

به نام خدا

فیلترهای تطبیقی

تمرین سری دوم

نیمسال اول ۹۸-۹۹

1- ماتریس همبستگی بردار تصادفی $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ به صورت زیر می باشد

$$R_X = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

الف- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس R را بیابید.

ب- نشان دهید که رابطه $R = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H$ برقرار است.

ج- R^{-1} را جداگانه حساب کرده و نشان دهید که رابطه $R^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H$ برقرار است.

د- یک تبدیل خطی به صورت $Y = AX$ که A یک ماتریس 3×3 می باشد پیدا کنید به طوریکه ماتریس همبستگی بردار Y

برابر ماتریس همانی باشد یعنی $R_Y = I$.

ه- آیا یک تبدیل خطی به صورت $Y = AX$ که A یک ماتریس 3×3 می باشد میتوان پیدا کرد به طوریکه ماتریس همبستگی

بردار Y برابر ماتریس Σ باشد یعنی $R_Y = \Sigma$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

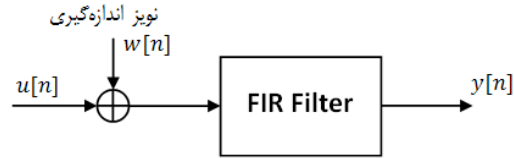
2- یک فرآیند $AR(2)$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$u[n] = v[n] + 0.9 u[n-1] - 0.2 u[n-2]$$

که $v[n]$ یک فرآیند نویز سفید با واریانس $\sigma_v^2 = 1$ می باشد.

الف- طیف قدرت این فرآیند را بدست آورده و رسم نمایید.

ب- فرض کنید مشاهدات $y[n]$ با نویز اندازه گیری $w[n]$ که نویز سفید با واریانس $\sigma_w^2 = 0.1$ مطابق شکل زیر همراه شده است و هدف ما طراحی یک فیلتر FIR برای ماکزیمم کردن SNR (Signal to Noise Ratio) در خروجی فیلتر باشد فرض کنید $w[n]$ مستقل از فرآیند $u[n]$ می باشد.



برای تعداد tapهای $M = 3$ فیلتر FIR را طراحی کرده و حداکثر SNR را بدست آورید.
ج- برای مقادیر مختلف M (از جمله ۵، ۱۰، ۱۵ و ۵۰) مقدار حداکثر SNR را که می توان بدست آورد رسم کنید و آنرا با ماکزیمم طیف قدرت $u[n]$ مقایسه نمایید.