ZAD. 1 USTALMY LICZBĘ $B \in \{2,3,4,...\}$. POKAŻ, ŻE KAŻDA NIEZEROWA LICZBA RZECZYWISTA X MA JEDNOZNACZNE PRZEDSTAWIENIE W POSTACI $X = smB^c$, GDZIE $s = \operatorname{sgn} X$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [1/B; 1)$

$$X = smB^c$$

s to znak $\in \{-1, 1\}$ pomińmy go, bo $X = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$

$$|x| = mB^c$$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{x}{B^c}$$

B to podstawa systemu, więc dzieląc x przez B^c przesuwamy przecinek, czyli ustawiamy mantysę.

Poprzez wybór odpowiedniej wartości c możemy sprowadzić do postaci $0,\ldots$ czyli $m \in [1/B, 1)$ liczba w systemie B

POKAŻMY JEDNOZNACZNOŚĆ

$$X = s \cdot m_1 \cdot B^{c_1} \qquad X = s \cdot m_2 \cdot B^{c_2} \qquad m_1 \neq m_2$$

$$\cancel{s} \cdot m_1 \cdot B^{c_1} = \cancel{s} \cdot m_2 \cdot B^{c_2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{B^{c_2}}{B^{c_1}} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = B^{c_2 - c_1}$$

SPRAWDŹMY

$1^\circ)$ $c_1 = c_2$

$\frac{m_1}{m_2} = B^0 = 1$ co oznacza że $m_1 = m_2$ co jest sprzeczne z naszym założeniem

$2^\circ)$ $c_1 > c_2$

$$\frac{m_1}{m_2} = B^{c_2 - c_1} \leq B^{-1} = \frac{1}{B}$$

bo $c \in \mathbb{Z}$

$$\frac{m_1}{m_2} \leq \frac{1}{B} \Rightarrow m_1 \leq \frac{m_2}{B}$$

$m_1, m_2 \in [1/B; 1)$

chcemy żeby $m_1 \leq \frac{m_2}{B}$ czyli

$m_2 \geq 1 \wedge m_2 < B$, ale z założenia

wiemy, że $m_2 < 1$, więc sprzeczność

3°) $c_1 < c_2$

wtedy $\frac{m_1}{m_2} = B^{c_2 - c_1} \geq B$

$m_1 \geq m_2 \cdot B$

czyli $\boxed{m_2 < 1/B}$. bo inaczej $m_1 \geq 1$, a to sprzeczność.

ZAD. 2 ZNAJDŹ WSZYSTKIE LICZBY ZMIENNOPOZYCYJNE, KTÓRE MOŻNA PRZEDSTAWIĆ W POSTACI

$$x = \pm(0.1 e_{-2} e_{-3} e_{-4})_2 \cdot 2^{\pm c}$$

$e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, c \in \{0, 1\}$

GDZIE $(\ldots)_2$ OZNACZA ZAPIS DWÓJKOWY. JAKI JEST NAJMNIEJSZY PRZEDZIAŁ $[A,B]$ ZAWIERAJĄCY TE LICZBY JAK LICZBY ROZKŁADAJĄ SIĘ W $[A,B]$ (WYKONAJ ODPOWIEDNI RYSUNEK)? CO Z TEGO WYNIKA?

bo $c \in \{-1, 0, 1\}$

Rozpiszmy wszystkie możliwe przypadki jest ich $\underset{e_{-2}}{2} \cdot \underset{e_{-3}}{2} \cdot \underset{e_{-4}}{2} = 8 \cdot 3$

2^{-1}	2^0	2^1
0,01000	0,1000	1,0000
0,01001	0,1001	1,0010
0,01010	0,1010	1,0100
0,01011	0,1011	1,0110
0,01100	0,1100	1,1000
0,01101	0,1101	1,1010
0,01110	0,1110	1,1100
0,01111	0,1111	1,1110

A) 24 liczby dodatni + 24 liczby ujemne bo $\pm$

C) najmniejsze dodatnie x to 0,01000 B) największe dodatnie x to 1,1110

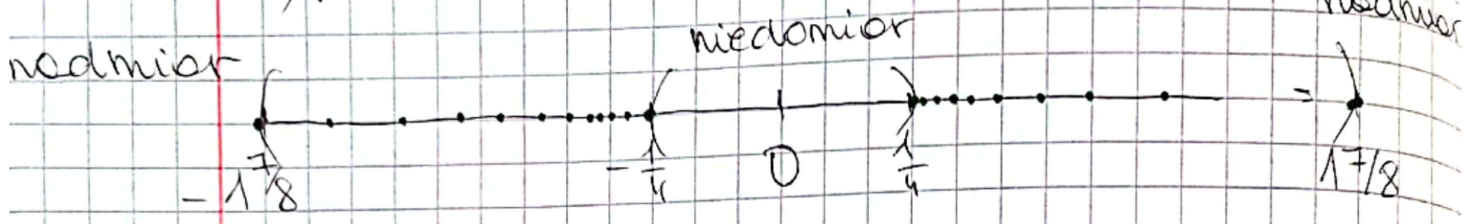
najmniejsze ujemne x to $-1,1110$ D) największe ujemne x to

A) $min_+ = (0{,}01000)_2 = (0{,}25)_{10}$

B) $max_+ = (\underset{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{1{,}1110})_2 = (1\tfrac{7}{8})_{10}$

C) $min_- = -(1\tfrac{7}{8})_{10}$

D) $max_- = -(0{,}25)_{10}$



ZAD 3. ZAOKRĄGLENIEM NIEZEROWEJ LICZBY RZECZYWISTEJ $x = sm2^c$, GDZIE $s = \mathrm{sgn}\,x$, c JEST LICZBĄ CAŁKOWITĄ, A $m \in [1/2, 1)$, JEST LICZBĄ ZMIENNOPOZYCYJNA $rd(x) = s m_t^r 2^c$, GDZIE $m_t^r \in [1/2, 1)$ ORAZ $|m - m_t^r| \leq 1/2 \cdot 2^{-t}$. WYKAŻ, ŻE

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq 2^{-t}$$

$x = sm2^c$
$m \in [1/2; 1)$
$rd(x) = s m_t^r 2^c$
$|m - m_t^r| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$

odcięcie symetryczne

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} = \frac{|s m_t^r 2^c - s m 2^c|}{|s m 2^c|} = \frac{|(s2^c)(m_t^r - m)|}{|m \cdot s2^c|} =$$

$$= \frac{|(m_t^r - m)|}{|m|} \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{-t}}{m} = \frac{2^{-t}}{2m} \leq 2^{-t}$$

na pewno dodatnie z założeń

ZAD. 4 PRZECZYTAJ TEKST MÓWIĄCY O TYM, ŻE NIEFRASOBLIWE UŻYWANIE ARYTMETYKI ZMIENNOPOZYCYJNEJ MOŻE PROWADZIĆ DO PRAWDZIWEJ TRAGEDII. STREŚĆ WŁASNYMI SŁOWAMI OPISANE TAM ZDARZENIE I PRZEDSTAW ISTOTĘ OPISANEGO PROBLEMU.

Zmierzono czas, w jakim przelatywał pocisk w jednostce 1/10 sekundy (decysekundo). Żeby obliczyć jego położenie pomnożone przez 10 żeby zmienić jednostkę na sekundę. Kalkulowano rachunki na komputerze w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Obcięto reprezentację binarną 1/10 po 24 bitach, co wyprodukowało błąd około $9{,}5 \cdot 10^{-8}$. Przemnożono przez 10 (na sekundę) × 60 (na minuty) × 60 (na godz.) × 100 godzin co dało 0,34 s błędu. Pocisk pędzi z prędkością 1,676 m/s, więc w tym czasie pocisk pokonał pół kilometra, co spowodowało że nie został wykryty.

ZAD.5 ZAPOZNAJ SIĘ ZE STANDARDEM IEEE 754 REPREZENTACJI LICZB ZMIENNOPOZYCYJNYCH. OMÓW GO KRÓTKO I PODAJ GŁÓWNE RÓŻNICE W STOSUNKU DO MODELU TEORETYCZNEGO REPREZENTACJI LICZB MASZYNOWYCH PRZEDSTAWIONEGO NA WYKŁADZIE.

IEEE 754 – standard reprezentacji binarnej i operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych, implementowany powszechnie w procesorach i oprogramowaniu obliczeniowym.

31		23 | 24		16 | 15		8 | 7	0
S	E E E E E E E E	M M M M M M M M M M M M M M M M M M M M M M M					
ZNAK		MANTYSA					

- 32 bity
- JEŚLI LICZBA UJEMNA S=1 JEŚLI DODATNIA S=0
- KODOWANIE CECHY JEST KODOWANIEM Z NADMIAREM (BIAS), tutaj BIAS=127 CO DAJE ZAKRES $\langle -127, 128 \rangle$

cecha 8 bitów

mantysa 23 bity $m \in (0,1)$

Daje to około 7-8 dziesiętnych miejsc znaczących i zakres około $\pm 1{,}18 \cdot 10^{-38}$ do około $\pm 3{,}4 \cdot 10^{38}$

MODEL TEORETYCZNY REPREZENTACJI LICZB MASZYNOWYCH

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $m \in [\frac{1}{2}; 1)$

tw. $c \in \mathbb{Z}$

$x = s m \cdot 2^c$

$s \in \{+1; -1\}$

RÓŻNICE:

- wykładnik
- mantysa

ZAD 6. ZAŁÓŻMY, ŻE X,Y SĄ LICZBAMI MASZYNOWYMI. PODAJ PRZYKŁAD POKAZUJĄCY, ŻE PRZY OBLICZANIU WARTOŚCI $d := \sqrt{x^2+y^2}$ ALGORYTMEM POSTACI

$u := x \cdot x$

$u := u + y \cdot y$

$d := sqrt(u)$

MOŻE WYSTĄPIĆ ZJAWISKO NADMIARU, MIMO TEGO ŻE SZUKANA WIELKOŚĆ D NALEŻY DO ZBIORU X_{fl}. NASTĘPNIE ZAPROPONUJ ALGORYTM WYZNACZANIA D POZWALAJĄCY UNIKAĆ ZJAWISKO NADMIARU, JEŚLI $\sqrt{2}\max(|x|,|y|) \in X_{fl}$. NA KONIEC PODAJ SKUTECZNĄ METODĘ WYZNACZANIA DŁUGOŚCI EUKLIDESOWEJ WEKTORA $v \in \mathbb{R}^n$

PRZYKŁAD: $x = y = 2^{30} \in X_{fl}$

$\sqrt{(2^{30})^2 + (2^{30})^2} = \sqrt{2^{60}+2^{60}} = \sqrt{2^{61}} = 2^{30}\sqrt{2} \in X_{fl}$

$2^{61} \notin X_{fl}$

LEPSZY ALGORYTM

$u := y/x;$ $\rightarrow d := |x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$u := u \cdot u;$

n := n+1;

n := sqrt(n);

d := abs(x) · n;

ALG2 $|2^{30}| \cdot \sqrt{1+\left(\frac{2^{30}}{2^{30}}\right)^2} = 2^{30} \cdot \sqrt{2} \in X_{fl}$

SKUTECZNA METODA WYZNACZANIA DŁUGOŚCI EUKLIDESOWEJ

df. euklid. $\|x_n\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

bez straty ogólności załóżmy, że $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = |x_1| \cdot \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}_{\leq 1} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2}_{\leq 1}} \leq$

$\leq |x_1|\sqrt{n} \rightarrow = \max\{x_1, \ldots x_n\} \cdot \sqrt{n}$

ZAD 7 DLA JAKICH WARTOŚCI X OBLICZANIE WARTOŚCI WYRAŻEŃ

A) $x^3 - \sqrt{x^6 + 2020}$

B) $x^{-4}(\cos x - 1 + x^2/2)$

C) $\log_5 x - 6$ MOŻE WIĄZAĆ SIĘ Z UTRATĄ

CYFR ZNACZĄCYCH WYNIKU? ZAPROPONUJ SPOSOBY OBLICZENIA WYNIKU DOKŁADNIEJSZEGO. POKAŻ, ŻE SPOSOBY TE DZIAŁAJĄ W PRAKTYCE.

A) $x^3 - \sqrt{x^6 + 2020} = \frac{(x^3 - \sqrt{x^6+2020})(x^3 + \sqrt{x^6+2020})}{(x^3 + \sqrt{x^6+2020})}$

$= \frac{x^6 - (x^6 + 2020)}{x^3 + \sqrt{x^6+2020}} = \frac{2020}{x^3 + \sqrt{x^6+2020}}$

→ DLACZEGO PROBLEM?

problem dla dużych x, dla których

$\sqrt{x^6+2020} \approx x^3$

B) $x^{-4}(\cos x - 1 + x^2/2)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

DLACZEGO PROBLEM?

problem dla x, dla których $\cos x \approx 1$
czyli dla $x \approx 0$

$$= x^{-4}\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) =$$

$$= x^{-4}\left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)$$

C) $\log_5 x - 6$

DLACZEGO PROBLEM?
dla $x \approx 5^6$ $6-6$

$$= \log_5 x - \log_5 5^6 = \log_5 \frac{x}{5^6}$$

ZAD. 8 NIECH BĘDZIE $f(x) = 4040\frac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}}$. JAK JUŻ WIADOMO Z ZADANIA L1.1 x^{11} OBLICZANIE PRZY POMOCY KOMPUTERA (TRYB PODWÓJNEJ PRECYZJI) WARTOŚCI $f(0{,}001)$ DAJE NIEWIARYGODNY WYNIK. WYTŁUMACZ DLACZEGO TAK SIĘ DZIEJE I ZAPROPONUJ SPOSÓB OBLICZENIA WYNIKU DOKŁADNIEJSZEGO. PRZEPROWADŹ ODPOWIEDNIE EKSPERYMENTY NUMERYCZNE.

$$f(x) = 4040\frac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}} = 4040\frac{(\sqrt{x^{11}+1}-1)(\sqrt{x^{11}+1}+1)}{x^{11}(\sqrt{x^{11}+1}+1)}$$

$$= 4040\frac{\cancel{x^{11}} + \cancel{1} - \cancel{1}}{\cancel{x^{11}}(\sqrt{x^{11}+1}+1)} = \frac{4040}{\sqrt{x^{11}+1}+1}$$

Scanned with CamScanner

ZAD. 9 MOŻNA WYKAZAĆ, ŻE PRZY $x_1 = 2$ CIĄG (2)

$$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}\right)} \quad (k=1,2\ldots)$$

JEST ZBIEŻNY DO π. CZY PODCZAS OBLICZANIA KOLEJNYCH WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZY POMOCY KOMPUTERA MOŻE WYSTĄPIĆ ZJAWISKO UTRATY CYFR ZNACZĄCYCH? JEŚLI TAK, TO ZAPROPONUJ INNY SPOSÓB WYZNACZANIA WYRAZÓW CIĄGU (2) POZWALAJĄCY UNIKNĄĆ WSPOMNIANEGO ZJAWISKA. PRZEPROWADŹ ODPOWIEDNIE TESTY OBLICZENIOWE.

dla $k=28$ zaczynamy tracić cyfry znaczące.

$$1-\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2} = \frac{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}\right)\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}\right)} =$$

$$= \frac{1-1+\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}} \quad \text{wtedy}$$

$$x_{k+1} = \cancel{2^k} \sqrt{2 \cdot \frac{\left(\frac{x_k}{\cancel{2^k}}\right)^2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{x_k^2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x_k}{2^k}\right)^2}}}$$

WKA ZAD 3

$$\frac{|m_r - m|}{m} \le |m_r - m| \cdot \frac{1}{m} \le \frac{2^{-t}}{2} \cdot 2 =$$

$$= 2^{-t}$$

$$m \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{m} \le 2$$