LISTA 5

j≠k

ZAD. 1 METODY SIECZNYCH DEFINIUJE WZÓR ITERACYJNY

$$x_{n+1} = x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} \quad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0, x_1 - \text{dane})$$

gdzie $f_n := f(x_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Wykaż, że wzór ten można również zapisać w postaci

$$x_{n+1} := \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \quad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0, x_1 - \text{dane})$$

A NASTĘPNIE WYJAŚNIJ, KTÓRY Z WZORÓW JEST PRZYDATNIEJSZY W PRAKTYCE NUMERYCZNEJ.

$$\boxed{f_n = f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$= \frac{x_n \cdot (f(x_n) - f(x_{n-1}))}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{f(x_n)\cdot x_n - f(x_{n-1})\cdot x_n - f(x_n)\cdot x_n + f(x_n)\cdot x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$= \frac{f(x_n)\cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})\,x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}}$$

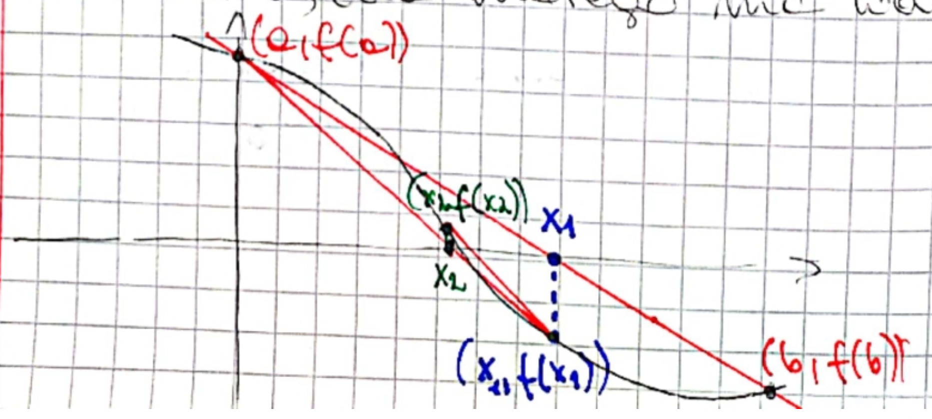
Drugi wzór jest przydatniejszy w praktyce numerycznej, ponieważ jest w nim mniej obliczeń odejmowania

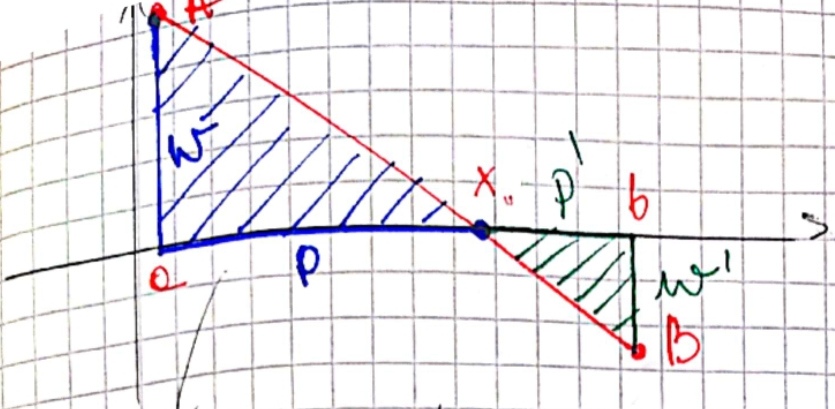
Ale w momencie zbliżania się do m. zer. $f(x_n) \to f(x_{n-1})$, czyli wartości te są sobie bardzo bliskie. W pierwszym wzorze nie ma takiego problemu. Drugi wzór jest gorszy.

ZAD2 METODA REGUŁA FALSI JEST PEWNYM WARIANTEM SIECZNYCH. PRZEDSTAW JEJ IDEĘ I ZWIĘZŁY OPIS. NASTĘPNIE WYJAŚNIJ CZYM RÓŻNI SIĘ ONA OD METODY SIECZNYCH. CO JEST GŁÓWNĄ ZALETĄ TEJ METODY?

3 warunki początkowe:

- FUN. MUSI BYĆ OKREŚLONA NA PRZEDZIALE $[a,b]$
(dla każdego argumentu x z przedziału $[a,b]$ istnieje wartość funkcji)
- FUNKCJA MUSI BYĆ CIĄGŁA W PRZEDZIALE $[a,b]$
(ciągłość fun. gwarantuje, iż jej wartości nie wykonują nagłych skoków)
- NA KRAŃCACH PRZEDZIAŁU $[a,b]$ FUNKCJA MUSI MIEĆ RÓŻNE ZNAKI
(to gwarantuje, że istnieje taki argument x_0, dla którego ma wartość 0)





długości boków Δ niebieskiego

$w = f(a)$

$p = x_0 - a$

długości boków Δ zielonego

$w' = -f(b)$

$p' = b - x_0$

Ponieważ trójkąty są podobne, to odpowiadające sobie boki spełniają proporcje:

$$\frac{p}{w} = \frac{p'}{w'}$$

wyliczmy x_0

$$\frac{x_0 - a}{f(a)} = \frac{b - x_0}{-f(b)}$$

$$-f(b)\cdot(x-a) = f(a)(b-x_0)$$
$$-f(b)x + f(b)a = f(a)b - f(a)x_0$$
$$f(a)\cdot x_0 - f(b)x_0 = f(a)b - f(b)a$$
$$x_0\cdot(f(a) - f(b)) = f(a)b - f(b)a$$
$$x_0 = \frac{f(a)b - f(b)\cdot a}{f(a) - f(b)}$$

Jeśli $f(a)\cdot f(x) < 0$

to $b = x_0$, $f_b = f_x$

wpw. $a = x_0$, $f_a = f_x$

Wadą metody reguły falsi jest stosunkowo powolna zbieżność.

Metodę regula-falsi można znacznie ulepszyć tzn. poprawić jej zbieżność, jeżeli zrezygnujemy z żądania, aby funkcja $f(x)$ miała w punktach wyznaczających następną cięciwę różne znaki (z wyjątkiem pierwszej iteracji).

Metoda siecznych zbiega szybciej, ale istnieje ryzyko, że nie wyznaczymy pierwiastka.

ZAD 3. ZAŁÓŻMY, ŻE METODA ITERACYJNA POSTACI

x_0 - dane, $x_{k+1} = F(x_k)$ $(k = 0, 1, 2 \dots)$

(METODY TAKIE NAZYWAMY METODAMI JEDNOKROKOWYMI; NP. METODĄ TAKĄ JEST METODA NEWTONA, DLA KTÓREJ $F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$) JEST ZBIEŻNA DO PIERWIASTKA α RÓWNANIA $f(x) = 0$. WYKAŻ, ŻE JEŚLI

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

$F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, TO RZĄD METODY JEST RÓWNY p, TZN.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

JAKIM WZOREM WYRAŻA SIĘ STAŁA ASYMPTOTYCZNA C?

rozwijając w szereg wokół, w ... to jest punkt

Weźmy $F(x_k) = x_{k+1}$

$$x_{k+1} = F(\alpha) + (x_k - \alpha) F'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!} F''(\alpha) + \dots + \frac{(x_k - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p-1)}(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} F^{(p)}(\xi_n)$$

$F(\alpha) = \alpha$

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) F'(\alpha) + \dots + \frac{(x_k - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p-1)}(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} F^{(p)}(\xi_n)$$

Niech $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ będzie naszym błędem.

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k F'(\alpha) + \dots + \frac{\varepsilon_k^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p-1)}(\alpha) + \frac{\varepsilon_k^p}{p!} F^{(p)}(\xi_n)$$

$$F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon_k^p}{p!} F^{(p)}(\xi) \quad | : \varepsilon_k^p$$

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = \frac{F^{(p)}(\xi)}{p!}$$

$F^{(p)}(\alpha) \neq 0$

$F^{(p)}(x) \neq 0 \to$ w pewnym otoczeniu punkt α

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} = C \neq 0$$

ZAD 4 NIECH α BĘDZIE POJEDYNCZYM ZEREM FUNKCJI f (tzn. $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$). WYKAŻ, ŻE METODY NEWTONA JEST WÓWCZAS ZBIEŻNA KWADRATOWO. WSKAZÓWKA: WYKORZYSTAJ ZADANIE L5.3

α jest miejscem zerowym pojedynczym.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)\cdot f'(x)} = 1 - 1 + \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)\cdot f'(x)} = \frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)\cdot f'(x)}$$

$$F'(\alpha) = \frac{f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{f'(\alpha)\cdot f'(\alpha)} = 0$$

$$F''(x) = \frac{(f'(x)\cdot f''(x) + f(x)\cdot f'''(x))\,[f'(x)]^2 - 2\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^4}$$

$$F''(\alpha) = \frac{f'(\alpha)\cdot f''(\alpha)\cdot [f'(\alpha)]^2}{[f'(\alpha)]^4} = \frac{[f'(\alpha)]^3\cdot f''(x)}{[f'(x)]^4} = f''(x)/f'(x)$$

METODA NEWTONA

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Wiemy, że $f'(\alpha)\neq 0$, więc 1°) $f''(\alpha)\neq 0$ to $F''(\alpha)\neq 0$ i mamy zbieżność kwadratową,
2°) $f''(\alpha)=0$ to mamy zb. sześcienną lub lepszą.

ZAD 5. NIECH α BĘDZIE PODWÓJNYM ZEREM FUNKCJI f, ZATEM NIECH $f(\alpha)=f'(\alpha)=0\neq f''(\alpha)$. WYKAŻ, ŻE METODA NEWTONA JEST WÓWCZAS ZBIEŻNA LINIOWO (PAMIĘTAJ TEŻ O SPRAWDZENIU ODPOWIEDNIEJ WARTOŚCI STAŁEJ ASYMPTOTYCZNEJ).

Mamy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ i $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha)$

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(e_n+\alpha)}{f'(e_n+\alpha)} \qquad \to \quad x_n - \alpha = e_n,\quad x_n = e_n + \alpha$$

Rozpiszmy licznik ze wzoru Taylora

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\alpha) + \frac{e_n\, f'(\alpha)}{1!} + \frac{e_n^2\, f''(\xi_1)}{2!}}{f'(e_n+\alpha)}$$

wiemy, że ... więc

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\frac{e_n^2\, f''(\xi_1)}{2!}}{f'(e_n+\alpha)}$$

rozpiszmy też dół z szeregu Taylora

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n^2\cdot f''(\xi_1)}{2!\cdot f'(e_n+\alpha)} = e_n - \frac{e_n^2\cdot f''(\xi_1)}{2!\left(f'(\alpha) + \frac{f''(\xi_2)}{1!}\cdot e_n\right)} =$$

$$= e_n - \frac{1}{2}\left(\frac{e_n\, f''(\xi_1)}{0 + f''(\xi_2)}\right) = e_n\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\right)$$

stała ta jest niewielka

co oznacza, że

$$e_{n+1} = e_n^1\, C,$$ a to oznacza, że ta metoda jest liniowa

ZAD 6 UPROSZCZONA METODA NEWTONA $x_{n+1} := x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ $(n = 0, 1, \dots)$ STOSUJEMY DO WYZNACZENIA POJEDYNCZEGO ZERA FUNKCJI f. JAKI – PRZY KONIECZNYCH ZAŁOŻENIACH – JEST RZĄD ZBIEŻNOŚCI TEJ METODY?

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Sprowadźmy to do tej co w zadaniu 3 metodą:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} \qquad F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(x_0)}$$

$f(\alpha) = 0 \qquad F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(x_0)} = \alpha - 0 = \alpha$, więc się zgadza.

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x_0)}{(f'(x_0))^2}$$

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \qquad F'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)}$$

WNIOSKI

Jeśli $f'(x)/f'(x_0) = 1$ to rząd zbieżności ≥ 2

W przeciwnym przypadku rząd zbieżności to 1

ZAD 7 ZAPROPONUJ NUMERYCZNĄ METODĘ WYZNACZANIA WYKŁADNIKÓW ZBIEŻNOŚCI JEDNOKROKOWEJ METODY ITERACYJNEJ (por. zadanie 15.3) ROZWIĄZYWANIA RÓWNANIA NIELINIOWEGO $f(x) = 0$.

Wiemy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C$ i że możemy to zapisać jako $\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{e_n^p} = C$ | log

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{|e_{n+1}|}{e_n^p} = \log C$$

da się to zapisać jako:

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} = \log C$$

Czyli: $\lim_{n\to\infty} \log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = 0$

Czyli: $\lim_{n\to\infty} \log \frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} - \lim_{n\to\infty} \log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{|e_{n+2}|}{|e_{n+1}|^p} - \log\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log|e_{n+2}| - \log|e_{n+1}|^p - \log|e_{n+1}| + \log|e_n|^p\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log|e_{n+2}| - p\cdot\log|e_{n+1}| - \log|e_{n+1}| + p\cdot\log|e_n|\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log|e_{n+2}| - \log|e_{n+1}| - p(\log|e_{n+1}| + \log|e_n|)\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log|e_{n+2}| - \log|e_{n+1}|\right) - \lim_{n\to\infty} p\cdot(\log|e_{n+1}| + \log|e_n|) = 0$$

$$p\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\log|e_{n+1}| - \log|e_n|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\log|e_{n+2}| - \log|e_{n+1}|\right)$$

$$p = \lim_{n\to\infty}\frac{(\log|e_{n+2}| - \log|e_{n+1}|)}{(\log|e_{n+1}| - \log|e_n|)}$$

ZAD 8 WIADOMO, ŻE LICZBA G JEST GRANICĄ DWÓCH CIĄGÓW $\{r_n\}$ i $\{o_n\}$. TO ZNACZY:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = G \qquad \lim_{n\to\infty} o_n = G.$$

DO TEJ PORY WARTOŚĆ G ZNANA BYŁA Z DOKŁADNOŚCIĄ 10 CYFR DZIESIĘTNYCH. NA TEJ PODSTAWIE OBLICZONO:

$|r_0 - G| = 0{,}763807023$ $\quad |o_0 - G| = 0{,}605426053$

$|r_1 - G| = 0{,}543852762$ $\quad |o_1 - G| = 0{,}055322784$

$|r_2 - G| = 0{,}196247370$ $\quad |o_2 - G| = 0{,}004819076$

$|r_3 - G| = 0{,}009220359$ $\quad |o_3 - G| = 0{,}000399783$

OBECNIE, KONIECZNE OKAZAŁO SIĘ WYZNACZENIE STAŁEJ G Z DOKŁADNOŚCIĄ 100 CYFR. NA OBLICZENIE JEDNEGO WYRAZU CIĄGU $\{r_n\}$ LUB $\{o_n\}$ Z TAKĄ PRECYZJĄ POTRZEBA OKOŁO TYGODNIA. ROSJANIE PRÓBUJĄ PRZYBLIŻYĆ STAŁĄ G UŻYWAJĄC CIĄGU $\{r_n\}$, A AMERYKANIE CIĄGU $\{o_n\}$. KTO SZYBCIEJ WYZNACZY STAŁĄ G Z ŻĄDANĄ DOKŁADNOŚCIĄ I ILE BĘDZIE TO TRWAŁO?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0 \Rightarrow \text{rząd metody jest równy } p$$

α - dokładny wynik
x_{n+1}, x_n - kolejne przybliżenia

chcemy poznać p

$$\frac{|x_3 - G|}{|x_2 - G|^p} = \frac{|x_2 - G|}{|x_1 - G|^p} = \frac{|x_1 - G|}{|x_0 - G|^p} = C$$

$$\frac{|x_4 - G|}{|x_2 - G|^p} = C$$

$$|x_4 - G| = C \cdot |x_2 - G|^p$$