LISTA 3 ZAD 10

Podaj zwartą postać macierzy (mod R) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \alpha^3+3\alpha & 3\alpha^2+1 \\ 3\alpha^2+1 & \alpha^3+3\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \alpha^4+6\alpha^2+1 & 4\alpha^3+4\alpha \\ 4\alpha^3+4\alpha & \alpha^4+6\alpha^2+1 \end{bmatrix}$$

- Dla $n=1$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} (\alpha+1)^1+(\alpha-1)^1 & (\alpha+1)^1-(\alpha-1)^1 \\ (\alpha+1)^1-(\alpha-1)^1 & (\alpha+1)+(\alpha-1)^1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha+1+\alpha-1 & \alpha+1-\alpha+1 \\ \alpha+1-\alpha+1 & \alpha+1+\alpha-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2\alpha & 2 \\ 2 & 2\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^1$$

- Załóżmy, że dla n zachodzi. Pokażemy, że po wykonaniu mnożenia otrzymamy $n+1$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} (\alpha+1)^n+(\alpha-1)^n & (\alpha+1)^n-(\alpha-1)^n \\ (\alpha+1)^n-(\alpha-1)^n & (\alpha+1)^n+(\alpha-1)^n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(\alpha+1)^n+\alpha(\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n-(\alpha-1)^n & \alpha(\alpha+1)^n-\alpha(\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n+(\alpha-1)^n \\ \alpha(\alpha+1)^n-\alpha(\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n+(\alpha-1)^n & \alpha(\alpha+1)^n+\alpha(\alpha-1)^n+(\alpha+1)^n-(\alpha-1)^n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(\alpha+1)^n+(\alpha+1)^n+\alpha(\alpha-1)^n-(\alpha-1)^n & \alpha(\alpha+1)^n+(\alpha+1)^n-\alpha(\alpha-1)^n+(\alpha-1)^n \\ \alpha(\alpha+1)^n+(\alpha+1)^n-\alpha(\alpha-1)^n+(\alpha-1)^n & \alpha(\alpha+1)^n+(\alpha+1)^n+\alpha(\alpha-1)^n-(\alpha-1)^n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} (\alpha+1)(\alpha+1)^n+(\alpha-1)(\alpha-1)^n & (\alpha+1)(\alpha+1)^n+(-\alpha+1)(\alpha-1)^n \\ (\alpha+1)(\alpha+1)^n+(-\alpha+1)(\alpha-1)^n & (\alpha+1)(\alpha+1)^n+(\alpha-1)(\alpha-1)^n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} (\alpha+1)^{n+1}+(\alpha-1)^{n+1} & (\alpha+1)^{n+1}-(\alpha-1)^{n+1} \\ (\alpha+1)^{n+1}-(\alpha-1)^{n+1} & (\alpha+1)^{n+1}+(\alpha-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

Więc jest spełnione dla $n \in N$

LISTA 3 ZAD 11

Oblicz (macierze są nad R):

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 1 & -2 \\ & & & 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1+4+4 & 2+2-4 & 2-4+2 \\ 2 & 1 & -2 & 2+2-4 & 4+1+4 & 4-2-2 \\ 2 & -2 & 1 & 2-4+2 & 4-2-2 & 4+4+1 \\ \hline & & & 9 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 9 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 9 & 18 & 18 \\ 2 & 1 & -2 & 18 & 9 & -18 \\ 2 & -2 & 1 & 18 & -18 & 9 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 9 & -18 \\ 18 & -18 & 9 \end{bmatrix}$$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|cccccc} & & & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ & & & 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1+4+4 & 2+2-4 & 2-4+2 & 1+4+4 & 2+2-4 & 2-4+2 \\ 2 & 1 & -2 & 2+2-4 & 4+1+4 & 4-2-2 & 2+2-4 & 4+1+4 & 4-2-2 \\ 2 & -2 & 1 & 2-4+2 & 4-2-2 & 4+4+1 & 2-4+2 & 4-2-2 & 4+4+1 \\ 1 & 2 & 2 & 1+4+4 & 2+2-4 & 2-4+2 & 1+4+4 & 2+2-4 & 2-4+2 \\ 2 & 1 & -2 & 2+2-4 & 4+1+4 & 4-2-2 & 2+2-4 & 4+1+4 & 4-2-2 \\ 2 & -2 & 1 & 2-4+2 & 4-2-2 & 4+4+1 & 2-4+2 & 4-2-2 & 4+4+1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

LISTA 3 ZAD 1

Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

A) $F(x,y,z)=(2x+y, 3x-z, 5x+y-z, -2x+2y-2z)$

$G(1,0,0)=(2,3,5,-2)$

$G(0,1,0)=(1,0,1,2)$

$G(0,0,1)=(0,-1,-1,-2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-2\cdot w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3+\frac{1}{3}\cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

baza: $B=\{(1,0,1,2),(2,3,5,-2)\}$

B) $G(x,y,z)=(x+y, y-2z, 3z, x-y)$

$G(1,0,0)=(1,0,0,1)$

$G(0,1,0)=(1,1,0,-1)$

$G(0,0,1)=(0,-2,3,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3+2\cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$B=\{(1,0,0,1),(1,1,0,-1),(0,-2,3,0)\}$

C) $H(x,y,z)=(x+y, y+z)$

$H(1,0,0)=(1,0)$

$H(0,1,0)=(1,1)$

$H(0,0,1)=(0,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

baza: $B=\{(1,0),(0,1)\}$

LISTA 3 ZAD 2

Wyznacz bazę jądra dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$).

A) $H(x,y,z)=(x+y, y+z)$

$$\begin{cases} x+y+0\cdot z=0 \\ 0\cdot x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x=-y$
$z=-y$

Skąd możemy dowiedzieć się ile wektorów w bazie?

Tw. 3.10

$\dim(V)=\dim(Im(F))+\dim(\ker(F))$

$\dim(\ker H)=\dim(V)-\dim(Im\,H)$
$\;\;3\quad-\quad2\quad=1$

$(x,y,z)=(-y,y,y)=$
$=y(-1,1,-1)$

Baza Ker H jest np. $(-1, 1, -1)$

B) $I(x,y,z) = (x+y, 2y+z, y-z)$

$$\begin{cases} x + y + 0 \cdot z = 0 \\ 0x + 2y + z = 0 \\ 0x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\dim(\ker J) = 3 - 3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + \frac{1}{2} w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2y = z & \rightarrow y = 0 \\ x = -y & \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Z tego wynika, że baza ker J jest zbiór pusty

C) $J(x,y,z) = (x+y, 2x+2y, 3x+3y)$

$$\begin{cases} x + y + 0 \cdot z = 0 \\ 2x + 2y + 0 \cdot z = 0 \\ 3x + 3y + 0 \cdot z = 0 \end{cases}$$

$\dim(\ker J) = 3 - 1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{ x = -y$ $\quad (-y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

Baza ker J może być, np. $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$

LISTA 3 ZAD 3

Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzeń R^n dla odpowiednich n)?

DEF. Niech V i W będą przestrzeniami nad ciałem R. Funkcja $F: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, jeśli spełnia następujące warunki:

- $\forall v \in V \ \forall \alpha \in F \ F(\alpha v) = \alpha F(v)$
- $\forall v, w \in V \ F(v + w) = F(v) + F(w)$

A) $L(x,y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$

$L(x,y)$ nie jest zamknięty na dodawanie

KONTRPRZYKŁAD: niech $\vec{v_1} = \vec{0}$, $\vec{v_2} = \vec{0}$, $v_1, v_2 \in R^2$

$L(v_1 + v_2) = (0, -1, 0) \neq L(v_1) + L(v_2) = (0, -2, 0)$

B) $L'(x,y,z) = (6x + 5y - 2z, 2x - y)$

$L'(x,y,z)$ jest przekształceniem liniowym

DOWÓD:
Weźmy dow. $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$$L'(v_1) + L'(v_2) = (3x_1 + 5y_1 - 2z_1, 2x_1 - y_1) + (3x_2 + 5y_2 - 2z_2, 2x_2 - y_2) =$$

$$= ((3x_1 + 3x_2) + (5y_1 + 5y_2) - (2z_1 + 2z_2), (2x_1 + 2x_2) - (y_1 + y_2))$$

$$= (3(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$$

$$= L'(v_1 + v_2)$$

Weźmy dowolne $v \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L'(\alpha v) = (3\alpha x + 5\alpha y - 2\alpha z, 2\alpha x - \alpha y) =$$

$$= \alpha(3x + 5y - 2z, 2x - y) = \alpha L'(v)$$

więc jest przekształceniem liniowym

c) $L''(x,y,z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$

nie jest zamknięty na dodawanie

KONTRPRZYKŁAD:

niech $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$L(v_1 + v_2) = (2, -4, -2) \neq L(v_1) + L(v_2) = (1, -4, -2)$

LISTA 3 ZAD 6

Dane jest przekształcenie liniowe $F: V \to W$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne

- F jest różnowartościowe
- $\dim(\ker(F)) = 0$
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora
- $\dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim(V)$

Aby pokazać równoważność tych czterech warunków pokażemy cztery implikacje:

1. $\dim(\ker(F)) = 0 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim V$

Załóżmy, że $\dim(\ker(F)) = 0$. Skorzystamy z tw. 3.10.

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(F)) + \dim(\ker(F))$$

Po podstawieniu mamy: $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(F)) + 0$

więc oczywiście $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(F))$

2. $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(F)) \Rightarrow \ker(F)$ składa się z jednego wektora

Załóżmy, że $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(F))$.

Ponownie skorzystajmy z tw. 3.10 otrzymujemy $\dim(\ker(F)) = 0$. Jeśli wymiar jądra wynosi 0, to musi się ono składać wyłącznie z wektora zerowego. Czyli jądro posiada tylko 1 wektor.

3. $\ker(F)$ składa się z jednego wektora $\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ jest różnowartościowe

Dowód przeprowadzimy przez kontrapozycję. Załóżmy, że F nie jest różnowartościowe. Z tego wynika, że wektor wyjściowy może mieć więcej wektorów, z których jest powyskiwany. Czyli prawdą jest, że

$$\exists v, w \in V \quad (F(v) = F(w) = 0 \ \wedge \ v \neq w)$$

Czyli jądro nie składałoby się z jednego wektora.

4. F jest różnowartościowe $\Rightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

Załóżmy, że F jest różnowartościowe. Z tego wynika, że dla każdego wektora wyjściowego znajdziemy tylko jeden wektor wejściowy. Czyli tylko jeden wektor jest przekształcony na wektor zerowy. Jeśli jądro przekształcenia składa się tylko z jednego wektora to jego wymiar wynosi 0.

LISTA 3 ZAD. 8

Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierz identycznościową/ /jednostkową odpowiedniego wymiaru)

A) $\mathrm{Id} \cdot A = A \qquad B \cdot \mathrm{Id} = B$

B) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

C) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

D) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$

E) $A[B \mid C] = [AB \mid AC]$

F) $\left[\dfrac{B}{C}\right] A = \left[\dfrac{BA}{CA}\right]$

A) $Id \cdot A = A$

Niech $A\ [l \times k]$ $\quad Id\ [l \times l]$

Wtedy z def. produktu mnożenia macierzy element

$$(Id \cdot A)_{l_1, k} = \sum_{l_2=1}^{L} Id_{l_1, l_2} A_{l_2, k}$$

$Id \cdot A$ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(Id \cdot A)_{l_1 k}$

1.) $\sum_{l_2=1}^{L} Id_{l_1, l_2} A_{l_2, k} = Id_{l_1, l_1} A_{l_1, k}$, ponieważ $Id_{l_1, l_2} = 0$, gdy $l_1 \neq l_2$

2.) $Id_{l_1, l_1} A_{l_1, k} = 1 \cdot A_{l_1, k} = A_{l_1, k}$, ponieważ $Id_{l_1, l_2} = 1$, gdy $l_1 = l_2$

Zatem skoro $(Id \cdot A)_{l_1, k} = A_{l_1, k}$ to $Id \cdot A = A$

B) $B \cdot Id = B$

Niech $B\ [k \times l]$ $\quad Id\ [l \times l]$

To wtedy analogicznie jak w podpunkcie A,

1.) $(B \cdot Id)_{k, l_2} = \sum_{l_1=1}^{L} B_{k, l_2} Id_{l_2, l_1} = B_{k, l_2} Id_{l_2, l_2}$

2.) $B_{k, l_2} \cdot Id_{l_2, l_2} = B_{k, l_2} \cdot 1 = B_{k, l_2}$

Zatem $B \cdot Id = B$.

C) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Załóżmy, że A to macierz $[m \times l]$ oraz B i C to macierze $[l \times k]$

Wtedy,

$(A \cdot (B + C))_{m, k} = \sum_{l=1}^{L} A_{m, l} (B+C)_{l, k}$ (z def. mnożenia macierzy).

$\sum_{l=1}^{L} A_{m, l} \cdot (B+C)_{l, k} = \sum_{l=1}^{L} A_{m, l} \cdot (B_{lk} + C_{lk}) =$ (z def dodawania macierzy)

$= \sum_{l=1}^{L} A_{m, l} \cdot B_{l, k} + \sum_{l=1}^{L} A_{m, l} \cdot C_{l, k} =$

$= (A \cdot B)_{m, k} + (A \cdot C)_{m k}$ to $A \cdot (B + C) = AB + AC$

D) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Załóżmy, że A i B to macierze $k \times l$ oraz C to macierz $L \times M$. Wtedy,

$((A+B) \cdot C)_{k, m} = \sum_{l=1}^{L} (A+B)_{k, l} C_{l, m}$ (z def. mnożenia)

$\sum_{l=1}^{L} (A+B)_{kl} \cdot C_{lm} = \sum_{l=1}^{L} (A_{kl} + B_{kl}) \cdot C_{l, m}$ (z def macierzy dodawania)

$\sum_{l=1}^{L}(A_{k,l}+B_{k,l})\cdot C_{l,m} = \sum_{l=1}^{L} A_{k,l}C_{l,m} + \sum_{l=1}^{L} B_{k,l}C_{l,m} =$
$= (A\cdot C)_{k,m} + (B\cdot C)_{k,m}$ (z def. mnożenia macierzy)
Zatem skoro $((A+B)\cdot C)_{k,m} = (A\cdot C)_{k,m} + (B\cdot C)_{k,m}$ to
$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

E) $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$

Załóżmy, że A to macierz $K\times L$, B to macierz $L\times M$, oraz α to dowolny skalar. Wtedy,
$(\alpha\cdot(A\cdot B))_{k,m} = \alpha\cdot\sum_{l=1}^{L} A_{k,l}\cdot B_{l,m} = \sum_{l=1}^{L}\alpha\cdot A_{k,l}\cdot B_{l,m} =$
$= \sum_{l=1}^{L}(\alpha\cdot A_{k,l})\cdot B_{l,m} = ((\alpha\cdot A)\cdot B)_{k,m}$ (z def. mnożenia przez skalar)

Zatem $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B$
Analogicznie $\alpha\cdot(A\cdot B) = A\cdot(\alpha\cdot B)$

F) $A\cdot[B|C] = [AB|AC]$

Załóżmy, że A to macierz $K\times L$, B to macierz $L\times M$ oraz C to macierz $L\times M'$. Wtedy,

Niech $[B|C] = D$, (z def. zestawienia macierzy), gdzie D jest macierzą $L\times(M+M') = L\times J$
Zatem $A\cdot[B|C] = A\cdot D$
$((A\cdot D)_{k,j}) = \sum_{l=1}^{L} A_{k,l}\cdot D_{l,j} =$
1) Dla $j\leq M$
$\sum_{l=1}^{L} A_{k,l}\cdot B_{l,j}$
2) Dla $j>M$
$\sum_{l=1}^{L} A_{k,l}\cdot C_{l,j}$

Zatem $A\cdot[B|C] = [A\cdot B|A\cdot C]$

G) $\left[\frac{B}{C}\right]\cdot A = \left[\frac{BA}{CA}\right]$

Załóżmy, że B to macierz $L\times M$, C to macierz $L'\times M$ oraz A to macierz $M\times K$. Wtedy,

Niech $\left[\frac{B}{C}\right] = D$, gdzie D jest $(L+L')\times M = J\times M$
Zatem, $\left[\frac{B}{C}\right]\cdot A = D\cdot A$
$((D\cdot A)_{j,k}) = \sum_{m=1}^{M} D_{j,m}\cdot A_{m,k} =$
1) Dla $m\leq L$
$\sum_{m=1}^{M} B_{j,m}\cdot A_{m,k}$
2) Dla $m>L$
$\sum_{m=1}^{M} C_{j,m}\cdot A_{m,k}$

Zatem $\left[\frac{B}{C}\right]\cdot A = \left[\frac{BA}{CA}\right]$

LISTA 3 ZAD 9

Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
Rozważmy macierz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix}.$$ Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależność:

$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1} = f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n$$

Najpierw pokażemy przez indukcję matematyczną, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix}$$

Zasada indukcji dla naszego przypadku:

Jeśli $X \subseteq \mathbb{N}_+$ i zachodzi:

- $1 \in X$, oraz
- $\forall_n (n \in X \Rightarrow n+1 \in X)$, to $X = \mathbb{N}_+$

Niech $X = \{ n \in \mathbb{N}_+ : M^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \}$

Pokażemy, że $1 \in X$ (podstawa indukcji).

$$M^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1-1} & f_1 \\ f_1 & f_{1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \overset{n=1}{=} \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$1 \in X$$

Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że $n \in X$.
Pokażmy, że $n+1 \in X$ (krok indukcyjny).

$$M^{n+1} = M^1 \cdot M^n = M^1 \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} + f_n & f_n + f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{(n+1)-1} & f_{(n+1)} \\ f_{(n+1)} & f_{(n+1)+1} \end{bmatrix}$$

$$n+1 \in X$$

ze wzoru $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}_+$, czyli dla każdego $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$

Wiemy, że

$$M^{n+k} = \begin{bmatrix} f_{n+k-1} & f_{n+k} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} \end{bmatrix}$$

Ale również

$$M^{n+k} = M^k \cdot M^n = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_{k-1} \cdot f_{n-1} + f_k f_n & f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1} \\ f_k \cdot f_{n-1} + f_{k+1} \cdot f_n & f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Przyrównując, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} f_{n+k-1} & f_{n+k} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k-1} f_{n-1} + f_k f_n & f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1} \\ f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n & f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Aby macierze były równe, elementy na odpowiadających sobie pozycjach muszą być równe. Więc w szczególności muszą zachodzić równości

$$f_{n+k} = f_k \cdot f_{n-1} + f_{k+1} f_n$$

$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k \cdot f_{n+1}$$