LISTA 10

ZAD. 2 WYZNACZ FUNKCJĘ POSTACI
$y(x) = ax(2021x - 2020) + 1977$
najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	...	x_n
y_k	y_0	y_1	...	y_n

$$\|f - w^*\| = \min \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - w(x_k))^2} =$$

$$= \min \sqrt{\underbrace{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - ax_k(2021x_k - 2020) - 1977)^2}_{E(a) - \text{funkcja błędu}}} =$$

$$E'(a) = \sum_{k=0}^{N} 2(f(x_k) - ax_k(2021x_k - 2020) - 1977) \cdot (0 - x_k(2021x_k - 2020)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} 2(f(x_k) - ax_k(2021x_k - 2020) - 1977)(2020x_k - 2021x_k^2)$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - a(2021x_k^2 - 2020x_k) - 1977)(2021x_k^2 - 2020x_k)$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - 1977 - a(2021x_k^2 - 2020x_k))(2021x_k^2 - 2020x_k)$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - 1977)(2021x_k^2 - 2020x_k) - a(2021x_k^2 - 2020x_k) =$$

$$= -2\left(\sum_{k=0}^{N}(f(x_k)-1877)(2021x_k^2-2020x_k) - a\sum_{k=0}^{N}(2021x_k^2-2020x_k)^2\right) =$$

$$E'(a) = 0$$

$$-2\left(\sum_{k=0}^{N}(f(x_k)-1877)(2021x_k^2-2020x_k) - a\sum_{k=0}^{N}(2021x_k^2-2020x_k)^2\right) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N}(f(x_k)-1877)(2021x_k^2-2020x_k) = a\sum_{k=0}^{N}(2020x_k^2-2020x_k)^2$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{N}(f(x_k)-1877)(2021x_k^2-2020x_k)}{\sum_{k=0}^{N}(2021x_k^2-2020x_k)^2}$$

ZAD 1 NIECH DANE BĘDĄ PARAMI RÓŻNE PUNKTY $X := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ FUNKCJA p O WŁASNOŚCI $p(x) > 0$ dla $x \in X$. Udowodnij, że wzór

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

OKREŚLA NORMĘ NA ZBIORZE DYSKRETNYM X.

Pokażmy, że $\|f\|$ spełnia własności dyskretnej normy średniokwadratowej

Z WYKŁADU

1°) $\|f\|_2 \geq 0$, $\|f\|_2 = 0 \iff f(x_n) = 0$

dla $n = 0, 1, \ldots N$

2°) $\|\alpha \cdot f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

3°) $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

$1°$ $\|f\|_2 \geq 0$, $\|f\|_2 = 0 \iff f(x_k) = 0$

$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)} \geq 0$ z def pierwiastka

$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2} = 0$ wiemy, że $p(x) > 0$ $\rightarrow \iff f(x_k) = 0$

$2°$ $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$

$$\|\alpha f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)(\alpha f(x_k))^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)\alpha^2 f(x_k)^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2 \sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2} = |\alpha| \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2} =$$

$$= |\alpha| \cdot \|f\|$$

$3°$ $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k (f_k + g_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2} \quad \Big|^2$$

$$\left(\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k (f_k^2 + 2 f_k g_k + g_k^2)}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2 + 2p_k f_k g_k + p_k g_k^2}\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2} + \sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2$$

$$\left(\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2 + \sum_{k=0}^{N} 2 p_k f_k g_k + \sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2}\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2} + \sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2$$

$$\cancel{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2} + \sum_{k=0}^{N} 2 p_k f_k g_k + \cancel{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2} \leq \cancel{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2} + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2} + \cancel{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2}$$

$$\sum_{k=0}^{N} 2 p_k f_k g_k \leq 2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2} \quad \Big|^2 \longrightarrow$$

CAUCHY-SCHWARZ $\left(\sum_{i=0}^{N} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{N} y_i^2\right)$

Jeśli $x_k = \sqrt{p_k} f_k$, $y_k = \sqrt{p_k} g_k$ to nasze ostatnie przejście jest prawdziwe

$$\left(\sum_{k=0}^{N} p_k f_k g_k\right)^2 \le \sum_{k=0}^{N} p_k f_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{N} p_k g_k^2$$

ZAD 3 DLA JAKIEJ STAŁEJ a WYRAŻENIE

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{e^{x_k}-2020}{1+\ln(x_k^2+1)}\left[y_k - a\left(\cos(2x_k+2020)+x_k^3\right)\right]^2$$

PRZYJMUJE NAJMNIEJSZĄ MOŻLIWĄ WARTOŚĆ?

$$E(a) = \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\frac{e^{x_k}-2020}{1+\ln(x_k^2+1)}}_{s_k}\Big[y_k - a\underbrace{\left(\cos(2x_k+2020)+y_k^3\right)}_{t_k}\Big]^2$$

obie te wartości są niezależne od parametru a. Potraktujemy je więc jak stałe

$$E(a) = \sum_{k=0}^{N} s_k\left[y_k - a\cdot t_k\right]^2$$

Policzmy pochodną

$$E'(a) = \sum_{k=0}^{N} s_k 2\cdot\left[y_k - a t_k\right]\cdot\left[0 - t_k\right] =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{N} s_k\cdot\left[y_k - a\cdot t_k\right]\cdot(-t_k) =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N} s_k\cdot\left[y_k - a t_k\right]\cdot t_k =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N}\left(s_k y_k t_k - s_k a t_k^2\right)$$

$$E'(a) = 0$$

$$-2\sum_{k=0}^{N}\left(s_k y_k t_k - s_k a t_k^2\right) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} s_k y_k t_k - \sum_{k=0}^{N} s_k a t_k^2 = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} s_k y_k t_k = \sum_{k=0}^{N} s_k a t_k^2$$

Scanned with CamScanner

$$\sum_{k=0}^{r} s_k y_k t_k = a \sum_{k=0}^{r} s_k t_k^2$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{r} s_k y_k t_k}{\sum_{k=0}^{r} s_k t_k^2}$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{r} y_k \cdot \frac{e^{x_k}-2020}{1+\ln(x_k^2+1)} \cdot \left(\cos(2x_k+2020)+x_k^3\right)}{\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{x_k}-2020}{1+\ln(x_k^2+1)} \cdot \left(\cos(2x_k+2020)+x_k^3\right)^2}$$

ZAD 5 WIADOMO, ŻE NAPIĘCIE POWIERZCHNIOWE CIECZY S JEST FUNKCJĄ LINIOWĄ TEMPERATURY T:

$$S = aT + b$$

DLA KONKRETNEJ CIECZY WYKONANO POMIARY S W PEWNYCH TEMPERATURACH, OTRZYMUJĄC NASTĘPUJĄCE WYNIKI:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

WYZNACZ PRAWDOPODOBNE WARTOŚCI STAŁYCH a i b.

$$E(a,b) = \sum_{k=0}^{N} (S(T_k) - aT_k - b)^2$$

Trzeba tak dobrać parametry a i b, aby wartość funkcji $E(a,b)$ była jak najmniejsza. Wobec tego spełnione muszą być dwa następujące warunki konieczne:

$$\begin{cases} \frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 0 & = \sum_{k=0}^{N} 2(f(x_k) - ax_k - b)^1 \cdot (-x_k) = 0 \\ \frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = 0 & = \sum_{k=0}^{N} 2(f(x_k) - ax_k - b)^1 \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = \sum_{k=0}^{N} 2(S(T_k) - aT_k - b)(0 - T_k - 0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} 2(S(T_k) - aT_k - b)(-T_k) = -2\sum_{k=0}^{N}(S(T_k) - aT_k - b)(T_k)$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = \sum_{k=0}^{N} 2\left(S(T_k) - aT_k - b\right)(0-0-1) =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{N}\left(S(T_k) - aT_k - b\right)$$

TAKIM SPOSOBEM OTRZYMUJEMY UKŁAD RÓWNAŃ

$$\begin{cases} -2\sum\limits_{k=0}^{N}\left((S(T_k) - aT_k - b)T_k\right) = 0 \\ -2\sum\limits_{k=0}^{N}\left(S(T_k) - aT_k - b\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N} S(T_k)\cdot T_k - \sum\limits_{k=0}^{N} aT_k^2 - \sum\limits_{k=0}^{N} bT_k = 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{N} S(T_k) - \sum\limits_{k=0}^{N} aT_k - \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{N} b} = 0 \end{cases}$$

dodajemy b n+1 razy możemy więc zapisać $\sum\limits_{k=0}^{N} b$ jako $(n+1)b$

OZNACZMY:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{N} T_k^2, \quad x_2 = \sum_{k=0}^{N} T_k, \quad x_3 = \sum_{k=0}^{N} S(T_k), \quad x_4 = \sum_{k=0}^{N} S(T_k)T_k$$

$$\begin{cases} x_4 - a\cdot x_1 - b\cdot x_2 = 0 \\ x_3 - a x_2 - (n+1)b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 = x_4 \\ a x_2 + (n+1)b = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_4 - b x_2}{x_1} \\ \dfrac{x_4 - b x_2}{x_1}\cdot x_2 + (n+1)b = x_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_4 x_2}{x_1} - \frac{b x_2^2}{x_1} + (n+1)b = x_3$$

$$(n+1)b - \frac{b x_2^2}{x_1} = x_3 - \frac{x_4 x_2}{x_1}$$

$$b\left(m+1-\frac{x_2^2}{x_1}\right)=x_3-\frac{x_4x_2}{x_1}$$

$$b=\frac{x_3\cdot x_1-x_4x_2}{x_1}:\frac{(m+1)x_1-x_2^2}{x_1}$$

$$b=\frac{x_3\cdot x_1-x_4x_2}{\cancel{x_1}}\cdot\frac{\cancel{x_1}}{(m+1)x_1-x_2^2}=$$

$$=\frac{x_3\cdot x_1-x_4x_2}{(m+1)x_1-x_2^2}=\frac{\sum_{k=0}^{N}S(T_k)\cdot\sum_{k=0}^{N}T_k^2-\sum_{k=0}^{N}S(T_k)T_k\cdot\sum_{k=0}^{N}T_k}{(n+1)\sum_{k=0}^{N}T_k^2-\left(\sum_{k=0}^{N}T_k\right)^2}$$

$$\begin{cases}ax_1+bx_2=x_4\\ ax_2+(n+1)b=x_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=\dfrac{x_3-ax_2}{m+1}\\ a=\dfrac{x_4-bx_2}{x_1}\end{cases}$$

$$a=\frac{x_4-\dfrac{x_3x_1-x_4x_2}{(n+1)x_1-x_2^2}\cdot x_2}{x_1}=\frac{\dfrac{x_4(n+1)x_1-x_4x_2^2-x_3x_2x_1+x_4x_2^2}{(n+1)x_1-x_2^2}}{x_1}$$

$$=\frac{(n+1)x_4\cancel{x_1}-\cancel{x_4x_2^2}-x_3x_2x_1+\cancel{x_4x_2^2}}{(n+1)x_1^2-x_2^2\cancel{x_1}}=\frac{(m+1)x_4-x_2x_3}{(m+1)x_1-x_2^2}$$

dla $n=7$

$$\begin{cases}a=\dfrac{(n+1)x_4-x_2x_3}{(m+1)x_1-x_2^2}=\dfrac{8\cdot 22685-26525\cdot 514.5}{8\cdot 26525-365^2}=-0.07933\\ b=\dfrac{x_3x_1-x_4x_2}{(n+1)x_1-x_2^2}=\dfrac{514.5\cdot 26525-22685\cdot 365}{8\cdot 26525-365^2}=67.95832\end{cases}$$

$$x_1=\sum_{k=0}^{N}T_k^2=26525\qquad x_3=\sum_{k=0}^{N}S(T_k)=514.5$$

$$x_2=\sum_{k=0}^{N}T_k=365\qquad x_4=\sum_{k=0}^{N}S(T_k)T_k=22685$$

ZAD 6 PUNKTY (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \dots, r)$ OTRZYMANO JAKO WYNIKI POMIARÓW. PO ICH ZAZNACZENIU NA PAPIERZE Z SIATKĄ PÓŁLOGARYTMICZNĄ OKAZAŁO SIĘ, ŻE LEŻĄ ONE PRAWIE NA LINII PROSTEJ, CO SUGERUJE IŻ $y \approx e^{ax+b}$. ZAPROPONUJ PROSTY SPOSÓB WYZNACZENIA PRAWDOPODOBNYCH WARTOŚCI PARAMETRÓW a I b.

e^{ax+b} to nie jest postać $a \cdot \varphi_0(x) + b \cdot \varphi_1(x)$

Co trzeba zrobić z podanymi danymi, aby prawa strona przybliżenia $y = e^{ax+b}$ stała się kombinacją liniową o współczynnikach a, b

$$y \approx e^{ax+b}$$

$$\ln y \approx ax + b$$

Przybliżamy $\ln y$ z podprzestrzeni rozpiętej przez 1 i x $\quad \mathrm{lin}\{1, x\}$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, \ln y\rangle \\ \langle x, \ln y\rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle 1, \ln y\rangle = \sum_{i=0}^{r} \ln y_i \qquad \langle x, \ln y\rangle = \sum_{i=0}^{r} x_i \ln y_i$$