LISTA 4

ZAD 1 NIECH $[a_0, b_0], [a_1, b_1] \ldots$ BĘDZIE CIĄGIEM PRZEDZIAŁÓW ZBUDOWANYM ZA POMOCĄ METODY BISEKCJI ZASTOSOWANEJ NA LOKALIZACJI ZER FUNKCJI F CIĄGŁEJ W PRZEDZIALE $[a_0, b_0]$; NIECH PONADTO $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n \to \infty} m_n$ ORAZ $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

błąd dla n-tego podziału

A) WYKAŻ, ŻE $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $(n = 0, 1, \ldots)$

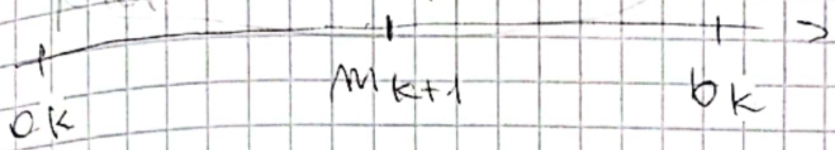
B) ILE WYNOSI DŁUGOŚĆ PRZEDZIAŁU $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$?

C) WYKAŻ, ŻE

(1) $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$ $(n \ge 0)$

D) CZY MOŻE ZDARZYĆ SIĘ, ŻE $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$?

A) $[a_n, b_m] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ dla $n = 0, 1, \dots$



Według zasady bisekcji znajdujemy punkt m_{k+1}, który jest w połowie odcinka $[a_k, b_k]$. $\longrightarrow m_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$

Jeżeli $f(m_{k+1}) = 0$ to znaleźliśmy m. zer. W przeciwnym przypadku

Jeżeli $f(m_{k+1}) > 0$ to bierzemy przedział $[a_k, m_{k+1}]$

Jeżeli $f(m_{k+1}) < 0$ to bierzemy przedział $[m_{k+1}, b_k]$

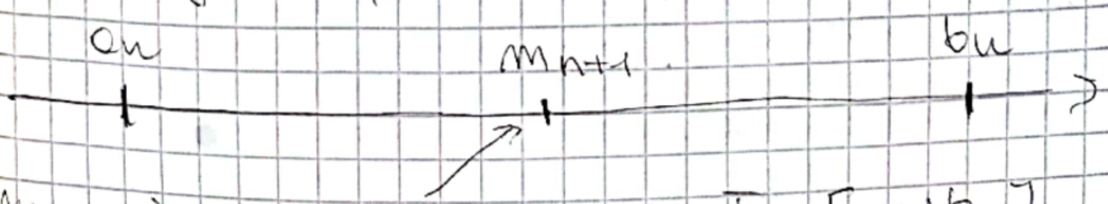
Widzimy więc że zbiór $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ jest zawsze podzbiorem zbioru poprzedniego $[a_n, b_n]$.

B) $|b_n - a_n| = \left|\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\right| = \left|\frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2}\right| = \dots$

$\dots = \left|\frac{b_0 - a_0}{2^n}\right|$

C) Mamy wykazać, że $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$ dla $n \ge 0$

Wiemy z polecenia, że $e_n := \alpha - m_{n+1}$



m_{n+1} jest środkiem przedziału $[a_n; b_n]$

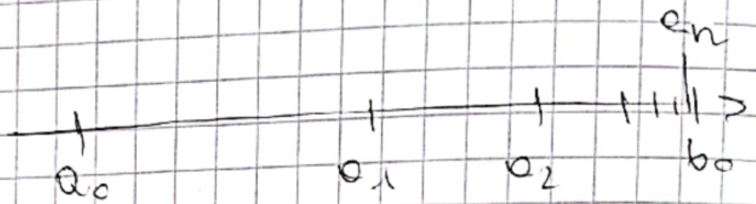
m_{n+1} jest też początkiem lub końcem przedziału $[a_{n+1}; b_{n+1}]$ z podpunktu B

$|\alpha - m_{n+1}| \le |b_{n+1} - a_{n+1}| = \left|\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right| =$

$= |2^{-(n+1)}(b_0-a_0)| = |2^{-n-1}(b_0-a_0)|$

mamy niezakończony ciąg o liczby komputerowe są nieskończone

D) Tak



gdy miejsce zerowe jest blisko b_0

ZAD.2 ILE KROKÓW WEDŁUG METODY BISEKCJI NALEŻY WYKONAĆ, ŻEBY WYZNACZYĆ ZERO α Z BŁĘDEM BEZWZGLĘDNYM MNIEJSZYM NIŻ ZADANA LICZBA $\varepsilon > 0$?

m.zer.

Z wykładu: Algorytm wyznaczenia przedziału zawierającego α o długości $\varepsilon > 0$ wymaga ok. $\lfloor \log_2 \frac{b_0-a_0}{2\varepsilon} \rfloor$

$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0-a_0)$ → wzór zad 1 (C)

poszukamy pierwszego wyrazu ciągu e_n który jest mniejszy niż Epsilon

$|\varepsilon| > |e_n|$

najgorszy przypadek → największe e_n

$|\varepsilon| > 2^{-n-1}(b_0-a_0)$

$2^n > \frac{b_0-a_0}{2\varepsilon}$

$n > \log_2 \frac{b_0-a_0}{2\varepsilon}$

$n = \lfloor \log_2 \frac{b_0-a_0}{2\varepsilon} + 1 \rfloor$

ZAD 3. WYKONAJ 5 PIERWSZYCH KROKÓW METODY BISEKCJI DLA FUNKCJI $f(x) = x - 0.49$ I WARTOŚCI POCZĄTKOWYCH $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. PORÓWNAJ WARTOŚCI BŁĘDÓW $|e_n|$ $(1 \leq n \leq 5)$ Z ICH OSZACOWANIAMI (1) (OZNACZENIA - JAK W ZADANIU L4.1). SKOMENTUJ WYNIKI

(program)

e → błąd

osz_e → oszacowanie błędu

BŁĘDY SZACOWANE SĄ WIĘKSZE NIŻ BŁĘDY FAKTYCZNE

ZAD 4. STOSUJĄC METODĘ BISEKCJI WYZNACZYĆ WSZYSTKIE ZERA FUNKCJI $f(x) = x^2 - 2\cos(3x+1)$ Z BŁĘDEM BEZWZGLĘDNYM NIE WIĘKSZYM NIŻ 10^{-5}. WSKAZÓWKA: NASZKICOWAĆ WYKRESY FUNKCJI $g(x) = x^2$ i $h(x) = 2\cos(3x+1)$.

(program) + wykres

ZAD 6 STOSUJĄC METODĘ NEWTONA, ZAPROPONUJ ALGORYTM NUMERYCZNEGO OBLICZANIA $1/\sqrt{a}$ $(a > 0)$ BEZ WYKONYWANIA DZIELEŃ. OPRACOWANĄ METODĘ SPRAWDŹ EKSPERYMENTALNIE, W TYM ZBADAJ M.IN. JAK WARTO DOBIERAĆ x_0 ORAZ ILE ŚREDNIO ITERACJI WYSTARCZY DO OSIĄGNIĘCIA SATYSFAKCJONUJĄCYCH WYNIKÓW.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - a \qquad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{x_n^2} - a\right) \cdot \frac{x_n^3}{2} = x_n + \frac{x_n}{2} - \frac{a x_n^3}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n - a \cdot x_n^3) = \frac{1}{2}(3 - a \cdot x_n^2) x_n$$

Podstawmy $x_n = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $\quad \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Scanned with CamScanner

$$\Phi'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} a \cdot x^2$$

tw. Lagrange'a

wart. średniej pochodnej

$$\frac{3}{2}\left|1 - a x^2\right| < 1$$

$$\left|a x^2 - 1\right| < \frac{2}{3}$$

$$\left|x^2 - \frac{1}{a}\right| < \frac{2}{3a}$$

$$\frac{-2}{3a} < x^2 - \frac{1}{a} < \frac{2}{3a}$$

$$\frac{1}{3a} < x^2 < \frac{5}{3a}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3a}} < x < \sqrt{\frac{5}{3a}}$$

Metoda jest zbieżna

1° $\Phi(\alpha) = \alpha$

2° $|\Phi'(\alpha)| < 1$

Rząd zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^k} = L \neq 0$$

metoda jest zbieżna rzędu $k = 1$ $0 < L < 1$

ZAD 7 NIECH BĘDZIE $a = m \cdot 2^c$, GDZIE c JEST CAŁKOWITA, A m – UŁAMKIEM Z PRZEDZIAŁU $[1/2; 1)$. ZAPROPONUJ EFEKTYWNĄ METODĘ OBLICZANIA $\sqrt{a}$, OTRZYMANĄ PRZEZ ZASTOSOWANIE METODY NEWTONA DO WYZNACZANIA ZERA PEWNEJ FUNKCJI f. USTAL EKSPERYMENTALNIE DLA JAKICH WARTOŚCI x_0 METODA JEST ZBIEŻNA.

$$f(x) = x^2 - a \qquad f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n}$$

$$\Phi(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a} + \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{2a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x^2}$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x^2}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a}{x^2} - 1\right| < 2$$

$$a\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a}\right| < 2$$

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a}\right|<\frac{2}{a}$$

$$-2/a < \frac{1}{x^2}-\frac{1}{a} < \frac{2}{a}$$

$$-1/a < 1/x^2 < 3/a$$

$$0 < 1/x^2 < 3/a$$

$$\frac{a}{3} < x^2$$

$a = m \cdot 2^c$

1° c – parzyste

$a = m \cdot 2^{2k}$ $\quad m \in [1/2;1)$

$\sqrt{a} = \sqrt{m} \cdot 2^k$ $\quad \sqrt{m} \in [\frac{\sqrt{2}}{2};1)$

2° c – nieparzyste

$a = m \cdot 2^{2k+1}$

$a = m \cdot 2 \cdot 2^{2k}$ $\quad m \in [1/2;1)$

$\sqrt{a} = \sqrt{2m} \cdot 2^k$ $\quad \sqrt{2m} \in [1;\sqrt{2})$

Czy znamy metodę zbieżną (w miarę szybko) dla $m \in [\sqrt{2}/2;\sqrt{2})$

$a \in [\sqrt{2}/2;\sqrt{2})$?

1°

$\frac{m}{3} < m^2$

$m^2 - \frac{m}{3} > 0$

$m > 1/3$ ✓

2°

$\frac{2m}{3} < (2m)^2$

$\frac{m}{3} < 2m^2$

$m < 6m^2$

$m > 1/6$ ✓

ZAD5 PRZYBLIŻENIE ODWROTNOŚCI LICZBY $R>0$ MOŻNA OBLICZAĆ BEZ WYKONYWANIA DZIELEŃ ZA POMOCĄ WZORU:

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \quad (n = 0, 1 \ldots)$$

DLA ODPOWIEDNIO DOBRANEJ WARTOŚCI x_0

A) SPRAWDŹ ŻE POWYŻSZY WZÓR MOŻNA ZINTERPRETOWAĆ JAKO WYKONANIE KROKU METODY NEWTONA DLA PEWNEJ FUNKCJI $f(x)$

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n R)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - R \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + x_n - R x_n^2 = x_n(2 - R x_n)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

B) NASZKICUJ WYKRES FUNKCJI $f(x)$

C) JAKIE WARUNKI MUSI SPEŁNIAĆ x_n, ABY $x_{n+1} < 0$?

$$x_n(2 - x_n R) < 0$$

$x_n < 0$ $\qquad 2 - x_n R < 0$

$$x_n R > 2$$

$$x_n > 2/R$$

D) UDOWODNIJ, ŻE JEŚLI $x_n < 0$, TO $x_{n+1} < x_n$. CO Z TEGO WYNIKA?

$x_n < 0$

$x_n(2 - x_n R) \overset{?}{<} x_n \quad | : x_n$

$2 - x_n R \overset{?}{>} 1$

$-x_n R \overset{?}{>} -1 \quad | \cdot (-1)$

$x_n R < 1$

$\underbrace{<0 \quad >0}_{<0}$?

Ciąg x_n zacznie mieć same wyrazy ujemne, a poszukiwane mier. dodatnie. Ciąg rozbieżny.

E) JAKIE WARUNKI MUSI SPEŁNIAĆ x_n, ABY $x_{n+1} \in (0, R^{-1})$?

$x_n(2 - x_n R) > 0 \iff x_n \in (0; \frac{2}{R})$ z podpunktu C

$$x_n(2 - x_n R) < \frac{1}{R}$$

$$x_n R(2 - x_n R) < 1$$

$$2 x_n R - x_n^2 R - 1 < 0$$

$$x_n^2 R^2 - 2 x_n R + 1 > 0$$

$$(x_n R - 1)^2 > 0$$

$$x_n R \neq 1 \Rightarrow x_n \neq 1/R$$

$$x_n \in (0; 1/R) \cup (1/R; 2/R)$$

Scanned with CamScanner

F) UDOWODNIJ, ŻE DLA DOWOLNEGO $x_0 \in (0, R^{-1})$ ZACHODZI $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/R$. DLA JAKIEGO DOBORU PUNKTÓW POCZĄTKOWYCH POWYŻSZA METODA JEST ZBIEŻNA?

$x_n(2 - x_nR) \overset{?}{>} x_n$

$x_n(2 - x_nR) \overset{?}{>} 1$

$2 - x_nR \overset{?}{>} 1$

$x_n \overset{?}{<} R^{-1}$

$x_nR < 1$

$-x_nR > -1 \quad \Rightarrow \quad 2 - x_nR > 2 - 1 = 1$

Z podpunktu E) mamy $x_n \in (0, 1/R) \cup (1/R; 2/R) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} \in (0; 1/R)$

$x_{n+1} < R^{-1}$

G) UDOWODNIJ, ŻE DLA DOWOLNEGO $x_0 \in (0, R^{-1})$ ZACHODZI $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/R$. DLA JAKIEGO DOBORU PUNKTÓW POCZĄTKOWYCH POWYŻSZA METODA JEST ZBIEŻNA?

Punkt stały: $\phi(1/R) = 1/R\,(2-1) = 1/R$

Monotoniczność: $|\phi'(x)| = |2 - 2xR| < 1$

$|xR - 1| < 1/2$

$xR < 3/2 \quad \wedge \quad xR > 1/2$

$x \in (1/2R\,;\, 3/2R)$

Natomiast dla $x \in (0, 1/2R)$: $\phi'(x) > 1$, wtedy z podpunktu f) następne wyrazy będą z przedziału $(x, 1/2R)$.

H) Program + ILE ŚREDNIO ITERACJI TRZEBA WYKONAĆ ABY UZYSKAĆ DOKŁADNOŚĆ BLISKĄ MASZYNOWEJ?

ZAD. 8 R-KROTNE ZERO α FUNKCJI $f(x)$ JEST POJEDYNCZYM ZEREM FUNKCJI $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. JAKĄ POSTAĆ MA WZÓR OPISUJĄCY METODY NEWTONA ZASTOSOWANĄ DO FUNKCJI $g(x)$? WYKONUJĄC ODPOWIEDNIE TESTY NUMERYCZNE, SPRAWDŹ OTRZYMANĄ W TEN SPOSÓB METODĘ. CZY JEST ONA WARTA POLECENIA?

$f(x) = (x-\alpha)^r \cdot h(x), \quad h(\alpha) \neq 0$

$g(x) = \sqrt[r]{f(x)} \quad g(\alpha) = 0 \quad g'(\alpha) \neq 0 \; (*)$

$g''(\alpha) \neq 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x)}{g'(x)}$

Kwadratowa zbieżność $\phi(\alpha) = \alpha, \; \phi'(\alpha) = 0, \; \phi''(\alpha) \neq 0$

$\phi(\alpha) = \alpha - g(\alpha)/g'\alpha = \alpha$

$\phi'(x) = 1 - \frac{g'g' - gg''}{(g')^2} = 1 - 1 + \frac{g \cdot g''}{g' \cdot g'} = \frac{g \cdot g''}{g' \cdot g'}$

$\phi'(\alpha) = 0$

$\phi''(x) = \frac{(gg'')' g'g' - gg''(g'g')'}{g'g'g'g'} = \frac{g'g''g'g' + gg'''g'g' - gg''g''g' - gg''g''g'}{g'g'g'g'} =$

$= \frac{(g')^3 g'' + g(g')^2 g''' - 2 \cdot g g' (g'')^2}{(g')^4} = \frac{g''}{g'}$

$$\phi''(\alpha) = \frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)} \neq 0$$

$$* \quad g(x) = \sqrt[r]{f(x)} = \sqrt[r]{(x-\alpha)^r}\sqrt[r]{h(x)} =$$
$$= (x-\alpha)\sqrt[r]{h(x)}$$

$$\sqrt[r]{h(x)}' = \frac{1}{r} h(x)^{\frac{1-r}{r}} h'(x)$$

$$g'(x)\Big|_{x=\alpha} = \underbrace{(x-\alpha)'}_{1}\sqrt[r]{h(x)} + \underbrace{(x-\alpha)}_{0}\sqrt[r]{h(x)}' = \sqrt[r]{h(x)}$$

$$g''(x)\Big|_{x=\alpha} = \sqrt[r]{h(x)}' + \sqrt[r]{h(x)}' = 2\sqrt[r]{h(x)}' \neq 0$$

jeśli $h'(x) \neq 0$