Technische Universität München
Fakultät für Informatik, I-14
Prof. Harald Räcke
Robin Münk

SoSe 2025
Übungsblatt 6
30. Mai 2025

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 Algorithmenanalyse

a) Gegeben sind folgende Algorithmen in Pseudocode. Geben Sie an, welche Probleme die Algorithmen lösen.

(i)
```
f(a):
        if (a == 0)
            return true
        if (a == 1)
            return false
        if (a < 0)
            return f(-a)
        return f(a - 2)
```

(ii)
```
g(a, b):
        if (b == 1)
            return a
        return a * g(a, b - 1)
```

b) Schauen sie sich die folgende Implementierung der Methode `removeVal` einer verketteten Liste an. Was ist anders im Vergleich zu der Implementierung in der Vorlesung? Auf welchen Eingaben arbeitet die Methode korrekt? Auf welchen nicht?

```
void removeVal(int v, ListNode* &ptr) {
    if (ptr == NULL) return;
    if (ptr->data == v) remove(ptr);
    removeVal(v,ptr->next);
}
```

Beispiellösung:

a) (i) Funktion f gibt aus, ob die Eingabezahl gerade ist.

(ii) Funktion g berechnet a^b.

b) Die letzten beiden Zeilen sind vertauscht. Dadurch können Fehler entstehen, die Methode arbeitet also nicht korrekt. Angenommen, wir möchten den Wert 5 aus der Liste entfernen und zwei 5-Listenelemente befinden sich in der Liste direkt hintereinander. Das Problem ist, dass die Methode `remove` den Zeiger ptr auf das nachfolgende Element setzt. Der rekursive Aufruf wird jetzt aber mit `ptr->next` durchgeführt. Die zweite 5 wird also einfach übersprungen und nicht entfernt.

Wenn die Liste nur aus einem einzigen Listenelement besteht (oder es befindet sich am Ende der Liste) und wir möchten dieses Element mit `removeVal` entfernen, dann gibt es einen `NULL`-Pointer-Fehler. Denn nach dem Entfernen des Listenelements zeigt `ptr` auf `NULL`, da es keine weiteren Elemente in der Liste existieren. Dann führt `ptr->next` zu einem Fehler.

Die Methode arbeitet aber korrekt, wenn keine zu löschenden Listenelemente hintereinander und nicht am Listenende vorkommen.

Aufgabe 2 (P) Binomialkoeffizienten - Memoization

Im vorherigen Aufgabenblatt haben Sie bereits die folgende Rekursionsvorschrift für Binomialkoeffizienten kennengelernt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{für } n \geq 0$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \text{für } n > 0 \text{ und } 0 \leq k < n$$

Schreiben Sie ein rekursives C/C++ Programm, das den Binomialkoeffizienten für gegebene n und k berechnet ($n, k \leq 1000$). Benutzen Sie die *Memoizationtechnik*, wie sie in der Vorlesung für die Fibonacci-Zahlen gezeigt wurde. Nutzen Sie gerne das Testing Framework.

Beispiellösung:

Wir benutzen in dieser Aufgabe den Datentyp `long long`, der 64-Byte große Integer enthalten kann, da die Binomialkoeffizienten sehr schnell sehr groß werden können.

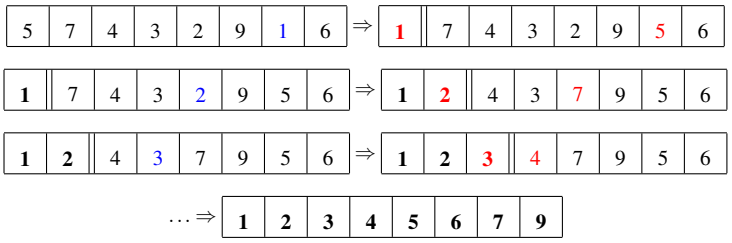
Der Code ist in der Datei `blatt6solution.cpp` zu finden.

Aufgabe 3 (P) Selectionsort

Als Alternative zu dem in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus *Insertionsort* entwickeln wir hier einen weiteren Sortieralgorithmus – *Selectionsort*. Das Array soll Schritt für Schritt sortiert werden, indem, angefangen mit dem kleinsten Element, das jeweils nächstgrößere an den Anfang gestellt wird.

Um ein Array der Länge n zu sortieren, gehen wir in $n-1$ Schritten vor. Im ersten Schritt wird die Zelle im Array mit dem kleinsten Wert gesucht. Dieser Wert wird mit dem aus der ersten Zelle vertauscht, so dass der kleinste Wert nun ganz am Anfang des Arrays steht. Vor dem i-ten Schritt enthalten die ersten $i-1$ Zellen bereits die $i-1$ kleinsten Werte des Arrays in aufsteigender Reihenfolge. Im i-ten Schritt sucht man den kleinsten Wert der Zellen i bis n des Arrays . Dieser wird wieder mit dem Wert aus der i-ten Zelle vertauscht. Dies führt dazu, dass am Ende des i-ten Schritts die ersten i Zellen die i kleinsten Werte des Arrays in aufsteigender Reihenfolge enthalten.

Beispiel:



Schreiben Sie eine **rekursive** C/C++ Funktion `selection_sort(vector<int>& vec)` um die gegebene Liste mit Hilfe des *Selectionsort* Algorithmus in-place (ohne eine Kopie des vectors anzulegen) zu sortieren.

Sie benötigen dafür eine rekursive Hilfsfunktion. Entscheiden Sie, ob Sie das Problem mit Iteratoren oder mit Indices lösen möchten und überlegen Sie welche Parameter Ihre Hilfsfunktion benötigt. Sie können für diese Aufgabe den Typen des Iterators `vector_iterator` verwenden.

Beispiellösung:

Der Code ist in der Datei `blatt6solution.cpp` zu finden.

Aufgabe 4 (P) Binäre Suche

Aus der Vorlesung kennen wir bereits die binäre Suche in einem sortierten Array. In dieser Aufgabe wollen wir die binäre Suche in einem *zyklisch verschobenen sortierten Array* durchführen. Ein solches entseht aus einem sortierten Array, wenn für einen gegeben Shift-Wert $0 \leq c < n$ jeder Wert von Index i auf Index $(i+c) \bmod n$ verschoben wird, für alle i.

Beispiel: $[1,4,8,12,15,18,23,25,36] \xrightarrow{\text{shift 3 rechts}} [23,25,36,1,4,8,12,15,18]$

Wir nehmen an, dass das Array n verschiedene Elemente, also *keine Duplikate* enthält. Nutzen Sie gerne das Testing Framework.

a) Implementieren Sie die C/C++ Methode `search(vector<int> vec, int c, int x)`. Die Methode soll durch binäre Suche in einem sortierten, um c Stellen zyklisch verschobenen Array *vec* ein gegebenes Element x finden und den entsprechenden Index zurückgeben. Die Laufzeit Ihrer Implementierung sollte in $O(\log n)$ sein.

b) Implementieren Sie die C/C++ Methode `getShift(vector<int> vec)`. Die Methode soll den Shift c ausgeben, d.h. die Anzahl der Stellen um welche das Array *vec* zyklisch (nach rechts) verschobenen ist.
Die Laufzeit Ihrer Implementierung sollte in $O(\log n)$ sein.

Beispiellösung:

a) Idee: Da wir den Shift c des Arrays kennen, können wir folgendermaßen vorgehen. Wir benutzten die binäre Suche, aber mit einem Unterschied. Immer wenn wir auf den Wert eines Elements mit dem Index i zugreifen möchten, greifen wir stattdessen auf das Element mit dem Index $(i+c) \mod n$ zu. Auf diese Weise operieren wir auf dem Array, als ob es nicht verschoben wäre.

b) Beobachtung: Der Shift ist gleichzeitig auch der Index des minimalen Elements. Wir können also stattdessen nach dem Minimum suchen. Eine weitere Beobachtung: Angenommen der Shift ist c (anders gesagt, das Minimum hat den Index c), dann gilt für alle $i \neq c : a[i] > a[c]$ und für alle $i < c, j > c : a[i] > a[j]$.
Das Problem kann rekursiv und iterativ gelöst werden.

Der Code ist in der Datei `blatt6solution.cpp` zu finden.