

Die Strahlungstransfergleichung

Optik, Strahlung, Fernerkundung

Sommersemester 2017

Stefan Bühler

Meteorologisches Institut

Universität Hamburg

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} P l \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Übersicht – alle Kapitel

Einleitung

1. Elektromagnetische Wellen
2. Grundgesetze der Optik
3. Natürliche Oberflächen
4. Thermische Strahlung
5. Strahlungstransfergleichung
6. Streuung
7. Inversion

Quellen

- ▶ Petty (A first Course in Atmospheric Radiation)
- ▶ Rees (Physical Principles of Remote Sensing)
- ▶ Goody und Yung (Atmospheric Radiation)
- ▶ ARTS User Guide
(http://www.sat.ltu.se/arts/misc/arts-doc/uguide/arts_user.pdf)
- ▶ Der Klassiker:
S. Chandrasekhar Radiative Transfer Dover Publications Inc., 1960. Frei erhältlich unter:
<https://archive.org/details/RadiativeTransfer>

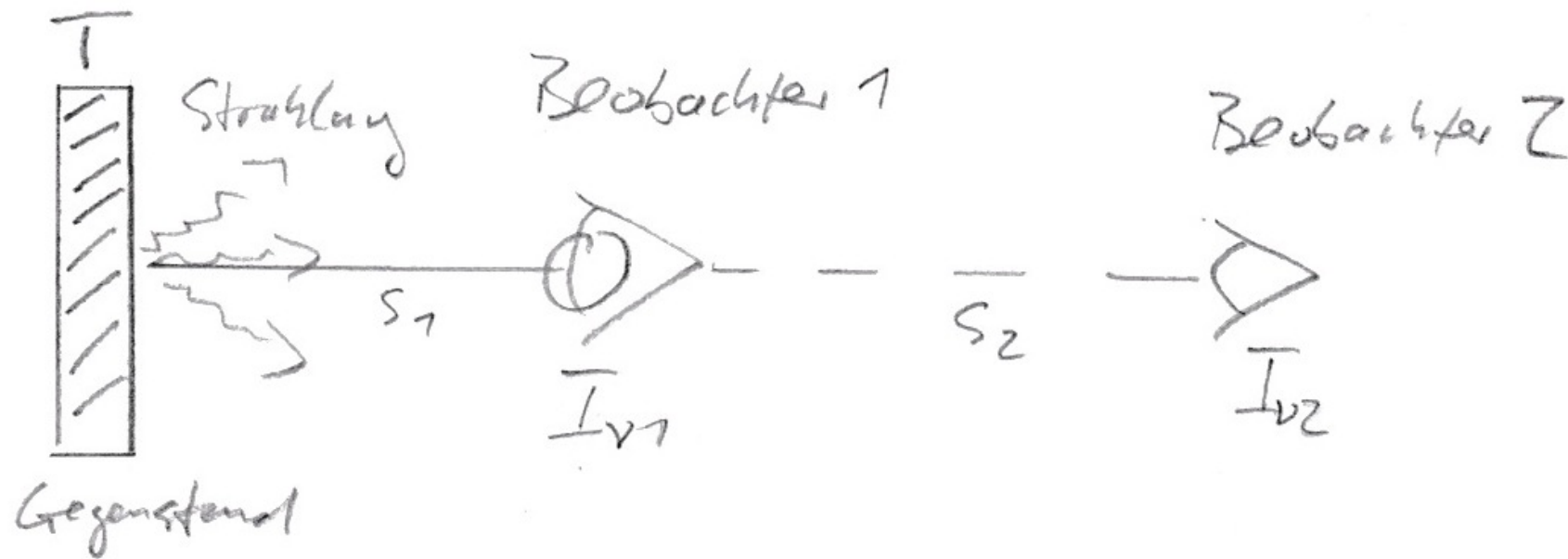
Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ Extinktion
- ▶ Emission
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Übersicht

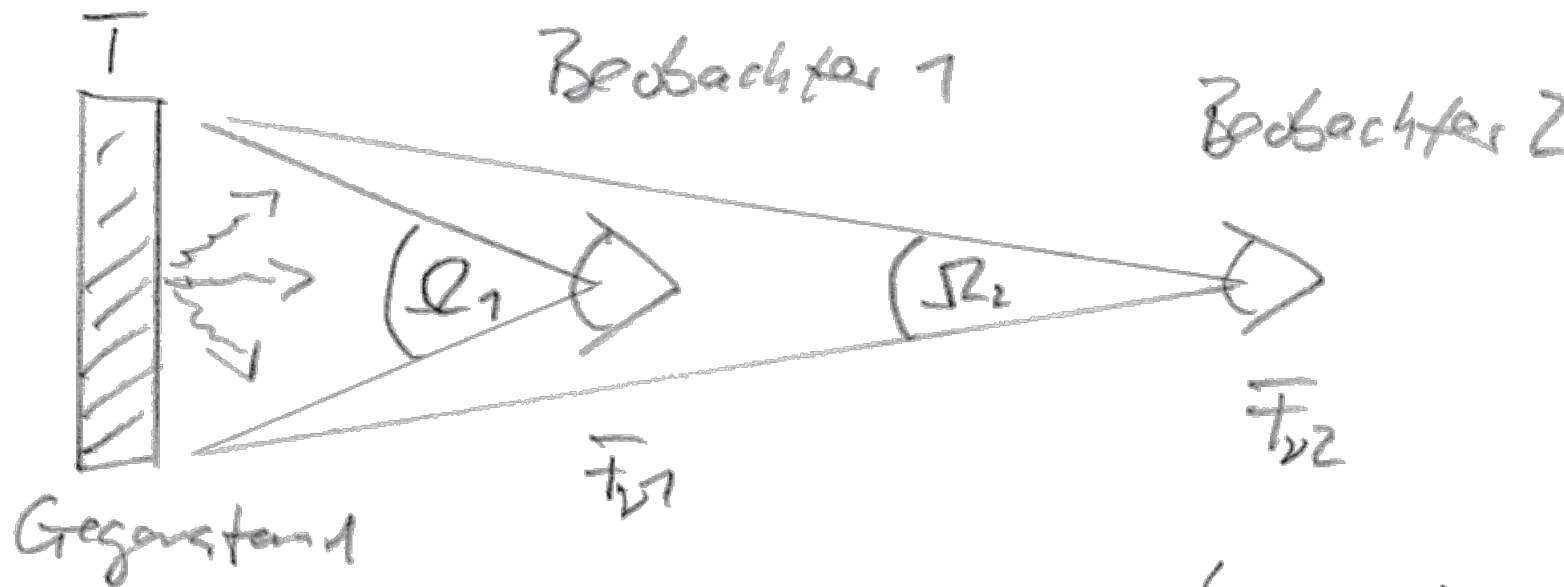
- ▶ **Intensität und Abstand**
- ▶ Extinktion
- ▶ Emission
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Ein Gedankenexperiment



- ▶ Welche Intensität (= spektrale Radianz) ist größer, I_{v1} oder I_{v2} ?
($[I_v] = [\text{W}/(\text{m}^2 \text{ sr Hz})]$)
- ⑦ ▶ Trickfrage! Die beiden Intensitäten sind gleich.
- ▶ Argumente:
 - ▶ Sonst würde Helligkeitstemperatur als Einheit keinen Sinn machen (da kommt ja kein Abstand vor).
 - ▶ Betrachte den (monochromatischen) Energiefluss...

Spektraler Strahlungsfluss (Spektrale Irradianz)



- Vom Beobachter her denken, dort ist der Energiefluss definiert.
- Energiefluss nimmt mit dem Abstand ab, wie erwartet.
- Aber Intensität ist so konstruiert, dass sie entlang des Weges erhalten bleibt.

$$\overline{F}_v(\text{Objekt}) = \int_{\Omega_{\text{Objekt}}} \overline{I}_v(\text{Objekt}) d\Omega \cos \vartheta$$

$$\Omega_{\text{Objekt}} = \frac{\text{Fläche des Objekts}}{\text{Fläche Kugel mit Radius } s}$$

$$= \frac{A_{\text{Objekt}}}{4\pi s^2}$$

$$\Rightarrow \overline{F}_v(\text{Objekt}) \sim \frac{1}{s^2}$$

Noch ein Beispiel

- ▶ Isotrope Strahlungsquelle (strahlt gleichmäßig nach allen Seiten)
- ▶ Betrachte Kugelflächen bei verschiedenem Radius r .
- ▶ Gesamtenergiefluss bleibt immer gleich, aber die Größe der Fläche wächst mit r^2
- ▶ Energieflussdichte (Irradianz) nimmt ab mit $1/r^2$
- ▶ Irradianz ist Radianz integriert über einen Raumwinkel
- ▶ Raumwinkel der Strahlungsquelle, vom Beobachter her gesehen, nimmt ab mit $1/r^2$
- ▶ Irradianz $\sim 1/r^2$, Raumwinkel $\sim 1/r^2$
- ➔ Radianz = Irradianz / Raumwinkel bleibt konstant
- ➔ Intensität (Radianz pro Frequenzintervall) bleibt ebenfalls mit dem Abstand konstant

Notation

Ich lasse das Subscript von jetzt an weg, also:

$$I = I_{\nu}$$

bezeichnet die Intensität (monochromatische Radianz)
in $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ sr Hz})$

Sterne

- ▶ Was ist mit Sternen, weiter entfernte Sterne leuchten doch schwächer als nahe?
- ② ▶ Sterne sind so weit weg, dass ich das I überhaupt nicht messen kann, nur das F über einen endlichen Raumwinkel um den Stern herum. (Sie bleiben immer punktförmig, egal wie groß ich das Bild vergrößere.)
- ▶ Mathematisch: I ist eine Delta-Funktion in θ und ϕ .

Intensität im Medium

- ▶ Im Vakuum läuft die Intensität also unverändert immer weiter. (Man spricht auch von einem „Pencil Beam“, ungefähr = ein Lichtstrahl.)
- ▶ Was passiert in einem Medium, z.B. in der Atmosphäre?



$$\frac{dl}{ds} = -\text{Extinktion} + \text{Emission}$$

- ▶ Die Strahlung kann durchs Medium abgeschwächt oder verstärkt werden.

Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ **Extinktion**
- ▶ Emission
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Das Gesetz von Lambert (in differentieller Form)

$$\frac{dl}{ds}(\text{ext}) = -k I$$

I : Intensität der Strahlung [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ sr Hz})$]

s : Weg [m]

k : Extinktionskoeffizient [$1/\text{m}$]

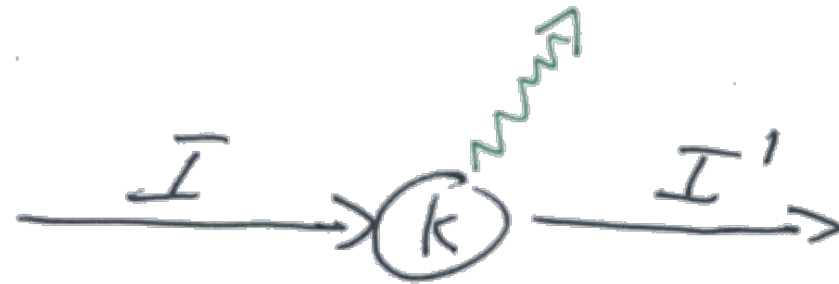
- ▶ Extinktion ist proportional zur Intensität! (Pro Meter Weg wird ein bestimmter Prozentsatz der Strahlung verschluckt)
- ▶ Wodurch passiert Extinktion?

Milch + Tinte...

Wodurch passiert Extinktion



Absorption



Streuung

3 Ursachen von Extinktion, die verschiedenen physikalischen Prozessen entsprechen:

- ▶ Absorption: Energie des Photons wird in thermische Energie umgewandelt
- ▶ Elastische Streuung: Photon wird in eine andere Richtung gestreut (fehlt also in der betrachteten Ausbreitungsrichtung ds)
- ▶ Inelastische Streuung: Beides gleichzeitig passiert dem gleichen Photon. (Selten, passiert nur 1 in 10^7 Photonen. Kann bei passiver Fernerkundung vernachlässigt werden, aber wichtig bei Raman-Lidar)

Rolle der Wellenlänge für die Streuung

- ▶ Je kleiner die Frequenz (je größer die Wellenlänge), desto größer müssen streuende Objekte sein, um eine Rolle zu spielen.

Table 3.1: Scattering objects and spectral regions. UV = ultraviolet, Vis = visible, IR = infrared, sub-mm = sub-millimeter.

Scattering objects	Important for
air molecules [nm]	UV/Vis (blue sky color)
aerosol particles [μm]	UV/Vis (hazy white sky)
cloud droplets and ice crystals [$<1\text{ mm}$]	IR, sub-mm
rain, snow [$>1\text{ mm}$]	microwaves

Quelle: Mein eigenes altes Skript.

Lineares Medium

- Ebenfalls Gesetz von Lambert: Extinktion ist proportional zur Menge des Absorbers, und alle verschiedenen Prozesse addieren sich:

$$\begin{aligned}k &= \alpha(\nu) + \sigma(\nu) \\ &= \sum_i n_i \tilde{\alpha}(\nu) + \sum_j n_j \tilde{\sigma}(\nu)\end{aligned}$$

k : extinction coefficient

α : absorption coefficient

σ : scattering coefficient

i : index of absorbing gas species, e.g., H₂O, O₃

n_i : number density of gas molecules

$\tilde{\alpha}$: absorption cross-section [m²]

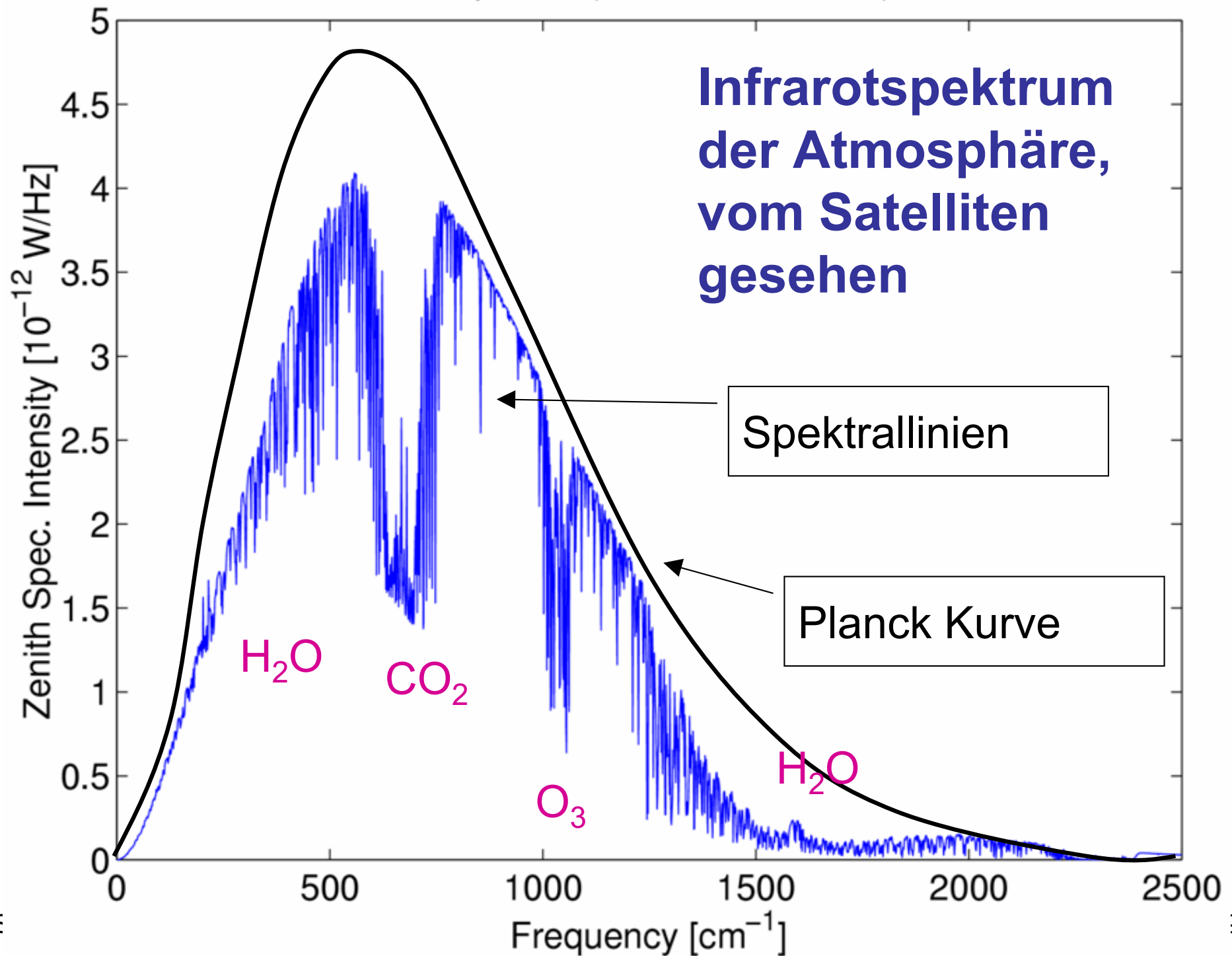
j : index of scattering species, e.g., cloud droplets

$\tilde{\sigma}$: scattering cross-section [m²]

Absorptions- und Streuquerschnitte

- ▶ Die Absorptions- und Streuquerschnitte sind keine trivialen Größen, sondern es gibt ganze Wissenschaftszweige, die sich mit ihnen beschäftigen. Welche?
 - ② ▶ Absorption: Spektroskopie (+Quantenmechanik)
 - ▶ Streuung: Streutheorie
- ▶ Diese Größen hängen auf sehr charakteristische Weise vom Medium ab, darauf beruht der größte Teil der Fernerkundung

All species (ARTS Calculation)

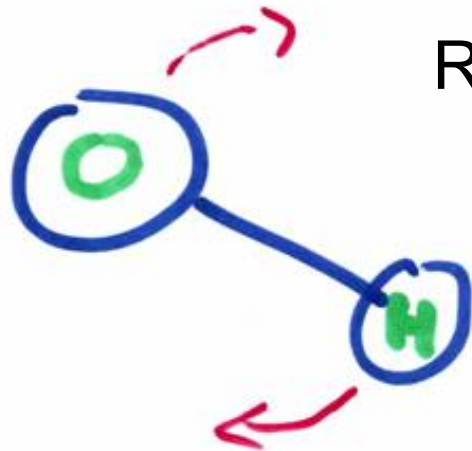


Warum gibt es Spektrallinien?

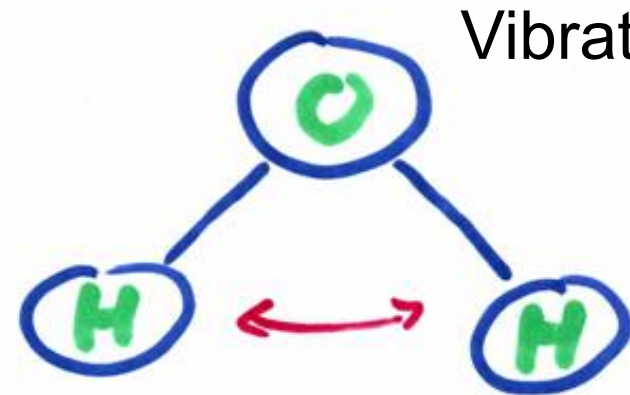
- ▶ Luft besteht aus Molekülen (Stickstoff N_2 , Sauerstoff O_2 , Kohlendioxid CO_2 , Spurengase wie Ozon O_3 , ...)
- ▶ Moleküle können nur bei ganz bestimmten Frequenzen Strahlung absorbieren

Warum?

Quanten

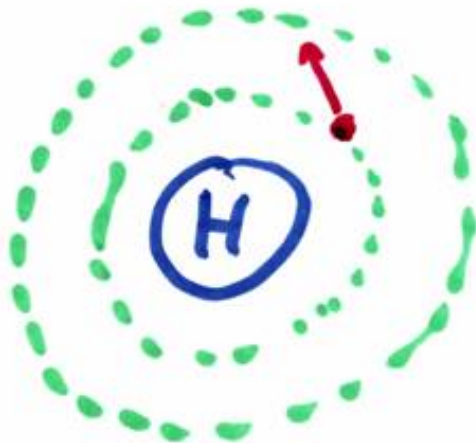


Rotation



Vibration

Elektronensprung

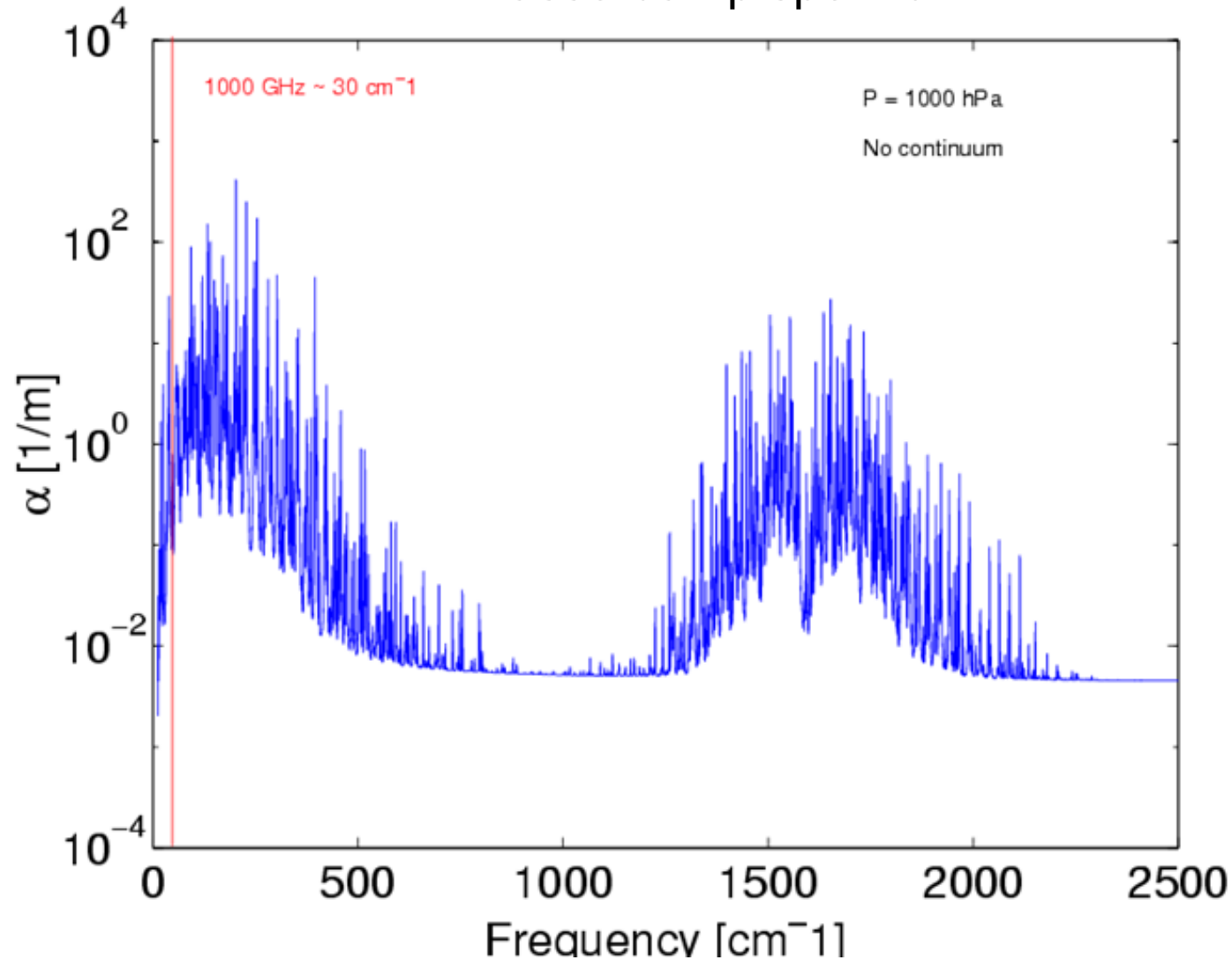


Nur „diskrete“ = bestimmte
Zustände möglich

Energie der Strahlung muss genau
passen

Jedes Molekül hat sein typisches Spektrum

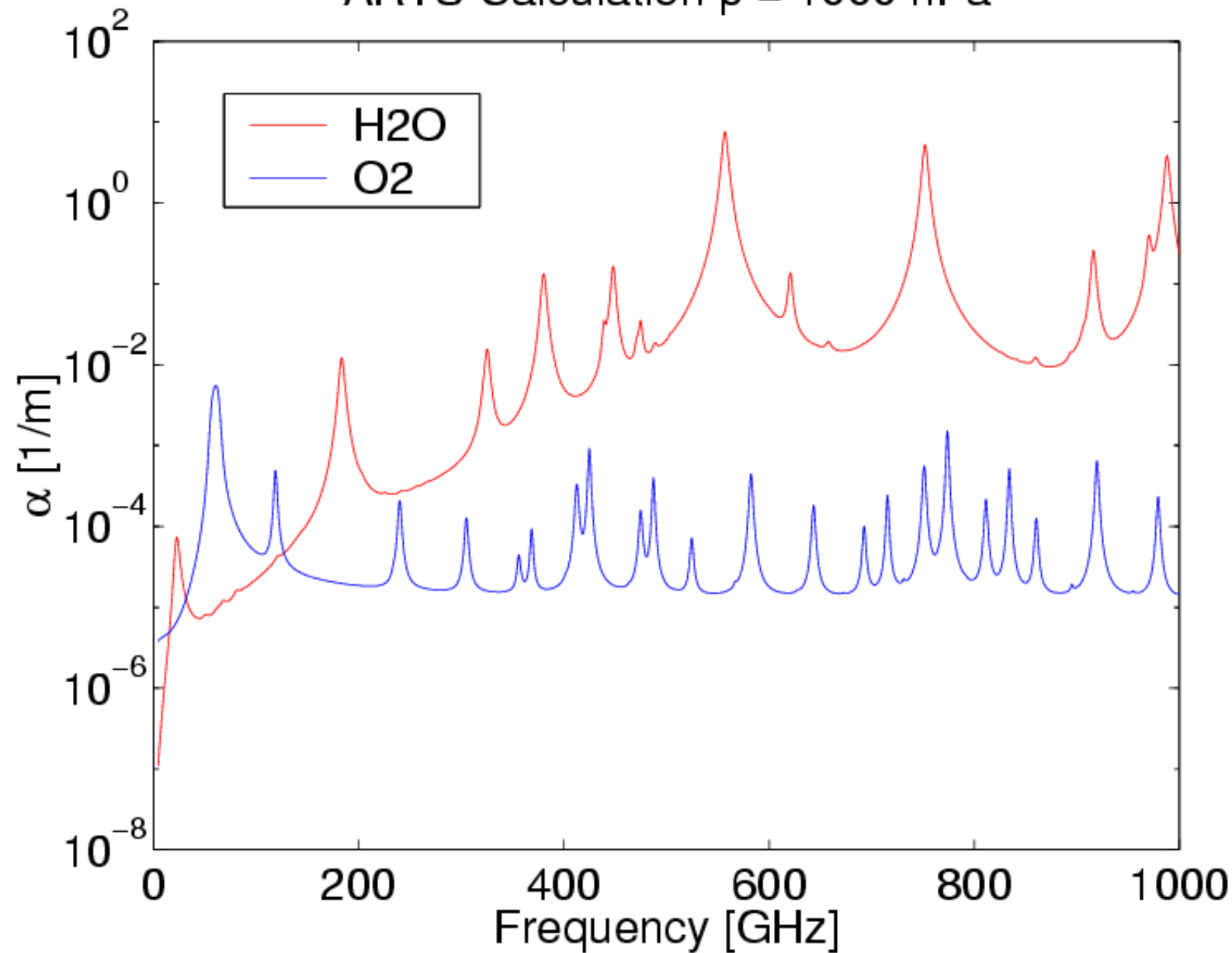
Wasserdampfspektrum



Das
Spektrum
kann
ziemlich
kompliziert
aussehen...

Der Mikrowellenbereich

ARTS Calculation $p = 1000 \text{ hPa}$



Was kann man messen?

- ▶ H_2O --- Wasserdampf
- ▶ O_3 --- Ozon
- ▶ + viele mehr



Messung der
Konzentration

- ▶ CO_2 --- Kohlendioxyd
- ▶ O_2 --- Sauerstoff
- ▶ Gleichmäßig verteilt



Messung der
Temperatur

- ▶ Wolken, Regen

Zurück zum Strahlungstransfer

- ▶ Der Absorptionskoeffizient α ist also stark von der Frequenz abhängig.
- ▶ (Der Streukoeffizient σ auch)
- ▶ Für jede Frequenz einzeln gelten meine Strahlungstransfer-Differentialgleichungen.
- ▶ In dem einfachen Fall den wir bisher betrachten

$$\frac{dl}{ds}(\text{ext}) = -k l$$

l : Intensität der Strahlung [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ sr Hz})$]

s : Weg [m]

k : Extinktionskoeffizient [$1/\text{m}$]

Analytische Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} I(s) &= I(0) e^{-\int_0^s k(s') ds'} \\ &= I(0) e^{-\tau(0,s)} \quad \tau \text{ heißt Opazität, optische Dicke} \\ &= I(0) t(0,s) \quad t \text{ heißt Transmission (Transmissivität)} \end{aligned}$$

Für homogenes Medium:

$$I(s) = I(0) \exp(-ks)$$

Das ist das Extinktionsgesetz.

Opazität

$$\tau(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} k(s') ds'$$

Erinnerung:

$$\frac{dl}{ds}(\text{ext}) = -k I$$

I : Intensität der Strahlung [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ sr Hz})$]

s : Weg [m]

k : Extinktionskoeffizient [$1/\text{m}$]

- ▶ Synonyme für **Opazität**: optische **Dicke**, optische **Tiefe**, optische **Dichte**.
- ▶ Achtung Verwechslungsgefahr: Optischer **Weg** (manchmal leider ebenfalls **Dichte**) bezeichnet das Integral über den **Realteil** des Brechungsindex, Das α , das im k mit steckt, hängt mit dem **Imaginärteil** des Brechungsindex zusammen.

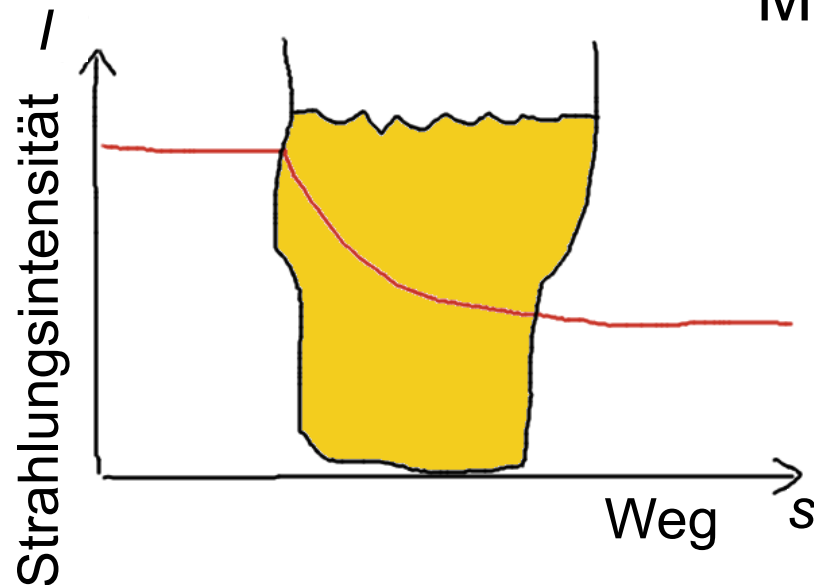
$$k = \alpha + \sigma$$

$$\alpha = \frac{4\pi\nu n''}{c_0} = \frac{4\pi n''}{\lambda_0}$$

Extinktionsgesetz anschaulich: Beer's Law

- The wider the glass, and the darker the brew, the less the amount of light that comes through.

Source: ? (told to me by Christian Melsheimer)

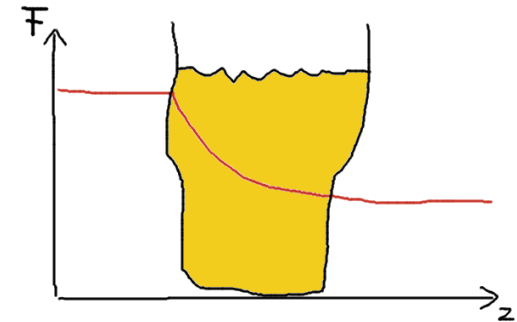


$$I(s) = I_0 \exp(-ks)$$

Ein Gesetz mit vielen Namen

- ▶ Das Extinktionsgesetz heißt auch:

- ▶ Beer's Gesetz
- ▶ Lambert's Gesetz
- ▶ Bouguer's Gesetz
- ▶ Oder jede beliebige Kombination daraus, je nach Land, zum Beispiel „Lambert-Beersches Gesetz“



- ▶ Laut Bohren hat Beer das Gesetz nie erwähnt, und es wurde zuerst von Pierre Bouguer formuliert (Essay on the Gradation of light, 1729).

Bohren nennt das ein gutes Beispiel für „**Stigler's law of eponymy**“ (Stiglers Gesetz, Eponym = Wort, das aus einem Eigennamen abgeleitet ist):

Keine wissenschaftliche Entdeckung ist nach ihrem Entdecker benannt.

Was passiert für einen Stapel von homogenen Schichten?



$$\tau_{\text{total}} = \tau_1 + \tau_2 + \dots$$

$$\mathcal{T}_{\text{total}} = \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 \cdot \dots$$

- ▶ Opazität addiert sich.
- ▶ Transmission multipliziert sich.
- ▶ Das ist wichtig, in der Praxis löst man Strahlungstransferprobleme oft, indem man das Medium in diskrete Schichten unterteilt.

Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ Extinktion
- ▶ **Emission**
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Formell

- ▶ Strahlung könnte auf dem Weg durch das Medium auch zunehmen.
- ▶ Rein formell schreiben wir in Analogie zur **Extinktion** für den Prozess der **Emission**:

$$\frac{dl}{ds}(\text{emiss}) = S$$

l : Intensität der Strahlung [W/(m² sr Hz)]

s : Weg [m]

S : Quellterm der Emission

Volle Strahlungstransfergleichung

$$\frac{dl}{ds} = -kl + S$$

Erinnerung 1: Monochromatische Gl.: Gilt separat für jede Frequenz. Alle Größen (außer s) sind Funktionen von s und Frequenz ν .

Erinnerung 2: „Pencil Beam“ Gl.: Gilt separat für jede Richtung. Alle Größen sind im Prinzip Funktionen der Richtung, was man bei k und S oft vernachlässigen kann, bei l aber nie.

► Sind wir jetzt fertig?

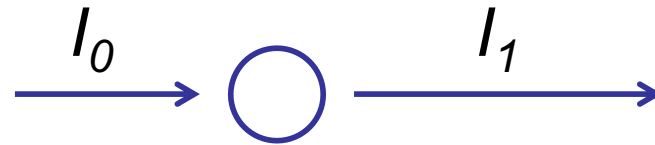


► Nein! Offene Fragen:

► Was ist S ?

► (Und später: Lösung der Differentialgleichung)

Wie kann die Intensität zunehmen?

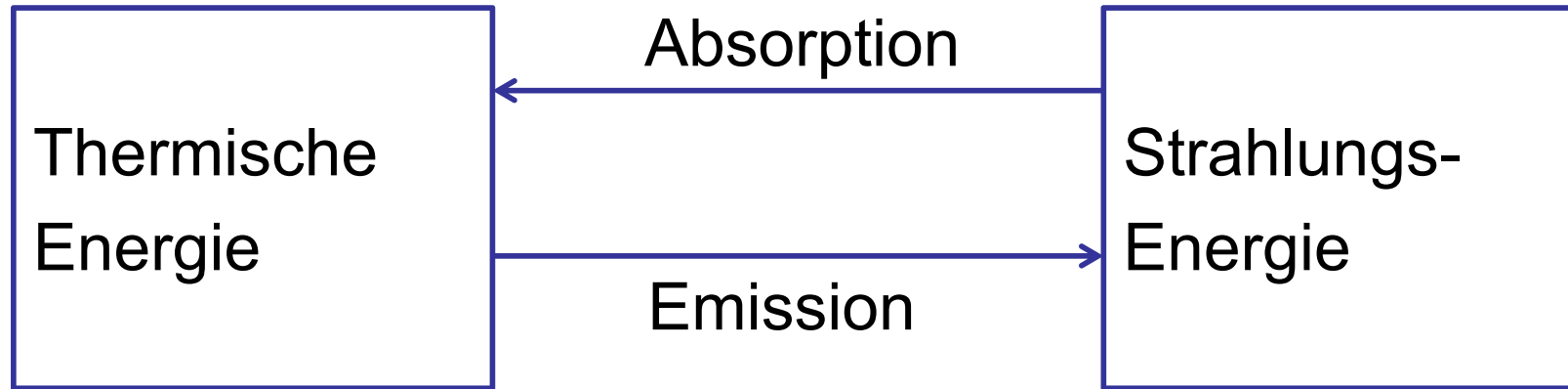


Wieder nur 2 fundamentale Wege:

- ① 1. Thermische Emission
- 2. Streuung

Thermische Emission

Das Gegenstück zur Absorption



Wie hieß das Gesetz hierfür nochmal?

② → Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Thermische Emission Mathematisch

$$S(\text{thermisch}) = \alpha(\nu, \dots) J(\nu, T)$$

S : Quellterm der thermischen Emission

α : Absorptionskoeffizient (der selbe,
der auch bei der **Extinktion** vorkam)

J : Quellfunktion, hängt nicht vom Medium ab

T : Temperatur

Erinnerung Extinktion:

$$k = \alpha + \sigma$$

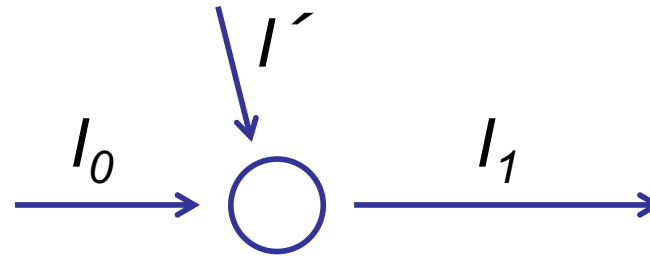
= Absorption + Streuung

- ▶ Was ist J ?
- ▶ Im allgemeinen Fall schwer zu berechnen, aber einfach im Fall mit lokalem Thermodynamischem Gleichgewicht (LTE).
- ▶ Dann ist J genau die Planck Funktion $B(\nu, T)$, die im letzten Kapitel eingeführt wurde.

Erinnerung:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

Streuung



- Genau wie Streuung **aus** der Ausbreitungsrichtung für Extinktion sorgt, so sorgt Streuung aus anderen Richtungen **in** die Ausbreitungsrichtung für Emission:

$$S(streu) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} P(\hat{n}', \hat{n}) I(\hat{n}') d\hat{n}'$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\vartheta=-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} P(\vartheta', \varphi', \vartheta, \varphi) I(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

S : Quellterm (Einheit Intensität)
 σ : Streu-Koeffizient
 P : Phasenfunktion (Name historisch)
 \hat{n}', \hat{n} : Richtungs(einheits)vektoren
 I : Strahlungs-Intensität
 4π : Konventionelle Normalisierung (steckt in Definition von P)

- Das σ ist das gleiche wie im Extinktions-Term! (Die Strahlungsintensität, die aus einer Richtung entfernt wird, wird anderen Richtungen zugeschlagen. → Elastische Streuung)

Erinnerung Extinktion:

$$k = \alpha + \sigma$$

= Absorption + Streuung

Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ Extinktion
- ▶ Emission
- ▶ **Die Strahlungstransfergleichung**
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Strahlungstransfergleichung

$$\frac{dl}{ds} = \underbrace{-(\alpha + \sigma)I}_{\text{Extinktion}} + \underbrace{\alpha B(T)}_{\text{therm. Emission}} + \underbrace{\sigma \int_{\Omega} P I \frac{d\Omega}{4\pi}}_{\text{Streu-Quellterm}}$$

- ▶ Engl.: Radiative Transfer Equation (**RTE**)
- ▶ Achtung: Alle Größen hier sind Frequenzabhängig.
- ▶ Die Gleichung gilt für jede Frequenz einzeln (monochromatische) und jede Richtung einzeln („Pencil Beam“).
- ▶ Um Energieflüsse (Irradianz) zu berechnen, müssen wir die Gleichung für viele verschiedene Frequenzen und Richtungen lösen, dann integrieren.

Strahlungstransfergleichung

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)I + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} P I \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Extinktion

therm. Emission

Streu-Quellterm

(therm. Quellterm)

Extinktion: $\alpha + \sigma$ (Absorption+Streuung)

Thermische Emission: Nur α

Streu-Quellterm: Nur σ

Vektor-Strahlungstransfergleichung

- ▶ Nur der Vollständigkeit halber:
- ▶ Wenn wir auch Polarisation beschreiben wollen, können wir Intensität I durch den Stokes Vektor $[I, Q, U, V]$ ersetzen.

The vector radiative transfer equation (VRTE) is

$$\frac{ds(\nu, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})}{ds} = -\mathbf{K}(\nu, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})\mathbf{s}(\nu, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{a}(\nu, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})B(\nu, \mathbf{r}) + \int_{4\pi} d\hat{\mathbf{n}}' \mathbf{Z}(\nu, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}')\mathbf{s}(\nu, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}'), \quad (6.35)$$

where \mathbf{s} is the specific intensity vector, \mathbf{K} is the total extinction matrix, \mathbf{a} is the total absorption vector, B is the Planck function and \mathbf{Z} is the total phase matrix. Furthermore ν is the frequency of the radiation, ds is a path-length-element of the propagation path, \mathbf{r} represents the atmospheric position and $\hat{\mathbf{n}}$ the propagation direction. Equation 6.35 is valid for monochromatic or quasi-monochromatic radiative transfer. We can use this equation for

Quelle: ARTS Theory Guide

(http://www.sat.ltu.se/arts/misc/arts-doc/uguide/arts_theory.pdf)

Lösung?

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} P l \frac{d\Omega}{4\pi}$$

- ▶ Strahlungsfeld in einer bestimmten Richtung hängt durch die Streu-Emission von der Strahlung in allen anderen Richtungen ab.
- ➔ Mit Streuung lässt sich die Gleichung nicht analytisch lösen. (Es gibt aber zahlreiche numerische Verfahren.)
- ▶ Wichtiger Spezialfall: Keine Streuung
- ➔ Nächster Abschnitt!

Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ Extinktion
- ▶ Emission
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ **Analytische Lösung ohne Streuung**
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ Zusammenfassung

Schwarzschild-Gleichung

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \cancel{\sigma})l + \alpha B(T) + \cancel{\sigma \int_{\Omega} l \frac{d\Omega}{4\pi}}$$

$$\frac{dl}{ds} = -\alpha l + \alpha B(T)$$

$$= \alpha(B(T) - l) \quad \text{Schwarzschild-Gleichung}$$

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1906. Heft 1.

Inhalt:

W. Nernst, Ueber die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen	S. 1
K. Schwarzschild, Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre . . .	„ 41
F. Heiderich, Die Zahl und die Dimension der Geschmacksknospen der Papilla vallata des Menschen in den verschiedenen Lebensaltern . .	„ 54
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Göttinger Universitäts-Laboratorium. XV.	„ 65
J. Weingarten, Zur Theorie der Wirbelringe	„ 81
E. Hertel, Mitteilungen über die Wirkung von Lichtstrahlen auf lebende Zellen	„ 94
A. Coehn, Ueber elektrische Erscheinungen beim Zerfall von Ammonium. Erste Mitteilung	„ 100
„ Zweite Mitteilung	„ 106
G. Angenheister, Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption von Erdbebenwellen, die durch den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind. Mit 1 Tafel	„ 110
F. Åkerblom, Vergleichung der Diagramme aus Upsala und Göttingen von Fernbeben, deren Wellen die Erde umkreist haben. Mit 1 Tafel . .	„ 121

$$\frac{dl}{ds} = \alpha(B(T) - l)$$

K. Schwarzschild, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, 1906

Man verfolge zunächst die nach innen wandernde Energie B . Geht man um eine unendlich dünne Schicht dh nach innen, so geht von der von außen kommenden Energie B der Bruchteil $B \cdot a dh$ verloren, auf der anderen Seite kommt durch die nach der einen Seite gehende Eigenstrahlung der Schicht dh der Betrag $a E dh$ hinzu, es ergibt sich also im Ganzen:

$$(7) \quad \frac{dB}{dh} = a(E - B).$$

(Unser l heißt bei ihm B , unser B heißt bei ihm E)

Schwarzschild-Gleichung

$$\frac{dl}{ds} = \alpha(B(T) - I)$$

Annahme: α und T konstant
(homogenes Medium)

Was passiert mit I wenn die Strahlung lange genug durch das Medium läuft ($s \rightarrow \infty$)?

⑦ **Denkhilfe:**

$I < B(T) \quad \rightarrow I$ nimmt mit dem Weg zu
 $I > B(T) \quad \rightarrow I$ nimmt mit dem Weg ab

→ Wenn α und T konstant sind, so ist nach genügend langer Wegstrecke $I = B(T)$.

Und wenn ich I in Einheiten von Helligkeitstemperatur T_b beschreibe, dann ist $T_b = T$.

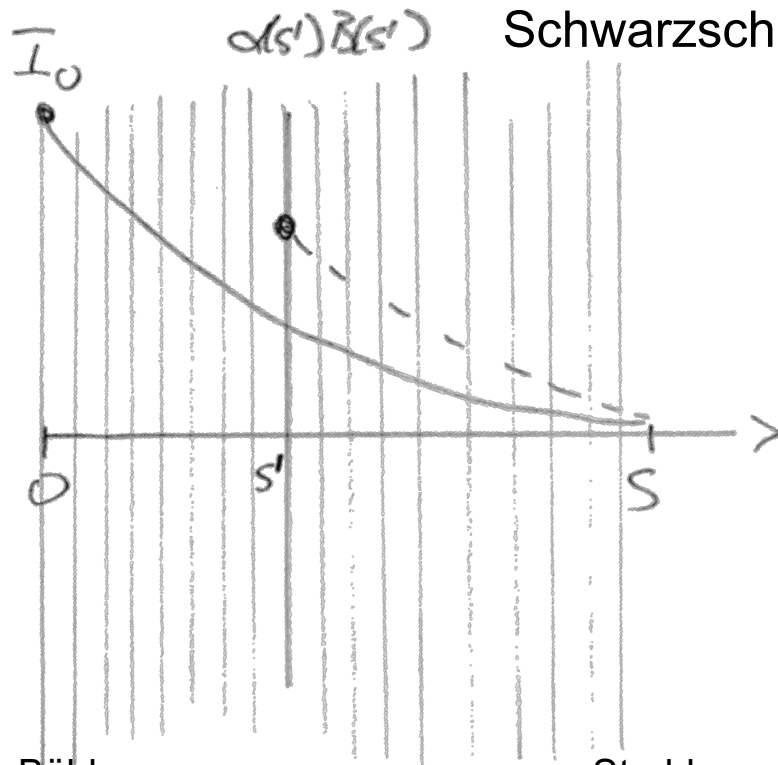
Analytische Lösung der Schwarzschild Gleichung

Die Gleichung lässt sich integrieren:

$$\tau(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \alpha(s') ds' \quad (\text{Opazität})$$

$$I(s) = I(0)e^{-\tau(0,s)} + \int_0^s \alpha(s')B(s')e^{-\tau(s',s)} ds'$$

Integralform der Schwarzschildgleichung



Differentialform:

$$\frac{dI}{ds} = \alpha(B(T) - I)$$

- ▶ $I(0)$: Hintergrund (z.B. Kosmische Hintergrundstrahlung oder Emission der Oberfläche).
- ▶ Jede Schicht emittiert $\alpha B(T)$.
- ▶ Emission jeder Schicht wird durch $\exp(-\tau)$ abgeschwächt.
- ▶ In der Praxis wird das Integral numerisch berechnet (durch eine diskrete Summe ersetzt)

Herleitung Integralform Schwarzschildgleichung

- ▶ Idee:
- ▶ Schreibe als Differentialgleichung in Opazität τ .
- ▶ Achtung, wenn s so definiert ist, dass es zum Sensor hin zunimmt (Ausbreitungsrichtung der Strahlung), dann nimmt die Opazität mit steigendem s ab (sonst klappt es nicht).

$$d\tau = -\alpha ds$$

- ▶ Multipliziere mit integrierendem Faktor $e^{-\tau}$
- ▶ Genaue Rechnung in Petty Gl. 8.5-8.13, handschriftlich siehe nächste Seite.

Herleitung Integralform Schwarzschildgleichung

$$\frac{dI}{ds} = \alpha (B - I)$$

$$d\tau = -\alpha ds$$

Schritt von Sensor
aus rückwärts
→ ds negativ
→ dτ positiv

$$\rightarrow \frac{dI}{d\tau} = \cancel{B - I} I - B$$

Multipliziere beide Seiten mit $e^{-\tau}$

$$\frac{dI}{d\tau} e^{-\tau} = (\cancel{B - I}) e^{-\tau}$$

Exkurs: Produktregel

$$\frac{d}{d\tau} [I e^{-\tau}] = \frac{dI}{d\tau} e^{-\tau} - I e^{-\tau}$$

$$\frac{dI}{d\tau} e^{-\tau} - I e^{-\tau} = -B e^{-\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} [I e^{-\tau}] = -B e^{-\tau}$$

Integriere von Sensor rückwärts
bis zu einem beliebigen Punkt ($\tau = 0 \dots \tau'$)

$$\int_0^{\tau'} \frac{d}{d\tau} [I e^{-\tau}] = - \int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

$$[I e^{-\tau}]_0^{\tau'} = - \int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

$$I(\tau') e^{-\tau'} - I(0) \cdot 1 = - \int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

$$I(0) = I(\tau') e^{-\tau'} + \int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

Quelle:

Petty, Gl. 8.5 - 8.13

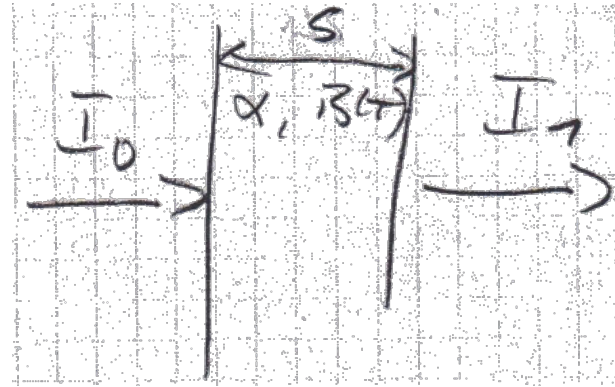
Krackpunkt:

dτ hat umgekehrtes
Vorzeichen zu ds!

Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ Extinktion
- ▶ Emission
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ **Homogene Schicht ohne Streuung**
- ▶ Zusammenfassung

Homogene Schicht



- ▶ Interessant, weil ich mir jedes Medium als Stapel homogener Schichten entlang des Weges s vorstellen kann. (Beliebig exakt, wenn ich die Schichten dünn genug mache.)
- ▶ Infinitesimal dünne Schicht: Schwarzschild Gleichung: $dI = \alpha(B(T) - I) ds$
- ▶ Jetzt suche ich aber die analytische Lösung für eine endlich dicke Schicht!
- ➔ Setze homogene Schicht in Integralform der Schwarzschildgleichung ein

Opazität für Homogene Schicht

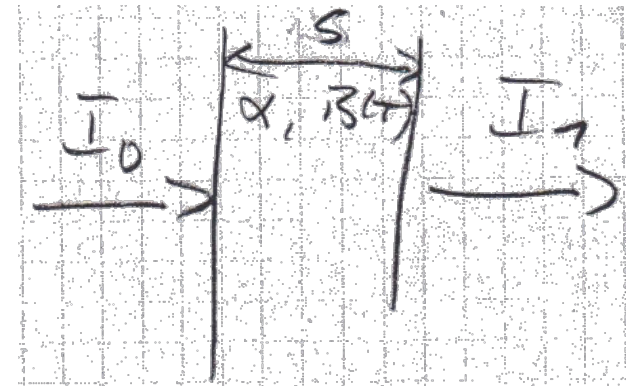
$$\tau(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \alpha(s') ds' = \alpha (s_2 - s_1)$$

Integralform der Schwarzschild-Gleichung:

$$I(s) = I(0)e^{-\tau(0,s)} + \int_0^s \alpha(s') B(s') e^{-\tau(s',s)} ds'$$

Homogene Schicht:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 e^{-\alpha(s-0)} + \alpha B(T) \int_0^s e^{-\alpha(s-s')} ds' \\ &= I_0 e^{-\alpha s} + \alpha B(T) \int_0^s e^{-\alpha s} e^{\alpha s'} ds' \\ &= I_0 e^{-\alpha s} + \alpha B(T) e^{-\alpha s} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha s'} \right]_0^s \\ &= I_0 e^{-\alpha s} + \cancel{\alpha} B(T) e^{-\alpha s} \left(\frac{1}{\cancel{\alpha}} e^{\alpha s} - \left(\frac{1}{\cancel{\alpha}} \cdot 1 \right) \right) \\ &= I_0 e^{-\alpha s} + B(T) (1 - e^{-\alpha s}) \end{aligned}$$



Oder mit Definition der Transmission:

$$\begin{aligned} t(s_1, s_2) &= e^{-\tau(s_1, s_2)} && \text{(generell)} \\ &= e^{-\alpha s} && \text{(homogene Schicht)} \end{aligned}$$

$$I_1 = t I_0 + (1-t) B$$

Transmittierte
Strahlung

Emittierte
Strahlung

Zwei Interessante Extremfälle

Opazität

Transmission

1. $\tau \gg 1 \Rightarrow t \rightarrow ?$



2. $\tau \ll 1 \Rightarrow t \rightarrow ?$



Extremfall 1: Optisch dick



$$\lim_{t \rightarrow 0} I_1 = \lim_{t \rightarrow 0} (t I_0 + (1 - t) B) = B$$

- ▶ Wir sehen einfach die Planck Emission $B(T)$, die der Temperatur der Schicht entspricht.
- ▶ Die Hintergrundstrahlung I_0 hat keinen Einfluss mehr.
- ▶ Das hatten wir uns schon anhand der Differentialform der Schwarschildgleichung ($dl = ds \alpha(B - I)$) klargemacht, wenn der Weg lang ist.
- ▶ Jetzt haben wir klarere Kriterien (τ oder t) wann dieser Fall vorliegt.

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_1 = \lim_{t \rightarrow 1} (t I_0 + (1-t) B) = I_0$$

- ▶ Für $t=1$ ($\tau=0$) geht die Strahlung einfach unverändert durch. (Nicht sehr überraschend.)
- ▶ Temperatur der Schicht (und damit $B(T)$) spielt keine Rolle.
- ▶ Interessanter ist aber der Fall, dass die Opazität τ zwar klein ist, aber nicht Null. → Nächste Seite.

Mehr zum optisch dünnen Fall



$$t = e^{-\tau} = 1 - \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

Reihenentwicklung
der e-Funktion

$$\tau \ll 1$$

$$\Rightarrow t \approx 1 - \tau$$

$$\Rightarrow I_1 = t I_0 + (1 - t) B \approx (1 - \tau) I_0 + \tau B = I_0 + \tau (B - I_0)$$

- ▶ Entspricht genau der Differentialform der Schwarzschild Gleichung ($dl = ds \alpha(B - I)$).
- ▶ Änderung der Intensität proportional zur optischen Dicke

➔ Linearer Fall

Übersicht

- ▶ Intensität und Abstand
- ▶ Extinktion
- ▶ Emission
- ▶ Die Strahlungstransfergleichung
- ▶ Analytische Lösung ohne Streuung
- ▶ Homogene Schicht ohne Streuung
- ▶ **Zusammenfassung**

Zusammenfassung

- ▶ Die Strahlungstransfergleichung ist eigentlich ziemlich intuitiv...
- ▶ ...und ohne Streuung auch leicht analytisch zu lösen
- ▶ Mit diesem Kapitel kann man alle thermischen Messungen verstehen, wenn Streuung keine Rolle spielt
 - ▶ Temperaturmessung mit IR und Mikrowellen-Sensoren
 - ▶ Spurengasmessungen mit IR und Mikrowellen-Sensoren
 - ▶ Operationelle Meteorologische Instrumente wie AMSU und HIRS, thermische Kanäle von Meteosat und AVHRR

Leseempfehlung

- ▶ Petty, Kapitel 7+8.