LISTA 6 ZAD 1

(Wyznacznik macierzy klatkowej). Dla macierzy M postaci (macierz klatkowa)

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix}$$ (zobacz Kopleck'a)

tzn. przekątna M pokrywa się z przekątnymi macierzy $M_1 \ldots M_k$, a poza tymi macierzami M ma same zera.

Pokaż, że $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i)$

MACIERZ KLATKOWA - rozbiór macierzy na umieszczone obok siebie mniejsze macierze zwane klatkami. Macierz klatkowa powstaje po pogrupowaniu zarówno wierszy i kolumn tak, aby w każdej grupie były przylegające do siebie kolumny albo przylegające wiersze.

LEMAT 4.33

Używając eliminacji Gaussa zarówno na wierszach jak i kolumnach można dowolną macierz kwadratową przekształcić do macierzy przekątniowej (trójkątnej).

FAKT 6.3

Dla macierzy trójkątnej wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej.

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & & & \\ & & M_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M_k \end{bmatrix} \qquad T: \det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i)$$

Zauważmy, że macierze $M_1, M_2 \ldots M_k$ są "rozłączne" tzn. działając na nich wewnętrznie w macierzy M nie modyfikujemy innych, czyli zarówno operacje kolumnowe na M_i $(1 \le i \le k)$ jak i wierszowe zmieniają tylko M_i.

Wobec tego załóżmy, że wszystkie macierze $M_1 \ldots M_k$ mają wyznacznik $\neq 0$. W związku z tym poprzez operacje elementarne jesteśmy w stanie sprowadzić je do postaci schodkowej. Wtedy lewa lub prawa strona przekątnej macierzy M jest samymi 0. Wtedy $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i)$.

Załóżmy, że pewne M_i ma wyznacznik $= 0$. Wtedy sprowadźmy wszystkie M_i do postaci schodkowej. Wtedy ostanie w naszej wybranej macierzy rząd/kolumna złożona z samych 0. Jednocześnie cały rząd/kolumna w macierzy M jest samymi 0, więc $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i) = 0$.

LISTA 6 ZAD 4

Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(Ax_i)}{\det(A)}$ układy równań:

A) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 2 \cdot 16 + 1 = 33$

$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 17 & 16 \end{bmatrix}$ $\det(Ax_1) = 16 + 17 = 33$

$Ax_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$ $\det(Ax_2) = 2 \cdot 17 - 1 = 33$

$x_1 = \frac{\det(Ax_1)}{\det(A)} = \frac{33}{33} = 1$

$x_2 = \frac{\det(Ax_2)}{\det(A)} = \frac{33}{33} = 1$

B) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\det(A) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$Ax_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}$ $\det(Ax_1) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha = \cos(\alpha+\beta)$

$Ax_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\sin\alpha & \sin\beta \end{bmatrix}$ $\det(Ax_2) = \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha = \sin(\alpha+\beta)$

$x_1 = \cos(\alpha+\beta)$

$x_2 = \sin(\alpha+\beta)$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$\det(A) = 1 + 1 + 1 - (1 - 1 - 1) = 3 + 1 = 4$

Scanned with CamScanner

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \det(A_{x_1}) = 6+0+2-(2-6+0) = 8+4 = 12$$

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \det(A_{x_2}) = 0-2+6-(0+2-6) = 4+4 = 8$$

$$A_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \det(A_{x_3}) = 2+6+0-(6+0-2) = 8-4 = 4$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{8}{4} = 2 \qquad x_3 = \frac{4}{4} = 1$$

LISTA 6 ZAD 5

Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest mod $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}$$

TW. KRONECKERA-CAPPELLEGO

Jest potrzebne/przydatne przy określaniu liczby rozwiązań układu równań liniowych.

Układ równań liniowych postaci

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}$$

posiada przynajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $rzA = rzU$.

U = macierz uzupełniona

Ponadto jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$r = rzA = rzU$$

n - liczba niewiadomych
m - liczba równań

to gdy

- $r = n$ - układ równań ma dokładnie jedno rozw.
- $r < n$ - układ ma nieskończenie wiele rozw., które zależą od $n-r$ parametrów.

Jeżeli $rzA \neq rzU$ to układ sprzeczny (nie ma rozwiązań)

Scanned with CamScanner

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 1 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$ macierz uzupełnień $$U = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^3 & \lambda^2 \end{array}\right]$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 1 & \lambda^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{matrix} = \lambda^6 + \lambda^3 + \cancel{\lambda^5} - (\cancel{\lambda^5} + \lambda^4 + \lambda^5) =$$
$$= \lambda^6 - \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 =$$
$$= \lambda^3(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) =$$
$$= \lambda^3(\lambda^2(\lambda-1) - (\lambda-1)) =$$
$$= \lambda^3((\lambda^2-1)\cdot(\lambda-1)) =$$
$$= \lambda^3 \cdot (\lambda^2-1)(\lambda-1)$$

Jeśli $\det(A) \neq 0$ to ma 1 rozwiązanie (bo wtedy ma pełny rzA będzie równy rzU)

$\det(A) = 0 \quad \to \quad \lambda^3(\lambda^2-1)(\lambda-1) = 0$
gdy
$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = -1 \quad \vee \quad \lambda = 1$

jesteśmy Z_{13}

czyli $\det(A) \neq 0$ dla $\lambda \in \{2, 3, \ldots, 11\}$ układ ma 1 rozwiązanie
$\det(A) = 0$ dla $\lambda \in \{1, 0, 12\}$

Sprawdzimy jaki jest więc rząd macierzy A i U dla $\lambda \in \{1, 0, 12\}$.

dla $\lambda = 1$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$rzA = 1 \qquad rzU = 1$

czyli $rzA = rzU$
$n = 3$
$n - r = 3 - 1 = 2$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań które zależą od 2 parametrów

dla $\lambda = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad U = \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$\det(A) = 0 \qquad \neq 0$, więc $rzA = 2$

$\det(U) \neq 0 \qquad rzU = 3$

czyli $rzA \neq rzU$ brak rozwiązań

dla $\lambda = 12$

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 12^2 & 12^3 \\ 1 & 12^2 & 12^3 \\ 1 & 1 & 12^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[w_2 = w_2/w_3]{w_1 = w_1/w_3} \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 12^2 & 1 \\ 1 & 1 & 12^3 \end{vmatrix}$$

$rzA = 3$

$$U = \left|\begin{array}{ccc|c} 12 & 12^2 & 12^3 & 1 \\ 1 & 12^2 & 12^3 & 12 \\ 1 & 1 & 12^3 & 12^3 \end{array}\right|$$

$rzU = 3$

czyli $rzA = rzU$ układ ma dokładnie 1 rozw.

Scanned with CamScanner

LISTA 6 ZAD 6

Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru p):

A) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2p \\ 4 & 1 & 5 & 2 & p \end{array}\right]$$

$rz A = 2$ $\qquad$ $rz U = ?$ w zależności od p

Przekształcamy macierz do postaci schodkowej (aby łatwiej liczyć rząd (wyznaczniki)).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2p \\ 4 & 1 & 5 & 2 & p \end{array}\right] \xrightarrow[(3)=(3)-4(1)]{(2)=(2)-2(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2p-2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & p-4 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)=(3)-(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2p-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p-2 \end{array}\right]$$

Bardzo łatwo dostrzec, że $rz A < 3$, bo jeden wiersz składa się z samych zer.

Wydaje mi się, że nie można jak liczymy det bo zawsze wychodzi taki sam (ale jak)? Ja nie rozumiem :(

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2p \\ 4 & 1 & p \end{vmatrix} = p + 2 - (4 + 2p) = -p - 2$$

1 0 1
2 1 2p

1°) Jeżeli $rzA = rzU$ czyli $rzU = 2$

$\det(U) = -2p - 4 = 0$

$p = -2$

2) Jeżeli $rzA \neq rzU$ czyli $rzU = 3$

$\det(U) = -2p - 4 \neq 0$

$p \neq -2$

Gdy: • $p \neq -2$ to $rzU \neq rzA$ to układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań

Gdy • $p = -2$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 $\underset{n-r}{(4-2)}$ parametrów

b) $\begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}$ $\quad n = 3$ (bo x_1, x_2, x_3)

Przekształcam do macierzy schodkowej.

$$M = \begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^u = \left[\begin{array}{ccc|c} p & p & p & p \\ 1 & p & p & p \\ 1 & 1 & 1 & p \end{array}\right]$$

$$\det(M) = p^2 + p^2 + p - p - p^2 - p^2 = 0$$

Weźmy zatem minor 2x2 macierzy głównej i wyliczmy jego wyznacznik:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(M) = (1-p)$$

$rz\,M = 2$ dla $p \neq 1$
$rz\,M = 1$ dla $p = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} p & p & p & p \\ 1 & p & p & p \\ 1 & 1 & 1 & p \end{array}\right] \xrightarrow[(2)=(2)-(3)]{(1)=(1)-(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} p-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & p-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & p \end{array}\right]$$

Liczymy teraz obliczyć $rz\,M^u$
- przypadek z wykreśloną 2 lub 3 kolumną jest taki sam

$$M_1 = \begin{bmatrix} p-1 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix} \qquad \det(M_1) = (p-1)(p-1) \cdot p$$

- przypadek z wykreśloną kolumną zerową jest trywialny bo jej wyznacznik $= 0$
- przypadek z wykreśloną czwartą kolumną

$$M_2 = \begin{bmatrix} p-1 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & p-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(M_2) = 0$$

- Zatem dla $p \neq 1 \wedge p \neq 0$ $rz\,M^u = 3$
- Dla $p = 1$ $\quad rz\,M^u = 1$
- Dla $p = 0$ $\quad rz\,M^u = 2$

Czyli dla

- $p \neq 0 \wedge p \neq 1$ brak rozwiązań
- $p = 1$ $\quad rz\,M = rz\,M^u$ i $(rz\,M = rz\,M^u) < n$, więc nieskończenie wiele rozwiązań
- $p = 0$ $\quad rz\,M = rz\,M^u$ i $(rz\,M = rz\,M^u) < n$, więc nieskończenie wiele rozwiązań

LISTA 6 ZAD 8

Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru λ):

A) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ $\qquad M^u = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$

$\det(M) = \lambda^3 + 1 + 1 - (\lambda + \lambda + \lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

- $rz M = 3$ gdy $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2$
wtedy też $rz M^u = 3$, czyli równanie będzie miało 1 rozwiązanie.

- gdy $\lambda = 1$ układ ma nieskończenie wiele rozw.

$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad M^u = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\det(M) = 0$ $\qquad rz M^u = 1$

$rz M = 1$

- gdy $\lambda = -2$ $\qquad rz M < rz M^u$, czyli brak rozwiązań

$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad M^u = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\det(M) = -8 + 1 + 1 - (-2 - 2 - 2) = -8 + 2 + 6 = 0$

$rz M = 2$

możemy sprawdzić, ale łatwiej będzie jak zauważymy, że jak sprowadzimy do postaci schodkowej to jest TURBO łatwiej

$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = 2R_2 + R_1]{R_3 = 2\cdot R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - (0 + 0 - 9) = 18$ $\qquad rz M^u = 3$

B) $\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner

$$M=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{bmatrix} \qquad M^u=\left[\begin{array}{ccc|c}1+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right]$$

$$\begin{matrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\end{matrix}$$

$$\det(M)=(1+\lambda)^3+1+1-((1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda))=$$
$$=(1+\lambda)^3+2-3(1+\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2=\underline{\lambda^2(\lambda+3)}$$

- $rzM=3$ gdy $\lambda\neq 0 \wedge \lambda\neq -3$
wtedy też $rzM^u=3$, czyli istnieje 1 rozw.

- gdy $\lambda=0$ $rzM<rzM^u$, więc brak rozwiązań

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \qquad M^u=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right]$$

$rzM=1$ $\qquad rzM^u=2$

- gdy $\lambda=-3$ $\qquad rzM<rzM^u$ czyli brak rozwiązań

$$M=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix} \qquad M^u=\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&9\end{array}\right] \quad rzM^u=3$$

$\det(M)=0$
$rzM=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&9\end{array}\right]\xrightarrow{R_3=R_3+R_2+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-3\\0&0&0&7\end{array}\right]$$

LISTA 6 ZAD 10

Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej).

1)
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0\\ x_2 - x_4 = 0\\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0\\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0\\ -x_3 + x_5 = 0\\ -x_4 + x_6 = 0\end{cases}$$

Wykonamy eliminację Gaussa na wierszach.

$(3)=(3)+(1)$
$(4)=(4)+(2)$
$(5)=(5)+(3)$
$(6)=(6)+(4)$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0\\ x_2 - x_4 = 0\\ -x_5 = 0\\ -x_6 = 0\\ -x_1 = 0\\ -x_2 = 0\end{cases}$$

$(1)=(1)+(5)$
$(2)=(2)+(6)$

$$\begin{cases} -x_3=0\\ -x_4=0\\ -x_5=0\\ -x_6=0\\ -x_1=0\\ -x_2=0\end{cases} \implies x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=0$$

Zbiór rozwiązań $\{(0,0,0,0,0,0)\}$
Czyli bazą jest wektor $\vec{0}$.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

$(2) = (2) - (1)$
przekształcenia równoważne

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -x_2 \\ x_5 = -x_4 = x_2 \\ x_6 = 0 \\ x_7 = -x_5 = -x_2 \\ x_8 = -x_7 = x_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Zauważmy zależności

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \% 3 = 0 \\ -x_2 & \text{dla } n \% 3 = 1 \\ x_2 & \text{dla } n \% 3 = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniami układu będą wektory postaci $(-x_2, x_2, 0, -x_2, x_2, 0 \ldots)$
Baza przestrzeni rozwiązań jest wektor $(-1, 1, 0, -1, 1, 0 \ldots)$

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)=(2)-3(1) \\ (3)=(3)-4(1) \\ (5)=(5)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)=(2)-2(3) \\ (4)=(4)-5(3)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)=(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 7x_4 = 8x_3 - x_1 \\ 6x_3 = 5x_4 - x_2 \end{cases}$$

$6x_3 = \frac{40}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_1 - x_2$

$\frac{2}{7}x_3 = -\frac{5}{7}x_1 - x_2$

$x_3 = -\frac{1}{2}(5x_1 + 7x_2)$

$7x_4 = -20x_1 - 28x_2 - x_1$

$x_4 = -3x_1 - 4x_2$

Zbiór rozwiązań: $\{(x_1, x_2, -\frac{5x_1+7x_2}{2}, -3x_1-4x_2) \mid x_1, x_2 \ldots\}$

LISTA 6 ZAD 11

Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k.

Stała λ, która odpowiednio skaluje wartością własną. Każda wartość własna ma przypisany odpowiedni wektor własny $\vec{v}$.

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Zauważ

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad /\cdot A$$

$$A^2\vec{v} = A\cdot\lambda\vec{v} = \lambda(A\vec{v}) = \lambda\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$$

IDEA

Załóżmy, że λ jest wartością własną macierzy A, czyli $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dla pewnego $\vec{v} \neq 0$. Pokażę, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$.

Dla $k=1$ mamy $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, co jest prawdą zgodnie z założeniem.

Weźmy dowolne $k \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
A^{k+1}\vec{v} &= (AA^k)\vec{v} \\
&= A(A^k\vec{v}) \\
&= A\lambda^k\vec{v} \quad \text{(założenie indukcyjne)} \\
&= \lambda^k(A\vec{v}) \\
&= \lambda^k\lambda\vec{v} \quad (\text{założenie } A\vec{v} = \lambda\vec{v}) \\
&= \lambda^{k+1}\vec{v}
\end{aligned}$$

W takim razie na mocy zasady indukcji dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$, więc λ^k jest wartością własną macierzy.

LISTA 6 ZAD. 7

Podaj jedno rozwiązanie szczególnego oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

A)
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 = w_4 - \frac{1}{2}w_1]{w_2 = w_2 - 2w_1,\ w_3 = w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 = w_4 + \frac{11}{4}\cdot w_2]{w_3 = w_3 + \left(-\frac{2}{7}\right)w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{21}{4} & \frac{21}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 = w_4 + \left(-\frac{21}{4}\right)\cdot w_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$rzA = 3$ $\quad rz\,U = 3$ $\quad rz = n$

odp. układ ma 1 rozw.

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ -7x_2 + 7x_3 = -7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

B)
$$\begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & 7 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -11 & -15 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 & 7 \\ -9 & 6 & 7 & 10 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 = w_3 - 3w_1]{w_2 = w_2 - 2w_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -11 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 24 & 37 & -13 \\ 0 & 0 & 40 & 55 & -27 \end{array}\right]$$

$\det(C) \neq 0$

$w_3 = w_3 + \left(-\frac{5}{3}\right)w_1$

$rz\,A = 3$ $\quad rz\,U = 3$, ale $n = 4$

więc $(rzA = rzU) < n$, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które zależą od 1 parametru

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -11 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 24 & 37 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 = w_3 \cdot 3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -11 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 24 & 37 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -16 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} -20x_4 = -16 \\ 24x_3 + 37x_4 = -13 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 10 \end{cases} \to \begin{cases} x_4 = \frac{4}{5} \\ 24x_3 = -13 - \left(37 \cdot \frac{4}{5}\right) \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 = 10 + 15 \cdot \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{4}{5} \\ x_3 = -1\frac{31}{40} = -\frac{71}{40} \\ x_2 = 99/80 + 3/2\, x_1 \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE OGÓLNE

ROZWI. SZCZEGÓŁOWE

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 99/80 \\ x_3 = -71/40 \\ x_4 = 4/5 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 = w_3 - \frac{1}{5} \cdot w_1]{w_2 = w_2 - 2 \cdot w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{32}{5} & 8 & \frac{8}{5} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 = w_3 - \left(-\frac{8}{15}\right) \cdot w_2}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} rzA = 2 \\ rzU = 2 \\ (rzA = rzU) < n \end{array}\right\}$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań które zależą od 2 parametrów

$\begin{cases} -12x_2 - 15x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 3x_4 = -12x_2 - 15x_3 \\ \underline{x_4 = -4x_2 - 5x_3} \end{array}$

$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12(-4x_2 - 5x_3) = 10$

$5x_1 + 3x_2 - 48x_2 + 5x_3 - 60x_3 = 10$

$5x_1 - 45x_2 - 55x_3 - 10 = 0$

$5x_1 = 45x_2 + 55x_3 + 10$

$\left.\begin{cases} x_1 = 9x_2 + 11x_3 + 2 \\ x_4 = -4x_2 - 5x_3 \end{cases}\right\}$ ROZWIĄZANIE OGÓLNE

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

LISTA 6 ZAD 9

Niech A będzie macierzą kwadratową, rozpatrzmy układ równań postaci $A\vec{x} = \vec{B}$.

Niech A_{xi} oznacza macierz powstałą przez zastąpienie i-tej kolumny A przez $\vec{B}$ (czyli jak we wzorach Cramera)

1) Pokaż, że jeśli $\det(A) = 0$ oraz istnieje i takie, że $\det(A_{xi}) \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

2) Pokaż, też że nie jest prawdziwe poniższe „twierdzenie" o wzorach Cramera (tzn. podaj kontrprzykład):

Jeśli $\det(A) = 0$ oraz dla każdego i mamy $\det(A_{xi}) = 0$, to układ równań ma rozwiązanie.

1) Gdy $\det(A) = 0$ to z własności wyznacznika $rk(A) < n$.

Jeśli dla pewnego i $\det(A_{xi}) \neq 0$ to znów z własności wyznacznika $rk(A_{xi}) = n$

Z tego wynika, że $rk([A|B]) = n$. Z tw. Kroneckera-Capellego układ równań jest sprzeczny.

2) Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

wtedy $\det(A) = 0$ oraz dla każdego i $\det(A_{xi}) = 0$. Jednak $rk(A) = 0$, $rk([A|B]) = 1$

Scanned with CamScanner