

Volumes Finis pour l'équation de diffusion 2D

Master QFM 1

Hanan ATMANI

Supervisé par
Pr. Imad EL MAHI

Table des matières

Liste des Figures	ii
Liste des tableaux	iii
I Résolution de l'équation de diffusion 2D par la méthode des volumes finis	iv
I.1 Maillage	iv
I.2 Formulation volumes finis	iv
I.3 Schéma 1 : (VF4)	iv
I.4 Schéma 2 : (VF4 - version 2)	v
II Test 1 : Diffusion d'une gaussienne dans un carré	v
II.1 Solution analytique :	v
II.2 Génération d'un maillage et représentation des isovaleurs de la condition initiale	vi
II.3 Analyse de stabilité	vii
II.3.1 Schéma 1 : 2	vii
II.3.2 Schéma 2 : (VF4) version 2	ix
II.4 Tests des schémas sur trois maillages de raffinement différent : grossier, fin et très fin	x
II.4.1 Schéma1 (VF4)	x
II.4.2 Schéma2 (VF4) version 2	xi
III Test 2 : Un problème d'équilibre thermique	xii
III.1 Test des deux schémas et représentation des résultats à quatre instants différents	xii
III.1.1 Schéma 1 (VF4)	xii
III.1.2 Schéma 2 (Vf4) version 2	xiv

Table des figures

1	Maillage de $\Omega = [-2; 2] \times [-2; 2]$, Nombre de cellules : 3372 et Nombre de nœuds : 1763	vii
2	Les isovaleurs de la condtion initiale d'un maillage fin (Nombre de cellules : 3372)	vii
3	Les isovaleurs de la solution numérique obtenue avec un schéma 1 VF4 à $t=0.15$ s sur trois maillages différents	x
4	La solution exacte et les solutions numériques (Schéma 1 (VF4) le long de l'axe $y = 0$ m	xi
5	Les isovaleurs de la solution numérique obtenue avec un schéma 2 (VF4) version 2 à $t=0.15$ s sur trois maillages différents	xi
6	La solution exacte et les solutions numériques (Schéma 2 (VF4) version 2 le long de l'axe $y = 0$ m	xii
7	Domaine Ω et conditions aux limites.	xii
8	Représentation de la solution donnée par schéma 1 (VF4) à quatre temps physiques différents.	xiii
9	Représentation de la solution donnée par schéma 2 (VF4) version 2 à quatre temps physiques différents.	xiv

Liste des tableaux

1	Évaluation de l'erreur du schéma 1 (VF4) à $t = 0.15$ s pour différents maillages	x
2	Évaluation de l'erreur du schéma 2 (VF4) version2 à $t = 0.15$ s pour différents maillages	xi

I Résolution de l'équation de diffusion 2D par la méthode des volumes finis

Dans se projet on souhaite étudier et comparer deux schémas aux volumes finis pour l'approximation de la solution d'une équation modèle de diffusion 2D de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0 \quad (1)$$

définie sur un domaine rectangulaire Ω et soumise à une condition initiale et des conditions aux limites. D étant le coefficient de diffusion et $u = u(x, y, t)$ désigne la température (ou une concentration) en (x, y) au temps physique t

I.1 Maillage

On considère un maillage \mathcal{T} de Ω admissible au sens volumes finis (angles des triangles compris entre 0 et $\pi/2$). On utilise la formulation volumes finis "cell-centered" : les volumes de contrôles sont choisis comme étant les triangles K de Delaunay du domaine Ω et la solution est évaluée sur chacun de ces volumes de contrôles.

On note par :

- \mathbf{x}_K : l'orthocentre du triangle K .
- $|K|$: l'aire du triangle K .
- $|e|$: la longueur de l'arête e de K .
- ϵ_K : l'ensemble des arêtes e de K .

Le temps est aussi discrétisé en des pas Δt , et on note par u_K^n la valeur approchée de u sur le volume de contrôle K au temps $t^n = n\Delta t$.

I.2 Formulation volumes finis

La formulation volumes finis pour (1) s'obtient en intégrant l'EDP sur chaque volume de contrôle K . L'utilisation de la formule de la divergence donne :

$$|K| \frac{\partial u_K}{\partial t} + \sum_{e_i \in \epsilon_K} \bar{F}_{K,e_i} = 0 \quad (2)$$

où $\bar{F}_{K,e} = -D \int_e \nabla u \cdot n_{K,e} d\sigma$ désigne le flux exacte de diffusion sur l'arête e de K et $n_{K,e}$ est la normale à l'arête e unitaire et sortante du triangle K . Notons par $F_{K,e}$ le flux numérique sur l'arête e . Un schéma d'Euler explicite permet d'écrire la forme itérative du schéma aux volumes finis :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} F_{K,e_i}^n \quad (3)$$

Dans ce projet, nous allons utiliser deux schémas. Chacun de ces deux schémas fait une approximation du flux sur les arêtes.

I.3 Schéma 1 : (VF4)

Le gradient dans la direction normale à l'arête e_i est approximé par :

$$\int_{e_i} \nabla u \cdot n_{K,e_i} d\sigma \simeq |e_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,L_i}} \quad (4)$$

K et L_i étant les deux triangles séparés par l'arête e_i et $d_{K,L_i} = \text{dist}(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_{L_i})$.

I.4 Schéma 2 : (VF4 - version 2)

Le gradient dans la direction normale à l'arête e_i est approximé par :

$$\int_{e_i} \nabla u \cdot n_{K,e_i} d\sigma \simeq |e_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \quad (5)$$

K et L_i étant les deux triangles séparés par l'arête e_i , $d_{K,e_i} = \text{dist}(\mathbf{x}'_K, e_i)$ et $d_{L_i,e_i} = \text{dist}(\mathbf{x}'_{L_i}, e_i)$. \mathbf{x}'_K et \mathbf{x}'_{L_i} sont les barycentres des triangles K et L_i

II Test 1 : Diffusion d'une gaussienne dans un carré

Domaine de calcul :

$$\Omega = [-2; 2] \times [-2; 2].$$

Condition initiale :

On choisit une condition initiale de forme Gaussienne :

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = u_{\max} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2}\right)$$

où l'amplitude maximale est $u_{\max} = 1$ et la constante $\sigma = 0.25$.

Conditions aux bords :

On utilise ici la notion de cellules fictives. Ces cellules sont symétriques aux volumes de contrôles adjacents ayant une ou deux arêtes sur le bord. Pour les conditions aux limites de Dirichlet, il suffit d'affecter la valeur sur la cellule fictive. Ces cellules fictives sont utilisées pour pouvoir calculer le flux numérique sur les arêtes du bord de la même façon que sur les arêtes internes.

II.1 Solution analytique :

En considérant que le domaine du calcul Ω est non borné (pas d'influence des bords sur la solution), la solution analytique du problème (1) avec la condition initiale choisie (6), s'écrit :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \iint_{R^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) u_0(x', y') dx' dy'$$

Montrons que :

$$u(x, y, t) = \frac{u_{\max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2 + 4Dt}\right)$$

On a

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi Dt} \iint_{R^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) u_0(x', y') dx' dy'. \\ &= \frac{1}{4\pi Dt} \iint_{R^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) u_{\max} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{\sigma^2}\right) dx' dy'. \\ &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \iint_{R^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4Dt} - \frac{x'^2}{\sigma^2} - \frac{(y-y')^2}{4Dt} - \frac{y'^2}{\sigma^2}\right) dx' dy' \\ &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{4Dt}\right) \iint_{R^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt\sigma^2} - \frac{4Dtx'^2 + 6^2x'^2 - 2xx'6^2}{4Dt\sigma^2} + \frac{4Dty'^2 + \sigma^2y'^2 - 2yy'\sigma^2}{4Dt\sigma^2}\right) dx' dy' \\ &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{4Dt}\right) I_x I_y \end{aligned}$$

avec

$$I_x = \int_{R^2} \exp^{-\left(\frac{x'^2(4Dt+\sigma^2)-2xx'\sigma^2}{4Dt\sigma^2}\right)} dx' \quad \text{et} \quad I_y = \int_{R^2} \exp^{-\left(\frac{y'^2(4Dt+\sigma^2)-2yy'\sigma^2}{4Dt\sigma^2}\right)} dy'$$

Calculons alors I_x et I_y

$$\begin{aligned} I_x &= \int_R \exp^{-\left(\frac{x'^2(4Dt+\sigma^2)-2xx'\sigma^2}{4Dt\sigma^2}\right)} dx' \\ &= \int_R \exp^{-\left(\frac{4Dt+\sigma^2}{4Dt\sigma^2} \left(x'^2 - \frac{2xx'\sigma^2}{4Dt+\sigma^2}\right)\right)} dx. \end{aligned}$$

Posons

$$C = \frac{4Dt + \sigma^2}{4Dt\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_R \exp^{-C\left(x' - \frac{2xx'\sigma^2}{4Dt+\sigma^2} + \frac{x^2\sigma^4}{(4Dt+\sigma^2)^2} - \frac{x^2\sigma^4}{4Dt+\sigma^2}\right)} dx' \\ &= \int_R \exp^{-C\left(\left(x' - \frac{\sigma^2}{4Dt+\sigma^2}\right)^2 - \frac{x^2\sigma^4}{4Dt+\sigma^2}\right)} dx' \\ &= \exp^{C\left(\frac{x^2\sigma^4}{(4Dt+\sigma^2)^2}\right)} \int_R \exp^{-C\left(x' - \frac{\sigma^2}{4Dt+\sigma^2}\right)^2} dx'. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $X = x' - \frac{x\sigma^2}{4Dt+\sigma^2}$

On trouve une intégrale de Gauss :

$$\int_R \exp^{-C\left(x' - \frac{\sigma^2}{4Dt+\sigma^2}\right)^2} dx' = \int_R \exp^{-CX^2} dX = \sqrt{\frac{\pi}{C}}$$

Donc

$$I_x = \exp^{C\left(\frac{x^2\sigma^4}{(4Dt+\sigma^2)^2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{C}}$$

De la même méthode, on calcule I_y et on trouve :

$$I_y = \exp^{C\left(\frac{y^2\sigma^4}{(4Dt+\sigma^2)^2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{C}}$$

Donc :

$$u(x, y, t) = \frac{u_{max}}{4\pi Dt} \exp^{-\left(\frac{x^2+y^2}{4Dt}\right)} \exp^{C\left(\frac{x^2\sigma^4}{(4Dt+\sigma^2)^2}\right)} \exp^{C\left(\frac{y^2\sigma^4}{(4Dt+\sigma^2)^2}\right)} \frac{\pi}{C}$$

En remplaçant C par sa valeur et en simplifiant, on trouve :

$$u(x, y, t) = \frac{u_{max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp^{-\left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^2+4Dt}\right)}$$

II.2 Génération d'un maillage et représentation des isovaleurs de la condition initiale

Nous avons utilisé Gmsh pour générer un maillage non structuré (triangulation) de Ω .

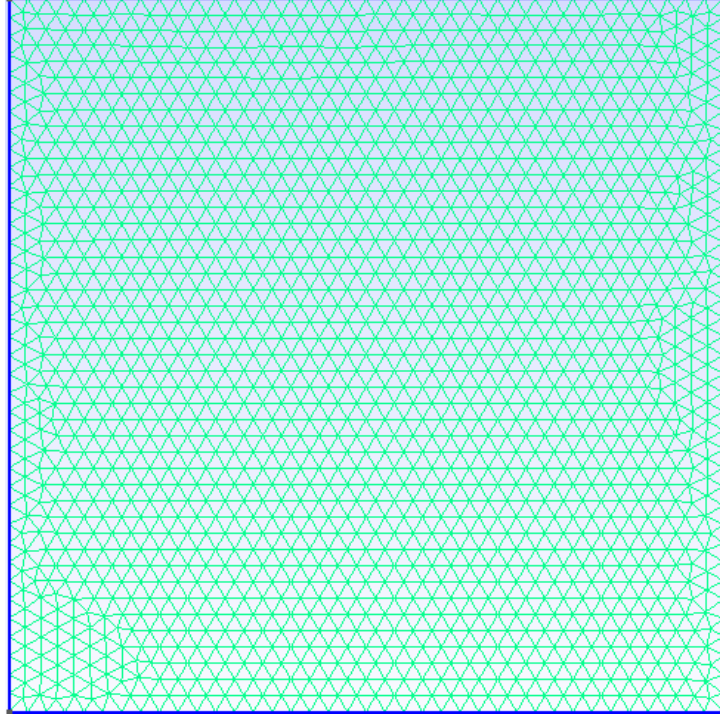


FIGURE 1 – Maillage de $\Omega = [-2; 2] \times [-2; 2]$, Nombre de cellules : 3372 et Nombre de nœuds : 1763

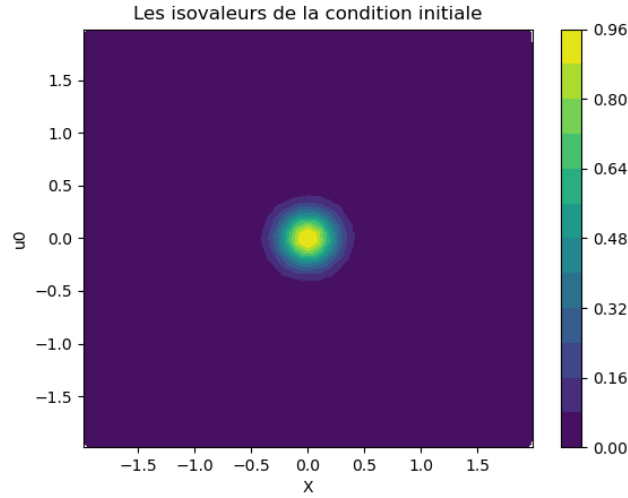


FIGURE 2 – Les isovaleurs de la condition initiale d'un maillage fin (Nombre de cellules : 3372)

II.3 Analyse de stabilité

II.3.1 Schéma 1 : 2

Dans cette section, nous montrons que le schéma VF explicite (3), utilisant l'approximation VF4 (4) pour les flux de diffusion, vérifie un principe du maximum discret et qu'il est L^∞ -stable sous la condition :

$$\lambda = \Delta t D \max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

Le schéma 1 (VF4) est s'ecrite sous la forme suivant

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} F_{K,e_i}^n, \text{ avec } F_{K,e_i}^n = |e_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,L_i}}$$

Supposons que $u^0 \geq 0$ sur Ω , c'est-à-dire que $u_K^0 \geq 0$ pour tout K appartenant au recouvrement de Ω .

Utilisons un raisonnement par récurrence et montrons que

$$\forall K \in \mathcal{T}, u_K^n \geq 0 \quad (\text{P})$$

Supposons que (P) est vraie pour tout $n \in N$. Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

Soit $K \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} u_K^{n+1} &= u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} |L_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,L_i}} \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{u_{L_i}^n}{d_{K,L_i}} \end{aligned}$$

Pour que $u_K^{n+1} \geq 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}$ il suffit que :

$$\left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}}\right) \geq 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

qui signifie que

$$\max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

Donc le principe de maximum est Verfie sous la condition .

$$\lambda = \Delta t D \max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

la stabilité L^∞ avec $\lambda \leq 1$ On a

$$\begin{aligned} |u_K^{n+1}| &= \left| \left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}}\right) u_K^n + \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}} u_{L_i}^n \right| \\ &\leq \left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}}\right) |u_K^n| + \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}} |u_{L_i}^n| \\ &\leq \left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}}\right) \|u^n\|_\infty + \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,L_i}} \|u^n\|_\infty \\ &\leq \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Alors $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$
finalement

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$$

Danc le schéma 1 (VF4) est stable si

$$\max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

II.3.2 Schéma 2 : (VF4) version 2

De la même façon, nous montrons que le schéma VF explicite (3), utilisant l'approximation VF4 (5) pour les flux de diffusion, vérifie un principe du maximum discret et qu'il est L^∞ -stable sous la condition :

$$\lambda = \Delta t D \max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$$

Le schéma2 (VF4) version est s'ecrie sous la forme suivant

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} F_{K,e_i}^n, \text{ avec } F_{K,e_i}^n = |e_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}$$

Supposons que $u^0 \geq 0$ sur Ω , c'est-à-dire que $u_K^0 \geq 0$ pour tout K appartenant au recouvrement de Ω .

Utilisons un raisonnement par récurrence et montrons que

$$\forall K \in \mathcal{T}, u_K^n \geq 0 \quad (\text{P})$$

Supposons que (P) est vraie pour tout $n \in N$. Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

Soit $K \in \mathcal{T}$

Donc le principe de maximum est Verfie sous la condition .

$$\lambda = \Delta t D \max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$$

la stabilité L^∞ avec $\lambda \leq 1$ On a

$$\begin{aligned} |u_K^{n+1}| &= \left| \left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) u_K^n + \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} |u_{L_i}^n| \right| \\ &\leq \left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) |u_K^n| + \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} |u_{L_i}^n| \\ &\leq \left(1 - \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \|u^n\|_\infty + \frac{D\Delta t}{|K|} \sum_{L_i \in \epsilon_K} \frac{|L_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \|u^n\|_\infty \\ &\leq \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Alors $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$
finalement

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$$

Danc le schéma2 (VF4) version 2 est stable si

$$\max_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$$

II.4 Tests des schémas sur trois maillages de raffinement différent : grossier, fin et très fin

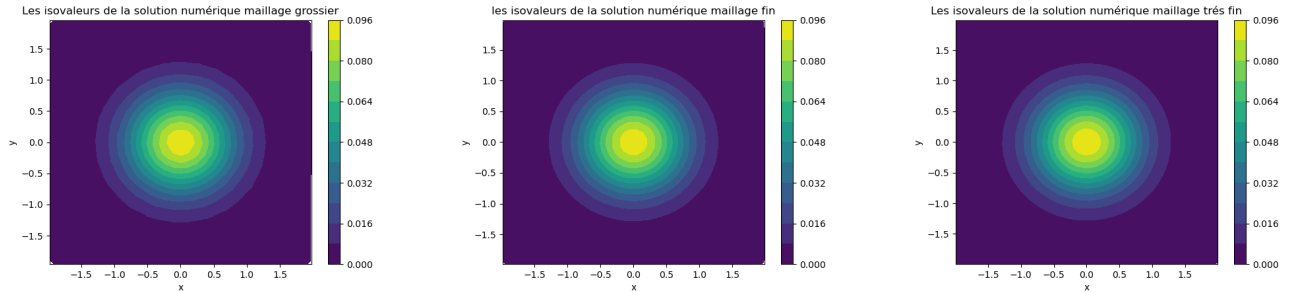
Pour cette partie, nous avons présenté les isovaleurs de la solution numérique pour les deux schémas sur trois maillages de raffinement différent : grossier, fin et très fin. Nous avons également évalué l'erreur en norme L^2 définie par :

$$\begin{aligned} \text{Err}_{L^2} &= \iint_{\Omega} |u(x, y, t) - u_{\text{num}}(x, y, t)|^2 dx dy \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| |u(K) - u_{\text{num}}(K)|^2 \end{aligned}$$

Enfin, nous avons représenté la solution exacte et les solutions numériques le long de l'axe $y = 0$ m.

II.4.1 Schéma1 (VF4)

— a) Les isovaleurs de la solution numérique



(a) Nombre de cellules : 1152

(b) Nombre de cellules : 3372

(c) Nombre de cellules : 9254

FIGURE 3 – Les isovaleurs de la solution numérique obtenue avec un schéma 1 VF4 à $t=0.15$ s sur trois maillages différents

— b) Évaluation de l'erreur en norme L^1

Type de maillage	Nombre de cellules	Le pas de temps Δt	L'erreur en norme L_1
Grossier	1152	0.0010674815924214668	0.0005845267052490776
Fin	3372	0.00047768142258200767	0.00019480663228300292
Très fin	9254	0.0001265874385191673	0.00021820616741315206

TABLE 1 – Évaluation de l'erreur du schéma 1 (VF4) à $t = 0.15$ s pour différents maillages

Remarque : En raffinant le maillage, l'erreur est réduite.

— c) Représentation de la solution exacte et de la solution numérique le long de l'axe $y = 0$ m.

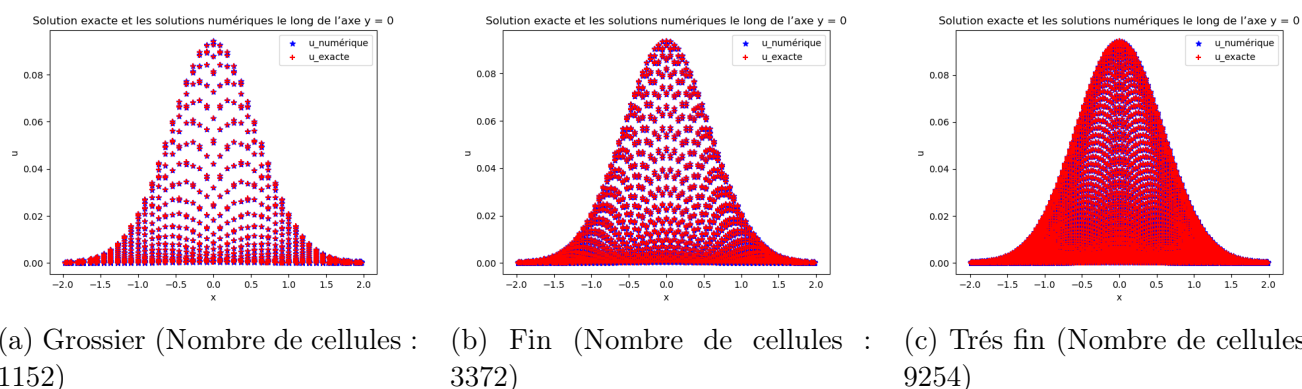


FIGURE 4 – La solution exacte et les solutions numériques (Schéma 1 (VF4) le long de l'axe $y = 0$ m

II.4.2 Schéma2 (VF4) version 2

— a) Les isovaleurs de la solution numérique

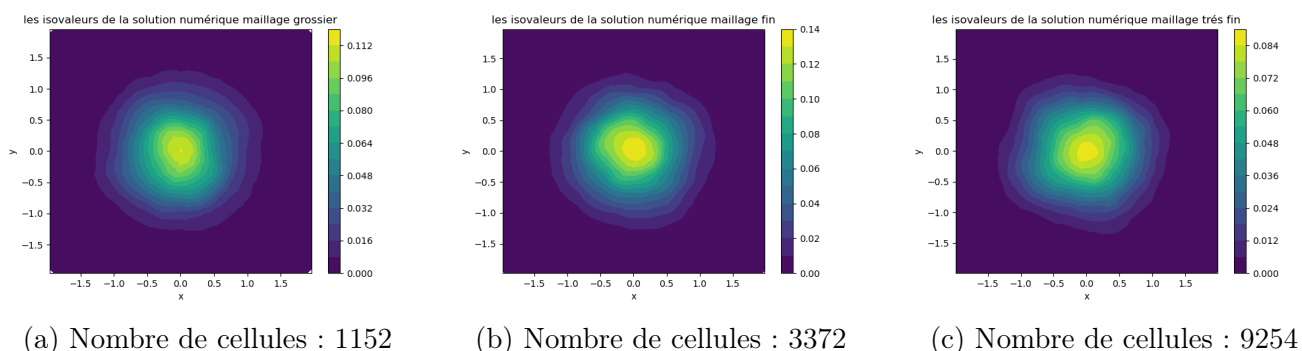


FIGURE 5 – Les isovaleurs de la solution numérique obtenue avec un schéma 2 (VF4) version 2 à $t=0.15$ s sur trois maillages différents

— b) Évaluation de l'erreur en norme L^1

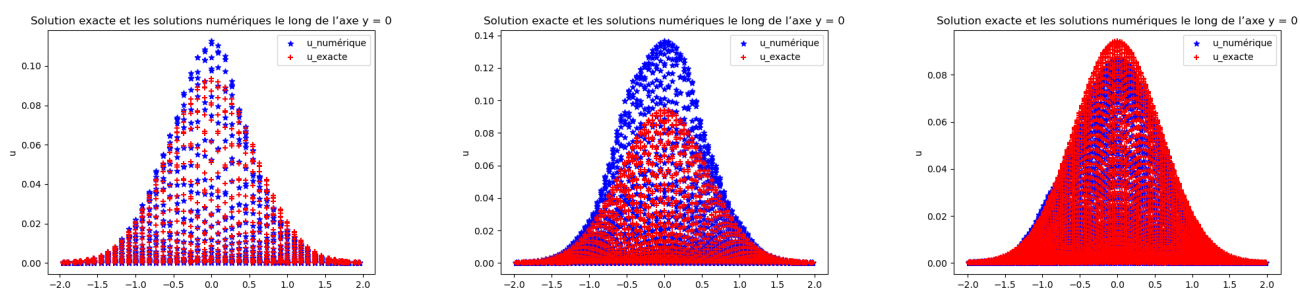
Type de maillage	Nombre de cellules	Le pas de temps Δt	L'erreur en norme L_1
Grossier	1152	0.0013513069142295448	0.026617681512344844
Fin	3372	0.0005088699322183502	0.06451931323437365
Très fin	9254	0.00016803052955678083	0.02367470407707164

TABLE 2 – Évaluation de l'erreur du schéma 2 (VF4) version2 à $t = 0.15$ s pour différents maillages

Remarque :

- Toujours, l'erreur donnée par le schéma 2 est plus grande que celle du schéma 1
- L'erreur observée ici ne dépend pas uniquement du maillage; l'erreur avec un maillage fin peut être plus grande que celle avec un maillage grossier.

- c) Représentation de la solution exacte et de la solution numérique le long de l'axe $y = 0$ m.



(a) Grossier (Nombre de cellules : 1152) (b) Fin (Nombre de cellules : 3372) (c) Très fin (Nombre de cellules : 9254)

FIGURE 6 – La solution exacte et les solutions numériques (Schéma 2 (VF4) version 2) le long de l'axe $y = 0$ m

III Test 2 : Un problème d'équilibre thermique

On considère un domaine rectangulaire $\Omega = [0; 100] \times [0; 80]$, avec des conditions initiales et aux limites schématisées sur la figure suivante

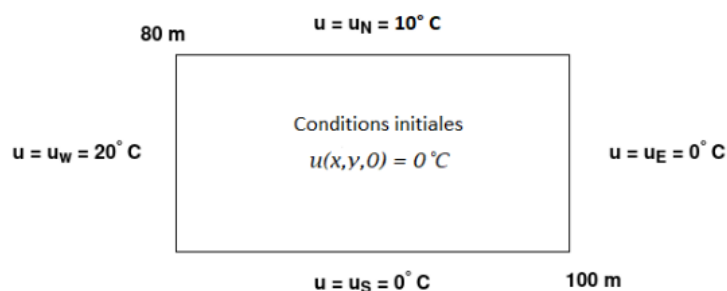


FIGURE 7 – Domaine Ω et conditions aux limites.

III.1 Test des deux schémas et représentation des résultats à quatre instants différents

Dans cette dernière partie, le domaine Ω ainsi que les conditions aux bords ont été modifiés. Nous avons travaillé avec un maillage fin comportant 4636 cellules, et nous avons représenté les isovalues de la solution numérique pour les deux schémas, chacun correspondant à quatre temps physiques différents. Vous pouvez visualiser la solution sur le logiciel Paraview.

III.1.1 Schéma 1 (VF4)

— La représentation des résultats à quatre temps physiques différents.

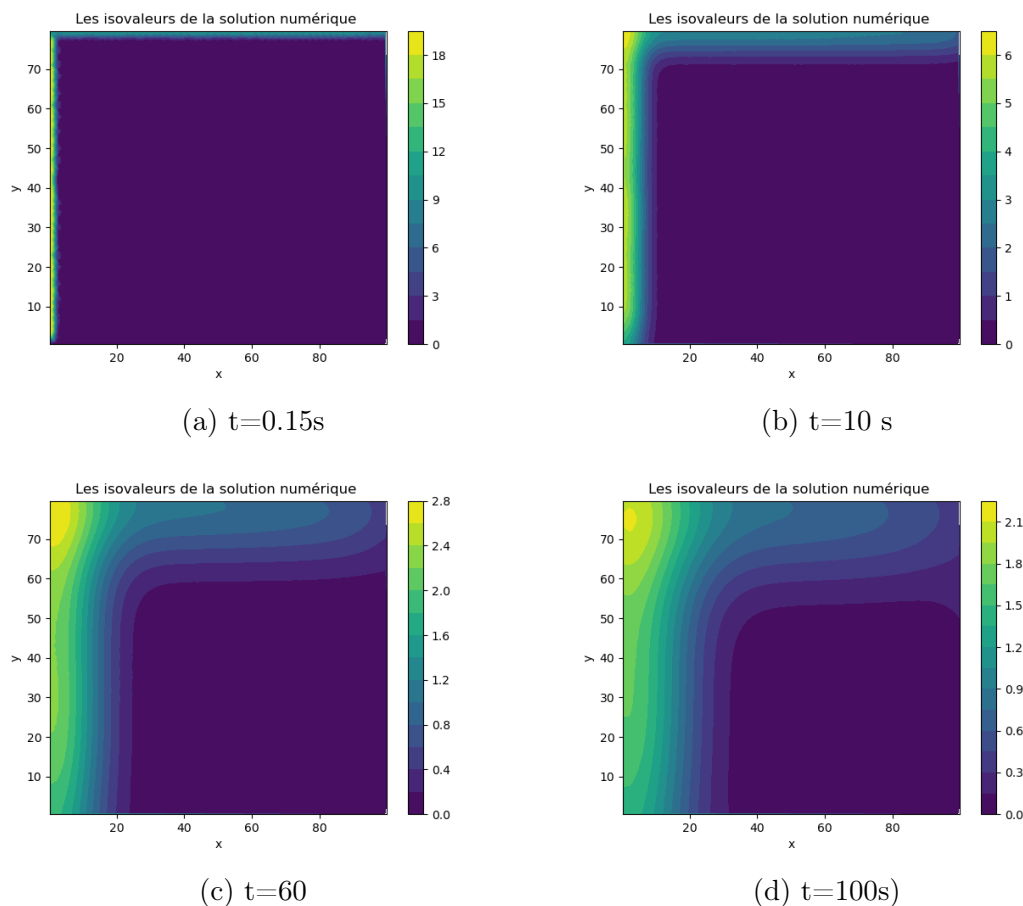


FIGURE 8 – Représentation de la solution donnée par schéma 1 (VF4) à quatre temps physiques différents.

— Observations

Nous observons qu'à $t = 0.15 s$, la température se concentre à 20 degrés à l'ouest et à 10 degrés au nord, avec 0 degré Celsius ailleurs. Avec le temps, la chaleur se diffuse et augmente légèrement au milieu du domaine, tout en diminuant aux deux extrémités. À $t = 100 s$, il y a une différence de température de 2.1 degrés entre le nord et l'ouest. À un moment donné, une fois atteint l'équilibre, la température à chaque point du domaine ne variera plus avec le temps.

III.1.2 Schéma 2 (Vf4) version 2

— La représentation des résultats à quatre temps physiques différents.

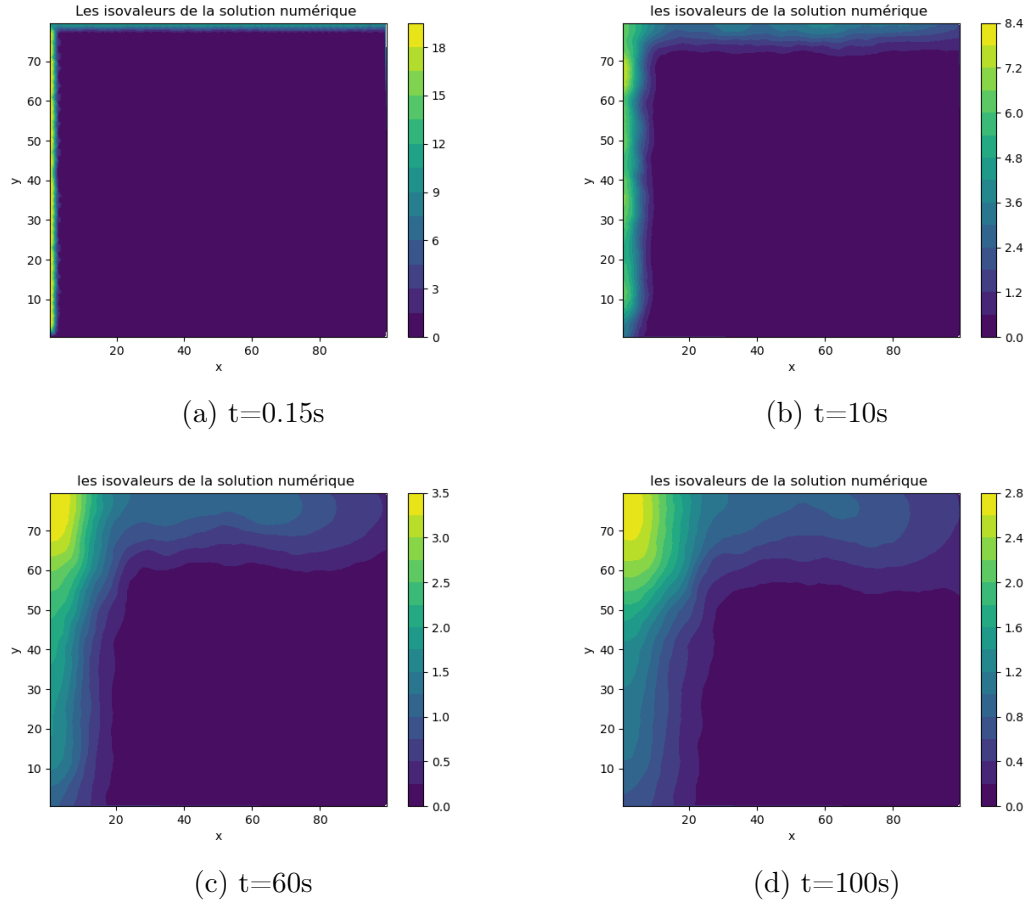


FIGURE 9 – Représentation de la solution donnée par schéma 2 (VF4) version 2 à quatre temps physiques différents.

— Observations

Pour ce schéma, les observations sont similaires à celles du schéma (VF4), mais avec une différence dans la manière de diffusion. Ainsi, certains points présentent des valeurs de température différentes entre les deux schémas.