | 4 | m^4 |
| ψ_A | (1)(2,6)(3,5)(4) | 4 | m^4 |
| ψ_A | (1,3)(2)(4,6)(5) | 4 | m^4 |

Mamy 3 kolory więc $m=3$

ϕ - zbiór orbit tego działania

$$|\phi| = (1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4) / 12$$

$$|\phi| = 1104 / 12$$

$$|\phi| = 92$$

Mamy, więc 92 takie mozyjnik