LISTA 9 ZAD 1

Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, t.j. dla wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots v_n]^T$, $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i .$$

Pokaż, że

$$[\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle] = u^T v .$$

(Formalnie $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą, ale staramy się ignorować takie drobnostki.)

Wywnioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle \vec{u}, M\vec{v} \rangle = \langle M^T \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$u = [u_1, u_2, \ldots u_n]^T$

$v = [v_1, v_2, \ldots v_n]^T$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

· Pokażę, że $\langle u, v\rangle = u^T \cdot v$

$$u^T \cdot v = [u_1, u_2, \ldots u_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

czyli $\langle u, v\rangle = u^T \cdot v$

· Teraz pokażę, że $\langle u, Mv\rangle = \langle M^T u, v\rangle$

$$u^T \cdot (M^T)^T = (M^T u)^T$$

$$\langle u, Mv\rangle = u^T \cdot Mv = (M^T \cdot u)^T \cdot v = \langle M^T u, v\rangle$$

LISTA 9 ZAD 2

Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv\rangle = \langle Mu, v\rangle$$

(możesz skorzystać z zad. 1)

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych $\vec{v}$ oraz $\vec{v}'$, to $\langle \vec{v}, \vec{v}'\rangle = 0$, tj. $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ są prostopadłe.

(1.) Weźmy dowolną macierz symetryczną M. Z zad. 1 wiemy, że

$$\langle u, Mv\rangle = \langle M^T u, v\rangle$$

M jest symetryczna, zatem $M^T u = Mu$ co daje nam:

$$\langle u, Mv\rangle = \langle Mu, v\rangle$$

(2.)

Jeśli λ i λ' są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v i v' to $Mv = \lambda v$ oraz $Mv' = \lambda' v'$. Z (1.) wiemy, że

$$\langle v', Mv\rangle = \langle Mv', v\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle v', \lambda v\rangle = \langle \lambda' v', v\rangle$$

$$\Updownarrow$$

Scanned with CamScanner

$$\lambda\langle v', v\rangle = \lambda'\langle v', v\rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda\langle v', v\rangle - \lambda'\langle v', v\rangle = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(\lambda - \lambda')\langle v', v\rangle = 0$$

Ponieważ $\lambda \neq \lambda'$ to $\langle v, v'\rangle = 0$, czyli v i v' są prostopadłe.

LISTA 9 ZAD 4

Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Oblicz iloczyn skalarne $\langle x^i, x^j\rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.

Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako:

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \qquad 0 \leq i \leq j \leq 3$$

$$\langle x^i, x^j\rangle = \int_{-1}^{1} x^i x^j\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} x^i x^j\,dx = \int_{-1}^{1} x^{i+j}\,dx$$

$$\int x^{i+j}\,dx = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1} + C$$

$$\int_{-1}^{1} x^{i+j}\,dx = \frac{1}{i+j+1}\left(1^{i+j+1} - (-1)^{i+j+1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i+j \text{ nieparzystego} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{dla } i+j \text{ parzystego} \end{cases}$$

czyli dla $0 \leq i \leq j \leq 3$
- 2 gdy $i = j = 0$
- $2/3$ gdy $\boxed{i = 0, j = 2}$ lub $i = j = 1$
- $2/5$ gdy $\boxed{i = 1, j = 3}$ lub $i = j = 2$
- $2/7$ gdy $i = j = 3$
- 0 wpp

$\Rightarrow$ więc to nie jest układ ortogonalny (przy tym iloczynie skalarnym)

LISTA 9 ZAD 6

Udowodnij, że w przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ zachodzi

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \iff (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$$

Weźmy dowolne $\vec{u}, \vec{v} \in V$ t.ż. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Korzystając z def. normy wektora, liniowości i symetryczności iloczynu skalarnego mamy:

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \iff \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ | zdejmujemy pierw.

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ | odejmujemy $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ | korzystamy z liniowości i symetryczności

$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{v} \rangle$ | dodajemy $\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} \rangle$

$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} \rangle$

$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} - \vec{u} + \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} \rangle$

$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle$

Ponieważ $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$ mamy:

$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = 0 \iff (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$ □

LISTA 9 ZAD 8

Niech $B = \vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ będzie bazą ortonormalną V a $\vec{v} \in V$ dowolnym wektorem w V. Pokaż, że jeśli $(\vec{v})_B = (\alpha_1, \dots \alpha_n)^T$ to

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}.$$

Wiemy, że

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1$ w bazie ortonormalnej

dla $i \neq j$ $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ w bazie ortonormalnej

Zatem:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \vec{v}_j \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot 1} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$$

$|\alpha_i|^2$

LISTA 9 ZAD 9 (Nierówność Bessela; równość Parsevala)

Niech $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_k}\}$ będą układem ortonormalnym tj.

- $\forall_i \langle \vec{e_i}, \vec{e_i} \rangle = 1$;
- $\forall_{i \neq j} \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą)
Pokaż, że dla dowolnego wektora v

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{e_i}, v \rangle|^2 \leq \|\vec{v}\|^2.$$

Co więcej, $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_k}\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\vec{v}$ zachodzi równość.

Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym, a $E = \{e_1, \dots e_k\}$ będzie układem ortonormalnym. Wtedy E jest bazą ortonormalną V lub można go do bazy ortonormalnej rozszerzyć. Niech $E' = \{e_1', \dots e_n'\}$ będzie więc (być może pustym) układem wektorów, takim że $E \cup E'$ jest bazą ortonormalną V i $E \cap E' = \emptyset$. Każdy wektor $v \in V$ ma wtedy postać

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i'$$

dla pewnych $\alpha_1, \dots \alpha_k$ i $\alpha_1', \dots \alpha_n'$ z $\mathbb{F}$.

Kwadrat długości tego wektora jest równy.

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i', v \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle e_i, v \rangle + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \langle e_i', v \rangle$$

Z Lematu 10.11 i wynika, że

$$\alpha_i = \langle v, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, v \rangle}, \quad \alpha_i' = \langle v, e_i' \rangle = \overline{\langle e_i', v \rangle}, \quad \text{a więc}$$

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \overline{\langle e_i, v \rangle} \langle e_i, v \rangle + \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle e_i', v \rangle} \langle e_i', v \rangle = \sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, v \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i', v \rangle|^2.$$

W takim razie

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, v \rangle|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i', v \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Równość dla każdego v zachodzi wtedy, gdy $E' = \emptyset$, czyli gdy E jest bazą ortonormalną V.