LISTA 1 ZAD. 4

Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^m$ są podprzestrzeniami liniowymi:

MUSIMY POKAZAĆ, ŻE JEST ZAMKNIĘTE NA DODAWANIE I MNOŻENIE, BO A podprzestrzeń wektorowa $A \subset V$

$\forall u, v \in A \quad u+v \in A$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot v \in A$

A) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 5a + 2b = 0\}$

$5a = -2b$

$a = -2/5\, b$

$\mathcal{U} = \{(-2/5\, b, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$

+) weźmy dowolne $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$(-2/5\, b_1, b_1, c_1) + (-2/5\, b_2, b_2, c_2) =$

$= (-2/5(b_1+b_2), (b_1+b_2), (c_1+c_2)) \in \mathcal{U}$

*) weźmy dowolne $\alpha, b_3, c_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot (-2/5\, b_3, b_3, c_3) = (-2/5(\alpha b_3), (\alpha b_3), (\alpha c_3)) \in \mathcal{U}$

TAK

B) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - c = 0\}$

$c = 2a$

$\mathcal{U} = \{(a, b, 2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

+) weźmy dowolne $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$(a_1, b_1, 2a_1) + (a_2, b_2, 2a_2) =$

$= ((a_1+a_2), (b_1+b_2), 2(a_1+a_2)) \in \mathcal{U}$

*) weźmy dowolne $\alpha, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha(a_3, b_3, 2 \cdot a_3) = (\alpha \cdot a_3, \alpha \cdot b_3, 2 \cdot \alpha a_3) \in \mathcal{U}$ TAK

C) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 5a + 2b = 2a - c = 0\}$

$5a + 2b = 0 \to -5a = 2b \to b = -5/2\, a$

$2a - c = 0 \to c = 2a$

$\mathcal{U} = \{(a, -5/2\, a, 2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$

+) weźmy dowolne $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$(a_1, -5/2\, a_1, 2a_1) + (a_2, -5/2\, a_2, 2a_2) =$

$= (a_1 + a_2, -5/2(a_1 + a_2), 2(a_1 + a_2)) \in \mathcal{U}$

*) weźmy dowolne $\alpha, a_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha(a_3, -5/2\, a_3, 2a_3) = (\alpha \cdot a_3, -5/2 \cdot \alpha \cdot a_3, 2 \cdot \alpha \cdot a_3) \in \mathcal{U}$

TAK

D) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$

$a = b = 0$

$\mathcal{U} = \{(0,0)\}$ wektor zerowy to podprzestrzeń liniowa

E) = D)

TAK

Scanned with CamScanner

F) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |2a|+|b| = 1\} = \mathcal{U}$

Nie jest zamknięty na dodawanie, kontrprzykład

$$\begin{array}{r} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ + \ (0, 1) \\ \hline \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{array} \longrightarrow \left|2 \cdot \frac{1}{2}\right| + |1| = 2 \neq 1 \notin \mathcal{U}$$

NIE

G) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |2a| - |b| = 0\} = \mathcal{U}$

Nie jest zamknięty na dodawanie, kontrprzykład

$$\begin{array}{r} \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ + \ (1, -2) \\ \hline \left(\frac{3}{2}, -1\right) \end{array} \longrightarrow \left|2 \cdot \frac{3}{2}\right| - |-1| = 3 - 1 = 2 \neq 0 \notin \mathcal{U}$$

NIE

H) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |2a| - |b| = 1\} = \mathcal{U}$

Nie jest zamknięty na dodawanie, kontrprzykład

$$\begin{array}{r} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ + \ (2, 3) \\ \hline (5/2, 3) \end{array} \quad \left|2 \cdot 5/2\right| - |3| = 5 - 3 = 2 \neq 1 \notin \mathcal{U}$$

NIE

I) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid |ab| = 1\}$

Nie zawiera wektora $\vec{0}$ $(0,0)$ $|0 \cdot 0| = 0 \neq 1 \in \mathcal{U}$

Nie jest zamknięty na dodawanie, kontrprzykład

$$\begin{array}{r} \left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ + \left(\frac{1}{2}, -2\right) \\ \hline (1, 0) \end{array} \longrightarrow |1 \cdot 0| = 0 \neq 1 \notin \mathcal{U}$$

NIE

J) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab = a\}$ To znaczy, że $b = 1$

Nie jest zamknięty na dodawanie, kontrprzykład

$$\begin{array}{r} (1, 1) \\ + \ (0, 1) \\ \hline (1, 2) \end{array} \longrightarrow 1 \cdot 2 = 2 \neq 1 \in \mathcal{U}$$

NIE

A) $\{a(1, -5/2, 0) + c(0, 0, 1)$

LISTA 1 ZAD 8

Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów $v_1, v_2 \dots v_k$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe).

1) $w = (1,5)$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 + 2\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 = 5 \end{cases}\right\} \rightarrow w = 5 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2$$

2) $w = (5,10,11)$, $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,3,2)$, $v_3 = (1,1,1)$

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 2 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 10 \\ 3 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 - \alpha_3 \\ 2(5-\alpha_3) + 3 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 = 10 \\ 3(5-\alpha_3) + 2 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 - \alpha_3 \\ 10 - 2\alpha_3 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 10 \\ 15 - 3\alpha_3 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 - \alpha_3 \\ \alpha_3 = 3 \cdot \alpha_2 \\ -3(3 \cdot \alpha_2) + 2\alpha_2 + 3 \cdot \alpha_2 = -4 \rightarrow \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}\right\} \rightarrow w = 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3$$

3) $w = (5,10,11)$, $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,3,2)$, $v_3 = (1,8,7)$

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 2 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + 8 \cdot \alpha_3 = 10 \\ 3 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 7 \cdot \alpha_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 - \alpha_3 \\ 2(5-\alpha_3) + 3 \cdot \alpha_2 + 8 \cdot \alpha_3 = 10 \\ 3(5-\alpha_3) + 2 \cdot \alpha_2 + 7 \cdot \alpha_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 - \alpha_3 \\ 10 - 2\alpha_3 + 3 \cdot \alpha_2 + 8 \cdot \alpha_3 = 10 \\ 15 - 3\alpha_3 + 2 \cdot \alpha_2 + 7 \cdot \alpha_3 = 11 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 = 5 - \alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ 4\alpha_3 - 4\alpha_3 = -4 \end{cases}\right\} \rightarrow 0 = -4 \quad \text{sprzeczność}$$

4) $w = (4, 17, 18)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (3, 9, 11)$

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 3 \alpha_3 = 4 \\ 2 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + 9 \cdot \alpha_3 = 17 \\ 3 \cdot \alpha_1 + 2 \alpha_2 + 11 \cdot \alpha_3 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 - 3 \cdot \alpha_3 \\ 2(4 - 3 \cdot \alpha_3) + 3 \cdot \alpha_2 + 9 \cdot \alpha_3 = 17 \\ 3(4 - 3 \cdot \alpha_3) + 2 \cdot \alpha_2 + 11 \cdot \alpha_3 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 - 3 \alpha_3 \\ 8 - 6 \cdot \alpha_3 + 3 \alpha_2 + 9 \cdot \alpha_3 = 17 \\ 12 - 9 \cdot \alpha_3 + 2 \alpha_2 + 11 \cdot \alpha_3 = 18 \end{cases}$$

CO WIEMY?

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 = 4 - 3 \alpha_3 \\ 3\alpha_3 = 9 - 3\alpha_2 \rightarrow \alpha_3 = 3 - \alpha_2 \\ \underbrace{6 - 2\alpha_2 + 2\alpha_2 = 6}_{6 = 6} \end{cases}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 4 - 3 \cdot \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 3 \end{aligned}$$

np.

Nieskończenie wiele rozwiązań

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned}\right\} w = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

LISTA 1 ZAD 9 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ $LIN((1,2,1),(2,1,1))$

1)

0 i 0	$0 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (2,1,1) = (0,0,0)$	
0 i 1	$0 \cdot (1,2,1) + 1 \cdot (2,1,1) = (2,1,1)$	
0 i 2	$0 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (2,1,1) = (1,2,2)$	9 różnych wektorów
1 i 0	$1 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (2,1,1) = (1,2,1)$	
1 i 1	$1 \cdot (1,2,1) + 1 \cdot (2,1,1) = (0,0,2)$	
1 i 2	$1 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (2,1,1) = (2,1,0)$	
2 i 0	$2 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (2,1,1) = (2,1,2)$	
2 i 1	$2 \cdot (1,2,1) + 1 \cdot (2,1,1) = (1,2,0)$	
2 i 2	$2 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (2,1,1) = (0,0,1)$	

2) $LIN((1,2,1),(2,1,2))$ $\longmapsto$ $2 \cdot (1,2,1) = (2,1,2)$ liniowo zależne

0 i 0	$0 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (2,1,2) = (0,0,0)$	
0 i 1	$0 \cdot (1,2,1) + 1 \cdot (2,1,2) = (2,1,2)$	
0 i 2	$0 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (2,1,2) = (1,2,1)$	
1 i 0	$1 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (2,1,2) = (1,2,1)$	3 różne wektory
1 i 1	$1 \cdot (1,2,1) + 1 \cdot (2,1,2) = (0,0,0)$	
1 i 2	$1 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (2,1,2) = (2,1,2)$	
2 i 0	$2 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (2,1,2) = (2,1,2)$	
2 i 1	$2 \cdot (1,2,1) + 1 \cdot (2,1,2) = (1,2,1)$	
2 i 2	$2 \cdot (1,2,1) + 2 \cdot (2,1,2) = (0,0,0)$	

Gdy liniowo niezależne to 9 elementów, w przeciwnym przypadku 3 elementy.

DLACZEGO

Gdyby były liniowo niezależne to wymiar byłby dwa. Tyle samo elementów co $\mathbb{Z}_3^2$ czyli 3^2, czyli 9. Gdyby były liniowo zależne to by miał 3 elementy $(\mathbb{Z}_3^1) = 3$.

LISTA 1 ZAD 1

Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a \ldots (p-1)a$
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$

$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots p-1\}$ ← wszystkie możliwe reszty z dzielenia $\% p$

$a \in \{1, 2, \ldots p-1\}$

$a \cdot a^{-1} = 1$ ↦ liczba ze zbioru $\mathbb{Z}_p$ bez 0 pomnożona z liczbą ze zbioru $\mathbb{Z}_p$ bez 0 $\% p$ da nam 1

SCHEMAT:

to liczby złożone

1) $a \neq 0$ $\quad a, 2a, 3a \ldots (p-1)a$

2) • coś

$\boxed{} \% p \neq 0$ → nigdy nie będzie podzielne przez p, bo p to liczba pierwsza

⇕ z def.

$p \mid ab \rightarrow p \mid a$ lub $p \mid b$

POKAŻ, ŻE ELEM. W TYM CIĄGU SĄ NIE-ZEROWE

• POKAŻ, ŻE ELEMENTY W CIĄGU SĄ RÓŻNE (dowód niewprost)

Załóżmy, że są dwie liczby w ciągu równe sobie

$(n \cdot a) \% p = (m \cdot a) \% p$, gdzie $n \neq m$

$(n \cdot a) \equiv (m \cdot a) \pmod p$

$(n \cdot a) = (m \cdot a) + k \cdot p$ ↦ Jeżeli dwie liczby $n \cdot a$ i $m \cdot a$ są różne i dają taką samą resztę z mod p to znaczy, że różnią się wielokrotnością p w sobie

$n \cdot a - m \cdot a = k \cdot p$

$a(n - m) = kp$ } to jest podzielne przez p

to nie może być podzielne przez p

3) a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$

Tak, więc będzie co najmniej jedna taka liczba x, że $ax = 1$ (modulo p).

* Załóżmy nie wprost, że w ciągu istnieje element a_j taki, że $j \in \{1, 2, \dots p-1\}$ oraz $a_j = 0$ (modulo p). Oznaczałoby to, że $p | a_j$ co nie jest możliwe, ponieważ a_j nie jest wielokrotnością p, ze względu na fakt iż $a_j \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Doszliśmy do sprzeczności, zatem każdy z elementów jest niezerowy.

LISTA 1 ZAD 5

Pokaż, że następujące zbiory funkcji

A) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: zbiór $\{x : f(x) \neq 0\}$ jest przeliczalny$\}$ (N.O.) SĄ

B) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: f ma skończenie wiele wartości$\}$ SĄ

*C) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: f ma nieskończenie wiele wartości$\}$ NIE SĄ

są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

A) Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna (z tego wynika addytywność i jednorodność tego zbioru).

B) Zauważmy, że jak dodamy dwie funkcje które mają skończenie wiele wartości to ich suma też ma skończenie wiele wartości, analogicznie z pomnożeniem funkcji przez liczbę.

C) Jak weźmiemy $y = x$ i $y = -x$ to obie mają nieskończenie wiele wartości, ale jak je dodamy do siebie to mamy funkcję stałą równą 0 i ona ma skończenie wiele wartości (Nie jest zamknięta na dodawanie)

LISTA 1 ZAD 2

Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach $\mathbb{R}$. Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2 \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \dots)$$

$$\alpha(a_1, a_2 \dots) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots)$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie $\vec{0}$ to ciąg złożony z samych zer. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej, określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie.

A • zbiór ciągów $(a_1, a_2 \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $a_n = n a_{n-1} + n^2 a_{n-2}$

B • zbiór ciągów $(b_1, b_2 \dots)$ takich że dla każdego $n \geq 2$ mamy $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$

C • zbiór ciągów $(c_1, c_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$

D • zbiór ciągów $(d_1, d_2 \dots)$ takich, że skończenie wiele liczb spośród $d_1, d_2 \dots$ jest dodatnie.

A) Niech $M = \{(a_1, a_2 \dots) \mid \forall n \geq 3 \ a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}\}$

[Czy M jest podprzestrzenią liniową?

[Sprawdźmy zamknięcie na dodawanie i mnożenie.

+) Weźmy dowolne dwa wektory $(a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2 \dots) \in M$

Niech $(c_1, c_2 \dots) = (a_1, a_2 \dots) + (b_1, b_2 \dots)$

$$c_1 = a_1 + b_1$$
$$c_2 = a_2 + b_2$$

$$c_n = a_n + b_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2} + n \cdot b_{n-1} + n^2 \cdot b_{n-2} =$$
$$= n\underbrace{(a_{n-1} + b_{n-1})}_{c_{n-1}} + n^2 \underbrace{(a_{n-2} + b_{n-2})}_{c_{n-2}} =$$
$$= n \cdot c_{n-1} + n^2 \cdot c_{n-2} \in M$$

*) Weźmy $(a_1', a_2' \dots) \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Dla $n \geq 3$ mamy

$$a'_n = \alpha \cdot a_n = \alpha(n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}) =$$
$$= n \cdot \underbrace{\alpha \cdot a_{n-1}}_{a'_{n-1}} + n^2 \cdot \underbrace{\alpha a_{n-2}}_{a'_{n-2}} = n \cdot a'_{n-1} + n^2 \cdot a'_{n-2} \in M$$

B) $M = \{(b_1, b_2, \dots) \mid \forall n \geq 2 \ b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1\}$

Nie jest zamknięty na dodawanie.

$$\begin{array}{r} (1, 6, 25 \dots) \\ +(0, 3, 16 \dots) \\ \hline (1, 9, 41 \dots) \end{array}$$

$b_1 = 1$

$b_2 = 3 \cdot b_1 + 2^2 - 1 \Rightarrow 3 + 3 = 6 \neq 9$

C) $M = \{(c_1, c_2 \dots) \mid \forall n \geq 3 \ c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}\}$

$$\begin{array}{r} (1, 2, 2 \dots) \\ +(1, 3, 3 \dots) \\ \hline (2, 5, 5 \dots) \end{array}$$

$c_3 = 2 \cdot 5 = 10 \neq 5$

Nie jest zamknięty na dodawanie.

D) $M = \{(d_1, d_2, \dots) \mid$ skończenie wiele wyrazów jest dodatnie$\}$

– Najmniejszym zbiorem skończonym jest zbiór pusty.

Nie jest zamknięty na mnożenie, kontrprzykład:

$(-1, -1, -1 \dots)$ nieskończony ciąg "-1"

$(-1, -1, -1 \dots) \cdot (-1) = (1, 1, 1 \dots)$ nieskończony ciąg "1" czyli wyrazów dodatnich