LISTA 7 ZAD 11

Niech $M_1, M_2 \ldots M_k$ będą macierzami stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot M_i$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

PRZYKŁADOWA MACIERZ STOCHASTYCZNA DODATNIA

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$+$

$1 \rightarrow$ SUMA ELEMENTÓW W KAŻDEJ KOLUMNIE WYNOSI 1.

Wiemy, że macierze $M_1, M_2 \dots M_k$ są macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz, że $\sum_i \alpha_i = 1$ (gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi).

Pokażmy że macierz $A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot M_i$ jest macierzą kolumnowo stochastyczną dodatnią

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot M_{1_{11}} + \alpha_2 M_{2_{11}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{11}} & \cdots & \alpha_1 \cdot M_{1_{1n}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{1n}} \\ \alpha_1 \cdot M_{1_{21}} + \alpha_2 M_{2_{21}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{21}} & \cdots & \alpha_1 M_{1_{2n}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{2n}} \\ \alpha_1 \cdot M_{1_{31}} + \alpha_2 M_{2_{31}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{31}} & \cdots & \alpha_1 M_{1_{3n}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{3n}} \\ \vdots & & \\ \alpha_1 \cdot M_{1_{n1}} + \alpha_2 M_{2_{n1}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{n1}} & \cdots & \alpha_1 \cdot M_{1_{nn}} + \dots + \alpha_k \cdot M_{k_{nn}} \end{bmatrix}$$

Aby macierz A była macierzą kolumnowo stochastyczną, suma wartości elementów każdej z kolumn musi wynosić 1. Rozpiszmy więc kolumnę pierwszą:

$$\alpha_1 (M_{1_{11}} + M_{1_{21}} + \dots + M_{1_{n1}}) + \alpha_2 (M_{2_{11}} + M_{2_{21}} + \dots + M_{2_{n1}}) + \dots + \alpha_k (M_{k_{11}} + \dots + M_{k_{n1}}) =$$
$$= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \dots + \alpha_k \cdot 1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

Jest tak ponieważ sumy w nawiasach to sumy pierwszych kolumn odpowiednio $M_1, M_2 \dots M_k$. Wiemy, że są równe 1 gdyż $M_1, M_2 \dots M_k$ to macierze kolumnowo stochastyczne.

Analogicznie sprawa wygląda dla pozostałych kolumn macierzy A. Widzimy więc, że jest ona stochastyczna kolumnowo oraz dodatnia, gdyż $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$, które są nieujemne pomnożone przez 1 dalej są nieujemne.

LISTA 7 ZAD 2

Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

A) • $L((x,y,z)) = (2x-y, 0, y+z)$

B) • $L'((x,y,z)) = (0,0,y)$

C) • $L''(x,y,z) = (y+z, x+2z, 0)$

WSKAZÓWKA: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

A) Otrzymujemy macierz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aby wyliczyć wartości własne, obliczę macierz A_λ, a następnie jej wyznacznik.

$A_\lambda = A - \lambda J_3$

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + \frac{1}{\lambda} w_2} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(A_\lambda) = (2-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$

$\det(A_\lambda) = 0 \iff -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0,1,2\}$

Wartości własne to: $\{0,1,2\}$

• Dla $\lambda = 0$ mamy

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Otrzymujemy równanie

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \to y = -z$

$z = t$

$y = -t$

$x = -\frac{1}{2}t$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} \to$ wektor własny $t \neq 0$

• Dla $\lambda = 1$, mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$x = 0$

$y = 0$

$z = t$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ wektor własny dla $t \neq 0$

• Dla $\lambda = 2$, mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} -y = 0 \\ -2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$x = t$

$y = 0$

$z = 0$

$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ wektor własny dla $t \neq 0$

B) $L'(x,y,z) = (0,0,y)$

Otrzymujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby znaleźć wektor własny:

$B_\lambda = B - \lambda I_3$

$$B_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(B_\lambda) = -\lambda^3$ $\qquad \lambda \in \{0\}$ wartość własna

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0 \lor \beta = 0$
$\lor \ \alpha, \beta \neq 0$

wektor własny

C) $L''(x,y,z) = (y+z, x+2z, 0)$

Otrzymujemy macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

Obliczamy $C_\lambda = C - I_3\lambda$ oraz $\det(C_\lambda)$

$$C_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(C_\lambda) = -\lambda^3 + \lambda = \lambda - \lambda^3 = \lambda(1-\lambda^2)$

$\det(C_\lambda) = 0 \iff \lambda(1-\lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$

$\lambda \in \{-1, 0, 1\}$

Dla $\lambda = -1$ mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = t \\ y = -t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} \ t \neq 0$$

Dla $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{cases} y = -z \\ x = -2z \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \text{ gdzie } t \neq 0$$

Dla $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \rightarrow x = y \qquad \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \quad t \neq 0$$

LISTA 7 ZAD 3

Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartości własną macierzy M^2, to M ma wartość własną λ lub $-\lambda$.

WSKAZÓWKA: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Wiemy, że λ^2 jest wartością własną M^2, wtedy:

$$M^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$$

$$M^2\vec{v} - \lambda^2\vec{v} = 0$$

Przekształćmy to równanie w następujący sposób:

$$M^2\vec{v} - \lambda^2 v^2 =$$

$$= M^2\vec{v} - \lambda^2 Id^2\vec{v} = (M^2 - \lambda^2 Id^2)\vec{v} = (M - \lambda Id)(M + \lambda Id)\vec{v} =$$

$$= (M - \lambda Id)((M - \lambda Id)\vec{v}) = 0$$

Jeżeli $(M + \lambda Id)\vec{v} = 0$ to $-\lambda$ jest wartością własną macierzy M (bo $M\vec{v} = -\lambda\vec{v}$)

W przeciwnym przypadku:

Niech $\vec{w} = (M + \lambda Id)\vec{v}$. Wtedy $(M - \lambda Id)\vec{w} = 0$, czyli λ jest własnością macierzy M (bo $M\vec{w} = \lambda\vec{w}$).

LISTA 7 ZAD 4

Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same

Z lematu 8.10 wiemy, że wartości własne muszą być pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy. Jeśli macierze M oraz M^T będą mieć ten sam wielomian charakterystyczny, to będą również mieć te same wartości własne.

Zatem należy udowodnić równość:

$$\varphi_M(\lambda) = \varphi_{M^T}(\lambda)$$

Dowód: Z definicji 8.9

$$\varphi_{M^T}(\lambda) = \det(M^T - \lambda Id)$$

$$\varphi_M(\lambda) = \det(M - \lambda Id)$$

Ponieważ $Id = Id^T$

$$\varphi_{M^T}(\lambda) = \det(M^T - \lambda Id^T)$$

Z lematu 4.9. $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$\varphi_{M^T}(\lambda) = \det((M-\lambda Id)^T)$$

Z faktu 6.9 $\det(A) = \det(A^T)$

$$\varphi_{M^T}(\lambda) = \det(M - \lambda Id)$$

$$\varphi_M(\lambda) = \varphi_{M^T}(\lambda)$$

- Krotności algebraiczne macierzy są takie same.

DOWÓD: Skoro wielomiany charakterystyczne obu macierzy są identyczne, to ich pierwiastki mają te same krotności. Z tego wynika, że krotności algebraiczne M i M^T dla ustalonej wartości własnej są równe.

- Krotności geometryczne macierzy są takie same

DOWÓD: Z Tw. 3.10 oraz def. 3.11

$(rk(V) = \dim(Im(V))$ możemy wyznaczyć:

$$\dim(\ker(A)) + rk(A) = \dim(V)$$

gdzie A jest macierzą przekształcenia liniowego V

Z faktu 8.16 krotność geometryczna to $\dim(\ker(A - \lambda Id))$

dla macierzy M mamy:

$$\dim(\ker(M - \lambda Id)) = \dim(V) - rk(M - \lambda Id)$$

dla macierzy M^T mamy:

$$\dim(\ker(M^T - \lambda Id)) = \dim(V) - rk(M^T - \lambda Id)$$

przekształcając jak w pierwszej części dowodu otrzymujemy:

$$rk(M^T - \lambda Id) = rk((M - \lambda Id)^T)$$

z Tw. 4.22 $rk(A) = rk(A^T)$

$$\dim(\ker(M^T - \lambda Id)) = \dim(V) - rk(M - \lambda Id)$$

$$\dim(\ker(M - \lambda Id)) = \dim(\ker(M^T - \lambda Id))$$

LISTA 7 ZAD 5

Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy. Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

A) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix} = A \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$

Liczymy wyznacznik metodą Sarrusa i otrzymujemy:

$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

więc wartościami własnymi są $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$K_a(\lambda_1) = 2 \qquad K_a(\lambda_2) = 1$

Dla $\lambda = 1$ mamy:

$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{bmatrix} X = 0$

?

$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$? $\begin{cases} -x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$x_1 + x_3 = 2x_2$

$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} = 0$ np. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Czyli wektorów własnych dla wartości $\lambda = 1$ jest nieskończenie wiele $K_g(\lambda_1) = 1$

Dla $\lambda = -1$

$\begin{bmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Tak samo jak dla $\lambda = 1$ mamy nieskończenie wiele

np. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad K_g(\lambda_2) = 1$

Scanned with CamScanner

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Liczymy wyznacznik regułą Sarrusa i otrzymujemy:

$\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$

A więc mamy jedną wartość własną: $\lambda_1 = -1$

$k_a(\lambda_1) = 3$

Dla $\lambda = -1$ mamy:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -1x_1 - 1x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -x_3$

$-3x_3 - x_2 + 2x_3 = 0$

$-x_3 = x_2$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Czyli wektorów własnych dla wartości $\lambda = -1$ jest nieskończenie wiele

np. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad k_g(\lambda_1) = 1$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A-\lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

Liczymy wyznacznik i otrzymujemy:

$\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3$

A więc mamy jedną wartość własną $\lambda_1 = 2$

$k_a(\lambda_1) = 3$

Dla $\lambda = 2$ mamy:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \rightarrow x_2 = 2x_1$$

Można zauważyć, że to równanie rozwiąże każdy wektor postaci:

$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ np. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad k_g(\lambda_1) = 2$

LISTA 7 ZAD 7

Niech $A: V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

Z notatek wiemy, że $\ker A$ i $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami liniowymi zawierającymi się też w V, więc $\ker A$ i $\operatorname{Im} A$ są podprzestrzeniami V. Wystarczy udowodnić, że:

a) $A(\ker A) \subseteq \ker A$

Z def. $\ker A$ $A(\ker A)$ to po prostu wektor zerowy 0 z definicji przekształcenia liniowego wynika, że wektor zerowy znajduje się w $\ker A$ (było na poprzednich listach).

b) $A(\operatorname{Im} A) \subseteq \operatorname{Im} A$

$A(V) = \operatorname{Im} A$

$(A(V) \subseteq \operatorname{Im} A) \wedge (\operatorname{Im} A \subseteq V) \Rightarrow A(\operatorname{Im} A) \subseteq \operatorname{Im} A$

Z tego wynika, że $\ker A$ i $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

LISTA 7 ZAD 8

Klatka Jordana wymiaru $n \times n$ to macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Pokaż, że ma ona dokładnie 1 wartość λ o krotności algebraicznej n oraz krotności geometrycznej 1.

Na początku ustalimy wielomian charakterystyczny, czyli $\det(A - x\,\mathrm{Id})$

$$A - x\,\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} \lambda - x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - x \end{bmatrix}$$

Jest to macierz górnotrójkątna, więc

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}) = (\lambda - x)^n$$

Ten wielomian ma jak widać tylko jeden pierwiastek czyli macierz ma dokładnie jedną wartość własną.
Widzimy też, że krotność pierwiastka w tym wielomianie wynosi n, dlatego krotność algebraiczna jest równa n.
Krotność geometryczną otrzymamy natomiast znajdując wymiar $\ker(A-\lambda Id)$

$$A-\lambda Id=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że wszystkie i-te kolumny oprócz pierwszej mają 1 na $i-1$ wierszu, czyli są liniowo niezależne. Pierwsza natomiast składa się z samych zer, dlatego wymiar $\ker(A-\lambda Id)$ wynosi 1, stąd krotność geometryczna jest równa 1.

LISTA 7 ZAD 10
Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich) jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Weźmy dwie dowolne macierze kolumnowo stochastyczne (dodatnie) $A_{n\times n}$ oraz $B_{n\times n}$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Z def. macierzy stochastycznej kolumnowej wiemy, że
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1, \text{ dla } j=1,\dots,n \text{ oraz}$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}=1, \text{ dla } j=1,\dots,n.$$

Niech macierz $C=AB$, wtedy będzie postaci $(c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ gdzie $c_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$

Zauważmy, że sumę współrzędnych każdej kolumny możemy zapisać jako:

Scanned with CamScanner

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}\right) = \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{il} b_{lj}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} b_{lj}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{il}\right) = \sum_{l=1}^{m} b_{lj}\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1$$

Każda kolumna C sumuje się do 1, więc jest macierzą kolumnowo stochastyczną.

Jeśli A i B mają wszystkie współczynniki dodatnie, to z ich iloczynu nie otrzymamy wartości ujemnych, zatem macierz C ma wszystkie współczynniki dodatnie.

Zatem macierz C, czyli iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych dodatnich jest również macierzą kolumnowo stochastyczną dodatnią.