# LISTA 3

ZAD1 DLA JAKICH WARTOŚCI WYRAŻEŃ

A) $4\cos^2 x - 3$
B) $x^{-3}(\pi/2 - x - \operatorname{arcctg}(x))$

MOŻE WIĄZAĆ SIĘ Z UTRATĄ CYFR ZNACZĄCYCH WYNIKU? ZAPROPONUJ SPOSOBY OBLICZENIA WYNIKU DOKŁADNIEJSZEGO. POKAŻ ŻE SPOSOBY TE DZIAŁAJĄ W PRAKTYCE.

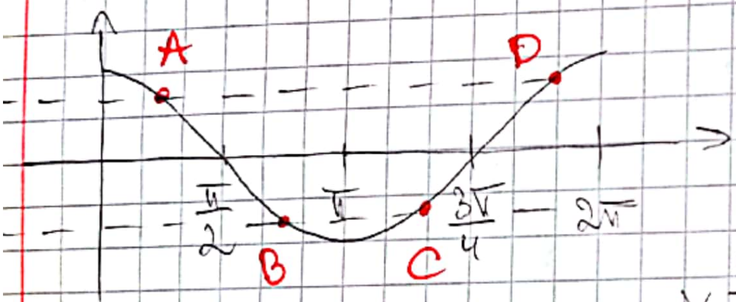
A) $\underbrace{4\cdot\cos^2 x}-3$

Problem gdy to równe 0

$4\cdot\cos^2 x - 3 = 0$
$4\cdot\cos^2 x = 3$

$\cos^2 x = 3/4$

$\cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$




A => $x = \pi/6$
B => $x = 5/6\,\pi$
C => $x = 7/6\,\pi$
D => $x = 11/6\,\pi$

czyli gdy
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee$
$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

SPOSÓB I

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$2(1+\cos 2x) - 3 = 2 + 2\cos 2x - 3 = \underbrace{2\cos 2x - 1}$

problem gdy to równe 1

SPOSÓB II $\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cdot\cos x$

$\cos 3x = \cos x(4\cdot\cos^2 x - 3)$

$4\cdot\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$

SPOSÓB III

$$4\cos^2 x - 3 = \left(2\cos x - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2\cos x + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 4\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 4\left(2\cos\frac{x+\pi/6}{2}\cos\frac{x-\pi/6}{2}\right)\left(-2\sin\frac{x+\pi/6}{2}\sin\frac{x-\pi/6}{2}\right) =$$

$$= -16\cos\frac{x+\pi/6}{2}\cos\frac{x-\pi/6}{2}\sin\frac{x+\pi/6}{2}\sin\frac{x-\pi/6}{2}$$

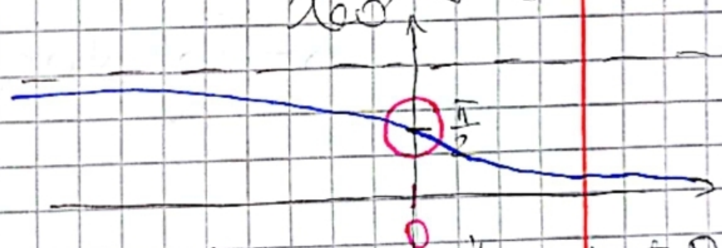
B) $x^{-3}\left(\pi/2 - x - \mathrm{arcctg}(x)\right)$

WZÓR: $\mathrm{arcctg}(x) = \pi/2 - \mathrm{arctg}(x)$

PODSTAWMY: $x^{-3}\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}(x)\right)$

$$x^{-3}\left(-x + \mathrm{arctg}(x)\right) = \frac{\mathrm{arctg}(x) - x}{x^3}$$

Problem (tracimy cyfry znaczące) gdy $x \approx 0$



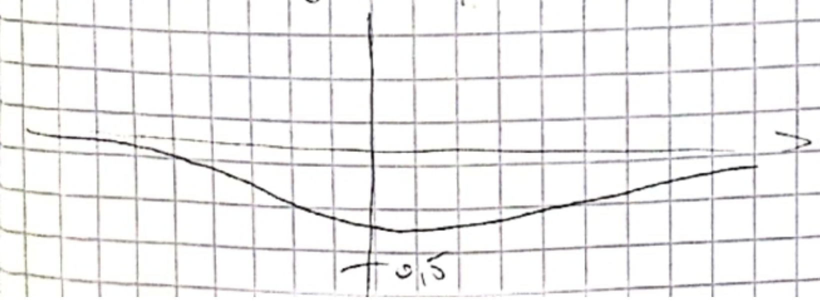

ale dla $x \approx 0$

→ jeżeli w liczniku jest 0 to może nastąpić redukcja cyfr

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \cancel{-x}}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{7} + \frac{x^6}{9} - \dots$$



ZAD 2 PODAJ (W MIARĘ) BEZPIECZNY NUMERYCZNIE ALGORYTM OBLICZANIA ZER RÓWNANIA KWADRATOWEGO $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. PRZEPROWADŹ TESTY DLA ODPOWIEDNIO DOBRANYCH WARTOŚCI $a, b, c$ POKAZUJĄCE ŻE TWÓJ ALGORYTM JEST LEPSZY OD METODY SZKOLNEJ BAZUJĄCEJ NA DOBRZE ZNANYCH WZORACH $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/(2a)$.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dla $b>0$ jest okay bo sumujemy liczby ujemne

problem gdy $\sqrt{b^2-4ac}\approx b$, bo $-b+b\approx 0$ obie nie $=0$

ze wzorów Vieta

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b/a \\ x_1\cdot x_2=c/a \end{cases}$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

co jeśli $x_1=0$

$x_1+x_2=-b/a$

$x_2=-b/a-x_1$

$x_2=-b/a$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_2=\frac{c}{a\cdot x_1}=$$

$$=\frac{c}{a\cdot\left(\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}=$$

$$\boxed{=\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}}$$

dla $b\leq 0$

wtedy

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

co jeśli $x_1=0$

$x_1+x_2=-b/a$

$x_2=-b/a-x_1$

$x_2=-b/a$

$$x_2=\frac{c}{a\cdot x_1}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$a=1$ $b=10000$ $c=10$,

Scanned with CamScanner

ZAD. 3 MIEJSCE ZEROWE WIELOMIANU

$x^3+3qx-2r=0$, GDZIE $r,q>0$, MOŻNA OBLICZYĆ NASTĘPUJĄCYM WZOREM CARDANO-TARTAGLII:

$$x=\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}+\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}$$

POKAŻ NA PRZYKŁADACH, ŻE BEZPOŚREDNIE UŻYCIE TEGO WZORU W OBLICZENIACH ZMIENNOPOZYCYJNYCH MOŻE SKUTKOWAĆ BŁĘDNYMI WYNIKAMI. CO JEST TEGO PRZYCZYNĄ? SPRÓBUJ PRZEKSZTAŁCIĆ WZÓR TAK, ABY UNIKNĄĆ PROBLEMÓW. CZY OBLICZENIA MOŻNA ZORGANIZOWAĆ W TAKI SPOSÓB, ABY TYLKO RAZ WYZNACZYĆ PIERWIASTEK TRZECIEGO STOPNIA?

$$x=\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}+\underbrace{\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}}$$

Problem dla dużych $r$ i małych $q$ bo wtedy $\approx r-\sqrt{r^2}$

skorzystamy ze wzoru $(a+b)=$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \to a^3+b^3$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)}$$

$$a=\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}$$

$$b=\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}$$

$$\frac{\left(\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}+\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}\right)\left(\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}-\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}+\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}\right)}{\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}-\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{1/3}+\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}}$$

$$=\frac{r+\sqrt{q^3+r^2}+\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)}{\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}-\left(\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)\right)^{1/3}+\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}}$$

$$r^2-r\sqrt{q^3+r^2}+r\sqrt{q^3+r^2}-(q^3+r^2)=$$

$$=r^2-q^3-r^2=-q^3 \longrightarrow \sqrt[3]{-q^3}=-1\cdot q$$

$$= \frac{2r}{\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3} - (-1\cdot q) + \left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3}} =$$

$$= \frac{2r}{\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3} + \underbrace{\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)}^{2/3} + q} =$$

$$\frac{\left(r-\sqrt{q^3+r^2}\right)\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)}{r+\sqrt{q^3+r^2}} = \frac{r^2-(q^3+r^2)}{r+\sqrt{q^3+r^2}} = \frac{-q^3}{r+\sqrt{q^3+r^2}}$$

$$= \frac{2r}{\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{-q^3}{r+\sqrt{q^3+r^2}}\right)^{2/3} + q} =$$

$$= \frac{2r}{\left(r+\sqrt{q^3+r^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{1}{r+\sqrt{q^3+r^2}}\right)^{2/3}\cdot q^2 + q}$$

ZAD. 4 WYPROWADŹ WZÓR NA WSKAŹNIK UWARUNKOWANIA ZADANIA OBLICZANIA WARTOŚCI FUNKCJI F W PUNKCIE X.

*z wykładu*
Badamy uwarunkowanie zadania obliczania wartości ustalonej funkcji f w punkcie x

h jest małe

względna zmiana wyniku

f(x)
błąd bezwzględny o ile

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\cdot\left|\frac{h}{f(x)}\right| \approx$$

chcemy wyglądać f z małym błędem - f z dokładnymi danymi

$$\approx \left|f'(x)\right| \cdot \left|\frac{h}{f(x)}\right| = \left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| \left|\frac{h}{x}\right|$$

Po mowej chcemy mieć względną zmianę argumentu

WSKAŹNIK UWARUNKOWANIA
w jakim stosunku mają się do siebie względna zmiana wyniku do względnej zmiany danych

ZAD5 SPRAWDŹ DLA JAKICH WARTOŚCI FUNKCJI F JEST ŹLE UWARUNKOWANE, JEŚLI:

A) $f(x) = x^3 + 2020$

B) $f(x) = x^{-1} \ln(x)$

C) $f(x) = \cos(5x)$

D) $f(x) = (\sqrt{x^4 + 2020} + x)^{-1}$

Szukamy x dla których zadanie jest źle uwarunkowane

A) $f(x) = x^3 + 2020 \quad \to \quad Wu(f(x))$

$f'(x) = 3x^2$

$$\left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right| = \left|\frac{3x^2 \cdot x}{x^3+2020}\right| = \left|\frac{3x^3}{x^3+2020}\right|$$

$x^3 + 2020 \approx 0$

$x \approx -\sqrt[3]{2020}$

$x \approx -12,64$

$$\lim_{x \to -12,64} Wu(f(x)) = \infty$$

źle uwarunkowanie

B) $f(x) = x^{-1} \ln(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Scanned with CamScanner

$$W_u(f(x)) = \left|\frac{1-\ln(x)}{\cancel{x^2}}\cdot \cancel{x} \cdot \frac{\cancel{x}}{\ln(x)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1-\ln(x)}{\ln(x)}\right| = \left|\frac{1}{\ln(x)} - 1\right| \qquad \begin{matrix}\ln x \approx 0 \\ x \approx 1\end{matrix}$$

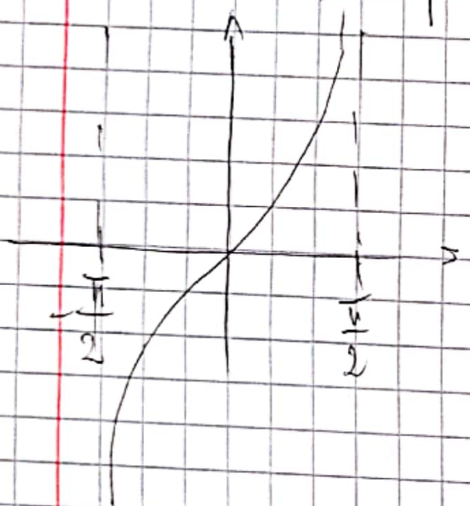
$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{1}{\ln x} - 1\right| = \infty$$

Źle uwarunkowane

C) $f(x) = \cos(5x)$

$f'(x) = -5\sin 5x$

$$W_u(f(x)) = \left|\frac{-5\cdot\sin 5x \cdot x}{\cos 5x}\right| = \left|-5x\cdot \operatorname{tg}(5x)\right|$$




$5x \approx \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$

D) $f(x) = \left(\sqrt{x^4+2020} + x\right)^{-1}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^4+2020} + x}\right)' = \frac{-1\cdot\left(\sqrt{x^4+2020}+x\right)'}{\left(\sqrt{x^4+2020}+x\right)^2} =$$

$$= \frac{-1\left(\frac{1}{2\sqrt{x^4+2020}}\cdot 4x^3 + 1\right)}{x^4+2020+2x\sqrt{x^4+2020}+x^2} = \frac{\frac{-\overset{2}{\cancel{4}}x^3}{\cancel{2}\sqrt{x^4+2020}} + 1}{x^4+2020+2x\sqrt{x^4+2020}+x^2}$$

$$= \frac{\frac{-2x^3}{\sqrt{x^4+2020}} + 1}{\left(\sqrt{x^4+2020}+x\right)^2}$$

$$wu(f(x)) = \frac{\left(\frac{-2x^3}{\sqrt{x^4+2020}}+1\right)\cdot x}{\frac{(\sqrt{x^4+2020}+x)^2}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2020}+x}}} =$$

$$= \frac{\frac{-2x^4}{\sqrt{x^4+2020}}+x}{(\sqrt{x^4+2020}+x)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^4+2020}+x}}{1} =$$

$$= \frac{\frac{-2x^4}{\sqrt{x^4+2020}}+x}{\sqrt{x^4+2020}+x} \longrightarrow \text{zawsze} \neq 0$$

można dodatkowo policzyć $\lim_{x\to\infty}$ i $\lim_{x\to-\infty}$

ZAD 7 SPRAWDŹ CZY NASTĘPUJĄCY ALGORYTM OBLICZANIA WARTOŚCI WYRAŻENIA $w(x) := x + x^{-1}$ $(x \neq 0)$ JEST ALGORYTMEM NUMERYCZNIE POPRAWNYM:

$u := x$

$v := 1/x$

RETURN$(u+v)$

W ROZWAŻANIACH PRZYJMIJ, ŻE $x$ JEST LICZBĄ MASZYNOWĄ

$$fl(w(x)) = \left(x + \frac{1}{x}(1+E_1)\right)(1+E_2)$$

ALGORYTM MOŻEMY NAZWAĆ NUMERYCZNIE POPRAWNYM, GDY SPEŁNIA JEDEN Z PONIŻSZYCH WARUNKÓW

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)(1+h)$$

• daje nieco zaburzony wynik dla nieco zaburzonych danych

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)(1+h)$$

• dane dokładne, ale wynik nieco zaburzony

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$$

• dane nieco zaburzone, a wynik dokładny)

Pokażemy, że nasz algorytm jest NP z angiej.
Zatem chcemy pokazać coś typu:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+\gamma)(1+\varepsilon_2)$$

a mamy $\left(x+\frac{1}{x}(1+\varepsilon_1)\right)(1+\varepsilon_2)$

Zauważmy, że $\left(x+\frac{1}{x}(1+\varepsilon_1)\right)(1+\varepsilon_2) = \left(x+\frac{1}{x}\right)(1+\gamma)(1+\varepsilon_2)$

wtw. gdy $\left(x+\frac{1}{x}(1+\varepsilon_1)\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)(1+\gamma)$

$$x+\frac{1}{x}+\frac{\varepsilon_1}{x} = x+\frac{1}{x}+x\gamma+\frac{\gamma}{x}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{x} = \gamma\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\gamma = \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

OSZACUJMY $\gamma$: $|\gamma| = |\varepsilon_1| \cdot \left|\frac{1}{x^2+1}\right|$

wiemy, że $|\varepsilon_1| \le 2^{-t}$ oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \le 1$

zatem $|\varepsilon_1| \cdot \left|\frac{1}{x^2+1}\right| \le 2^{-t}$

czyli $|\gamma| \le 2^{-t}$

MAMY WIĘC: $\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+\gamma)(1+\varepsilon_2)$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+H)$

Z tw. o kumulacji błędów możemy oszacować $|H| \le 2 \cdot 2^{-t}$. Mamy więc algorytm, który dla dokładnych danych liczy nieco zmieniony wynik, zatem możemy powiedzieć, że jest on NP.

**ZAD 8.** ZBADAJ CZY PODANY NIŻEJ ALGORYTM WYZNACZANIA ILOCZYNU LICZB MASZYNOWYCH $x_1, x_2, \dots, x_n$ (ZAKŁADAMY ZATEM, ŻE $rd(x_k) = x_k$, $1 \le k \le n$) JEST ALGORYTMEM NUMERYCZNIE POPRAWNYM.

```
I := x[1]
  for k=2 to n
    do
      I := I · x[k]
    end;
  return(I)
```

CZY SYTUACJA ZMIENI SIĘ, JEŚLI ZŁOŻONYM, ŻE DANE NIE SĄ LICZBAMI MASZYNOWYMI (WTEDY MAMY $rd(x_k) = x_k(1+\epsilon_k)$ GDZIE $|\epsilon_k| \le 2^{-t}$, $1 \le k \le n$)?

Podany algorytm oblicza iloczyn n liczb

$$S = ((\dots(((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4) \cdot \dots) \cdot x_n)$$

weźmy pod uwagę błąd wynikający z operacji arytmetycznych.

$$S = ((\dots((x_1(1+\varepsilon_1)) \cdot x_2)(1+\varepsilon_2)) \dots \cdot x_n)(1+\varepsilon_n))$$

wiemy, że $|\varepsilon_i| \le 2^{-t}$, dla $t = 1, 2, \dots, n$ oraz $\varepsilon_1 = 0$

Zauważmy, że wszędzie mamy mnożenie i da się to zapisać prościej:

$$fl(S) = x_1(1+\varepsilon_1) \cdot x_2(1+\varepsilon_2) \cdot x_3(1+\varepsilon_3) \dots x_n(1+\varepsilon_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i(1+\varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{n} \hat{x}_i \rightarrow$$ nieco zmienione z błędem

Okazuje się, że chociaż chcieliśmy policzyć iloraz $x_1, x_2 \dots, x_n$ to tak naprawdę liczymy iloraz nieco zmienionych danych $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \dots \hat{x}_n$

wiemy, że $|\varepsilon_i| \leq 2^{-t}$

Zatem dla nieco zmienionych danych otrzymujemy dokładny wynik, zatem jest to algorytm numerycznie poprawny.

Co się zmieni gdy $rd(x_i) \neq x_i$ (dane nie są liczbami maszynowymi) gdzie $|\varepsilon_k| < 2^{-t}$, $1 \leq k \leq n$?

Powtórzmy rozumowanie z pierwszej części zadania, ale tym razem może $x_k$ są nieco zaburzone oznaczmy je więc $\tilde{x}_k$

$fl(S') = \tilde{x}_1(1+\varepsilon_1)\tilde{x}_2(1+\varepsilon_2) \cdot \dots \cdot \tilde{x}_n(1+\varepsilon_n) =$

$= \prod_{i=1}^{n} \tilde{x}_i (1+\varepsilon_i)$

Rozpiszmy teraz błąd wynikający z tego, że $rd(x_k) = x_k(1+\beta_k)$

$\prod_{i=1}^{n} x_i(1+\varepsilon_i)(1+\beta_i)$

z tw. o kumulacji błędów mamy oszacowanie

$(1+\varepsilon_i)(1+\beta_i) \leq 2 \cdot 2^{-t}$

Zatem dla nieco zmienionych danych (trochę bardziej niż w pierwszej części zadania) otrzymujemy wciąż dokładny wynik, zatem algorytm jest NP.