

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 1

7 października 2020 r.

Zajęcia 13 października 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L1.1. Włącz komputer! 1 punkt Niech dana będzie funkcja $f(x) = 4040 \frac{\sqrt{x^{11} + 1} - 1}{x^{11}}$. Napisz program, który działając w trybie podwójnej precyzji (**double**) obliczy wartość $f(0.001)$. Czy wynik jest wiarygodny? **Odpowiedź uzasadnij.**

L1.2. Włącz komputer! 1 punkt Niech dana będzie funkcja $f(x) := 12120 \frac{x - \sin x}{x^3}$. Przy pomocy komputera oblicz w arytmetyce pojedynczej (**single**) i podwójnej precyzji (**double**) wartości $f(10^{-i})$ dla $i = 11, 12, \dots, 20$. Czy otrzymane wyniki są poprawne? **Odpowiedź uzasadnij.**

L1.3. Włącz komputer! 1 punkt Liczby rzeczywiste y_0, y_1, \dots są zdefiniowane rekurencyjnie w następujący sposób:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -\frac{1}{7}, \quad y_{n+2} = \frac{1}{7}(69y_{n+1} + 10y_n) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Użyj komputera i podanej zależności do obliczenia (w pojedynczej lub podwójnej precyzji) kolejno wartości liczb y_2, y_3, \dots, y_{50} . Skomentuj otrzymane wyniki. Czy są one wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij.**

L1.4. Włącz komputer! 2 punkt Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x + 2020} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$(1) \quad I_n = \frac{1}{n} - 2020 I_{n-1} \quad \left(n = 1, 2, \dots; I_0 = \ln \frac{2021}{2020} \right).$$

Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek I_1, I_2, \dots, I_{20} (w takiej właśnie kolejności) wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji używając pętli **for**. Czy wyniki są wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij.**

L1.5. Włącz komputer! 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

naależy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-4} . Następnie wykonaj odpowiedni eksperyment obliczeniowy przy pomocy komputera w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji. Co z niego wynika?

- L1.6.** 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia wartości $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ trzeba użyć ok. dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dla $x = 2$. Wykaż, że zastosowanie prostego związku $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$ może znacznie przyspieszyć obliczenia.

- L1.7.** 1 punkt W języku programowania PWO++¹ funkcja $\text{ATG}(x)$ oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\arctg(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $|x| \leq 1$. Wykorzystując funkcję ATG , zaproponuj szkic algorytmu wyznaczającego w języku PWO++ wartości funkcji arcus tangens z dużą dokładnością także dla $|x| > 1$.

- L1.8.** Włącz komputer! 2 punkty Na wykładzie pokazano, że użycie wzoru

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (h - \text{małe})$$

do przybliżenia wartości $f'(x)$ nie jest dobrym pomysłem. Uzasadnij, że

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

a następnie zbadaj doświadczalnie dla wielu doborów f oraz x przydatność wyrażenia

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (h - \text{małe})$$

do wyznaczania przybliżonej wartości pochodnej funkcji f w punkcie x . Czy stosowanie drugiego wzoru coś zmienia? Jak to wytłumaczyć?

(–) Paweł Woźny

- Czyli, że zasadniczo Pan się musi na tym rozeznąć całkowicie żeby wiedzieć ile i gdzie...
- Dotychczas tak było, ale teraz mamy komputer. Może Pan pisać co tylko Pan chce to nie ma żadnego znaczenia.
- Komputer?
- Eeee, on się i tak zawsze pomyli przy dodawaniu, proszę pana. Nie było miesiąca, żeby się nie pomylił.
- Czyli, że teraz nie trzeba się tak znać na robocie?
- A teraz już nie. Teraz jest dużo łatwiej, jest proszę pana.
- Komputer...

Miś, reż. S. Bareja, 1980 (1:24:26).

P.S. Film można obejrzeć przed ćwiczeniami, ale nie jest to konieczne do zaliczenia listy.

¹Jak powszechnie wiadomo od wielu lat, jest to najlepszy język programowania. Dlatego rekomendujemy jego używanie nie tylko na analizie numerycznej, ale i na co dzień ;-)

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

14 października 2020 r.

Zajęcia 20 października 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L2.1. 1 punkt Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

L2.2. 1 punkt Znajdź wszystkie liczby zmiennopozycyjne, które można przedstawić w postaci

$$(1) \quad x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4})_2 \cdot 2^{\pm c}, \quad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, c \in \{0, 1\},$$

gdzie $(\dots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$ (wykonaj odpowiedni rysunek)? Co z tego wynika?

L2.3. 1 punkt Zaokrągleniem niezerowej liczby rzeczywistej $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, c jest liczbą całkowitą, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, jest liczba zmiennopozycyjna $\operatorname{rd}(x) = sm_t^r 2^c$, gdzie $m_t^r \in [\frac{1}{2}, 1)$ oraz $|m - m_t^r| \leq \frac{1}{2}2^{-t}$. Wykaż, że

$$\frac{|\operatorname{rd}(x) - x|}{|x|} \leq 2^{-t}.$$

L2.4. 1 punkt Przeczytaj tekst dostępny pod adresem <http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html> mówiący o tym, że niefrasobliwe używanie arytmetyki zmiennopozycyjnej może prowadzić do prawdziwej tragedii (szczegóły patrz raport [GAO/IMTEC-92-26](#)). Streść, własnymi słowami, opisane tam zdarzenie i przedstaw istotę opisanego problemu.

L2.5. 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754¹ reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omów go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.6. 1 punkt Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;  
u:=u+y*y;  
d:=sqrt(u)
```

¹Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{ff} . Następnie zaproponuj **algorytm** wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\sqrt{2} \max(|x|, |y|) \in X_{\text{ff}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

L2.7. **Włącz komputer!** 2 punkty Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $x^3 - \sqrt{x^6 + 2020}$, b) $x^{-4}(\cos x - 1 + x^2/2)$, c) $\log_5 x - 6$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.

L2.8. **Włącz komputer!** 1 punkt Niech będzie $f(x) = 4040 \frac{\sqrt{x^{11} + 1} - 1}{x^{11}}$. Jak już wiadomo z zadania **L1.1**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb podwójnej precyzji) wartości $f(0.001)$ daje niewiarygodny wynik. Wyłumacz dlaczego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

L2.9. **Włącz komputer!** 1 punkt Można wykazać, że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$(2) \quad x_{k+1} = 2^k \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2} \right)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

jest zbieżny do π . Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie **testy obliczeniowe**.

(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 3

21 października 2020 r.

Zajęcia 27 października 2020 r.
Zaliczenie listy **od 7 pkt.**

- L3.1.** Włącz komputer! 2 punkty Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń
a) $4 \cos^2 x - 3$, b) $x^{-3}(\pi/2 - x - \operatorname{arctg}(x))$
może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.
- L3.2.** Włącz komputer! 1 punkt Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie algorytm obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). **Przeprowadź testy** dla odpowiednio dobranych wartości a, b i c pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy od *metody szkolnej* bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.
- L3.3.** Włącz komputer! 2 punkty Miejsce zerowe wielomianu $x^3 + 3qx - 2r = 0$, gdzie $r, q > 0$, można obliczyć następującym wzorem Cardano-Tartaglii:
$$x = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3} + \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3}.$$

Pokaż na przykładach, że bezpośrednie użycie tego wzoru w obliczeniach zmiennopozycyjnych może skutkować błędnymi wynikami. Co jest tego przyczyną? Spróbuj przekształcić wzór tak, aby uniknąć problemów. Czy obliczenia można zorganizować w taki sposób, aby tylko raz wyznaczać pierwiastek trzeciego stopnia?
- L3.4.** 1 punkt Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x .
- L3.5.** 2 punkty Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:
a) $f(x) = x^3 + 2020$, b) $f(x) = x^{-1} \ln(x)$, c) $f(x) = \cos(5x)$,
d) $f(x) = (\sqrt{x^4 + 2020} + x)^{-1}$.
- L3.6.** 2 punkty Załóżmy, że dla każdego $x \in X_{fl}$ zachodzi $\operatorname{fl}(\ln(x)) = \ln(x)(1 + \varepsilon_{\ln, x})$, gdzie $|\varepsilon_{\ln, x}| \leq 2^{-t}$, natomiast t oznacza liczbę bitów przeznaczoną na zapamiętanie mantysy. Niech dane będą liczby maszynowe y_1, y_2, y_3, y_4 oraz taka liczba maszynowa x , że $x \cdot 2^{-8}$ też jest liczbą maszynową. Sprawdź czy poniższy algorytm jest numerycznie poprawny:

```

S:=0;

for i from 1 to 4
do
  S:=S+y[i]*ln(4^(-i)*x)
od;

Return(S) .

```

- L3.7.** 1 punkt Sprawdź czy następujący algorytm obliczania wartości wyrażenia $w(x) := x + x^{-1}$ ($x \neq 0$) jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```

u:=x;
v:=1/x;

Return(u+v)

```

W rozważaniach przyjmij, że x jest liczbą maszynową.

- L3.8.** 2 punkty Zbadaj czy podany niżej algorytm wyznaczania iloczynu liczb maszynowych x_1, x_2, \dots, x_n (zakładamy zatem, że $\text{rd}(x_k) = x_k$, $1 \leq k \leq n$) jest algorytmem numerycznie poprawnym.

```

I:=x[1];

for k=2 to n
do
  I:=I*x[k]
end;

return(I)

```

Czy sytuacja zmieni się, jeśli założymy, że dane nie są liczbami maszynowymi (wtedy mamy $\text{rd}(x_k) = x_k(1 + \epsilon_k)$, gdzie $|\epsilon_k| \leq 2^{-t}$, $1 \leq k \leq n$)?

- L3.9.** Dodatkowe zadanie programistyczne (do 15 listopada; do 5 punktów) ¹

W zadaniu **L1.8** przedstawiono dwa sposoby aproksymowania pochodnej funkcji:

$$(1) \quad f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \quad (h - \text{małe}).$$

Przybliżenia pochodnej funkcji znajdują zastosowanie m.in. w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych, w tym tzw. *równań ruchu*. Znając położenie i prędkość obiektu w chwili t (w wypadku drugiego wzoru, odpowiednio, $t-h$ oraz t), jak również działające na niego siły, z użyciem powyższych wzorów można **przybliżyć** jego położenie oraz prędkość w chwili $t+h$.

¹Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Rozpatrujemy ruch układu ciał oddziałujących wzajemnie na siebie poprzez siłę grawitacji (przyda się znane ze szkoły prawo powszechnego ciążenia Newtona: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$). Celem jest określenie, na podstawie początkowego położenia ciał i ich prędkości w chwili t , jaki będzie stan układu w kolejnych ustalonych chwilach, np. $t + h, t + 2h, t + 3h, \dots$

- (a) Wyprowadź układ równań ruchu dla **dwóch** ciał wzajemnie się przyciągających.
- (b) Sprawdź na przykładzie dwóch ciał, które z powyższych przybliżeń pochodnej lepiej sprawdza się w praktyce (dla tego samego h).

Wskazówka nr 1. Bardzo dobrze będzie to widać, jeżeli układ przypomina planetę krążącą wokół słońca.

Wskazówka nr 2. Metodę wykorzystującą pierwszy z wzorów (1) można znaleźć w literaturze pod nazwą *metody Eulera* przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

- (c) Choć dla dwóch przyciągających się ciał znane jest jawne rozwiązanie analityczne, to w wypadku trzech (tzw. **problem trzech ciał**) lub więcej obiektów — wzorów takich nie ma. Zadanie można rozwiązywać wyłącznie w sposób przybliżony stosując metody numeryczne. Korzystając z podanych możliwości aproksymowania pochodnej, znajdź przybliżone rozwiązanie problemu trzech (lub więcej) ciał dla kilku istotnie różnych układów (np. układ Słońce-Ziemia-Księżyc, planeta krążąca wokół gwiazdy podwójnej, wykorzystanie zjawiska asysty grawitacyjnej, ...).

Autor zadania: *Filip Chudy*.

(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 4

28 października 2020 r.

Zajęcia 3 listopada 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L4.1. 1 punkt Niech $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

- (a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ($n = 0, 1, \dots$).
- (b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n]$ ($n = 0, 1, \dots$)?
- (c) Wykaż, że
$$(1) \quad |e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0).$$
- (d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$?

L4.2. 1 punkt Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?

L4.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x - 0.49$ i wartości początkowych $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Porównaj wartości błędów $|e_n|$ ($1 \leq n \leq 5$) z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Skomentuj wyniki.

L4.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^2 - 2 \cos(3x + 1)$ z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-5} . *Wskazówka:* Naskicować wykresy funkcji $g(x) = x^2$ i $h(x) = 2 \cos(3x + 1)$.

L4.5. **Włącz komputer!** 2 punkty Przybliżenie odwrotności liczby $R > 0$ można obliczać bez wykonywania dzielenia za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

dla odpowiednio dobranej wartości x_0 .

- (a) Sprawdź, że powyższy wzór można zinterpretować jako wykonanie kroku metody Newtona dla pewnej funkcji $f(x)$.
- (b) Naskicuj wykres funkcji $f(x)$.
- (c) Jakie warunki musi spełniać x_n , aby $x_{n+1} < 0$?

- (d) Udowodnij, że jeśli $x_n < 0$, to $x_{n+1} < x_n$. Co z tego wynika?
- (e) Jakie warunki musi spełniać x_n , aby $x_{n+1} \in (0, R^{-1})$?
- (f) Udowodnij, że jeśli $x_n \in (0, R^{-1})$, to $x_{n+1} \in (x_n, R^{-1})$.
- (g) Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in (0, R^{-1})$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{R}$. Dla jakiego doboru punktów początkowych powyższa metoda jest zbieżna?
- (h) Sprawdź eksperymentalnie (dla różnych wartości R oraz x_0), ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej.

- L4.6.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($a > 0$) bez wykonywania dzielenia. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie**, w tym zbadaj m.in. jak warto dobierać x_0 oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.
- L4.7.** **Włącz komputer!** 1 punkt Niech będzie $a = m 2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Zaproponuj efektywną metodę obliczania \sqrt{a} , otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f . **Ustal eksperymentalnie** dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna.
- L4.8.** **Włącz komputer!** 1 punkt r -krotne zero α funkcji $f(x)$ jest jedynym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$? **Wykonując odpowiednie testy numeryczne**, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?

(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 5

4 listopada 2020 r.

Zajęcia 10 listopada 2020 r.
Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L5.1. 1 punkt Metodę siecznych definiuje wzór iteracyjny

$$x_{n+1} := x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} \quad (f_n \neq f_{n-1}; n = 1, 2, \dots; x_0, x_1 - \text{dane}),$$

gdzie $f_m := f(x_m)$ ($m = 0, 1, \dots$). Wykaż, że wzór ten można również zapisać w postaci

$$x_{n+1} := \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \quad (f_n \neq f_{n-1}; n = 1, 2, \dots; x_0, x_1 - \text{dane}),$$

a następnie wyjaśnij, który z wzorów jest przydatniejszy w praktyce numerycznej.

L5.2. 1 punkt Metoda *regula falsi* jest pewnym wariantem metody siecznych¹. Przedstaw jej ideę i zwięzły opis. Następnie wyjaśnij czym różni się ona od metody siecznych. Co jest główną zaletą tej metody?

L5.3. 1 punkt Załóżmy, że metoda iteracyjna postaci

$$x_0 - \text{dane}, \quad x_{k+1} = F(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

(metody takie nazywamy *metodami jednokrokowymi*; np. metodą taką jest metoda Newtona, dla której $F(x) := x - f(x)/f'(x)$) jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jeśli

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to rząd metody jest równy p , tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

Jakim wzorem wyraża się stała asymptotyczna C ?

L5.4. 1 punkt Niech α będzie pojedynczym zerem funkcji f (tzn. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna kwadratowo. *Wskazówka:* Wykorzystaj zadanie **L5.3**.

¹Zamiast do (polskiej) Wikipedii, lepiej zajrzeć tu: G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical methods in scientific computing*, Vol. I, SIAM, 2008 (par. 6.2.1.).

- L5.5.** 1 punkt Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f , zatem niech $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \neq f''(\alpha)$. Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna liniowo (pamiętaj też o sprawdzeniu odpowiedniej wartości stałej asymptotycznej).
- L5.6.** 1 punkt Uproszczoną metodę Newtona $x_{n+1} := x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ ($n = 0, 1, \dots$) stosujemy do wyznaczenia pojedynczego zera funkcji f . Jaki – przy koniecznych założeniach – jest rząd zbieżności tej metody?
- L5.7.** 1 punkt Zaproponuj numeryczną metodę wyznaczania wykładnika zbieżności jednokrokowej metody iteracyjnej (por. zadanie **L5.3**) rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$.
- L5.8.** Włącz komputer! 1 punkt Ustal eksperymentalnie jaki jest rząd następującej metody Olvera:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right]^2 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$.

- L5.9.** Włącz komputer! 1 punkt Wiadomo, że liczba G jest granicą dwóch ciągów: $\{r_n\}$ i $\{a_n\}$. To znaczy,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = G, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = G.$$

Do tej pory wartość G znana była z dokładnością 10 cyfr dziesiętnych. Na tej podstawie obliczono:

$$\begin{aligned} |r_0 - G| &\approx 0.763907023, \\ |r_1 - G| &\approx 0.543852762, \\ |r_2 - G| &\approx 0.196247370, \\ |r_3 - G| &\approx 0.009220859 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} |a_0 - G| &\approx 0.605426053, \\ |a_1 - G| &\approx 0.055322784, \\ |a_2 - G| &\approx 0.004819076, \\ |a_3 - G| &\approx 0.000399783. \end{aligned}$$

Obecnie, konieczne okazało się wyznaczenie stałej G z dokładnością 100 cyfr. Na obliczenie jednego wyrazu ciągu $\{r_n\}$ lub $\{a_n\}$ z taką precyzją potrzeba około tygodnia. Rosjanie próbują przybliżyć stałą G używając ciągu $\{r_n\}$, a Amerykanie – ciągu $\{a_n\}$. Kto szybciej wyznaczy stałą G z żadaną dokładnością i ile będzie to trwało?

(–) Paweł Woźny

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 6



11 listopada 2020 r.

Zajęcia 17 listopada 2020 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

- L6.1.** 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.
- L6.2.** 1 punkt Opracuj **oszczędny algorytm** zamiany postaci Newtona wielomianu na jego postać potęgową. Określ złożoność opracowanej metody. Jakie zastosowania może mieć taki algorytm?
- L6.3.** 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x , gdzie c_0, c_1, \dots, c_n są danymi stałymi, a T_n oznacza n -ty wielomian Czebyszewa.

- L6.4.** 2 punkty Niech T_n ($n = 0, 1, \dots$) oznacza n -ty wielomian Czebyszewa.
- (a) Podaj postać potęgową wielomianu T_6 .
 - (b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1} ?
 - (c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n -ty ($n \geq 0$) wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:
 - i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1$ ($-1 \leq x \leq 1$; $n \geq 0$);
 - ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;
 - iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} ($n \geq 0$) ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

- L6.5.** 2 punkty Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

- L6.6.** 1 punkt Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

L6.7. 1 punkt Podaj postać Lagrange’a wielomianu interpolacyjnego dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -3 & -2 & 0 & 4 \\ \hline y_k & 0 & 2 & 6 & -10 \end{array}.$$

L6.8. 1 punkt Niech będzie $f(x) = 2020x^5 + 1977x^4 - 1410x^3 + 1945x - 1791$.

- (a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 5 interpolujący funkcję f w punktach $-2020, -1945, -1410, 966, 1791, 2020$.
- (b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1, 0, 1$.

L6.9. 1 punkt Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

zachodzi

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

(–) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 7

18 listopada 2020 r.

Zajęcia 24 listopada 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L7.1. 1 punkt Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a) $\frac{x_k}{y_k} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} -3 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -16 & 0 & -16 & 32 \end{array}, \quad \text{b) } \frac{x_k}{y_k} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ \hline -16 & 32 & 560 & 0 & -16 \end{array},$

c) $\frac{x_k}{y_k} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} -1 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & -8 & -16 & -16 \end{array}.$

Uwaga. Jeśli chwilę pomyślisz, na pewno zauważysz, że rozwiązując podpunkty **b)** i **c)** nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

L7.2. 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_n obliczyć ilorazy różnicowe

(1) $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n]?$

Podaj pseudokod algorytmu wyznaczającego ilorazy różnicowe (1), którego złożoność pamięciowa wynosi $O(n)$.

L7.3. 1 punkt Korzystając z wiedzy z analizy matematycznej, znajdź takie wartości parametrów $a, b > 0$, by wyrażenia

$$\max_{x \in [-1, 1]} |(x-a)(x+a)|, \quad \max_{x \in [-1, 1]} |(x-b)x(x+b)|$$

przyjmowały najmniejszą możliwą wartość. Jak i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (n = 4, 5, \dots, 20)$$

dla x_k ($0 \leq k \leq n$) będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla węzłów *Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jak i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.5. 1 punkt Funkcję $f(x) = \ln(2x+3)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[-1, 0]$. Znajdź wartość n , dla której

$$\max_{x \in [-1, 0]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-6}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadających przedziałowi $[-1, 0]$?

- L7.6.** 2 punkty Funkcję $f(x) = e^{x/3}$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w $n + 1$ równo-odległych punktach przedziału $[-1, 1]$. Znajdź **możliwie najmniejszą** wartość n , dla której

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-16} ?$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy za węzły przyjmiemy zera wielomianu Czebyszewa T_{n+1} ?

- L7.7.** 2 punkty Język programowania PW0++ ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się m.in. procedura `Interp_Newton(x,f)` znajdująca dla wektora $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ parami różnych liczb rzeczywistych i wektora $\mathbf{f} := [f_0, f_1, \dots, f_n]$ współczynniki b_k ($k = 0, 1, \dots, n$) postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_n \in \Pi_n$,

$$L_n(x) := b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

spełniającego warunki $L_n(x_i) = f_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 31. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `Interp_Newton` **tylko raz**, można **szybko** wyznaczyć współczynniki postaci Newtona wielomianu $L_{31} \in \Pi_{31}$ spełniającego warunki

$$L_{31}(z_i) = h_i \quad (i = 0, 1, \dots, 31; z_i \neq z_j \text{ dla } i \neq j)?$$

- L7.8.** 1 punkt W rzeczywistości procedura `Interp_Newton(x,f)` języka PW0++ (patrz zadanie poprzednie) ma jeszcze jedno ograniczenie. Chodzi o to, że żaden z elementów wektorów \mathbf{x} oraz \mathbf{f} nie może być co do modułu większy niż 2020. Czy jeśli warunek ten nie jest spełniony, to procedura ta może być nadal użyteczna?

(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

25 listopada 2020 r.

Zajęcia 1 grudnia 2020 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L8.1. 1 punkt Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

$$\text{a) } \begin{array}{c|c|c|c} x_k & 0 & 2 & 4 \\ y_k & -8 & 8 & -8 \end{array}, \quad \text{b) } \begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ y_k & 4 & 2 & -6 & -24 \end{array}.$$

L8.2. 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 18x + 13 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ -5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + 6x^2 - 18x + 13 & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

jest naturalną interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.3. 1 punkt Czy istnieją takie stałe a, b, c, d , że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2020x & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla } -1 \leq x \leq 1, \\ -2020x & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

jest naturalną interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.4. 1 punkt Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach x_0, x_1, \dots, x_n ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$). Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) spełniają układ równań

$$(1) \quad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. 2 punkty Niech będzie $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ oraz $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (w skrócie: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). W języku PWO++ procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $\mathbf{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \dots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f . Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich miejsc w przedziale $[x_0, x_{100}]$, w których funkcja f ma ekstrema lokalne.

- L8.6.** **Włącz komputer!** **2 punkty** Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \dots, 95),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{95}$ ($k = 0, 1, \dots, 95$), natomiast

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \dots, x_{95}] &:= [5.5, 8.5, 10.5, 13, 17, 20.5, 24.5, 28, 32.5, 37.5, 40.5, 42.5, 45, 47, \\ &49.5, 50.5, 51, 51.5, 52.5, 53, 52.8, 52, 51.5, 53, 54, 55, 56, 55.5, 54.5, 54, 55, 57, 58.5, \\ &59, 61.5, 62.5, 63.5, 63, 61.5, 59, 55, 53.5, 52.5, 50.5, 49.5, 50, 51, 50.5, 49, 47.5, 46, \\ &45.5, 45.5, 45.5, 46, 47.5, 47.5, 46, 43, 41, 41.5, 41.5, 41, 39.5, 37.5, 34.5, 31.5, 28, 24, \\ &21, 18.5, 17.5, 16.5, 15, 13, 10, 8, 6, 6, 6, 5.5, 3.5, 1, 0, 0, 0.5, 1.5, 3.5, 5, 5, 4.5, 4.5, 5.5, \\ &6.5, 6.5, 5.5], \\ [y_0, y_1, \dots, y_{95}] &:= [41, 40.5, 40, 40.5, 41.5, 41.5, 42, 42.5, 43.5, 45, 47, 49.5, 53, 57, 59, \\ &59.5, 61.5, 63, 64, 64.5, 63, 61.5, 60.5, 61, 62, 63, 62.5, 61.5, 60.5, 60, 59.5, 59, 58.5, \\ &57.5, 55.5, 54, 53, 51.5, 50, 50, 50.5, 51, 50.5, 47.5, 44, 40.5, 36, 30.5, 28, 25.5, 21.5, \\ &18, 14.5, 10.5, 7.50, 4, 2.50, 1.50, 2, 3.50, 7, 12.5, 17.5, 22.5, 25, 25, 25, 25.5, 26.5, \\ &27.5, 27.5, 26.5, 23.5, 21, 19, 17, 14.5, 11.5, 8, 4, 1, 0, 0.5, 3, 6.50, 10, 13, 16.5, 20.5, \\ &25.5, 29, 33, 35, 36.5, 39, 41]. \end{aligned}$$

Opracuj **własną implementację** wyznaczania naturalnej interpolacyjnej funkcji sklejanego trzeciego stopnia. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \dots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ ($k = 0, 1, \dots, M$), a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

- L8.7.** **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 20 grudnia; do 8 punktów) ¹

Jest rok 2284. Autonomiczny latający dron *Floty Naukowej* został wysłany na misję do puszczy na odległej planecie, aby zbierać dokumentację o lokalnej faunie i florze. Na polanach tej puszczy żyje rdzenna ludność o mniej zaawansowanym poziomie rozwoju kulturalnego i technologicznego. *Podstawowa Zasada Badawcza Floty Naukowej* (nazywana dalej *PZB*) zakazuje zakłócania ewolucji kulturowej innych gatunków. Takim zakłóceniem niewątpliwie byłoby pojawienie się drona na niebie nad polaną. Dlatego drony zaprogramowano tak, aby nie zostały zauważone, a dokładniej – aby unikały obszarów w kształcie koła, w których znajdują się polany.

Pewnego dnia odnaleziono krytyczny błąd oprogramowania drona, przez który nie ma pewności, że wybrana trasa faktycznie unikała zakazanych obszarów. Jedyne wiarygodne informacje o położeniu i ruchu drona to zapisywane w określonych odstępach czasu położenie i prędkość. Zespół operatorów i operatorów drona próbuje ustalić, czy doszło do złamania *PZB*.

¹Patrz pkt. 10. [regulaminu](#) zaliczania ćwiczeń.

Analizując sytuację, jedna z osób przypomniała sobie, że wielomian interpolacyjny można konstruować nie tylko w oparciu o wartości funkcji w węzłach, ale również wykorzystując informacje o wartościach jej pierwszej i kolejnych pochodnych w tych węzłach. Taki rodzaj interpolacji nazywamy *interpolacją Hermite’a*. Zobacz np. [1, §4.3.1], [2, §2.4].

- (a) Sformułuj zadanie interpolacji wielomianowej Hermite’a i udowodnij, że ma ono zawsze jednoznaczne rozwiązanie.
- (b) Zapoznaj się z oszczędnymi algorytmami wyznaczania *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego Hermite’a i potrzebnych do tego tzw. *uogólnionych ilorazów różnicowych*.
- (c) Trajektorię ruchu drona w czasie można opisać na płaszczyźnie (dla uproszczenia przyjmujemy, że dron przeprowadza badania na stałej wysokości) przy pomocy krzywej parametrycznej

$$\gamma(t) := \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\} \quad (t - \text{czas}).$$

Dla zadanych: liczb rzeczywistych $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ (czas), wartości funkcji $x(t_0), y(t_0), x(t_1), y(t_1), \dots, x(t_n), y(t_n)$ (położenie drona) oraz ich pochodnych $x'(t_0), y'(t_0), x'(t_1), y'(t_1), \dots, x'(t_n), y'(t_n)$ (prędkość drona), opracuj algorytm konstrukcji postaci Newtona wielomianów Hermite’a $H_x, H_y \in \Pi_{2n+1}$ spełniających następujące warunki:

$$H_x(t_k) = x(t_k), \quad H'_x(t_k) = x'(t_k), \quad H_y(t_k) = y(t_k), \quad H'_y(t_k) = y'(t_k)$$

($k = 0, 1, \dots, n$). Sprawdź **dla wielu doborów** interpolowanych funkcji x, y oraz węzłów t_k działanie tego rodzaju interpolacji w praktyce.

- (d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) ($0 \leq i \leq n$) oraz *obszarów zakazanych* K_0, K_1, \dots, K_m ($m \in \mathbb{N}$) będących kołami o środkach odpowiednio w punktach $z_j := (z_j^x, z_j^y)$ i promieniach $r_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, m$), określ – wykorzystując interpolację wielomianową Hermite’a – czy dron złamał *PZB*.

Wykonaj szczegółowe testy dla różnych trajektorii drona i różnych zestawów obszarów zakazanych.

Literatura

- [1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.
- [2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1., WNT, 1988.

Autor zadania: *Filip Chudy*.

(–) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 9

2 grudnia 2020 r.

Zajęcia 8 grudnia 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L9.1.** 1 punkt Wytlumacz na przykładzie, dlaczego operacja dodawania punktów *po współrzędnych* nie jest dobrym pomysłem.
- L9.2.** 2 punkty Sprawdź, że wielomiany Bernsteina B_i^n mają następujące własności:
- (a) B_i^n jest nieujemny w przedziale $[0, 1]$ i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum.
 - (b) $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1$,
 - (c) $B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad (0 \leq i \leq n)$,
 - (d) $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1}B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u) \quad (0 \leq i \leq n)$.
- L9.3.** 1 punkt Udowodnij, że wielomiany $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n .
- L9.4.** 1 punkt Sformułuj i **udowodnij algorytm de Casteljau** wyznaczania punktu na krzywej Béziera. Jaka jest jego interpretacja geometryczna?
- L9.5.** 1 punkt Wykorzystaj schemat Hornera do opracowania algorytmu obliczania punktu na krzywej Béziera, który działa w czasie liniowym względem liczby jej punktów kontrolnych.
- L9.6.** 2 punkty Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n . W języku PWO++ procedura **BezierCoeffs**(p, t) wyznacza taki wektor $\mathbf{c} := [c_0, c_1, \dots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n . Współczynniki c_k ($0 \leq k \leq n$) nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p . Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \leq 50$.

W jaki sposób, używając procedury **BezierCoeffs** co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

Wskazówka: $B_5^7(t) \cdot B_2^4(t) = \frac{21}{55} B_7^{11}(t)$.

Wymierną krzywą Béziera R_n stopnia $n \in \mathbb{N}$ definiujemy wzorem

$$(1) \quad R_n(t) := \frac{\sum_{i=0}^n w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

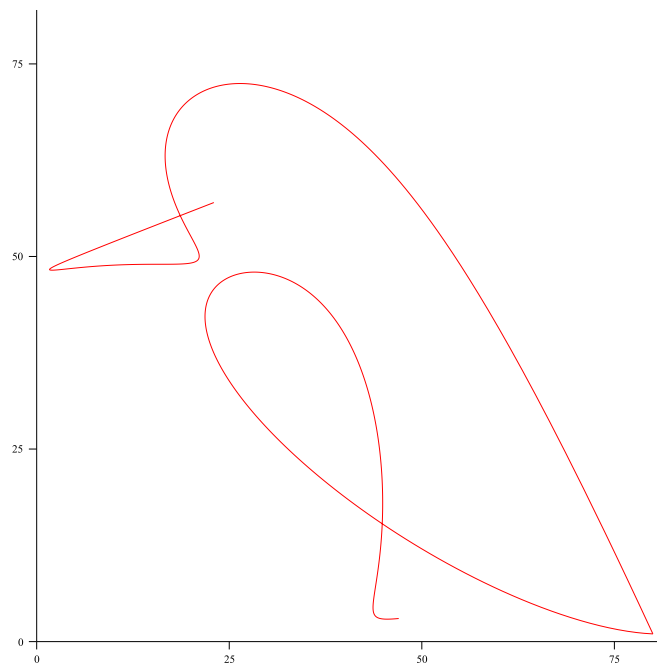
gdzie $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{E}^2$ są danymi *punktami kontrolnymi*,
a $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}_+$ — odpowiadającymi im *wagami*.

L9.7. 1 punkt Wykaż, że dla każdego $t \in [0, 1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{E}^2$ (patrz (1)).

L9.8. **Włącz komputer!** 1 punkt Używając komputera, narysuj wykres wymiernej krzywej Béziera dla punktów kontrolnych

$(39.5, 10.5), (30, 20), (6, 6), (13, -12), (63, -12.5), (18.5, 17.5), (48, 63),$
 $(7, 25.5), (48.5, 49.5), (9, 19.5), (48.5, 35.5), (59, 32.5), (56, 20.5)$

i odpowiadającego im układu wag $1, 2, 3, 2.5, 6, 1.5, 5, 1, 2, 1, 3, 5, 1$. Co ona przedstawia? Zmieniając wartości wag, postaraj się ustalić eksperymentalnie jakie mają one znaczenie dla kształtu wymiernej krzywej Béziera.



(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 10

9 grudnia 2020 r.

Zajęcia 15 grudnia 2020 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

- L10.1.** 1 punkt Niech danę będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{k=0}^N p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym \mathcal{X} .

- L10.2.** 1 punkt Wyznacz funkcję postaci $y(x) = ax(2021x - 2020) + 1977$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y_k & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}.$$

- L10.3.** 1 punkt Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^r \frac{e^{x_k} - 2020}{1 + \ln(x_k^2 + 1)} \left[y_k - a(\cos(2x_k + 2020) + x_k^3) \right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

- L10.4.** 1 punkt Pomiary (t_k, C_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k, C_k > 0$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = \frac{\sin t^3 + 2}{A \ln(t^4 + 1) + B e^{3t} + 1}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B .

- L10.5.** 1 punkt Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T :

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b .

- L10.6.** 1 punkt Punkty (x_k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, r$) otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z siatką półlogarytmiczną okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b .
- L10.7.** 1 punkt Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *plywu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{12} \quad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0 , a_1 , a_2 .

(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 11

16 grudnia 2020 r.

Zajęcia 12 stycznia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L11.1.** 1 punkt Uzasadnij proces *ortogonalizacji Grama-Schmidta*.
- L11.2.** 1 punkt Niech P_k ($1 \leq k \leq N$) będzie k -tym wielomianem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_{k-1}$ jest $(w, P_k)_N = 0$.
- L11.3.** 2 punkty Niech P_0, P_1, \dots, P_N ($1 \leq k \leq N$) będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.
- L11.4.** 2 punkty Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k)$, gdzie x_0, x_1, \dots, x_N są parami różnymi punktami. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz liczbę naturalną $n < N$. Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.
- L11.5.** 1 punkt Niech $\{Q_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:
- $$\begin{cases} Q_0(x) = 1, & Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$
- gdzie c_k, d_k są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:
- $$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$
- $$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \quad (k = m, m-1, \dots, 0),$$
- wynik $:= B_0$,
- oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^m a_k Q_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $Q_m(x)$?
- L11.6.** 1 punkt Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_j := -10 + 5j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$).
- L11.7.** 1 punkt Funkcja h przyjmuje w punktach $x_j := -10 + 5j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) odpowiednio wartości $3, -5, -1, -5, 3$. Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian $w_2^* \in \Pi_2$, aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^4 [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

- L11.8.** **Włącz komputer!** **2 punkty** W pliku `punkty.csv`¹ znajduje się zbiór 50 par liczb ze zbioru $\mathcal{X} := \{(t_i, y_i) : 0 \leq i \leq 49\}$. Wartość te są odczytami z aparatury mierzącej pewną wielkość fizyczną f zachowującą się – jak mówi teoria – zgodnie ze wzorem

$$f(t) = (t + 3.6)(t - 2.1)(t - 3.7).$$

Z tym jednak, że aparatura dokonuje pomiarów z dokładnością ± 0.15 z rozkładu jednostajnego, czyli

$$y_i = f(t_i) + U[-0.15, 0.15] \quad (0 \leq i \leq 49).$$

- (a) Narysuj wykres funkcji f i zbiór \mathcal{X} .
 - (b) Wyznacz i narysuj wielomian interpolacyjny dla danych z pliku `punkty.csv`. Co obserwujemy?
 - (c) Korzystając z **własnej implementacji** skonstruuj i narysuj wielomiany optymalne w_n^* w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danych ze zbioru \mathcal{X} o stopniach $2 \leq n \leq 8$. Skomentuj wyniki.
- L11.9.** **Włącz komputer!** **do 5 punktów** Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do opracowania modelu opisującego przebieg pandemii koronawirusa w Polsce. Możesz rozważyć i modelować różne dane i wskaźniki. Na przykład liczbę aktywnych przypadków w pierwszych 100 dniach od wykrycia pierwszego zakażenia (4 marca 2020 r.). Zadanie to ma charakter *badawczy* — wiele zależy tu od Ciebie i Twojej pomysłowości.

Wskazówki. 1. Wiele dobrze opracowanych danych na temat epidemii w Polsce znajdziesz **pod tym adresem** (autor zbioru danych: Michał Rogalski). 2. Jeśli zdecydujesz się modelować liczbę aktywnych przypadków, to warto rozpocząć od próby dopasowania danych do modelu typu $\exp(f(x))$, gdzie f jest odpowiednio dobraną funkcją, np. wielomianem niewysokiego stopnia (porównaj z zadaniem **L10.6**). 3. Osoby zainteresowane *matematyką koronawirusa* powinny odwiedzić m.in. **stronę PTM**.

(–) Paweł Woźny

¹Patrz **SKOS**.

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 12

22 grudnia 2020 r.

Zajęcia 19 stycznia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L12.1.** 1 punkt Jak już wiadomo, język programowania `PW0++` ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(f)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-2}^2 f(x)dx$, gdzie $f \in C[-2, 2]$. W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x) dx \quad (a < b; g \in C[a, b])?$$

- L12.2.** 2 punkty Udowodnij, że kwadratura postaci

$$(1) \quad Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).$$

ma rząd $\geq n + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

- L12.3.** 1 punkt Udowodnij, że rząd kwadratury postaci (1) nie przekracza $2n + 2$.

- L12.4.** 2 punkty Załóżmy, że dane są: funkcja ciągła f , liczby $a < b$ oraz parami różne węzły x_0, x_1, \dots, x_n . Niech $Q_n(f)$ będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami x_0, x_1, \dots, x_n przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx.$$

Jak wiadomo, współczynniki A_k ($0 \leq k \leq n$) kwadratury Q_n ,

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int_a^b \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Podaj **efektywny algorytm** obliczania wartości współczynników A_0, A_1, \dots, A_n i określ jego złożoność.

- L12.5.** 1 punkt Jak upraszcza się wzór interpolacyjny Lagrange'a dla węzłów równoodległych?

L12.6. 1 punkt Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$(2) \quad N_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(a + k \cdot h_n) \quad \left(h_n := \frac{b-a}{n} \right)$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

L12.7. 1 punkt Niech A_k ($k = 0, 1, \dots, n$) oznaczają współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa (2). Udowodnij, że $A_k/(b-a)$ ($0 \leq k \leq n$) są liczbami wymiernymi.

L12.8. 1 punkt Podaj **efektywny algorytm** wyznaczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania **L12.4–L12.6**) i określ jego złożoność.

L12.9. **Włącz komputer!** 1 punkt Oblicz $N_n(f)$ ($n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$) dla całki

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 3.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

(–) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 13

13 stycznia 2021 r.

Zajęcia 26 stycznia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L13.1. 1 punkt Wykaż, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x) dx$, gdy $n \rightarrow \infty$.

L13.2. 1 punkt O funkcji ciągłej f wiadomo, że $\max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < 2$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x) dx$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

L13.3. 1 punkt Jak należy dobrać n , aby stosując złożony wzór Simpsona S_n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_{-\pi/5}^{\pi/2} \cos(3x - \pi/3) dx$ z błędem względnym $\leq 10^{-8}$?

L13.4. 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2} [T_n(f) + M_n(f)] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \quad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

L13.5. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenie $T_{16,0}$ następujących całek:

a) $\int_{-1}^2 (2021x^5 - 2020x^4 + 2019x^2) dx$, b) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{1 + 25x^2}$, c) $\int_2^{3\pi} \frac{\sin(7x-2)}{x} dx$.

Skomentuj wyniki.

L13.6. 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I := \int_{-1}^4 f(x) dx$ (f – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału $[-1, 4]$ wystarczy wyznaczyć wartość funkcji f , aby obliczyć przybliżenie $T_{11,0}$ całki I ?

L13.7. 1 punkt Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x) dx$.

L13.8. 1 punkt Dobierz węzły x_0, x_1, x_2 oraz współczynniki A_0, A_1, A_2 kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość

$$\int_{-3}^2 f(x) dx = Q_2(f)$$

zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 5 .

L13.9. 2 punkty W języku PW0++ procedura `LegendreZeros(m)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe m -tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu w stopnia mniejszego od $2n + 2$ zachodzi

$$\int_{-4}^5 w(x) dx = Q_n(w),$$

gdzie $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.

L13.10. Dodatkowe zadanie programistyczne (do 2 lutego; do 6 punktów)¹

Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą okazać się złym wyborem, gdy stopień jest wysoki. Należy rozważyć kwadratury interpolacyjne dla całek postaci $\int_{-1}^1 f(x) dx$ z węzłami będącymi:

(a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

(b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$(1) \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

(c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla **wielu** różnego rodzaju funkcji f . Skomentuj wyniki.

Literatura

- [1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

(-) Paweł Woźny

¹Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 14

20 stycznia 2021 r.

Zajęcia 2 lutego 2021 r.
Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L14.1. 1 punkt Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt $\tilde{r} := A\tilde{x} - b$, $\hat{r} := A\hat{x} - b$ oraz wektory błędów $\tilde{e} := \tilde{x} - x$, $\hat{e} := \hat{x} - x$, gdzie x jest rozwiązaniem układu $Ax = b$. Który z wektorów \tilde{x} , \hat{x} jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

L14.2. 1 punkt Znajdź rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 5 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1} .

L14.3. 1 punkt Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ -1 & -3 & 0 & 11 \\ -2 & -10 & 5 & 25 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

L14.4. 1 punkt Udowodnij następujące twierdzenia:

- (a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).
- (b) Jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

L14.5. 1 punkt Zaproponuj algorytm odwracania nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej. Jaka jest jego złożoność?

L14.6. 1 punkt Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójkątnej, przy założeniu, że rozkład ten istnieje.

L14.7. 1 punkt Niech dana będzie macierz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ & a_2 & & & & \\ & & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1} & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Załóżmy, że istnieje rozkład LU macierzy A_n . Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania tego rozkładu. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

(-) *Paweł Woźny*

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 15

20 stycznia 2021 r.

- Lista ta zawiera **wybrane** zadania egzaminacyjne z ostatnich lat.
- Podanymi zadaniami **nie należy** nadmiernie sugerować się podczas przygotowań do egzaminu.^a

^aNie oznacza to jednak, że prawdopodobieństwo zdarzenia *kilka bardzo podobnych zadań pojawi się na egzaminie* jest zerowe.

- L15.1.** W języku programowania PWO++ funkcja $\cos(x)$ oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\cos(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując funkcję \cos , zaproponuj algorytm wyznaczający wartości funkcji cosinus z dużą dokładnością dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
- L15.2.** Jakie znaczenie z punktu widzenia analizy numerycznej ma pojęcie uwarunkowania zadania?
- L15.3.** Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli: **a)** $f(x) = \ln(x)$, **b)** $f(x) = (x - 1)^{10}$.
- L15.4.** Podaj definicję zadania źle uwarunkowanego, a następnie zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- L15.5.** Załóżmy, że liczby x_0, x_1, \dots, x_n są tego samego znaku. Uzasadnij, że zadanie obliczania ich sumy jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. Jakie znaczenie ma ten fakt w kontekście obliczeń numerycznych?
- L15.6.** Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x . Wartość funkcji $f(x) := e^{5x}$ obliczamy w punkcie $x \approx 0.8$. Jak duże utraty dwójkowych cyfr znaczących spodziewamy się, jeżeli x odbiega od 0.8 o jedną dwójkową cyfrę znaczącą?
- L15.7.** Wytlumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku. Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $(\sqrt{x^2 + 2} + x)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.
- L15.8.** Dla $x \approx 0$ obliczanie wartości wyrażenia $x^{-5}(\sin(3x) - 3x + 9x^3/2)$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku. Zakładając, że $|x| \leq \frac{1}{10}$, zaproponuj taki sposób obliczenia wartości tego wyrażenia, aby mieć pewność, że błąd bezwzględny nie przekracza 10^{-7} .
- L15.9.** Do rozwiązania zadania obliczeniowego \mathcal{A} użyto komputera i algorytmu numerycznie poprawnego. Czy można mieć pewność, że otrzymany w ten sposób wynik jest bliski rzeczywistego rozwiązania zadania \mathcal{A} ? Odpowiedź uzasadnij.
- L15.10.** Sprawdź czy następujący algorytm jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```

S:=x[0];

for i from 1 to 4
do
    S:=3*S+x[i]
od;

return(S)

```

L15.11. Niech dany będzie wielomian $w(x) := a_1x/3! - a_3x^3/5! + a_5x^5/7! - a_7x^7/9!$. Rozważmy następujący algorytm obliczania jego wartości w punkcie $x \in \mathbb{R}$:

```

w:=a[7]

for n from 3 downto 1
do
    w:=a[2*n-1]-x^2/(2*n+3)/(2*n+2)*w
od

return(w*x/2/3)

```

Przyjmując, że a_1, a_3, a_5, a_7 oraz x są liczbami maszynowymi, sprawdź czy algorytm ten jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L15.12. Opisz metodę bisekcji i podaj jej własności.

L15.13. Stosując metodę Newtona, zaproponuj sposób przybliżonego obliczania wartości $\sqrt[5]{a}$ ($a > 0$). Jak dobrać x_0 ? Jak powinien wyglądać warunek *stopu*?

L15.14. Niech α będzie pierwiastkiem pojedynczym funkcji f ($f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Udowodnij, że wówczas rząd zbieżności metody Newtona wynosi $p = 2$.

L15.15. Zaproponuj efektywny algorytm obliczania z dużą dokładnością wartości \sqrt{a} ($a > 0$) wykorzystując **jedynie** operacje arytmetyczne (+, −, ·, /).

L15.16. Sformułuj i podaj interpretację geometryczną metody siecznych. Jak w wypadku tej metody powinien wyglądać *warunek stopu*?

L15.17. Podaj efektywny algorytm wyznaczania wartości liczby naturalnej a , której cyframi dziesiętnymi (od najbardziej do najmniej znaczącej) są a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , gdzie $a_n \neq 0$.

L15.18. Sformułuj i uzasadnij uogólniony schemat Hornera obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Newtona.

L15.19. Sformułuj i uzasadnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa.

L15.20. Niech dany będzie wielomian $w_n \in \Pi_n$ postaci

$$w_n(x) := z_0(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n),$$

gdzie liczby rzeczywiste z_0, z_1, \dots, z_n są dane. Opracuj i uzasadnij **oszczędny** algorytm znajdowania postaci potęgowej wielomianu w_n . Określ złożoność zaproponowanej metody. Gdzie, w kontekście metod omówionych w ramach wykładu, algorytm taki może mieć zastosowania?

L15.21. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_4 \in \Pi_4$ dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_k & 1 & 2 & 10 & 29 & 106 \end{array}.$$

L15.22. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_k & 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}, \quad \text{b)} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline y_k & -4 & -30 & 0 & 2 & 2 \end{array}.$$

L15.23. Funkcję $f(x) = \cos(x/2)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1} . Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8} ?$$

L15.24. Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ w węzłach postaci

$$x_{nk} := \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right) + \frac{1}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-15} ?$$

L15.25. Niech dane będą: liczba naturalna n i parami różne liczby rzeczywiste a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Zaproponuj algorytm znajdowania takich liczb c_0, c_1, \dots, c_n , że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x^n = c_0 + c_1(x - a_0) + c_2(x - a_0)(x - a_1) + \dots + c_n(x - a_0)(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}).$$

Podaj jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

L15.26. (a) Podaj definicję naturalnej funkcji sklejałej trzeciego stopnia.

(b) Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_k & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_k & -1 & 2 & -3 \end{array}.$$

L15.27. Niech dane będą wektory $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ oraz $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (w skrócie: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). Jak pamiętamy, w języku PWO++ procedura `NSpline3(x, y, z)` wyznacza wektor $\mathbf{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \dots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f . Wywołując procedurę

NSpline3 tylko raz, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich **miejsz zerowych** funkcji f znajdujących się w przedziale $[x_0, x_{100}]$. W swoim rozwiązaniu możesz **użyć wielokrotnie** innej procedury języka PW0++, a mianowicie **Solve3(a, b, c, d)** znajdującej z dużą dokładnością wszystkie rzeczywiste miejsca zerowe wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$ albo informującej, że takich miejsc zerowych nie ma.

- L15.28.** Wstęp. Niech dane będą wektory liczb rzeczywistych $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ i $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). W języku PW0++ procedura **NSpline3(x, y, z)** wyznacza wektor $[s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)]$. **Zadanie.** Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f . Można więc przypuszczać, że

$$S_n := \int_{x_0}^{x_n} s_n(x) dx$$

jest bardzo dobrym przybliżeniem wartości całki $I := \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$. Stosując procedurę **NSpline3 tylko raz**, zaproponuj szkic **efektywnego algorytmu** wyznaczania wielkości S_n . Zadbaj więc m.in. o to, aby liczba współrzędnych wektora \mathbf{z} (czyli wartość $m + 1$) **była możliwie jak najmniejsza**.

- L15.29.** Dana jest *postać Béziera* wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) := \sum_{k=0}^n a_k B_k^n(t), \quad \text{gdzie} \quad B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Uzasadnij, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) \quad \text{dla} \quad a_k^{(1)} := \frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1} \quad (0 \leq k \leq n+1),$$

gdzie przyjęto $a_{-1} = a_{n+1} := 0$. Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

- L15.30.** Podaj definicję krzywej Béziera P stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że dla każdego $t \in [0, 1]$, $P(t)$ jest punktem na płaszczyźnie.
- L15.31.** Niech P będzie krzywą Béziera stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Ustalmy $t \in [0, 1]$. Zaproponuj algorytm wyznaczania $P(t)$ w czasie $O(n)$.
- L15.32.** Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n . W języku PW0++ procedura **BezierCoeffs(p, t)** wyznacza taki wektor $\mathbf{c} := [c_0, c_1, \dots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n . Współczynniki c_k ($0 \leq k \leq n$) nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p . Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \leq 50$.

W jaki sposób, używając procedury `BezierCoeffs` co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

- L15.33.** Pomiary (t_k, c_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k > 0$, $c_k > 1$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 2^{(At^2+2018)^{-1}}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A .

- L15.34.** Wyznacz funkcję postaci $y(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 + 1}$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array} \right.$$

przy założeniu, że $s_2 = 10$, $s_4 = -3$, gdzie $s_m := \sum_{k=0}^n \frac{x_k^m}{(x_k^2 + 1)^2}$ ($m = 2, 4$).

- L15.35.** (a) Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) := f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

- (b) Wykorzystując wynik otrzymany w punkcie (a), wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right.$$

- L15.36.** Niech P_0, P_1, \dots, P_N będą wielomianami ortogonalnymi względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k),$$

gdzie $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $a > 0$). Udowodnij, że jeśli α jest miejscem zerowym wielomianu P_k ($0 \leq k \leq N$), to także $-\alpha$ jest miejscem zerowym tego wielomianu.

- L15.37.** Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

- L15.38.** Znajdź wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do następujących danych:

$$\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5.5 & -5 & -3.2 & -1 & 1 & 3.2 & 5 & 5.5 \end{array} \right.$$

Uwaga. Rozwiązanie nie wymaga wielu obliczeń, ale jeśli tego nie zauważysz, też możesz zdobyć maksimum punktów.

L15.39. Podaj definicję rzędu kwadratury liniowej $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$. Udowodnij, że jeśli rząd kwadratury Q_n wynosi przynajmniej $n + 1$, to jest to kwadratura interpolacyjna.

L15.40. Jaki maksymalnie rząd może mieć kwadratura liniowa? Odpowiedź uzasadnij.

L15.41. Opisz ideę kwadratur złożonych. Wyprowadź złożony wzór Simpsona.

L15.42. Opisz metodę Romberga obliczania przybliżonej wartości całki $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

L15.43. Opisz kwadratury złożone. Jaką mają one przewagę nad kwadratarami Newtona-Cotesa? Czy są one związane z metodą Romberga? Jeśli tak, to w jaki sposób?

L15.44. Znajdź rozkład LU macierzy $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 9 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$. Następnie wykorzystaj

otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $b := [17, -33, 70, -112]^T$.

L15.45. Niech dana będzie macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Przypomnijmy, że *rzędem* macierzy nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Opracuj algorytm numerycznego wyznaczania rzędu macierzy A . Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.46. Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zaproponuj efektywny algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej A^{-1} i podaj jego złożoność.

L15.47. Niech dane będą macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, aby zachodziła równość $AX = B$. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.48. Opracuj metodę wyznaczania rozkładu LU macierzy $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & & & & c_1 \\ & a_2 & & & c_2 \\ & & a_3 & & c_3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Podaj jej złożoność.

L15.49. Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ma wszystkie minory główne różne od zera. Niech dane będą wektory $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Zaproponuj **oszczędny** algorytm wyznaczania wektorów $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, dla których $Ax_k = b_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Jak opracowaną metodę zastosować do znalezienia takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dla której $AX = B$, gdzie macierz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest dana?

Uwaga. W rozwiązaniu **nie wolno** wprost wyznaczać macierzy A^{-1} , bo – jak wiadomo – nie jest to bezpieczne z numerycznego punktu widzenia.

(–) Paweł Woźny