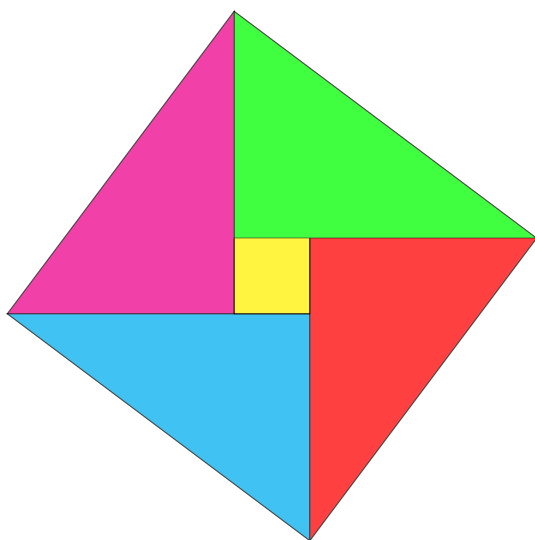


# 著名的几何定理



2025 年 3 月 29 日



## 序言

在铨儿约四岁的时候，在一次剪纸游戏过程中问我：“剪刀是直的，为什么能剪出圆？”我思考了良久，不得不用微积分的知识向他解释：因为曲线可以用小的线段来近似。看着他似懂非懂的表情，我心中惊讶小孩子能有这么敏锐的观察力。在铨儿上小学时候，我们又谈论起这个问题，他解释到，剪刀和纸只有一点接触，而点是可以按曲线运动的。至此，这个问题才有一个比较通俗易懂的解释。

几何学 (geometry) 最开始来源于人类生产活动的需要 (如土地测量)，逐渐发展成数学的重要分支。古希腊柏拉图学院门口挂着“不懂几何者，不得入内”。对古希腊尺规作图三大难题 (化圆为方、三等分角和倍立方问题) 的探索一直是推动数学发展的重要动力之一。有的研究已经远远超越当时的需要，如 Apollonius 对圆锥曲线的研究。本书列举了一些欧几里得几何 (Euclidean Geometry) 的重要定理 (主要来源 [1, 2, 3])，当我们看到这些几何定理时，一定会为其所表现出来的简单与和谐而感到震撼。

在学习的道路上，要保持兴趣，保持观察力。几何学，其实和其它的学科一样，会为你开启一扇窗户，看到不同的风景。



# 目录

序言	iii
<b>第 1 章 三角形 Triangles</b>	<b>1</b>
1.1 勾股定理 Pythagorean theorem	1
1.2 射影定理 Geometric mean theorem	2
1.3 中线定理 Apollonius's theorem	3
1.4 角平分线定理 Angle bisector theorem	4
1.5 正弦定理 Law of sines	5
1.6 余弦定理 Law of cosines	6
1.7 梅涅劳斯定理 Menelaus' theorem	7
1.8 塞瓦定理 Ceva's theorem	8
1.9 海伦公式 Heron's formula	9
1.10 西姆松定理 Simson line theorem	10
1.11 莫利定理 Morley's trisector theorem	11
1.12 外森比克不等式 Weitzenböck's inequality	12
1.13 斯图尔特定理 Steward's theorem	13
1.14 斯霍滕定理 Schouten's theorem	13
<b>第 2 章 圆 Circles</b>	<b>15</b>
2.1 圆周角定理 Inscribed angle theorem	15
2.2 泰勒斯定理 Thales' theorem	15
2.3 弦切角定理 Alternate segment theorem	15
2.4 圆幂定理 Circle power theorem	16
2.5 阿波罗尼斯圆	17
2.6 托勒密定理 Ptolemy's theorem	20
2.7 布拉美古塔定理 Brahmagupta's theorem	21
2.8 密克定理 Miquel's theorem	21
2.9 牛顿定理 Newton's theorem	24

2.10 根轴与根心 Radical axis and radical center . . . . .	25
2.11 蒙日定理 Monge's theorem . . . . .	26
2.12 蝴蝶定理 Butterfly theorem . . . . .	27
<b>第 3 章 三角形的中心 Triangle Centers</b>	<b>31</b>
3.1 重心坐标 Barycentric Coordinates . . . . .	31
3.2 三角形的重心 Centroid . . . . .	34
3.3 三角形的外心 Circumcenter . . . . .	35
3.4 三角形的垂心 Orthocenter . . . . .	37
3.5 三角形的内心 Incenter . . . . .	37
3.6 三角形的旁心 Excenter . . . . .	38
3.7 欧拉定理 . . . . .	39
3.8 欧拉线 Euler line . . . . .	41
3.9 九点圆定理 Nine-point circle theorem . . . . .	41
3.10 费尔巴哈定理 Feuerbach's theorem . . . . .	42
3.11 费马点 Fermat point . . . . .	42
3.12 莱斯特定理 Lester's's theorem . . . . .	46
<b>第 4 章 射影几何 Projective Geometry</b>	<b>49</b>
4.1 笛沙格定理 Desargues's theorem . . . . .	49
4.2 帕普斯定理 Pappus's hexagon theorem . . . . .	50
4.3 帕斯卡定理 Pascal's theorem . . . . .	50
4.4 布列安桑定理 Brianchon's theorem . . . . .	52
4.5 极点和极线 Pole and polar . . . . .	52
4.6 彭赛列闭合定理 Poncelet's closure theorem . . . . .	54
<b>参考文献</b>	<b>55</b>

# 第 1 章 三角形 Triangles

## 1.1 勾股定理 Pythagorean theorem

**定理 1.1 (勾股定理, 毕达哥拉斯定理, Pythagorean theorem)** 直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方.

毕达哥拉斯<sup>1</sup> 学派的证明没有流传下来, 流传下来书面证明最早见于《几何原本》第一册的第 47 个命题. 在中国, 东汉末年吴国的赵爽最早给出勾股定理的证明. 勾股定理是人类早期发现并证明的重要数学定理之一, 也是联系几何和代数的纽带, 如解析几何中两点的距离就可以由勾股定理计算, Stillwell 甚至将勾股定理作为数学历史的开篇 [4].

**证明** 采用面积法证明, 正方形的面积由 4 个三角形面积加上中间小正方形面积, 如图 1.1:

$$\begin{aligned} S &= 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 \\ &= 2ab + c^2 \end{aligned}$$

而:

$$S = (a + b)^2$$

所以:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

**定理 1.2 (勾股定理的逆定理)** 勾股定理的逆定理是判断三角形为钝角、锐角或直角的一个简单的方法, 其中  $AB = c$  为最长边:

- 如果  $a^2 + b^2 = c^2$ , 则  $\triangle ABC$  是直角三角形, 其中  $\angle C$  是直角.

<sup>1</sup>毕达哥拉斯 (前 570 年-前 495 年): 是一名古希腊哲学家, 数学家和音乐理论家, 毕达哥拉斯主义的创立者.

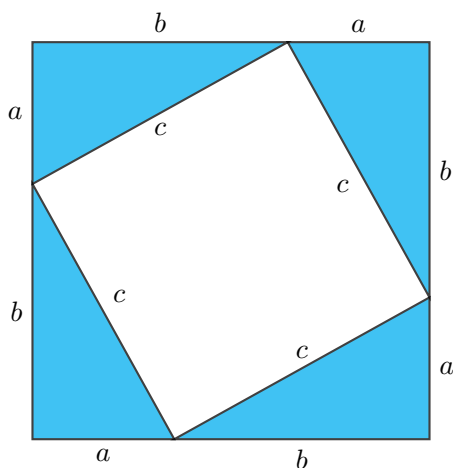


图 1.1: 勾股定理的证明

- 如果  $a^2 + b^2 > c^2$ , 则  $\triangle ABC$  是锐角三角形 (若无先前条件  $AB = c$  为最长边, 则该式的成立仅满足  $\angle C$  是锐角).
- 如果  $a^2 + b^2 < c^2$ , 则  $\triangle ABC$  是钝角三角形, 其中  $\angle C$  是钝角.

这个逆定理实际上是余弦定理的一个推论.

## 1.2 射影定理 Geometric mean theorem

**定理 1.3 (射影定理, Geometric mean theorem, 或 Euclid's theorem of altitude)** 在  $\triangle ABC$  中  $\angle C = 90^\circ$ . 设  $CD$  在  $AB$  的上的高, 则有:

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

$$BC^2 = BD \cdot AB$$

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

这个定理出现在欧几里得所著《几何原本》第一卷当中, 作为勾股定理证明过程的一部分. 在这里,  $AD$  及  $BD$  分别是  $AC$  及  $BC$  在底边  $AB$  的正投影, 故定理以此为名.

**证明** 利用相似三角形的比例关系容易证明

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$$



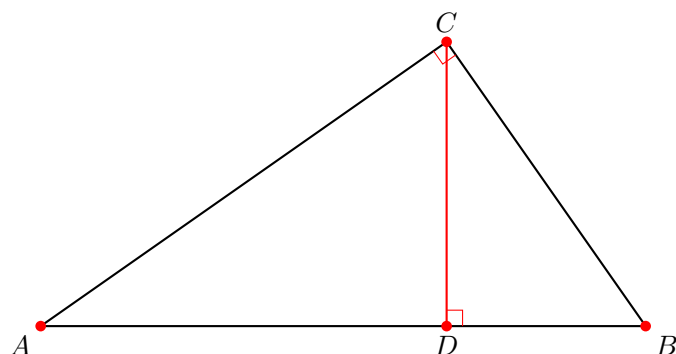


图 1.2: 射影定理

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

也即:

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

同理可证:

$$BC^2 = BD \cdot AB$$

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

□

### 1.3 中线定理 Apollonius's theorem

**定理 1.4 (中线定理, 阿波罗尼斯定理, Apollonius's theorem)** 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  是  $BC$  的中点, 则

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

**证明** 利用勾股定理

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (AE^2 + BE^2) + (AE^2 + CE^2) \\ &= 2AE^2 + BE^2 + CE^2 \\ &= 2AE^2 + (BD - DE)^2 + (CD + DE)^2 \end{aligned}$$

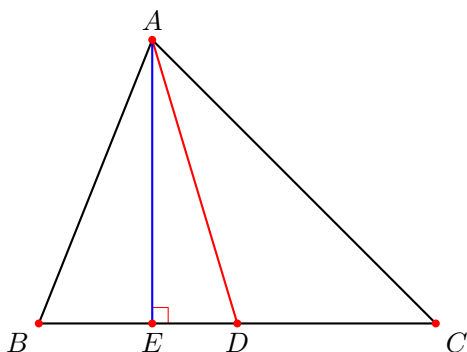


图 1.3: 中线定理

$$= 2AE^2 + (BD^2 + DE^2 - 2BD \cdot DE) + (CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE)$$

因为  $BD = CD$ , 所以:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AE^2 + 2ED^2 + 2BD^2 \\ &= 2(AE^2 + ED^2) + 2BD^2 \\ &= 2AD^2 + 2BD^2 \\ &= 2(AD^2 + BD^2) \end{aligned}$$

□

#### 1.4 角平分线定理 Angle bisector theorem

**定理 1.5 (角平分线定理, Angle bisector theorem)** 在三角形  $\triangle ABC$  中, 由  $A$  点作一角平分线与  $BC$  交于  $D$ , 则

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

**证明** 利用角平分线的性质和面积法

一方面:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \angle ABD}{AC \cdot AD \cdot \sin \angle ADC}$$

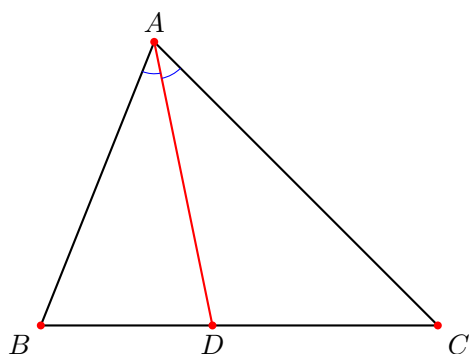


图 1.4: 角平分线定理

$$\frac{AB}{AC}$$

另一方面:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{DC}$$

所以:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

□

## 1.5 正弦定理 Law of sines

**定理 1.6 (正弦定理, Law of sines)** 对于任意  $\triangle ABC$ ,  $a, b, c$  分别为  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边,  $R$  为  $\triangle ABC$  的外接圆半径, 则:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

证明 利用圆周角定理

□

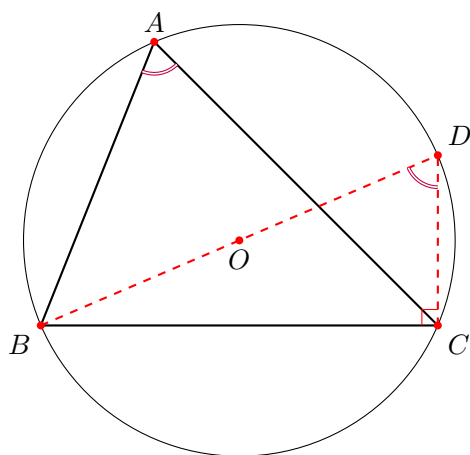


图 1.5: 正弦定理

## 1.6 余弦定理 Law of cosines

**定理 1.7 (余弦定理, Law of cosines)** 对于任意  $\triangle ABC$ ,  $a, b, c$  分别为  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边, 则:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

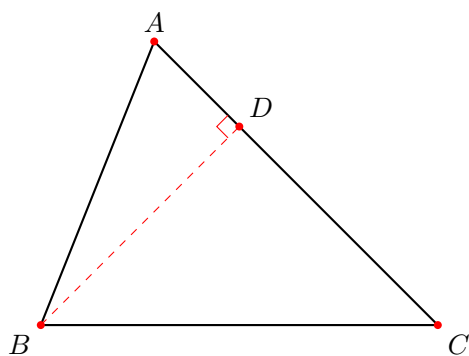


图 1.6: 余弦定理

证明 利用勾股定理

$$\begin{aligned} a^2 &= BD^2 + CD^2 \\ &= (c \sin C)^2 + (b - c \cos C)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos C \end{aligned}$$

□

## 1.7 梅涅劳斯定理 Menelaus' theorem

**定理 1.8 (梅涅劳斯定理, Menelaus' theorem)** 如果一直线与  $\triangle ABC$  的边  $BC, CA, AB$  或其延长线分别交于  $D, E, F$ , 则有:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

该定理以古希腊数学家和天文学家梅涅劳斯 (Menelaus of Alexandria)<sup>2</sup>命名.

**定理 1.9 (梅涅劳斯定理的逆定理)** 如果有三点  $D, E, F$  分别在  $\triangle ABC$  的边  $BC, CA, AB$  或其延长线上, 且满足

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

则  $D, E, F$  三点共线.

利用这个逆定理, 可以判断三点共线. 如果在上式中线段用有向线段表示, 那么右面的结果为-1. 该定理与塞瓦定理的等式仅在条件上有所不同, 二者互为对偶定理.

证明 作  $CG \parallel DF$  交  $AB$  与点  $G$ , 将所有比例关系转换到  $AB$  上,

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{FB}{FG} \\ \frac{CE}{EA} &= \frac{FG}{AF} \end{aligned}$$

所以:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{FB}{FG} \cdot \frac{FG}{AF} = 1$$

□

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus\\_of\\_Alexandria](https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus_of_Alexandria)

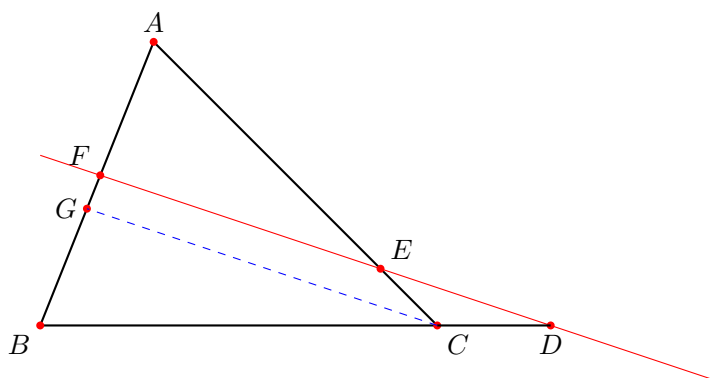


图 1.7: 梅涅劳斯定理

### 1.8 塞瓦定理 Ceva's theorem

**定理 1.10 (塞瓦定理, 或西瓦定理, Ceva's theorem)** 如果有三点  $D, E, F$  分别在  $\triangle ABC$  的边  $BC, CA, AB$  或其延长线上, 且  $AD, BE, CF$  通过同一点  $O$ , 则:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

该定理最先由意大利数学家乔瓦尼·塞瓦 (Giovanni Ceva, 1647 年 12 月 7 日-1734 年 6 月 15 日) 证明.

**定理 1.11 (塞瓦定理的逆定理)** 如果有三点  $D, E, F$  分别在  $\triangle ABC$  的边  $BC, CA, AB$  或其延长线上, 且满足

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

则直线  $AD, BE, CF$  共点或彼此平行 (于无限远处共点).

证明 面积法

$$\frac{AF}{FB} = \frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle CFB}} = \frac{S_{\triangle OAF}}{S_{\triangle OFB}}$$

利用等比性质:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{S_{\triangle CAF} - S_{\triangle OAF}}{S_{\triangle CFB} - S_{\triangle OFB}} = \frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle OBC}}$$

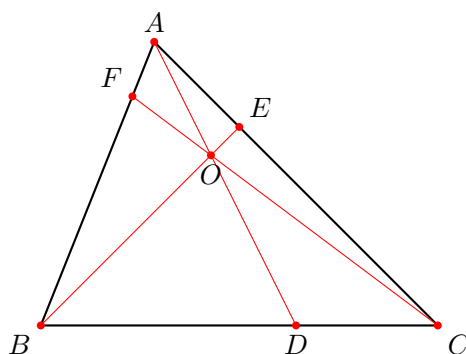


图 1.8: 塞瓦定理

同理:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}} \\ \frac{CE}{EA} &= \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OAB}} \\ \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= \frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle OBC}} \cdot \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}} \cdot \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OAB}} = 1 \end{aligned}$$

□

## 1.9 海伦公式 Heron's formula

**定理 1.12 (海伦公式, Heron's formula, Hero's formula)** 如果三角形的边长分别为  $a, b, c$ , 则三角形的面积  $A$  可由以下公式求得:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

该公式由古希腊数学家亚历山大港的海伦 (Hero of Alexandria) 发现, 并在其于公元 60 年所著的 *Metrica* 中载有数学证明, 原理是利用三角形的三条边长求取三角形面积. 亦有认为更早的阿基米德已经了解这条公式, 因为 *Metrica* 是一部古代数学知识的结集, 该公式的发现时间很有可能先于海伦的著作.

中国南宋末年数学家秦九韶发现或知道等价的公式, 其著作《数书九章》卷五第二题即三

斜求积.

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2}$$

注 海伦公式在角度很小时可能存在数值不稳定<sup>3</sup>, 可以变形为:

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{[a + (b + c)][c - (a - b)][c + (a - b)][a + (b - c)]}$$

其中  $a \geq b \geq c$ .

证明 需要用到余弦定理

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab} \\ A &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)} \\ &= \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}} \\ &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \end{aligned}$$

□

### 1.10 西姆松定理 Simson line theorem

**定理 1.13 (西姆松定理, Simson line theorem)** 平面上有一点  $P$ ,  $P$  在  $\triangle ABC$  三边上的投影 (即由  $P$  到边上的垂足) 共线 (此线称为西姆松线或译“西摩松线”, Simson line) 当且仅当  $P$  在三角形的外接圆上.

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Heron%27s\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Heron%27s_formula)



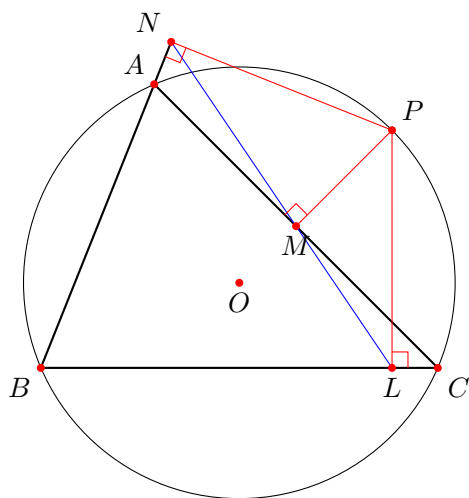


图 1.9: 西姆松定理

证明 利用圆内接四边形 (cyclic quadrilateral) 的性质. 因  $PMCL$  是圆内接四边形, 故  $\angle PML = \angle PCL$ . 因  $PBNM$  是圆内接四边形, 故  $\angle PMN + \angle PBN = 180^\circ$ . 因  $PBAC$  是圆内接四边形, 故  $\angle PCL = \angle PBN$ . 所以,  $\angle PMN + \angle PCL = 180^\circ$ ,  $L, M, N$  共线.  $\square$

### 1.11 莫利定理 Morley's trisector theorem

**定理 1.14 (莫利定理, 莫利角三分线定理, Morley's theorem, Morley's trisector theorem)** 将三角形的三个内角三分分, 靠近某边的两条三分角线相交得到一个交点, 则这样的三个交点可以构成一个正三角形.

此定理由法兰克·莫雷 (Frank Morley) 在 1899 年发现. 这个三角形常被称作莫利正三角形. 对外角作外角三分线, 也会有类似的性质, 可以再作出 4 个等边三角形.

此定理有趣的地方是我们没办法用尺规作图作出其等边三角形, 因为已经证明出尺规作图无法作出三等分角.

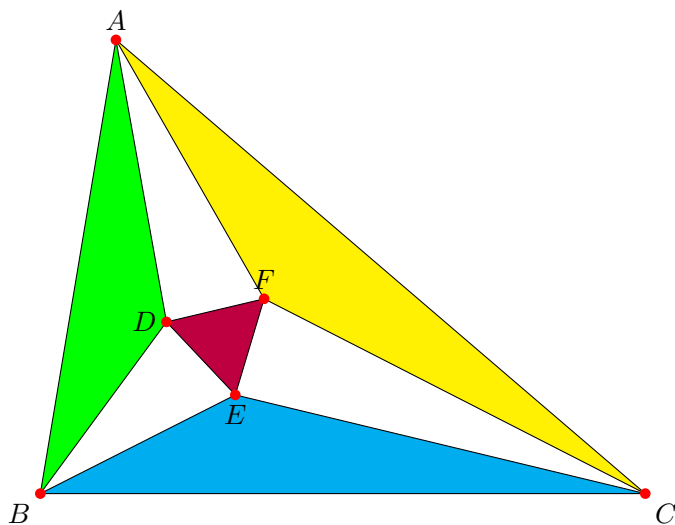


图 1.10: 莫利定理

### 1.12 外森比克不等式 Weitzenböck's inequality

**定理 1.15 (外森比克不等式, Weitzenböck's inequality)** 设三角形的边长为  $a, b, c$ , 面积为  $S$ , 则

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

当且仅当三角形为等边三角形, 等号成立.

证明

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \\
 \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq \sqrt{3(a + b + c) \left( \frac{a + b + c}{3} \right)^3} \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq \sqrt{3(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)} \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4\sqrt{3}S
 \end{aligned}$$

□

**1.13 斯图尔特定理 Steward's theorem**

定理 1.16 (斯图尔特定理, 斯图沃特定理, Steward's theorem) 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  是  $BC$  上任意一点, 则有:

$$AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD$$

证明很简单, 使用余弦定理.

**1.14 斯霍滕定理 Schouten's theorem**

定理 1.17 (斯霍滕定理, Schouten's theorem) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC$  的角平分线交  $BC$  于点  $D$ , 则有:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

斯霍滕 (Schouten), 荷兰数学家. 由[斯图尔特定理](#)可证明.



## 第 2 章 圆 Circles

### 2.1 圆周角定理 Inscribed angle theorem

**定理 2.1 (圆周角定理, Incribed angle theorem)** 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对圆周角等于其所对的圆心角的一半.

推论:

1. 若两圆周角定点在弦所在直线的同一边, 则两圆周角相等.
2. 若两圆周角定点分别在弦所在直线的两边, 则圆周角互补.
3. 若两圆周角定点在一条直径上, 则圆周角恒等于  $90^\circ$ .

### 2.2 泰勒斯定理 Thales' theorem

**定理 2.2 (泰勒斯定理, Thales' theorem)** 若  $A, B, C$  是圆周上的三点, 且  $AC$  是该圆的直径, 那么  $\angle ABC$  为直角. 或者说, 直径所对的圆周角是直角.

泰勒斯定理以古希腊思想家, 科学家, 哲学家泰勒斯 (Thales of Miletus) 的名字命名. 该定理在欧几里得《几何原本》(Euclid's *Elements*) 第三卷中被提到并证明.

泰勒斯定理的逆定理同样成立, 即:

**定理 2.3 (泰勒斯定理的逆定理)** 直角三角形中, 直角的顶点在以斜边为直径的圆上.

### 2.3 弦切角定理 Alternate segment theorem

**定理 2.4 (弦切角定理, Alternate segment theorem)** 在任何圆中, 弦切角的度数等于通过一个弦和切线之间的端点的夹角, 亦是所夹弧所对的圆周角 (圆心角的一半).

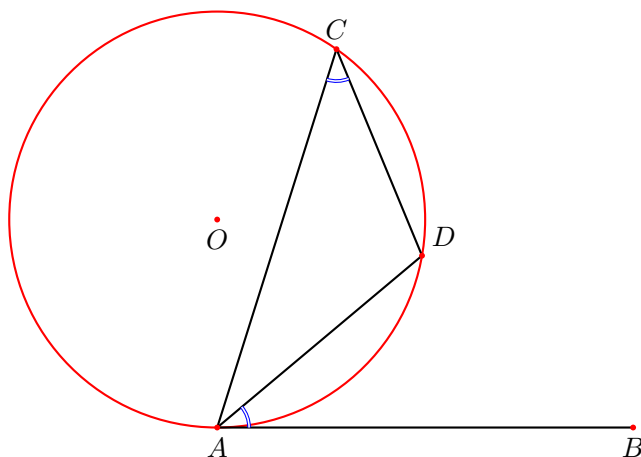


图 2.1: 弦切角定理

## 2.4 圆幂定理 Circle power theorem

**定义 2.1 (圆幂, Circle Power, Power of a point)** 给点半径为  $r$ , 圆心为  $O$  的圆, 平面上任意一点  $P$  的圆幂  $\Pi(P) = OP^2 - r^2$ .

这个定义是 Jakob Steiner<sup>1 2</sup> 在 1826 年引入的, 根据定义:

1. 如果  $P$  在圆外, 则  $\Pi(P) > 0$ .
2. 如果  $P$  在圆上, 则  $\Pi(P) = 0$ .
3. 如果  $P$  在圆内, 则  $\Pi(P) < 0$ .

**定理 2.5 (圆幂定理, Circle power theorem)** 给定一个圆  $\Gamma$  以及一点  $P$ , 从该点引出两条割线, 分别与  $\Gamma$  相交于  $A, B$  以及  $C, D$ , 则有

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

这个乘积, 是  $P$  对于  $\Gamma$  的圆幂 (Circle power), 故定理以此为名. 圆幂定理有三个变体, 分别是“相交弦定理 intersecting chords theorem”, “割线定理 Intersecting secants theorem”及“切割线定理”.

**证明** 通过相似三角形可以证明

□

<sup>1</sup><https://mathworld.wolfram.com/CirclePower.html>

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Power\\_of\\_a\\_point](https://en.wikipedia.org/wiki/Power_of_a_point)

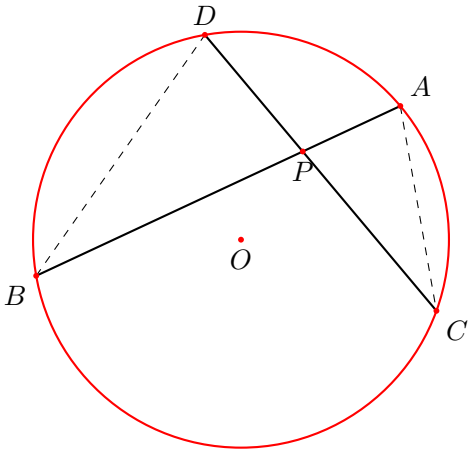


图 2.2: 相交弦定理

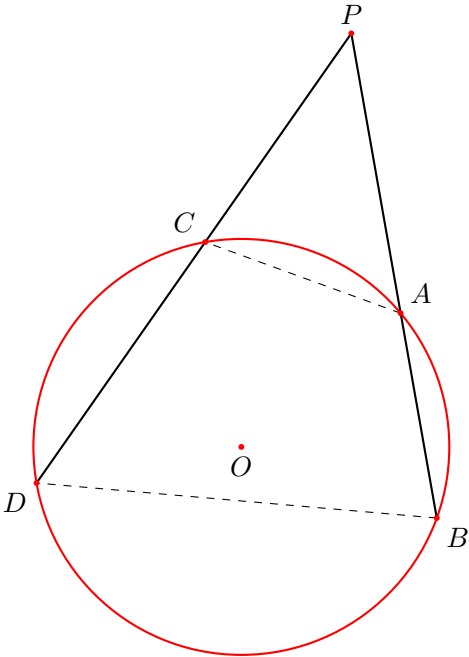


图 2.3: 割线定理

2.5 阿波罗尼斯圆

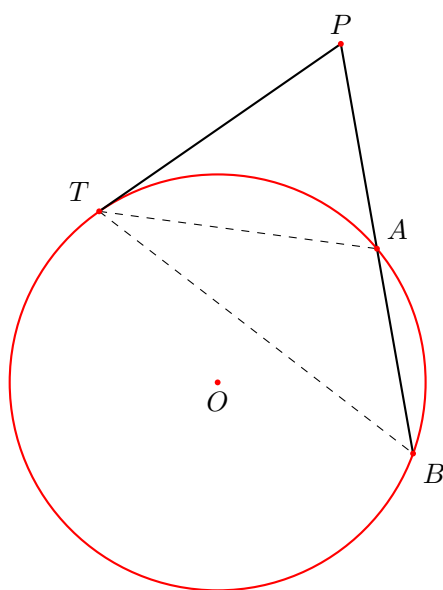


图 2.4: 切割线定理

**定理 2.6** 已知平面上两点  $A, B$ , 则所有满足  $\frac{PA}{PB} = \lambda (\lambda \neq 1)$  则点  $P$  的轨迹, 是以定比  $\lambda$  内分和外分定线段的两个分点的连线为直径的圆.

这个轨迹最先由古希腊数学家阿波罗尼斯 (Apollonius) 发现, 故称作阿波罗尼斯 (或阿氏圆).

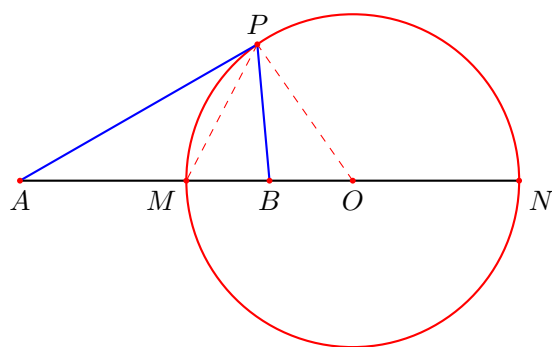


图 2.5: 阿波罗尼斯圆



证明 如图, 不妨设  $\lambda > 1$ , 在直线  $AB$  上取点  $M, N$ , 使得

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \lambda$$

连接  $PM, PN$ , 若  $P$  不在直线  $AB$  上, 由角平分线定理可得,  $PM, PN$  分别为  $\angle APB$  的角平分线和外角平分线, 故:

$$\angle MPN = 90^\circ$$

所以,  $P$  在以  $MN$  为直径的圆上.

设圆心为  $O$ , 下面证明圆  $\odot O$  上的点满足  $\frac{PA}{PB} = \lambda$ . 设  $AB = d$ , 则

$$MB = \frac{d}{\lambda + 1}$$

$$NB = \frac{d}{\lambda - 1}$$

$$MN = MB + NB = \frac{2\lambda d}{\lambda^2 - 1}$$

$$OP = OM = \frac{1}{2}MN = \frac{\lambda d}{\lambda^2 - 1}$$

$$OB = OM - MB = \frac{d}{\lambda^2 - 1}$$

$$OA = AB + OB = \frac{\lambda^2 d}{\lambda^2 - 1}$$

对于圆  $O$  上出  $M, N$  之外的点  $P$ , 有

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OP} = \lambda$$

因此,

$$\triangle OPB \sim \triangle OPA$$

$$\frac{PA}{PB} = \lambda$$

□

## 2.6 托勒密定理 Ptolemy's theorem

**定理 2.7 (托勒密定理, Ptolemy's theorem)** 圆内接四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积.

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

托勒密定理实际上也可以看做一种判定圆内接四边形的方法.

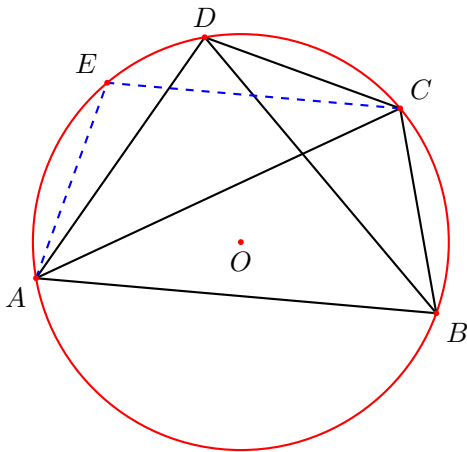


图 2.6: 托勒密定理

证明方法很多, 采用构造相似三角形的方法<sup>3</sup>, 本文采用面积法.

**证明** 不妨设  $\widehat{AD} > \widehat{CD}$ , 在  $\widehat{AD}$  上找到一点  $E$  使得  $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ . 设  $AC, BD$  的夹角为  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCE} \\ &= AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE + BC \cdot CE \cdot \sin \angle BCE \\ &= AB \cdot CD \cdot \sin \angle BAE + BC \cdot AD \cdot \sin \angle BCE \\ S_{ABCD} &= AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \\ \alpha &= \angle CBD + \angle ACB \\ &= \angle ACE + \angle ACB \\ &= \angle BCE \end{aligned}$$

$$\angle BCE + \angle BAE = 180^\circ$$

$$\sin \alpha = \sin \angle BAE = \sin \angle BCE$$

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy%27s_theorem)

$$S_{ABCE} = S_{ABCD}$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

□

## 2.7 布拉美古塔定理 Brahmagupta's theorem

**定理 2.8 (布拉美古塔定理, Brahmagupta's theorem)** 若圆内接四边形的对角线相互垂直, 则垂直于一边且过对角线交点的直线将平分对边.

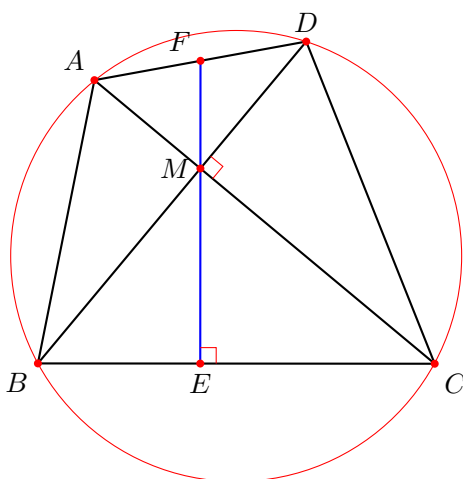


图 2.7: 布拉美古塔定理

## 2.8 密克定理 Miquel's theorem

1838 年, 奥古斯特·密克 (Auguste Miquel, 法国数学家, 曾发表数条圆和多边形的定理, 称为密克定理 (Miquel's theorem)).

**定理 2.9 (三圆定理)** 设三个圆  $O_1, O_2, O_3$  交于一点  $O$ , 而  $D, E, F$  分别是  $O_2$  和  $O_3$ ,  $O_3$  和  $O_1$ ,  $O_1$  和  $O_2$  的另一交点. 设  $A$  为  $O_1$  的点, 直线  $AF$  交  $O_2$  于  $B$ , 直线  $AE$  交  $O_3$  于  $C$ , 那么  $B, C, D$  三点共线.

**定理 2.10 (三圆定理的逆定理)** 对任意  $\triangle ABC$ ,  $D, E, F$  三点分别在边  $AB, BC, CA$  上 (或延长线上), 那么  $\triangle AFE, \triangle BDF, \triangle CED$  的外接圆交于一点.

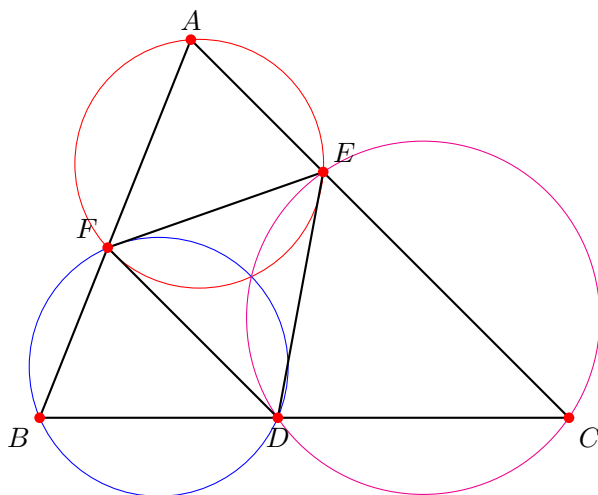


图 2.8: 密克定理之三圆定理

**定义 2.2 (完全四边形)** 完全四边形是平面上由任意四条直线组成的图形, 其中任意三条都不共点, 且相交于六个点.

**定理 2.11 (完全四线形定理)** 如果  $ABCDEF$  是完全四线形, 那么  $\triangle EAD, \triangle EBC, \triangle FAB, \triangle FDC$  的外接圆交于一点.

**定理 2.12 (四圆定理)** 设  $O_1, O_2, O_3, O_4$  为四个圆,  $A_1$  和  $B_1$  是  $O_1$  和  $O_2$  的交点,  $A_2$  和  $B_2$  是  $O_2$  和  $O_3$  的交点,  $A_3$  和  $B_3$  是  $O_3$  和  $O_4$  的交点,  $A_4$  和  $B_4$  是  $O_4$  和  $O_1$  的交点, 那么  $A_1, A_2, A_3, A_4$  四点共圆当且仅当  $B_1, B_2, B_3, B_4$  四点共圆.

**定理 2.13 (五圆定理)** 设  $A_1A_2A_3A_4A_5$  为任意五边形,  $A_1A_2 \cap A_4A_5 = B_1, A_2A_3 \cap A_5A_1 = B_2, A_3A_4 \cap A_1A_2 = B_3, A_4A_5 \cap A_2A_3 = B_4, A_5A_1 \cap A_3A_4 = B_5$ , 那么  $\triangle B_1A_1A_5, \triangle B_2A_2A_1, \triangle B_3A_3A_2, \triangle B_4A_4A_3, \triangle B_5A_5A_4$  的外接圆的五个不在五边形

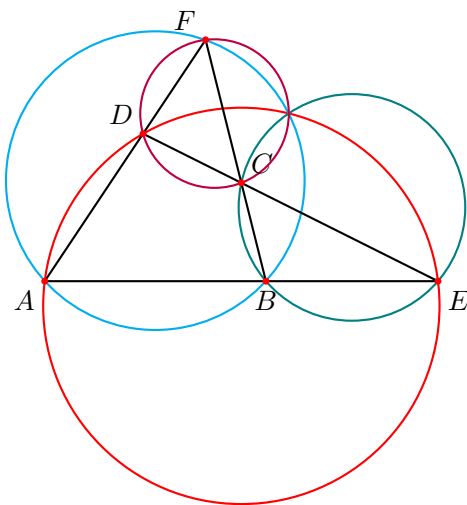


图 2.9: 密克定理之完全四线形定理

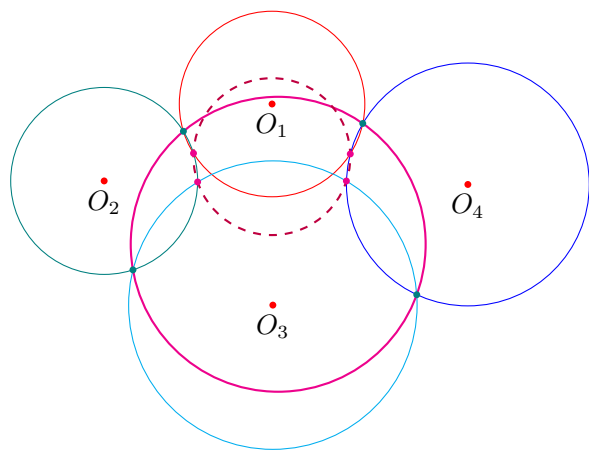


图 2.10: 密克定理之四圆定理

上的交点共圆.

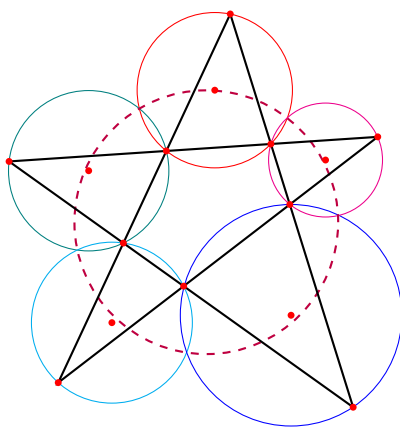


图 2.11: 密克定理之五圆定理

## 2.9 牛顿定理 Newton's theorem

**定理 2.14 (牛顿定理, Newton's theorem)** 圆外切四边形的两条对角线的中点, 及该圆的圆心, 三点共线.

如果圆外切四边形是菱形, 在这种情况下对角线的中点和内切圆的圆心重合.

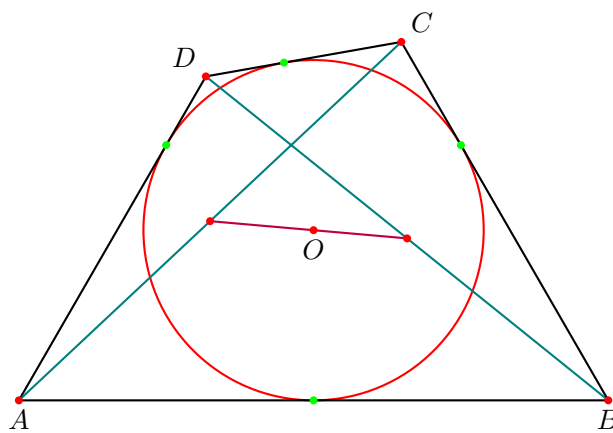


图 2.12: 牛顿定理

## 2.10 根轴与根心 Radical axis and radical center

**定义 2.3 (根轴, Radical axis)** 根轴亦称等幂轴, 指对于不同心两圆有相等幂的点的轨迹. 即向不同心两圆引相等切线的点的轨迹, 是垂直于两圆连心线的一条直线.

**定理 2.15** 根轴有以下性质:

1. 平面上任意两圆的根轴垂直于它们的连心线;
2. 若两圆相交, 则两圆的根轴为公共弦所在的直线;
3. 若两圆相切, 则两圆的根轴为它们的内公切线;
4. 若两圆外离, 则两圆的根轴上的点分别引两圆的切线, 则切线长相等. 从而, 根轴必过四条公切线的中点.

在解析几何下, 两圆方程联立, 相减就可求得根轴的方程. 同心圆的根轴是无穷远直线 (射影几何).

**定理 2.16 (根心定理, Radical center theorem, Radical axis theorem)** 平面上任意三个圆, 若这三个圆圆心不共线, 则三条根轴相交于一点; 若三圆圆心共线, 则三条根轴互相平行.

这个交点称为根心 (radical center, 或 power center)<sup>4</sup>, 这个定理首先由蒙日 (Monge) 发现<sup>5</sup>.

注 可以使用代数方法来证明: 根据三个圆的方程得到三条根轴的方程, 根轴方程的系数组成一个  $3 \times 3$  矩阵, 该矩阵行向量线性相关 (第 1 行 + 第 2 行 = 第 3 行), 因此其行列式为 0, 三线共点.

根轴的几何构造方法: 两圆相交时, 根轴为两圆交点的连线; 两圆相切时, 根轴为两圆的公切线; 两圆内含或外离时, 根据这个定理我们可以借助第三个圆作出两个不同心圆的根轴<sup>6</sup>.

1. 作  $O_3$  交  $O_1$  于  $A_1A_2$  交  $O_2$  于  $B_1B_2$
2. 作  $O_4$  交  $O_1$  于  $C_1C_2$  交  $O_2$  于  $D_1D_2$
3.  $A_1A_2$  交  $B_1B_2$  于  $P$
4.  $C_1C_2$  交  $D_1D_2$  于  $Q$

$PQ$  即是.

<sup>4</sup><http://mathgardenblog.blogspot.com/2013/07/radical-axis.html>

<sup>5</sup><https://mathworld.wolfram.com/RadicalCenter.html>

<sup>6</sup><https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%A0%B9%E8%BB%B8>

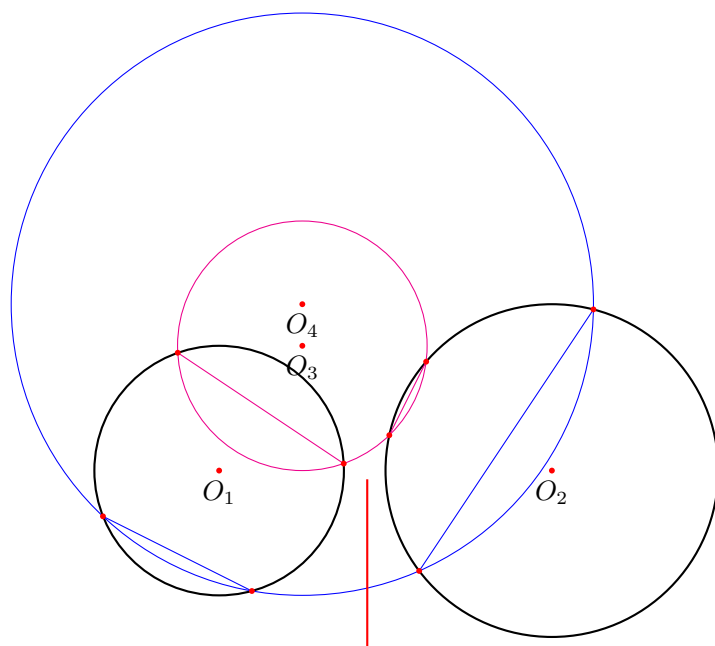


图 2.13: 根轴的几何构造方法

## 2.11 蒙日定理 Monge's theorem

**定理 2.17 (蒙日定理, Monge's theorem)** 对于平面上的任意三个圆, 其中没有一个圆包含于另外的圆, 则每两个圆的外公切线的交点在一直线上.

**证明** 考虑  $\triangle O_1 O_2 O_3$  与  $X, Y, Z$ , 利用梅涅劳斯定理可以证明.

$$\frac{O_1 Z}{Z O_2} \cdot \frac{O_2 X}{X O_3} \cdot \frac{O_3 Y}{Y O_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1$$

□

这个定理还可以从三维空间来解释. 想象在这个平面的三个圆上放置着三个球, 每个球的半径都等于它底下的那个圆的半径. 显然, 这个平面是这三个球的一个公切面. 再把三组外公切线想象成这三个球两两确定的圆锥在平面上的投影. 显然, 三个圆锥的顶点都在这个平面上, 我们要证明的就是, 这三个顶点是共线的.

注意到这三个球还有另一个公切面, 三个圆锥的顶点也都在这个公切面上. 而这两个公切面的公共部分就是它们的交线, 因此这三个顶点必然都在这条交线上.

考虑到内公切线的交点, 我们可以得到一个对偶定理:



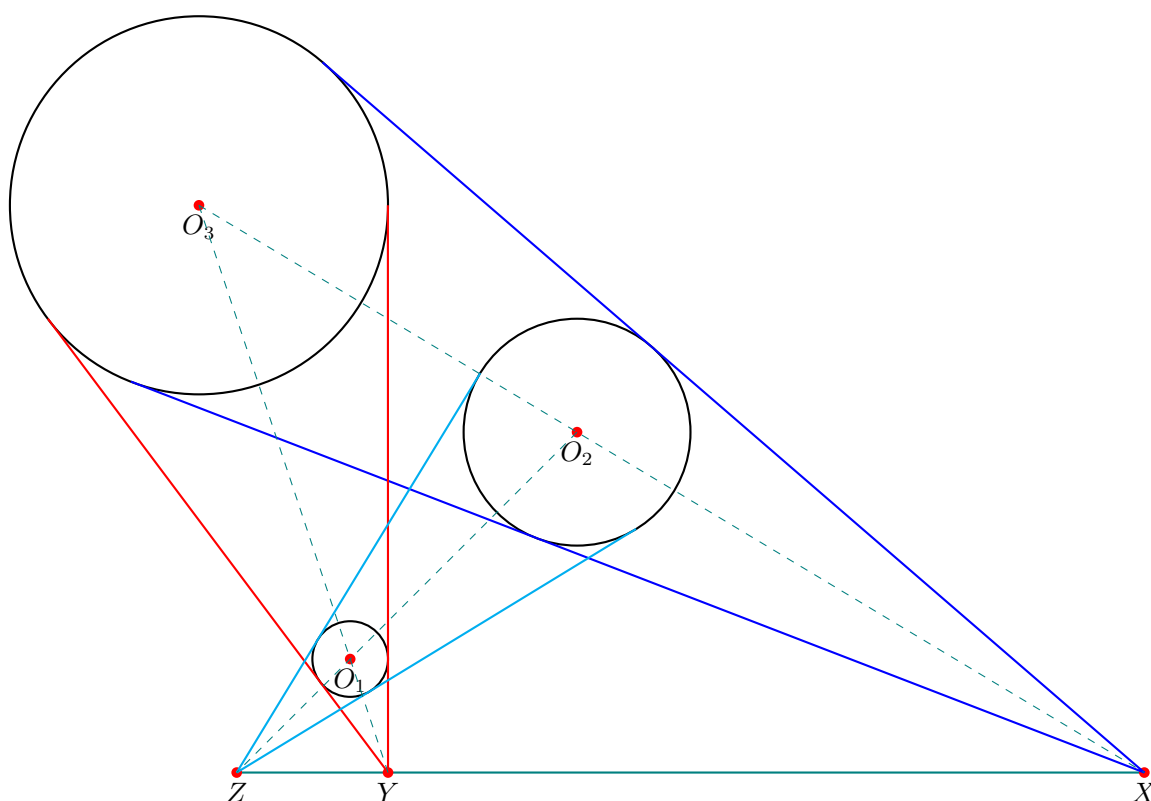


图 2.14: 蒙日定理

**定理 2.18** 内公切线交点与对应圆心的连线交于一点.

利用 [塞瓦定理](#) 或构造点的坐标通过行列式来证明.

实际上, 三个圆的外位似中心 (external homothetic centers) 和内位似中心 (internal homothetic centers) 构成简单四线形<sup>7</sup>.

## 2.12 蝴蝶定理 Butterfly theorem

**定理 2.19 (蝴蝶定理, Butterfly theorem)** 设  $M$  为圆内弦  $PQ$  的中点, 过  $M$  作弦  $AB$  和  $CD$ . 设  $AD$  和  $BC$  各相交  $PQ$  于点  $X$  和  $Y$ , 则  $M$  是  $XY$  的中点.

证明方法有多种, 可分为初等几何, 解析几何和射影几何<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic\\_center](https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic_center)

<sup>8</sup><http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml>

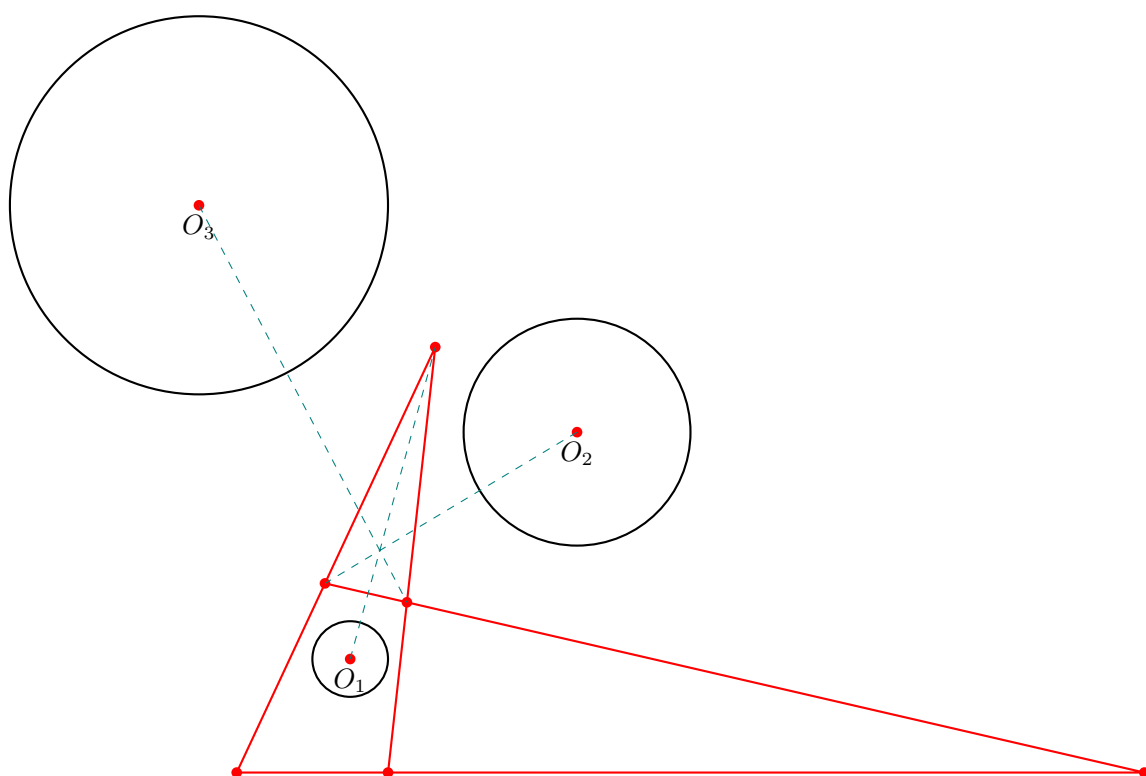


图 2.15: 三个圆的位似中心

该定理实际上是射影几何中一个定理的特殊情况, 有多种推广:

1.  $M$  作为圆内弦中点是不必要的, 可以移到圆外.
2. 圆可以改为任意圆锥曲线.
3. 将圆变为一个完全四角形,  $M$  为对角线交点.
4. 去掉中点的条件, 结论变为一个一般关于有向线段的比例式, 称为坎迪定理 (Candy's theorem),  $M$  不为中点时满足:

$$\frac{1}{MY} - \frac{1}{MX} = \frac{1}{MQ} - \frac{1}{MP}$$

这对 2, 3 均成立.

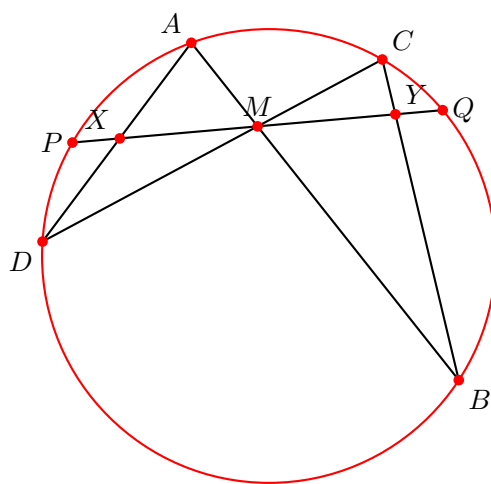


图 2.16: 蝴蝶定理



## 第 3 章 三角形的中心 Triangle Centers

### 3.1 重心坐标 Barycentric Coordinates

定理 3.1 已知点  $P$  是  $\triangle ABC$  内任意一点, 则存在

$$S_{\triangle PBC} \cdot \overline{PA} + S_{\triangle PCA} \cdot \overline{PB} + S_{\triangle PAB} \cdot \overline{PC} = \mathbf{0}.$$

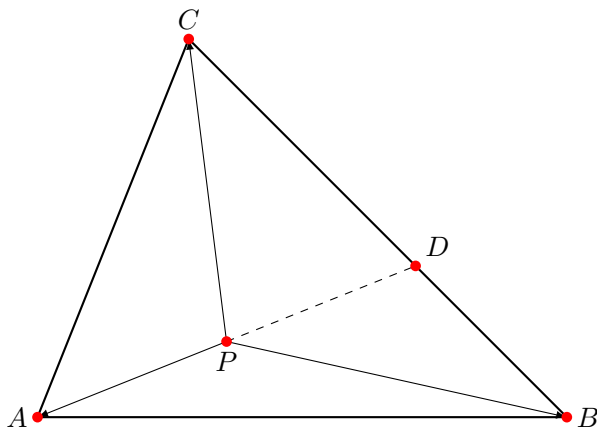


图 3.1: 重心坐标

证明

方法 1:(面积法)

记  $S_{\triangle PBC}, S_{\triangle PCA}, S_{\triangle PAB}$  分别为  $S_A, S_B, S_C$ , 延长  $AP$  交  $BC$  于点  $D$ , 则有:

$$\begin{aligned}\frac{BD}{DC} &= \frac{S_C}{S_B} \\ \overline{PD} &= \frac{DC}{BC} \cdot \overline{PB} + \frac{BD}{BC} \cdot \overline{PC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S_B}{S_B + S_C} \cdot \overline{PB} + \frac{S_C}{S_B + S_C} \cdot \overline{PC} \\
\frac{PD}{AD} &= \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C} \\
\frac{PD}{PA} &= \frac{PD}{AD - PD} \\
&= \frac{S_A}{S_B + S_C} \\
\overline{PD} &= -\frac{PD}{PA} \cdot \overline{PA} \\
&= -\frac{S_A}{S_B + S_C} \cdot \overline{PA}
\end{aligned}$$

$$S_A \cdot \overline{PA} + S_B \cdot \overline{PB} + S_C \cdot \overline{PC} = \mathbf{0}$$

方法 2:(向量法)

因为不共线的两个向量构成一个坐标系, 存在实数  $a, b, c$ , 使得

$$a \cdot \overline{PA} + b \cdot \overline{PB} + c \cdot \overline{PC} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{aligned}
\overline{AP} &= \frac{b}{a} \cdot \overline{PB} + \frac{c}{a} \cdot \overline{PC} \\
&= \frac{b}{a} \cdot (\overline{AB} - \overline{AP}) + \frac{c}{a} \cdot (\overline{AC} - \overline{AP}) \\
&= \frac{b}{a+b+c} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \overline{AC} \\
\overline{AP} \times \overline{AB} &= \frac{c}{a+b+c} \cdot \overline{AC} \times \overline{AB} \\
\frac{\|\overline{AP} \times \overline{AB}\|}{\|\overline{AC} \times \overline{AB}\|} &= \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}} \\
&= \frac{c}{a+b+c}
\end{aligned}$$

同理, 我们可以依次得到:

$$S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCA} : S_{\triangle PAB} = a : b : c$$

□

这个结论对于点  $P$  在三角形的外部也是成立的, 实际上系数的正负号与三个向量的相对位置有关, 在三角形的内部三个向量依次是逆时针排列的, 如果在三角形外部, 则出现顺序颠倒, 因此系数有正有负.

对于三角形的重心, 外心, 垂心内心外心可以用统一的公式形式<sup>1 2</sup>.

#### 1. 重心 (Centroid) G

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$$

#### 2. 外心 (Circumcenter) O

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

#### 3. 垂心 (Orthocenter) H

$$\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \mathbf{0}$$

由于直角的正切不存在, 此时需要使用  $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$  进行转化.

#### 4. 内心 (Incenter) I

$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \mathbf{0}$$

$a, b, c$  是对应边长

#### 5. 旁心 (Excenter) J

$$-a \cdot \overrightarrow{J_A A} + b \cdot \overrightarrow{J_A B} + c \cdot \overrightarrow{J_A C} = \mathbf{0}$$

上面是顶点  $A$  对应的外心, 其它两个系数分别是  $(a, -b, c)$  和  $(a, b, -c)$ .

一些重要三角形中心的重心坐标如下表<sup>3</sup>:

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle\\_center](https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_center)

<sup>2</sup><https://mathworld.wolfram.com/TriangleCenter.html>

<sup>3</sup><https://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html>

表 3.1: Barycentric Coordinates of Triangle Centers

triangle center	barycentric coordinates
circumcenter $O$	$\begin{pmatrix} a^2(b^2 + c^2 - a^2) \\ b^2(c^2 + a^2 - b^2) \\ c^2(a^2 + b^2 - c^2) \end{pmatrix}$
excenter $J_A$	$(-a, b, c)$
excenter $J_B$	$(a, -b, c)$
excenter $J_C$	$(a, b, -c)$
Gergonne point $Ge$	$((s-b)(s-c), (s-c)(s-a), (s-a)(s-b))$
incenter $I$	$(a, b, c)$
Nagel point $Na$	$(s-a, s-b, s-c)$
orthocenter $H$	$\begin{pmatrix} (a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2) \\ (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) \\ (c^2 + a^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) \end{pmatrix}$
symmedian point $K$	$(a^2, b^2, c^2)$
triangle centroid $G$	$(1, 1, 1)$
nine-point center $N$	$\begin{pmatrix} a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 \\ b^2(c^2 + a^2) - (c^2 - a^2)^2 \\ c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 \end{pmatrix}$

### 3.2 三角形的重心 Centroid

定义 3.1 (三角形的重心 Centroid) 三角形三条中线的交点

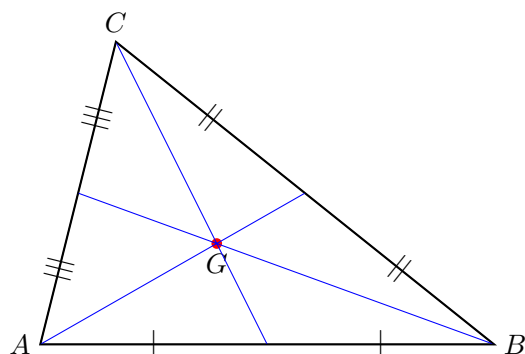
重心的性质

1. 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1.
2. 重心和三角形任意两个顶点组成的 3 个三角形面积相等. 即重心到三条边的距离与三条边的长成反比.
3. 重心到三角形 3 个顶点距离的平方和最小.
4. 在平面直角坐标系中, 重心的坐标是顶点坐标的算术平均数, 即其重心坐标为

$$\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

5. 以重心为起点, 以三角形三顶点为终点的三条向量之和等于零向量.





### 3.3 三角形的外心 Circumcenter

**定义 3.2 (三角形的外心 Circumcenter)** 三角形三条边的垂直平分线

外心的性质

1. 当三角形为锐角三角形时, 外心在三角形内部.
2. 当三角形为钝角三角形时, 外心在三角形外部.
3. 当三角形为直角三角形时, 外心在斜边上, 与斜边的中点重合.
4. 外心到三顶点的距离相等.

外心的坐标由下面的公式计算<sup>4</sup>:

$$\sin 2A \cdot \overline{OA} + \sin 2B \cdot \overline{OB} + \sin 2C \cdot \overline{OC} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

令:

$$\mathbf{a} = \overline{BC} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{b} = \overline{CA} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{c} = \overline{AB} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{b}\| \sin A \quad (3.5)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{c}\| \sin B \quad (3.6)$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{a}\| \sin C \quad (3.7)$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = -\|\mathbf{c}\| \|\mathbf{b}\| \cos A \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{c}\| \cos B \quad (3.9)$$

<sup>4</sup><https://www.cuemath.com/geometry/circumcenter/>

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = -\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{a}\|\cos C \quad (3.10)$$

由这些式子可以计算<sup>5</sup>  $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B, \sin C, \cos C$ , 然后由倍角公式可以计算出  $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ , 代入 3.1 中, 就可以得到外心的坐标.

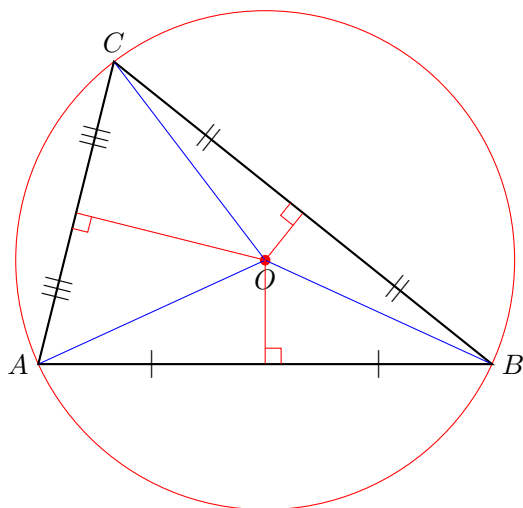


图 3.2: 三角形的外心

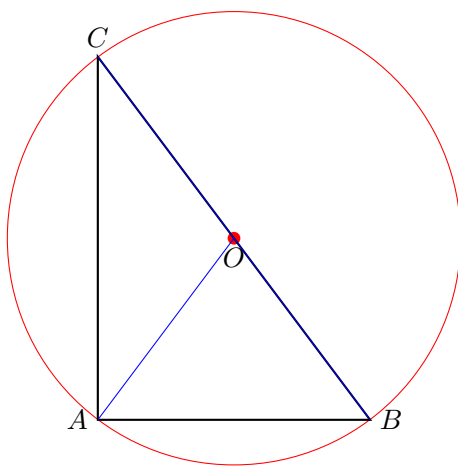


图 3.3: 直角三角形的外心

<sup>5</sup>使用 TikZ 计算作图时要注意使每一步计算的数值尽可能小, 否则出现 Dimension too large 错误.

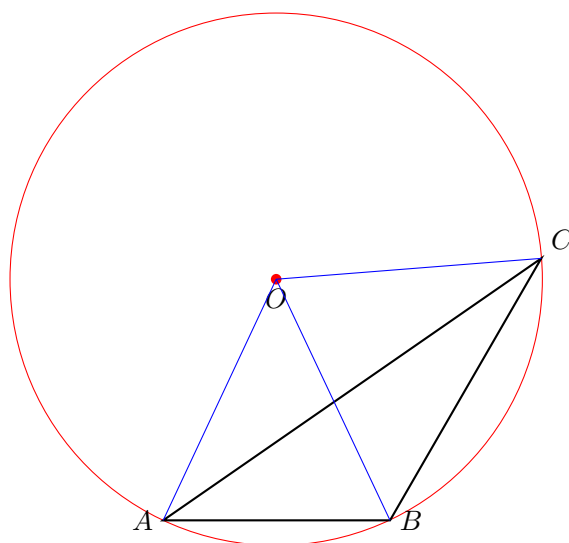


图 3.4: 钝角三角形的外心

### 3.4 三角形的垂心 Orthocenter

**定义 3.3 (三角形的垂心 Orthocenter)** 三角形三条高线的交点

垂心的性质

1. 三角形三个顶点, 三个垂足, 垂心这 7 个点可以得到 6 个四点圆.
2. 三角形外心  $O$ , 重心  $G$  和垂心  $H$  三点共线<sup>6</sup>, 且  $OG : GH = 1 : 2$ .
3. 垂心到三角形一顶点距离为此三角形外心到此顶点对边距离的 2 倍.
4. 垂心分每条高线的两部分乘积相等.

### 3.5 三角形的内心 Incenter

**定义 3.4 (三角形的内心 Incenter)** 三角形三条角线的交点

内心的性质

1. 直角三角形的内心到边的距离等于两直角边的和与斜边的差的二分之一.
2. 欧拉定理  $\triangle ABC$  中,  $R$  和  $r$  分别为外接圆为和内切圆的半径,  $O$  和  $I$  分别为其外心和内心, 则  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ .
3. 内心到三角形三边距离相等.

<sup>6</sup>此直线称为三角形的欧拉线 Euler line

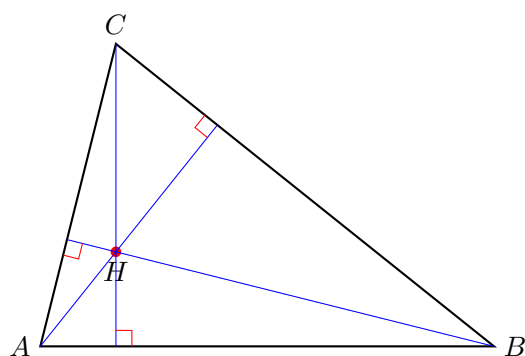


图 3.5: 三角形的垂心

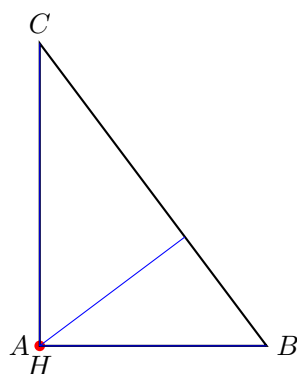


图 3.6: 直角三角形的垂心

### 3.6 三角形的旁心 Excenter

**定义 3.5 (三角形的旁心 Excenter)** 三角形一条内角平分线与两条外角平分线的交点, 共 3 个.

旁心的性质

1. 旁心到三边的距离相等.

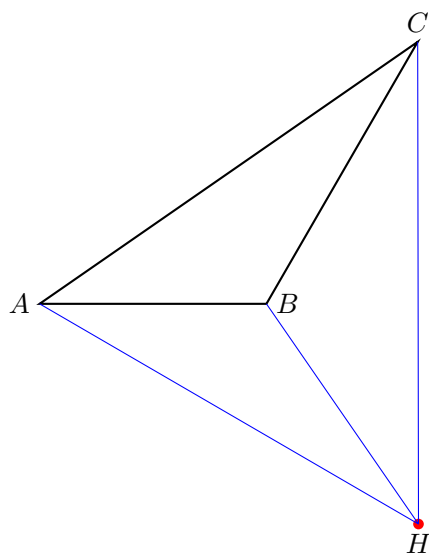


图 3.7: 钝角三角形的垂心

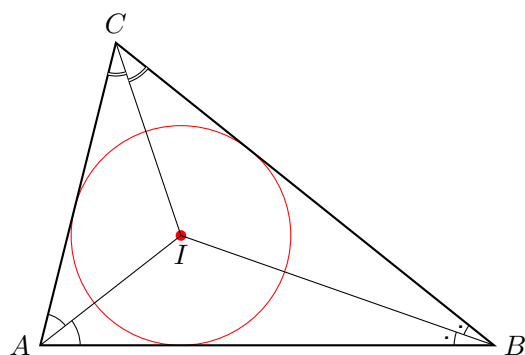


图 3.8: 三角形的内心

### 3.7 欧拉定理

**定理 3.2 (欧拉定理, Euler's theorem in geometry)** 三角形的外心与内心之间的距离  $d$  可表示为

$$d^2 = R(R - 2r)$$

或

$$\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}$$

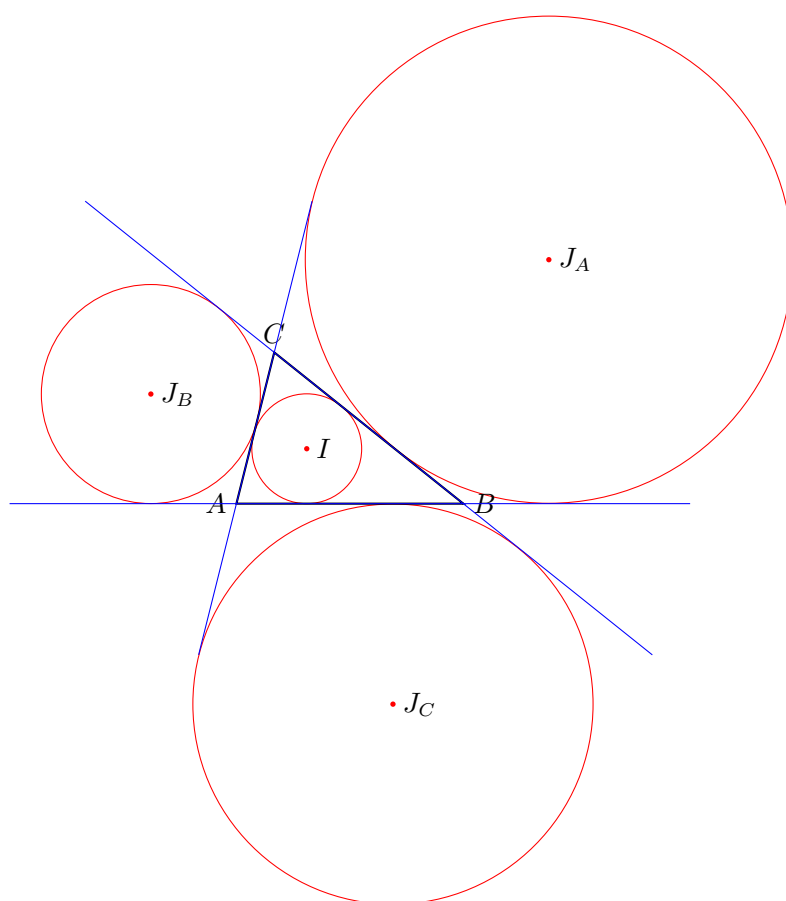


图 3.9: 三角形的内切圆与旁切圆

其中: $R$  为外接圆半径, $r$  为内切圆半径.

从欧拉定理可推出欧拉不等式 (Euler's inequality)(仅当三角形为等边三角形时, 等号成立):

$$R \geq 2r$$

### 3.8 欧拉线 Euler line

**定理 3.3** 三角形的垂心, 外心, 重心和九点圆圆心共线.

这条直线称为欧拉线 (Euler line). 莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler) 证明了在任意三角形中, 以上四点共线. 欧拉线上的四点中, 九点圆圆心到垂心和外心的距离相等, 而且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半. 注意内心一般不在欧拉线上, 除了等腰三角形外.

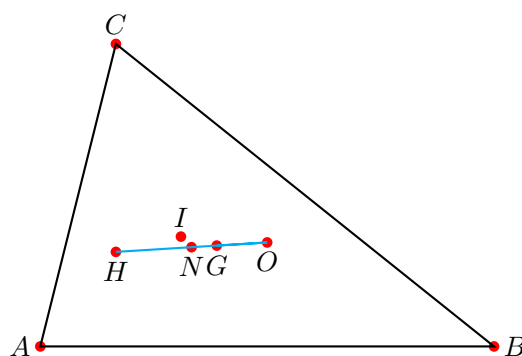


图 3.10: 欧拉线

### 3.9 九点圆定理 Nine-point circle theorem

**定义 3.6 (欧拉点, Euler points)** 在三角形中, 顶点到垂心的三条线段的中点.

三个欧拉点构成的三角形称为欧拉三角形.

**定理 3.4 (九点圆定理, Nine-point circle theorem)** 对任意三角形, 其三边的中点, 三高的垂足, 三个欧拉点九点共圆.

这个圆被称为九点圆 (Nine-point circle), 又称欧拉圆 (Euler's circle), 或费尔巴哈圆 (Feuerbach's circle).

九点圆具有以下性质:

1. 九点圆的半径是外接圆的一半, 且九点圆平分垂心与外接圆上的任一点的连线.
2. 圆心在欧拉线上, 且在垂心到外心的线段的中点.
3. 九点圆和三角形的内切圆和旁切圆相切 (费尔巴哈定理).
4. 圆周上四点任取三点做三角形, 四个三角形的九点圆圆心共圆 (库利奇一大上定理).

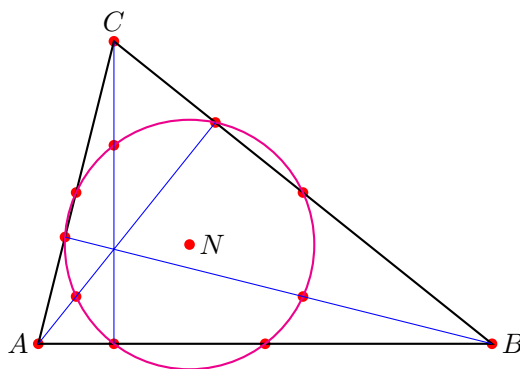


图 3.11: 九点圆

### 3.10 费尔巴哈定理 Feuerbach's theorem

**定理 3.5 (费尔巴哈定理, Feuerbach's theorem)** 九点圆和三角形的内切圆和旁切圆相切.

### 3.11 费马点 Fermat point

**定义 3.7 (费马点, Fermat point)** 三角形内部满足到三个顶点距离之和最小的点.

费马点问题最早是由法国数学家皮埃尔·德·费马 (Pierre de Fermat) 在一封写给意大利数学家埃万杰利斯塔·托里拆利 (Evangelista Torricelli 气压计的发明者) 的信中提出的. 托里拆利最早解决了这个问题, 而 19 世纪的数学家斯坦纳 (Jakob Steiner) 重新发现了这个问题, 并系统地进行了推广, 因此这个点也称为托里拆利点或斯坦纳点, 相关的问题也被称作费马-托里拆利-斯坦纳问题.

下面是三角形的费马点的作法:



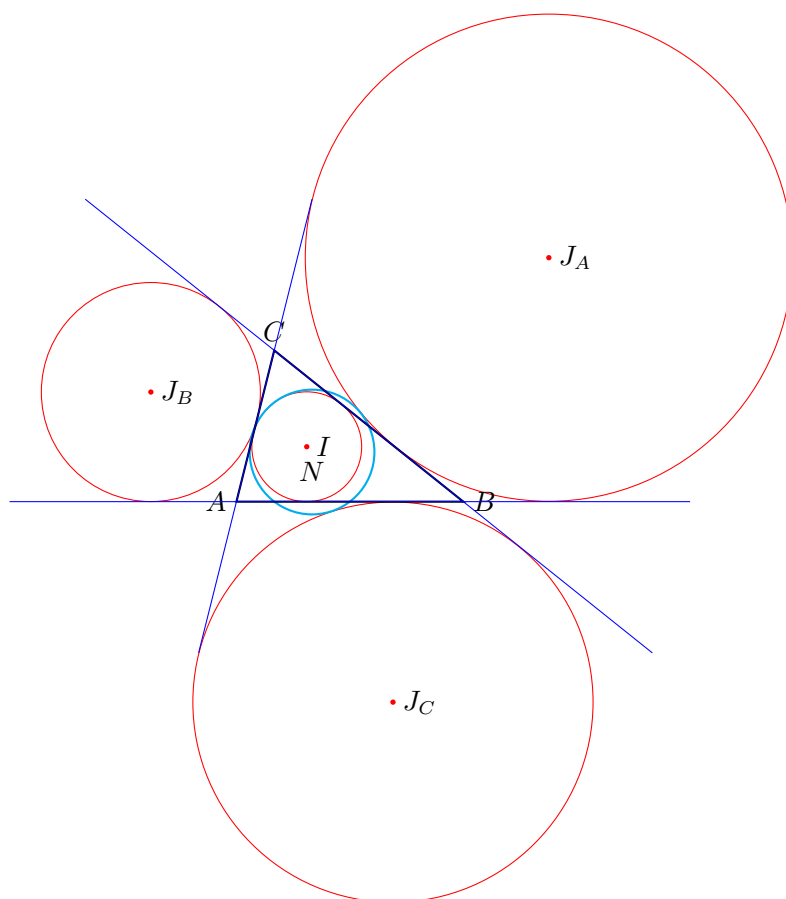
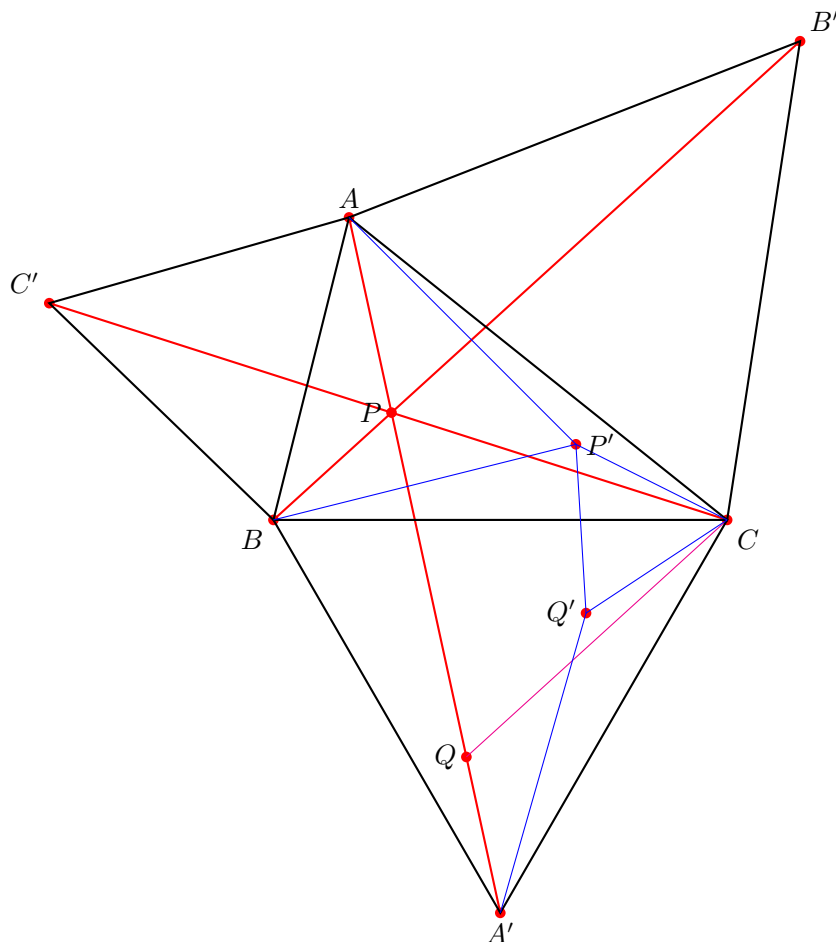


图 3.12: 费尔巴哈定理

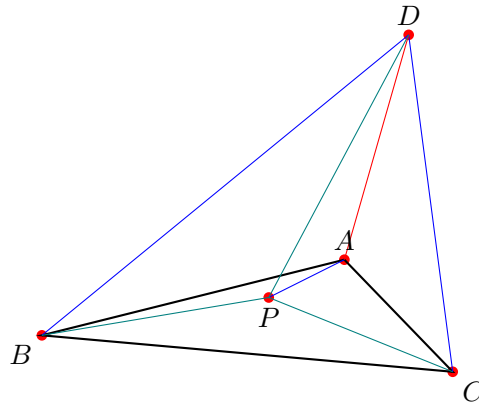
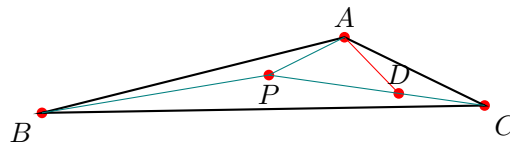
1. 当有一个内角不小于  $120^\circ$  时, 费马点为此角对应顶点.
2. 当三角形的内角都小于  $120^\circ$  时
  - 以三角形的每一边为底边, 向外做三个正三角形  $\triangle ABC'$ ,  $\triangle BCA'$ ,  $\triangle CAB'$ .
  - 连接  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , 则三条线段的交点就是所求的点.

图 3.13: 费马点 (三个内角均小于  $120^\circ$ )

**证明** 分三种情况证明.

1. 三角形的内角都小于  $120^\circ$  的情况:

如果3.13, 首先证明  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  三条线交于一点. 设  $P$  为线段  $BB'$  和  $CC'$  的交点, 注意到  $\triangle C'AC \cong \triangle BAB'$ ,  $\triangle C'AC$  可以看做是  $\triangle B'AB$  以  $A$  点为轴心顺时针旋转  $60^\circ$  得到的, 所以  $\angle AC'P = \angle ABP$ ,  $A, C', B, P$  四点共圆,  $\angle APC' = \angle C'PB = 60^\circ$ . 同样地, 可以证明其它以  $P$  为顶点的角也为  $60^\circ$ . 因此,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  三条线交于一

图 3.14: 费马点 ( $\angle BAC = 120^\circ$ )图 3.15: 费马点 ( $\angle BAC > 120^\circ$ )

点.

接下来证明交点  $P$  就是到三个顶点距离之和最小的点. 在线段  $AA'$  上选择一点  $Q$ , 使得  $QP = PC$ , 易知等腰三角形  $PQC$  是正三角形,  $\triangle BPC \cong \triangle A'QC$ . 所以  $QA' = PB$ . 综上可得出:  $PA + PB + PC = AA'$

对于平面上另外一个点  $P'$ , 以  $P'C$  为底边, 向下作正三角形  $P'Q'C$ , 运用类似以上的推理可以证明  $\triangle BP'C \cong \triangle A'Q'C$ . 因此也有  $P'A + P'B + P'C = AP' + P'Q' + Q'A$ . 平面上两点之间以直线长度最短, 因此

$$P'A + P'B + P'C = AP' + P'Q' + Q'A \geq AA' = PA + PB + PC$$

也就是说, 点  $P$  是平面上到点  $A, B, C$  距离的和最短的一点.

最后证明唯一性. 按照前面的论述,  $P$  点在  $AA'$  上, 同理可以证明  $P$  也在  $BB', CC'$  上. 因此  $P$  也是  $AA', BB', CC'$  三条线的交点. 因此点  $P$  是唯一的.

## 2. 有一内角等于 $120^\circ$ 的情况:

如图3.14,  $\angle BAC = 120^\circ$ , 在  $\triangle ABC$  外上作  $\angle BAD = 120^\circ$ , 连接  $BD, CD$ , 则  $A$  为  $\triangle BCD$  的费马点. 于是:  $AD + AB + AC \leq PD + PB + PC$ , 即  $AB + AC \leq PD - AD + PB + PC \leq PA + PB + PC$ .

## 3. 有一内角大于 $120^\circ$ 的情况:

4. 如图3.15,  $\angle BAC > 120^\circ$ , 在  $\angle BAC$  内做  $\angle BAD = 120^\circ$  交  $PC$  于  $D$ . 有 (2) 结论,

$$PA + PB + PD > AB + AD$$

$$PA + PB + PC = PA + PB + PD + DC$$

$$> AB + AD + DC$$

$$> AB + AC$$

□

### 3.12 莱斯特定理 Lester's's theorem

**定义 3.8** (第一费马点或正费马点, **the first Fermat point or the positive Fermat point**) 以  $AB, BC, AC$  为边向外作等边三角形, 对应点连线三线交于一点  $P$ , 即为第一费马点.

**定义 3.9** (第二费马点或负费马点, **the second Fermat point or the negative Fermat point**) 以  $AB, BC, AC$  为边向内作等边三角形, 对应点连线三线交于一点  $P$ , 即为第二费马点.

**定理 3.6** (莱斯特定理, **Lester's's theorem**) 在任意不等边三角形中 (scalene triangle), 第一费马点, 第二费马点, 九点圆圆心和外心四点共圆.

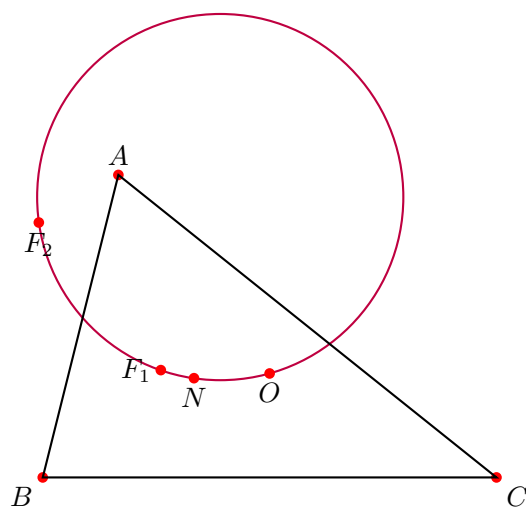


图 3.16: 莱斯特定理



## 第 4 章 射影几何 Projective Geometry

射影几何是非欧几里得几何, 属于高等几何内容 [5].

### 4.1 笛沙格定理 Desargues's theorem

**定理 4.1 (笛沙格定理, Desargues's theorem)** 在射影空间中, 有六点  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ , 直线  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  共点当且仅当  $A_1B_1 \cap A_2B_2, B_1C_1 \cap B_2C_2, C_1A_1 \cap C_2A_2$  共线.

在射影几何的对偶性来看, 笛沙格定理是自对偶的.

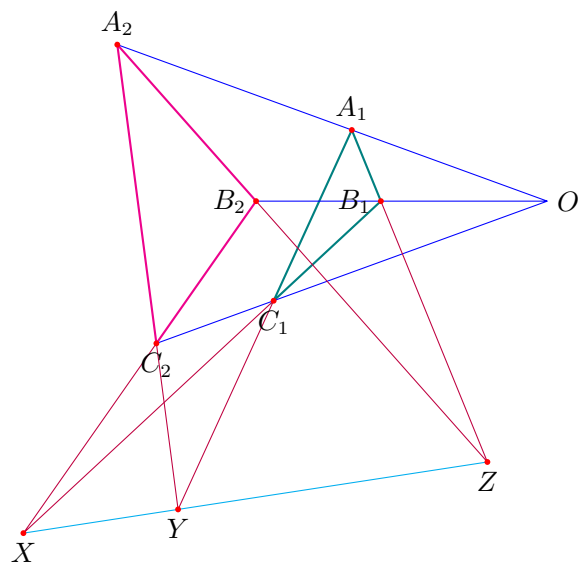


图 4.1: 笛沙格定理

## 4.2 帕普斯定理 Pappus's hexagon theorem

**定理 4.2 (帕普斯定理, Pappus's hexagon theorem)** 设  $A_1, A_3, A_5$  和  $A_2, A_4, A_6$  为共面二直线上的两组共线点, 若  $A_1A_2 \cap A_4A_5 = X$ ,  $A_2A_3 \cap A_5A_6 = Y$ ,  $A_3A_4 \cap A_6A_1 = Z$ , 则  $X, Y, Z$  共线.

注 这是帕斯卡定理的退化形式,  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  构成简单六边形, 三对对边的交点共线.

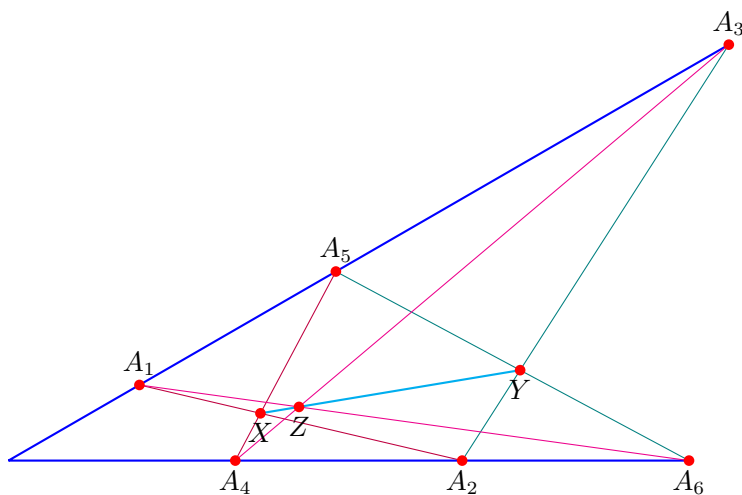


图 4.2: 帕普斯定理

## 4.3 帕斯卡定理 Pascal's theorem

**定理 4.3 (帕斯卡定理, Pascal's theorem)** 对于任意一个内接于非退化的二阶曲线的简单六边形, 它的三对对边的交点在一条直线上. 或者说, 圆锥曲线的内接六边形其三条对边的交点共线.

它与布列安桑定理对偶, 是帕普斯定理的推广. (当这个圆锥曲线退化成两条直线时, 帕斯卡定理就会变成帕普斯定理) 该定理由法国数学家布莱士·帕斯卡于 16 岁时提出但并未证明, 是射影几何中的一个重要定理.

注 这里的内接六边形不一定是凸六边形, 对于任意的简单六边形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ , 其三对对边分别是:  $A_1A_2$  和  $A_4A_5$ ,  $A_2A_3$  和  $A_5A_6$ ,  $A_3A_4$  和  $A_6A_1$ . 如图4.3和图4.4.



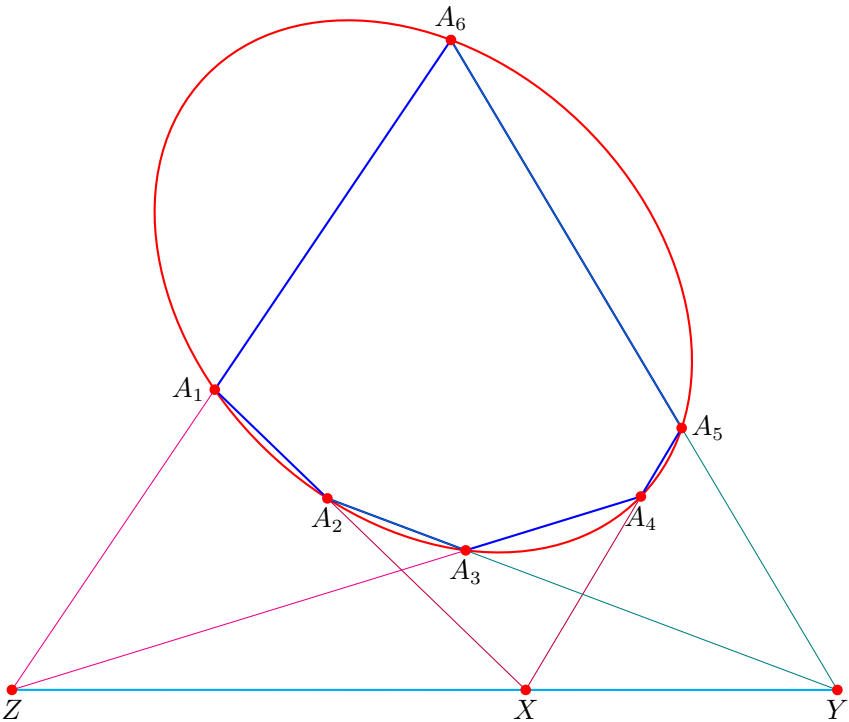


图 4.3: 帕斯卡定理

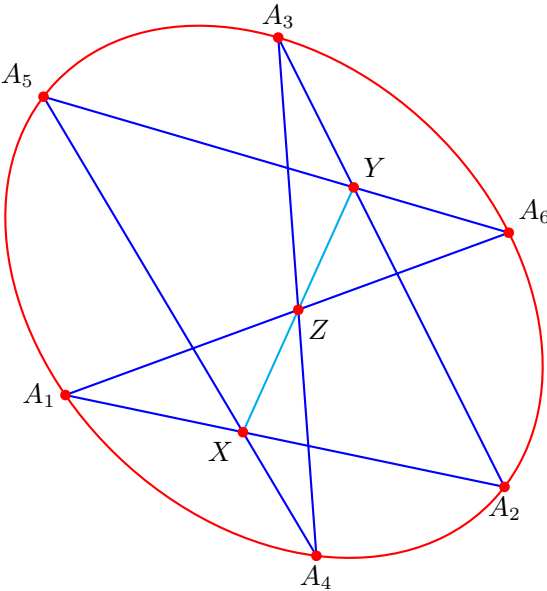


图 4.4: 帕斯卡定理

#### 4.4 布列安桑定理 Brianchon's theorem

**定理 4.4 (布列安桑定理, Brianchon's theorem)** 对于任意一个外切于非退化的二阶曲线的简单六线形, 它的三对对顶点的连线通过一个点. 或者说, 设  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  为圆锥曲线的外切六边形, 则直线  $A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6$  三线共点.

布列安桑定理的对偶定理是帕斯卡定理.

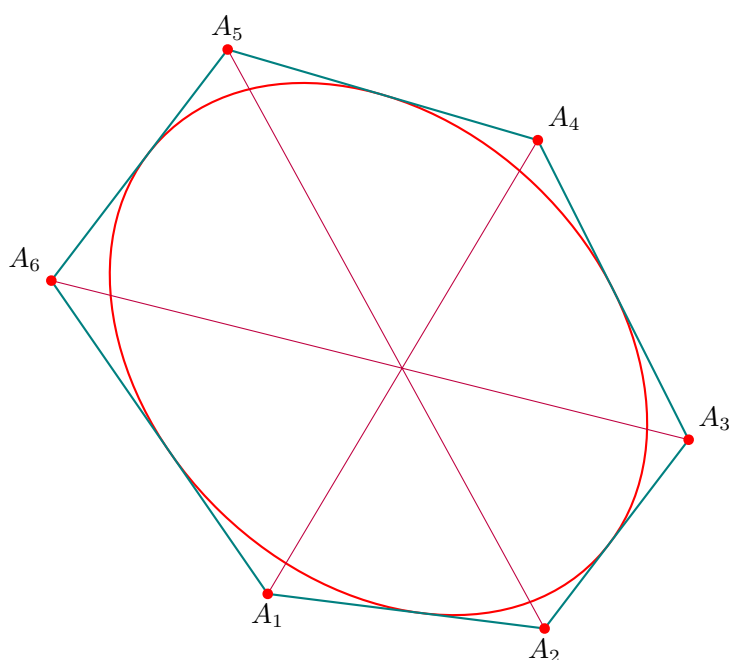


图 4.5: 布列安桑定理

#### 4.5 极点和极线 Pole and polar

**切点切线:** 可以理解为曲线过某一点 (切点) 且斜率为曲线在该点的导数的直线.

**极点极线:** 如果圆锥曲线的切于  $A, B$  两点的切线相交于  $P$  点, 那么  $P$  点称为直线  $AB$  关于该曲线的极点 (pole), 直线  $AB$  称为  $P$  点的极线 (polar).

利用极点和极线的性质作圆的切线:



### 4.6 彭赛列闭合定理 Poncelet's closure theorem

彭赛列闭合定理 (Poncelet's Closure Theorem) 是几何学中的一个经典定理, 由法国数学家让-维克托·彭赛列 (Jean-Victor Poncelet) 在 19 世纪提出。

**定理 4.5 (彭赛列闭合定理 Poncelet's closure theorem)** 设  $C_1$  和  $C_2$  是两个圆锥曲线, 且  $C_2$  完全位于  $C_1$  的内部。如果存在一个  $n$ -边形  $P$ , 使得:  $P$  的所有顶点都在  $C_1$  上;  $P$  的所有边都与  $C_2$  相切; 那么, 对于任意一个初始点  $p_0 \in C_1$ , 都可以通过以下步骤构造一个闭合的  $n$ -边形: 从  $p_0$  出发, 画一条与  $C_2$  相切的直线, 交  $C_1$  于  $p_1$ ; 重复上述步骤, 直到回到  $p_0$  形成一个闭合多边形。

由于彭赛列闭合定理涉及圆锥曲线, 作图时通常需要借助计算机辅助软件动态调整参数直到多边形闭合, 例如: Geogebra 或其他类似的软件。若  $C_1, C_2$  为同心圆, 正多边形即能满足内接外切条件。

下图是以  $n = 5$  为例:

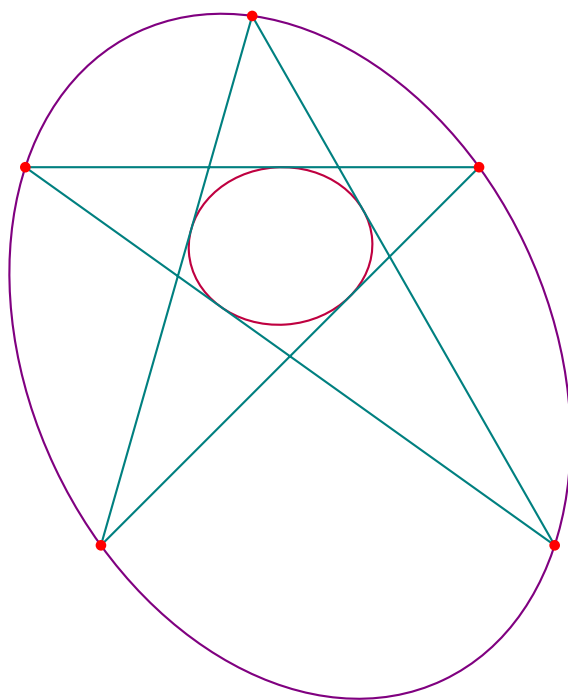


图 4.7: 彭赛列闭合定理 ( $n = 5$ )

## 参考文献

- [1] 维基百科. <https://en.wikipedia.org>.
- [2] Math world. <https://mathworld.wolfram.com>.
- [3] 大哉言数. <http://mathsgreat.com/>.
- [4] Stillwell (著), 袁向东, 冯绪宁 (译). 数学及其历史. 高等教育出版社, 2011.
- [5] 梅向明, 刘增贤, 王汇淳, 王智秋. 高等几何. 高等教育出版社, 2020.