LISTA 8 ZAD 1

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{v}$ zachodzi

$$\|A\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_1$$

ROZW. I

$$\sum_i |(Av)_i| = \sum_i \left|\sum_j a_{ij} v_j\right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij} v_j| = \sum_i \sum_j a_{ij} |v_j|$$

$$= \sum_j |v_j| \sum_i a_{ij} = \sum_j |v_j|$$

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{v}$ zachodzi

$$\|A \cdot \vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_1$$

DEF. 9.19 Normą l_1 $\|\cdot\|_1$ wektora $\vec{v} = [v_1 \dots v_n]^T$ to $\|\vec{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |v_i|$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Zatem

$$AV = \begin{bmatrix} v_1 \cdot a_{11} + v_2 \cdot a_{12} + \dots + v_n \cdot a_{1n} \\ v_1 \cdot a_{21} + v_2 \cdot a_{22} + \dots + v_n \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ v_1 \cdot a_{m1} + v_2 \cdot a_{m2} + \dots + v_n \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rozpiszmy

$$\|\vec{v_1}\| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

$$\|A \cdot \vec{v}\|_1 = |v_1 \cdot a_{11} + v_2 \cdot a_{12} + \dots + v_n \cdot a_{1n}| + |v_1 \cdot a_{21} + v_2 \cdot a_{22} + \dots + v_n \cdot a_{2n}| + \dots + |v_1 \cdot a_{m1} + v_2 \cdot a_{m2} + \dots + v_n \cdot a_{mn}|$$

Wiemy, że $\underbrace{|a+b| \leq |a| + |b|}_{\text{DOWÓD}}$

Cel: $(|a+b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$ $\qquad |x|^2 = x^2 = |x^2|$

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$$

$|a| \geq a$
$|b| \geq b$

$$|a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = |a+b|^2$$

więc

$$|v_1 \cdot a_{11} + v_2 \cdot a_{12} + \dots + v_n \cdot a_{1n}| + \dots + |v_1 a_{m1} + v_2 a_{m2} + \dots + v_n \cdot a_{mn}| \leq |v_1 \cdot a_{11}| + |v_2 \cdot a_{12}| + \dots + |v_2 \cdot a_{m2}| + \dots + |v_n \cdot a_{mn}|$$

$=$ Wiemy, że wszystkie elementy macierzy są dodatnie, więc możemy je „wyjąć” z wartości bezwzględnej $= a_{11}|v_1| + a_{12}|v_2| + \dots + a_{mn}|v_{mn}|$

Uporządkujmy

$$= |v_1|\underbrace{(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1})}_{\text{KOLUMNA } A_1} + |v_2|\underbrace{(a_{12} + \ldots + a_{m2})}_{\text{KOLUMNA } A_2} +$$

$$+ \ldots + |v_n|\underbrace{(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn})}_{\text{KOLUMNA } A_n}$$

Wiemy, że kolumny macierzy A są równe 1
więc

$$= |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|$$

więc $\|A\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_1$

Scanned with CamScanner

LISTA 8 ZAD 2

Niech A będzie macierzą stochastyczną, dodatnią, a V_1 będzie przestrzenią wektorów własnych dla wartości własnej 1. Pokaż, że $V_1 \cap V_{=0} = \{\vec{0}\}$ oraz $V_1 + V_{=0} = V$.

(Dla przypomnienia $V_{=0}$ to podprzestrzeń wektorów o sumie współrzędnych równej 0.)

1) $V_1 \cap V_{=0} = \{\vec{0}\}$

weźmy dowolny $v \in V_1 \cap V_{=0}$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0, \text{ bo } v \in V_{=0}$$

Z lematu 9.10 mamy, że $v > 0$ lub $v < 0$ lub $v = \vec{0}$

Ponieważ $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$, nieprawda że $v > 0$ lub $v < 0$.

więc $v = \vec{0}$, więc $V_1 \cap V_{=0} = \{\vec{0}\}$.

2) $V_1 + V_{=0} = V$. $\quad \dim(V) = n$

Wystarczy pokazać, że $\dim(V_1 + V_{=0}) = \dim(V)$.

Z lematu 2.17: $\dim(V_1 + V_{=0}) = \dim(V_1) + \dim(V_{=0}) - \underbrace{\dim(V_1 \cap V_{=0})}_{0} = \dim(V_1) + \dim(V_{=0})$

$\{\vec{0}\}$

Z tw. 9.12 $\dim(\mathbb{V}_1) = 1$ dla stochastycznej macierzy dodatniej. A mamy $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

$\dim(\mathbb{V}_{=0}) = n-1$, bo

$v \in \mathbb{V}_{=0}$ $\quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ -(v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}) \end{bmatrix}$, bo $v_1+\ldots+v_n=0$

można wyrazić za pomocą poprzednich wsp.

więc $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_{=0}) = 1 + n - 1 = n = \dim(\mathbb{V})$

więc $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_{=0} = \mathbb{V}$

LISTA 8 ZAD 3

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że zachowuje ona sumę współrzędnych, tzn. dla wektora $(v_1, \ldots, v_n)^T$ niech $(w_1, \ldots, w_n)^T = A(v_1, \ldots, v_n)^T$ pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Wywnioskuj z tego, że $\mathbb{V}_{=0}$ jest przestrzenią niezmienniczą A.

a) A – macierz stochastyczna
v – wektor

TEZA: $A \cdot (v_1, \ldots, v_n)^T = (w_1, \ldots, w_n)^T \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$

DOWÓD:

$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = 1$ (macierz stochastyczna kolumnowo)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j$$

b) $\mathbb{V}_{=0}$ jest przestrzenią niezmienniczą A.

DOWÓD:

$\mathbb{V}_{=0}$ – podprzestrzeń wektorów o sumie równej 0

Z a) wynika, że przekształcenie A zachowuje sumę współrzędnych, zatem $A \cdot v = w$ gdzie $\mathbb{V}_{=0} \ni v$
zatem $\mathbb{V}_{=0} \ni w$ również, co należało dowieść.
Zatem $\mathbb{V}_{=0}$ jest przestrzenią niezmienniczą.

LISTA 8 ZAD 5

Niech A będzie macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej o module większym niż 1 dla A.

WSKAZÓWKA: Można oszacować bezpośrednio, można też popatrzeć na A^k dla dowolnie dużego k i skorzystać z zad. 1

1) ROZW.

Niech λ to wartość własna A (tym samym jest też wartością własną A^T), a odpowiadający jej wektor własny to v. Mamy zatem znaną nam już równość $A^T \cdot v = \lambda v$.

Zobaczmy jaką postać mają współrzędne wektora.

$$\forall j \in \langle 1, n \rangle \quad \lambda v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

Wybierzemy teraz takie j, że $\forall i \in \langle 1, n \rangle \ |v_i| \le |v_j|$, wtedy:

$$|\lambda||v_j| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} v_i| \le \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|v_i| \le \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|v_j| =$$

$$= |v_j|$$

Wektor $v \neq \vec{0}$, więc $v_j \neq 0$. Dzieląc obie strony przez $|v_j|$ otrzymujemy $|\lambda| \le 1$.

2) ZE WSKAZÓWKI

Załóżmy, że $|\lambda| > 1$ i v to wektor własny macierzy A. Wtedy:

$$A^k v = \lambda^k v$$

Z zadania 1 wiemy, że $\|Av\|_1 \le \|v\|_1$, a z wykładu że A^k też jest stochastyczna. Podstawmy do wzoru:

$$\|A^k v\|_1 = \|\lambda^k v\|_1 = |\lambda^k| \|v\|_1 > \|v\|_1$$

Otrzymaliśmy sprzeczność więc, $|\lambda| \le 1$

LISTA 8 ZAD 6

Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej -1.

WSKAZÓWKA: Rozpatrz A^2. Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1? Możesz korzystać z twierdzeń udowodnionych na wykładzie.

Wiemy, że iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną, zatem A^2 - stochastyczna.

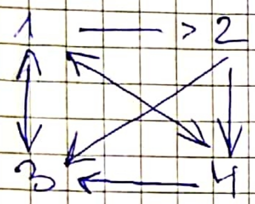
Z tw. 9.12 wiemy, że dla stochastycznej macierzy dodatniej A mamy $\dim V_1 = 1$, gdzie $\vec{V}_1 = \{\vec{v} : A^2\vec{v} = 1\cdot\vec{v}\}$

Więc krotność geometryczna 1 jest równa 1.

Wiemy, że 1 jest wartością własną A, więc jest też wartością własną A^2. Więc jeśli -1 też byłoby wartością własną A, to 1 byłoby wartością własną A^2, więc 1 miałaby krotność geometryczną równą 2 - sprzeczność.

LISTA 8 ZAD 10

Rozważmy graf o wierzchołkach $\{1,2,3,4\}$ i krawędziach skierowanych $1\to 2$, $1\to 3$, $1\to 4$, $2\to 3$, $2\to 4$, $3\to 1$, $4\to 1$, $4\to 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0{,}25$.



1 : 2, 3, 4

2 : 3, 4

3 : 1

4 : 1, 3

M - znormalizowana macierz sąsiedztwa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_{1/n}$ - macierz wypełniona $1/n$

$$M' = (1-m)\cdot M + m\cdot A_{\frac{1}{n}}$$

$$M' = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = 1/16\begin{bmatrix} 1 & 1 & 13 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R - ranking $\quad R = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$

$$M'R = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 13 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Daje to równania:

$$v_1 = 1/16\, v_1 + 1/16\, v_2 + 13/16\, v_3 + 7/16\, v_4$$

$$v_2 = 5/16\, v_1 + 1/16\, v_2 + 1/16\, v_3 + 1/16\, v_4$$

Scanned with CamScanner

$v_3 = 5/16\, v_1 + 7/16\, v_2 + 1/16\, v_3 + 7/16\, v_4$

$v_4 = 5/16\, v_1 + 7/16\, v_2 + 1/16\, v_3 + 1/16\, v_4$

$1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$

to daje

$v_1 = 751/2116$

$v_2 = 80/529$

$v_3 = 605/2116$, więc $R = \begin{bmatrix} \frac{751}{2116} \\ \frac{80}{529} \\ \frac{605}{2116} \\ \frac{110}{529} \end{bmatrix}$

$v_4 = 110/529$

LISTA 5 ZAD 11

To zadanie pokazuje, że iteracyjna metoda obliczeni[a] Page Ranku zbiega wykładniczo szybko. Niech A będzie macierzą stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a P macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix}$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \le m \le 1$ niech M_m oznacza macierz

$$M_m = (1-m)A + mP$$

Pokaż, że dla wektora $\vec{v} \in V_{=0}$ zachodzi

WSKAZÓWKA: Pokaż najpierw dla $m=0$ oraz $m=1$, dla $m=0$ skorzystaj z zad. 1.

Zauważmy najpierw, że

$$(P\vec{v})_i = \sum_j p_{ij} v_j = \sum_j \tfrac{1}{n} \cdot v_j = \tfrac{1}{n} \sum_j v_j = 0$$

czyli $P\vec{v} = \vec{0}$.

W takim razie

$$M_m \vec{v} = ((1-m)A + mP)\vec{v} = (1-m)A\vec{v} + mP\vec{v} = (1-m)A\vec{v}.$$

a więc

$$\|M_m \vec{v}\|_1 = \|(1-m)A\vec{v}\|_1 = \sum_i |(1-m)(A\vec{v})_i| = |1-m| \sum_i |(A\vec{v})_i| =$$
$$= (1-m)\|A\vec{v}\|_1$$

Z zadania 1. wiadomo, że $\|A\vec{v}\|_1 \le \|\vec{v}\|_1$

Zatem $\|M_m \vec{v}\|_1 = (1-m)\|A\vec{v}\|_1 \le (1-m)\|\vec{v}\|_1$