

# Streuung

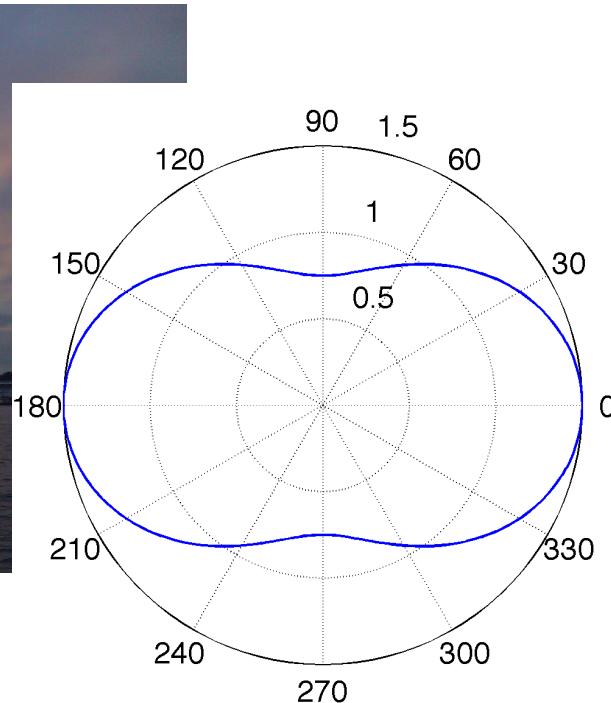
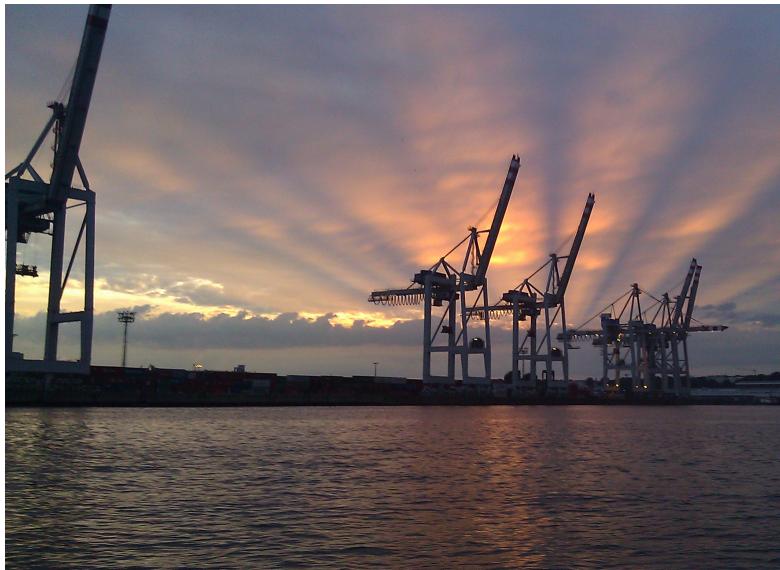
Optik, Strahlung, Fernerkundung

Sommersemester 2017

Stefan Bühler / Manfred Brath

Meteorologisches Institut

Universität Hamburg

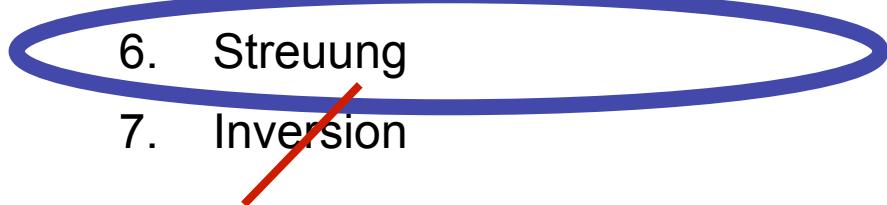


Quelle: Manfred Brath

# Übersicht – alle Kapitel

## Einleitung

1. Elektromagnetische Wellen
2. Grundgesetze der Optik
3. Natürliche Oberflächen
4. Thermische Strahlung
5. Strahlungstransfergleichung
6. Streuung
7. Inversion



# Übersicht

- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ Mie Parameter
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

# Übersicht

- ▶ **Beispiele für Streuung**
- ▶ Mie Parameter
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

# Beispiele für Streuung (1)

► Regenbogen



Photo: Manfred Brath

► Korona



Quelle: Wikipedia

## Beispiele für Streuung (2)

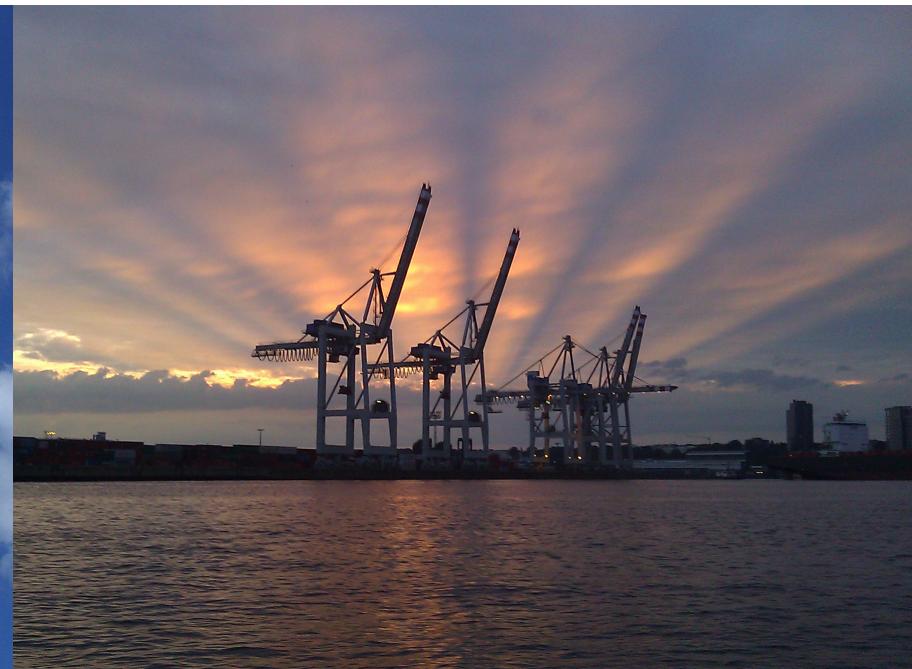
### ► Die Farben des Himmels

Blauer Himmel mit Wolken



Quelle: Wikipedia

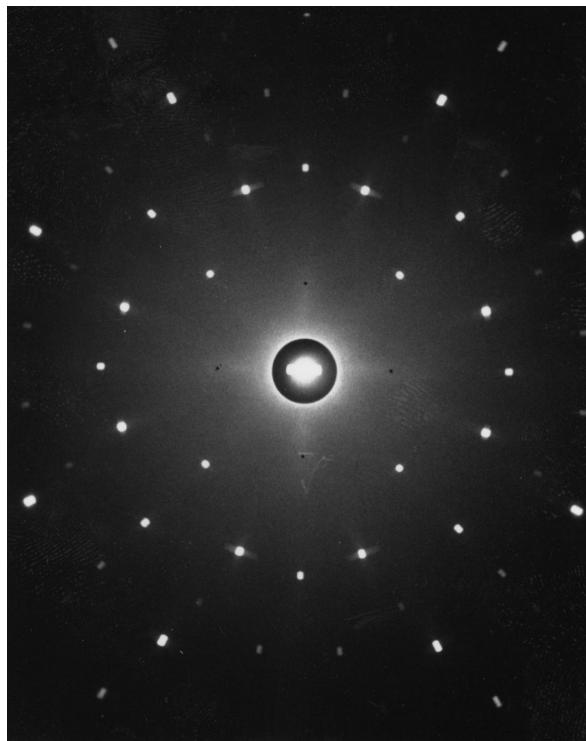
Sonnenuntergang



Quelle: Manfred Brath

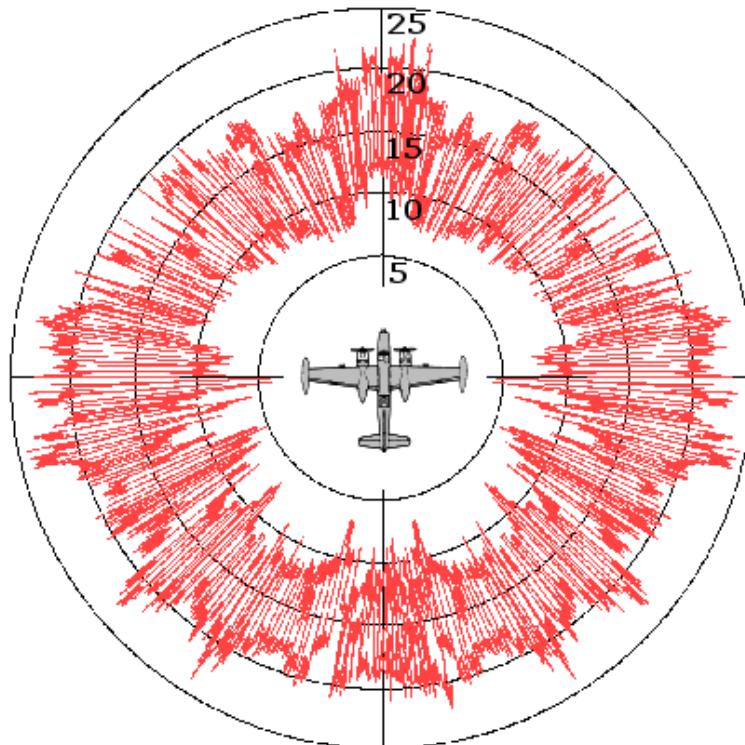
# Beispiele für Streuung (3)

Röntgenbeugung an einem  
Si-Kristall



Quelle: Institut f. Physik, Uni Halle

Radarsignatur eines Flugzeugs



Quelle: Wikipedia

# Allgemeine Eigenschaften

Streuung ist...

- ▶ Richtungsabhängig sowohl von der Beobachtungsposition wie von der Position der Strahlungsquelle relativ zum Streuobjekt
- ▶ Abhängig von der Wellenlänge/Frequenz
- ▶ Von der Größe des Streuobjekts abhängig
- ▶ Abhängig von der Form des Streuobjekts
- ▶ Abhängig vom Medium

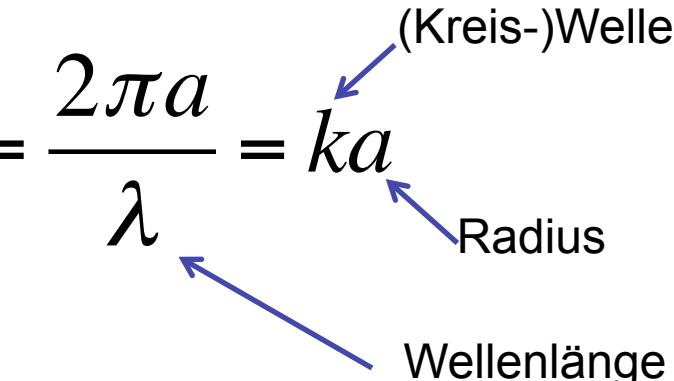
**Zur Beschreibung von Streuung benötigt man das Wellenbild von Strahlung, nicht das Teilchenbild.**

# Übersicht

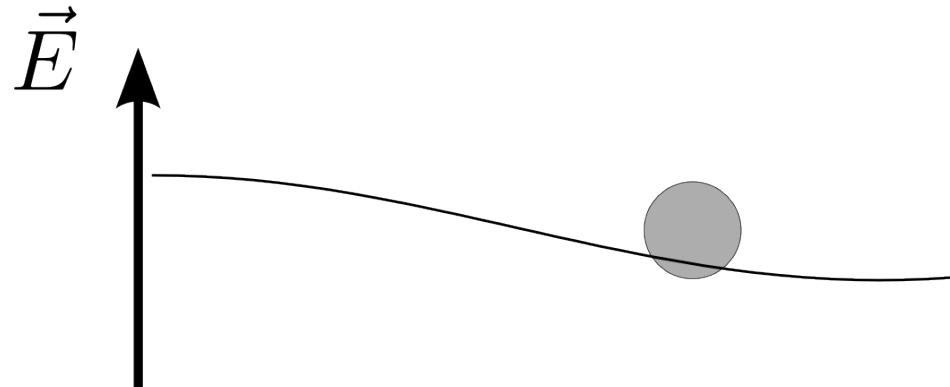
- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ **Mie Parameter**
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

# Mie Parameter (= Größenparameter)

- ▶ Entscheidend ist das Verhältnis von der Größe der Streuobjektes und der Wellenlänge.

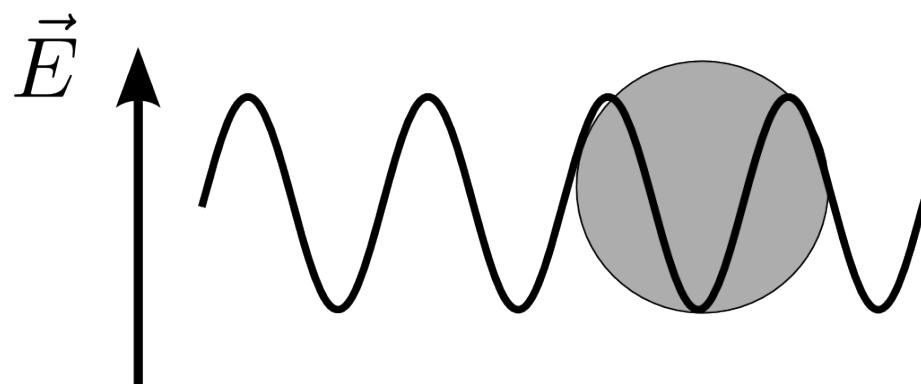
- ▶ Größenparameter (Mie Parameter)  $x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka$ 
- ▶ Bei unterschiedlicher Größe aber gleichem Mie Parameter gilt, solange die Brechungsindizes gleich sind, dass das Streuverhalten gleich ist.

# Grenzfälle



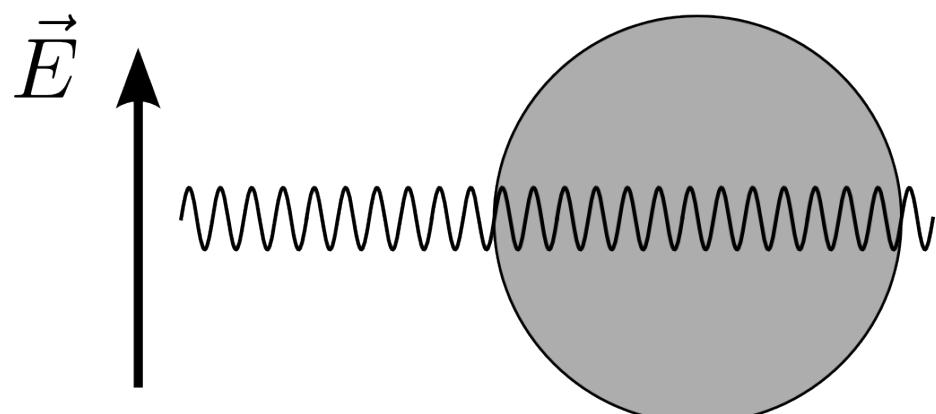
Rayleigh-Streuung:

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka < 0,2$$



Mie-Streuung:

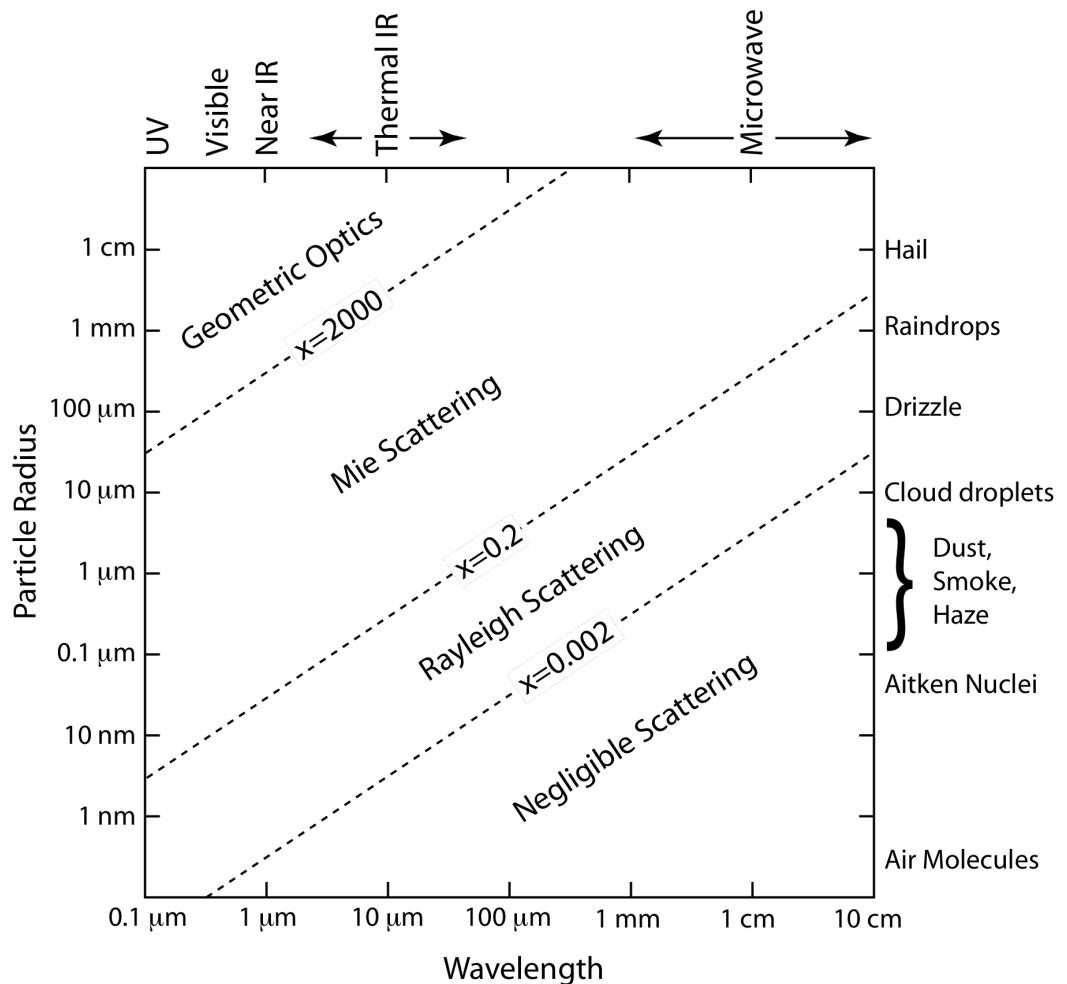
$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka > 0,2$$



Geometrische Optik:

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka > 2000$$

# Light scattering regimes



There are many regimes of particle scattering, depending on the particle size, the light wave-length, and the refractive index.

This plot considers only single scattering by spheres. Multiple scattering and scattering by non-spherical objects can get really complex!

Quelle: [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf)

# Übersicht

- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ Mie Parameter
- ▶ **Streuterme in der Strahlungstransfergleichung**
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

# Strahlungstransportgleichung (RTE)

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} PI \frac{d\Omega}{4\pi}$$

*Extinktion*      *therm. Emission*      *Streu-Emission*

**Extinktion:**  $\alpha + \sigma$  (Absorption+Streuung)

**Thermische Emission:** Nur  $\alpha$

**Streu-Emission:** Nur  $\sigma$

# Streuquerschnitt und Streueffizienz

$$\frac{dl}{ds} = -(\alpha + \sigma)l + \alpha B(T) + \sigma \int_{\Omega} P l \frac{d\Omega}{4\pi}$$

*Extinktion   therm. Emission   Streu-Emission*

- ▶ Streuung ist sowohl Senke als auch Quelle.
- ▶ Streukoeffizient  $\sigma$ : Wie stark ist die Streuung insgesamt.
- ▶ Phasenfunktion  $P$ : Räumliche Verteilung.
- ▶ Wie bei der Absorption, nehmen wir an, dass  $\sigma$  und  $P$  für ein Ensemble von Teilchen die Summe der einzelnen Komponenten ist (lineares Medium):

$$\begin{aligned}\sigma &= n C_{\text{sca}} \\ \left[ \frac{1}{m} &= \frac{1}{m^3} \frac{m^2}{1} \right]\end{aligned}$$

$C_{\text{sca}}$  ist der **Streuquerschnitt** eines einzelnen Teilchens,  $n$  die Teilchenzahldichte

- ▶ **Streueffizienz**  $Q_{\text{sca}}$ : Wie stark streut das Teilchen relativ zu seinem geometrischen Querschnitt?

$$Q_{\text{sca}} = \frac{C_{\text{sca}}}{\pi r^2}$$

# Streu-Regime

## Rayleigh

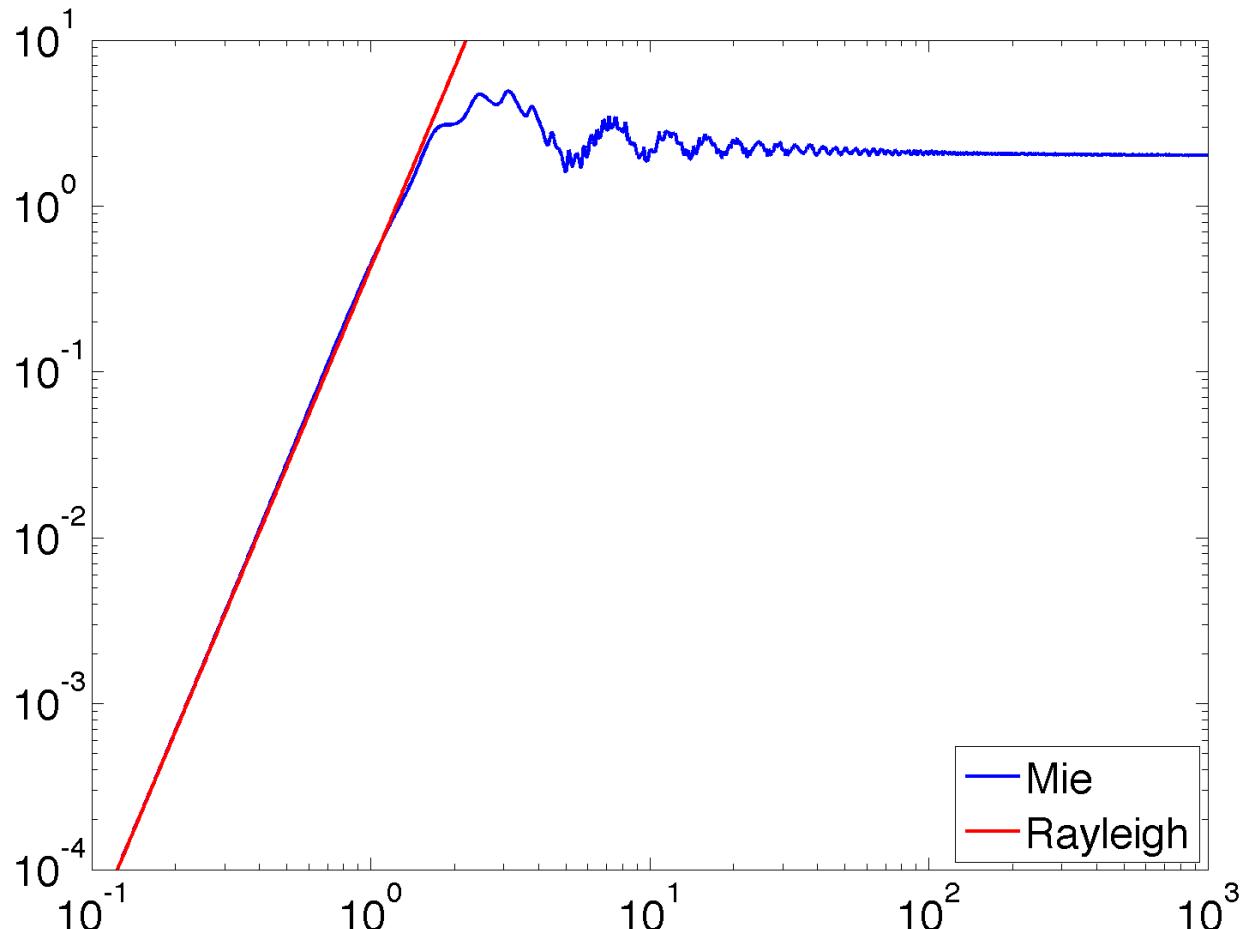
$$Q_{sca} \propto x^4$$
$$Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{\pi r^2}$$

## Mie

$Q_{sca}$  kompliziert

## Geometrische Optik

$Q_{sca} = 2$  (für Absorption=0)



$$x = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ Teilchenradius}}{\text{Wellenlänge}}$$

Streuung

# Geometrische Optik

- Welchen Wert für  $Q_{\text{sca}}$  im Grenzfall der geometrischen Optik hätten Sie intuitiv erwartet?

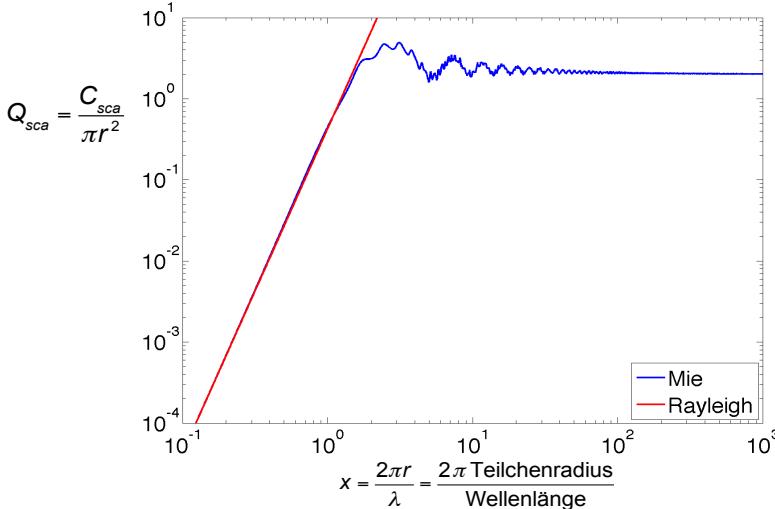


- Zumindest ich hätte  $Q_{\text{sca}} = 1$  erwartet, das heißt das das Teilchen so viel streut wie seiner geometrischen Querschnittsfläche entspricht.

- Warum in Wirklichkeit  $Q_{\text{sca}} = 2$ ?



- Konsequenz des Optischen Theorems. Es gibt immer Welleneffekte am Rand des geometrischen Schattens des Objekts (verursacht z.B. den Arago/Poisson Fleck bei kreisförmigem Hindernis).
- Mit Absorption:  $Q_{\text{ext}} = Q_{\text{sca}} + Q_{\text{abs}} \rightarrow 2$  für großes  $x$ .



## Born&Wolf 1999 dazu

“Thus the extinction cross-section of a large opaque obstacle is equal to twice its geometrical cross-section  $D$ . This result appears somewhat paradoxical at first sight, as one might have expected that with a large obstacle the geometrical optics approximation would apply, and in this approximation the extinction cross-section is equal to  $D$ . The explanation of this apparent contradiction is that no matter how large the obstacle may be and no matter how far away from it the field is considered, there is always a narrow region – the neighborhood of the edge of the geometrical shadow – where the geometrical optics approximation does not hold. In addition to the light intercepted by the obstacle (lost by reflection and absorption), with cross-section  $D$ , there is an additional contribution to the extinction, arising from the neighborhood of the edge of the shadow and this contribution is evidently also equal to  $D$ .”

Born and Wolf, Principles of Optics, 7<sup>th</sup> edition

# Phasenfunktion $P$

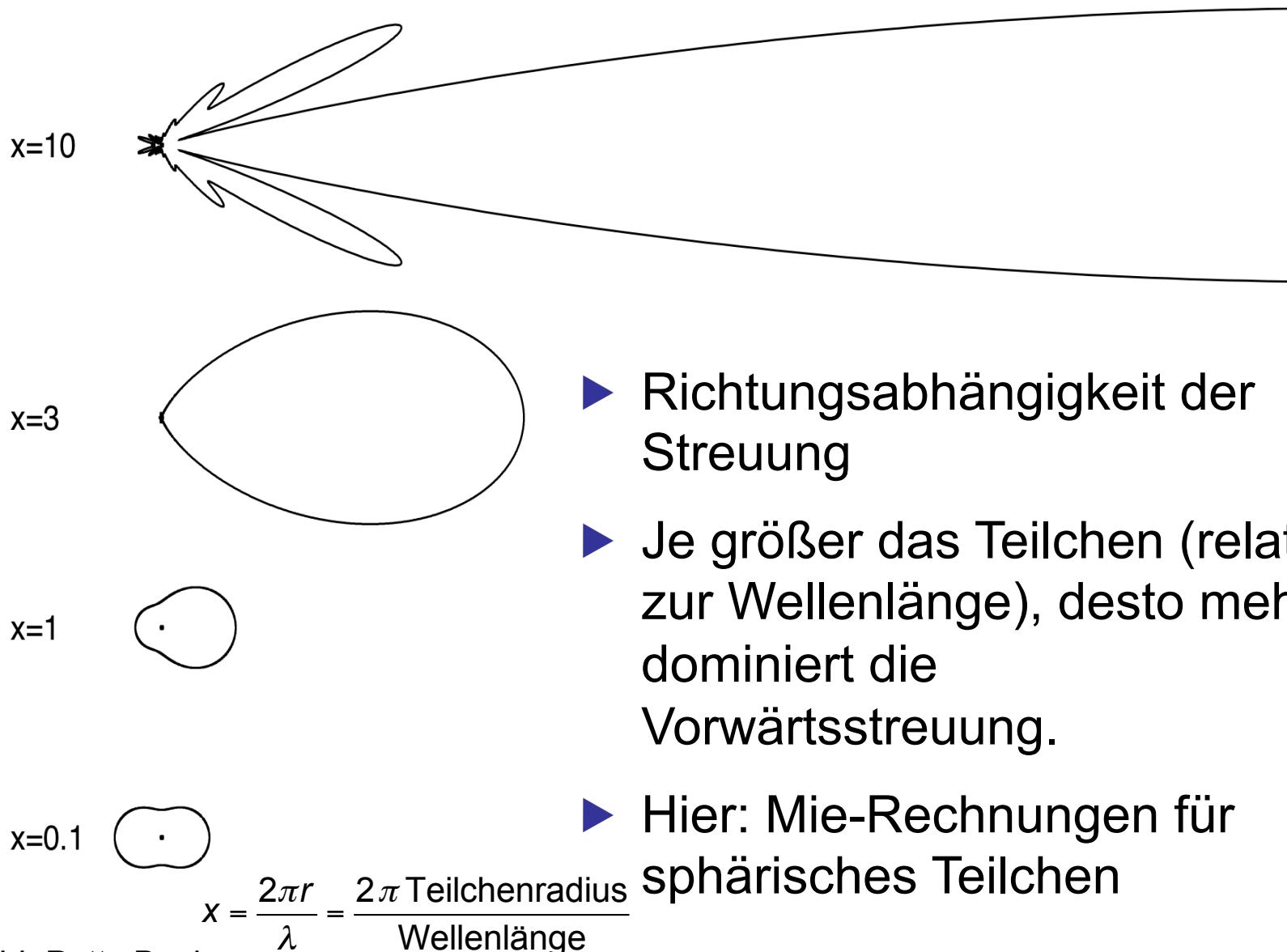


Bild: Petty Buch.

Stefan Bühler / Manfred Brath

Streuung

19

# Übersicht

- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ Mie Parameter
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ **Streueigenschaften**
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

# Streueigenschaften

Streueigenschaften

= optische Eigenschaften

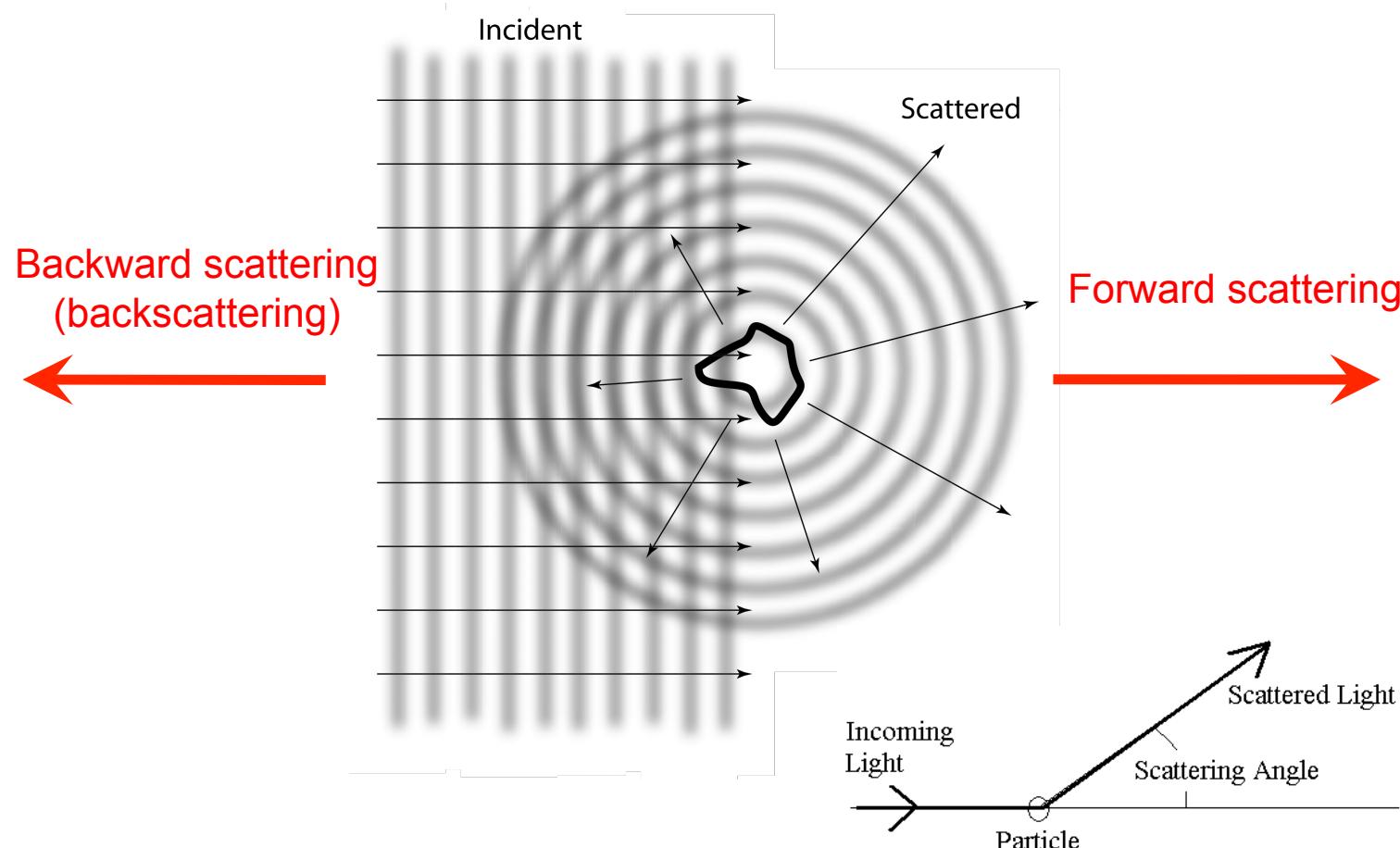
= optical properties

= **single scattering properties**

Werden für einzelne Teilchen berechnet. (Aber später braucht man dann Ensemble-Mittelwerte.)

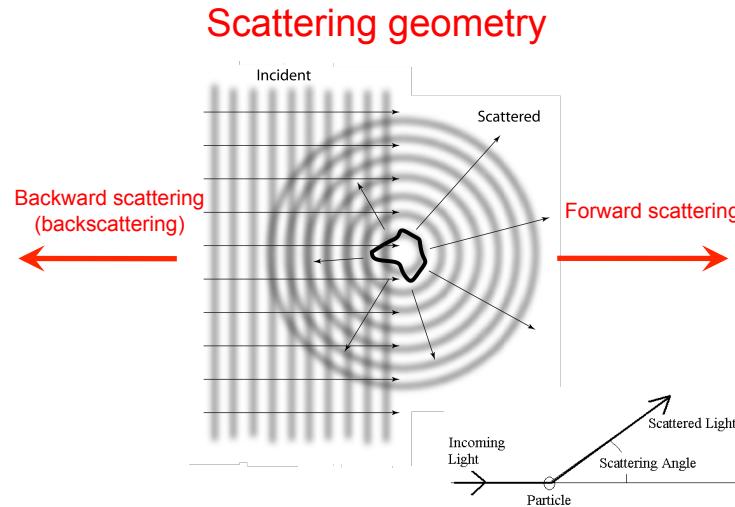
# Ansatz für die „Single Scattering Properties“

## Scattering geometry



Quelle: [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf)

# Ansatz für die „Single Scattering Properties“



Quelle (Bild): [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf)

- ▶ Elektromagnetische Streuung ist die Veränderung der Ausbreitungsrichtung der EM-Welle bzw. die Veränderung des EM-Wellenfeldes bei der Wechselwirkung mit einem lokalen Objekt.
- ▶ Vereinfacht: Ebene Welle rein, Kugelwelle raus!  
(huygensches Prinzip)

# Notwendige Bedingung

- ▶ Damit EM-Wellen vom Objekt gestreut werden, muss sich das Objekt vom Hintergrundmedium in seinen EM-Eigenschaften unterscheiden.
- ▶ D. h., die Brechungsindizes müssen sich unterscheiden.

# Notwendige Bedingung

- ▶ Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Relative magnetische  
Permeabilität

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Relative elektrische  
Permittivität

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

- ▶ Für die meisten Medien gilt  $\mu_r = 1$ , so dass sich die Permeabilität von Streuobjekt und Hintergrund nicht unterscheidet.
- ▶ Das Streuobjekt unterscheidet sich daher in der Regel in seiner Permittivität vom Hintergrundmedium.

# Elastische und inelastische Streuung

- ▶ Zwei Fälle sind zu unterscheiden:
  - ▶ Unelastische Streuung, wenn sich durch die Streuung die Frequenz der gestreuten Welle ändert, z. B. Fluoreszenz, Raman-Streuung.
  - ▶ Elastische Streuung, (nahezu) keine Veränderung der Frequenz. Abgesehen von wenigen Spezialanwendungen (Raman-Lidar) der “Standardfall” der Fernerkundung.

# Form der Streu-Objekte

- ▶ Streu-Objekte können komplexe Formen haben (Beispiel rechts: Eiskristalle)
- ▶ Trotzdem wird die Einfachheit halber oft angenommen, dass die Streu-Objekte homogene Kugeln sind.
- ▶ Auch wir betrachten für den Rest der Vorlesung nur homogene Kugeln.
- ▶ Warum könnte das trotzdem eine sinnvolle Näherung sein?
  - ?
  - ▶ Mittelung über viele verschiedene Formen und Orientierungen verschmiert die Eigenschaften der einzelnen Objekte
  - ▶ Aber, es gibt trotzdem fundamentale Aspekte die die Kugeln nicht einfangen. Einfaches Beispiel: Halo



Quelle:  
<http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/class/snowtypes4.jpg>

# Übersicht

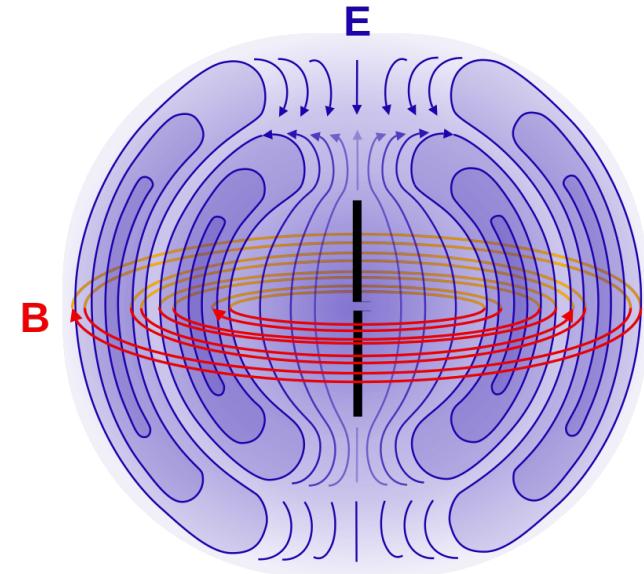
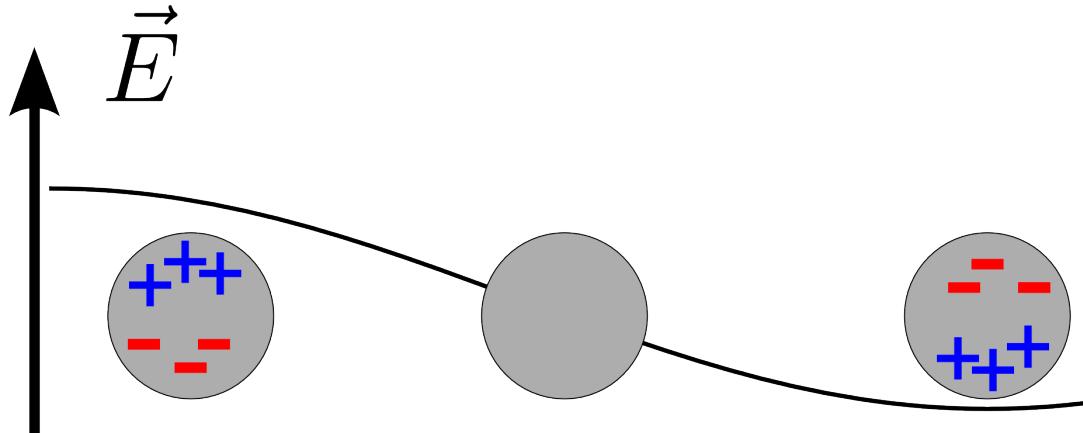
- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ Mie Parameter
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ **Rayleigh-Streuung**
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ Zusammenfassung

# Rayleigh-Streuung

Typische Phänomene mit Rayleigh-Streuung:

- ▶ Wetterradar, Radarrückstreuung von Regen
- ▶ Blauer Himmel, Streuung von sichtbaren Licht an den Luftmolekülen

# Dipol-Näherung



- ▶ Größenparameter  $x = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka < 0,2$
- ▶ Teilchen klein relativ zur Wellenlänge  
→ überall im Teilchen herrscht das gleiche EM Feld
- ▶ Dipolmoment  $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$  (allgemein)  
 $\vec{p} = \alpha \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$  (hier)

Quellen: (links) Manfred Brath; (rechts) Wikipedia

# Rayleigh Scattering Ideen

1. Elektrisches (E) Feld der einfallenden Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
2. Induziertes Dipolmoment hat gleiche Richtung wie E-Feld der einfallenden Welle
3. Das E-Feld der gestreuten Welle liegt in der Ebene, die von Ausbreitungsrichtung und Dipolmoment aufgespannt wird
4. Stärke des gestreuten E-Feld ist proportional zur Projektion des Dipolmoments (Das Feld ist Null, wenn man den Dipol vom Ende her betrachtet)
5. Amplitude des gestreuten Feldes ist proportional zur Beschleunigung der Ladung, und damit zur Frequenz im Quadrat

Quelle: Petty, Kap 12

# Frequenzabhängigkeit der Rayleigh-Streuung

$$p = \alpha E_0 \exp(i\omega t)$$

$$\vec{E}_{\text{scattered}} \propto \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \propto \omega^2 E_0$$

$$\vec{I}_{\text{scattered}} \propto (\vec{E}_{\text{scattered}})^2$$

Dipolmoment proportional zum einfallenden Feld

Abstrahlte Amplitude proportional zur Beschleunigung der Ladung

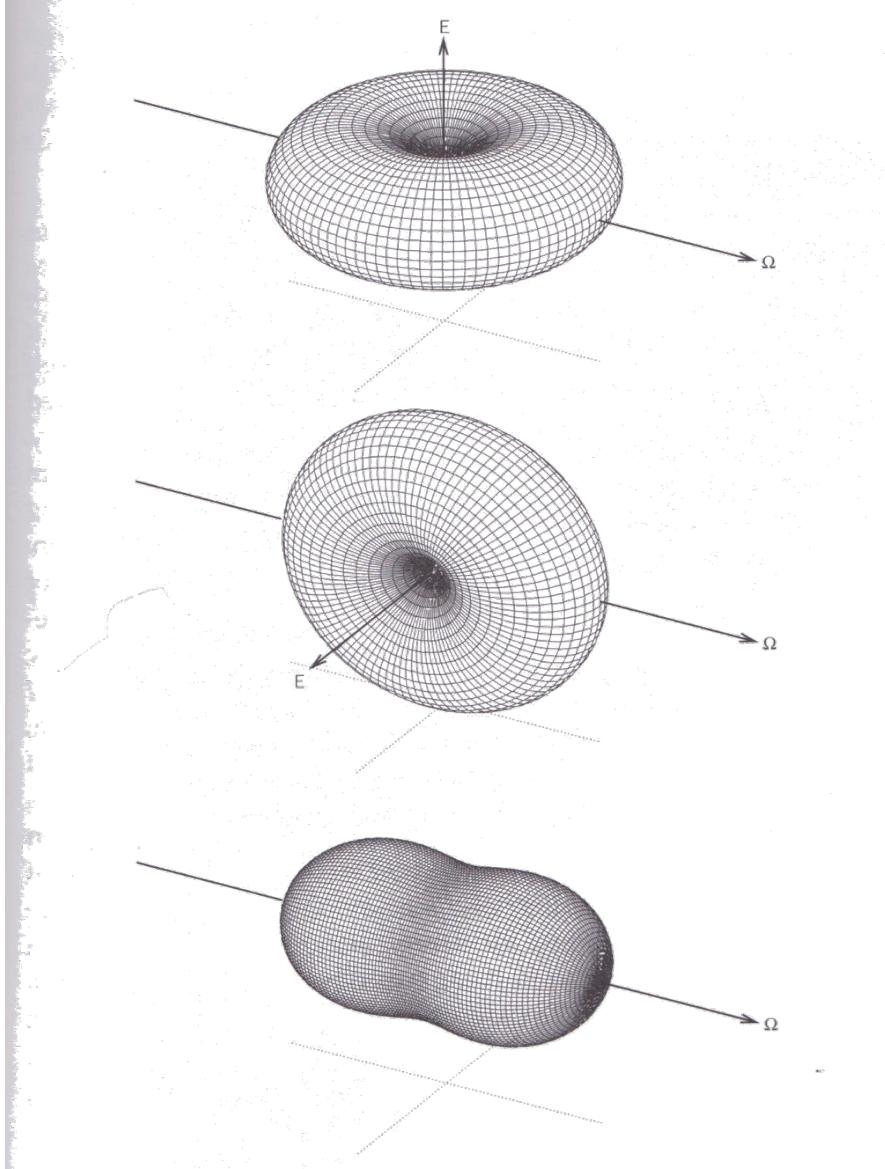
Intensität ist Quadrat der Amplitude

$p$  : Dipolmoment

$\vec{E}_{\text{scattered}}$  : Amplitude des gestreuten Feldes

$\vec{I}_{\text{scattered}}$  : Intensität des gestreuten Feldes

**Konsequenz: Gestreute Intensität geht mit Frequenz hoch vier.**



## 3D Ansicht

Vertikale Polarisierung

Horizontale Polarisierung

Gesamtintensität

Quelle: Petty

**Fig. 12.3:** Three-dimensional rendering of the Rayleigh phase function. The vector  $\Omega$  indicates the direction of the incident radiation. The vector  $E$  indicates the orientation of the electric field vector in the incident wave. Top: Incident radiation is vertically polarized. Middle: Incident radiation is horizontally polarized. Bottom: Incident radiation is unpolarized.

# Rayleigh Phasenfunktion

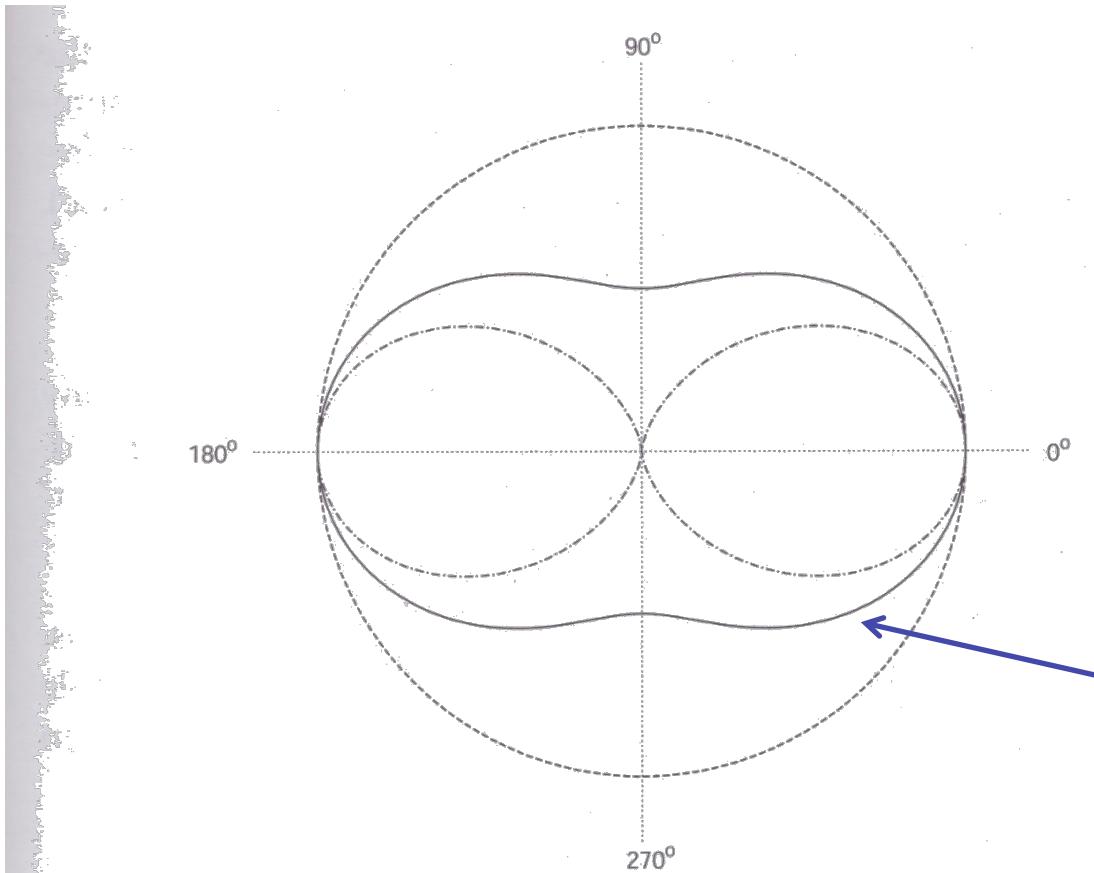


Fig. 12.2: Polar plot of the phase function for scattering by small particles (Rayleigh scattering). The outermost curve (dashed) represents the scattered intensity for directions  $\hat{\Omega}'$  lying in a plane *perpendicular* to the electric field vector of the incident wave. The innermost curve (dot-dashed) corresponds to directions lying in a plane *parallel* to the electric field vector. The solid curve represents the scattered intensity for unpolarized incident radiation, as given by (12.10).

Phasenfunktion für  
Gesamtintensität:

$$P = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta)$$

Quelle: Petty

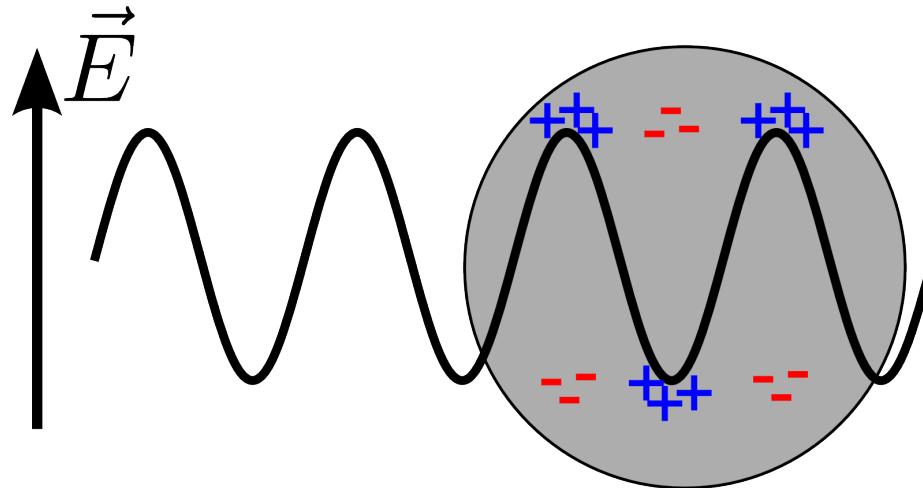
# Rayleigh-Streuung: Zusammenfassung

- ▶ Gültig für  $x = \frac{2\pi a}{\lambda} < 0,2$
- ▶ Streukoeffizient:  $\sigma \sim \lambda^{-4} a^6$   
 $\sigma \sim k^4 a^6$
- ▶ Absorptionskoeffizient:  $\alpha_s \sim \lambda^{-1} a^3$   
 $\alpha_s \sim ka^3$
- ▶ Phasenfunktion:  $P \sim (1 + \cos^2 \Theta)$

# Übersicht

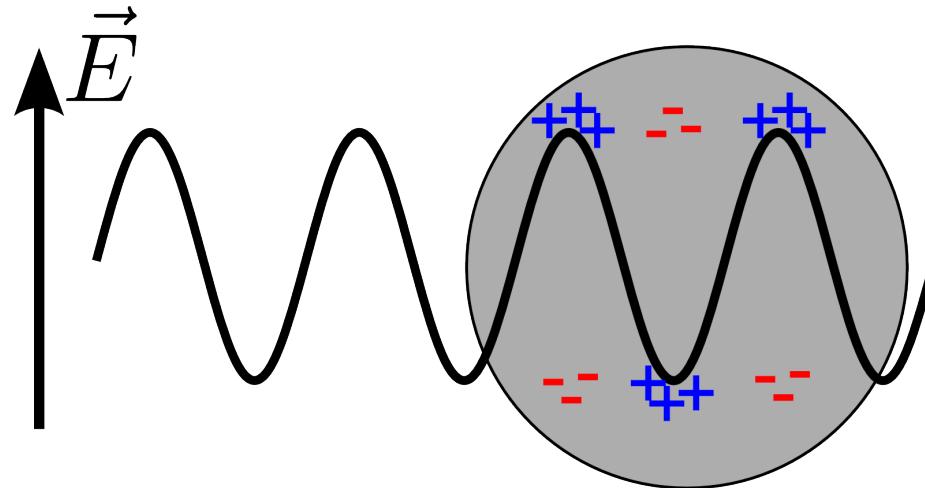
- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ Mie Parameter
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ **Mie-Streuung**
- ▶ Zusammenfassung

# Mie-Streuung



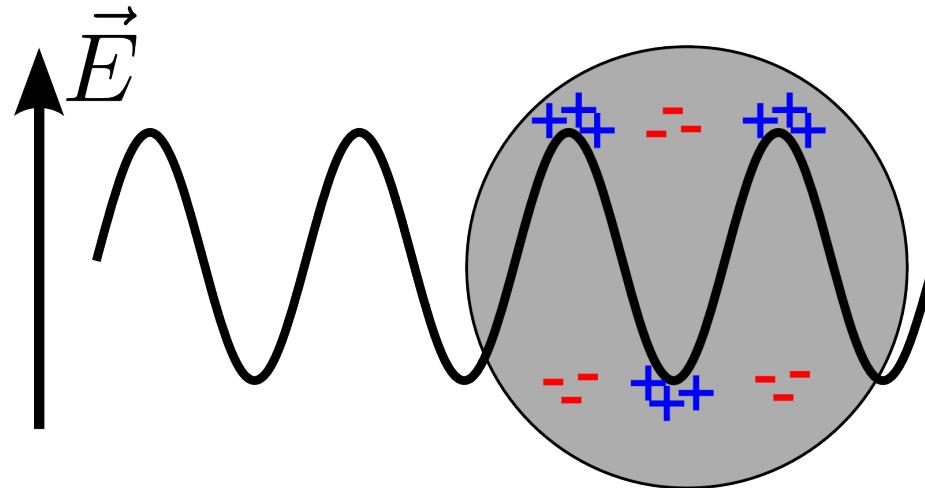
- ▶ Größenparameter:  $x = \frac{2\pi a}{\lambda} > 0,2$
- ▶ Die Anregung ist nicht mehr gleichphasig.
  - ▶ Interferenzen, Resonanzen

# Mie-Streuung-Lösung



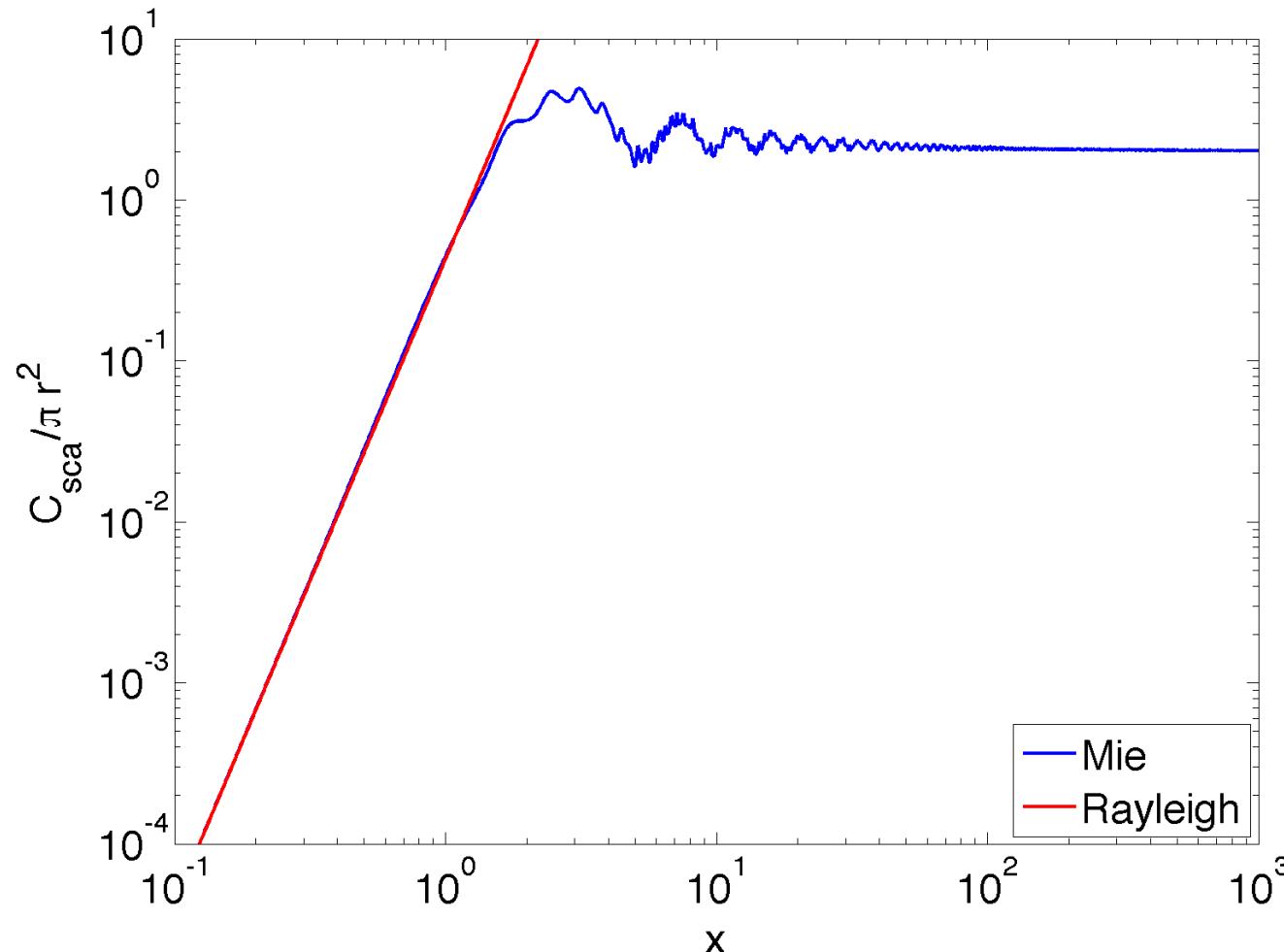
- ▶ Entwicklung nach vektoriellen Kugelflächenfunktionen unter Berücksichtigung des Grenzflächenverhaltens
- ▶ Z. B. Tangentialkomponente des E-Feld ist stetig und Normalkomponente des B-Feld ist stetig.

# Mie-Streuung-Lösung



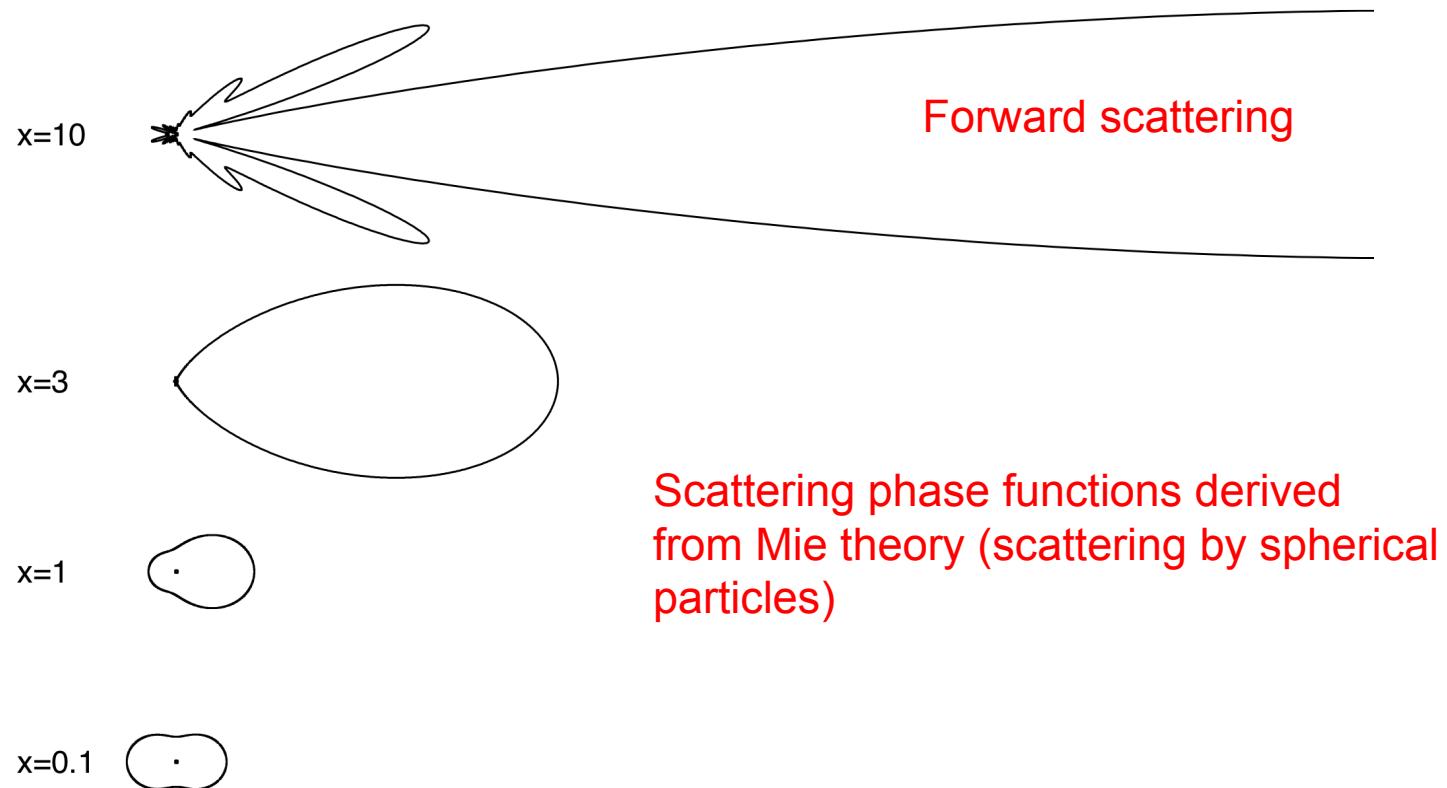
- ▶ Für Details siehe
  - ▶ Tsang et al., Scattering of Electromagnetic Waves, Theories and Applications, Wiley, 2000
  - ▶ Stratton, J. A., Electromagnetic Theory, McGraw Hill, 1941
  - ▶ ...oder die RT-Klassiker

# Mie-Streuung: Streuquerschnitt/-koeffizient



- ▶ Grenzfall Rayleigh-Streuung:  $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim x^4$
- ▶ Grenzfall geometrische Optik:  $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim 2$

# Mie-Streuung: Scattering phase functions

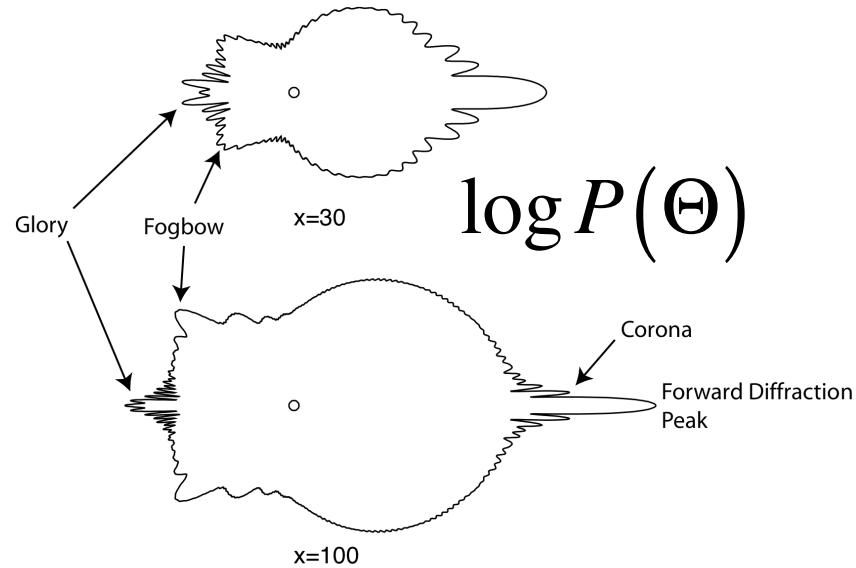


The scattering phase function, or phase function, gives the angular distribution of light intensity scattered by a particle at a given wavelength

Quelle: [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf) bzw.  
Petty, G. W., 2006

# Mie-Streuung:

## Optical phenomena



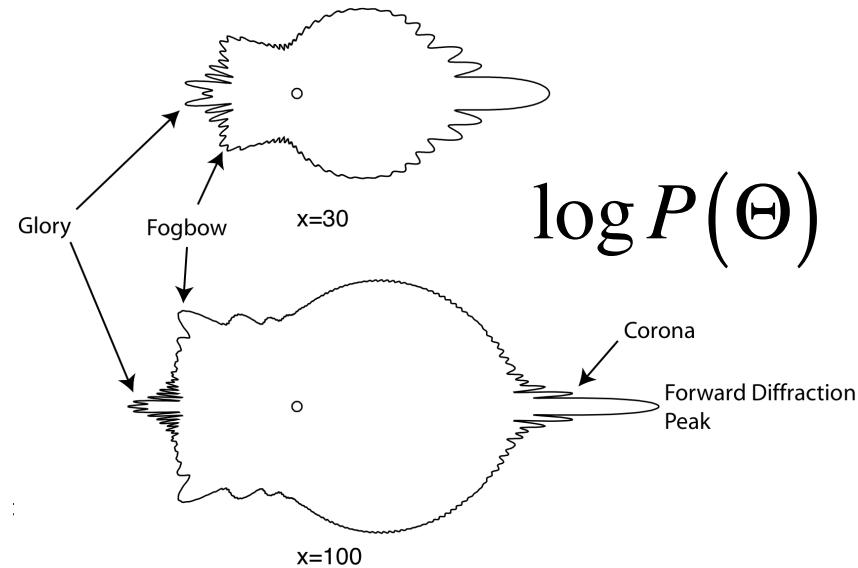
- **Fogbow**: spikes in scattering phase function present but not sharp as for rainbows. Hence the separation of colors (due to varying refractive index) is not as vivid as a normal rainbow. A whitish ring centered on one's shadow (i.e. opposite the sun) is seen.
- Arises when water droplets have a size characteristic of fog and clouds rather than rain



Quelle: [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf) bzw.  
Petty, G. W., 2006

# Mie-Streuung:

## Optical phenomena



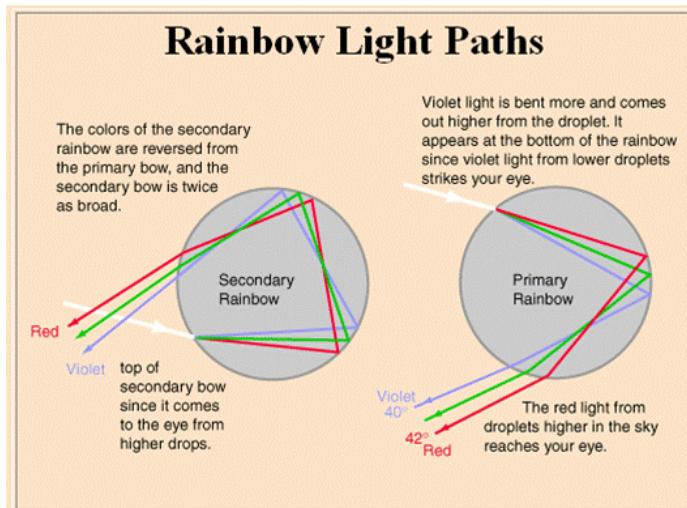
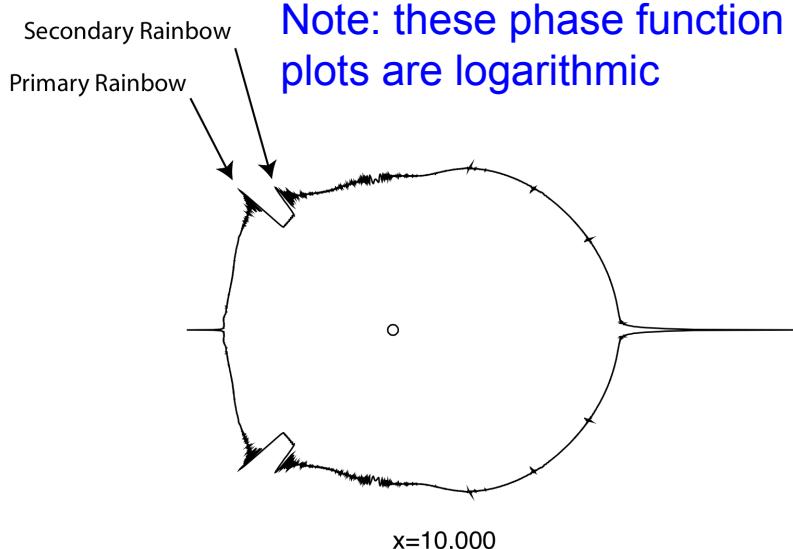
## ► Korona



Quelle: Wikipedia

Quelle: [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf) bzw.  
Petty, G. W., 2006

# Mie-Streuung: Optical phenomena



- **Rainbow:** for large particles ( $x = 10,000$ ), the forward and backward peaks in the scattering phase function become very narrow (almost non-existent). Light paths are best predicted using geometric optics and ray tracing
- **Primary rainbow:** single internal reflection
- **Secondary rainbow:** double internal reflection

Quelle: [http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering\\_lecture\\_slides.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~scarn/teaching/GE4250/scattering_lecture_slides.pdf) bzw.  
Petty, G. W., 2006  
Stefan Bühler / Manfred Brath

# Mie-Streuung: Zusammenfassung

- ▶ (Exakt) Gültig für alle  $x$
- ▶ Streukoeffizient
  - ▶ Grenzfall Rayleigh-Streuung:  $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim x^4$
  - ▶ Grenzfall geomtrische Optik:  $\sigma / \pi a^2 = n_0 C_{sca} / \pi a^2 \sim 2$
- ▶ Phasenfunktion:
  - $x \rightarrow \infty$ : Vorwärtsstreuung nimmt zu  
Phasenfunktion wird asymmetrischer und geht über in geometrische Optik

# Übersicht

- ▶ Beispiele für Streuung
- ▶ Mie Parameter
- ▶ Streuterme in der Strahlungstransfergleichung
- ▶ Streueigenschaften
  - ▶ Rayleigh-Streuung
  - ▶ Mie-Streuung
- ▶ **Zusammenfassung**

# Zusammenfassung

- ▶ Streuung spielt für den Strahlungstransport in der Atmosphäre eine wichtige Rolle
  - ▶ Kompliziert: Mie-Regime; Nichtsphärische Teilchen, Polarisation
  - ▶ Einfach: Rayleigh-Regime
- 
- ▶ Nicht behandelt: Wie löst man die Strahlungstransfergleichung mit Streuung? (Viele verschiedene numerische Methoden)

## Leseempfehlung

- ▶ Petty, Kapitel 12.