第一章——信号

讲授BY **陆凯（WK1-9）**

PPT原文件BY **张东**

回顾

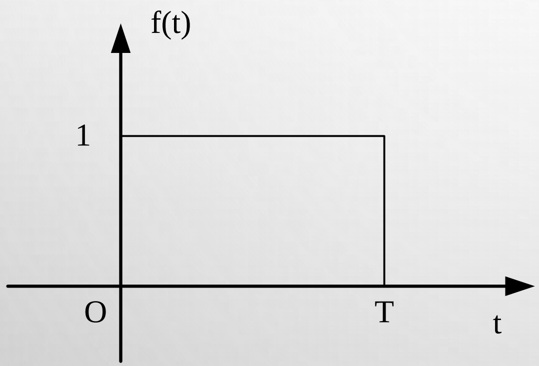
- 信号与系统应用范畴
- 信号与系统重要性
- 信号与系统研究内容
- 信号概述
- 系统概述
- 信号的常见类型
- 信号的分类

本次内容

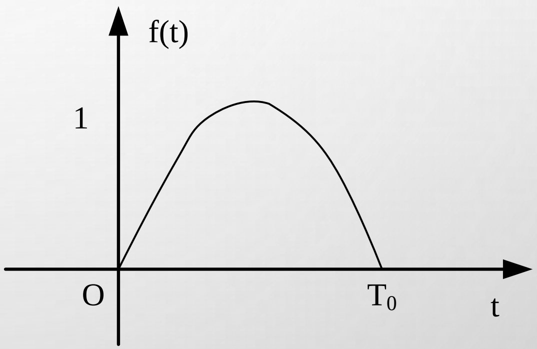
- 功率信号和能量信号
- 实信号与复信号
- 指数函数与正余弦函数
- 周期信号
- 信号自变量变换：平移、翻转、尺度变换
- 信号因变量变换：相加、相乘、微积分等
- 奇异函数

能量信号和功率信号

- 能量信号：能量信号是一个脉冲式信号，它通常只存在于有限的时间间隔内，还有一些信号存在于无限时间间隔内，但其能量的主要部分集中在有限时间间隔内，这样信号也称之为能量信号。



（a）矩形脉冲



（b）钟形脉冲

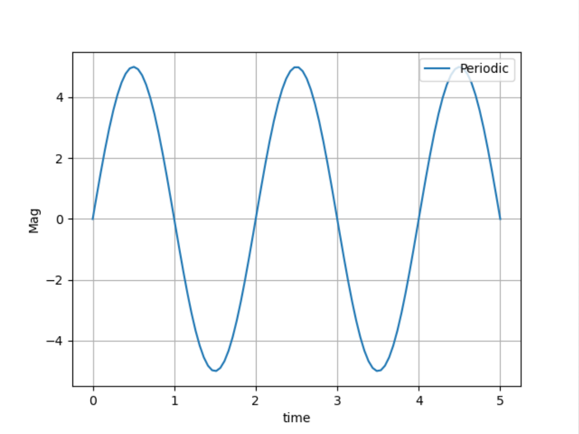
有限持续时间信号一定是能量信号；反之，则未必。

例如：高斯信号是无限持续时间信号，却是能量信号。

能量信号和功率信号

- **功率信号**：当时间间隔趋于无限时，其在1欧姆电阻上所消耗的能量也趋于无穷大，但在1欧姆电阻上消耗的平均功率是大于零的有限值，则这样的信号为功率信号。作为功率信号其平均功率可定义为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^{2}\,dt$$



能量信号其功率必定有限，但称为能量信号，非功率信号，二者互斥；反之，则未必成立。例如：正弦信号是功率信号，却是能量无限信号。

能量信号和功率信号判别

- 连续时间信号能量：$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt$
- 连续时间信号功率：$P=\underset{T\to\infty}{\mathrm{LIM}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(t)|^2\,dt$
- 离散时间信号能量：$E=\sum_{-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$
- 离散时间信号功率：$P=\underset{N\to\infty}{\mathrm{LIM}}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=+N}|x(n)|^2$

能量信号和功率信号的判断方法

- 判断能量信号和功率信号的方法：

1）先计算信号能量，若为有限值则为能量信号；

2）若1）不满足，则计算信号功率，若为有限值且不为0则为功率信号；

3）若上述两者均不符合，则信号既不是能量信号，也不是功率信号。

能量信号与功率信号判别例题

例1：

$$f(t)=\cos(\omega_0 t)$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2(\omega_0 t)dt=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[1+\cos(2\omega_0 t)]/2\,dt=\infty(\text{非能量信号})$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f^2(t)dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos^2(\omega_0 t)dt$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}[1+\cos(2\omega_0 t)]/2\,dt=\frac{1}{2T}\int_{0}^{+T}[1+\cos(2\omega_0 t)]dt$$

$$=\frac{1}{2}\text{（功率信号）}$$

能量信号与功率信号判别例题

例2：

$$f(t) = e^{-3t} u(t)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6t} u(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-6t}\, dt = \frac{1}{6}$$

(能量信号)

能量信号与功率信号判别例题

例3：

$$f(t) = u(t+2) - u(t-2)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \int_{-2}^{+2} 1dt = 4$$

(能量信号)

能量信号与功率信号判别例题

例4：

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{4}{3}<+\infty$$

(能量信号)

实信号和复信号

- 实信号：函数值为实数；
- 复信号：函数值为复数的信号。

例：复指数信号

$$f(t)=e^{st},-\infty<t<\infty,s=\sigma+j\omega$$

则：$f(t)=e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}\cos\omega t+je^{\sigma t}\sin\omega t$

$$\mathrm{Re}[f(t)]=e^{\sigma t}\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}[f(t)]=e^{\sigma t}\sin\omega t$$

离散情况下：

$$f(k)=e^{(\alpha+j\beta)k}=e^{\alpha k}e^{j\beta k}$$

$$\mathrm{Re}[f(k)]=e^{\alpha k}\cos\beta k$$

$$\mathrm{Im}[f(k)]=e^{\alpha k}\sin\beta k$$

常用函数

实部常见形式$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)\ \ (-\infty < t < \infty)$

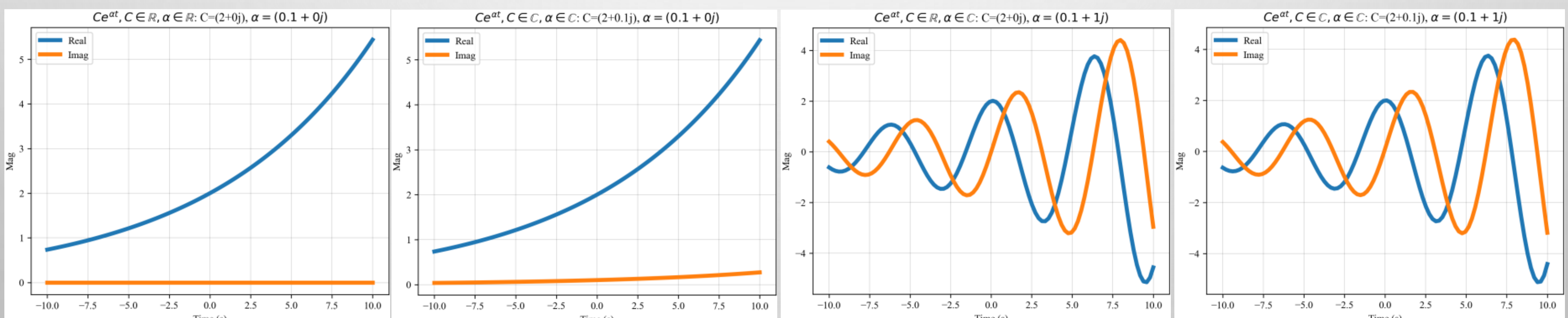
- 通用特征函数

$$Ce^{\alpha t}$$

$$y'' + py' + qy = 0(p, q\text{为常数})$$

- 四种情况

$C \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$　　$C \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$　　$C \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}$　　$C \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$

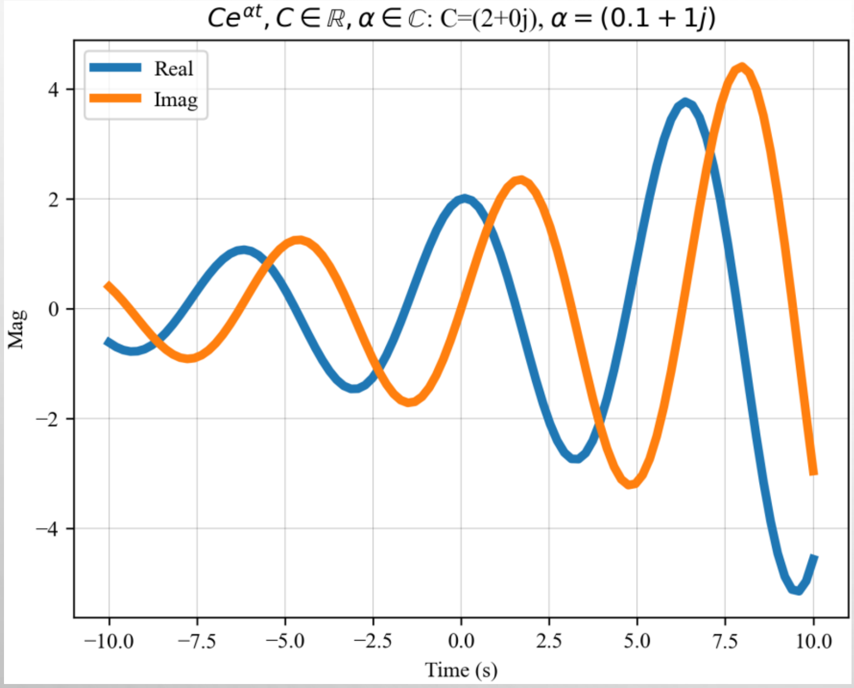


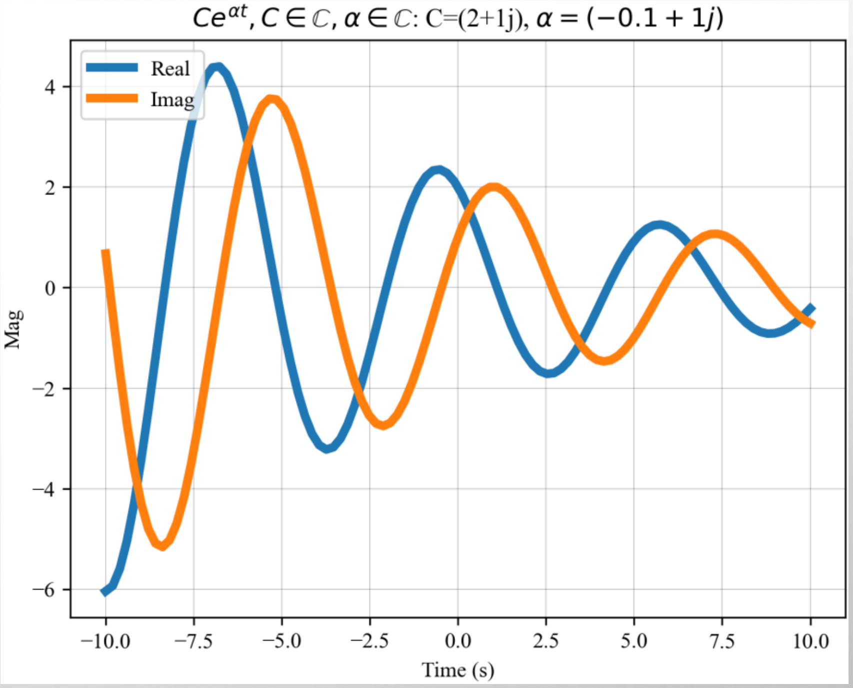
指数信号的一个重要特点是它**对时间的微分或积分仍然是指数信号**。

复指数信号

如何判断C值是否为实数？

$$f(t) = Ae^{(\alpha + j\omega)t} = Ae^{\alpha t}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$



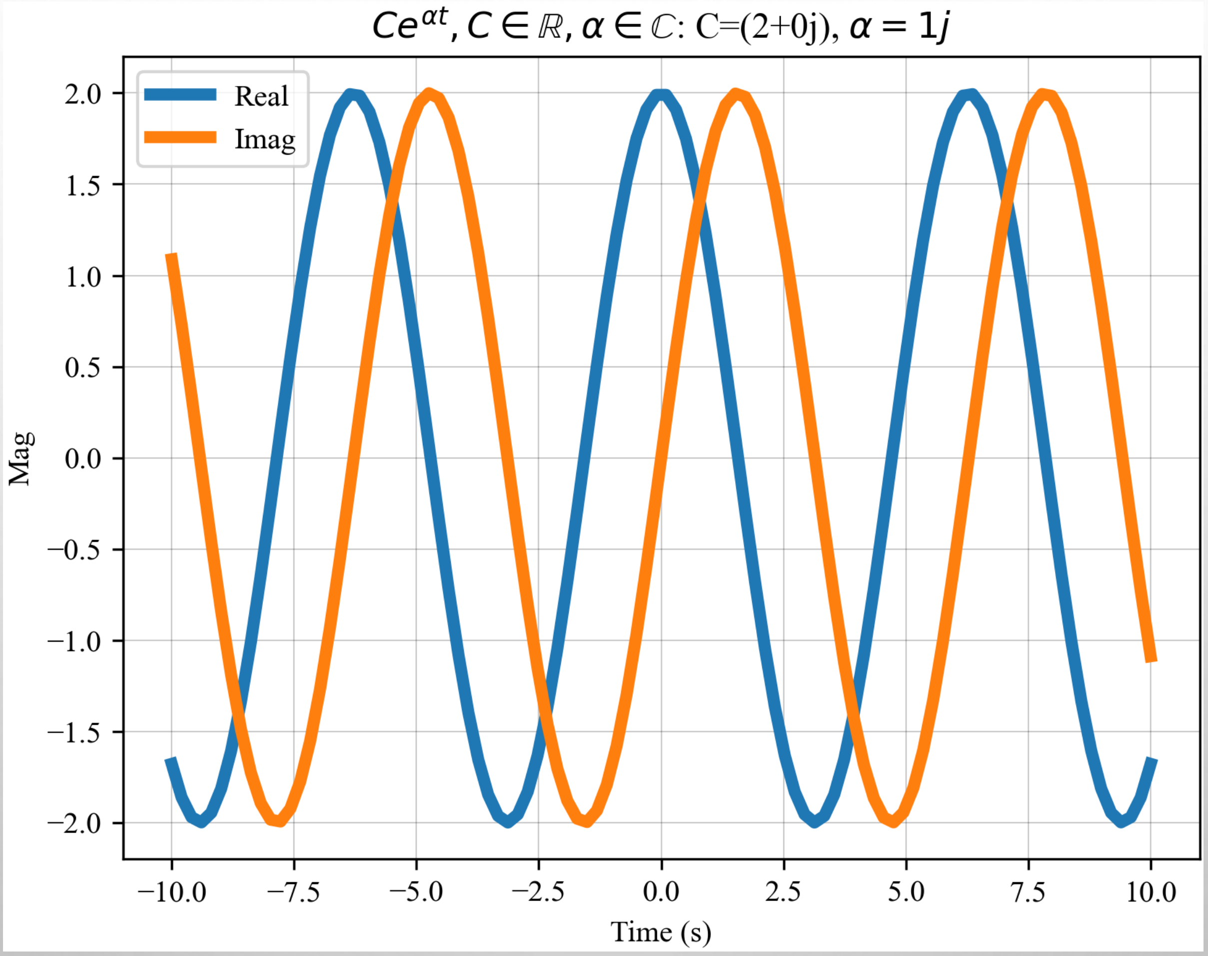


实部 $a(t) = Ae^{\alpha t}\cos\omega t$

虚部 $b(t) = Ae^{\alpha t}\sin\omega t$

正弦信号

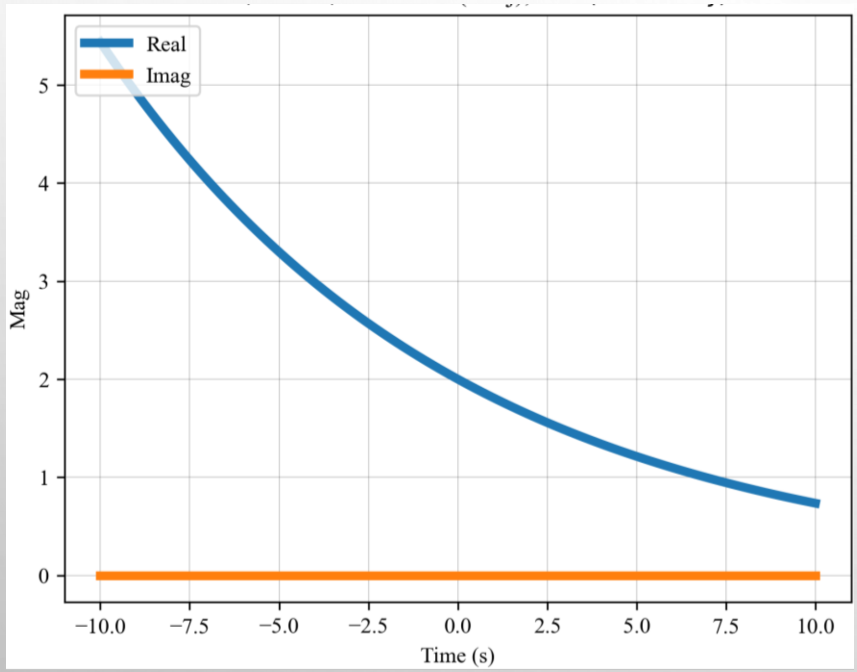
$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (-\infty < t < \infty)$$

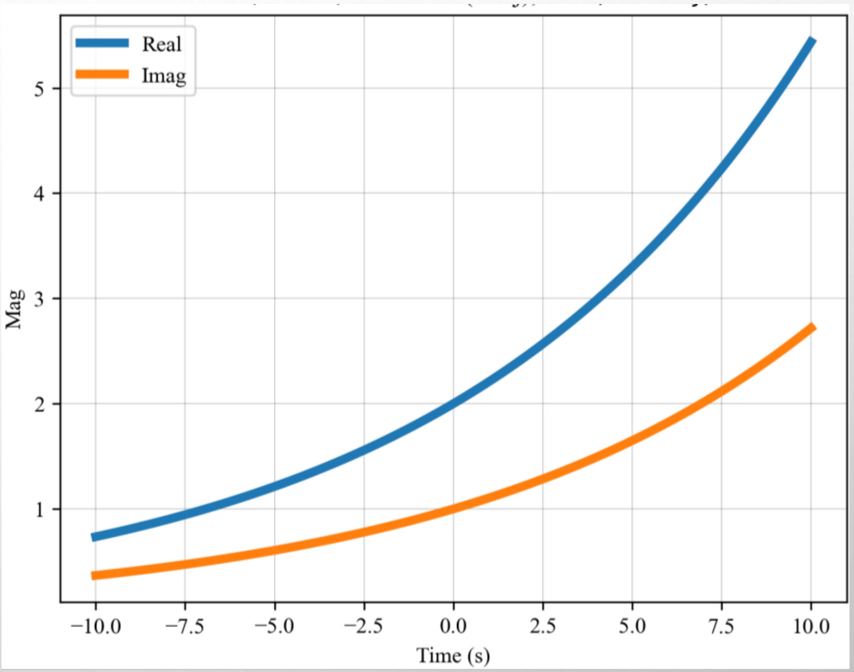


$$\varphi = ?$$

实指数信号

$$Ce^{\alpha t}$$

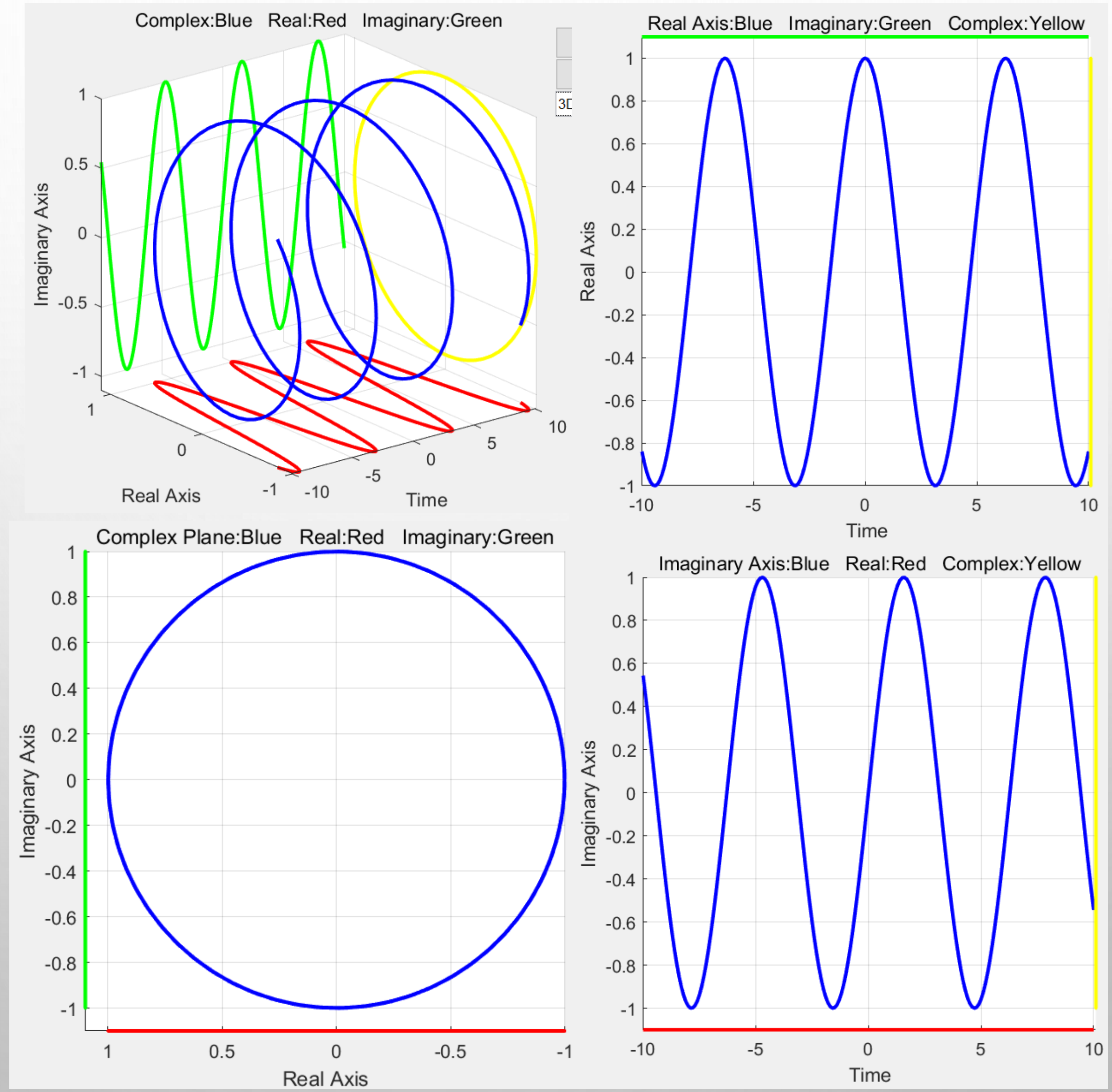




橙色线差异原因?

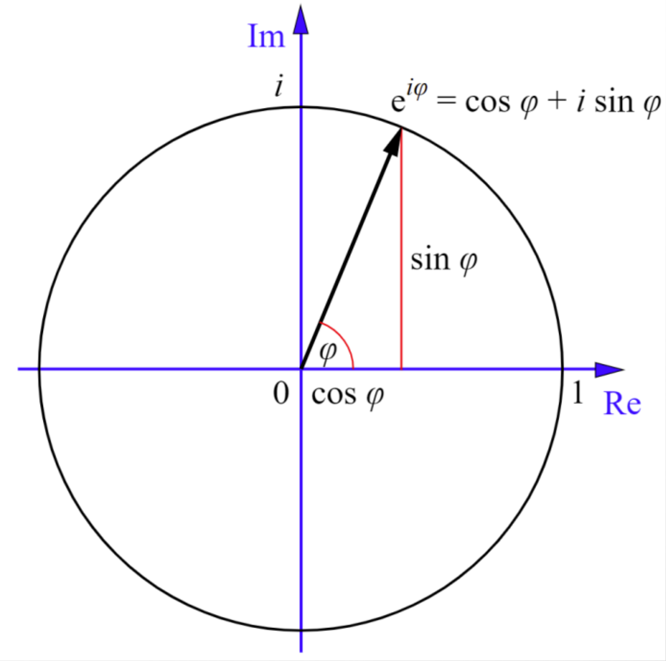
时谐函数 $e^{j\omega t}$

- 几种视角



欧拉公式

- $e^{j\varphi} = cos(\varphi) + jsin(\varphi)$



利用欧拉公式做三角和差计算

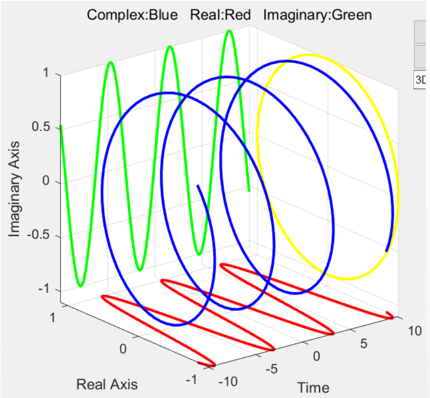
$cos(\alpha+\beta)$

$$cos(\alpha+\beta) = \frac{e^{j(\alpha+\beta)} + e^{-j(\alpha+\beta)}}{2}$$

$$= \frac{[\cos(\alpha) + jsin(\alpha)] * [\cos(\beta) + jsin(\beta)] + [\cos(-\alpha) + jsin(-\alpha)] * [\cos(-\beta) + jsin(-\beta)]}{2}$$

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

时谐函数周期性



连续： $\boldsymbol{e^{j\omega t}}$ $\quad f(t) = f(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

$$\because e^{j\omega t} = e^{j\omega\,(t+T)} = e^{j\omega t} e^{j\omega T}$$

$$\therefore \omega T = 2m\pi$$

$$\therefore T = \frac{2m\pi}{\omega}$$

离散： $\boldsymbol{e^{jan}}$ $\quad f(k) = f(k + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

$$\because e^{jan} = e^{ja\,(n+N)} = e^{jan} e^{jaN}$$

$$\therefore aN = 2m\pi$$

$$\therefore N = \frac{2m\pi}{a}$$

正弦信号周期性

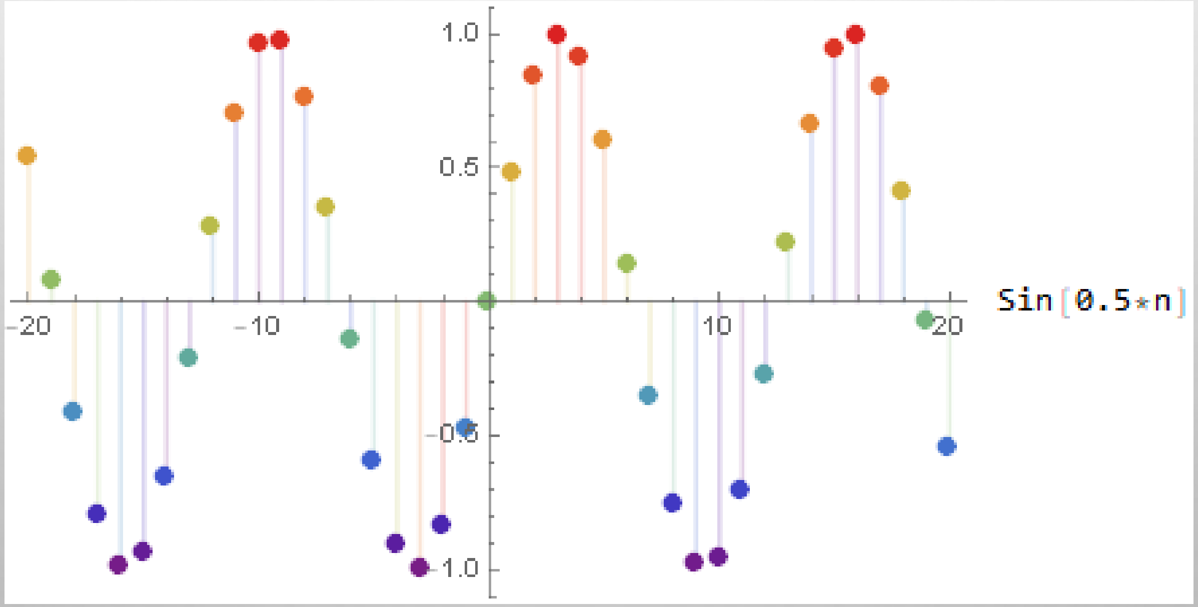
$$N = \frac{2m\pi}{a}$$

当$\frac{2\pi}{a} = \frac{N}{M}$,N，M为无公因子的整数

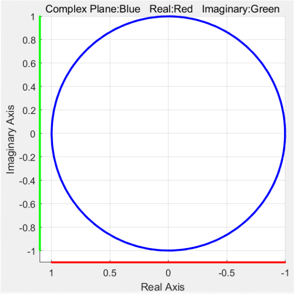
正弦序列：$f[n] = \sin[an]$是周期信号

其周期为:$N = M\frac{2\pi}{a}$;

否则:序列不具有周期性，但其包络线仍为正弦函数

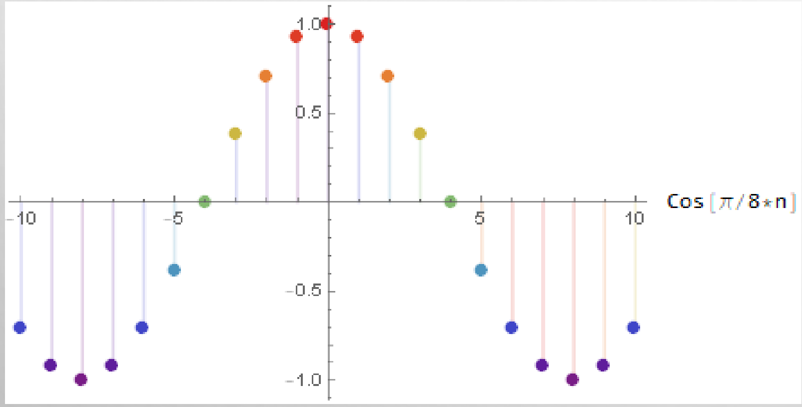


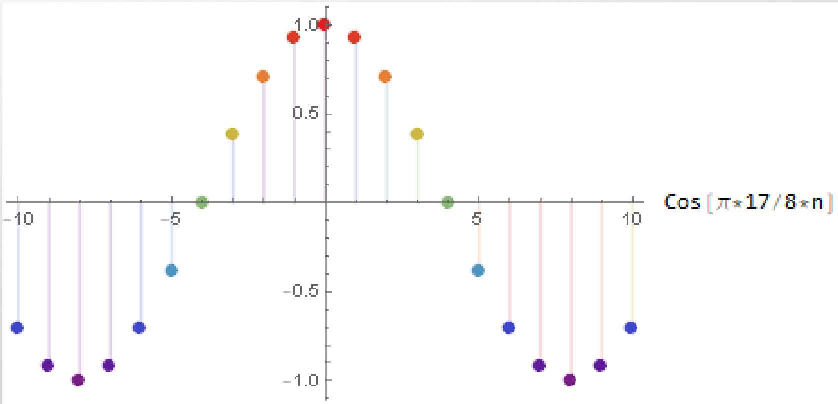
离散$e^{j\omega n}$ 时谐函数周期性



时域周期性 $f(k) = f(k + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

频域周期性 $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega n}$





信号周期性

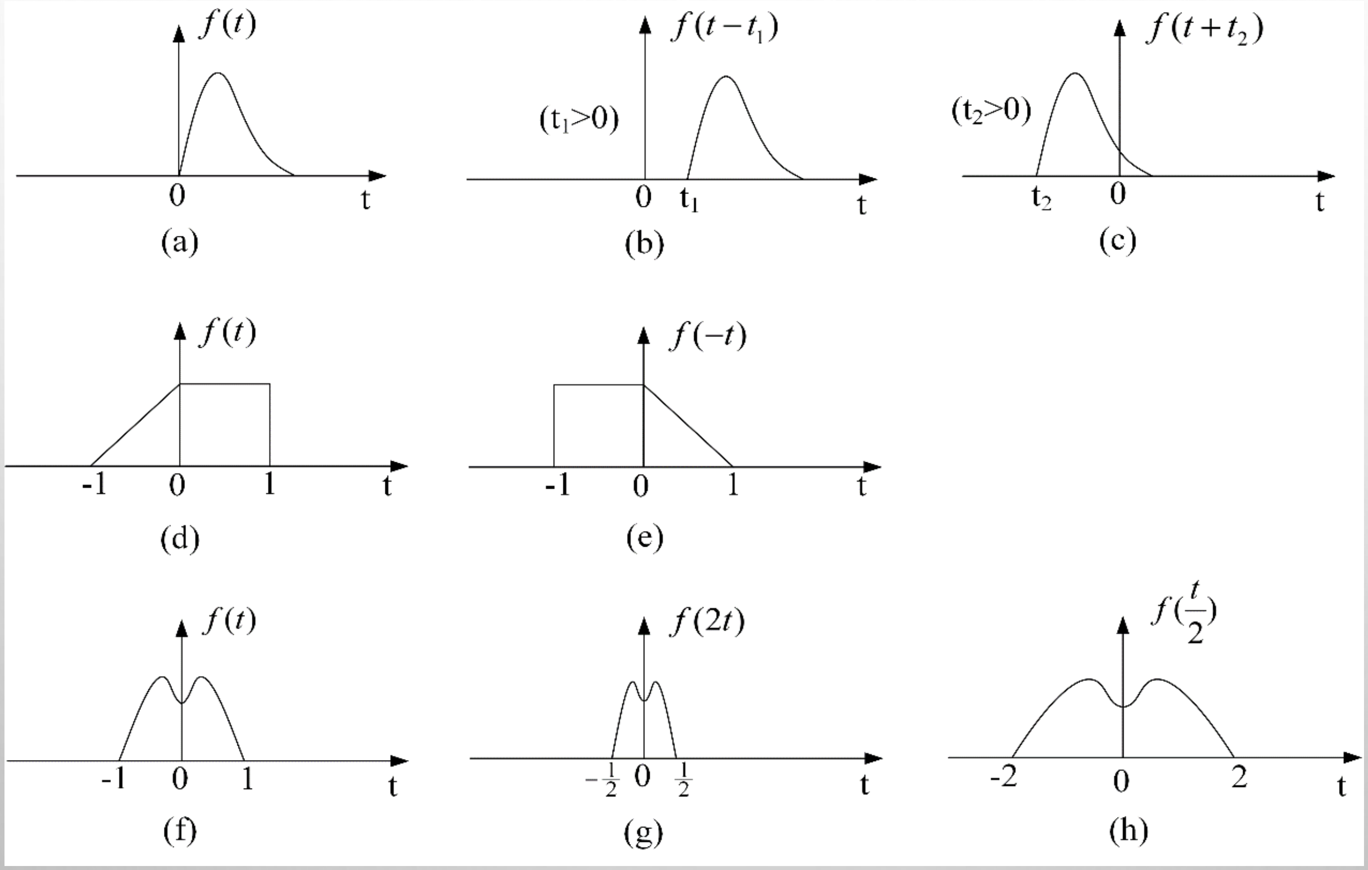
- **例5** 判断下列信号是否周期信号，若是，判断其周期。
- (1) $f(t) = \sin(4t) + \cos(5t)$
- (2) $f[n] = \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)$
- (3) $f[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$
- (4) $f[n] = \sin(2n)$

信号变换-自变量

1. **对时间变量的运算**：即线性坐标变换，包括**平移、翻转和尺度变换。（连续信号）**

- $f(t-\tau)$ 是信号$f(t)$ 的平移，其中右移时为延迟；左移时为超前。
- $f(-t)$ 是信号的翻转，它把信号的波形绕纵轴旋转180度。
- $f(at)$ 是信号的尺度变换，其中，当 $a>1$ 时为波形的收缩；当$0<a<1$时为波形的扩展。

信号自变量变换示例图

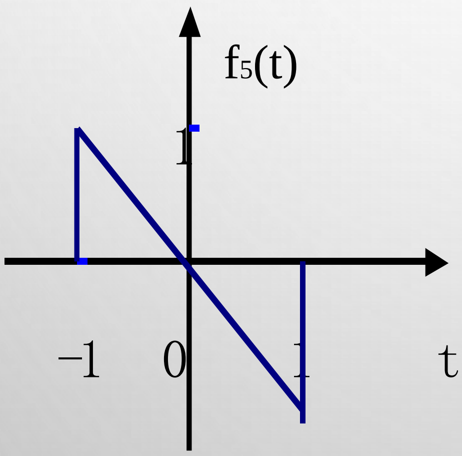


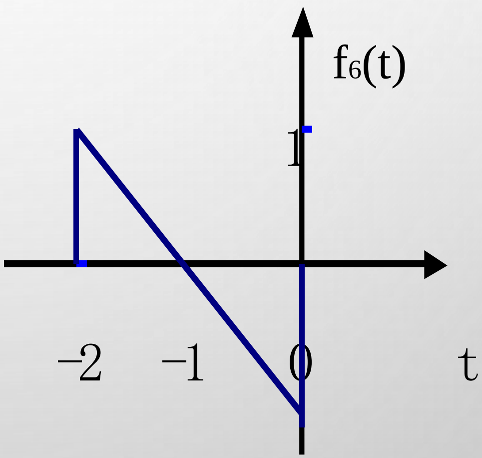
$f(t)$
0
t
(a)
$f(t-t_1)$
(t_1>0)
0
t_1
t
(b)
$f(t+t_2)$
(t_2>0)
t_2
0
t
(c)
$f(t)$
-1
0
1
t
(d)
$f(-t)$
-1
0
1
t
(e)
$f(t)$
-1
0
1
t
(f)
$f(2t)$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
t
(g)
$f(\frac{t}{2})$
-2
0
2
t
(h)

信号变换-自变量　平移

对于信号F(T)或F(K)，延时信号F(T-T_0)或F(K-K_0)表示将原信号沿正T（或K）轴平移T_0（或K_0）

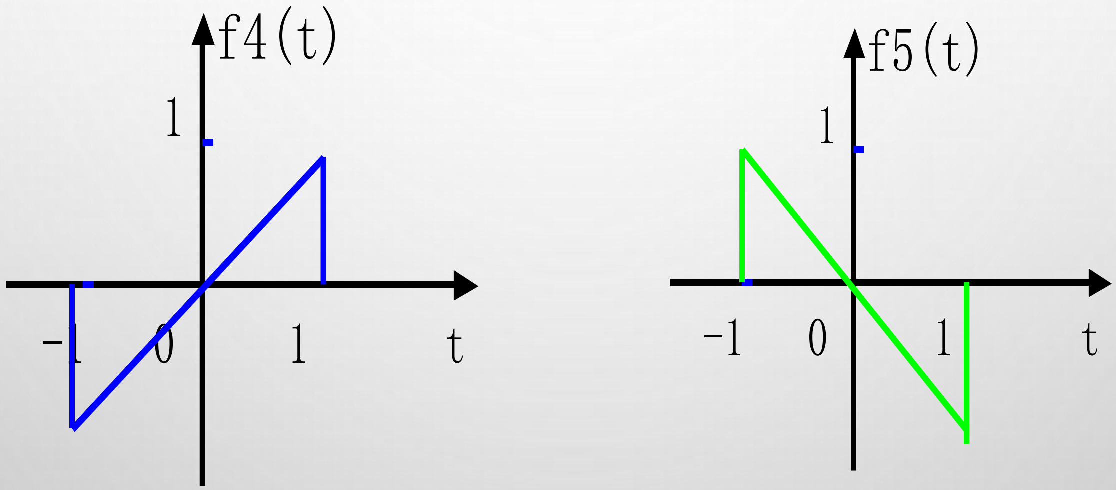
例：　左移:　$f_6(t) = f_5(t+1)$





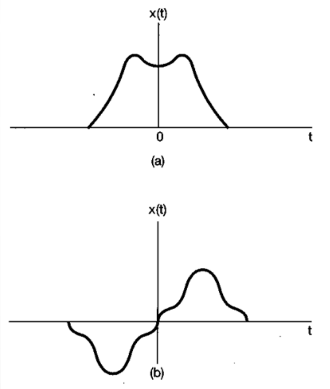
信号变换-自变量　反转

将信号F(T)或F(K)中的自变量T（或K）换为-T（或-K），其含义是将信号以纵坐标为轴反转（或称为反折）。



时间轴反转

信号变换-自变量

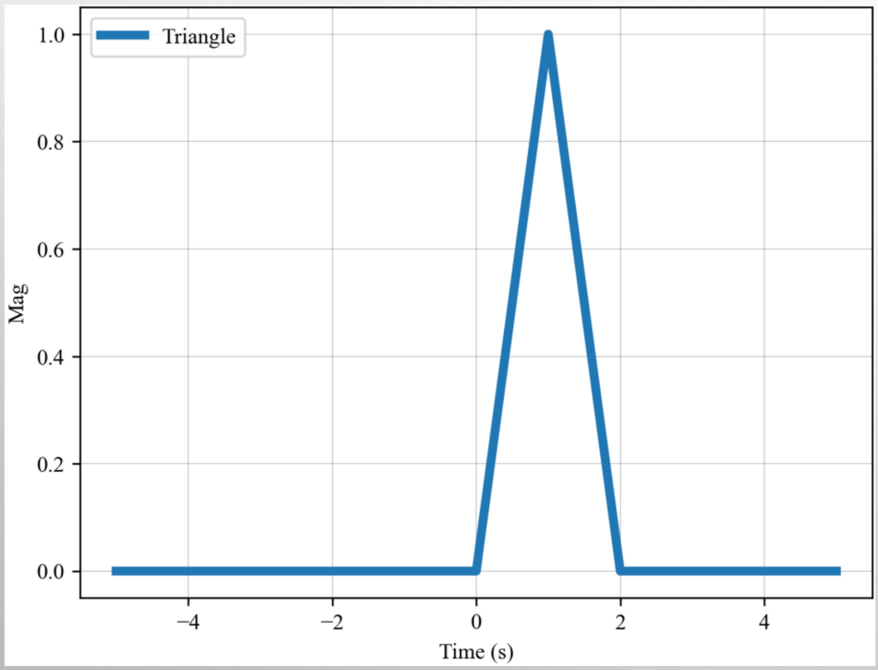


奇偶分解

$$x_0(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$x(t) = x_0(t) + x_e(t)$$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$



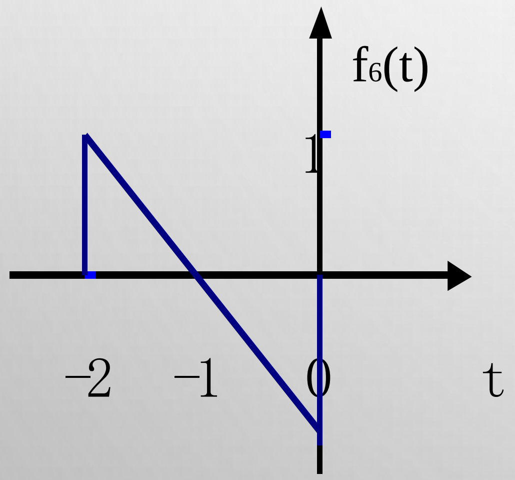
How?

信号变换-自变量

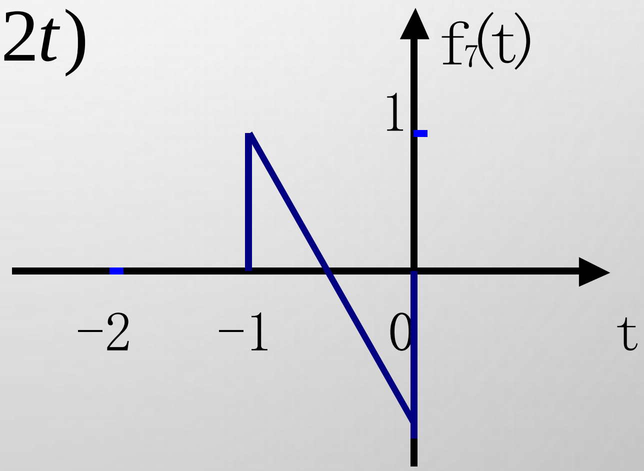
$f(t) \to f(at)$ 尺度变换（横坐标展缩）

$a > 1$时(压缩)，函数值在时间轴上压缩$\dfrac{1}{a}$

$0 < a < 1$时(扩展)，函数值在时间轴上扩展$\dfrac{1}{a}$



$f_7(t)=f_6(2t)$



信号变换-自变量

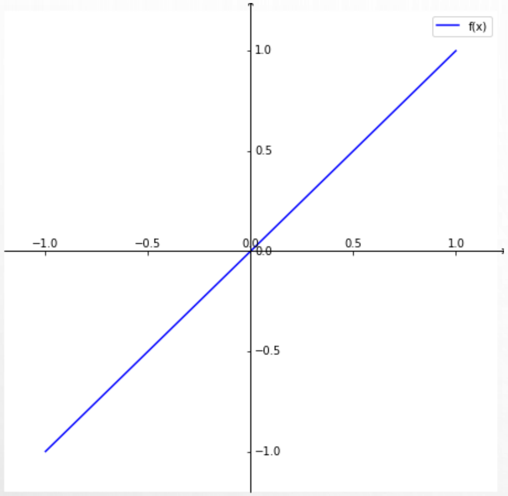
- 更一般的坐标变换是 $f(at-b),\ a,b$为实常数

  它是信号向右平移B，再扩展$\frac{1}{|a|}$倍，如果 $a<0$ ，还需翻转。也可通过把信号首先尺度 $\frac{1}{a}$倍，然后向右平移$\frac{b}{a}$来得到。

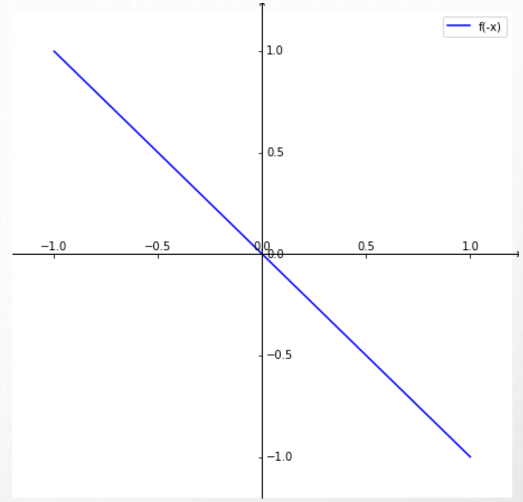
- 注意所有的变换是针对**时间变量T**的。

- 做尺度变换时注意含有**特殊信号**的情况，例如**单位冲激信号**。

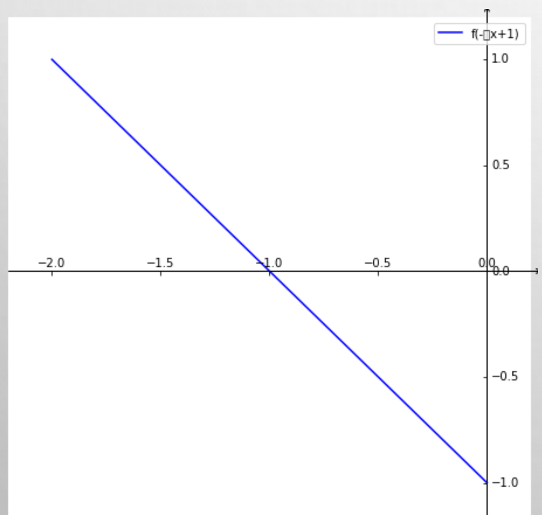
信号变换-自变量



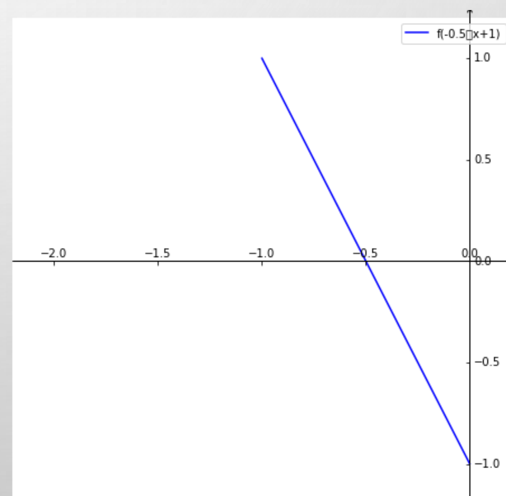
$f_0(t)$



$f_1(t) = f_0(-t)$

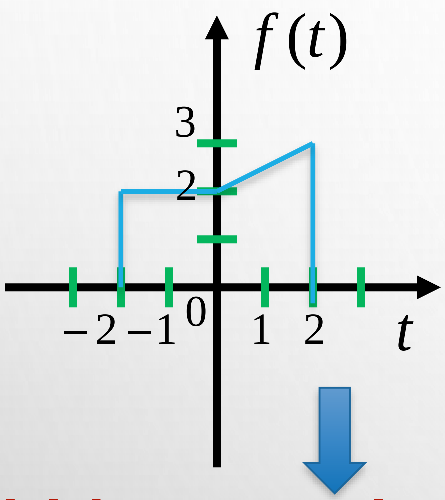


$f_2(t) = f_1(t+1) = f_0(-t-1))$



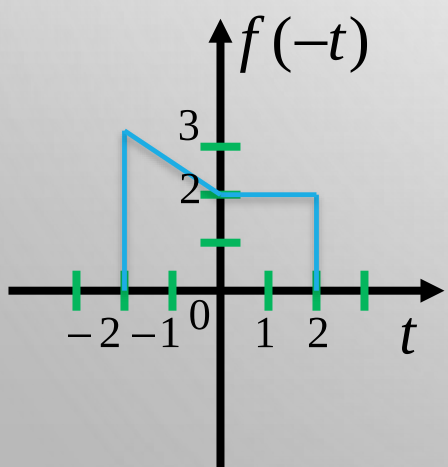
$f_3(t) = f_2(2t) = f_1(2t+1) = f_0(-2t-1)$

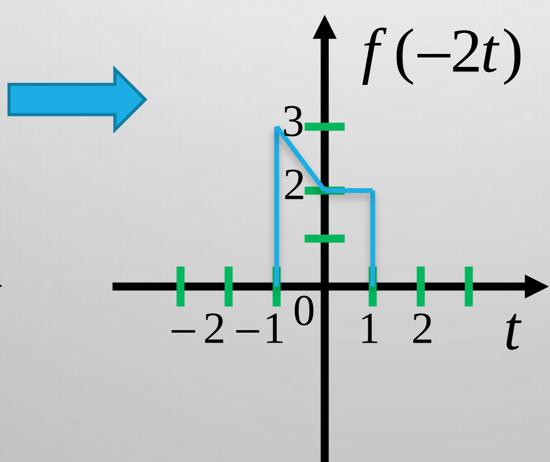
例：已知信号f(t)的波形如图，求f(-2t+1)的波形。

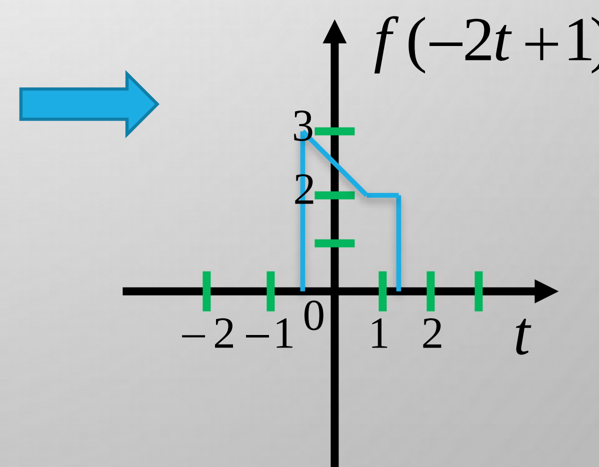


$$f(-2t+1) = f[-2(t-\frac{1}{2})]$$

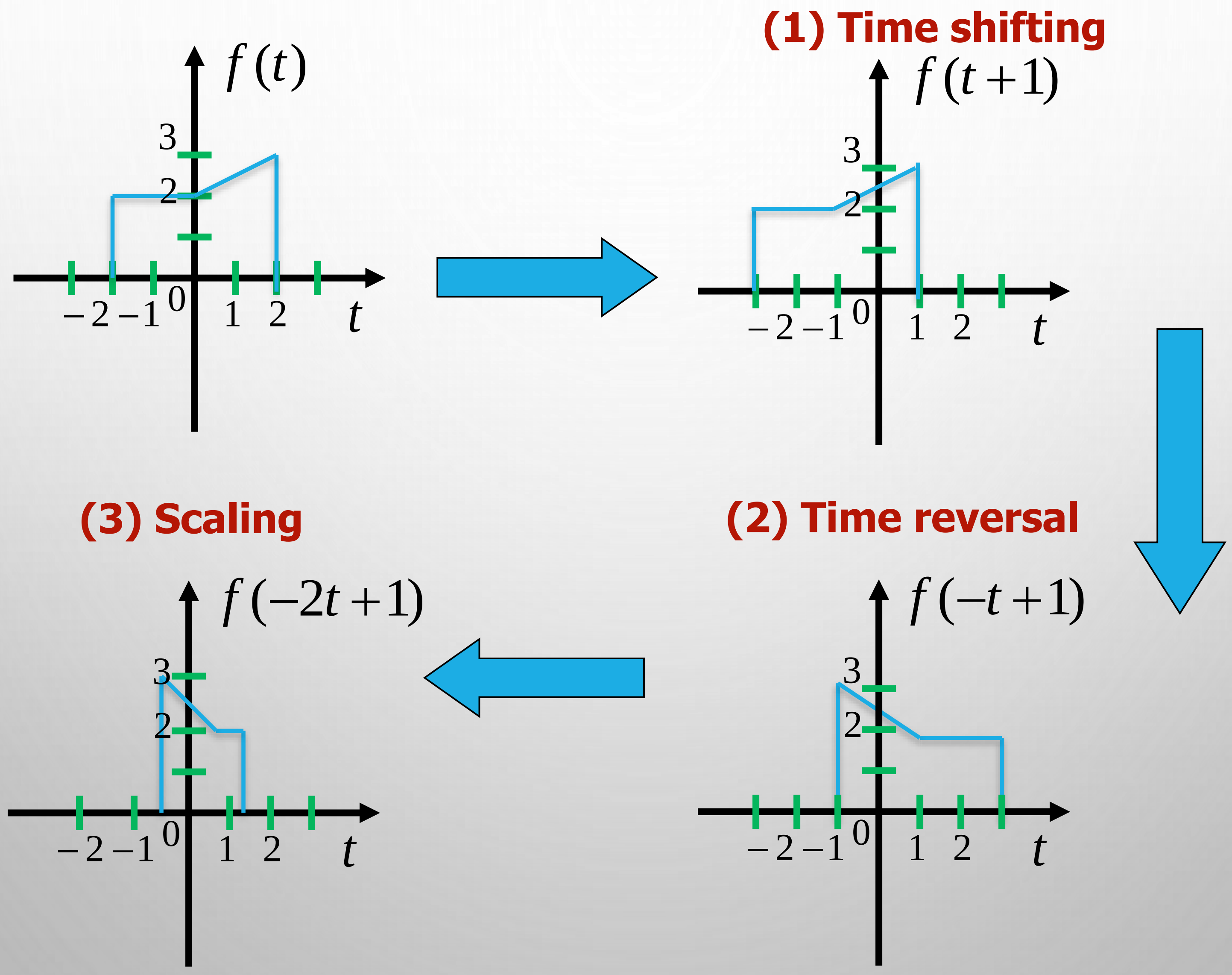
(1)time reversal **(2) Time scaling** **(3) Time shift**







另一种变换流程



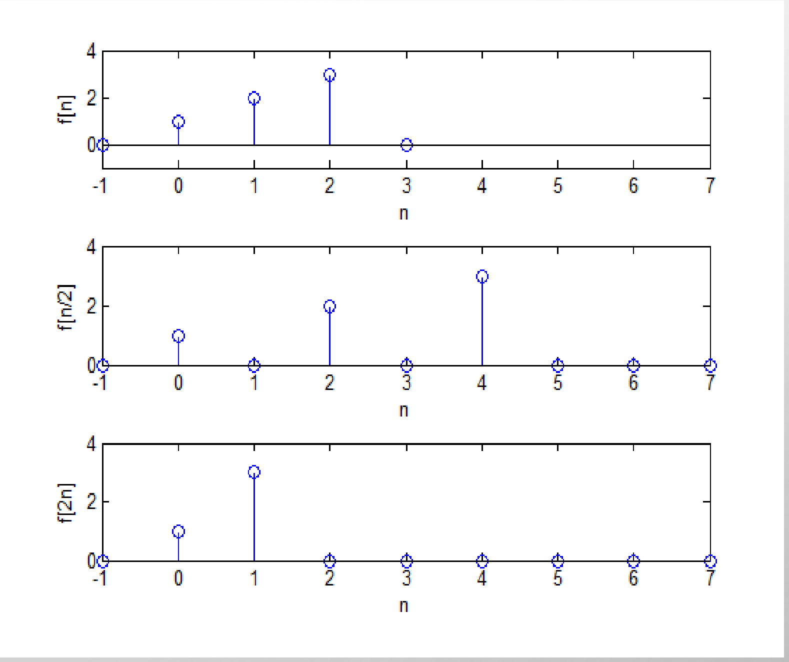
(1) Time shifting
(2) Time reversal
(3) Scaling
$f(t)$
$f(t+1)$
$f(-t+1)$
$f(-2t+1)$
3
2
−2 −1 0 1 2
t

信号变换-自变量

对时间变量的运算：对**离散**信号而言，由于自变量是离散的，因此有**抽取和内插**运算（对应连续信号的压扩）

$$f[n] \rightarrow f[Mn], M\text{为正整数}$$

$$f[n] \rightarrow f[n/L], L\text{为正整数}$$



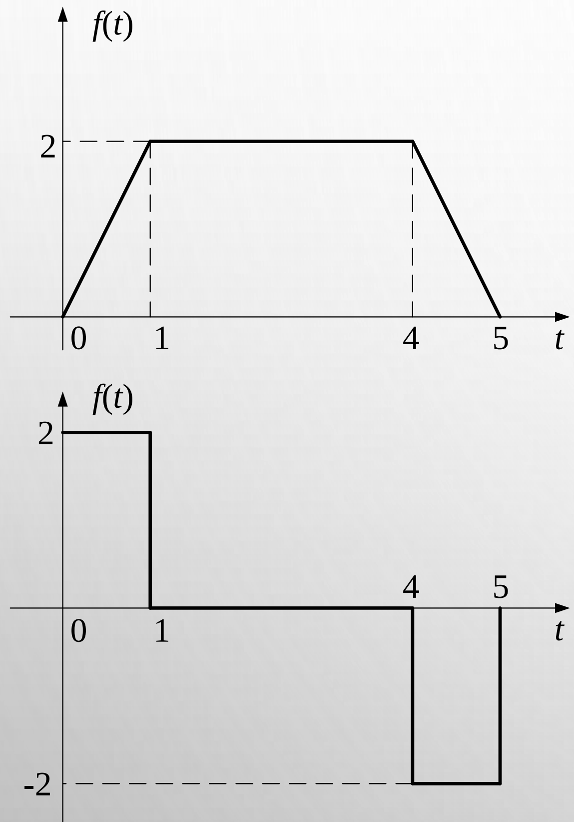
信号变换-因变量

- 对信号值的运算可分类为**一元运算**和**多元运算**，**即时运算（又称为映射）和非即时运算，线性运算和非线性运算等**。
- 一元运算是对单输入信号的运算，如**微分和积分**，信号与**常数的乘或加**运算等；多元运算是对多个输入信号的运算，如两个信号**相加、相乘**等。

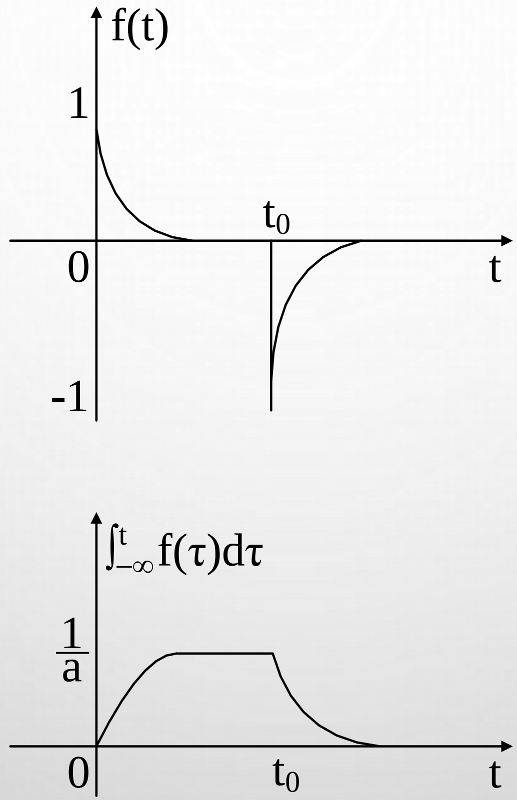
信号变换-因变量

- **信号映射**使运算结果仅取决于即时的信号值，通常可用**输入-输出信号转移特性**表示。
- 信号的**非即时运算**使运算结果取决于一段时间区间的信号值，一般它要由进行此运算的系统特性，如**微分方程**，进行描述。
- 多个信号的非即时运算要有进行该运算的多变量系统特性，如**微分方程组**描述。

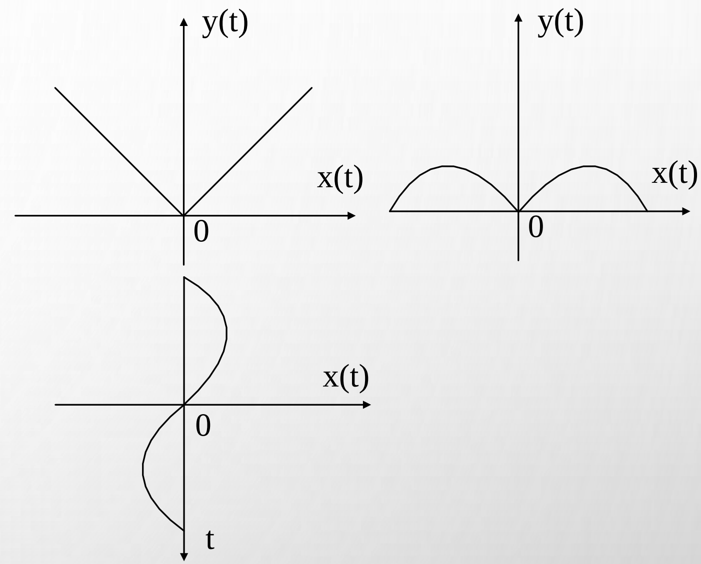
信号变换-因变量



信号微分



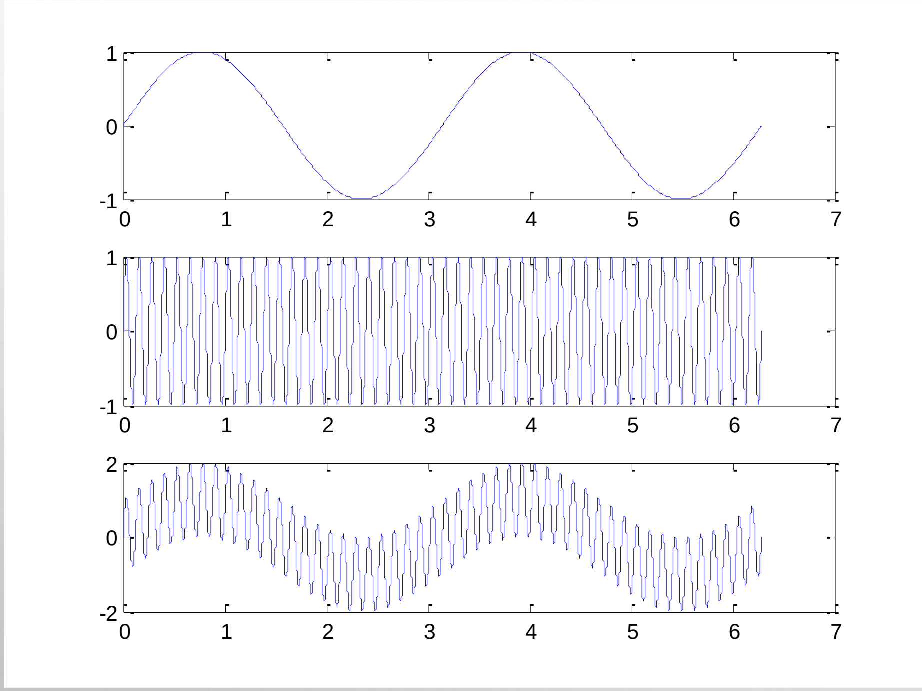
信号积分

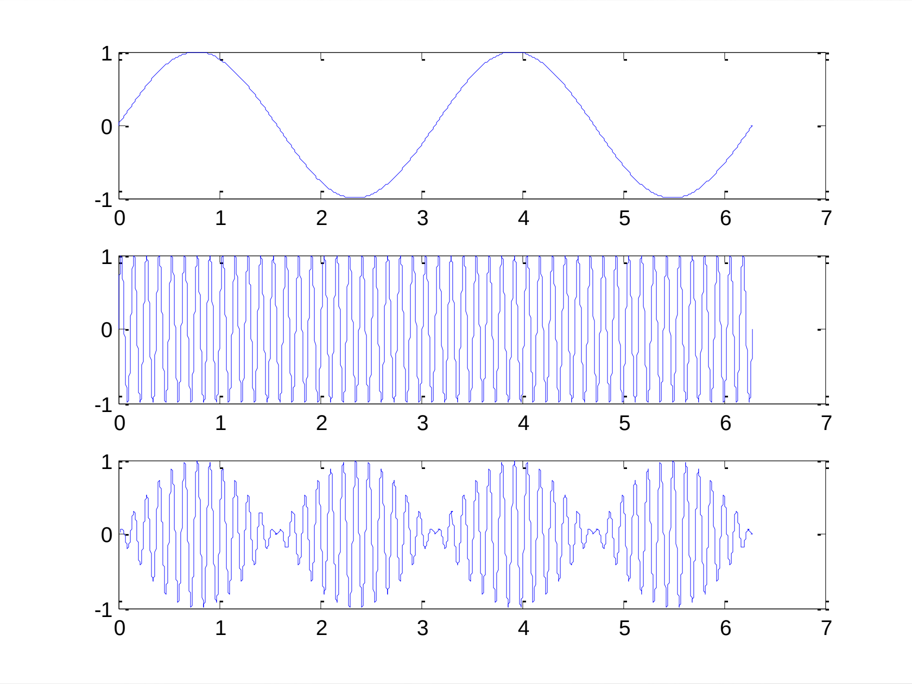


信号的非线性映射

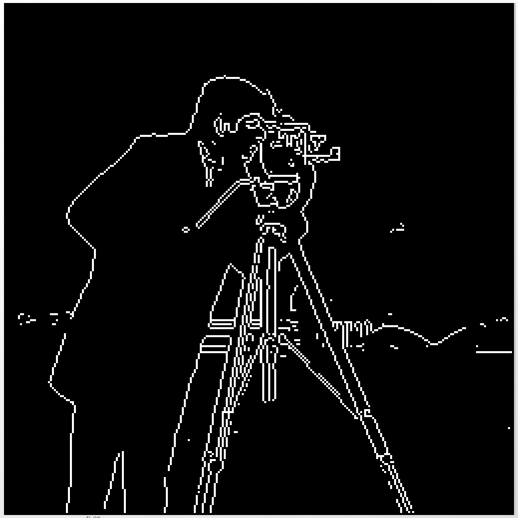
信号变换-因变量

- 信号相加/信号相乘（加噪声/调制）





信号变换-因变量



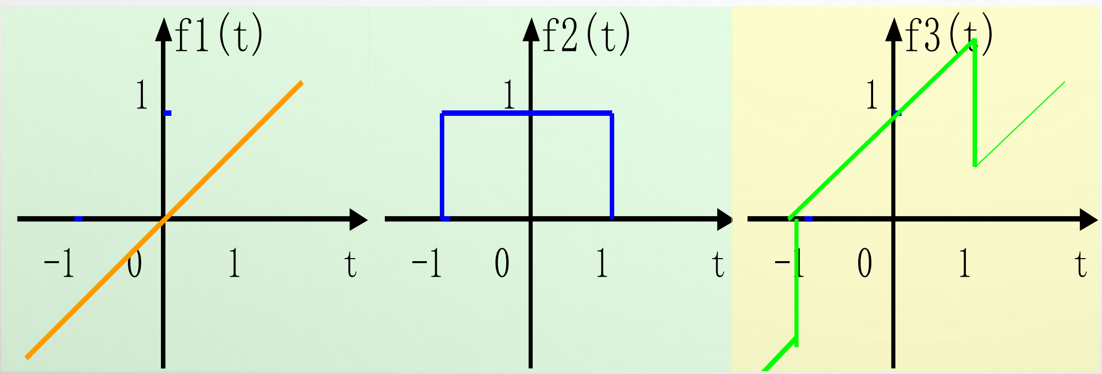
二维信号（图像）的微分运算（边缘提取）

信号变换-因变量

信号的加法和乘法

(1)相加：$f_1(\mathrm{t})$、$f_2(\mathrm{t}) \xrightarrow{\text{相加}} f_3(\mathrm{t}) = f_1(\mathrm{t}) + f_2(\mathrm{t})$

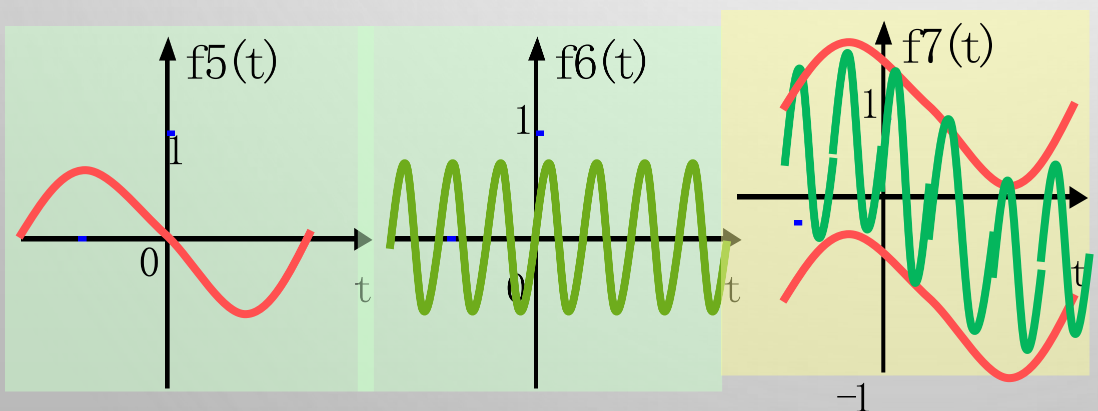
例：



$$f_1(t) = t$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 1 \\ t & \text{其它} \end{cases}$$



$$f_5(t) = -\sin(\Omega t)$$

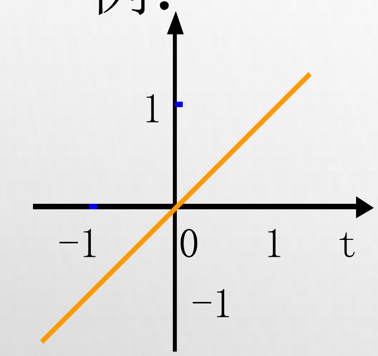
$$f_6(t) = \sin(8\Omega t)$$

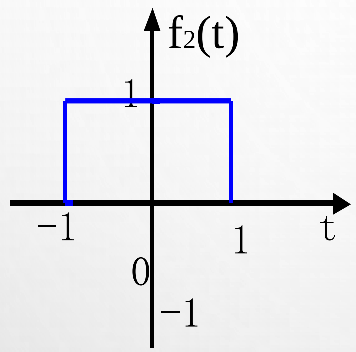
$$f_7(t) = -\sin(\Omega t) + \sin(8\Omega t)$$

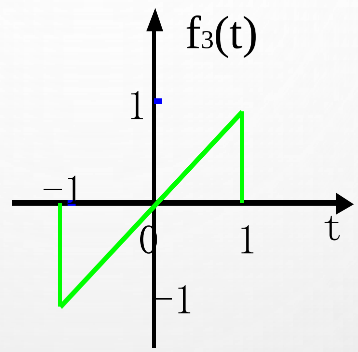
信号变换-因变量

(2)相乘：$f_1(t)$、$f_2(t) \xrightarrow{\text{相乘}} f_4(t) = f_1(t) \bullet f_2(t)$

例：



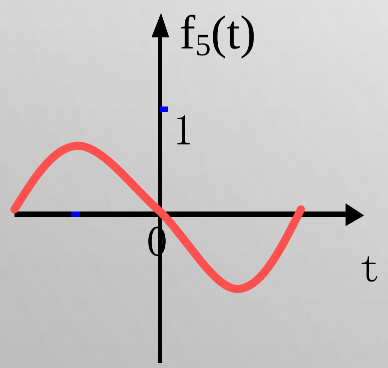


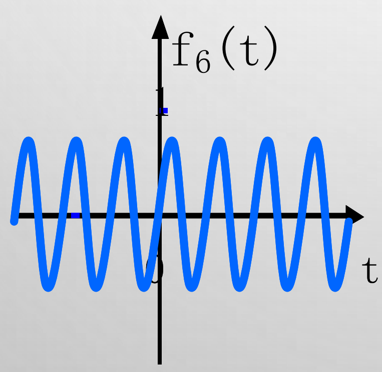


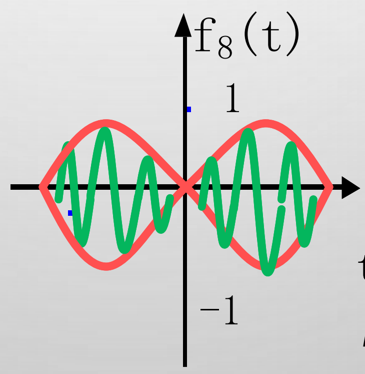
$$f_1(t) = t$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} t & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$







$$f_5(t) = -\sin(\Omega t)$$

$$f_6(t) = \sin(8\Omega t)$$

$$f_8(t) = -\sin(\Omega t) \bullet \sin(8\Omega t)$$

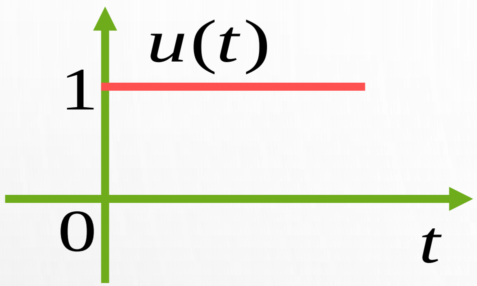
奇异信号

- 在信号与系统分析中，经常遇到**函数本身有不连续点（跳变点）或其导数与积分有不连续点**的情况，这类函数统称为奇异函数或奇异信号。
- 奇异信号分类：

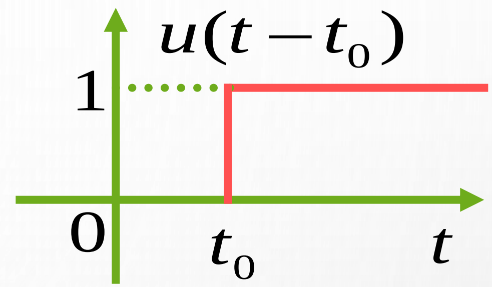
（1）阶跃信号
（2）冲激信号
（3）冲激偶信号
（4）斜变信号

- 在奇异函数中，阶跃信号和冲击函数是两种最重要的理想信号模型。

阶跃信号



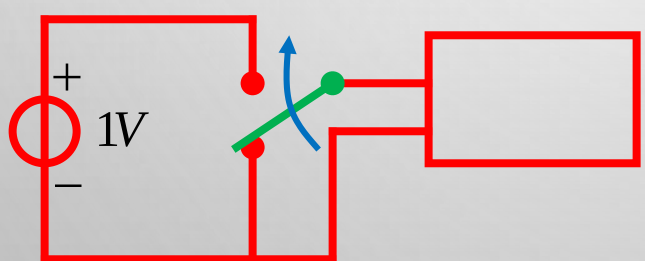
单位阶跃信号



延时的单位阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

- 在跳变点t=0处，函数值未定义，或在t=0处规定函数值1/2



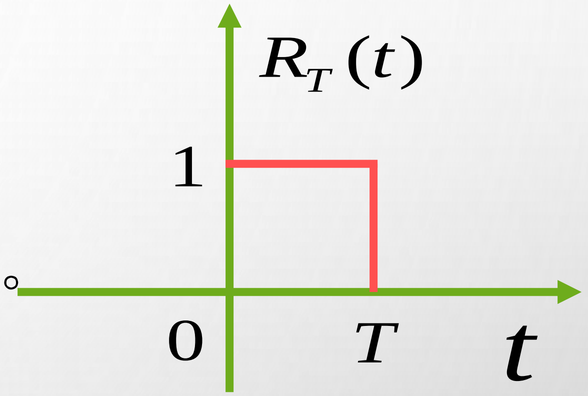
物理背景：在t=0(或t_0)时刻对某一电路接入单位电源（直流电压源或直流电流源），并且无限持续下去。

阶跃衍生信号

(1)矩形脉冲信号（“门”信号）

- 矩形脉冲信号可用阶跃及其延时信号之差表示。

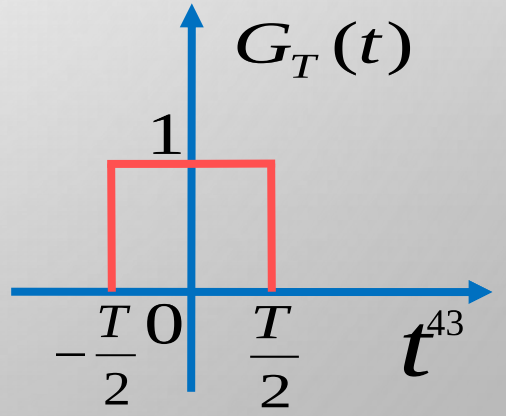
$$R_T(t) = u(t) - u(t-T)$$



下标T表示矩形脉冲出现在0到T时刻之间。

- 如果矩形脉冲对于纵坐标左右对称，则可用$G_T(t)$表示。

$$G_T(t) = u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})$$



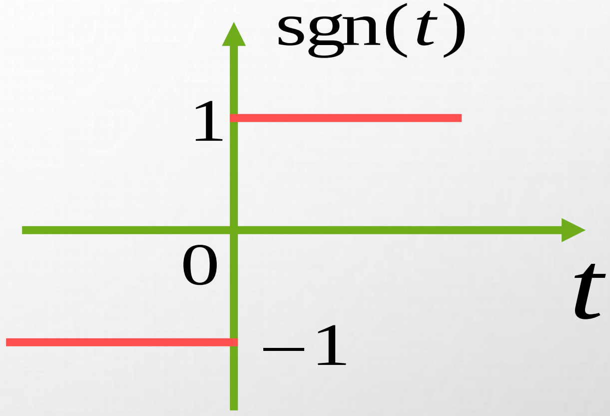
下标T表示其矩形脉冲宽度。

阶跃衍生信号

(2)符号函数（signum)

- 简写作sgn(t), 可用阶跃信号表示。

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$



与阶跃函数类似，对于符号函数在跳变点也可不予定义，或规定sgn(0)=0.

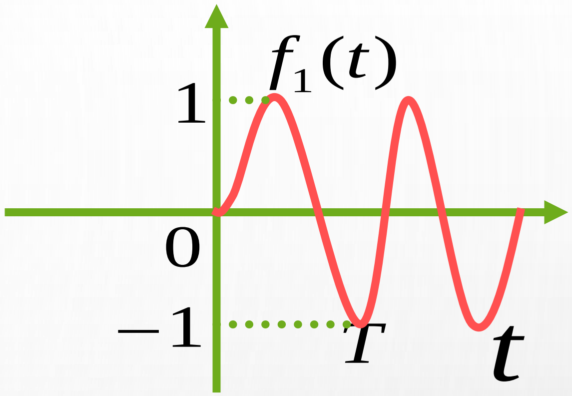
显然，可用阶跃信号来表示符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1$$

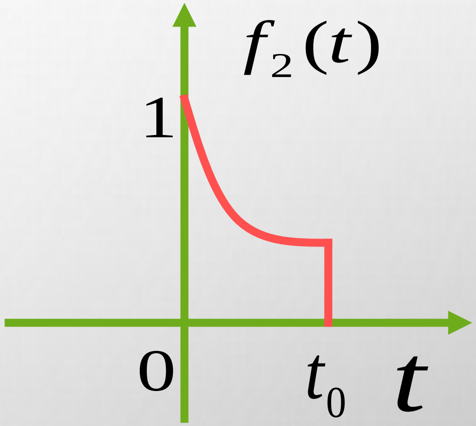
阶跃衍生信号

(3)描述各种信号的截断特性

例： $f_1(t)=\sin t \bullet u(t)$

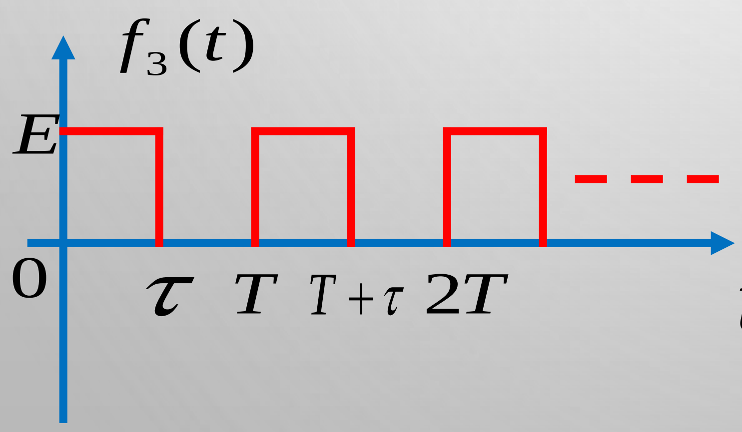


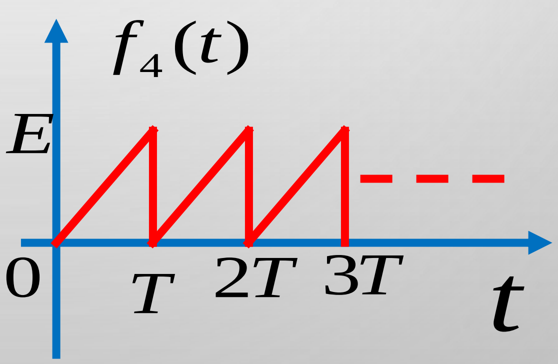
$$f_2(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$$



$$f_3(t)=E\sum_{n=0}^{\infty}[u(t-nT)-u(t-nT-\tau)]$$

$$f_4(t)=\frac{E}{T}tu(t)-E\sum_{n=1}^{\infty}u(t-nT)$$



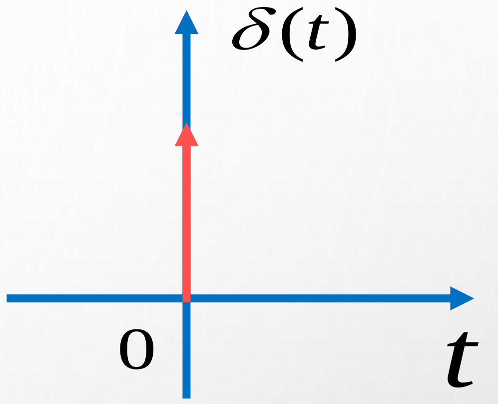


脉冲信号

箭头表示：δ(t)只在**t=0**点有一“冲激”，在**t=0**点以外各处，函数值都是零。

狄拉克（Dirac）给出的δ函数定义

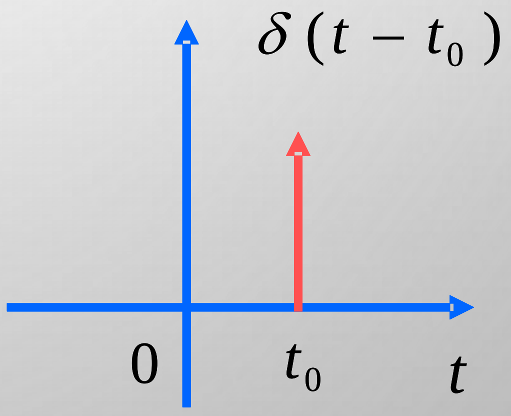
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (\text{当}t \neq 0) \end{cases}$$



δ函数亦称狄拉克**(Dirac)**函数。

描述在任一点$t=t_0$处出现的冲激，可定义$\delta(t-t_0)$函数：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0 \quad (\text{当}t \neq t_0) \end{cases}$$

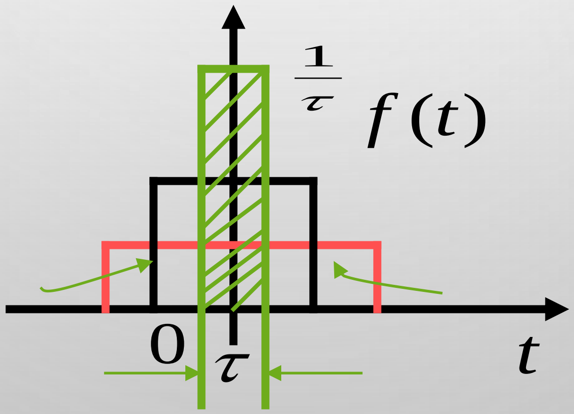


脉冲信号演变

（1）矩形脉冲演变为冲激函数

- 宽度为τ，高为1/τ的矩形脉冲，当保持矩形脉冲面积＝1不变，而使脉宽τ趋近于零时，脉冲幅度1/τ必趋于无穷大，此极限情况即为单位冲激函数。

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$

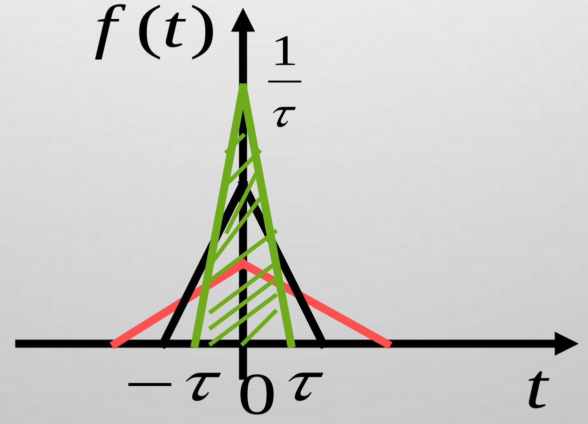


脉冲信号演变

（２）三角形脉冲演变为冲激函数

- 一组底宽为 2 τ，高为1/τ的三角形脉冲，若保持其面积＝ 1 不变，而使τ趋近于零时，幅度1/τ必趋于无穷大，此极限情况即为单位冲激函数。

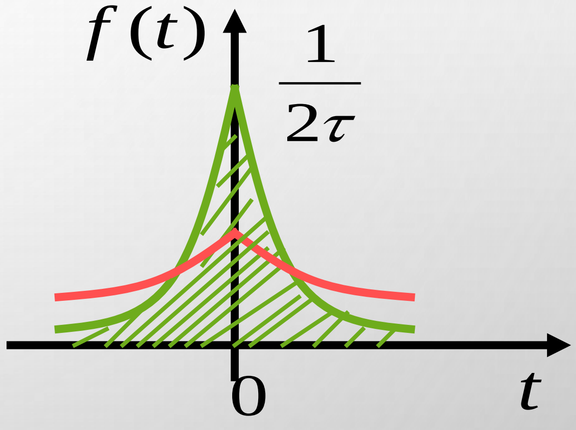
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right)[u(t+\tau) - u(t-\tau)] \right\}$$



脉冲信号演变

（3）双边指数脉冲演变为冲激函数

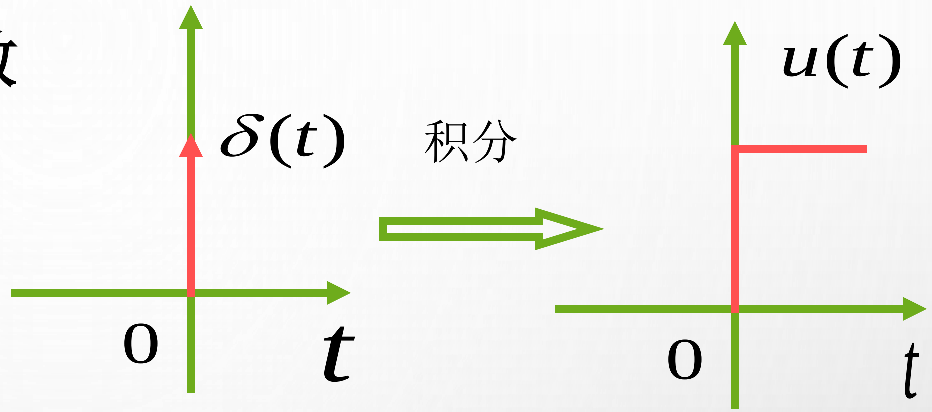
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right\}$$



脉冲信号与阶跃信号

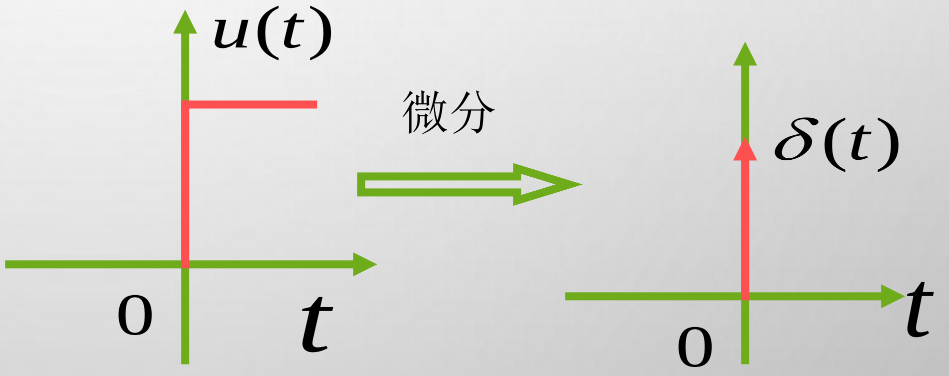
✓冲激函数的积分是阶跃函数

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$$



阶跃函数的微分应等于冲激函数

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$



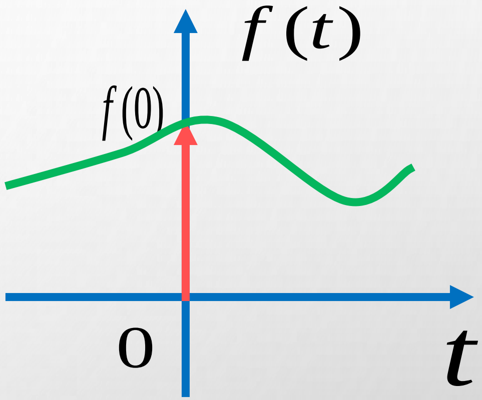
脉冲信号性质

✓抽样特性（筛选特性）

单位冲激信号δ(t)与一个在t=0点连续（且处处有界）的信号f(t)相乘，则其乘积在t=0处=f(0),其余各点均为零。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(0)dt$$

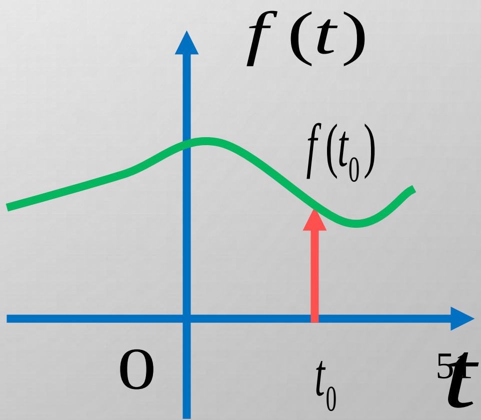
$$=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=f(0)$$



对于延迟**t_0**的单位冲激信号有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t_0)dt=f(t_0)$$



脉冲信号性质

✓δ(t)是偶函数

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

利用筛选特性

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)f(t)dt$$

$$=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(-\tau)d(-\tau)$$

$$=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(0)d(-\tau)=f(0)$$

脉冲信号性质

✓冲激函数的尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

证明： $a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a\tau)d\tau=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a\tau)d(a\tau)=\frac{1}{a}$$

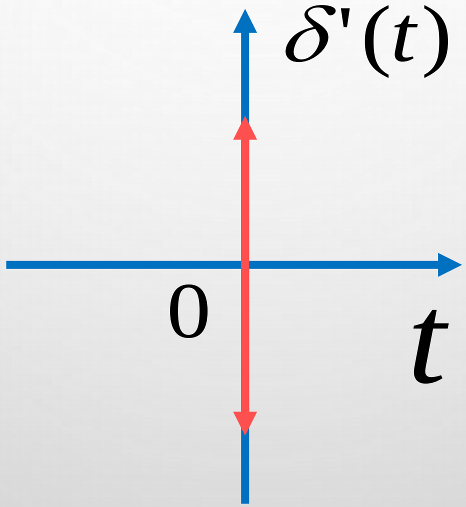
$a<0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a\tau)d\tau=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a\tau)d(a\tau)$$

$$=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty}\delta(t)dt=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=-\frac{1}{a}$$

冲激偶信号

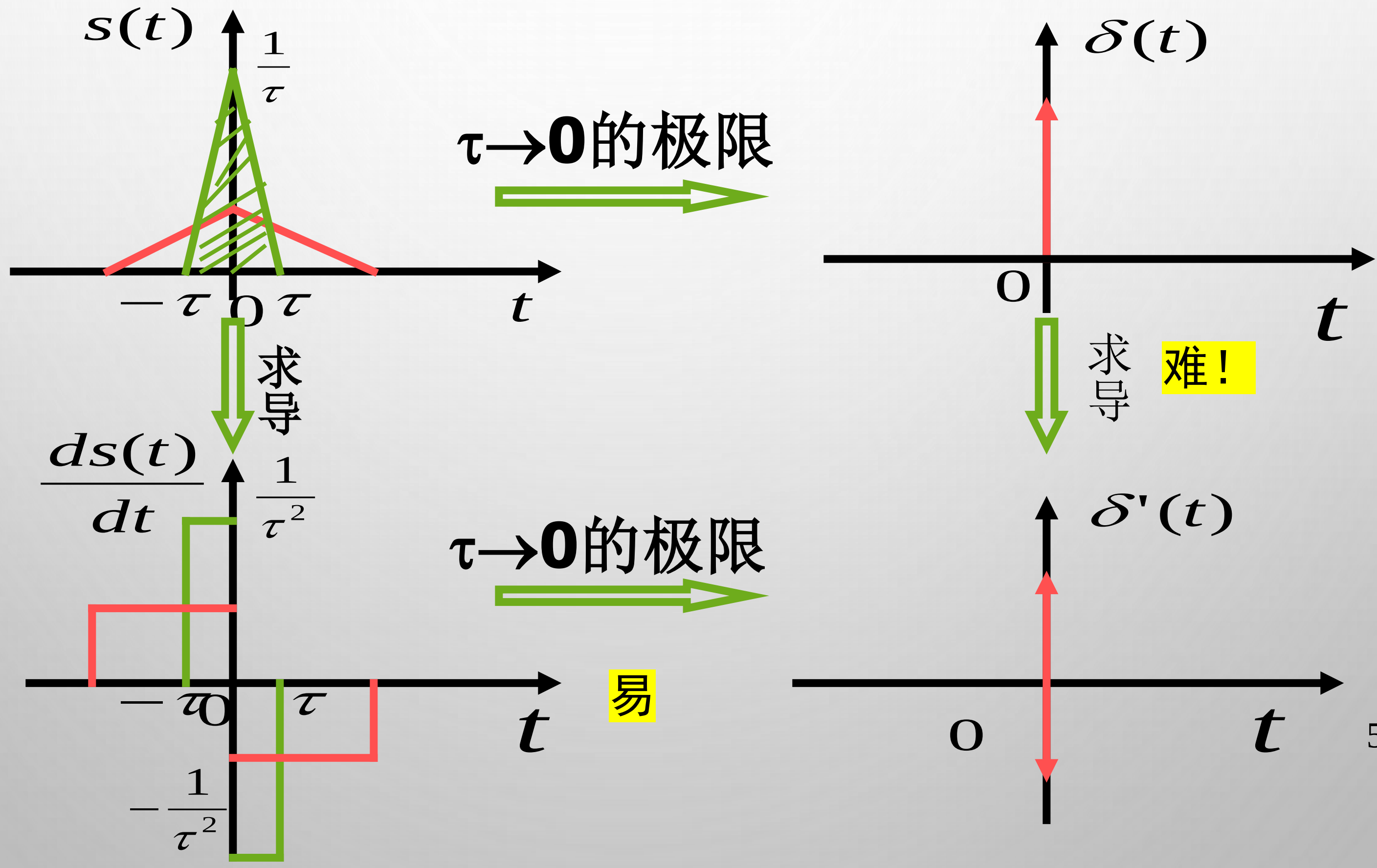
- 冲激函数的微分（阶跃函数的二阶导数）：将呈现正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号，以δ’**(t)**表示。



冲激偶信号推导

- 利用规则函数系列取极限的概念引出δ’(t)。

现以三角形脉冲系列为例，波形如下：三角形脉冲s(t)其底宽为2τ，高度为1/τ，当τ→0时，s(t)成为单位冲激函数δ(t)。



冲激偶信号性质1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$$

此处f’(t)在0点连续，f’(0)为f(t)导数在零点的取值。

证明：
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt \qquad \boxed{\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x}$$

$$= f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = -f'(0)$$

对于延迟t_0的冲激偶δ’$(t-t_0)$,同样有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t) dt = -f'(t_0)$$

冲激偶信号性质2

普通函数**f(t)**与冲激偶$\delta'(t)$ 相乘

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

普通函数**f(t)**与冲激偶$\delta'(t)$相卷积

$$f(t) * \delta'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

冲激偶信号性质3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

- 冲激偶信号的另一个性质是：它所包含的面积等于零。

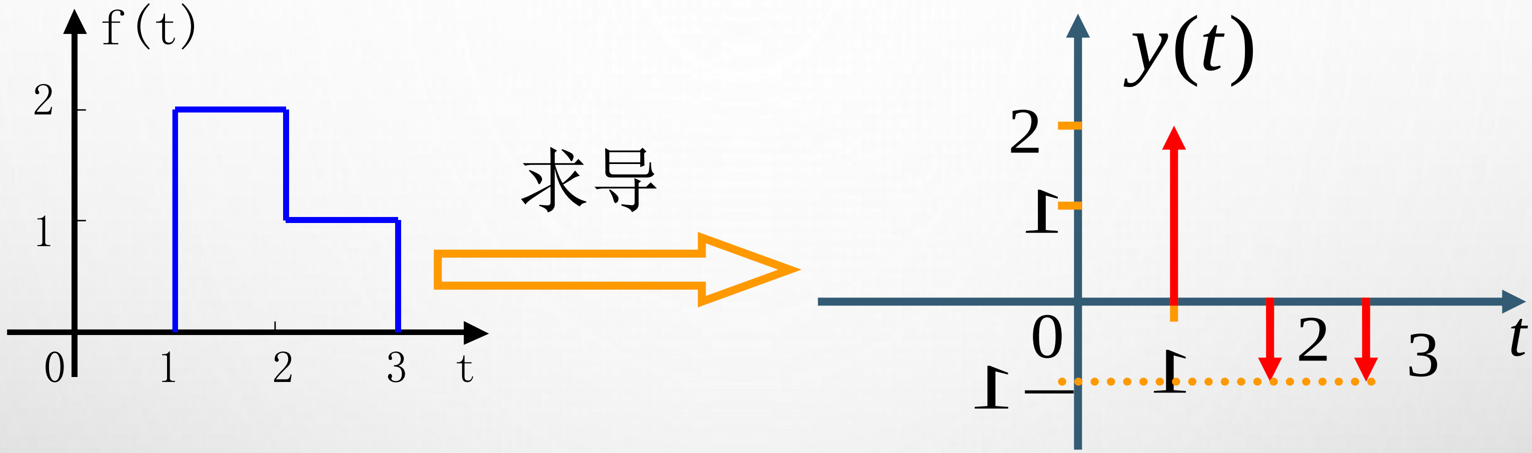
——这是因为正、负两个冲激的面积相互抵消了。

冲激偶信号性质4

冲激偶 $\delta'(t)$ 的时间尺度变换 $\delta'(at)$

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \bullet \frac{1}{a} \delta'(t)$$

❖ **例** 如图所示波形f(t)，求y(t)=df(t)/dt



解：$f(t)=2[u(t-1)-u(t-2)]+[u(t-2)-u(t-3)]$

$$=2u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)$$

$$y(t)=\frac{df(t)}{dt}=2\frac{du(t-1)}{dt}-\frac{du(t-2)}{dt}-\frac{du(t-3)}{dt}$$

$$=2\delta(t-1)-\delta(t-2)-\delta(t-3)$$

❖ 例

求解$\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt$、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$

解1：$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(-t)d(-t)$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} f(t_0+\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0+\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

解2：$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt}\delta(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt}\delta(t-t_0)dt$$

$$= 1 - e^{-jwt_0}$$