第一章——系统

陆凯

回顾

- 实虚分解
- 连续与模拟，离散与数字
- 离散信号因变量
- 信号因变量变换：相加、相乘、微积分等
- 奇异函数：阶跃函数，斜边函数，脉冲函数，脉冲偶函数

本次内容

- 信号练习题
- 阶跃信号与脉冲信号的两个积分视角
- 系统定义和类型
- 系统表示方法
- 系统分类
- 线性
- 时不变性
- 因果性，记忆性
- 稳定性
- 可逆性
- LTI系统分析方法概述

信号（续）

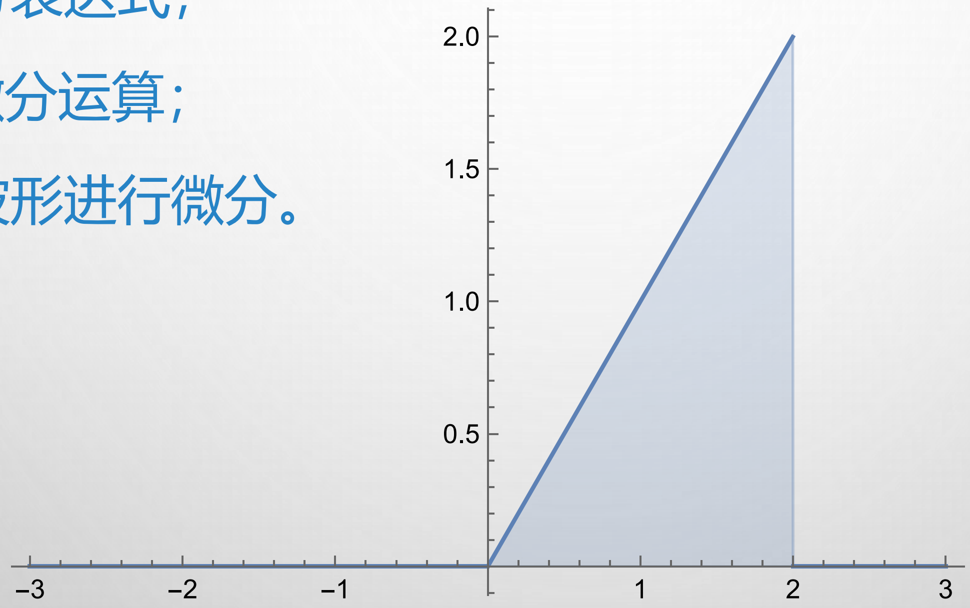
举例：计算下列信号的一阶微分

- **两类方法：**

1. 写出信号表达式，

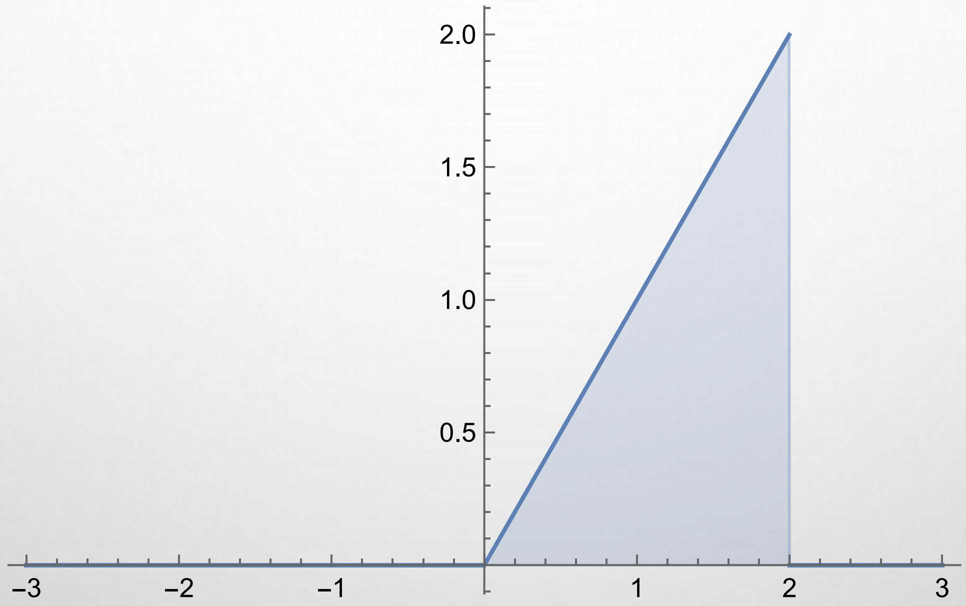
然后进行微分运算；

2. 直接对波形进行微分。



举例：计算下列信号的一阶微分

- 公式法

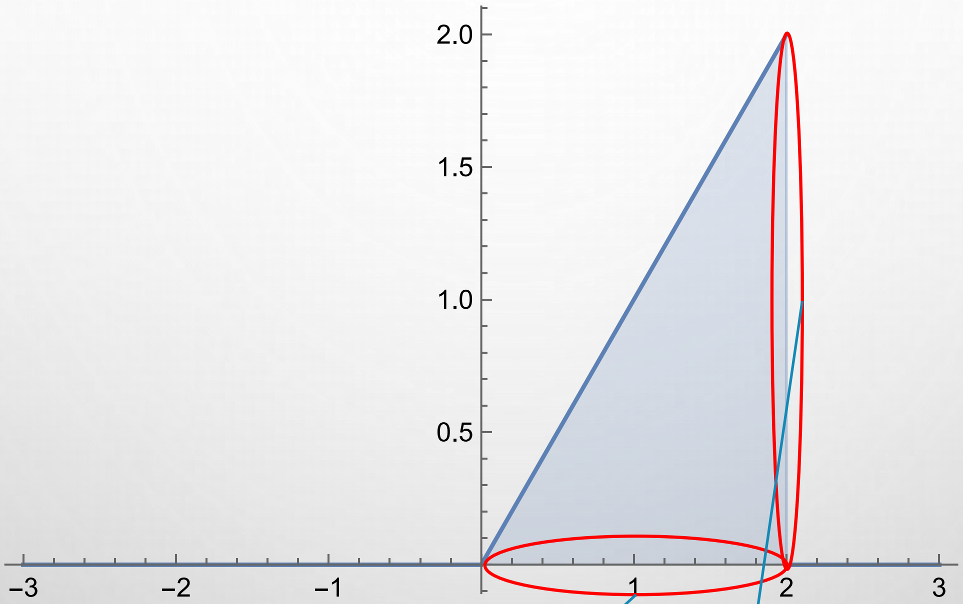


1. $g(t) = t[u(t) - u(t-2)]$

2. $f(t) = g'(t) = u(t) - u(t-2) + t[\delta(t) - \delta(t-2)]$
$= u(t) - u(t-2) - 2\delta(t-2)$

举例：计算下列信号的一阶微分

- 图像法



$$f(t) = u(t) - u(t-2) - 2\delta(t-2)$$

举例：简化下列式子

- 应用冲激信号与阶跃信号的性质和定义来进行化简

$$f(t) = \delta(2t - 2) \qquad = \frac{1}{2}\delta(t - 1)$$

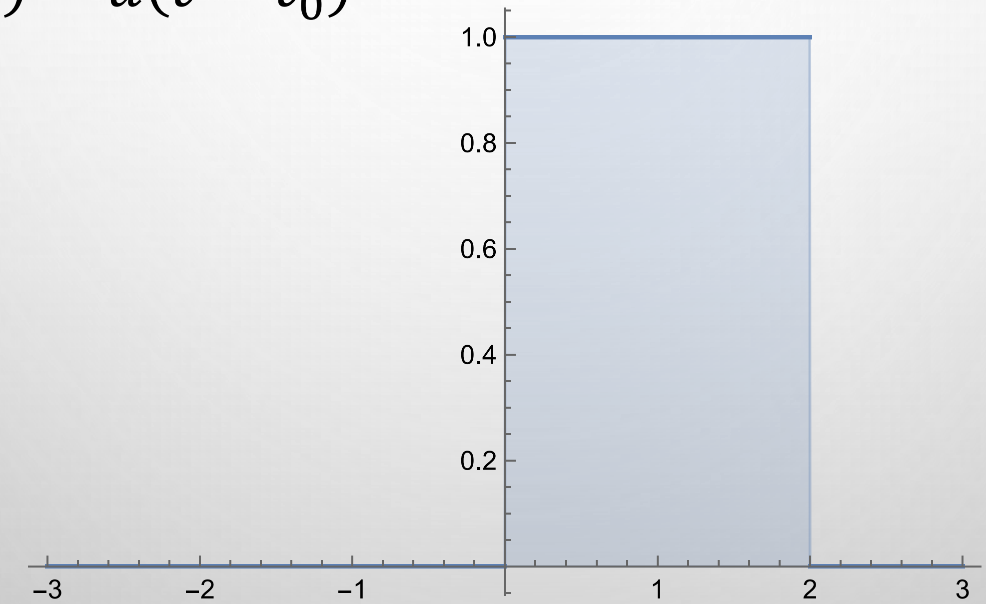
$$f(t) = u(4t - 2) \qquad = u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

举例：简化下列式子

$$f(t) = \int_{t-t_0}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

举例：简化下列式子

$$f(t)=\int_{t-t_0}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{t-t_0}\delta(\tau)d\tau$$
$$=u(t)-u(t-t_0)$$

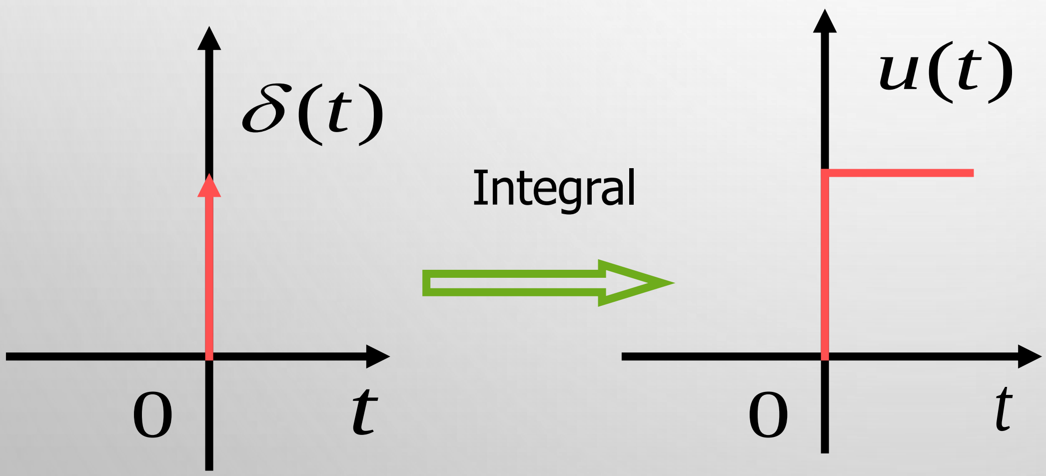


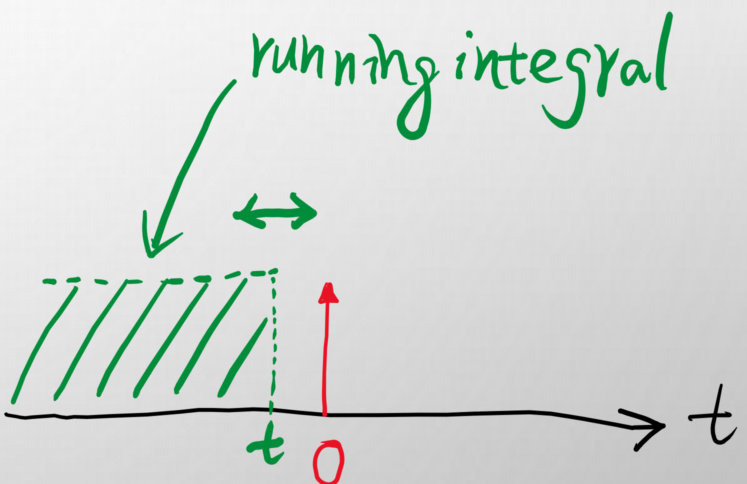
当$t_0=2$时：$f(t)=u(t)-u(t-2)$

阶跃信号与脉冲信号的积分视角1

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = 1 & t > 0 \\ \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$





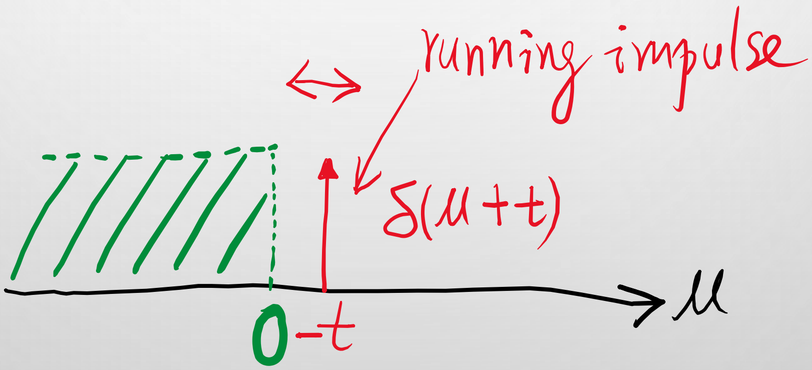
积分区间滑动

阶跃信号与脉冲信号的积分视角2

$\tau = \mu + t$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0} \delta(\mu + t) d(\mu + t) = \int_{-\infty}^{0} \delta(\mu + t) d\mu$$

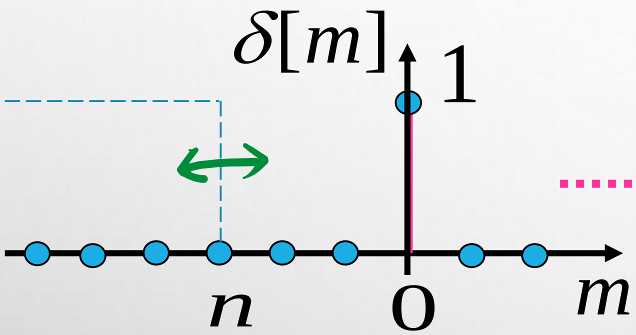
脉冲信号滑动

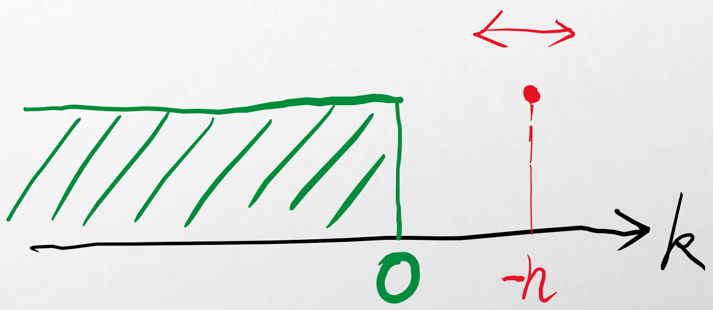


离散阶跃信号与脉冲信号的求和视角

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} \delta[k+n]$$





求和区间滑动

脉冲信号滑动

系统概念

系统的基本概念

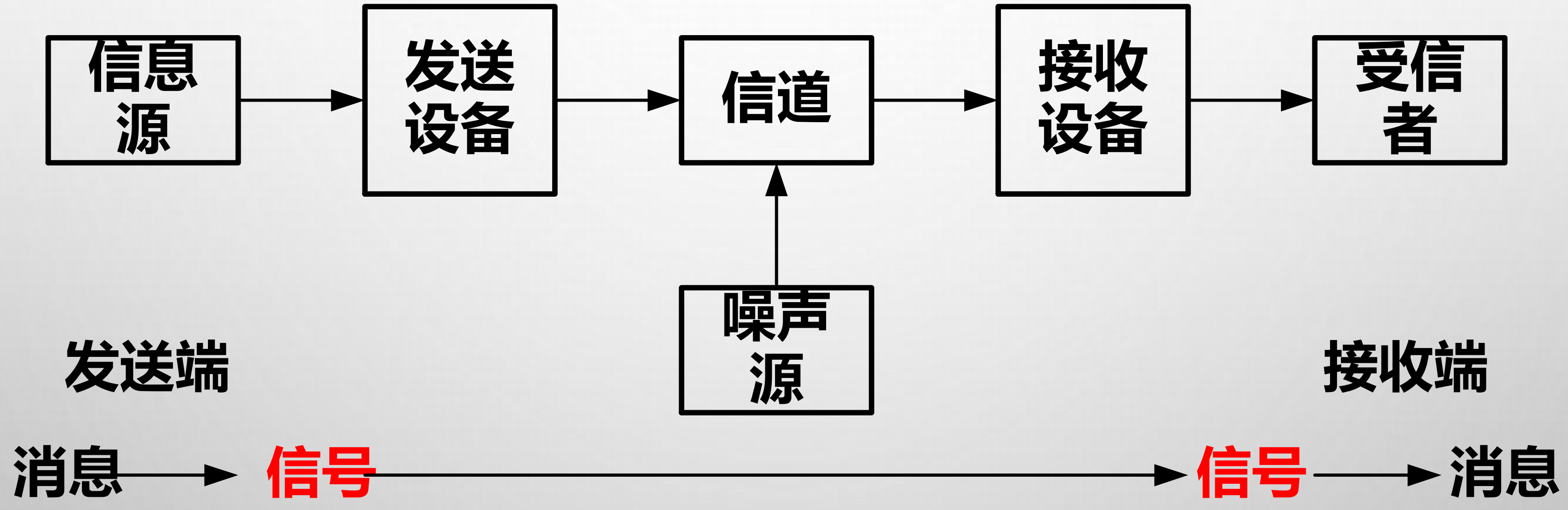
1. **系统定义：**

- 信号运算，包括信号的变换、处理、分析和理解等，都在系统中进行。

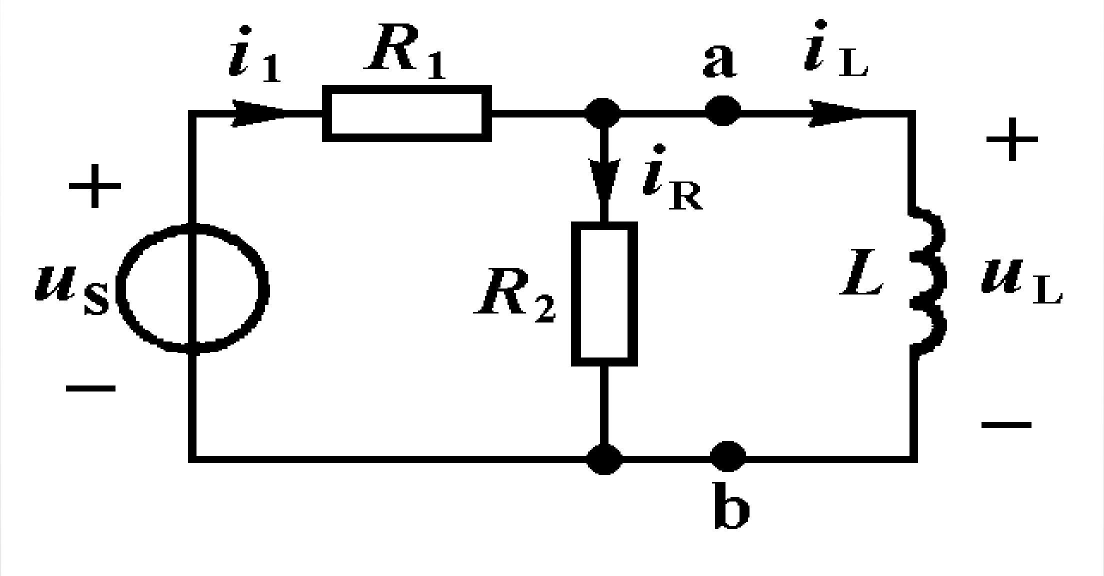
- 称系统的**输入信号**为**激励（Excitation）**，称系统的**输出信号**为**响应（Response）**。

通信系统

为传送消息而装设的全套技术设备（包括传输信道）。



电路系统



计算机控制系统
（包括**连续，数字，混合**系统）

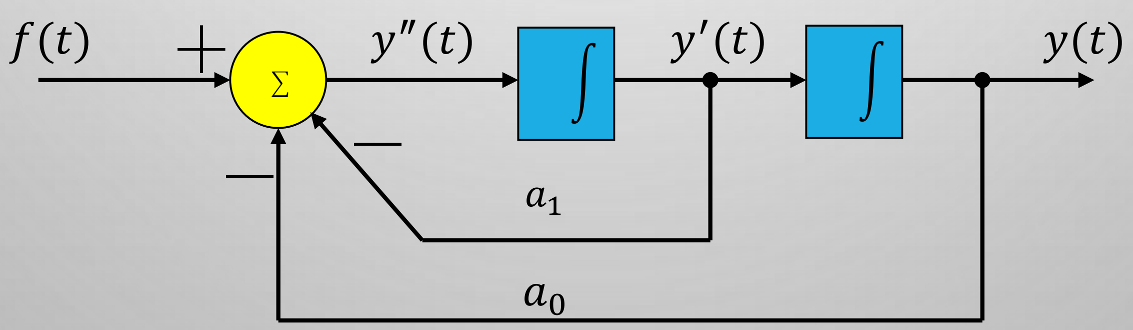
系统的描述

- 为了分析系统，首先要建立描述系统基本特性的模型

- **模型：是系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特性。**

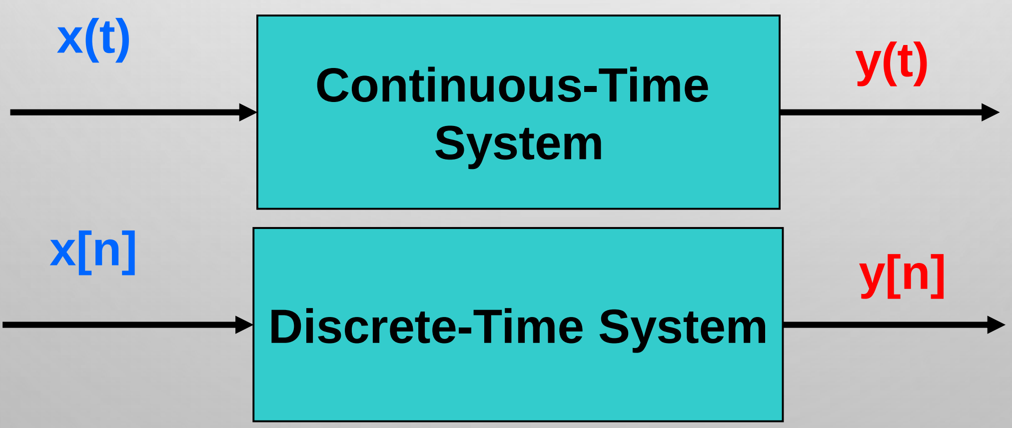
$$f(t) \rightarrow y(t)$$

- **系统分析中，需要建立的系统模型可分为数学模型和框图模型。**



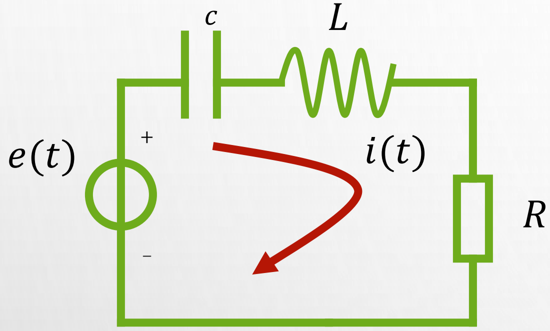
系统的数学模型

- 连续系统：系统的激励是连续信号时，其响应也是连续信号；
- 离散系统：系统的激励是离散信号时，其响应也是离散信号；
- 描述连续系统的数学模型是微分方程；
- 描述离散系统的数学模型是差分方程。



例

- R、L、C串联回路，若激励信号是电压源e(t)，求解电流i(t)。



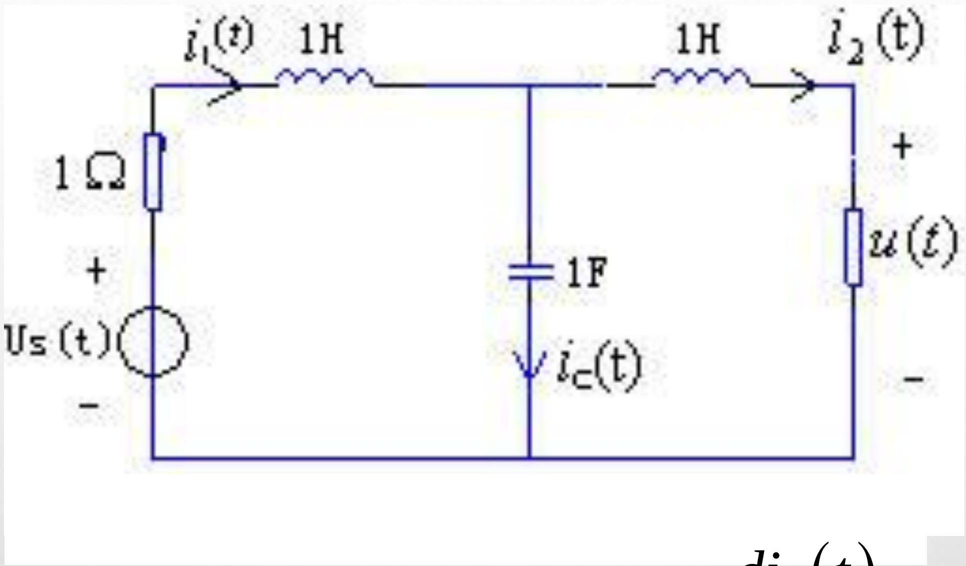
解：建立数学模型：

$$\because \begin{cases} i(t) = C\dfrac{du_c(t)}{dt} \\ u_c(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t) \end{cases}$$

$$\therefore LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} + RC\frac{di(t)}{dt} + i(t) = C\frac{de(t)}{dt}$$

例

- 求电压u(t)满足的微分方程。



$$i_1(t)=i_2(t)+i_C(t)$$

$$u_C(t)=L\frac{di_2(t)}{dt}+u(t)$$

$$Ri_1(t)+L\frac{di_1(t)}{dt}+u_C(t)=u_S(t)$$

$$u(t)=Ri_2(t)$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$$

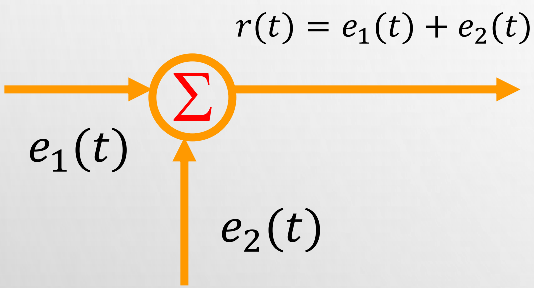
$$\boxed{\frac{d^3u(t)}{dt^3}+2\frac{d^2u(t)}{dt^2}+2\frac{du(t)}{dt}=\frac{1}{2}u_S(t)}$$

系统的框图表示

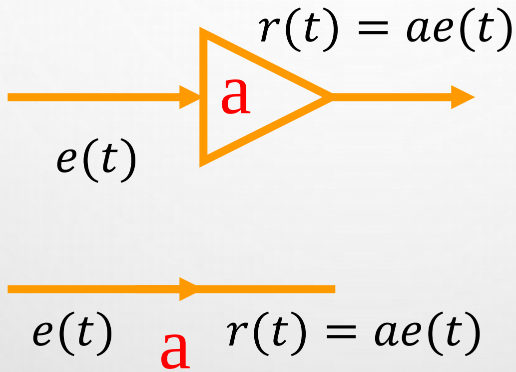
- 借助方框图（BLOCK DIAGRAM)表示系统模型。
- 每个方框图反映某种数学运算功能，给出该方框图输出与输入信号的约束条件，若干个方框图组成一个完整的系统。

例：

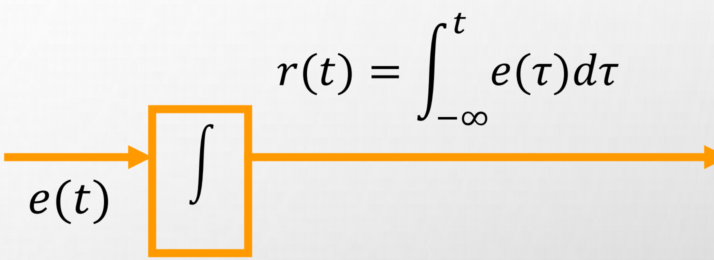
- 对于线性微分方程描述的系统，它的基本单元是相加、倍乘（标量乘法运算）和积分（或微分）。



相加



倍乘



积分

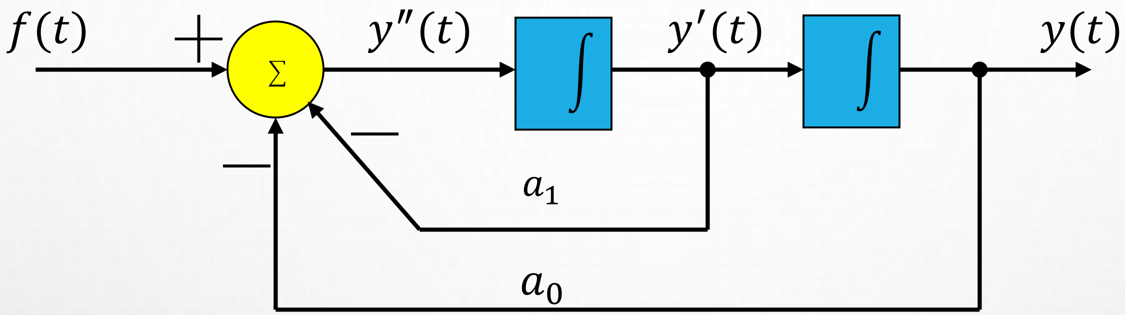
由系统框图列写微分或差分方程的一般步骤：

（1）选中间变量——对于连续系统，设其最右端积分器的输出为X(T)；对于离散系统，设其最左端延迟单元的输入为X(K)；

（2）写出各加法器输出信号的方程；

（3）消去中间变量X(T)或X(K)。

例：某连续系统的框图如下，写出该系统的微分方程。



解：

（1）选中间变量，设其最右端积分器的输出为y(t)；

（2）写出各加法器输出信号的方程。

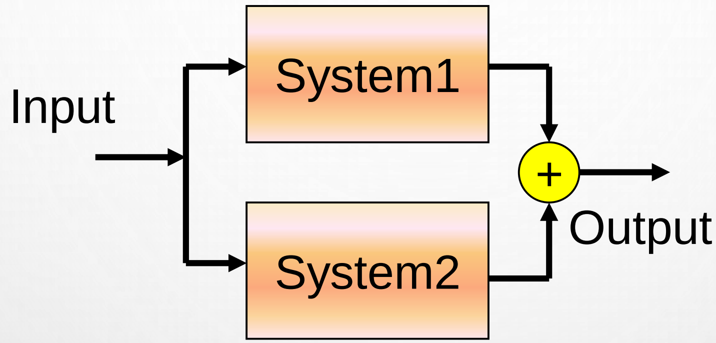
由加法器的输出，得：

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t)$$

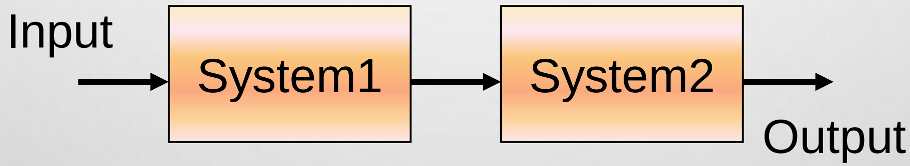
移项可得：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

框图并联和级联



Input
System1
System2
+
Output



Input
System1
System2
Output

系统的分类

- 按输入输出特性分**连续/离散/数字/混合**系统。
- 按系统特性分，有：
- **线性**或**非线性**系统
- **时不变**或**时变**系统
- **因果**或**非因果**系统(无记忆系统和记忆系统)
- **稳定**或**不稳定**系统
- **可逆**系统和**不可逆**系统

信号与系统第一性原理：叠加原理

- 线性系统满足**齐次性**和**可加性**；

若$f_1(t) \to y_1(t)$，$f_2(t) \to y_2(t)$

则对于任意常数a_1和a_2，有

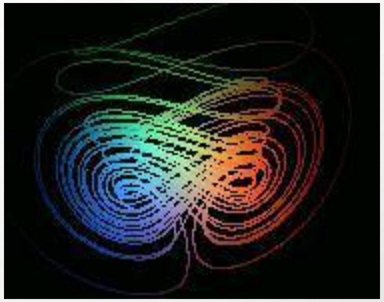
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \to a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

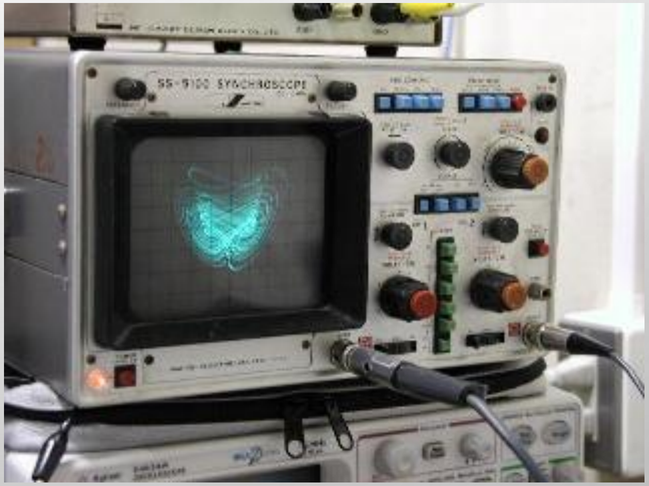
则为线性系统。

非线性系统

- **非线性系统不满足上述齐次性和可加性。**

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 35(y-x) \\
\frac{dy}{dt} &= -7x+28y-xz \\
\frac{dz}{dt} &= -3z+xy
\end{aligned}
$$





非线性系统大师：陈关荣

陈关荣 /CHEN GUAN RONG

陈关荣教授1981年获广州中山大学计算数学硕士学位，1987年获美国Texas A&M 大学应用数学博士学位，其后在美国Rice和Houston大学任教。自2000年起，他接受香港城市大学讲座教授职位工作至今，在该校成立了“混沌与复杂网络”学术研究中心并任主任。

荣誉奖项 /Awards

陈关荣教授于1997年被选为IEEE Fellow，2008年、2012年和2016年获国家自然科学二等奖，2011年获俄罗斯圣彼得堡国立大学授予荣誉博士学位和俄罗斯欧拉基金会颁发欧拉金质奖章，2014年获法国诺曼底大学授予荣誉博士学位并当选为欧洲科学院院士，2015年当选为发展中国家科学院院士。

学术研究 /Academic

研究工作主要集中在电子工程方面的一个核心领域—非线性系统的控制理论和动力学分析，及其在复杂网络等相关领域中的应用。自1981年以来，共发表了约600篇国际学术杂志论文、250多篇国际学术会议论文、共出版17部研究专著和高等教材，论文他引超过4万次，H指数109，是工程和数学领域高引用研究人员。

线性系统的特性：

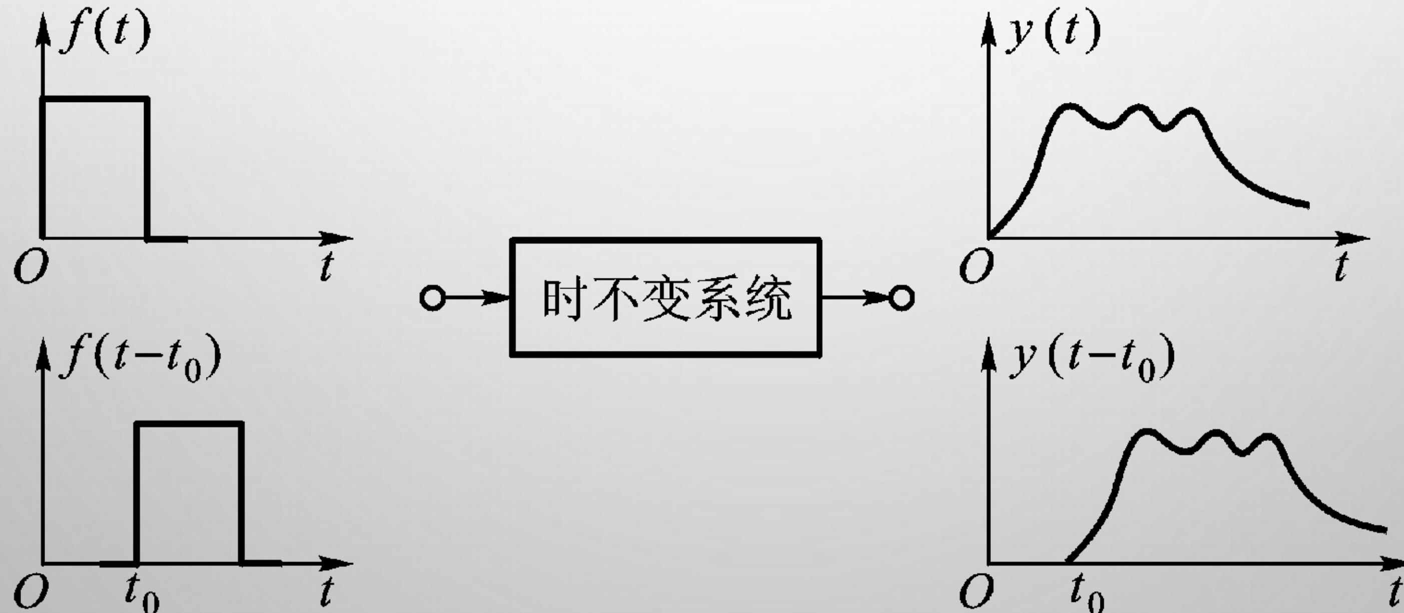
- **微分特性：若$f(t) \to y(t)$，则** $f'(t) \to y'(t)$
- **积分特性：若$f(t) \to y(t)$，则** $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \to \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$
- **频率一致性：**
  - 信号通过线性系统后不会产生新的频率分量。 尽管各频率分量的大小和相位可能发生变化。

时变系统和时不变系统

- 系统的参数是否随时间变化。

若 $f(t) \to y(t)$

则 $f(t-t_0) \to y(t-t_0)$



例：某连续时间系统定义为：$y(t) = \sin[x(t)]$，判断该系统是否时不变。

解：

$x_1(t)$

$y_1(t) = \sin[x_1(t)]$

$x_2(t) = x_1(t - t_0)$

$y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)]$

系统时不变

$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)]$

例：判断离散时间系统$y[n]=nx[n]$是否为时不变系统。

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]=nx_1[n]$$

$$y_1[n-m]=(n-m)x_1[n-m]$$

$$x_2[n]=x_1[n-m] \longrightarrow y_2[n]=nx_2[n]=nx_1[n-m]$$

$y_1[n-m]\neq y_2[n]$ ∴ 该系统为时变系统

技巧：考察一个系统是否时不变的常用方法是**检查特殊情况**：分别使用冲激函数和冲激函数的延迟作为输入，对比系统输出，从而做出判断。

线性时不变系统（LTI）

- 本课程主要讨论*线性时不变*系统

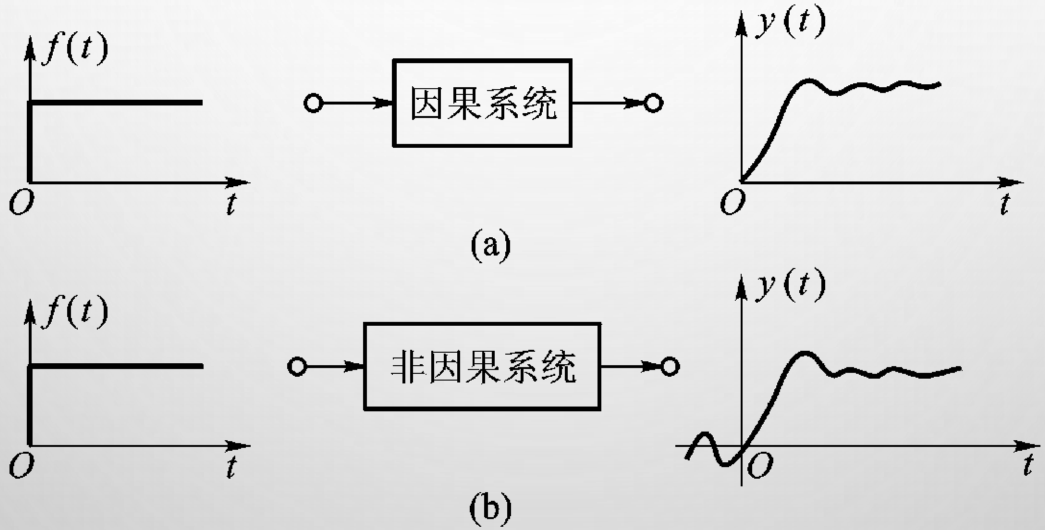
  (LTI: *LINEAR TIME INVARIANT*)

- 既 满足线性性质，又满足时不变性质

因果系统与非因果系统

- 因果系统：是指系统在t_0时刻的响应只与$t=t_0$和$t<t_0$时刻输入有关，否则，即为非因果系统。

- 因果性（Causality)：激励是产生响应的原因，响应是激励引起的后果。　一个因果系统一定是**物理可实现**系统，反之亦然



例子：　系统模型若为；　$r_1(t) = e_1(t-1)$　此为因果系统。

系统模型若为；　$r_2(t) = e_2(t+1)$　此为非因果系统。

稳定性

- 一个**能实际应用的系统必须是稳定的**，因此稳定性的讨论具有特别重要的地位。
- 一般系统的**稳定性**讨论需建立在**有界输入-有界输出**（**BIBO**）意义上，即：**如果系统能对任何有界输入信号产生有界的输出响应信号，则该系统是稳定的。**

1. **平移、翻转和尺度运算都是稳定的；**
2. **乘/加取值有限的常量或变量的运算是稳定的；**
3. **微分运算是稳定的，**而积分运算却是不稳定的，因为有界函数的积分可能无界；
4. 差分运算是稳定的，而累加运算是不稳定的；
5. **即时映射在映射函数有界时才是稳定的；**

系统稳定性

- 一般的稳定性判断相当复杂，它与所讨论问题有关，往往需使用特定领域中的特定判断方法。
- 本书仅限于讨论其中最简单系统的，尤其是**LTI**系统的稳定性。
- 在后续章节分别给出根据LTI系统单位冲激响应（或单位脉冲响应）或系统函数零极点分布进行判别的准则。

可逆系统(INVERTIBLE SYSTEM)

- 若系统**在不同的激励信号作用下产生不同的响应**，则称此系统为可逆系统。
- 对每个可逆系统都存在一个逆系统，当原系统与其逆系统**级联**后，输出信号与输入信号相同。
- 判断系统是否可逆，可以从**反证法**入手。

例如：

这两个系统是互为逆系统的：$r_1(t)=5e_1(t) \leftrightarrow r_2=1/5e_1(t)$

该系统是不可逆的：$r_3(t)=e_3{}^2(t)$

实例：编码器是可逆系统。

典型例题

$$(1)\ r(t) = e^{-t}x(t)$$

$$(2)\ r(t) = x(t+2)$$

$$r(t)=e^{-t}x(t)$$

- ***因果，***即时系统
- ***线性***

$$let\ r_1(t)=T\left[x_1(t)\right],r_2(t)=T\left[x_2(t)\right]$$

$$T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]=e^{-t}\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]$$

$$a_1T\left[x_1(t)\right]+a_2T\left[x_2(t)\right]=a_1e^{-t}x_1(t)+a_2e^{-t}x_2(t)$$

$$\therefore T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]=a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$$

$$r(t) = e^{-t} x(t)$$

- ***时变***

$$T\left[x(t-t_0)\right] = e^{-t} x(t-t_0)$$

$$r(t-t_0) = e^{-t+t_0} x(t-t_0) \neq T\left[x(t-t_0)\right]$$

- ***不稳定***

$if\ \ x(t) = 1, r(t) = e^{-t}$ which is unbounded.

$$r(t)=x(t+2)$$

- ***非因果*** 系统输出和未来相关
- ***线性***

$$T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]=a_1x_1(t+2)+a_2x_2(t+2)$$
$$a_1T\left[x_1(t)\right]+a_2T\left[x_2(t)\right]=a_1x_1(t+2)+a_2x_2(t+2)$$

- ***时不变***

$$T\left[x(t-t_0)\right]=x(t+2-t_0)$$
$$r(t-t_0)=x(t+2-t_0)=T\left[x(t-t_0)\right]$$

- ***稳定***

$$\text{For arbitrary } \left|x(t)\right|\le M,\ \left|r(t)\right|=\left|x(t+2)\right|\le M.$$

更多例题：判断下述系统是不是线性、时不变、因果、稳定的

(a) $y(t)=|f(t)|$

(b) $y(t)=f(t)\cos(2\pi t)$

(c) $y(t)=f(2t)$

(d) $y(t)=3f(t+2)+4$

(e) $y(t)=f(t)-f(t-2)$

(f) $y(t)=\int_0^t f(x)dx$

$$(g)\ y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} f[n-k]$$

$(h)\ y[n]=2f[n]+1$

$(i)\ y[n]=f[n]f[n-1]$

a) 系统 $y(t)=|f(t)|$

该系统是**非线性、时不变、因果、稳定的**。

原因：取绝对值是非线性运算使系统是**非线性**的；它与运算时刻无关使系统是**时不变**的；它是**即时运算**（输出仅取决于当前时刻的输入值）使系统是**因果**的；它不改变信号最大模值使系统是**稳定**的。

b)　系统　$f(t)\cos(2\pi t)$

该系统是**线性、时变、因果、稳定的**。

原因：系统输出仅取决于当前时刻的输入值使系统是**因果**的；由于乘的是一个幅值不大于1的量，使系统是**稳定**的；并且

$$\left(a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right)\cos(2\pi t)$$
$$=a_1 f_1(t)\cos(2\pi t)+a_2 f_2(t)\cos(2\pi t)$$
$$=a_1 y_1(t)+a_2 y_2(t)$$

$$T\{f(t-\tau)\}=f(t-\tau)\cos(2\pi t)$$
$$\neq f(t-\tau)\cos(2\pi(t-\tau))=y(t-\tau)$$

c) 系统 $y(t)=f(2t)$

该系统是**线性、时变、非因果、稳定的**。原因：

$$a_1 f_1(2t)+a_2 f_2(2t)=a_1 y_1(t)+a_2 y_2(t)$$

$$f(2(t-\tau))=f(2t-2\tau)\neq f(2t-\tau)=y(t-\tau)$$

在T>0时，当前时刻T的系统输出值取决于将来时刻2T的输入值；函数值域没有变化，即是稳定的。

d)　系统　$y(t)=3f(t+2)+4$

该系统是**非线性、时不变、非因果、稳定的**。原因：

$$y(t)=3\left(f_1(t+2)+f_2(t+2)\right)+4\neq$$

$$\left(3f_1(t+2)+4\right)+\left(3f_1(t+2)+4\right)=y_1(t)+y_2(t)$$

$$Max\{|y(t)|\}=Max\{|3f(t+2)+4|\}\leq Max\{|3f(t)|\}+4$$

当前时刻T的系统输出值取决于将来时刻$T+2$的输入值，故是非因果的。同时可判断是时不变的。

$$y(t) = f(t) - f(t-2)$$

e) 该系统是**线性、时不变、因果、稳定的。**

f) 该系统是**线性、时变、非因果、不稳定的。**原因是：

系统：$y(t)=\int_0^t f(x)dx$

$$\int_0^t f(x-\tau)dx = \int_{-\tau}^{t-\tau} f(x)dx \neq \int_0^{t-\tau} f(x)dx = y(t-\tau)$$

$$\int_0^t f(x)dx = -\int_t^0 f(x)dx$$

在$T<0$时，T时刻的输出值取决于它的将来时段(T,0]中的输入值；当激励信号$F(T)=U(T)$有界时，输出响应$Y(T)=TU(T)$却无界。

$$y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}f[n-k]$$

- (G) 移动平均系统是对激励信号不同延迟后的信号加权和，因此系统线性；同时可以证明系统是时不变的；由于移动平均系统当前时刻的响应与未来的激励有关，因此系统非因果；当系统激励有界时，有

$$\left|y[n]\right|=\left|\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}f[n-k]\right|\leq\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}\left|f[n-k]\right|<+\infty$$

因此系统稳定。

- (H) 此例与(D)类似，是非线性、时不变、因果、稳定的离散时间系统。
- (I) 由于该系统响应是激励信号与其延迟后的相乘，故系统非线性、时不变、因果、稳定。

$$(h)\ y[n] = 2f[n] + 1$$
$$(i)\ y[n] = f[n]f[n-1]$$

系统分析方法

（1）时域分析法：

时域经典方法：通过求解描述系统的线性常系数微分方程或差分方程分析系统；时域卷积方法：通过时域的卷积或者卷积和求解系统各响应；

（2）变换域方法：

频域分析方法：应用傅里叶变换，在频域中分析线性时不变系统；复频域或Z域分析方法：应用拉普拉斯变换或者Z变换，分析线性时不变系统；

（3）状态变量分析方法：通过分析描述线性时不变系统的状态变量方程，进而求解系统各类响应和进行系统特性分析，同样求解也可在时域中进行，或变换域进行。