LISTA 4 ZAD 7

Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$w_1 = w_1 \cdot (-1/3)$

$w_4 = w_4 + 2 \cdot w_3$

$w_5 = w_5 - 2 \cdot w_3$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$w_3 = w_3 - 2 \cdot w_1$

$w_4 = w_4 - 3 \cdot w_2$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 8 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$w_3 = w_3 \cdot (-1/3)$

$w_4 = w_4 + w_5$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/9 & -2/9 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$w_1 = w_1 - w_3$

$w_4 = w_4 \cdot (-1/2)$

$w_5 = w_5 - 5 \cdot w_3$

Scanned with CamScanner

LISTA 4 ZAD 11.

Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne

Jeśli macierz A^{-1} istnieje to macierz A jest ODWRACALNA.
Jeśli macierz A^{-1} nie istnieje to macierz A jest NIEODWRACALNA.

MACIERZE ODWROTNE

dwa warunki, bo mnożenie macierzy nie jest przemienne

B jest odwrotne do A $\Leftrightarrow$ $B \cdot A = A \cdot B = I$

METODY ZNAJDYWANIA MACIERZY ODWROTNEJ

1°) ZE WZORU $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A^d)^T$

2°) KOMBINOWANIE OPERACJAMI ELEMENTARNYMI

UWAGA: Macierz ma odwrotną jeśli jej wyznacznik jest różny od zera

TEŻ macierz $n \times n$ jest odwracalna jeśli $rk(A) = n$ (Tw. 4.28)

A) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$

$\det(A) = \alpha^2 - 1$

$\alpha^2 - 1 \neq 0$

$\alpha^2 \neq 1$

$\alpha \neq 1 \lor \alpha \neq -1$

Dla $\alpha = 1$ i $\alpha \neq 1$ nie istnieje macierz odwrotna

ZE WZORU:

$$A^d = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \alpha & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{1+2} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$(A^d)^T = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 - 1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} & \frac{-1}{\alpha^2 - 1} \\ \frac{-1}{\alpha^2 - 1} & \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \end{bmatrix}$$

B)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że dzięki budowie macierzy A łatwiej policzyć macierz odwrotną z metody 2°)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 729 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 729$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{9} \\ \cdot \frac{1}{9} \\ \cdot \frac{1}{9} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 \end{array}\right]$$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -1 & 10 \\ 8 & 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 8 & -1 & 10 \\ 8 & 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$

$+ 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 8 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (32+(-48)+32-32+64-24) +$

$(-4)\cdot(28-60+128-40+56-96) + (-1)\cdot(112+160+384-120-112-512) =$

$= -24 + (-4)\cdot(16) + (-1)\cdot(-88) = -24 - 64 + 88 = 0$. Nie istnieje macierz odwrotna

LISTA 4 ZAD 10

Znajdź wszystkie macierze A wymiaru 2x2 spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

LEMAT:

Wskazówka: Pokaż najpierw, że $rk(A)=2$ implikuje $rk(A^2)=2$. Potem rozpatrz możliwe $rk(A)$.

Weźmy dowolną macierz A wymiaru 2x2 i załóżmy, że $rk(A)=2$. Ponieważ wymiar jest równy rzędowi macierzy, to jest odwracalna (Tw. 4.28). Skoro jest odwracalna, to jeśli weźmiemy macierz B wymiaru 2x2 to $rk(A\cdot B) = rk(A)$ (Fakt 4.31). W szczególnym przypadku jeśli weźmiemy $B=A$ to dostajemy $rk(A^2) = rk(A) = 2$.

Dzięki lematowi możemy rozważyć tylko macierze A, t. że $rk(A)=1$ lub $rk(A)=0$.

Czemu?

bo $rk(A^2)=2$, a macierz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow rk(A)=0$

Przypadek gdy $rk(A)=0$ jest trywialny gdyż wtedy $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$rk(A)=1$

Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$.

Ponieważ $rk(A)<2$, to wektor $A_1=(a,c)$ $A_2=(b,d)$ są liniowo zależne. Wobec tego $ad = bc$.

↳ czyli $\det(A)=0$ → a tak jest gdy $a\cdot d = b\cdot c$

Skąd wiemy, że są liniowo zależne? i co to ma wspólnego z rzędem?

RZĄD MACIERZY to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) tej macierzy.

Wobec tego

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ c(a+d)=0 \\ b(a+d)=0 \\ d^2+bc=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+d)=0 \\ d(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ b(a+d)=0 \end{cases}$$

Skoro $a \cdot d = b \cdot c$ to mamy też

$$\begin{cases} a^2+ad=0 & \Rightarrow a(a+d)=0 \\ d^2+ad=0 & \Rightarrow d(a+d)=0 \end{cases}$$

ROZWAŻMY PRZYPADKI:

1°) $b=0 \Rightarrow a=0 \wedge d=0$

Wobec tego c jest dowolne, co generuje rozwiązanie postaci: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, c - dowolne

2°) $c=0 \Rightarrow a=0 \wedge d=0$

Mamy rozwiązanie postaci: $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, b - dowolne

3°) Rozważmy sytuację gdy $a,b,c,d \neq 0$. Wyznaczmy wektor $A_1=(a,c)$ i $A_2=(b,d)$.

Skoro $a(a+d)=0$ i $a \neq 0$ to $a=-d$

Skoro $ad=bc$ i $a=-d$ to $c=\frac{-d^2}{b}$.

Mamy więc rozwiązanie postaci $\begin{bmatrix} -d & b \\ \frac{-d^2}{b} & d \end{bmatrix}$ $b,d \neq 0$

TROCHE BARDZIEJ INTUICYJNIE, ALE BEZ WSKAZÓWEK!:

$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ac+dc=0 \\ ab+bd=0 \\ cb+d^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+bc=0 \\ c(a+d)=0 \\ b(a+d)=0 \\ cb+d^2=0 \end{cases}$$

PRZYPADEK I)

gdy $c=0$

wtedy $a=0$ i $d=0$, zatem $a=c=d=0$ oraz b może być dowolne

macierz o postaci $A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie $b \in \mathbb{R}$

PRZYPADEK II)
gdy $b=0$
wtedy $a=0$ i $d=0$ zatem $b=a=d=0$ oraz c dowolne

macierz o postaci $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}$, gdzie $c\in\mathbb{R}$

PRZYPADEK III)
gdy $(a+d)=0$
wtedy $b\neq 0 \wedge c\neq 0$

$a+d \Rightarrow a=-d$

Z $a=-d$ oraz $bc+d^2=0$ otrzymujemy

1) $a=-d$ i $b=-\frac{d^2}{c}$ $\quad A=\begin{bmatrix}-d & -\frac{d^2}{c}\\ c & d\end{bmatrix}$ dla $c,d\in\mathbb{R}$

2) $a=-d$ i $c=-\frac{d^2}{b}$ $\quad A=\begin{bmatrix}-d & b\\ -\frac{d^2}{b} & d\end{bmatrix}$ dla $b,d\in\mathbb{R}$

Z $a=-d$ oraz $a^2+bc=0$ otrzymujemy

1) $a=-d$ i $b=-\frac{a^2}{c}$ $\quad A=\begin{bmatrix}a & -\frac{a^2}{c}\\ c & -a\end{bmatrix}$ dla $a,c\in\mathbb{R}$

2) $a=-d$ i $c=-\frac{a^2}{b}$ $\quad A=\begin{bmatrix}a & b\\ -\frac{a^2}{b} & a\end{bmatrix}$ dla $a,b\in\mathbb{R}$

LISTA 4 ZAD 9
Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną /górnotrójkątną / symetryczną / diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna /górnotrójkątna / symetryczna / diagonalna.

Wiemy, że $M\cdot M^{-1}=I$.

1°) M dolnotrójkątna $\Rightarrow$ M^{-1} dolnotrójkątna

(1) MACIERZ DOLNOTRÓJKĄTNA Z DEF.
$\forall a_{ij} \quad i<j \Rightarrow a_{ij}=0$

Chcemy pokazać (1) dla macierzy M^{-1}.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn}\end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^{*} & a_{13}^{**} & \cdots & a_{1n}^{***}\\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}}_{M^{-1}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & 1\end{bmatrix}$$

WIERSZ 1) *
$m_{11}\cdot a_{12}+0\cdot a_{22}+\ldots+0\cdot a_{n2}=0$
$m_{11}\cdot a_{12}=0 \Rightarrow a_{12}=0$, bo wiemy, że $m_{11}\neq 0$

**
$m_{11}\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+\ldots+0\cdot a_{n3}=0$
$m_{11}\cdot a_{1n}=0$, $\Rightarrow a_{1n}=0$ analogicznie dalej, $\forall a_{1j}\ j>1 \Rightarrow a_{1j}=0$

⋮

***
$m_{21}\cdot a_{13}+0\cdot a_{23}+\ldots+0\cdot a_{n3}=0$
$m_{21}\cdot a_{13}=0 \Rightarrow a_{13}=0$

WIERSZ 2) $m_{21} \cdot a_{13} + m_{22} \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} + \ldots + 0 \cdot a_{n3} = 0$

$m_{21} \cdot a_{13} + m_{22} \cdot a_{23} = 0$

Z wiersza 1 i wyciągniętych wniosków, że $\forall a_{1j} \; j>2 \Rightarrow a_{ij} = 0$

$m_{22} \cdot a_{23} = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$

$m_{21} \cdot \underset{0}{a_{1n}} + m_{22} \cdot a_{2n} + \ldots + 0 \cdot a_{nn} = 0$

$m_{22} \cdot a_{2n} = 0 \Rightarrow a_{2n} = 0$

$\forall a_{2j} \quad j>2 \Rightarrow a_{2j} = 0$

$\vdots$

WIERSZ $n-1$) $m_{(n-1)1} \cdot \underset{0}{a_{1n}} + m_{(n-1)2} \cdot \underset{0}{a_{2n}} + \ldots + m_{(n-1)(n-1)} \cdot a_{(n-1)n} \cdot$

$\cdot\, m_{(n-1)n} \cdot \underset{0}{a_{nn}} = 0$

$m_{(n-1)(n-1)} \cdot a_{(n-1)n} = 0 \Rightarrow a_{(n-1)n} = 0$

$\forall a_{(n-1)j} \quad j>n-1 \Rightarrow a_{(n-1)j} = 0$

Z tego możemy wywnioskować, że $\forall a_{ij} \in M^{-1} \; i<j \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{ij} = 0$.

2°) M - górnotrójkątna $\Rightarrow M^{-1}$ - górnotrójkątna

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

WIERSZ N)
Pokażmy, że $a_{n(n-1)} = 0$

$0 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \ldots + m_{nn} \cdot a_{n(n-1)} = 0$

$m_{nn} \cdot a_{n(n-1)} = 0 \Rightarrow a_{n(n-1)} = 0$

$0 \cdot a_{1(n-2)} + 0 \cdot a_{2(n-2)} + \ldots + m_{nn} \cdot a_{n(n-2)} = 0$

$a_{n(n-2)} = 0$

$\vdots$

$\forall a_{nj} \quad n>j \Rightarrow a_{nj} = 0$

Podobnie dla wiersza $(n-1), (n-2) \ldots 3$

WIERSZ 2) $0 \cdot \underset{0}{a_{11}} + m_{22} \cdot a_{21} + m_{23} \cdot \underset{0}{a_{31}} + \ldots + m_{2n} \cdot \underset{0}{a_{n1}} = 0$

$m_{22} \cdot a_{21} = 0 \Rightarrow a_{21} = 0 \qquad \forall a_{ij} \in M^{-1} \; i>j \Rightarrow a_{ij} = 0$

3°) M symetryczna $\Rightarrow$ M^{-1} symetryczna

macierz kwadratowa (o tej samej liczbie wierszy i kolumn), której wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej głównej są równe.

$$a_{ij} = a_{ji}$$
$$A = A^T$$

Wiadomo, że $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. O ile M jest symetryczna to $M^T = M$. Chcemy pokazać, że $(M^{-1})^T = M^{-1}$.

4°) M diagonalna $\Rightarrow$ M^{-1} diagonalna

zwykle kwadratowa, której wszystkie współczynniki leżące poza główną przekątną (główną, diagonalną) są zerowe. (Macierz górno- i dolnotrójkątna jednocześnie)

Pokażemy, że $\forall a_{ij} \in M^{-1} \; i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & m_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & - & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Moglibyśmy przeprowadzić taki sam dowód jak w przypadku 1°) i 2°), ale zauważmy, że macierz jest diagonalna wtw gdy macierz jest dolnotrójkątna i górnotrójkątna, więc M^{-1} będzie również dolnotrójkątna i górnotrójkątna, więc diagonalna.

LISTA 4 ZAD 8

Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że:

I) Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.

Z założenia, że macierz AB jest odwracalna wiemy, że

$$\text{istnieje } AB^{-1} \text{ t.ż. } AB \cdot (AB)^{-1} = I = (AB^{-1}) \cdot AB$$

$AB \cdot (AB)^{-1} = A \cdot (B \cdot (AB)^{-1}) = I$ zatem istnieje macierz odwrotna do A, czyli A jest odwracalna.

$(AB)^{-1} \cdot AB = ((AB)^{-1} \cdot A) \cdot B = I$ zatem istnieje macierz odwrotna do B, czyli B jest odwracalna.

II) Jeśli A, B są odwracalne to AB jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Z założenia, że macierze A i B są odwracalne wiemy, że

istnieje A^{-1} t.ż. $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

i

istnieje B^{-1} t.ż. $B \cdot B^{-1} = I = B^{-1} \cdot B$

AB jest odwracalne jeśli istnieje takie C, że $AB \cdot C = C \cdot AB = I$

Weźmy $C = B^{-1}A^{-1}$ wtedy $AB \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = I \cdot I = I$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ wtw. gdy $AB \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = I$ } co pokazaliśmy wyżej

III) Jeśli A jest odwracalna, to $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Z założenia, że macierz A jest odwracalna wiemy, że

istnieje A^{-1} t.ż. $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

skąd to wiemy?

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ wtw. gdy $A^T \cdot (A^{-1})^T = I$

Wiemy, że $(MN)^T = N^T M^T$

więc $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$

INACZEJ

$A \cdot A^{-1} = I$

$(A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$

$A^T \cdot (A^{-1})^T = I$

Zatem A^T jest odwracalna, a jej macierz odwrotna to $(A^{-1})^T$, czyli mamy $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Jeśli macierz odwrotna A^T to $(A^{-1})^T$ to jak odwrócimy A^T → czyli $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

↳ w sensie macierz odwrotna

IV) Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$

Z założenia wiemy, że macierz A jest odwracalna czyli

istnieje A^{-1} t.ż. $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

$A \cdot A^{-1} = I$, czyli A^{-1} też jest odwracalna.

Macierz odwrotna do A^{-1} to A czyli z definicji mamy też $(A^{-1})^{-1} = A$

LISTA 4 ZAD 5

Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sprowadzimy ją do postaci schodkowej, aby łatwo obliczyć rząd (ilość schodków = rząd macierzy)

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_2 = k_2 - k_4} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & p \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ p & p-2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} p & p-2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & p \end{bmatrix} \xrightarrow{k_1 = k_1 - k_3}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p-2 & p-2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & p \end{bmatrix} \xrightarrow{k_1 = k_1 - k_2} \begin{bmatrix} 0 & p-2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & p \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 = w_1 - 2w_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & p \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 = w_3 - 5w_2} \begin{bmatrix} 0 & p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-5 \end{bmatrix}$$

Przekształcono macierz na postać schodkową (3 schodki)

Dla $p \neq 2 \wedge p \neq 5$ $rk(A) = 3$

Dla $p = 2$ $rk(A) = 2$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Dla $p = 5$ $rk(A) = 2$ $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ więcej pustych więc rk max 2

LISTA 4 ZAD 2

Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

I) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Weźmy dowolną macierz A rozmiaru $n \times m$ i dowolną macierz B rozmiaru $i \times j$. Zatem nasze macierze można wyrazić w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{ji} \end{bmatrix}$$

A ich transponowane postacie:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{j1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{j2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{ji} \end{bmatrix}$$

Mnożenie $A \cdot B$ możemy przeprowadzić w następujący sposób, zamieniając A i B uprzednio na listy wektorów (wektory pierwszej macierzy tworzą wierszami, a wektory drugiej macierzy kolumnami).

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_i \end{bmatrix}$$

Zatem $A \cdot B$ możemy zapisać jako:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot B_1) & (A_1 \cdot B_2) & \cdots & (A_1 \cdot B_i) \\ (A_2 \cdot B_1) & (A_2 \cdot B_2) & \cdots & (A_2 \cdot B_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_m \cdot B_1) & (A_m \cdot B_2) & \cdots & (A_m \cdot B_i) \end{bmatrix}$$

A zatem $(A \cdot B)^T$ ma postać:

$$(A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot B_1) & (A_2 B_1) & \cdots & (A_m B_1) \\ (A_1 \cdot B_2) & (A_2 B_2) & \cdots & (A_m B_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_1 \cdot B_i) & (A_2 \cdot B_i) & \cdots & (A_m \cdot B_i) \end{bmatrix}$$

Natomiast $B^T A^T$ możemy (używając tej samej metody, tylko tym razem uwzględniając to, że teraz mnożymy $B \cdot A$) zapisać jako

$$B^T = \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \\ \vdots \\ B_i' \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} A_1' & A_2' & \dots & A_m' \end{bmatrix}$$

Na tym etapie możemy zauważyć, że $\forall_{k \in [1,i]}\ B_k' = B_k$ oraz $\forall_l \in [1,m]\ A_l' = A_l$, a więc po wykonaniu mnożenia $B^T \cdot A^T$ otrzymamy:

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} (B_1' \cdot A_1') & (B_1' \cdot A_2') & \cdots & (B_1' \cdot A_m') \\ (B_2' \cdot A_1') & (B_2' \cdot A_2') & \cdots & (B_2' \cdot A_m') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (B_i' \cdot A_1') & (B_i' \cdot A_2') & \cdots & (B_i' \cdot A_m') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot B_1) & (A_2 \cdot B_1) & \cdots & (A_m \cdot B_1) \\ (A_1 \cdot B_2) & (A_2 \cdot B_2) & \cdots & (A_m \cdot B_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_1 \cdot B_i) & (A_2 \cdot B_i) & \cdots & (A_m \cdot B_i) \end{bmatrix} =$$

$$= (A \cdot B)^T$$

Zatem dla dowolnych dwóch macierzy A i B zachodzi $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

I) $(A^T)^T = A$

Weźmy dowolną macierz A rozmiaru m×n. Zatem naszą macierz możemy przedstawić w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Zatem macierz postaci A^T wygląda:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Po zastosowaniu transpozycji na A^T:

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz którą otrzymaliśmy jest równa macierzy A. Zatem dla dowolnej macierzy A zachodzi $(A^T)^T = A$.

II) $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

A^T i B^T wiemy jak wyglądą z punktów wyżej.

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Możemy zauważyć, że w obu przypadkach macierze, które otrzymaliśmy są takie same. Zatem dla dowolnych macierzy A i B odpowiednich rozmiarów zachodzi $(A+B)^T = A^T + B^T$

LISTA 4 ZAD 3.

Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

METODA I (jo)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 = w_3 - 3 \cdot w_1]{w_2 = w_2 - 2 \cdot w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -10 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 = w_4 - 3 \cdot w_1]{w_3 = w_3 + 2 \cdot w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -28 & -20 & 3 \\ 0 & 0 & 28 & 20 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_4 = w_4 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -28 & -20 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rzA = 3$

$\dim \mathrm{LIN}((1,0,3,2,0),(2,1,-3,-3,1),(3,-2,-1,0,1),(0,3,1,-1,0)) = 3$

i wektory tej bazy to np.:

$(1,0,3,2,0),(2,1,-3,-3,1)(3,-2,-1,0,1)$

METODA II (z drugiej) $\rightarrow$ KORZYSTAMY Z METODY Z §4.6 NOTATKI

Działamy na kolumnach

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_4-2\cdot k_1]{k_3-3\cdot k_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -9 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & -10 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_2-k_5]{k_1-2k_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -7 & 1 \\ 7 & -3 & -10 & -6 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[k_4+7k_5]{k_3+9k_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_3+k_4]{k_2-3\cdot k_3} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 7 & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & 1 \\ -6 & \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wykonujemy te same przekształcenia na macierzy jednostkowej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 7 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \boxed{9} & \boxed{-5} & -2 & 0 \\ -2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-28} & \boxed{16} & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Baza jądra tego przekształcenia jest

$$\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \right\}$$

Rząd macierzy to ilość liniowo niezależnych wierszy - skoro więc mamy n liniowo niezależnych wektorów to rozpinają one przestrzeń wymiaru n i są jej bazą

LISTA 4 ZAD 1

A) Ustalmy macierz A wymiaru $m \times m$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich, że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$

WSKAZÓWKA: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

A) Zauważmy, że dla ustalonej macierzy $A_{n \times n}$, by $AB = BA$ to B musi być rozmiaru $n \times n$

Niech $V = \{B : AB = BA\}$

Zauważmy, że zbiór V jest podzbiorem zbioru wszystkich macierzy rozmiaru $m \times m$, który to zbiór jest przestrzenią liniową.

Korzystając z lematu 1.7. V jest przestrzenią liniową wtw gdy V jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalar.

(+) Weźmy dowolne macierze $B_{n \times m}$ i $B'_{n \times n}$ i załóżmy, że $B, B' \in V$.

Pokażemy, że $B + B'$ również należy V.
Skoro $B, B' \in V$ to $AB = BA$ oraz $AB' = B'A$.

Dodając stronami: $AB + AB' = BA + B'A$

Zgodnie z faktem 4.5: $A(B+B') = (B+B')A$

Więc $(B+B') \in V$.

(·) Weźmy dowolną macierz $B_{n \times m}$ i skalar α.
Założmy, że $B \in V$, to $AB = BA$.

Rozważmy macierz $\alpha \cdot B$:

Z faktu 4.5: $A(\alpha B) = \alpha \cdot (AB)$

Następnie z założenia, że $B \in V$: $\alpha \cdot (A \cdot B) = \alpha \cdot (B \cdot A)$

Potem znowu z faktu 4.5: $\alpha (BA) = (\alpha B) \cdot A$

Więc $A \cdot (\alpha B) = (\alpha B) A$, więc $(\alpha B) \in V$.

Zatem V jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalar, więc jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej macierzy rozmiaru $n \times m$. A podprzestrzeń liniowa jest przestrzenią liniową.

B) Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Wówczas:

$$B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & a+b \\ c+2d & c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix}$$

Zatem:
$$\begin{cases} a+2b = a+c & \rightarrow c = 2b \\ a+b = b+d & \rightarrow a = d \\ 2a+c = c+2d & \rightarrow a = d \\ c+d = 2b+d & \rightarrow c = 2b \end{cases}$$

Więc:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \qquad B = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
gdzie α i β to skalary.

Zatem zbiór tych B, to $LIN\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

* Dobrze, ale zauważmy, że $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = Id \cdot \alpha + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = B + B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B = B + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} B$. Czyli wystarczy warunek $B\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} B$. Co więcej $B = Id$ oraz pewno to spełnia oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ też. Czyli wystarczy pokazać, że wymiar nie jest większy niż 2, co sprowadza się do łatwiejszych rachunków.