LISTA 9

ZAD. 1 WYTŁUMACZ NA PRZYKŁADZIE, DLACZEGO OPERACJA DODAWANIA PUNKTÓW PO WSPÓŁRZĘDNYCH NIE JEST DOBRYM POMYSŁEM.

PODPRZESTRZENIE AFINICZNE PRZESTRZENI LINIOWEJ
↑
przestrzenie liniowe tylko przesunięte o pewien wektor względem "zero". Takie podprzestrzenie nazywamy podprzestrzeniami afinicznymi tej przestrzeni w której pracujemy lub warstwami podprzestrzeni liniowej.

Hiperpłaszczyzna warstwy o wymiarze o jeden mniejszym niż cała przestrzeń.

Wiemy, że (również z wykładu):

punkt ± wektor = punkt

wektor ± wektor = wektor

liczba · wektor = wektor

punkt − punkt = wektor

a - punkt

z, w - wektor

punkt

$$\begin{cases} \forall_a \forall_z & a+z=a' \\ & (a+z)+w = a+(z+w) \\ \forall_{a,b} & \exists! w \quad a+w=b \end{cases}$$

Z def. mamy, że po dodaniu do punktu wektora dostajemy punkt

$$a+(z+w)=\underbrace{\underbrace{(a+z)}_{\text{punkt}}+\underbrace{w}_{\text{wektor}}}_{\text{punkt}}$$

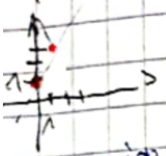
Jedyne dodawanie jakie mamy zdefiniowane nowe jest postaci punkt + wektor

Spróbujmy dodać punkty tak jak wektory

(x_1, y_1) – współrzędne punktu 1
(x_2, y_2) – współrzędne punktu 2

$$(*)\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Pokażmy, że takie dodawanie nie jest zawsze prawidłowe. Przestawmy podprzestrzeń punktów. Weźmy punkt $A(0,1)$ i $B(1,2)$. Korzystając z $(*)$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zauważmy, że dodając w taki sposób znajdzie się poza naszymi punktami.



WNOSKI: • Nie ma takiej operacji punkt + punkt
• w takim dodawaniu istnieją przypadki gdzie wyjdziemy poza przestrzeń punktów (afiniczną).

ZAD. 2 SPRAWDŹ, ŻE WIELOMIANY BERNSTEINA B_i^n MAJĄ NASTĘPUJĄCE WŁASNOŚCI:

A) B_i^n jest nieujemny w przedziale $[0,1]$ i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum

$$B_i^n(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad (i = 0,1 \dots n,\ n \in \mathbb{N})$$

Wielomian Bernsteina ma miejsca zerowe dla $x=0$ oraz $x=1$

Warunek istnienia wzoru $\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ mówi, że nie osiąga on nigdy wartości mniejszych od 0 ponieważ $x \in [0,1]$

$$B_i^n(x)' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)\right) =$$
$$= n\left(\binom{n-1}{i-1} x^{i-1} (1-x)^{n-1-i+1} - \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}\right) =$$
$$= n\left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} x^i (1-x)^{n-1-i}\right) =$$
$$= n\left(\frac{(n-1)!}{i!(n-i)!} \cdot i\, x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!} \cdot (n-i) \cdot x^i (1-x)^{n-1-i}\right) =$$
$$= \binom{n}{i}\left(i x^{i-1} (1-x)^{n-i} - (n-i) \cdot x^i (1-x)^{n-1-i}\right)$$

$$B_i^n(t) = 0$$

Scanned with CamScanner

$$\binom{n}{i}\left(ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}\right) = 0 \quad \Big| : \binom{n}{i}$$

$$ix^{i-1} \cdot (1-x)^{n-i-1}(1-x) - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1} = 0 \quad \Big| : (1-x)^{n-i-1}$$

$$ix^{i-1}(1-x) - x \cdot x^{i-1} \cdot (n-i) = 0 \quad \Big| : x^{i-1}$$

$$i(1-x) - x(n-i) = 0$$

$$i - ix - xn + xi = 0$$

$$i - xn = 0$$

$$x = \frac{i}{n} \leftarrow \text{zatem w } x \text{ istnieje tylko jedno maksimum}$$

B) $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \equiv 1$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = ((1-x)+x)^n = 1^n = 1$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

C) $B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad (0 \le i \le n)$

$$= (1-u)\binom{n-1}{i}u^i(1-u)^{n-1-i} + u\binom{n-1}{i-1}u^{i-1}(1-u)^{n-1-(i-1)} =$$

$$= \binom{n-1}{i}u^i(1-u)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}u^{i-1}(1-u)^{n-1} =$$

$$= \underbrace{\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]}\, u^i(1-u)^{n-i} =$$

$$\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!} \cdot \frac{n-\cancel{i}+\cancel{i}}{i(n-i)} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i}$$

D) $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u) \quad (0 \leq i \leq n)$

$= \frac{n+1-i}{n+1}\binom{n+1}{i}x^i(1-x)^{n+1-i} + \frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}x^{i+1}(1-x)^{n-i} =$

$= \frac{n+1-i}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} x^i(1-x)^{n-i+1} + \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} x^{i+1}(1-x)^{n-i} =$

$= \frac{n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{n-i+1} + \frac{n!}{i!(n-i)!}x^{i+1}(1-x)^{n-i} =$

$= \binom{n}{i}\left(x^i(1-x)^{n-i+1} + x^{i+1}(1-x)^{n-i}\right) =$

$= \left(\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right)(1-x+x) = \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-1}$

ZAD. 3 UDOWODNIJ, ŻE WIELOMIANY $B_0^n, B_1^n \ldots B_n^n$ TWORZĄ BAZĘ PRZESTRZENI Π_n

$B_k^n(t) = \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$

$B_n^n(t) = \binom{n}{n}t^n$

$B_{n-1}^n(t) = \binom{n}{n-1}t^{n-1}(1-t)$

$\vdots$

$B_0^n(t) = \binom{n}{0}(1-t)^n$

Załóżmy, że:

$\alpha_n B_n^n + \alpha_{n-1}B_{n-1}^n + \ldots + \alpha_0 B_0^n = 0$

Zapiszmy w formie wektorów.

$\alpha_n \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_{n+1} \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_0 \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Wyrażamy $\alpha_0 \cdot x = 0, \ \alpha_0 = 0$

Pozostałe $\alpha_1 \cdot x + \alpha_0 \cdot x = 0, \ \alpha_0 = 0, \ x \neq 0$

więc $\alpha_1 \cdot x = 0, \ \alpha_1 = 0$

$\vdots$

$\alpha_n \cdot x = 0, \ \alpha_n = 0$

więc $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_{n-1}^n, B_n^n$ są liniowo niezależne. Jest ich $n+1$, więc tworzą bazę przestrzeni Π_n.

ZAD 4 SFORMUŁUJ I UDOWODNIJ ALGORYTM DE CASTELJAU WYZNACZANIA PUNKTU NA KRZYWEJ BEZIERA. JAKA JEST JEGO INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA?

ALGORYTM DE CASTELJAU $\to O(n^2)$

Niech dana będzie krzywa $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in E$ $(0,1 \ldots n)$ oraz liczbę $t \in [0,1]$

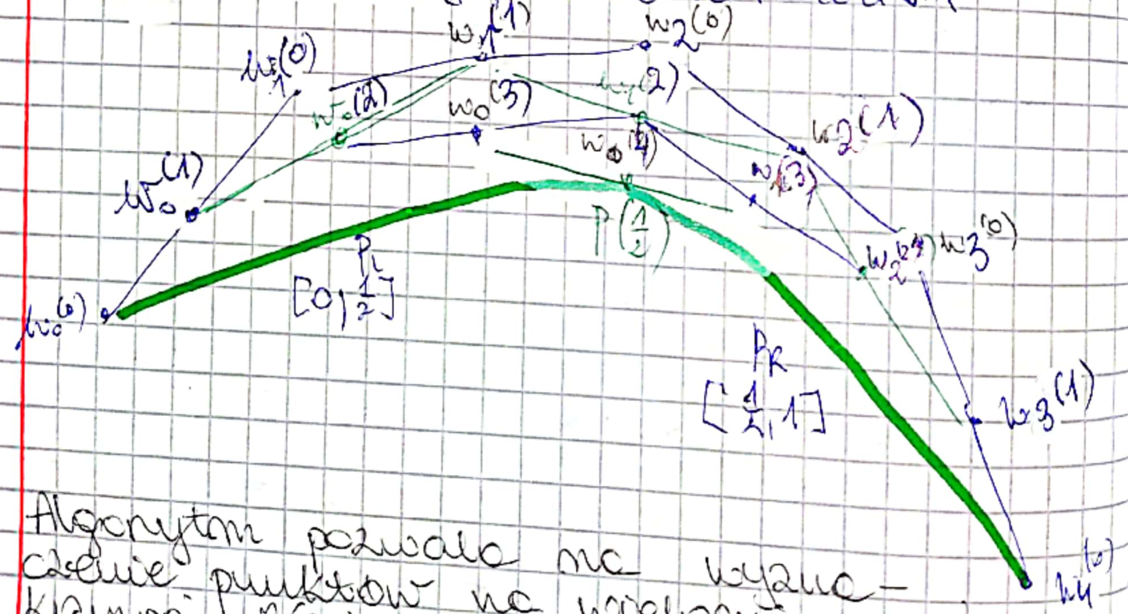
Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i=0,1 \ldots n)$ $(k=0,1 \ldots n-1)$

będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} = W_k \quad (k=0,1 \ldots n)$$
$$W_k^{(i)} = (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad \begin{pmatrix} i=1,2 \ldots n \\ k=0,1 \ldots n-i \end{pmatrix}$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$
- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA



Algorytm pozwala na wyznaczenie punktów na wielomianowej krzywej Beziera.

Krzywa Beziera stopnia n posiada stopień krzywej Beziera

Niech $P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot W_i$ $(0 \le t \le 1)$ $(W_i \in E^2)$

punkty kontrolne

i $\left[\begin{array}{l} W_k^{(0)} = W_k \quad (k=0,1\dots n) \\ W_k^{(i)} = (1-t) W_k^{(i-1)} + \\ \quad + t W_{k+1}^{(i-1)} \end{array}\right.$

$(i = 1,2 \dots n$
$k = 0, \dots n-i)$

Dla $n=0$

- $P_0(t) = B_0^0(t) w_0 = w_0 = w_0^{(0)}$

~~wiemy że dla n $(P_n(t))$ zachodzi~~

Pokażmy że dla n

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_0^n(t) \cdot W_i^{(0)} = \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} \left[\text{z zad. 2c} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} \left[(1-t) B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} \cdot t B_{i-1}^{n-1}(t) =$$

$$= (1-t) \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n} W_i^{(0)} \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) =$$

$$= (1-t) \sum_{i=1}^{n-1} W_i^{(0)} B_i^{n-1}(t) + (1-t) \cdot W_0^{(0)} B_0^{n-1}(t) + (1-t) \cdot W_n^{(0)} \cdot \underbrace{B_n^{n-1}}_{0} +$$

$$+ t \cdot \sum_{i=1}^{n-1} W_i^{(0)} \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) + \underbrace{t \cdot W_1^{(0)} \cdot B_{-1}^{n-1}(t)}_{0} + t \cdot W_n^{(0)} \cdot B_{n-1}^{n-1}(t)$$

$= w_0(1-t)\cdot B_0^{n-1}(t) + w_n^{(0)}\cdot t\cdot B_{n-1}^{n-1}(t) + (1-t)\sum_{i=1}^{n-1} w_i^{(0)}\cdot$

$\cdot B_i^{n-1} + t\sum_{i=1}^{n-1} w_i^{(0)}\cdot B_{i-1}^{n-1}(t) =$

$= w_0(1-t)\cdot B_0^{n-1} + w_n^{(0)}\cdot B_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i\underbrace{\left[(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)\right]}$

$= w_0(1-t)\cdot B_0^{n-1} + w_n^{(0)}\cdot tB_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i\cdot B_i^n =$

$= w_0 B_0^n + w_n B_n^n + \sum_{i=1}^{n-1} w_i\cdot B_i^n = \sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n = P_n(t)$

$(1-t)B_0^{n-1}(t) = (1-t)(1-t)^{n-1} = (1-t)^n = B_0^n(t)$ $\quad tB_{n-1}^{n-1}(t) = t\,t^{n-1} = t^n = B_n^n(t)$

ZAD 5 WYKORZYSTUJĄC SCHEMAT HORNERA DO OPRACOWANIA ALGORYTMU OBLICZANIA PUNKTU NA KRZYWEJ BÉZIERA, KTÓRY DZIAŁA W CZASIE LINIOWYM WZGLĘDEM LICZBY JEJ PUNKTÓW KONTROLNYCH

$a_0B_0^n(t) + a_1B_1^n(t) + \ldots + a_{n-1}B_{n-1}^n(t) + a_nB_n^n(t)$

Rozpiszmy wzór na krzywą Béziera stopnia n i wykorzystajmy schemat Hornera:

$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\cdot w_i = \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}\right)\cdot w_i =$

$= \binom{n}{0}t^0(1-t)^{n-0}\cdot w_0 + \binom{n}{1}t^1(1-t)^{n-1}\cdot w_1 + \ldots + \binom{n}{n}t^n(1-t)^{n-n}w_n =$

$= (\ldots((w_0\cdot\binom{n}{0}(1-t) + w_1\binom{n}{1}t)(1-t) + w_2\binom{n}{2}t^2)(1-t) +$

$\ldots + w_{n-1}\binom{n}{n-1}t^{n-1}) + w_n\binom{n}{n}t^n.$

ALGORYTM:

```
Pn = w0
dn = n
tdi = t
for(i=1;i<n;i++){
    Pn=Pn*(1-t)
    dn=dn*((n+1-i)/i)
    Pn=Pn+(wi*dn*tdi)
}
return Pn
```

$P_n \to P_n(t)$

dn → dwumian Newtona

tdi → t do potęgi i-tej

Zauważmy, że: $\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1}\cdot\frac{n-i-1}{n}$

i skorzystajmy z tego, aby usprawnić obliczenia (dlatego dn = n, a w kolejnych iteracjach dn = dn * ((n+1-i)/i)

Scanned with CamScanner

→ DOWÓD INDUKCJA $\quad P_0, P_1 \ldots P_n \quad P = W$

$P_{01}(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \qquad P_{12}(t) = (1-t)P_1 + tP_2$

$P_{012}(t) = (1-t)P_{01} + tP_{12} \qquad P_{123}(t) = (1-t)P_{12} + tP_{23}$

$$\begin{cases} P_{012}(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 & / \cdot (1-t) \\ P_{123}(t) = (1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3 & / \cdot t \end{cases}$$

$$P_{0123}(t) = \overset{P_0}{(1-t)^3} + \overset{P_1}{\begin{matrix} 2t(1-t)^2 \\ t(1-t)^2 \end{matrix}} + \overset{P_2}{\begin{matrix} t^2(1-t) \\ 2t(1-t) \end{matrix}} + \overset{P_3}{t^3}$$

$$P_{0123} = P_0 B_0^3 + P_1 B_1^3 + P_2 B_2^3 + P_3 B_3^3$$

$$\binom{3}{1} t(1-t)^2$$

$P_{01234}(t)$

1	3	3	1	
+	1	3	3	1
1	4	6	4	1
$(1-t)^4$	$t(1-t)^3$	$t^2(1-t)^2$	$t^3(1-t)$	t^4
$P_0B_0^4$	$P_1B_1^4$ +	…	…	…

ZAD 7 WYKAŻ, ŻE DLA KAŻDEGO $t \in [0,1]$ $R_n(t)$ JEST PUNKTEM NA PŁASZCZYŹNIE BĘDĄCYM KOMBINACJĄ BARYCENTRYCZNĄ PUNKTÓW KONTROLNYCH $W_0, W_1, \ldots W_n \in E^2$.

$$R_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_k^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_k^n(t)} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_k^n(t)}}_{\alpha_i} \cdot W_i$$

(z wykładu: kombinacja barycentryczna punktów $\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_n W_n$, gdzie $W_0, W_1 \ldots W_n$ – punkty (kontrolne) na płaszczyźnie E^2 i $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ – liczby rzeczywiste takie, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_n = 1$)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_k^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_k^n(t)} = 1$$

Zauważmy, że $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ zatem $R_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot W_i$ jest kombinacją barycentryczną punktów $W_0 \ldots W_n$ zatem $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie