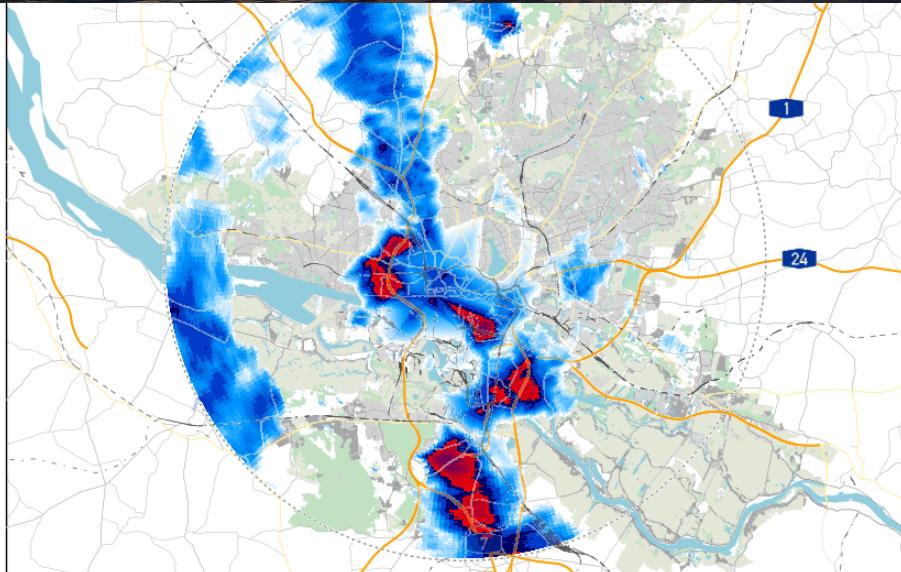


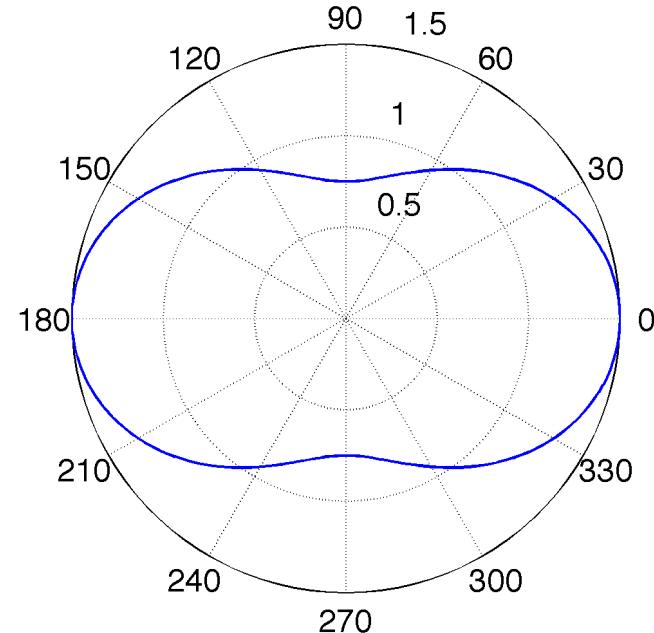
Streuung



Quellen: Manfred Brath, wetterradar.uni-hamburg.de

Optik, Strahlung, Fernerkundung
Sommersemester 2019

Manfred Brath / Stefan Bühler
Meteorologisches Institut
Universität Hamburg



Übersicht – alle Kapitel

Einleitung

1. Orbits und Satelliten
2. Elektromagnetische Wellen
3. Grundgesetze der Optik
4. Natürliche Oberflächen
5. Thermische Strahlung
6. Strahlunastransfergleichung
7. Streuung

Prüfungsvorbereitung

Prüfung

Quellen

- ▶ Petty

Strahlungstransportgleichung (RTE)

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} PI \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Extinktion *therm. Emission* *Streu-Emission*

Extinktion: $\alpha + \sigma$ (Absorption+Streuung)

Thermische Emission: Nur α

Streu-Emission: Nur σ

Übersicht

- ▶ Streuung allgemein
- ▶ Rayleigh-Streuung
- ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Übersicht

- ▶ **Streuung allgemein**
- ▶ Rayleigh-Streuung
- ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Beispiele 1

Regenbogen



Quelle: Manfred Brath

Korona



Quelle: Wikipedia

Regenbögen kann man auch mit geometrischer Optik erklären, Koronas auch als Beugungsphänomen. (Mie-) Streuung ist die allgemeinere Theorie.

Beispiele 2

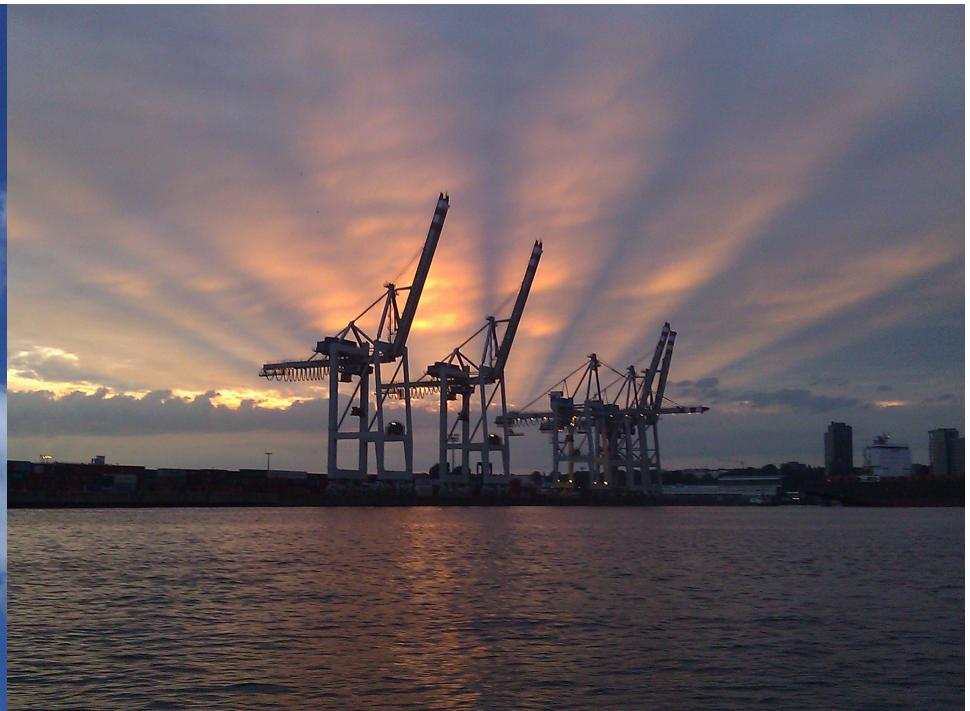
Die Farben des Himmels

Blauer Himmel mit Wolken



Quelle: Wikipedia

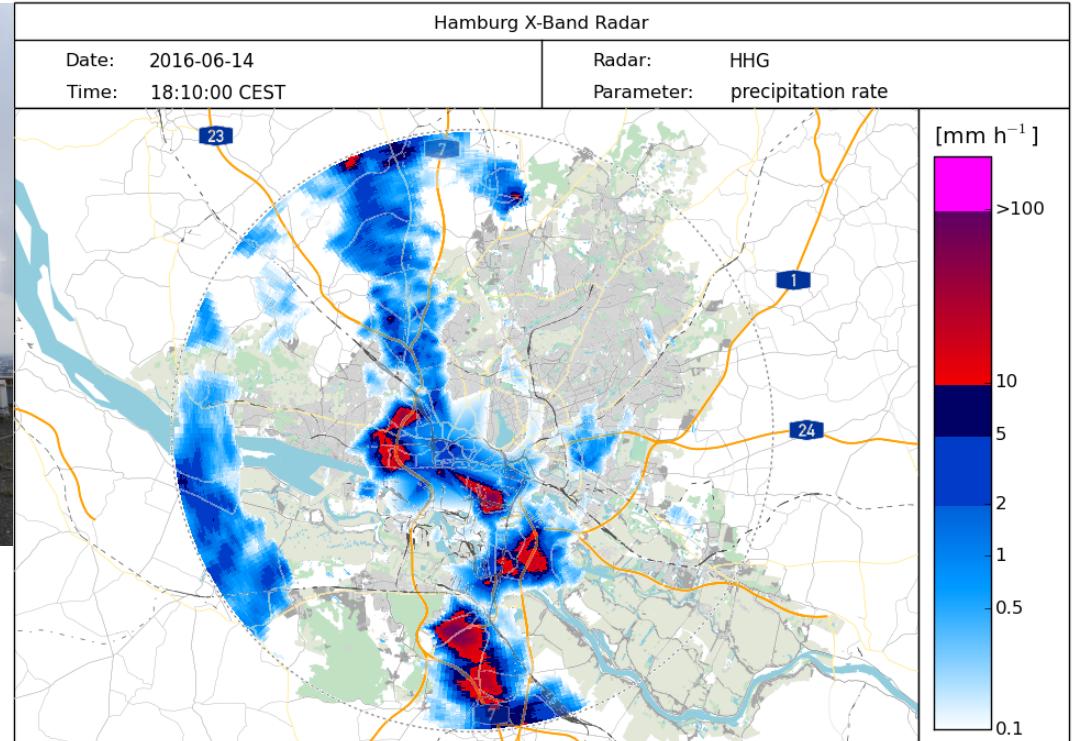
Sonnenuntergang



Quelle: Manfred Brath

Beispiele 3

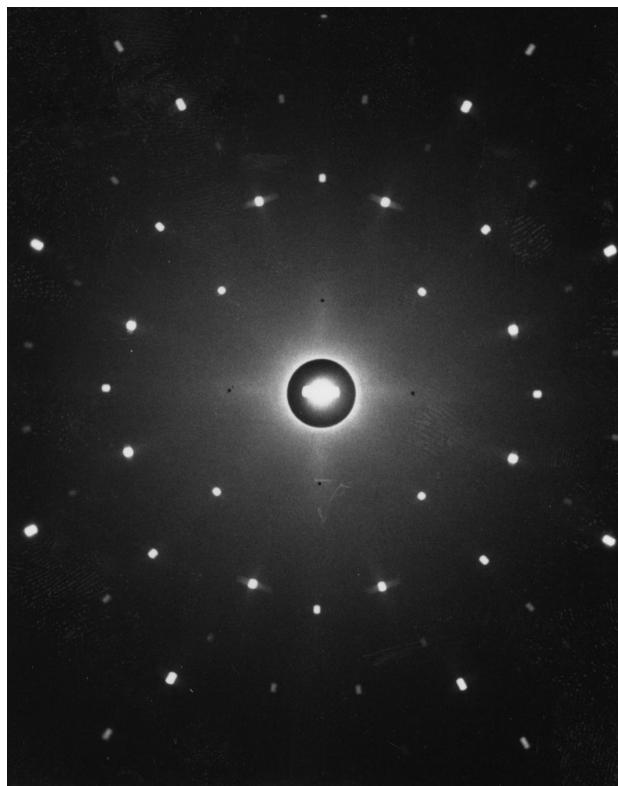
Das Wetterradar des Instituts



Quelle: wetterradar.uni-hamburg.de

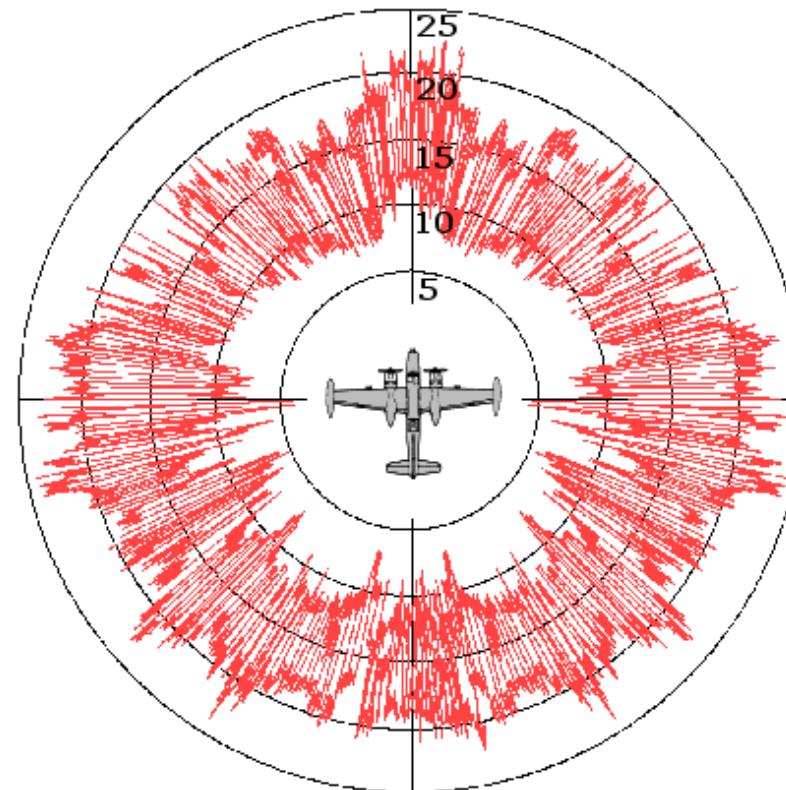
Beispiele 4

Röntgenbeugung an einem
Si-Kristall



Quelle: Institut f. Physik, Uni Halle

Radarsignatur eines Flugzeugs



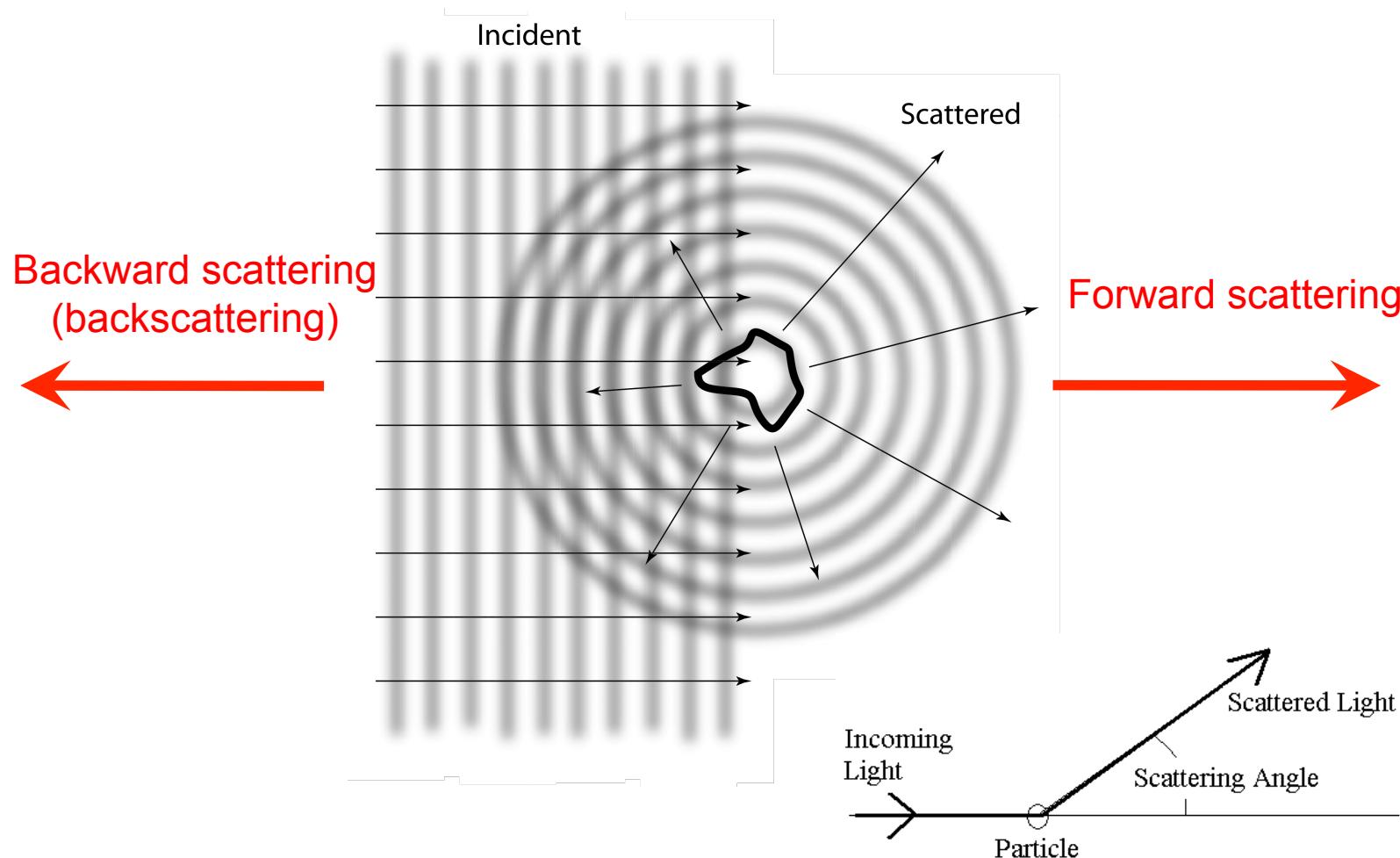
Quelle: Wikipedia

Streuung ist...

- ▶ richtungsabhängig sowohl von der Beobachtungsposition wie von der Position der Strahlungsquelle relativ zum Streuobjekt.
- ▶ abhängig von der Wellenlänge/Frequenz.
- ▶ von der Größe des Streuobjekts abhängig.
- ▶ abhängig von der Form des Streuobjekts.

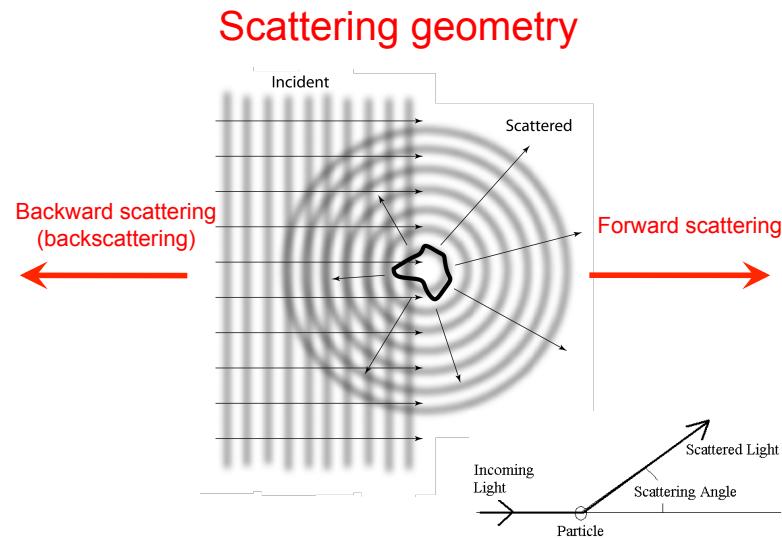
Streuung von EM-Wellen

Scattering geometry



Quelle: http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf

Streuung von EM-Wellen



Quelle (Bild):

http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf

- ▶ Elektromagnetische Streuung ist die Veränderung des EM-Wellenfeldes bei der Wechselwirkung mit einem lokalen Objekt.
- ▶ Vereinfacht: Ebene Welle rein, Kugelwelle raus!
(huygensches Prinzip)

Notwendige Bedingung

- ▶ Damit EM-Wellen vom Objekt gestreut werden, muss sich das Objekt vom Hintergrundmedium in seinen EM-Eigenschaften unterscheiden.
- ▶ D. h., die Brechungsindizes müssen sich unterscheiden.

Zum Brechungsindex

Erinnerung: Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

ε : (Magnetische) Permeabilität

μ : (Elektrische) Permittivität

- ▶ Für die meisten Medien gilt $\mu = 1$, so dass sich die Permeabilität von Streuobjekt und Hintergrund nicht unterscheidet.
- ▶ Das Streuobjekt unterscheidet sich daher in der Regel in seiner Permittivität vom Hintergrundmedium.

Erinnerung Elastische und inelastische Streuung

- ▶ Inelastische Streuung, wenn sich durch die Streuung die Frequenz der gestreuten Welle ändert, z. B. Fluoreszenz, Raman-Streuung.
- ▶ Elastische Streuung, (nahezu) keine Veränderung der Frequenz. Abgesehen von wenigen Spezialanwendungen (Raman-Lidar) der “Standardfall”.

(Ich behandle nur die elastische Streuung hier.)

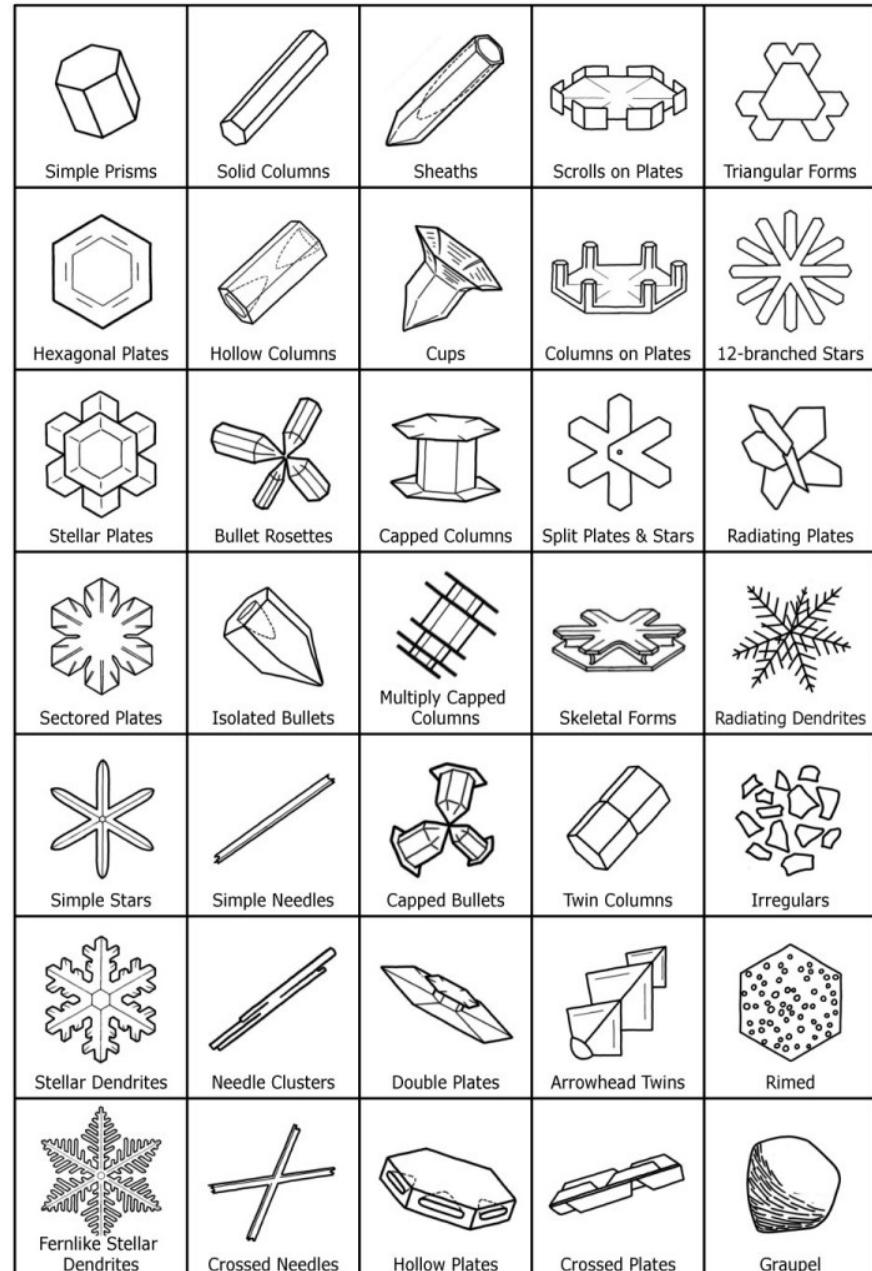
Form der streuenden Teilchen

- ▶ In Wirklichkeit manchmal kompliziert
- ▶ Trotzdem werden sehr oft Kugeln angenommen, um das Problem drastisch zu vereinfachen
- ▶ Auch in dieser Vorlesung (aber nicht in unserem Modell ARTS)

Bildquelle:

<http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcryst/als/class/snowtypes4.jpg>

Manfred Brath / Stefan Bühler



Types of Snowflakes ... SnowCrystals.com

Skalenparameter (= Mie Parameter)

- ▶ Entscheidend für die Streu-Eigenschaften ist das Verhältnis der Größe des Streuobjektes zur Wellenlänge.

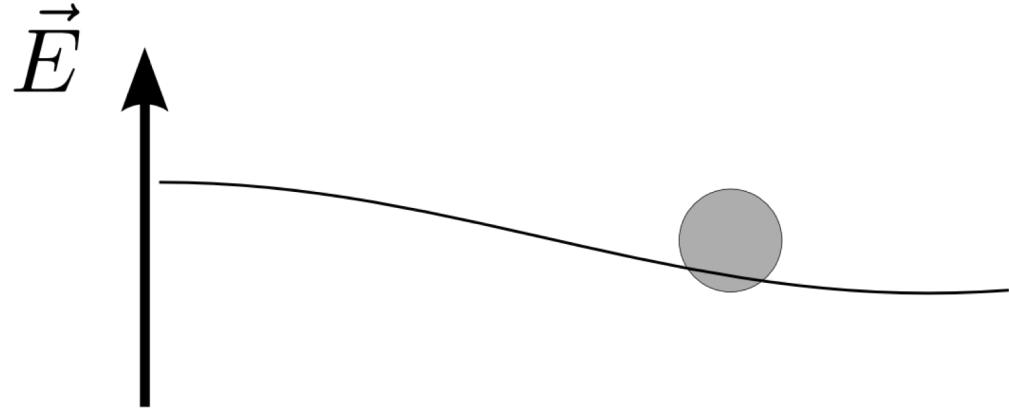
- ▶ Skalenparameter $x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka$

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda}$$

(Kreis-)Wellenzahl
Radius
Wellenlänge

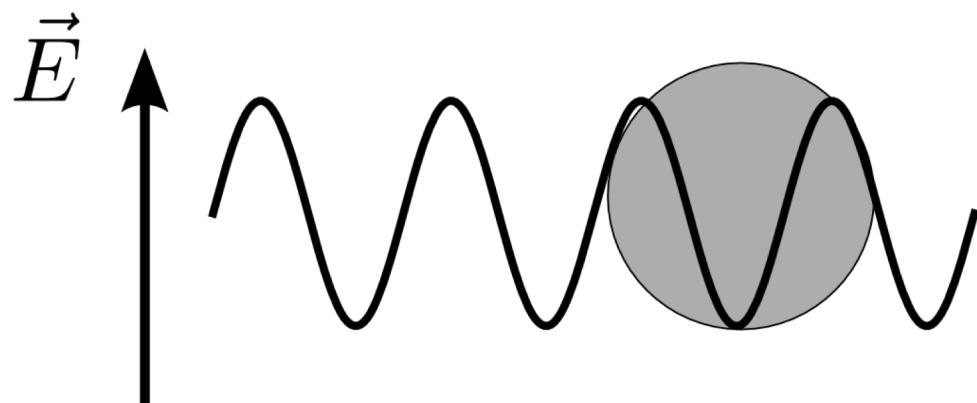
- ▶ Für Kugeln hängen die kompletten Streueigenschaften nur von x und n ab.

Streu-Regime



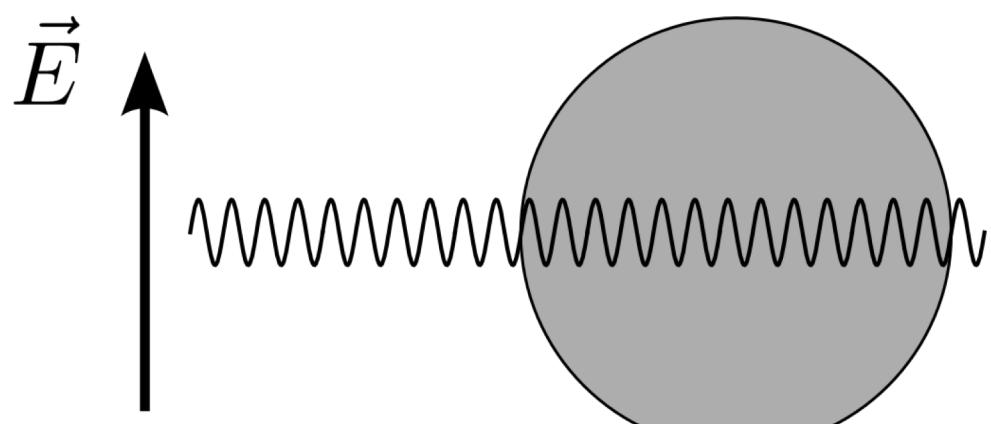
Rayleigh-Streuung:

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka < 0,2$$



Mie-Streuung:

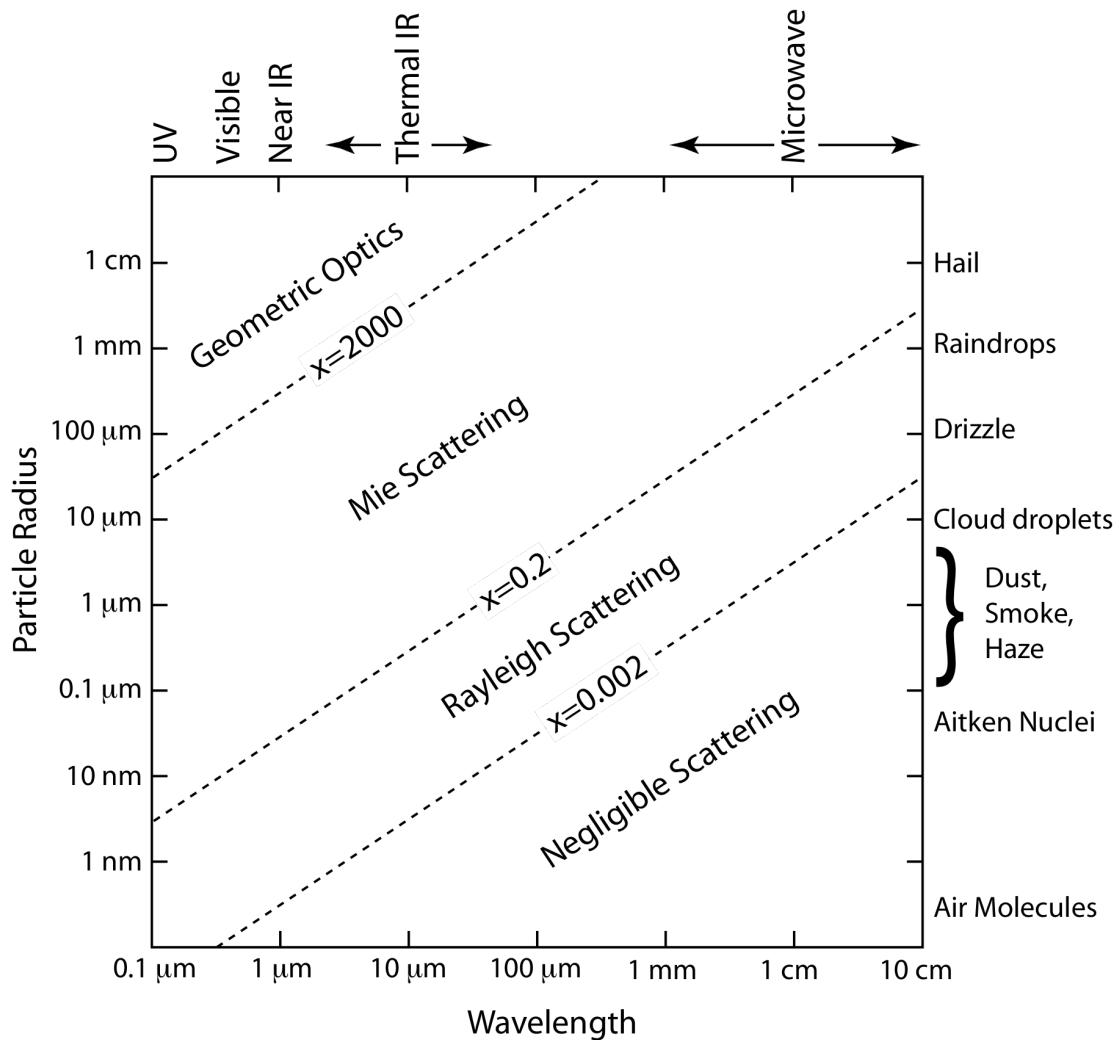
$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka > 0,2$$



Geometrische Optik:

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka > 2000$$

Light scattering regimes



There are many regimes of particle scattering, depending on the particle size, the light wave-length, and the refractive index.

This plot considers only single scattering by spheres. Multiple scattering and scattering by non-spherical objects can get really complex!

Quelle: http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf

Übersicht

- ▶ Streuung allgemein
- ▶ **Rayleigh-Streuung**
- ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Rayleigh-Streuung

Typische Phänomene mit Rayleigh-Streuung:

- ▶ Wetteradar, Radarrückstreuung von Regen
- ▶ Blauer Himmel, Streuung von sichtbaren Licht an den Luftmolekülen

Meine Herleitung im Folgenden folgt eng nach Petty.

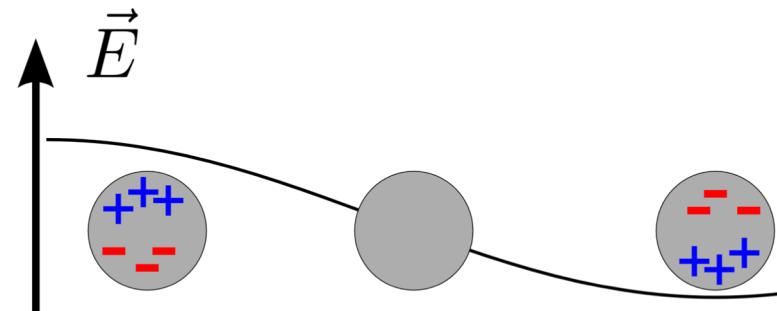
Dipolmoment

Teilchen klein relativ zur Wellenlänge.

→ Das ganze Teilchen erfährt gleichzeitig das gleiche E-Feld und wird dadurch polarisiert. (Ladungen im Teilchen werden etwas verschoben)

Dipolmoment

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$



α : Polarisierbarkeit (kann komplex sein)

\vec{E}_0 : Amplitude der EM Welle

$e^{-i\omega t}$: Zeitabhängigkeit ($\omega = 2\pi\nu$)

Bild: Manfred Brath

Grundideen Rayleigh-Streuung

- ▶ Oszillierender Dipol emittiert EM-Welle.
- ▶ Richtung der Einfallenden Welle: $\hat{\Omega}$
- ▶ Beobachter weit weg in Richtung $\hat{\Omega}'$
 1. E-Feld Vektor \vec{E} ist immer senkrecht zum lokalen $\hat{\Omega}$.
 2. \vec{p} ist parallel zu \vec{E} also ebenfalls senkrecht zu $\hat{\Omega}$.
 3. Wegen der Symmetrie der Ladungsverteilung im Dipol muss \vec{E}_{scat} in der Ebene von \vec{p} und $\hat{\Omega}'$ liegen.
 4. Die Stärke des gestreuten E-Felds ist proportional zur *Projektion* von \vec{p} aus dem Blickwinkel von $\hat{\Omega}'$. (\vec{E}_{scat} ist 0 wenn man genau vom Ende her auf den Dipol schaut und maximal wenn man senkrecht zum Dipol schaut.)
 5. Die Leistung die vom Dipol abgestrahlt wird ist proportional zur *Beschleunigung* der Ladungen (statischer Dipol strahlt nicht).
Also zu ω^2 , wegen $\omega^2 \sin(\omega t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sin(\omega t)$

Stärke der gestreuten EM Welle

4 und 5 zusammen führt zu

$$|\vec{E}_{scat}| \propto \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \sin \gamma \propto \omega^2 \sin \gamma$$

Wobei γ der Winkel zwischen $\hat{\Omega}'$ und dem Dipol \vec{p} ist.

Intensität geht mit dem Quadrat der Amplitude des E-Feldes, und ist daher

$$I \propto \omega^4 \sin^2 \gamma$$

In Streuwinkeln

Θ : Winkel zwischen $\hat{\Omega}$ und $\hat{\Omega}'$.

Φ : Polarwinkel um $\hat{\Omega}$.

Zur Herleitung stellt man sich vor, $\hat{\Omega}$ liege in Richtung der x-Achse und \vec{E}_0 in Richtung der z-Achse

$$\hat{\Omega} = (1,0,0)$$

$$\hat{\Omega}' = (\cos \Theta, \sin \Theta \sin \Phi, \sin \Theta \cos \Phi)$$

Dann kann man schreiben

$$\cos \gamma = \hat{z} \cdot \hat{\Omega}' = (0,0,1) \cdot \hat{\Omega}' = \sin \Theta \cos \Phi$$

und

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi$$

Einsetzen in die Gleichung auf der vorherigen Seite liefert

$$I \propto \omega^4 (1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi)$$

Interpretation

$$I \propto \omega^4(1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi)$$

- Intensität im Rayleigh-Regime proportional zu ω^4 .
- Für $\Phi = 90^\circ, 270^\circ$ liegt der gestreute Strahl in der Ebene senkrecht zu \vec{E}_0 . Die Intensität ist maximal und unabhängig von Θ . (Äußere Kurve der Abb..)
- Für $\Phi = 0^\circ, 180^\circ$, die Streuung in Richtung der Achse des Dipols, ist die Intensität Null. (Innerste Kurve der Abb..)

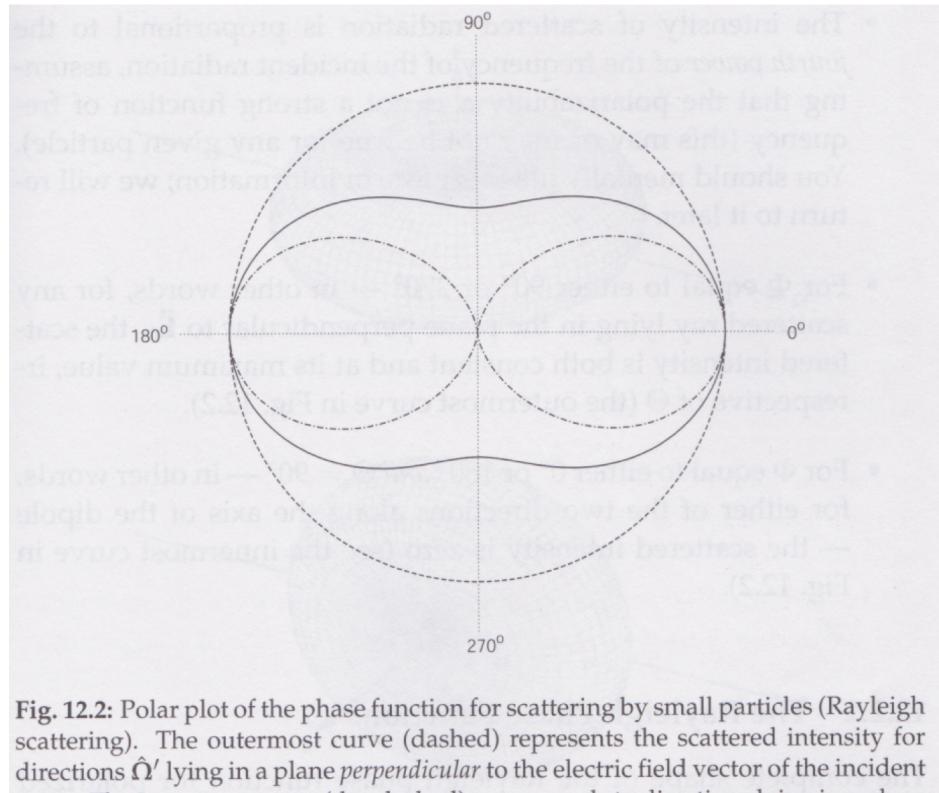


Fig. 12.2: Polar plot of the phase function for scattering by small particles (Rayleigh scattering). The outermost curve (dashed) represents the scattered intensity for directions $\hat{\Omega}'$ lying in a plane *perpendicular* to the electric field vector of the incident wave. The innermost curve (dot-dashed) corresponds to directions lying in a plane *parallel* to the electric field vector. The solid curve represents the scattered intensity for unpolarized incident radiation, as given by (12.10).

Abbildung: Petty

Rayleigh Phasenfunktion

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} P l \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Die Funktion $P(\Theta)$ für Rayleigh-Streuung und *unpolarisierte* Strahlung erhält man, indem man über Φ mittelt und normalisiert. Es ergibt sich

$$P(\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta)$$

(Unterstes Bild rechts und mittlere Kurve vorherige Seite.)

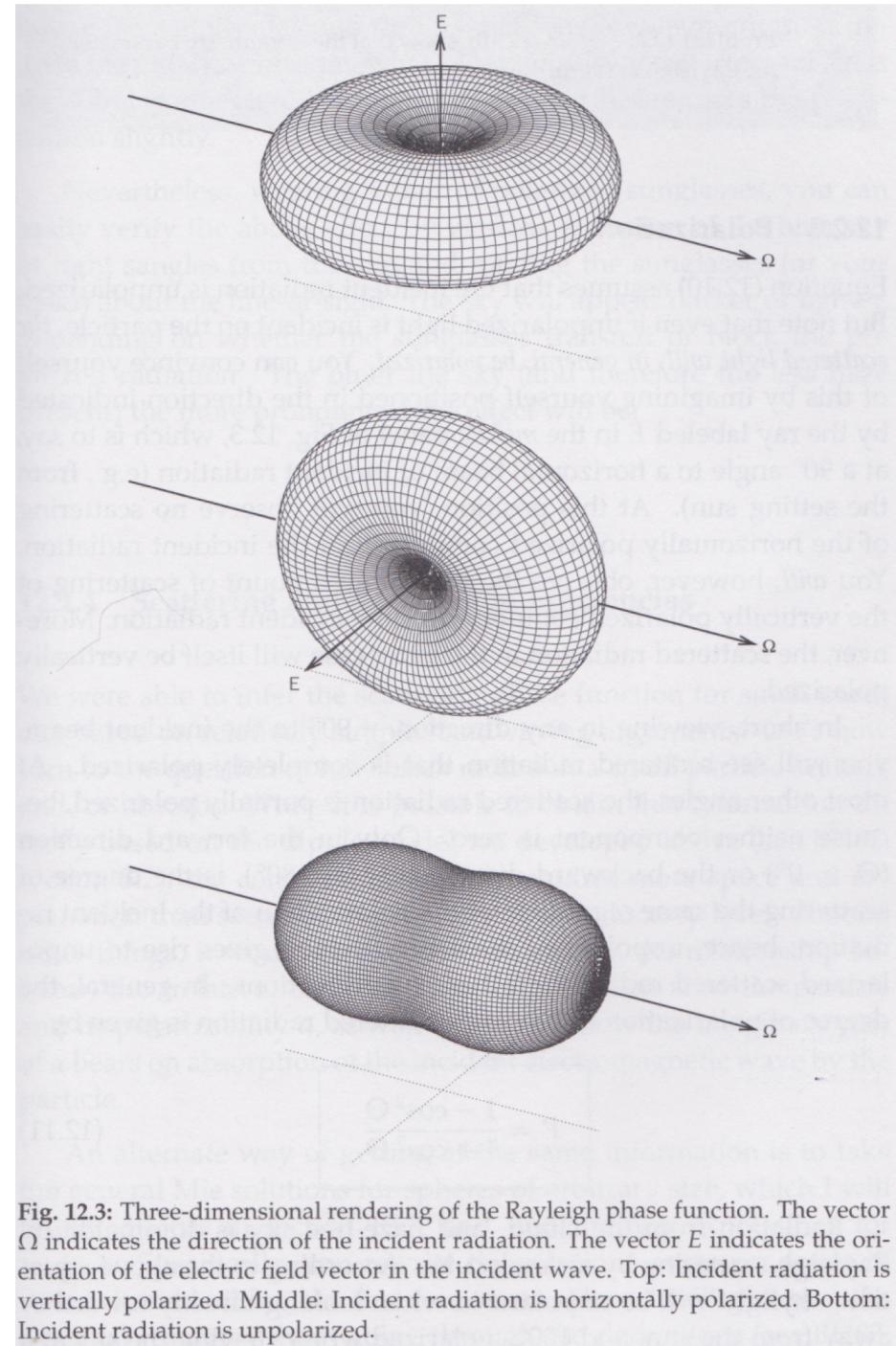


Fig. 12.3: Three-dimensional rendering of the Rayleigh phase function. The vector Ω indicates the direction of the incident radiation. The vector E indicates the orientation of the electric field vector in the incident wave. Top: Incident radiation is vertically polarized. Middle: Incident radiation is horizontally polarized. Bottom: Incident radiation is unpolarized.

Strahlungstransportgleichung

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} P I \frac{\checkmark d\Omega}{4\pi}$$

Extinktion *therm. Emission* *Streu-Emission*

Extinktion: $\alpha + \sigma$ (Absorption+Streuung)

Thermische Emission: Nur α

Streu-Emission: Nur σ

Streukoeffizient

- ▶ Die RTE ist aber nicht für ein Teilchen alleine definiert, sondern für eine Anzahl von Teilchen pro Volumen.
- ▶ Wenn die einzelnen Streuobjekte weit genug voneinander entfernt sind, so dass die einzelnen Streufelder nicht miteinander korreliert sind, gilt die Annahme der unabhängigen Streuung. In der Regel für die Atmosphäre erfüllt.

Streukoeffizient

Streukoeffizient:

Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{N}{V} C_{sca} = n_0 \underbrace{C_{sca}}_{\text{Anzahldichte}}$$

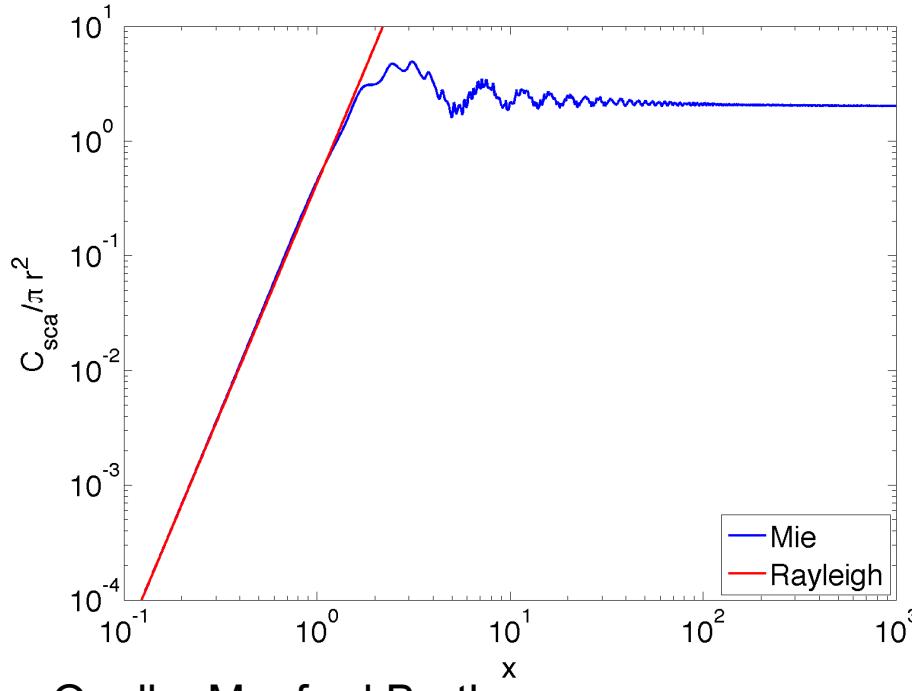
Anzahldichte

Streuquerschnitt für Rayleigh-Streuung:

$$C_{Rayleigh} \propto \frac{a^6}{\lambda^4}$$

wobei a der Radius der streuenden Teilchen ist.

Zusammenfassung Rayleigh



Quelle: Manfred Brath

Mehr zur Abb. später.

Gültig für

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} < 0,2$$

Streukoeffizient:

$$\sigma \sim \lambda^{-4} a^6$$

$$\sigma \sim k^4 a^6$$

Absorptionskoeffizient: $\alpha_s \sim \lambda^{-1} a^3$

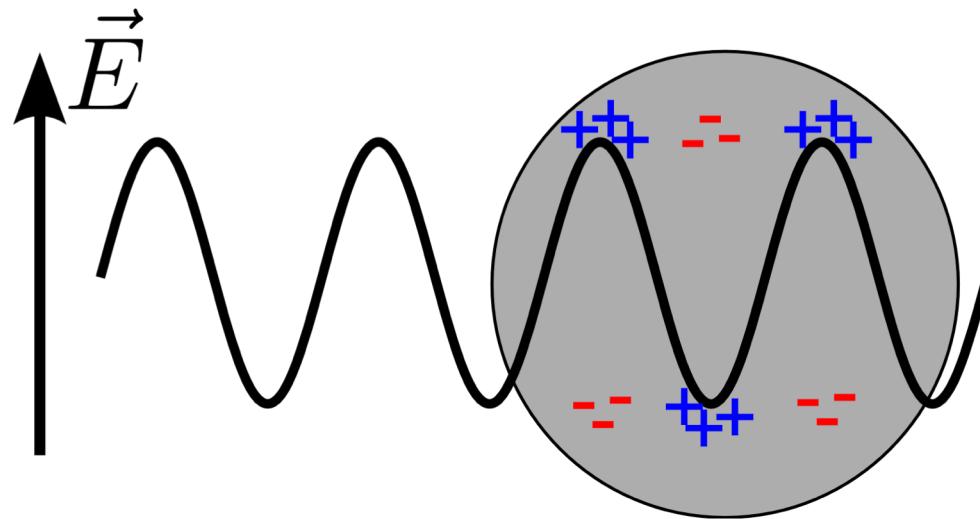
$$\alpha_s \sim ka^3$$

Phasenfunktion: $P \sim (1 + \cos^2 \Theta)$

Übersicht

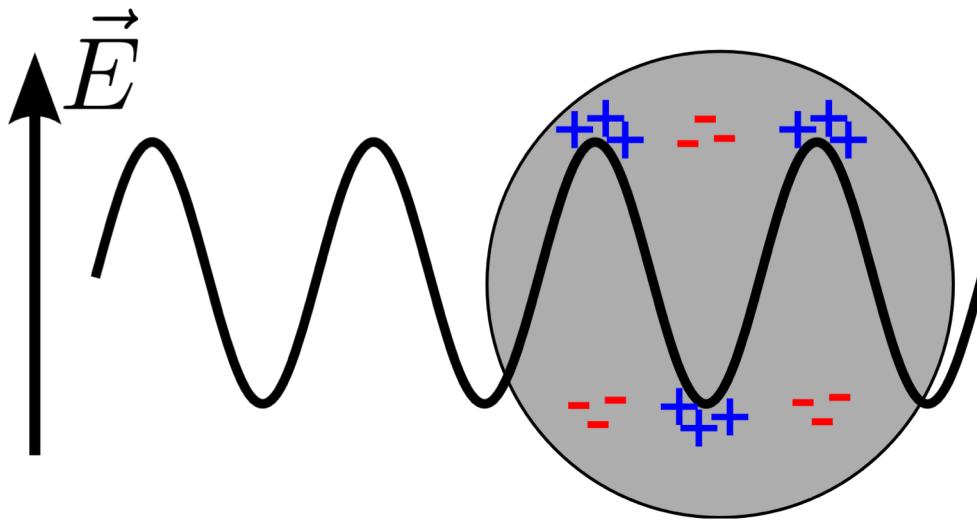
- ▶ Streuung allgemein
- ▶ Rayleigh-Streuung
- ▶ **Mie-Streuung**
- ▶ Zusammenfassung

Mie-Streuung



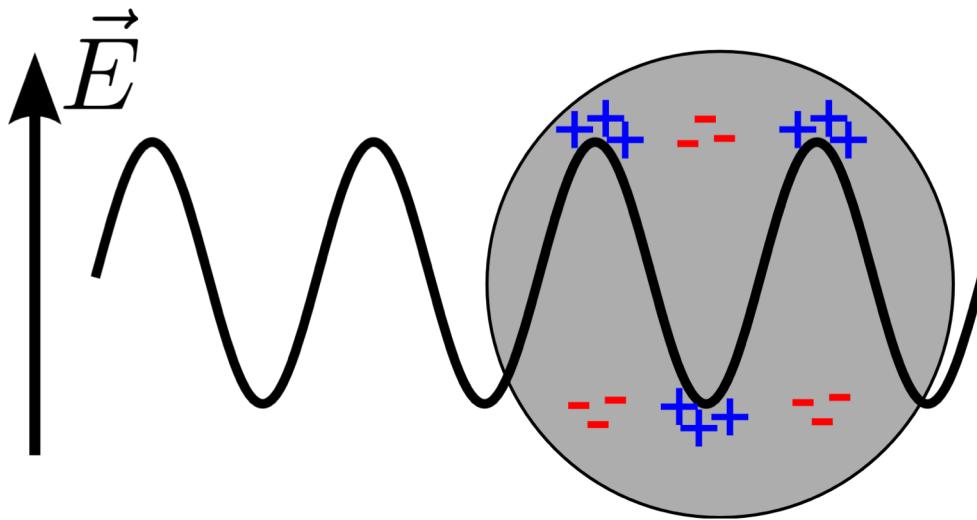
- ▶ Größenparameter: $x = \frac{2\pi a}{\lambda} > 0,2$
- ▶ Die Anregung ist nicht mehr gleichphasig.
 - ▶ Interferenzen, Resonanzen

Mie-Streuung-Lösung



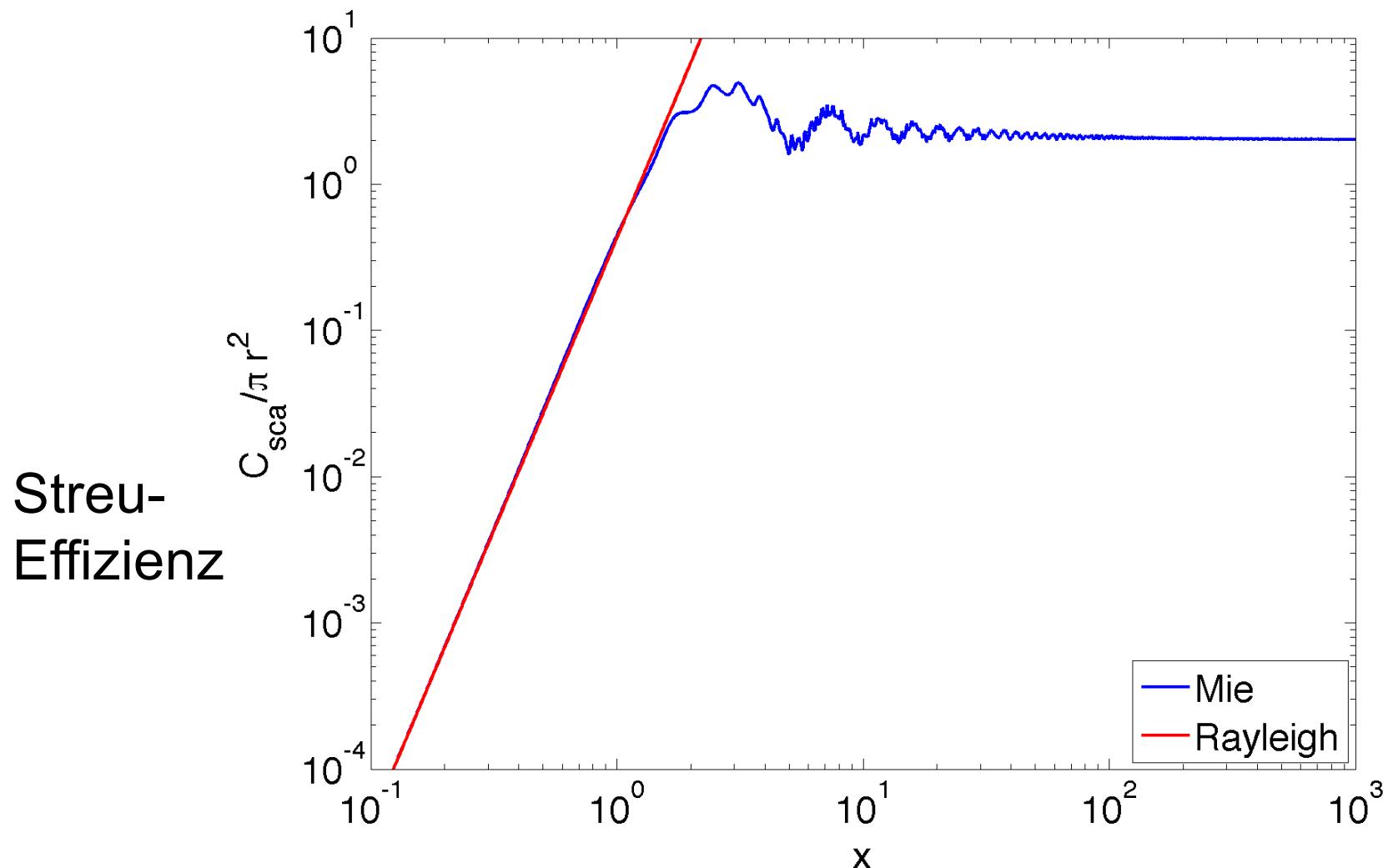
- ▶ Entwicklung nach vektoriellen Kugelflächenfunktionen unter Berücksichtigung des Grenzflächenverhaltens
 - ▶ Z. B. Tangentialkomponente des E-Feld ist stetig und Normalkomponente des B-Feld ist stetig.

Mie-Streuung-Lösung



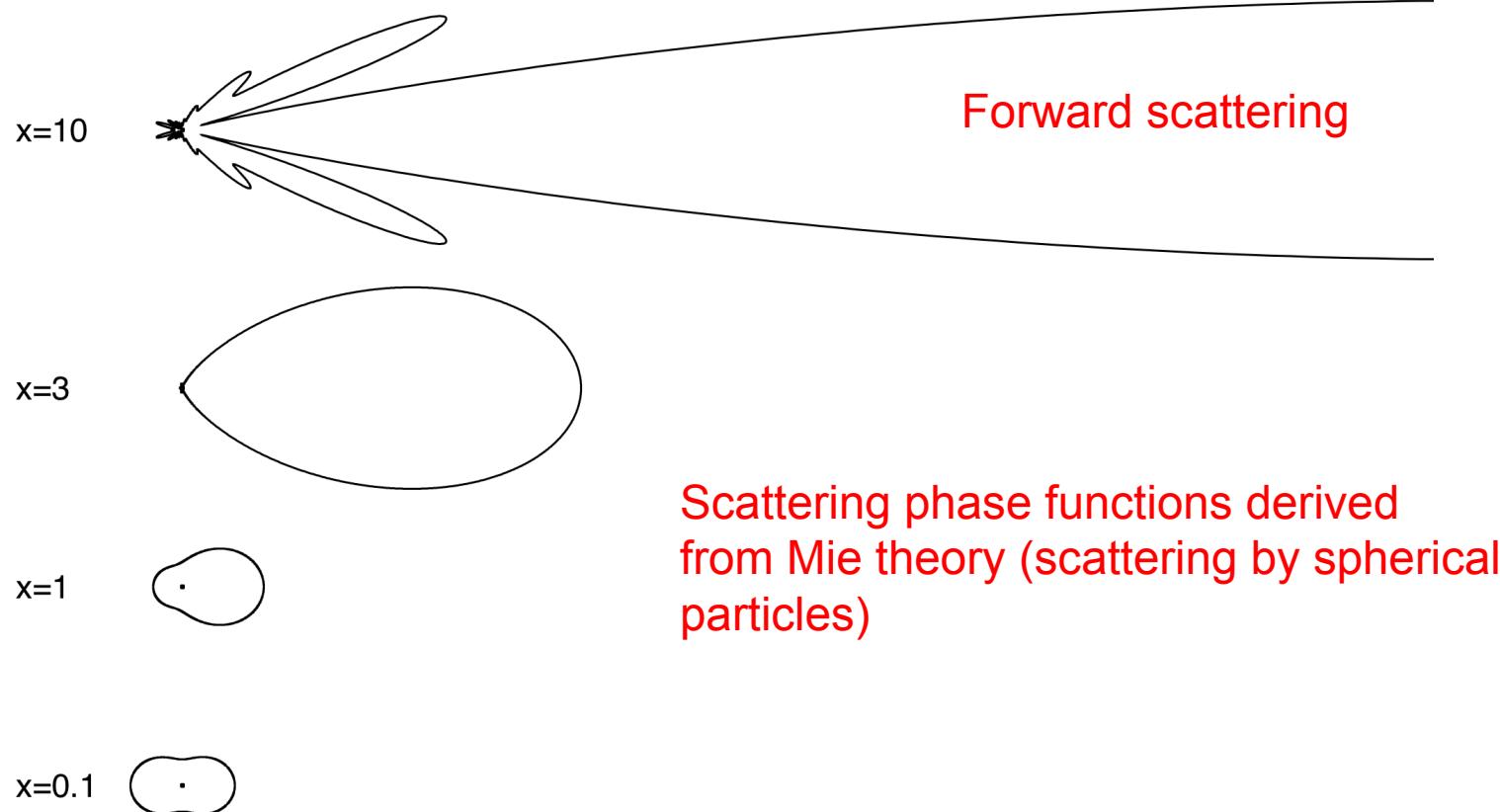
- ▶ Für Herleitung siehe zum Beispiel:
 - ▶ Tsang et al., Scattering of Electromagnetic Waves, Theories and Applications, Wiley, 2000
 - ▶ Stratton, J. A., Electromagnetic Theory, McGraw Hill, 1941

Mie-Streuung: Streuquerschnitt/-koeffizient



- ▶ Grenzfall Rayleigh-Streuung: $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim x^4$
- ▶ Grenzfall geometrische Optik: $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim 2$

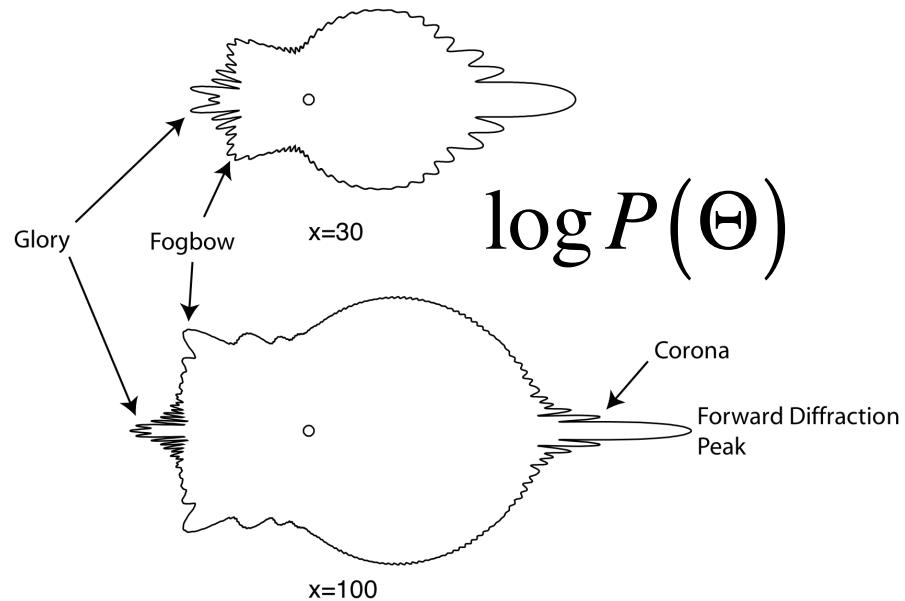
Mie-Streuung: Scattering phase functions



The scattering phase function, or phase function, gives the angular distribution of light intensity scattered by a particle at a given wavelength

Quelle: http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf bzw.
Petty, G. W., 2006

Mie-Streuung: Optical phenomena

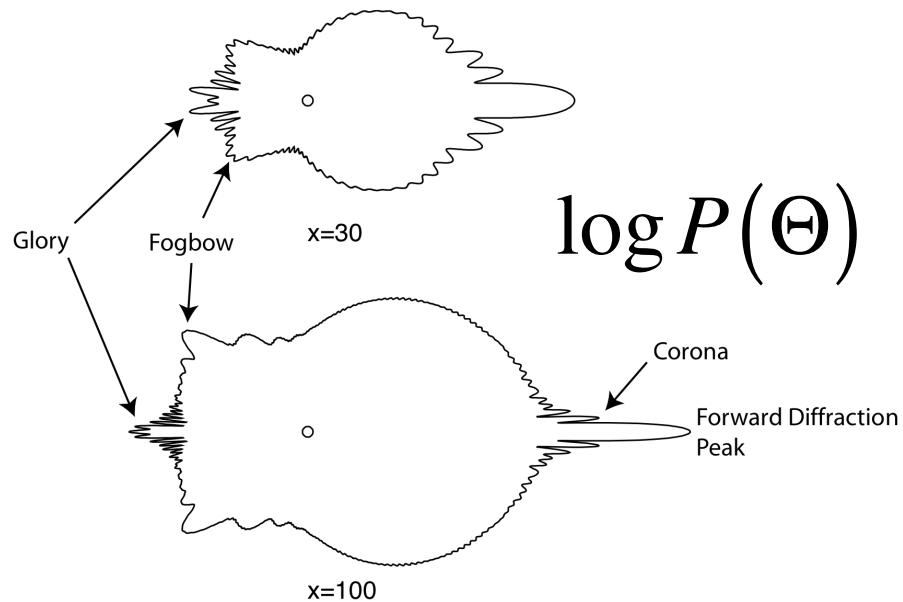


- **Fogbow:** spikes in scattering phase function present but not sharp as for rainbows. Hence the separation of colors (due to varying refractive index) is not as vivid as a normal rainbow. A whitish ring centered on one's shadow (i.e. opposite the sun) is seen.
- Arises when water droplets have a size characteristic of fog and clouds rather than rain

Quelle: http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf bzw.
Petty, G. W., 2006

Mie-Streuung:

Optical phenomena



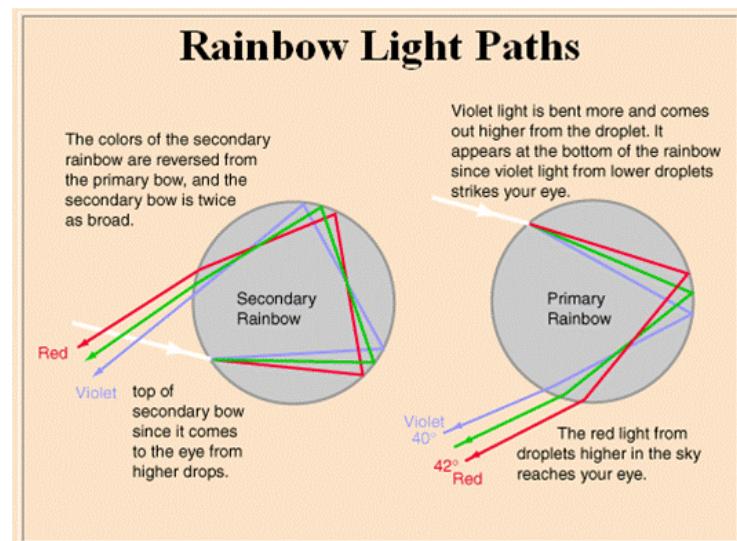
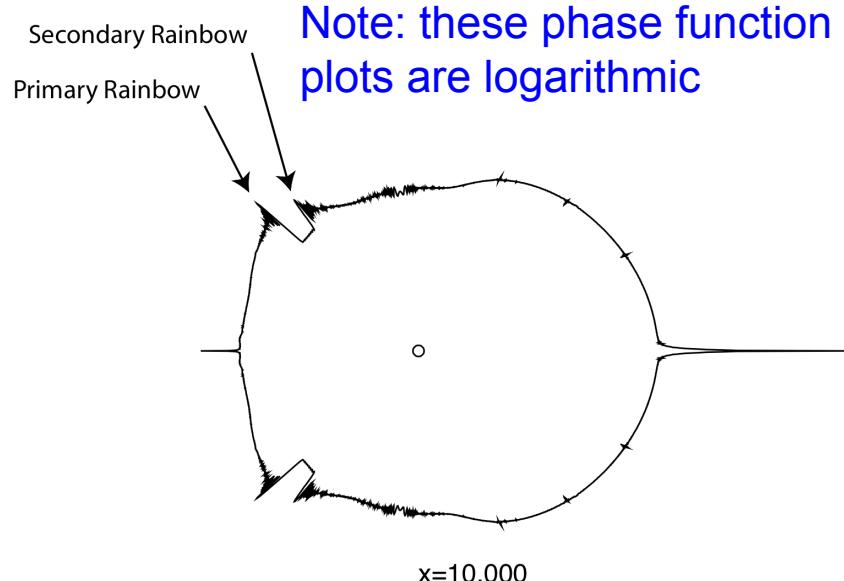
► Korona



Quelle: Wikipedia

Quelle: http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf bzw.
Petty, G. W., 2006

Mie-Streuung: Optical phenomena



- **Rainbow:** for large particles ($x = 10,000$), the forward and backward peaks in the scattering phase function become very narrow (almost non-existent). Light paths are best predicted using geometric optics and ray tracing
- **Primary rainbow:** single internal reflection
- **Secondary rainbow:** double internal reflection

Quelle: http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf bzw.
Petty, G. W., 2006

Mie-Streuung: Zusammenfassung

- ▶ (Exakt) Gültig für alle x
- ▶ Streukoeffizient
 - ▶ Grenzfall Rayleigh-Streuung: $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim x^4$
 - ▶ Grenzfall geomtrische Optik: $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim 2$
- ▶ Phasenfunktion:
 - $x \rightarrow \infty$: Vorwärtsstreuung nimmt zu
Phasenfunktion wird asymmetrischer und geht über in geometrische Optik

Übersicht

- ▶ Streuung allgemein
- ▶ Rayleigh-Streuung
- ▶ Mie-Streuung
- ▶ **Zusammenfassung**

Zusammenfassung

- ▶ Rayleigh-, Mie-Streuung und geometrische Optik sind die drei Streu-Regime.
- ▶ Mie Theorie ist exakt, aber lässt sich nur für wenige Formen von Streuteilchen lösen (besonders Kugeln). Es gibt numerische Verfahren für andere Formen.
- ▶ Von mir gar nicht behandelt: Lösung der Strahlungstransfergleichung mit Streuung.