LISTA 11 ZAD 1

Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

A)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

Sprawdzamy czy tabelka ma element neutralny i widzimy że jest to element a

Ponieważ w drugiej kolumnie element neutralny występuje dwukrotnie, a w trzeciej ani razu wiemy, że nie jest grupą. (Ponieważ element neutralny może wystąpić tylko raz w danej kolumnie i wierszu).

B)

*	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

Widzimy, że tabelka nie ma elementu neutralnego, zatem nie jest grupą.

Scanned with CamScanner

C)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	b	a	c

Tabelka ma element neutralny a ponieważ w trzeciej kolumnie element neutralny występuje dwukrotnie a w czwartej ani razu to nie jest grupa.

D)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	b	a	c

Tabelka ma element neutralny a. Trzecia kolumna zawiera element neutralny dwukrotnie, a czwarta ani razu, zatem nie jest to grupa.

element neutralny?

$a \cdot a = a$

$a \cdot b = b \cdot a = b$

$a \cdot c = c \cdot a = c$

$a \cdot d = d \cdot a = d$

element neut. = **a**

Czy dla każdego $g \in G$ istnieje elem. odwr?

$a \cdot a = a$

$b \cdot c = c \cdot b = a$

$c \cdot b = b \cdot c = a$

$d \cdot c = a \neq c \cdot d$ X $\quad g \cdot g^{-1} \neq g^{-1} \cdot g \Rightarrow$ Dany zbiór nie jest grupą.

LISTA 11 ZAD 2

Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

O_i – Obrót o i stopni
h – symetria względem prostej poziomej
v – symetria względem prostej pionowej
d – symetria względem przekątnej (lewy górny róg do prawy dolny róg)
d' – symetria względem drugiej przekątnej

·	O_0	O_{90}	O_{180}	O_{270}	h	v	d	d'
O_0	O_0	O_{90}	O_{180}	O_{270}	h	v	d	d'
O_{90}	O_{90}	O_{180}	O_{270}	O_0	d	d'	v	h
O_{180}	O_{180}	O_{270}	O_0	O_{90}	v	h	d'	d
O_{270}	O_{270}	O_0	O_{90}	O_{180}	d'	d	h	v
h	h	d'	v	d	O_0	O_{180}	O_{270}	O_{90}
v	v	d	h	d'	O_{180}	O_0	O_{90}	O_{270}
d	d	h	d'	v	O_{90}	O_{270}	O_0	O_{180}
d'	d'	v	d	h	O_{270}	O_{90}	O_{180}	O_0

LISTA 11 ZAD 3

Rozważmy trzy grupy:

1.) grupa symetrii trójkąta równobocznego (3 obroty i 3 symetrii osiowe).

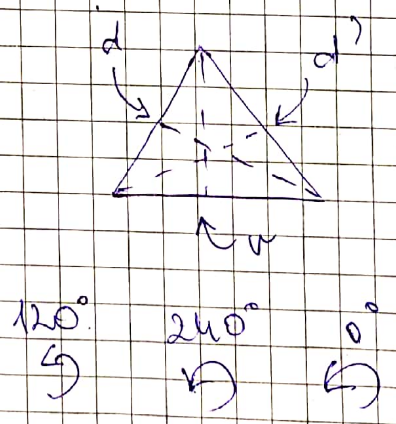
2.) grupa obrotów sześciokąta foremnego

3.) grupa $(Z_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem mod 6)

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

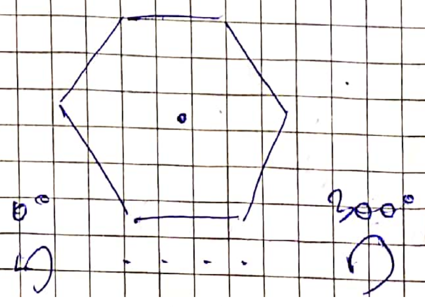
1)

·	0°	120°	240°	v	d	d'
0°	0°	120°	240°	v	d	d'
120°	120°	240°	0°	d	d'	v
240°	240°	0°	120°	d'	v	d
v	v	d'	d	0°	240°	120°
d	d	v	d'	120°	0°	240°
d'	d'	d	v	240°	120°	0°



2)

·	0°	60°	120°	180°	240°	300°
0°	0°	60°	120°	180°	240°	300°
60°	60°	120°	180°	240°	300°	0°
120°	120°	180°	240°	300°	0°	60°
180°	180°	240°	300°	0°	60°	120°
240°	240°	300°	0°	60°	120°	240°
300°	300°	0°	60°	120°	240°	300°



Scanned with CamScanner

3)

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

B) KTÓRE Z NICH SĄ IZOMORFICZNE?

Obrót o k stopni oznacza $O_{k°}$

Def 13.11
α jest izomorfizmem, jeśli istnieje φ i jeśli zachowuje działanie: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
(w szczeg. φ, φ^{-1}, są bijekcjami)

Lemat 13.13 Homomorfizm przeprowadza e_1 (neutralny) w e_2 (neutralnym)

(1 ⇄ 2) zał. że φ jest izomorfizmem $\varphi: G_1 \to G_2$

Dd niewprost
Weźmy dow $a \in G_1$ t.ż. $a \neq e \wedge aa = e$
$\varphi(aa) = \varphi(O_{0°}) = O_{0°}$, bo φ przeprowadza neutralny w neutralny
$\varphi(a) \cdot \varphi(a) = O_{0°} \Leftrightarrow \varphi(a) = O_{180°}$ (z tabelki)

co sprzeczne z "1-1", bo $a \cdot a = O_{0°} \Leftrightarrow a = r \vee a = d \vee a = d'$.

φ nie może być izomorfizmem, bo nie jest "1-1"

(1 ⇄ 3) Analogicznie

(2 ⇄ 3) Niech $\varphi: G_2 \to G_3$ będzie izomorfizmem.

a	$O_{0°}$	$O_{60°}$	$O_{120°}$	$O_{180°}$	$O_{240°}$	$O_{360°}$
$\varphi(a)$	0	1	2	3	4	5

Widać że jest to bijekcja

Zachowuje działanie grup, ponieważ operacje w G_2 i G_3 to dodawanie elementów modulo $360°$ i 6

$\varphi(a) = \frac{a}{60°}$

$\varphi(ab) = \varphi((a+b)\%360) = \frac{a+b}{60°}\%6 = \frac{a}{60°}\%6 + \frac{b}{60°}\%6 = \varphi(a)$

LISTA 11 ZAD 4

Pokaż, że dla $x_1, \dots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \dots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \dots (x_1^{-1})^{z_1} =$$

$$= (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \dots (x_1)^{-z_1}$$

Weźmy dowolne $x_1, \dots, x_k \in G$ oraz $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z}$. Z def. elementu odwrotnego wynika, że

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} (x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k}) = e, \text{ więc}$$

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} (x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})(x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{z_k})^{-1}$$

Korzystając z łączności działania otrzymujemy

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} (x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_{k-1}^{z_{k-1}}) x_k^{z_k} (x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{z_k})^{-1}$$

zatem:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} (x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_{k-1}^{z_{k-1}}) = (x_k^{z_k})^{-1}$$

Gdy powtórzymy powyższy krok dla kolejnych elementów $(x_{k-1}^{z_{k-1}})^{-1}$, to otrzymamy

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{z_k})^{-1} (x_{k-1}^{z_{k-1}})^{-1} \dots (x_1^{z_1})^{-1}$$

Pokażę teraz, że dla dowolnych $a \in G, b \in \mathbb{Z}$ zachodzi $(a^b)^{-1} = (a^{-1})^b$. Dla $b > 0$:

$$a^b (a^{-1})^b = (\underbrace{aa \cdots a}_{b})(\underbrace{a^{-1} a^{-1} \cdots a^{-1}}_{b}) =$$

$$= (\underbrace{aa \cdots a}_{b-1})(aa^{-1})(\underbrace{a^{-1} a^{-1} \cdots a^{-1}}_{b-1}) =$$

$$= (\underbrace{aa \cdots a}_{b-1})(\underbrace{a^{-1} a^{-1} \cdots a^{-1}}_{b-1}) = e,$$

więc $(a^{-1})^b$ jest elementem odwrotnym do a^b, więc jest równy $(a^b)^{-1}$. Podobnie dla $b < 0$:

$$a^b (a^{-1})^b = (a^{-1})^{-b} ((a^{-1})^{-1})^{-b} = (a^{-1})^{-b} a^{-b} =$$

$$= (\underbrace{a^{-1} a^{-1} \cdots a^{-1}}_{-b})(\underbrace{aa \cdots a}_{-b}) = e$$

a dla $b = 0$ prawdziwa jest równość $(a^b)^{-1} = (a^{-1})^b = e$

Wykorzystując udowodnioną własność w równaniu $(*)$, otrzymujemy

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \dots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \dots (x_1)^{-z_1}$$

LISTA 11 ZAD6

Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Załóżmy, że każdy element w grupie jest odwrotny do siebie $\forall_x \; xx = e$

Pokażemy, że grupa jest przemienna: $\forall_{a,b} \; ab = ba$

Weźmy dowolne elementy grupy a, b:

Mamy $(ab)(ab)^{-1} = e$ i $(ba)(ba)^{-1} = e$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$abab = e \qquad\qquad baba = e$$

$$abab = baba \quad /\cdot a \text{ z lewej}$$

$$\underbrace{aa}_{e}bab = ababa$$

$$bab = \underbrace{abab}_{=e}a$$

$$bab = a \quad /\cdot b \text{ z prawej}$$

$$ba\underbrace{bb}_{=e} = ab$$

$$ba = ab$$

Czyli $\forall_{a,b} \; ab = ba$ – grupa jest przemienna