LISTA 12

ZAD 1 JAK JUŻ WIADOMO, JĘZYK PROGRA-
MOWANIA PWO++ MA OBSZERNĄ BIBLIOTEKĘ
FUNKCJI I PROCEDUR NUMERYCZNYCH.
WŚRÓD NICH ZNAJDUJE SIĘ PROCEDURA
INTEGRAL(f) ZNAJDUJĄCA Z DUŻĄ

DOKŁADNOŚCIĄ WARTOŚĆ CAŁKI $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, GDZIE $f \in C[-2,2]$. W JAKI SPOSÓB UŻYĆ PROCEDURY INTEGRAL DO OBLICZENIA CAŁKI

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad (a<b \text{ i } g\in C[a,b])?$$

$x\in[a,b]$

$x-a\in[0,b-a]$

$\frac{x-a}{b-a}\in[0,1]$

$4\frac{x-a}{b-a}\in[0,4]$

$4\frac{x-a}{b-a}-2\in[-2;2]$

Wykorzystajmy całkowanie przez podstawienie.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} y = 4\frac{x-a}{b-a}-2 \\ dy = \frac{4}{b-a} \\ x = \frac{y+2}{4}(b-a)+a \\ dx = \frac{1}{4}(b-a)\,dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-2}^{2} f\left(\frac{y+2}{4}(b-a)+a\right)\cdot\frac{1}{4}(b-a)\,dy = \frac{1}{4}(b-a)\cdot\int_{-2}^{2} f\left(\frac{y+2}{4}(b-a)+a\right)dy$$

ZAD 3 UDOWODNIJ ŻE RZĄD KWADRATURY POSTACI $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$. NIE PRZEKRACZA $2n+2$.

Aby pokazać, że rząd kwadratury postaci nie przekracza $2n+2$ zbudujemy wielomian rzędu $2n+2$, dla którego zachodzi $\int_a^b f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$. Weźmy funkcję $f(x)=((x-x_0)\dots(x-x_n))^2$. Jest ona rzędu $2n+2$. Teraz mamy:

$$\int_a^b f(x) > 0$$

Ponieważ dla dowolnego x $f(x)\geq 0$, dla większości x zachodzi $f(x)>0$, $f(x)=0$ tylko dla m. zerowych.

Z drugiej strony zaś $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$

x_k są miejscami zerowymi wielomianu

Kwadratura nie jest dokładna więc ta równość nie zachodzi.

Scanned with CamScanner

ZAD 5. JAK UPRASZCZA SIĘ WZÓR INTERPOLACYJNY LAGRANGE'A DLA WĘZŁÓW RÓWNOODLEGŁYCH?

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_k(x))(f(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right)(f(x_k)) = \frac{\text{podstawiamy}}{x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{(a + \frac{b-a}{n} \cdot k) - x_i} \right)(f(x_k)) = \frac{\text{podstawiamy}}{x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - (a + \frac{b-a}{n} \cdot i)}{(a + \frac{b-a}{n} \cdot k) - (a + \frac{b-a}{n} \cdot i)} \right)(f(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - a - \frac{b-a}{n} \cdot i}{\frac{b-a}{n}(k-i)} \right)(f(x_k)) \quad \frac{\text{podstawiamy}}{h = \frac{b-a}{n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - a - h \cdot i}{h(k-i)} \right)(f(x_k)) \quad \frac{\text{podstawiamy}}{x = a + th}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a + th - a - hi}{h(k-i)} \right) \cdot y_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{h(t-i)}{h(k-i)} \right) y_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{t-i}{k-i} \right) y_k$$

ZAD 6. SPRAWDŹ, ŻE WSPÓŁCZYNNIKI KWADRATURY NEWTONA-COTESA

$$N_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k \cdot h_n) \quad \left(h_n = \frac{b-a}{n}\right)$$

SĄ TAKIE, ŻE $A_k = A_{n-k}$ $(k = 0, 1 \ldots n)$.

Będziemy bazować na zadaniu 5 i wykorzystamy zapisany wzór.

$$\int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot h \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{t-i}{k-i}\,dt$$

$x = a + th$

$t = \frac{x-a}{h}$

$$dt = \left(\frac{x-a}{h}\right)' = \frac{1}{h}dx \rightarrow dx = h\,dt$$

?

$\forall$
$x \in [a,b]$ $\qquad x = th + a$
$x-a \in [0, b-a]$ $\qquad h = \frac{b-a}{n}$
$\frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$
$\frac{x-a}{b-a} \cdot n \in [0,n]$
$\frac{th+a-a}{b-a} \cdot n \in [0,n]$
$\frac{th}{b-a} \cdot n \in [0,n]$
$\frac{t\left(\frac{b-a}{n}\right)}{b-a} \cdot n \in [0,n]$
$t \in [0,n]$

Zatem
$$A_k = h\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{t-i}{k-i}\,dt =$$
$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot h\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (t-i)\,dt =$$
podstawiamy $t = n-s$ $\quad dt = -ds$
$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot h\int_n^0 \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} ((n-s)-i)(-ds)$$
$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot h\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (n-s-i)\,ds = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot h\int_0^n \left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (-1)(s-(n-i))\right)ds$$
podstawiamy $m = n-i$
$$= \frac{(-1)^{n-k+n}}{k!(n-k)!} \int_0^n \left(\prod_{\substack{m=0\\m\neq n-k}}^{n} (s-m)\right)ds =$$
$i \neq k$
$m = n-i$
$i = n-m$
$n-m \neq k$
$m \neq n-k$
$$= \frac{(-1)^{k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \left(\prod_{\substack{m=0\\m\neq n-k}}^{n} (s-m)\right)ds = A_{n-k}$$

$$A_{n-k} = \frac{(-1)^{n-(n-k)}}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} \cdot h\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq n-k}}^{n} (t-i)\,dt = \frac{(-1)^k}{(n-k)!\,k!} \cdot h\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq n-k}}^{n} (t-i)\,dt$$

$$\text{bo } \frac{(-1)^{2n-k}}{(-1)^k} = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^k \cdot (-1)^k} = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^{2k}} = \frac{1}{1}$$
parzyste