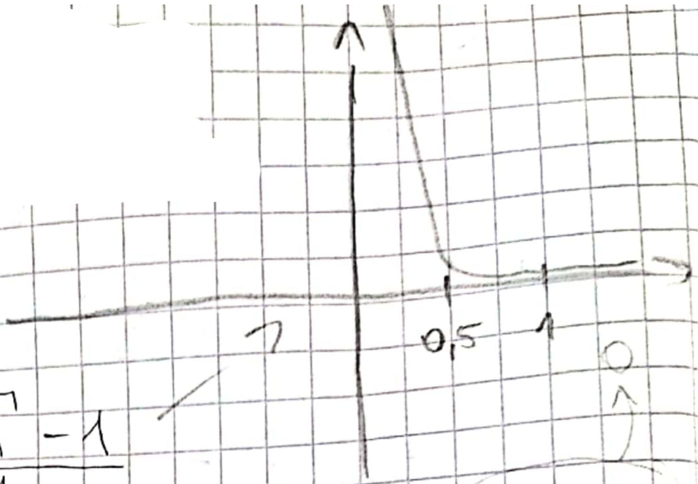


LISTA ZADAŃ 1

ZAD 1. (1 pkt)

$$f(x) = 4040\,\frac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} 4040\,\frac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}} = 4040 \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}} =$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ de l'Hospitala (wykorzystuję pochodną do obliczenia granicy)

$$= 4040 \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1\cdot 11x^{10}}{2\sqrt{x^{11}+1}}}{11\cdot x^{10}} = \frac{4040\cdot \cancel{11}}{\cancel{22}\,2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{10}}{\cancel{x^{10}}\cdot\sqrt{x^{11}+1}}$$

$$= \frac{4040}{2}\cdot 1 = 2020$$

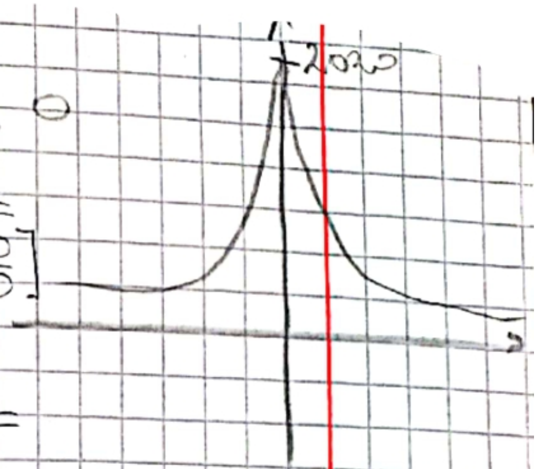
w programie wynik = 0

wywoła

ZAD. 2 (1 pkt)

DO TREŚCI ZADAŃ → Dokładność względu arytmetyki podwójnej precyzji wynosi ok 10^{-16}, a dokładność arytmetyki pojedynczej precyzji wynosi ok. 10^{-7}

$$f(x) := 12120\,\frac{x-\sin x}{x^3}$$



$$12120\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{\to 0}{x-\sin x}}{\underset{\to 0}{x^3}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=12120\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\frac{12120}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{\to 0}{1-\cos x}}{\underset{\to 0}{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=4040\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2x} = 2020\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{\to 0}{\sin x}}{\underset{\to 0}{x}} =$$

$$=2020\lim_{x\to 0^+}\overset{\to 1}{\cos x} = 2020$$

ZAD. 3.

$$y_0 = 1 \qquad y_{n+2} = \frac{1}{7}\left(68\cdot y_{n+1} + 10 y_n\right)$$

$$y_1 = -\frac{1}{7} \qquad (n=0,1,2\ldots)$$

$n=0$

$$y_2 = \frac{1}{7}\left(68\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+10\cdot 1\right) = \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{68}{7}\right)+\frac{10}{7} = -\frac{68}{49}+\frac{70}{49} = \frac{1}{49}$$

$$y_3 = \frac{1}{7}\left(68\cdot\frac{1}{49}+10\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{68}{49}-\frac{10}{7}\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{68}{49}-\frac{70}{49}\right) = \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{49}\right) = -\frac{1}{343}$$

$$y_4 = \frac{1}{7}\left(68\cdot\left(-\frac{1}{343}\right)+\frac{10}{49}\right) = \frac{1}{7}\left(-\frac{68}{343}+\frac{70}{343}\right) = -\frac{1}{343\cdot 7}$$

Zauważamy zależność:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 1 \to \frac{(-1)^0}{7^0} = \frac{1}{1} \\ y_1 = -\frac{1}{7} \to \frac{(-1)^1}{7^1} = -\frac{1}{7} \\ y_2 = \frac{1}{49} \to \frac{(-1)^2}{7^2} = \frac{1}{49} \\ y_3 = -\frac{1}{343} \to \frac{(-1)^3}{7^3} = -\frac{1}{343} \\ y_4 = \frac{1}{2401} \quad \ldots \end{array}\right\} \frac{(-1)^n}{7^n}$$

<u>ZAD 4</u>

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2020}\,dx \quad \text{całka liczby dodatnie} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\boxed{J_n = \frac{1}{n} - 2020\, J_{n-1}}, \quad \left(n = 1, 2, \ldots \quad J_0 = \ln\frac{2021}{2020}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+2020}\,dx + 2020 \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+2020}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n + 2020 \cdot x^{n-1}}{x+2020}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}\cancel{(x+2020)}}{\cancel{x+2020}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \ldots = \left[\frac{x^n}{n}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{0} = \frac{1}{n}$$

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C$$

ZAD 5.

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\frac{-1^0}{1} = 1, \quad \frac{(-1)^1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{(-1)^2}{5} = \frac{1}{5} \ldots$$

$$4 \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^k \cdot \frac{4}{2k+1} \to a_k$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$$

$2k+1 \to \infty$

$$a_k = \frac{1}{2k+1}$$

lecą do zera jednostajnie

TW. LEIBNIZA

1. $a_n > 0$ ✓
2. $a_{n+1} \leq a_n$ ✓
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ✓

wówczas szereg naprzemienny jest zbieżny.

Jeśli S_n i S oznaczają odpowiednio sumę częściową i sumę tego szeregu, to dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi nierówność:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

[illegible]

JAK DALEKO JESTEŚMY OD NASZEGO WYNIKU

$$a_k \leq 10^{-4}$$

$$\frac{4}{2\cdot k+1} \leq 10^{-4} \quad \Big| \cdot 2k+1$$

$$4 \leq 10^{-4} \cdot (2k+1) \quad \Big| / 10^{-4}$$

$$\frac{4}{10^{-4}} \leq 2k+1$$

$$k \geq \frac{40000-1}{2}$$

$$k \geq \frac{39999}{2} \to \approx 20000$$

Teoretycznie należy użyć 20 000 wyrazów.

TYLE TRZEBA, ŻEBY [illegible]

ZAD 6.

I) $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \underbrace{\frac{(x-1)^k}{k}}$

dla $x=2$ $\qquad a_k = \frac{(x-1)^k}{k}$

a_k dla $x=2$ $\quad a_k = \frac{(2-1)^k}{k} = \frac{1}{k}$

z LEIBNIZA:
1) $\lim_{k \to \infty} a_k \to 0$
2) $a_{k+1} < a_k$

$\Big\} \; |S - S_n| \leq a_{k+1}$

$a_{k+1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$

$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$

$\frac{2 \cdot 10^6}{k+1} < 1 \quad \to 1999999 < k$

$k \geq 2 \cdot 10^6$

II) $\ln e \cdot \frac{2}{e} = \ln e + \ln \frac{2}{e} = 1 + \ln \frac{2}{e} = 1 - \ln \frac{e}{2}$

skąd to przekształcenie? $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln \frac{e}{2} = -\sum (-1)^k \cdot \frac{(e/2-1)^k}{k} \leftarrow$ $e \approx 2.7$, $e/2 - 1 \in (0,1)$

$a_k = \frac{(e/2-1)^k}{k}$

LEIBNIZ 1) $\lim_{k \to \infty} \frac{(e/2-1)^k}{k} = 0 \qquad$ 2) $\frac{(e/2-1)^k}{k} > \frac{(e/2-1)^{k+1}}{k+1}$

$a_{k+1} = \frac{\left(\frac{e/2-1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} = \frac{\left(\frac{e-2}{2}\right)^{k+1}}{2^{k+1} \cdot (k+1)}$

SZACOWANIE $\frac{\left(\frac{e-2}{2}\right)^{k+1}}{2^{k+1} \cdot (k+1)} \leq \frac{1}{2^k}$

$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = \frac{1}{2 \cdot 10^6}$

$2^k > 2 \cdot 10^6$

$2^{k-1} > 10^6$

$(k-1)\ln 2 > 6 \ln 10$

$k-1 > 6 \frac{\ln 10}{\ln 2} = 6 \log_2 10$

$k > 6\log_2 10 + 1$

ZAD. 7

Wiemy, że

$$\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x) \quad \text{gdy } x > 0$$

↳ z tego

$$\arctan(x) = \pi/2 - \arctan(1/x)$$

$$\arctan(1/x) = -\pi/2 - \arctan(x) \quad \text{gdy } x < 0$$

↳ z tego

$$\arctan(x) = -\pi/2 - \arctan(1/x)$$

$ATG(1) = \pi/4$

PSEUDOKOD

```
if(-1 ≤ x && x ≤ 1)
    return ATG(x)
else if(x > 1)
    return 2·ATG(1) - ATG(1/x)
else
    return -2·ATG(1) - ATG(1/x)
```

Scanned with CamScanner

ZAD. 8 Z REPETYTORIUM

(szereg Taylora)

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Gorzej:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \dots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$$

Lepiej:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

Scanned with CamScanner