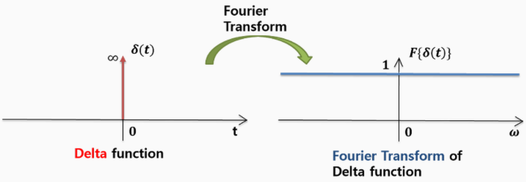


信号与系统

傅立叶级数 - 1

陆凯

2022 年 4 月 21 日

意见反馈 https://www.tapechat.net/uu/A0Z7ZH/6Z00BZMJ

ToC

回顾

为什么讨论傅里叶级数？

傅里叶级数的理论基础

傅里叶级数展开公式

回顾

线性时不变（LTI）系统 - 2、3

1. 线性时不变系统性质：交换率，分配率，结合律，有无记忆性，可逆性，因果性，稳定性；
2. 线性常系数微分/差分方程表示线性时不变系统；
3. 线性时不变系统的微分/差分方程解法；
4. 线性常系数微分/差分方程的框图表示；
5. 奇异函数（卷积视角下）：单位脉冲，阶跃，冲击偶等。

Current Section

回顾

为什么讨论傅里叶级数？

傅里叶级数的理论基础

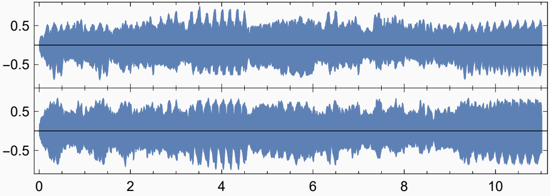
傅里叶级数展开公式

从音乐说起

《我和我的祖国》广州快闪 2019

前两句“我和我的祖国，一刻也不能分割”，小提琴双声道波形

0-11s

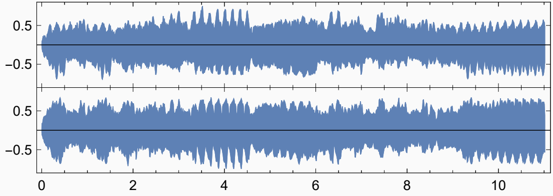


从音乐说起

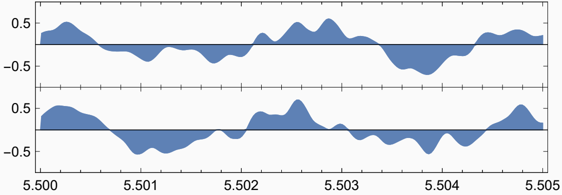
《我和我的祖国》广州快闪 2019

前两句“我和我的祖国，一刻也不能分割”，小提琴双声道波形

0-11s



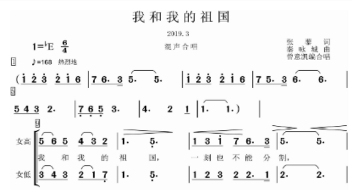
5.500-5.505s



从音乐说起

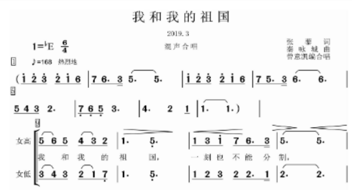
怎么弹奏小提琴版的“我和我的祖国，一刻也不能分割”？

乐谱：简谱



怎么弹奏小提琴版的“我和我的祖国，一刻也不能分割”？

乐谱：简谱



乐谱：五线谱

从音乐说起

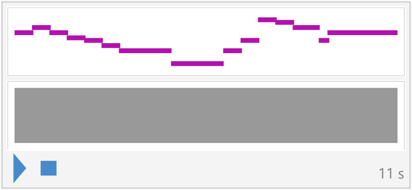
乐谱提供了什么核心信息？

理想单音的频率

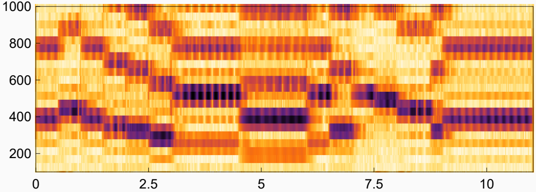
从音乐说起

乐谱提供了什么核心信息？

理想单音的频率



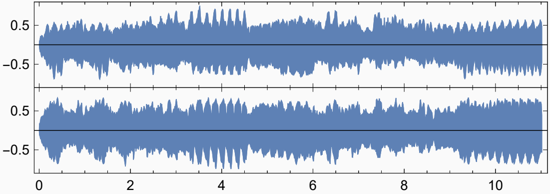
实际小提琴频谱



从音乐说起

音乐信号的一体两面：时域和频域

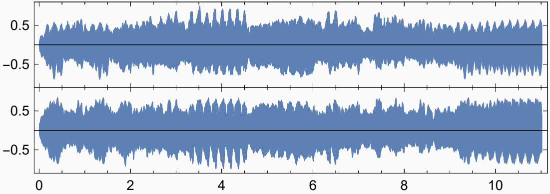
小提琴版“我和我的祖国，一刻也不能分割”时域形式



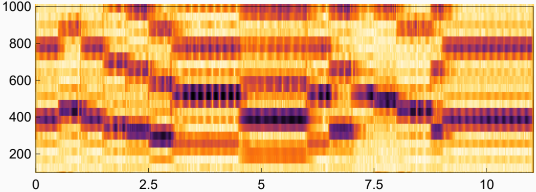
从音乐说起

音乐信号的一体两面：时域和频域

小提琴版“我和我的祖国，一刻也不能分割”时域形式

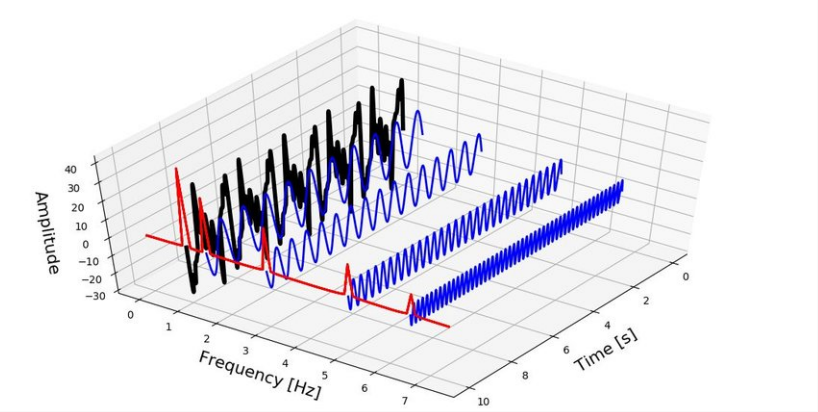


小提琴版“我和我的祖国，一刻也不能分割”频域形式



声音的“两面性”

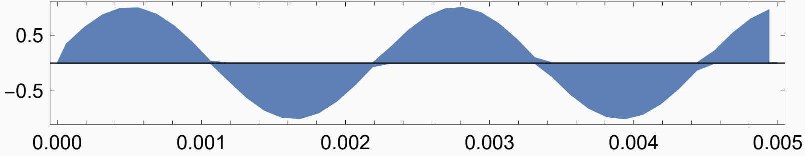
时域和频域同时看



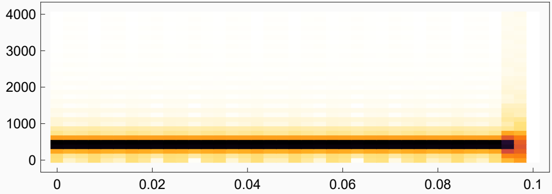
最简单的声音：正（余）弦波

国际标准音“a”的时域和频域，正弦波 $\sin(2\pi 440t)$

时域



频域



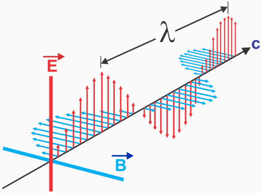
正余弦无处不在

自然界的准正余弦形式

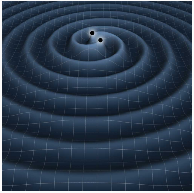
水波

“云波”

电磁波



引力波



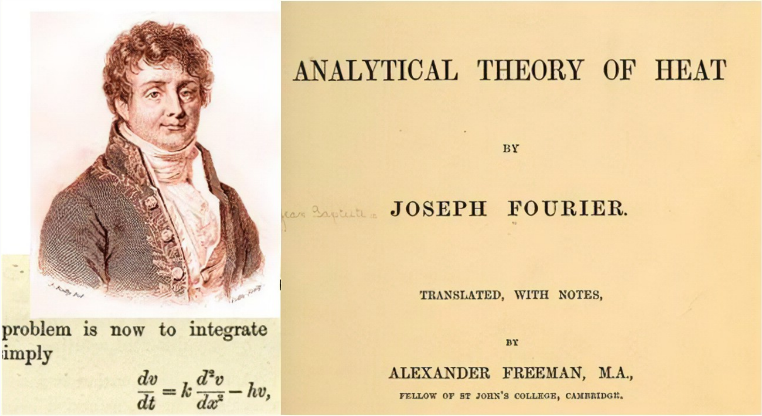
猜测：正余弦表征所有信号？

能否用正余弦表示所有信号？傅里叶：将周期函数或周期信号分解为正弦函数和余弦函数（或复指数函数）这类简单震荡函数之和

猜测：正余弦表征所有信号？

能否用正余弦表示所有信号？傅里叶：将周期函数或周期信号分解为正弦函数和余弦函数（或复指数函数）这类简单震荡函数之和

傅里叶 (Joseph Fourier，1768-1830)和他的《热分析理论》(Théorie analytique de la chaleur，1822)

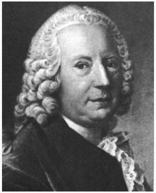


傅里叶级数/变换简史

最早可以追溯到巴比伦人用三角函数做天文预测。近代发展脉络:

1748，**欧拉**（L. Euler），
提出弦振动模式分析

1753，**伯努利**（D. Bernoulli），
质疑弦振动模式分解



1759，**拉格朗日**（J. L. Lagrange），
强烈反对三角分解

1829，**狄里克莱**（P. G. L. Dirichlet），
给出傅里叶展开条件

复指数函数

欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

正余弦与复指数函数“等价”，正余弦分解亦可写成复指数分解。

对于 LTI 系统，复指数函数 e^{st} 具有特殊性：

$$in : e^{st} \xrightarrow{LTI} out : H(s)e^{st}$$

其中，信号 e^{st} 为系统的特征函数，幅度因子为系统的特征值。

e^{st} 的形式不变性，为 LTI 系统分析提供了最佳角度。

本章中，分别采用 $e^{j\omega t}$ 和 $z^k(z = e^{j\omega})$ 作为连续和离散信号的基础信号。

复指数函数的形式不变性

$$in : e^{st} \xrightarrow{LTI} out : H(s)e^{st}$$

证明

$$x(t) = e^{st}$$
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$
$$y(t) = e^{st}H(s)$$

对于离散信号来说，同理可得:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

复指数分解意义 1

若 $x(t)$ 可以分解为三个复指数函数:

$$x(t)=a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+a_3e^{s_3t}$$

由于本征函数的形式不变形，三个复指数函数在 LTI 系统输出端的响应分别为:

$$\begin{aligned}a_1e^{s_1t}&\rightarrow a_1e^{s_1t}H\left(s_1\right)\\a_2e^{s_2t}&\rightarrow a_2e^{s_2t}H\left(s_2\right)\\a_3e^{s_3t}&\rightarrow a_3e^{s_3t}H\left(s_3\right)\end{aligned}$$

根据叠加原理，响应之和即为和之响应,

$$y(t)=a_1H\left(s_1\right)e^{s_1t}+a_2H\left(s_2\right)e^{s_2t}+a_3H\left(s_3\right)e^{s_3t}$$

复指数分解意义 2

连续信号的复指数分解与系统响应，

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t)=\sum_k a_k H\left(s_k\right) e^{s_k t}$$

离散情况类似.

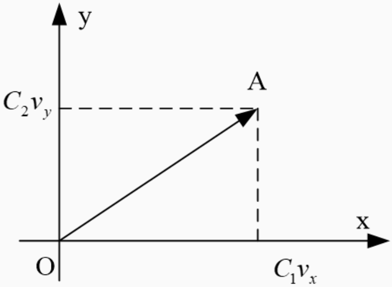
$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n$$

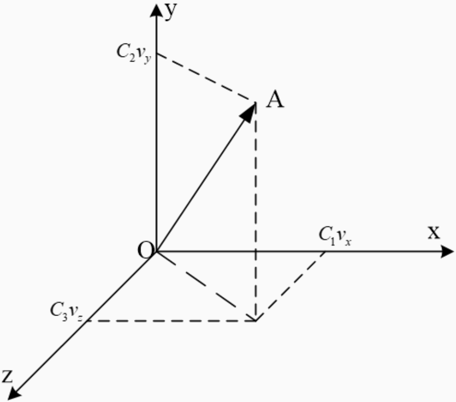
$$y[n]=\sum_k a_k H\left(z_k\right) z_k^n$$

复指数函数分解前奏

$$A = C_1 v_x + C_2 v_y + C_3 v_z$$

$$A = C_1 v_x + C_2 v_y$$





“基础”向量满足正交性。

复指数函数的正交性

复函数正交性定义：

对于 $[t_1, t_2]$ 内的两个复函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$，若他们满足：

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \cdot \varphi_2^*(t) dt = 0$$

则两个函数在 $[t_1, t_2]$ 内正交。其中，“*”为共轭算符。

在 $[t_1, t_2]$ 内，对于复指数函数集合 $[\ 1, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, e^{2j\omega_0 t}, e^{-2j\omega_0 t}, \ldots\ ]$，其中，基波角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}$。

我们有

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jm\omega_0 t} \cdot (e^{jn\omega_0 t})^* dt = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \\ t_2 - t_1, & \text{for } m = n \end{cases}$$

上面的复指数函数集合也满足完备性。

综合与分析公式（极重要!）

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt \tag{2}$$

傅里叶级数证明

证明:

设 $x(t)$ 可以展开为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

则系数 a_k 可以通过复指数函数正交性得到

$$\begin{aligned} & \int_T X(t) e^{-jm\omega_0 t} dt \\ =& \int_T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] e^{-jm\omega_0 t} dt \\ =& T a_k, \ when\ m = k \end{aligned}$$

得证。