LISTA 5 ZAD 5

CHCEMY DOPROWADZIĆ DO POSTACI SCHODKOWEJ (BO WTEDY ŁATWO SIĘ LICZY WYZNACZNIK), LUB WYZEROWAĆ WIERSZ (BO WTEDY Z LAPLACA WIEMY, ŻE WYZNACZNIK = 0).

A)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

B)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \\ \hline \vdots \\ v_n - v_1 \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$|B| = 1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$$

LISTA 5 ZAD 6

Oblicz wyznacznik:

A)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_4 - w_2 \\ w_2 - 3 \cdot w_1 \\ \longrightarrow \\ w_3 + w_1 \\ w_5 - w_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 & 20 \\ 0 & 12 & 0 & 13 & -13 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_5 - w_4 \\ w_4 - 1/2 \cdot w_3 \\ \longrightarrow \\ w_3 + 6/7 \cdot w_2 \end{matrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 & 20 \\ 0 & 0 & -6 & 55/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 0 & -33/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_5 - \frac{4}{11} w_3 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 & 20 \\ 0 & 0 & -6 & 55/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 0 & -33/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 118/11 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -14 \cdot (-6) \cdot \left(-33/4\right) \cdot 119/11 = -7497$$

B)

$$B = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_4 + w_3 \\ w_3 + 1/2 \cdot w_1 \\ w_2 - 3/4\, w_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 7/2 & -2 & -11/4 \\ 0 & 0 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_4 + \left(-\frac{8}{7}\right) w_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 7/2 & -2 & -11/4 \\ 0 & 0 & 3 & 3/2 \\ 0 & 0 & -5/7 & -6/7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} w_4 + \frac{5}{21} \cdot w_3 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 7/2 & -2 & -11/4 \\ 0 & 0 & 3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 4 \cdot \frac{7}{2} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -21$$

LISTA 5 ZAD 9

Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że też dzieli się przez 17 (bez obliczania wyznacznika)

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 144228 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 532270 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 257567 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 209270 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 289017 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 519792 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

Do piątej kolumny dodaję pierwszą kolumnę razy 10000, drugą razy 1000, trzecią razy 100 i czwartą razy 10. (bo dodanie wielokrotności kolumny do innej kolumny nie zmienia wartości wyznacznika.

$$\longrightarrow 17\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 17\cdot 8484 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 17\cdot 31310 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 17\cdot 15151 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 17\cdot 12310 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 17\cdot 17001 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 17\cdot 30576 \end{vmatrix} = M'$$

$$\det(M) = 17 \cdot \det(M')$$

Wszystkie elementy macierzy M' są całkowite, więc $\det(M')$ jest całkowite.

Dowód:

Rozwinięcie Laplace'a pozwala na przedstawienie $\det(M')$ jako sumy iloczynów elementów macierzy (liczb całkowitych) i minorów również składających się z liczb całkowitych. Każdy z minorów można analogicznie redukować, aż do uzyskania macierzy 2×2, której wyznacznik musi być liczbą całkowitą, bo wszystkie jej elementy nadal będą liczbami całkowitymi, zatem $\det(M')$ jest całkowite.

LISTA 5 ZAD 11

Oblicz wyznacznik

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_2 = w_2 - 0{,}1 w_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 20 & 300 & 4000 & 50000 \end{vmatrix}$$

$\xrightarrow{w_3 = w_3 - 0{,}1\cdot w_2}$ | $\xrightarrow{w_4 = w_4 - 0{,}1\cdot w_3}$ | $\xrightarrow{w_5 = w_5 - 0{,}1\cdot w_4}$ | $\xrightarrow{w_6 = w_6 - 0{,}1\cdot w_5}$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0 & 1 & 20 & 300 & 4000 & 50000 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & 600 & 10000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$|A| = 1$

$\det(A) = 1$

LISTA 5 ZAD. 10

Niech
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$$

Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego ile wynosi $\det(A)$.

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & a & b & c & d \\
 & & & & b & -a & d & -c \\
 & & & & c & -d & -a & b \\
 & & & & d & c & -b & -a \\
\hline
a & b & c & d & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\
b & -a & -d & c & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\
c & d & -a & -b & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\
d & -c & b & -a & 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2
\end{array}$$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej to iloczyn elementów na jej przekątnej.

$A \cdot A^T$ jest diagonalną macierzą więc jest trójkątna.
ZATEM:

$$\det(A \cdot A^T) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

- WYWNIOSKUJ ILE WYNOSI DET(A).

Fakt 1 $\det(A) = \det(A^T)$

TWIERDZENIE $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^4 = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2$$

$$(\det(A))^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow \det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

LISTA 5 ZAD 8

Rozważmy macierz A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times m$, B wymiaru $m \times n$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapisujemy jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja

$$M = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

Oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$.

Z faktu, że macierz A jest wymiaru $n \times n$, C jest wymiaru $m \times m$, B jest wymiaru $m \times n$, wiemy że M jest wymiaru $(n+m) \times (n+m)$.

Aby policzyć $\det(M)$ korzystamy z eliminacji Gaussa i doprowadzamy M do postaci dolnotrójkątnej. Musimy więc doprowadzić macierz A i C do postaci schodkowej (i jednocześnie dolnotrójkątnej). Możemy to zrobić, ponieważ każda macierz może zostać przekształcona do macierzy schodkowej za pomocą przekształceń elementarnych.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

Wtedy M będzie postaci:

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

M jest dolnotrójkątna, więc $\det(M)$ to iloczyn elementów na przekątnej. Macierz A i C też są dolnotrójkątne, więc $\det(A)$ i $\det(C)$ to odpowiednio iloczyny elementów na przekątnej A i C.

Zatem $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$

Scanned with CamScanner

LISTA 5 ZAD 2

Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

I) $L(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$

Nasza baza standardowa to

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{\mathbb{R}^3}$, bo operacje przeprowadzamy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

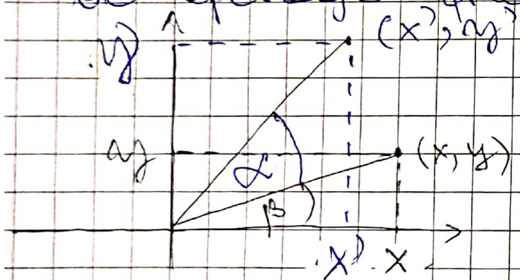
$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zatem nasza macierz to

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

II) Obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)

Nasza baza standardowa to $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{\mathbb{R}^2}$ bo operacje przeprowadzamy w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.



$$\frac{y}{r} = \sin\beta \rightarrow y = r \cdot \sin\beta$$

$$\frac{x}{r} = \cos\beta \rightarrow x = r \cdot \cos\beta$$

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta) = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta =$$
$$= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$

$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \beta) = r \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta =$$
$$= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

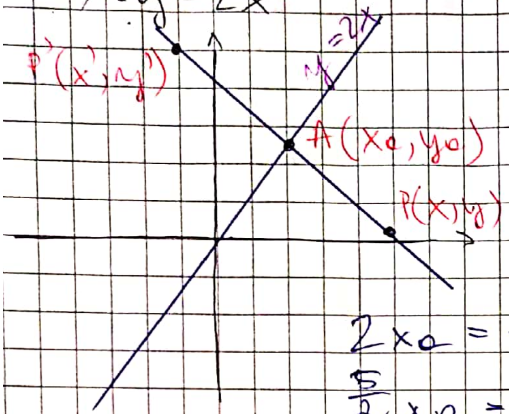
$L(x,y) \to (x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha,\ x\cdot\sin\alpha + y\cos\alpha)$

$L(1,0) \to (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$L(0,1) \to (-\sin\alpha, \cos\alpha)$

Zatem nasza macierz to $M_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}$

III) SYMETRIA $\mathbb{R}^2$ WZGLĘDEM PROSTEJ ZADANEJ $y = 2x$



$y = -\frac{1}{2}x + b$ ← prostopadła do $y = 2x$

więc $b = y + \frac{1}{2}x$

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 \\ y_0 = -\frac{1}{2}x_0 + y + \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$2x_0 = -\frac{1}{2}x_0 + y + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x_0 = y + \frac{1}{2}x \quad \Big|\cdot\frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}x \\ y_0 = \frac{4}{5}y + \frac{2}{5}x \end{cases}$$

$$\frac{x+x'}{2} = x_0 \to x' = 2x_0 - x$$
$$x' = 2\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}x\right) - x = \underline{\underline{\frac{4}{5}y - \frac{3}{5}x}}$$

$$\frac{y+y'}{2} = y_0 \to y' = 2y_0 - y$$
$$y' = 2\left(\frac{4}{5}y + \frac{2}{5}x\right) - y = \underline{\underline{\frac{3}{5}y + \frac{4}{5}x}}$$

Nasza baza standardowa to $\varepsilon = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$L(x,y) \to \left(\frac{4}{5}y - \frac{3}{5}x,\ \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}x\right)$

$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

Zatem nasza macierz to

$$M_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

LISTA 5 ZAD 4

Podaj macierze zmiany bazy pomiędzy każdą z par poniższych baz:

A • baza standardowa w $\mathbb{R}^3$ $\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

B • $[1,1,-1]^T, [1,1,0]^T, [1,0,0]^T \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

C • $[1,1,-1]^T, [1,-1,1]^T, [-1,1,1]^T \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

1) Obliczamy macierz przejścia M_{AB} W tym celu wyrażamy wektory z A w bazie B

Macierz zmiany bazy = macierz przekształceń liniowych w zadanych bazach

|| ? TAK

Macierz przejścia = macierz odwzorowania identycznościowego w danych bazach

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ gdzie } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ gdzie } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ gdzie } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

czyli otrzymujemy macierz zmiany bazy

$$M_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

SPOSÓB II (ten sam ale inny zapis)

$$(1,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0)$$

$$(0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) + (-1)(1,0,0)$$

$$(0,0,1) = 1(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + 0(1,0,0)$$

$$M_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (-1) \\ 1 & (-1) & 0 \end{bmatrix}$$

2) M_{BC}

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ $\qquad C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

$(1,1,1) = 1(1,1,-1) + 1(1,-1,1) + 1(-1,1,1)$

$(1,1,0) = (1,1,-1) + (1,-1,1) + (-1,1,-1)$

$(1,0,0) = (1,1,-1) + (1,-1,1) + (-1,-1,1)$

$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = \alpha - \beta + \gamma \\ 1 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta + \gamma - 1$

$\begin{cases} 1 = \beta + \gamma - 1 + \beta - \gamma \\ 1 = \beta + \gamma - 1 - \beta + \gamma \\ \alpha = \beta + \gamma - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = \alpha - \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta + \gamma$

$\begin{cases} 1 = \beta + \gamma + \beta - \gamma \\ 1 = \beta + \gamma - \beta + \gamma \\ \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta + \gamma$

$\begin{cases} 1 = \beta + \gamma + \beta - \gamma \\ 0 = \beta + \gamma - \beta + \gamma \\ \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$

3) M_{AC}

$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,-1) + \frac{1}{2}(1,-1,1) + 0(-1,1,1)$

$(0,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,-1) + 0(1,-1,1) + \frac{1}{2}(-1,1,1)$

$(0,0,1) = 0(1,1,-1) + \frac{1}{2}(1,-1,1) + \frac{1}{2}(-1,1,1)$

1) $\begin{cases} 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta + \gamma$

$\begin{cases} 1 = \beta + \gamma + \beta - \gamma \\ 0 = \beta + \gamma - \beta + \gamma \\ \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$

$M_{AC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2) $\begin{cases} 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = \alpha - \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta + \gamma$

$\begin{cases} 0 = \beta + \gamma + \beta - \gamma \\ 1 = \beta + \gamma - \beta + \gamma \\ \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0 = \alpha + \beta - \gamma \rightarrow \gamma = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma \\ 1 = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} \gamma = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha - \beta + \alpha + \beta \\ 1 = -\alpha + \beta + \alpha + \beta \end{cases}$

$\begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$

4) M_{BA}

$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$(1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

A jest bazą standardową

$$M_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) M_{CA}

$(1,1,-1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + (-1)(0,0,1)$

$(1,-1,1) = 1(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + (1)(0,0,1)$

$(-1,1,1) = (-1)(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$$M_{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6) M_{CB}

$(1,1,-1) = (-1)(1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0)$

$(1,-1,1) = 1(1,1,1) + (-2)(1,1,0) + 2(1,0,0)$

$(-1,1,1) = 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + (-2)(1,0,0)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = \alpha \\ -1 = \alpha \end{cases}$$

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

LISTA 5 ZAD. 7

Na wykładzie podany był dowód rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny. Uogólnij ten dowód na dowolną kolumnę i wiersz t.j. pokaż, że dla dowolnego j zachodzi (to jest)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{i,j}) \det(A_{i,j})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij}) \det(A_{ij})$$

gdzie A_{ij} jest minorem powstałym przez wykreślenie z macierzy A jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny

WSKAZÓWKA: WYSTARCZY TRANSPOZYCJA I ZMIANA KOLUMNY

Wiemy, że $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ wykład?

A) POKAŻMY WZÓR DLA DOWOLNEJ KOLUMNY

$\det(A) = \det(A') \cdot (-1)$, gdzie A' to macierz A z zamienionymi miejscami kolumnami 1 oraz j

$\det(A) = (-1) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij}' \det(A'_{ij})$

ZAUWAŻMY, ŻE $\det(A'_{ij}) = (-1)^{j} \det(A_{ij})$ (ZAMIENIONYMI $j-2$ RAZY)

ZATEM
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ji})$$

b) DLA DOWOLNEGO WIERSZA

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det((A^T)_{ji})$$

ALE $(A^T)_{ji} = (A_{ij})^T$

ZATEM
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

INACZEJ

1) Weźmy dowolną kolumnę z macierzy A o indeksie j, $1 \le j \le n$. Niech B będzie macierzą A z przesuniętą kolumną j o $(j-1)$ kolumn w lewo, tzn.:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & \cdots \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & \cdots \end{bmatrix}$$

Każda zmiana kolumny zmienia znak wyznacznika (6.1 wyznacznik) zatem $\det(A) = (-1)^{j-1} \det(B)$.
Z udowodnionego na wykładzie rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny mamy (przy tezie 6.6):

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(B_{i1})$$

Zauważmy, że dla i, $1 \le i \le n$ $b_{i1} = a_{ij}$ oraz $\det(A_{ij}) = \det(B_{i1})$ (zarówno w A_{ij} jak i B_{i1} skreślamy tę samą kolumnę, a to co zostaje to ta sama macierz bez wiersza i), zatem możemy napisać:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(B_{i1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Ponieważ $\det(B) = \dfrac{\det(A)}{(-1)^{j-1}}$ to:

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

2. Niech A^T będzie transpozycją A. Z definicji macierzy transponowanej dla i, j $1 \leq i, j \leq n$ $a_{ij} = (a^T)_{ji}$ oraz A_{ij}. Zauważmy, że $(A_{ij})^T = (A^T)_{ji}$ (usunięcie wiersza i, kolumny j z macierzy A i przetransponowanie jej, to to samo co usunięcie wiersza j i kolumny i z transpozycji A) oraz $\det(A_{ij}) = \det((A_{ij})^T) = \det((A^T)_{ji})$ (Fakt. 1 listy 5). Z (1) wiemy, że:

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a^T)_{ji} \det((A^T)_{ji})$$

Ponieważ $a_{ij} = (a^T)_{ji}$, $\det(A_{ij}) = \det((A^T)_{ji})$ oraz $\det(A^T) = \det(A)$ mamy

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

LISTA 5 ZAD 3

Niech V będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopniu najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^0, x^1, x^2, x^3 oraz $x^0, x^0+x^1, x^0+x^1+x^2, x^0+x^1+x^2+x^3$. Udowodnij, że są one bazami.

Przetłumaczmy przestrzeń V na przestrzeń $\mathbb{R}^4$ w taki sposób, że dla danego wielomianu $w \in V$, $w = w_0x^0 + w_1x^1 + w_2x^2 + w_3x^3$ odpowiadający mu wektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ jest postaci (w_0, w_1, w_2, w_3)

Niech B to będzie układ wektorów x^0, x^1, x^2, x^3, czyli

$$b_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} ; \quad b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zauważmy, że jest to baza standardowa.

Niech C to będzie układ wektorów $x^0, x^0+x^1, x^0+x^1+x^2, x^0+x^1+x^2+x^3$, czyli

$$c_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} ; \quad c_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Układ C jest liniowo niezależny, bo jest w postaci schodkowej.

Pokażmy, że $LIN(C) = \mathbb{R}^4$

Weźmy dowolny wektor $\vec{v}(v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^4$.

Niech $a = v_0 - v_1 - v_2 - v_3$, $b = v_1 - v_2 - v_3$, $c = v_2 - v_3$, $d = v_3$. Wtedy:

$$\begin{pmatrix}v_0\\v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Czyli udało nam się przedstawić wektor $\vec{v}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów z C. Zatem z definicji 2.1. C jest bazą.

Zapisz macierz przejścia między bazami.

Niech M_{BC} i M_{CB} będą macierzami przejścia. Z faktu 5.7.

$$M_{BC} = \left[(b_0)_C \,|\, (b_1)_C \,|\, (b_2)_C \,|\, (b_3)_C\right]$$

$$M_{CB} = \left[(c_0)_B \,|\, (c_1)_B \,|\, (c_2)_B \,|\, (c_3)_B\right]$$

Ponieważ B jest bazą standardową to

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Policzmy teraz M_{BC}:

$$(b_0)_C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b_1)_C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b_2)_C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b_3)_C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozważmy przekształcenie $F: V \to V$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

Z def. 5.1:

$$M_{BB}(F) = \left[(F(b_0))_B \,|\, (F(b_1))_B \,|\, (F(b_2))_B \,|\, (F(b_3))_B\right]$$

$$M_{CC}(F) = \left[(F(c_0))_C \,|\, (F(c_1))_C \,|\, (F(c_2))_C \,|\, (F(c_3))_C\right]$$

Policzmy najpierw $M_{BB}(F)$

$$F(x^0) = (x^0)' + 2(x^0)'' + (x^0)''' = 0$$
$$F(x^1) = (x^1)' + 2(x^1)'' + (x^1)''' = 1$$
$$F(x^2) = (x^2)' + 2(x^2)'' + (x^2)''' = 2x+4$$
$$F(x^3) = (x^3)' + 2(x^3)'' + (x^3)''' = 3x^2+12x+6$$

$$(F(b_0))_B = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad (F(b_1))_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(F(b_2))_B = \left(\begin{pmatrix}4\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right)_B = 4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(F(b_3))_B = \left(\begin{pmatrix}6\\12\\3\\0\end{pmatrix}\right)_B = 6\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$M_{BB}(F) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 6\\0 & 0 & 2 & 12\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Policzmy teraz $M_{CC}(F)$. Z lematu 5.9 wiemy, że:

$$M_{CC}(F) = M_{BC}\, M_{BB}(F)\, M_{CB} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 6\\0 & 0 & 2 & 12\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & -6\\0 & 0 & 2 & 9\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & -3\\0 & 0 & 2 & 11\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Czyli:

$$M_{CC}(F) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & -3\\0 & 0 & 2 & 11\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$