ZAD 5 – *fulito*

DANE SĄ OBSERWACJE $x_1, \dots, x_n$ POCHODZĄCE Z NIŻEJ WYMIENIONYCH ROZKŁADÓW. ZNALEŹĆ ESTYMATOR (METODĄ ILE) DLA PARAMETRÓW WYMIENIONYCH PONIŻEJ:

ROZKŁAD WEIBULLA,

$$f(x;k,\lambda) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\,,$$

DLA $x \in [0, \infty)$. ZNANE JEST k, PARAMETR λ.

$$\underbrace{f(x;k,\lambda)}_{\text{funkcja gęstości}} = \frac{k}{\lambda}\cdot\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} =$$

$$= \frac{k}{\lambda^k}\cdot x^{k-1}\cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

Chcemy wyznaczyć funkcję wiarygodności. $(f(x_1;k,\lambda)\cdot f(x_2;k,\lambda)\cdot\ldots\cdot f(x_n;k,\lambda))$

$$L(\lambda) = \frac{k}{\lambda^k}\, x_1^{k-1}\, e^{-\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)^k}\cdot\ldots\cdot\frac{k}{\lambda^k}\cdot x_n^{k-1}\cdot e^{-\left(\frac{x_n}{\lambda}\right)^k} =$$

$$= \left(\frac{k}{\lambda^k}\right)^n\cdot\prod_{i=1}^n x_i^{k-1}\cdot e^{-\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k}.$$

Logorytmujemy:

$$\ln L(\lambda) = \ln\left(\frac{k}{\lambda^k}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{k-1} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k} =$$

$$= \ln k^n - \ln(\lambda^k)^n + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + \ln e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k} =$$

$$= n\cdot\ln k - n\cdot k\cdot\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k \cdot \underbrace{\ln e}_{1} + (k-1)\ln\prod_{i=1}^{n} x_i =$$

$$\ln x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n$$

$$= n\cdot\ln k - n\cdot k\cdot\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k + (k-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

Liczymy pochodną po λ.

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{nk}{\lambda} - \left[\underbrace{\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)^k} + \left(\frac{x_2}{\lambda}\right)^k + \ldots + \left(\frac{x_n}{\lambda}\right)^k\right]' =$$

$$\left(x_1^k\cdot\lambda^{-k}\right)' = x_1^k\cdot(-k)\cdot\lambda^{-k-1} = \frac{-k\cdot x_1^k}{\lambda^{k+1}}$$

$$= \frac{-nk}{\lambda} + k\sum\frac{x_i^k}{\lambda^{k+1}}$$

Kiedy pochodna będzie równa zero to nasza funkcja będzie miała ekstremum lokalne.

$$-\frac{nk}{\lambda} + k\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k}}{\lambda^{k+1}} = 0$$

$$k\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k}}{\lambda^{k+1}} = \frac{nk}{\lambda} \quad \Big| : \frac{nk}{\lambda}$$

$$\frac{\cancel{\lambda}}{n\cancel{k}} \cdot \cancel{k} \cdot \frac{1}{\cancel{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k}}{\lambda^{k}} = 1$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k}}{\lambda^{k}} = 1$$

$$\frac{1}{n \cdot \lambda^{k}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{k} = 1 \quad \Big| \cdot \lambda^{k}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{k}}{n} = \lambda^{k} \quad \Big|^{\frac{1}{k}}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{k}}{n}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\lambda^{k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\lambda = \frac{\left(\sum x_i^{k}\right)^{1/k}}{n^{1/k}}$$

$$\lambda = \frac{\sum x_i}{n^{1/k}}$$