

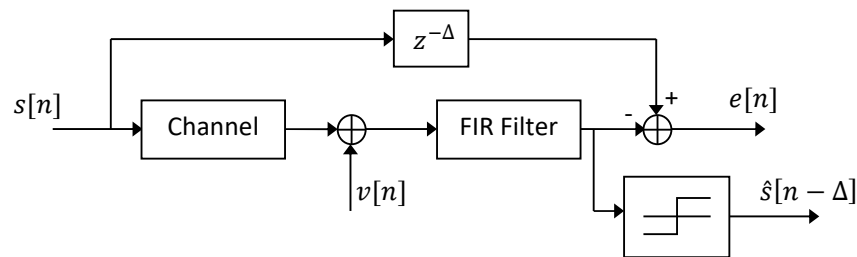
به نام خدا

درس فیلترهای تطبیقی

تمرین سری سوم

نیمسال اول ۹۸-۹۹

1- فرض کنید که شکل زیر مدل یک سیستم مخابراتی باشد و هدف طراحی یک همسانساز (Equalizer) برای سیستم زیر باشد



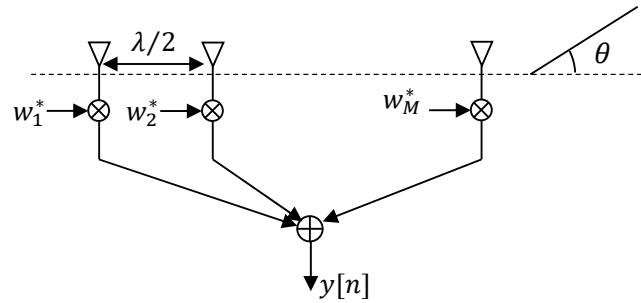
پاسخ ضربه کانال را به صورت $H(z) = 0.25 + z^{-1} + 0.25z^{-2}$ در نظر گرفته و نویز $v[n]$ را نویز سفید با واریانس $\sigma_v^2 = 0.05$ و مستقل از دنباله $s[n]$ فرض نمایید. دنباله $s[n]$ را یک دنباله باینری مستقل و با احتمال وقوع برابر به صورت $P\{s[n] = 1\} = P\{s[n] = -1\} = \frac{1}{2}$ فرض کنید. تعداد وزنه‌های فیلتر را M فرض نمایید.

الف- فرض کنید $\Delta = 1$ و $M = 2$ ، فیلتر بهینه ω_{opt} را بدست آورید و حداقل مربع خطای آن را محاسبه کنید. سپس با شرط اولیه $\omega[0] = [0 \ 0]^T$ و با استفاده از روش Steepest-Descent و با μ_{opt} وزنها را update نمایید و منحنی یادگیری را رسم کنید. منحنی‌های کانتورهای خطا و مسیر حرکت از روی آنها به ω_{opt} را نیز رسم نمایید. منحنی‌های یادگیری را برای $\mu = \frac{1}{10}\mu_{opt}$ و $\frac{1}{2}\mu_{opt}$ نیز رسم نمایید و ثابت زمانی‌های آنها را به صورت تئوریک و عملی محاسبه و مقایسه نمایید.

ب- فرض کنید $9M = \Delta$ باشد. بهینه را برای این مسئله پیدا کنید و سپس برای مقدار تعیین شده Δ ، وزنه‌های بهینه را بدست آورید و حداقل مربع خطای آن را حساب کنید. در این حالت نیز با روش Steepest-Descent و با شرط اولیه $\omega[0] = \underline{0}$ و $\mu = \mu_{opt}$ منحنی یادگیری را رسم نمایید.

ج- با کمک شبیه‌سازی و با فیلتری که در قسمت ب طراحی کرده‌اید $\hat{s}[n - \Delta]$ را تخمین بزنید و احتمال خطای سیستم فوق را محاسبه کنید.

2- یک آرایه خطی با تعداد M آنتن ایزوتروپ همه جهتی (Omni-directional) در نظر بگیرید.



الف- فرض کنید می خواهیم ضرایب w_i را طوری تعیین نمایم که از جهت $\theta = 30^\circ$ دریافت داشته باشیم و کل توان دریافتی حداقل باشد. مسئله را به صورت ریاضی فرمول بندی کرده و جواب آن را بدست آورید.

ب- فرض کنید یک منبع $s_1(t)$ در جهت $\theta_1 = 45^\circ$ و یک منبع $s_2(t)$ در جهت $\theta_2 = 150^\circ$ واقع هستند. سیگنال ارسالی این منابع را متغیرهای تصادفی گوسی مختلط با میانگین صفر و واریانس σ_1^2 و σ_2^2 در نظر بگیرید. نویز حرارتی روی آنتن ها را مستقل از هم و فرآیند سفید گوسی مختلط با واریانس $\sigma_n^2 = 1$ فرض نمایید. در این حالت ضرایب w_i را طوری تعیین نمایید که از جهت $\theta = 45^\circ$ دریافت داشته باشیم و کل توان دریافتی حداقل باشد. جواب را به طور بسته بدست آورید و الگوی تشعشی آنتن را به ازای ضرایب بدست آمده برای $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 10$ و $M = 5, 11$ رسم نمایید.

ج- فرض کنید که تنها مایل هستیم منبع $s_1(t)$ را دریافت نمایم. در این حالت ضرایب w_i را طوری طراحی نمایید که برای $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 10$ و $M = 5, 11$ در جهت $\theta_2 = 150^\circ$ یک نول ایجاد شود و کل توان دریافتی حداقل باشد. الگوی تشعشی آنتن را در این حالت نیز رسم نمائید و با قسمت ب مقایسه نمایید.

3- مطابق شکل مسئله ۲ دو منبع گوسی مختلط و مستقل با توانهای $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 10$ و نویز سفید گوسی مختلط روی هر آنتن با واریانس $\sigma_n^2 = 1$ را در زاویه های $\theta_1 = 45^\circ$ و $\theta_2 = 150^\circ$ با یک آرایه با $M = 5$ آنتن شبیه سازی نمایید. اگر سیگنال دریافتی آنتن u در لحظه n را با $u_i(n)$ نمایش دهیم بردار $\underline{u}(n) = [u_1(n), \dots, u_M(n)]^T$ تعریف کرده و ماتریس کورلیشن R_u را بصورت زیر تخمین بزنید:

$$\hat{R}_u = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underline{u}(k) \underline{u}(k)^H$$

همانطور که در کلاس بیان شد جواب مسئله بهینه سازی $\min J(\underline{W}) = \underline{W}^H R_u \underline{W}$ که $\underline{c}(\theta)$ بردار دریافت آرایه متناظر با $s.t. \underline{W}^H \underline{c}(\theta) = 1$

$$J_{\min} = J(\underline{W}_{opt}) = \frac{1}{\underline{c}(\theta)^H R_u^{-1} \underline{c}(\theta)} \quad \underline{W}_{opt} = \frac{R_u^{-1} \underline{c}(\theta)}{\underline{c}(\theta)^H R_u^{-1} \underline{c}(\theta)}$$

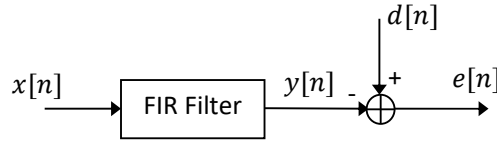
جهت θ میباشد بصورت

میباشد. تابع J_{\min} را بصورت تابعی از θ برای $\theta \in [0, 180]$ و با جایگذاری R_u با \hat{R}_u رسم نمایید. یعنی

$J_{\min} \approx \frac{1}{\underline{c}(\theta)^H \hat{R}_u^{-1} \underline{c}(\theta)}$ مقدار N را یکبار ۱۰۰ و بار دیگر ۱۰۰۰ فرض نمایید. آیا محل ماکزیمم های J_{\min} متناظر با محل منابع میباشد؟ چرا؟

دقت کنید این تمرین روشی برای تخمین جهت منابع بدست میدهد که به روش Capon مشهور میباشد.

4- شکل کلی طراحی یک فیلتر بهینه به صورت زیر را در نظر بگیرید که هدف حداقل کردن میانگین مربع خطا است.



$$J(\omega) = E\{|d[n] - y[n]|^2\}$$

$$\omega_{opt} = R^{-1}p \quad R = E\{u[n]u^H[n]\} \quad p = E\{u[n]d^*[n]\}$$

روش Steepest-Descent با step-size متغیر زیر را در نظر بگیرید.

$$\omega[n+1] = \omega[n] - \frac{1}{2}\mu[n](\nabla J(\omega[n])) \quad (*)$$

الف- با استفاده از رابطه (*), $J(\omega[n+1])$ را حساب کرده و $\mu[n]$ را طوری حساب کنید که $J(\omega[n]) > J(\omega[n+1])$ باشد.

ب- با استفاده از قسمت الف مقدار بهینه $\mu[n]$ را بدست آورید.

ج- منحنی یادگیری مسئله ۱ قسمت ب برای $9M$ را برای روش بالا با $\mu[n]$ رسم کرده و با منحنی با مقدار μ ثابت برابر با μ_{opt} مقایسه کنید.

۵- فرض کنید می خواهیم ضرایب یک فیلتر تطبیقی در مرحله $n+1$ را با فرض معلوم بودن $w(n)$ از حل مسئله بهینه سازی زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|w(n+1) - w(n)\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & r(n) = (1 - \mu \|u(n)\|^2) e(n) \end{aligned}$$

که $e(n) = d(n) - \underline{w}(n)^H \underline{u}(n)$ و $r(n) = d(n) - \underline{w}(n+1)^H \underline{u}(n)$ میباشد. جواب مسئله را به ساده ترین صورت بدست آورید.