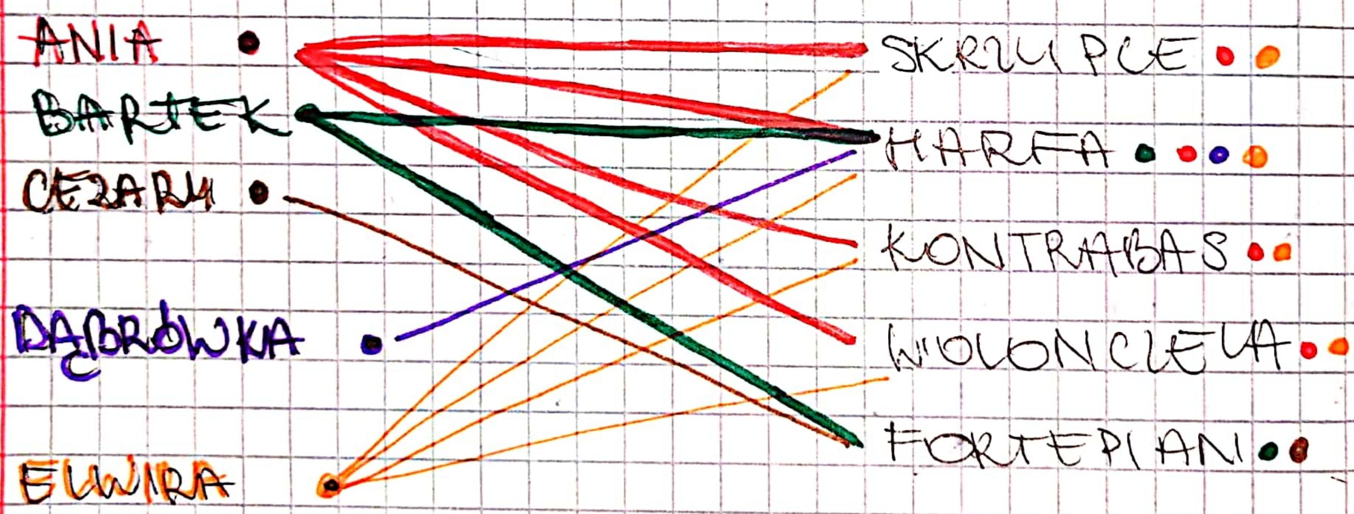
LISTA 10

ZAD. 10 W PEWNEJ GRUPIE MUZYKUJĄCYCH OSÓB ANIA GRA NA SKRZYPCACH, HARFIE, KONTRABASIE I WIOLONCZELI, BARTEK GRA NA HARFIE I FORTEPIANIE, CEZARY GRA NA FORTEPIANIE, DĄBRÓWKA GRA NA HARFIE I ELWIRA GRA NA KONTRABASIE, SKRZYPCACH, WIOLONCZELI I HARFIE



CHCIELIBY ZAGRAĆ UTWÓR NA FORTEPIANIE, SKRZYPCACH, WIOLONCZELĘ, KONTRABAS, HARFĘ. CZY UDA IM SIĘ DOBRAĆ SKŁAD?

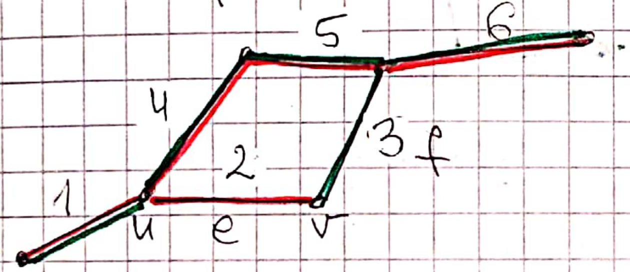
Cezary umie grać tylko fortepianie.
Dąbrówka umie grać tylko na harfie.

Bartek może grać tylko na harfie i fortepianie.

W takim razie 3 osoby potrafimy przyporządkować do 2 instrumentów. Zatem do pozostałych 3 instrumentów zostają dwie osoby. Nawet jeśli potrafią (razem) grać na tych 3 instrumentach to jedna osoba nie może grać jednocześnie na dwóch.

ZAD. 1 PRZYPUŚĆMY, ŻE W GRAFIE G WSZYSTKIE WAGI KRAWĘDZI SĄ RÓŻNE. POKAŻ NIE UŻYWAJĄC ŻADNEGO ALGORYTMU, ŻE G ZAWIERA TYLKO JEDNO MINIMALNE DRZEWO ROZPINAJĄCE.

Minimalne drzewo rozpinające (MST) grafu G to drzewo rozpinające G o minimalnej wadze.



Załóżmy niewprost, że istnieją dwa różne drzewa rozpinające A i B.

Niech e będzie najlżejszą krawędzią, która zawiera się w drzewie A, i nie zawiera się w drzewie B.

Wierzchołki, które są połączone krawędzią e oznaczamy jako u i v.

Jeżeli w B nie ma krawędzi e łączącej u i v to znaczy, że istnieje między nimi ścieżka.

Jeśli krawędź e dodamy do MST B to powstanie cykl. Cykl ten nie istnieje również w MST A.

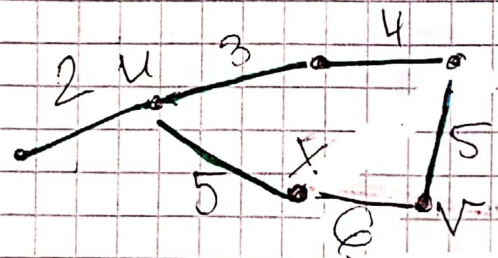
Oznacza to, że w drzewie B istnieje krawędź $f \in B$, ale $f \notin A$.

Wiemy że waga krawędzi e jest mniejsza od wagi krawędzi f

Jeśli więc w MST B krawędź f zastąpimy krawędzią e to otrzymamy mniejsze drzewo.

W grafie o różnych krawędziach istnieje tylko jedno MST.

ZAD. 9(-) UDOWODNIJ LUB OBAL: JEŚLI T JEST MINIMALNYM DRZEWEM SPINAJĄCYM GRAFU G, TO ŚCIEŻKA ŁĄCZĄCA WIERZCHOŁKI u i v W DRZEWIE T JEST MINIMALNĄ WAGOWO ŚCIEŻKĄ MIĘDZY u i v W GRAFIE G



widzimy że najmniejsza wagowo ścieżka z u do v to ścieżka przechodząca przez wierzchołek x

ZAD 4. UDOWODNIJ, ŻE ALGORYTM PRIMA ZNAJDOWANIA MST DZIAŁA POPRAWNIE

ALGORYTM PRIMA - ALGORYTM WYZNACZAJĄCY MST (MINIMALNE DRZEWO ROZPINAJĄCE

Wybieramy w grafie dowolny wierzchołek startowy.

Dopóki drzewo nie pokrywa całego grafu, znajdujemy krawędź o najniższej wadze spośród wszystkich krawędzi prowadzących od wybranych już wierzchołków do wierzchołków jeszcze niewybranych. Znalezioną krawędź dodajemy do drzewa rozpinającego.

TO MUSIMY UDOWODNIĆ ŻE JEST MINIMALNE

Niech T będzie drzewem rozpinającym na G, który został wygenerowany przez algorytm prima.

Niech T' będzie drzewem opinającym na

G, które jest minimalne.

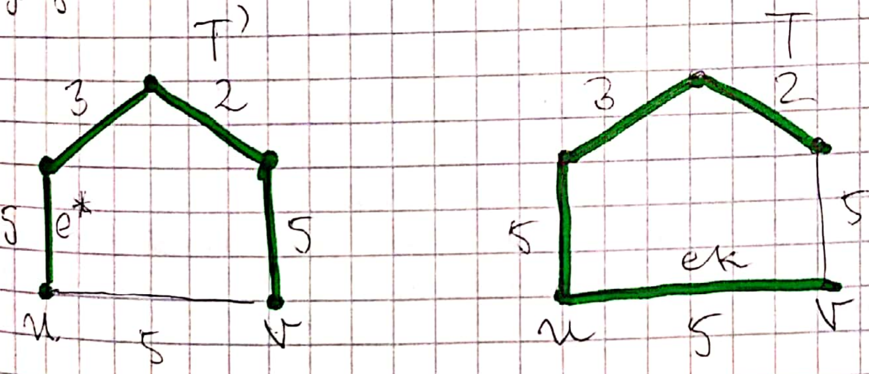
Jeśli $T=T'$ to T jest minimalne.

Jeśli $T\neq T'$ to niech $e_k=(u,v)$ będzie pierwszą krawędzią wybraną przez algorytm Prima, której nie ma w T' wybraną w k-tej iteracji algorytmu Prima.

Niech P będzie ścieżką od u do v w T' (ma bo jak w T' nie ma krawędzi z u do v to musi istnieć ścieżka) i niech e^* będzie krawędzią w P, taką, że jeden wierzchołek jest w drzewie wygenerowanym w $k-1$ iteracji algorytmu Prima, a drugi nie (czyli jeden wierzchołek e^* to u lub v (ale nie oba u i v)).

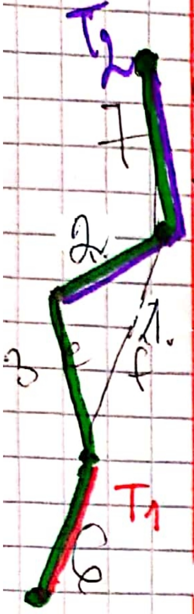
Jeśli waga e^* jest mniejsza niż waga e_k, to algorytm Prima wybrałby ją w swojej k-tej iteracji więc wtedy $c(e_k) \leq c(e^*)$ w szczególności gdy $c(e_k) = c(e^*)$ to nie ma znaczenia, którą krawędź wybierzemy. Niezależnie od tego czy waga e^* jest większa czy równa możemy e^* zastąpić e_k zachowując minimalną wagę całkowitą T'.

Ten proces można powtarzać, aż do momentu gdy $T=T'$



ZAD 2 NIECH T BĘDZIE MST GRAFU G. POKAŻ, ŻE DLA DOWOLNEGO CYKLU C GRAFU G DRZEWO T NIE ZAWIERA JAKIEJŚ NAJCIĘŻSZEJ KRAWĘDZI Z C.

Przeprowadźmy dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje cykl C grafu G, że drzewo T zawiera wszystkie najcięższe krawędzie z C.



Niech e będzie krawędzią o największej wadze na cyklu C oraz niech e należy do T. Jeśli usuniemy krawędź e, to dostaniemy dwa poddrzewa T_1 oraz T_2. Ponieważ C jest cyklem, a T jest MST, to istnieje taka krawędź f łącząca T_1, T_2, że $f \in C$ i $f \notin T$. Skoro e jest największą krawędzią w C, to $c(f) \leq c(e)$ (bo cykl może mieć kilka największych krawędzi o tej samej wadze).

Jeśli $c(f) = c(e)$, to wtedy drzewo T zawiera e, a nie zawiera f, więc drzewo nie zawiera jakiejś największej krawędzi otrzymaliśmy sprzeczność

Jeśli $c(f) < c(e)$, to drzewo T^* powstałe po usunięciu krawędzi e i dodaniu krawędzi f ma mniejszą wagę niż T. Zatem otrzymaliśmy sprzeczność, bo T nie jest MST.

ZAD 5 ZAŁÓŻMY, ŻE WSZYSTKIE KRAWĘDZIE W GRAFIE MAJĄ RÓŻNE WAGI. UDOWODNIJ ŻE ALGORYTM BORUVKI, RZECZYWIŚCIE ZNAJDUJE DRZEWO ROZPINAJĄCE

ALGORYTM BORUVKI

Dla każdego wierzchołka należącego do grafu G wybieramy krawędź o najmniejszej wadze. Jeżeli po przeprowadzeniu tego kroku zostanie kilka spójnych składowych to powtarzamy na nich wyznaczanie dla każdego wierzchołka krawędzi o najmniejszej wadze i tak do momentu, aż w grafie nie powstanie jedna spójna składowa

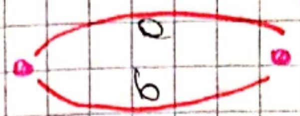
Pokażmy, że w żadnej iteracji nie powstanie cykl.

Załóżmy nie wprost, że gdzieś w jakiejś iteracji powstał cykl C.

Istnieją dwie okoliczności, w jakich mogą powstać taki cykl.

Scanned with CamScanner

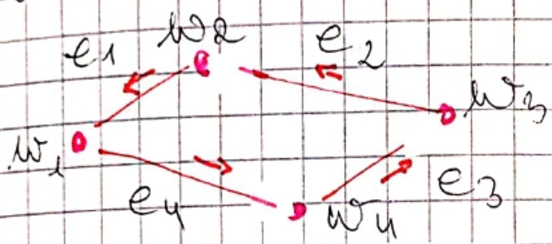
1) Cykl powstał przez połączenie dwóch wierzchołków różnymi krawędziami



$c(a) > c(b)$

Nie jest to jednak możliwe, ponieważ z polecenia zadania wiemy, że wszystkie krawędzie w grafie są różnej wagi. Jeżeli więc krawędź b jest mniejszej wagi niż krawędź a to oba wierzchołki wybiorą krawędź b.

2) Cykl powstał przez połączenie więcej niż dwóch wierzchołków.



Według algorytmu Borůvki:

Jeśli wierzchołek w_1 wybierze krawędź do w_4 to znaczy, że $c(e_4) < c(e_1)$

Jeśli wierzchołek w_2 wybierze krawędź do w_3 to znaczy, że $c(e_3) < c(e_4)$

Analogicznie (według rysunku)

$c(e_2) < c(e_3)$

i $c(e_1) < c(e_2)$;

Z tego wynika, że:

$c(e_1) < c(e_2) < c(e_3) < c(e_4) < c(e_1)$

sprzeczność

dla e_n gdzie $n = 1, \dots, m$

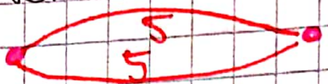
$c(e_1) < c(e_2) < c(e_3) < \dots < c(e_n) < c(e_1)$

$c(e_1) < c(e_1)$

SPRZECZNOŚĆ

W żadnej iteracji algorytmu Borůvki nie może więc powstać cykl.

ZAD. 6 JAK ZMODYFIKOWAĆ ALGORYTM BORUVKI, BY DZIAŁAŁ RÓWNIEŻ W GRAFACH W KTÓRYCH JAKIEŚ KRAWĘDZIE MAJĄ TAKIE SAME WAGI?



CYKL

Aby rozwiązać problem sytuacji, w której wierzchołek ma dwie lub więcej krawędzi, ale najmniejszą wagę z pośród nich posiada więcej niż jedna sztuka, w związku z czym może zajść cykl.
Aby tego uniknąć wprowadzimy numerację krawędzi przy czym numery nie mogą być takie same. W taki sposób w momencie gdy napotykamy na sytuację gdy mamy dwie lub więcej krawędzi o najniższej tej samej wadze to wybieramy krawędź o najmniejszej liczbie.

Udowodnijmy poprawność tego algorytmu. Załóżmy nie wprost, że po którejś iteracji pojawia się spójna składowa, która zawiera cykl.

*Dowód jak w zadaniu 5 ale rozszerzony

1) Jeśli a i b mają równe wagi to patrzymy na liczbę przyporządkowaną krawędzi i wybieramy krawędź o mniejszej liczbie. Sprzeczność

2)

$$c(e_1) < \underbrace{c(e_2) < c(e_3) < \ldots < c(e_1)}_{} \leq c(e_1)$$

Jeżeli zachodzi <

to sprzeczność

powiedz: wtedy dochodzimy do wniosku, że $c(e_1) < c(e_2)$

Jeżeli $c(e_1) \leq c(e_2) \leq c(e_3) \leq \ldots \leq c(e_1) \leq c(e_1)$

to zachodzi $c(e_1) \leq c(e_1)$ wtedy jeśli $c(e_1) < c(e_1)$ sprzeczność, a jeśli = to 1).

ZAD. 7 NIECH $G=(A\cup B,E)$ BĘDZIE GRAFEM DWUDZIELNYM, A M i N JEGO DWOMA SKOJARZENIAMI. POKAŻ, ŻE ISTNIEJE SKOJARZENIE M' TAKIE, ŻE KAŻDY WIERZCHOŁEK $a\in A$ SKOJARZONY W M JEST RÓWNIEŻ SKOJARZONY W M' ORAZ KAŻDY WIERZCHOŁEK $b\in B$ SKOJARZONY W N JEST RÓWNIEŻ SKOJARZONY W M'.

$G=(A\cup B,E)$, $M,N \to$ skojarzenia, pokazać, że $\exists M'$ $\forall a\in A$, a skojarzony w $M \Rightarrow$ skojarzony w M'

$\forall b\in B$, b skojarzony w $B \Rightarrow$ skojarzony w M'

Pokażę jak zbudować M':

X będzie zawierać krawędzie (a,b), $a\in A$, $b\in B$. Zacznijmy od usunięcia wszystkich podwójnych (a,b) tzn. $X = X \setminus M\cap N$. Ponieważ M i N są skojarzeniami to każde z nich może zawierać jedną parę z wierzchołków a, b. Zatem w X będą maksymalnie 2 pary gdzie powtarza się 1 współrzędna, bądź druga tzn. $(a_1,b)(a_2,b)$ lub $(a,b_1)(a,b_2)$. Jeśli istnieje w X krawędź, która ma wspólny wierzchołek z inną krawędzią, to jeśli wspólny wierzchołek z inną krawędzią, to jeśli wspólny wierzchołek to „a", to wybieramy krawędź z b skojarzonym w N. W przypadku gdy „b" jest wspólnym - wybieramy krawędź z a skojarzonym w M (druga krawędź usuwamy z X). W ten sposób $M' = Y + X$, będzie to szukane skojarzenie. Dowód, że tak skonstruowane M' jest odpowiednie:

- M' jest skojarzeniem - oczywiste usuwamy najpierw powtarzające się krawędzie, a potem jedną z tych które mają wspólny wierzchołek. Zatem żadna krawędź nie ma wspólnego końca.
- M' zawiera wszystkie a skojarzone w M - ze sposobu jak usuwamy krawędzie można zauważyć, że zawsze pozostanie jakaś krawędź z dowolnym a, które było skojarzone w M
- M' zawiera wszystkie „b" skojarzone w M analogicznie jak punkt wyżej.