LISTA 11

ZAD 3. DIAGRAF, W KTÓRYM PARA RÓŻNYCH WIERZCHOŁKÓW JEST POŁĄCZONA DOKŁADNIE JEDNĄ KRAWĘDZIĄ SKIEROWANĄ, NAZYWAMY TURNIEJEM. POKAŻ, ŻE W KAŻDYM TURNIEJU ISTNIEJE WIERZCHOŁEK, Z KTÓREGO MOŻNA DOJŚĆ DO KAŻDEGO INNEGO WIERZCHOŁKA PO DRODZE O DŁUGOŚCI CO NAJWYŻEJ 2.

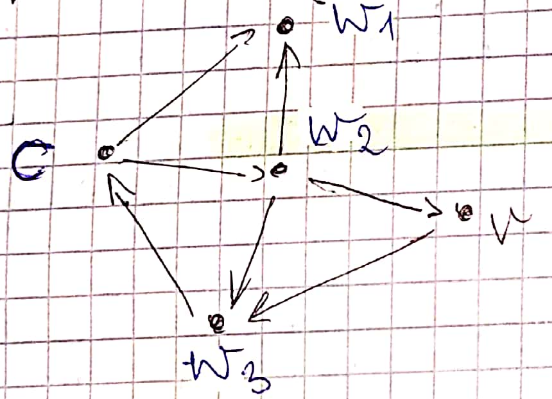
Mamy więc pokazać, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można do dowolnego innego wierzchołka dojść drogą o długości niewiększej od 2.

Przeprowadźmy dowód indukcyjny.

Dla grafu, który posiada jeden wierzchołek zachodzi.

Załóżmy, że zachodzi dla dowolnego turnieju o n wierzchołkach.

W kroku indukcyjnym rozważmy turniej o n+1 wierzchołkach. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem digrafu.



$A = \{w_1, w_2\}$

$B = \{w_3\}$

Niech A będzie zbiorem wierzchołków digrafu oprócz wierzchołka v. Na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że turniej o n wierzchołkach posiada wierzchołek (centrum), z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2, do których da się przejść bezpośrednio z centrum (c).
Niech B będzie zbiorem wierzchołków digrafu, do których nie ma krawędzi bezpośrednio z c.

Możliwe 2 scenariusze:

1° Istnieje krawędź z c do v.
Wtedy c jest centrum.

2° Istnieje krawędź z v do c.
Pokażmy, że w tym przypadku digraf

ma też centrum.

Jeżeli istnieje taki wierzchołek $c \in A$, oraz z c do v istnieje krawędź skierowana to c jest centrum.

Jeżeli nie to z v można przejść do każdego wierzchołka należącego do A. A z A można przejść do wierzchołka z B, czyli można przejść z v do B drogą o długości 2. Zatem v jest centrum. Zatem teza jest prawdziwa.

ZAD 4. PODAJ WARUNEK KONIECZNY NA TO, BY GRAF DWUDZIELNY BYŁ GRAFEM HAMILTONOWSKIM.

ZACZYNAJĄC OD DOWOLNEGO POLA, CZY MOŻNA OBEJŚĆ RUCHEM SKOCZKA (KONIKA) SZACHOWEGO WSZYSTKIE POLA SZACHOWNICY 5×5, KAŻDE DOKŁADNIE RAZ, I WRÓCIĆ DO PUNKTU POCZĄTKOWEGO? ODPOWIEDŹ UZASADNIJ

Graf Hamiltonowski - graf, który posiada ścieżkę Hamiltona, w szczególności grafem hamiltonowskim jest graf zawierający cykl Hamiltona.

WARUNKI KONIECZNE (aby graf dwudzielny był grafem Hamiltonowskim).
- zbiory, na które możemy podzielić graf G są równoliczne
- graf G musi być grafem spójnym.

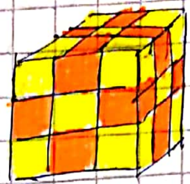
Szachownica o wymiarze 5×5 składa się z 13 pól o kolorze czarnym i 12 pól o kolorze białym. Wiadomo więc, że zbiory z których składa się graf dwudzielny (bo skoczek skacze raz na białe raz na czarne pole) nie są równoliczne.

Jeden z warunków koniecznych nie jest spełniony. Zatem graf ten nie jest grafem Hamiltonowskim. Czyli nie da się obejść wszystkich pól szachownicy konikiem i wrócić do punktu początkowego.

Scanned with CamScanner

ZAD 5. DANA JEST KOSTKA SERA 3x3x3. MYSZ ROZPOCZYNA JEDZENIE KOSTKI OD DOWOLNEGO ROGU. PO ZJEDZENIU JEDNEGO POLA PRZENOSI SIĘ DO KOLEJNEGO MAJĄCEGO WSPÓLNĄ ŚCIANĘ Z OSTATNIO ZJEDZONYM. CZY MOŻLIWE ABY MYSZ JAKO OSTATNIE ZJADŁA ŚRODKOWE POLE?

Przedstawmy ser jako sześcian, którego pola są pokolorowane na przemian dwoma kolorami.



Mysz jedząc ser zjada raz element jednego koloru, raz element drugiego koloru. Możliwe między dwoma kawałkami tego samego koloru nie jest więc możliwe.

Środkowy element, który chcemy, aby mysz zjadła jako ostatni jest pomarańczowego koloru.
Potraktujmy ser jak graf dwudzielny gdzie wierzchołki to kawałki sera, a krawędzie to ściany wspólne między kawałkami sera.
Wierzchołki tego grafu da się więc podzielić na dwa zbiory:
- A – żółte kawałki sera (14 sztuk)
- B – pomarańczowe kawałki sera (13 szt)

Mysz rozpoczyna jedzenie sera od rogu, czyli od elementu o kolorze żółtym. Niemożliwe jest więc zakończenie ścieżki w wierzchołku ze zbioru B. (wierzchołków ze zbioru A jest więcej).

ZAD 6. POKAŻ, ŻE KAŻDY TURNIEJ ZAWIERA (SKIEROWANĄ) ŚCIEŻKĘ HAMILTONA TZN. PRZECHODZĄCĄ WSZYSTKIE WIERZCHOŁKI.

DOWÓD INDUKCYJNY:
TEZA: Każdy turniej o n-wierzchołkach zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona.

PODSTAWA INDUKCJI: Dla $n=1$ teza zachodzi.

KROK INDUKCYJNY: Załóżmy, że T o n wierzchołkach (gdzie $n \in N$) teza zachodzi.

Scanned with CamScanner

Pokażemy, że dla turnieju $T \cup \{v\}$ o $n+1$ wierzchołkach teza również zachodzi.

Z założenia T zawiera ścieżkę Hamiltona.

Przyjmijmy oznaczenia:

a – pierwszy wierzchołek w ścieżce

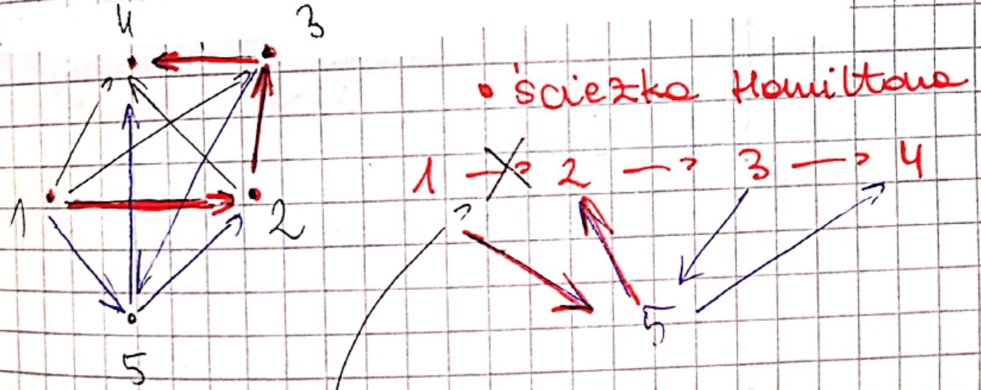
b – ostatni wierzchołek w ścieżce

Pokażmy, że w $T \cup \{v\}$ istnieje ścieżka Hamiltona.

1.) Istnieje krawędź z v do a. W takim przypadku v staje się nowym początkiem ścieżki.

2.) Istnieje krawędź z b do v. W takim przypadku v staje się nowym końcem ścieżki.

3.) W przeciwnym przypadku znajdujemy pierwszy wierzchołek w ścieżce, który posiada krawędź skierowaną do v, a następny wierzchołek ścieżki posiada graf skierowany z v do niego. W takim przypadku możemy rozszerzyć ścieżkę o v.



możemy skreślić i rozszerzyć ścieżkę o wierzchołek v.

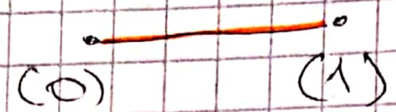
W każdym z trzech przypadków udało nam się rozszerzyć ścieżkę Hamiltona o kolejny wierzchołek. Na mocy tw. o ind. teza jest więc spełniona.

Każdy turniej zawiera ścieżkę Hamiltona.

ZAD 7. CZY N-WYMIAROWA KOSTKA ZAWIERA ŚCIEŻKĘ HAMILTONA?

TEZA: n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona

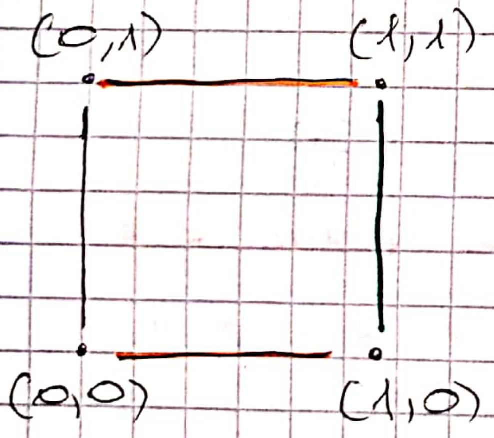
PODSTAWA INDUKCYJNA: Dla $n=1$ teza zachodzi.



KROK INDUKCYJNY:
Załóżmy, że n-wymiarowa kostka (gdzie $n \in \mathbb{N}$) zawiera ścieżkę.
Pokażmy, że dla n+1-wymiarowej kostki teza zachodzi.

Zauważmy, że n+1 wymiarową kostkę możemy utworzyć po przez złączenie dwóch n-wymiarowych kostek.
Każdy wierzchołek oznaczmy przez ciąg 0 i 1 o długości n+1. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią gdy różnią się dokładnie jedną współrzędną.

Weźmy dwie n-wymiarowe kostki i ustalmy, że w n+1-wymiarowej przestrzeni współrzędne jednej kończą się 0, a drugiej 1.



Z założenia wiemy, że istnieje w nich ścieżka Hamiltona.
Połączmy końce ich ścieżek krawędzią.
W ten sposób otrzymujemy ścieżkę Hamiltona.

Na mocy tw. o ind. teza jest prawdziwa dla n wymiarowej kostki.