Die Strahlungstransfergleichung

Optik, Strahlung, Fernerkundung

Sommersemester 2019

Stefan Bühler

Meteorologisches Institut

Universität Hamburg

$$\frac{dI}{ds} = -(\alpha + \sigma)I \;+\; \alpha B(T) \;+\; \sigma \int_{\Omega} PI \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Übersicht – alle Kapitel

Quellen

- Petty (A first Course in Atmospheric Radiation)
- Rees (Physical Principles of Remote Sensing)
- Goody und Yung (Atmospheric Radiation)
- ARTS User Guide (http://www.sat.ltu.se/arts/misc/arts-doc/uguide/arts_user.pdf)
- Der Klassiker:
  S. Chandrasekhar Radiative Transfer Dover Publications Inc., 1960. Frei erhältlich unter:
  https://archive.org/details/RadiativeTransfer

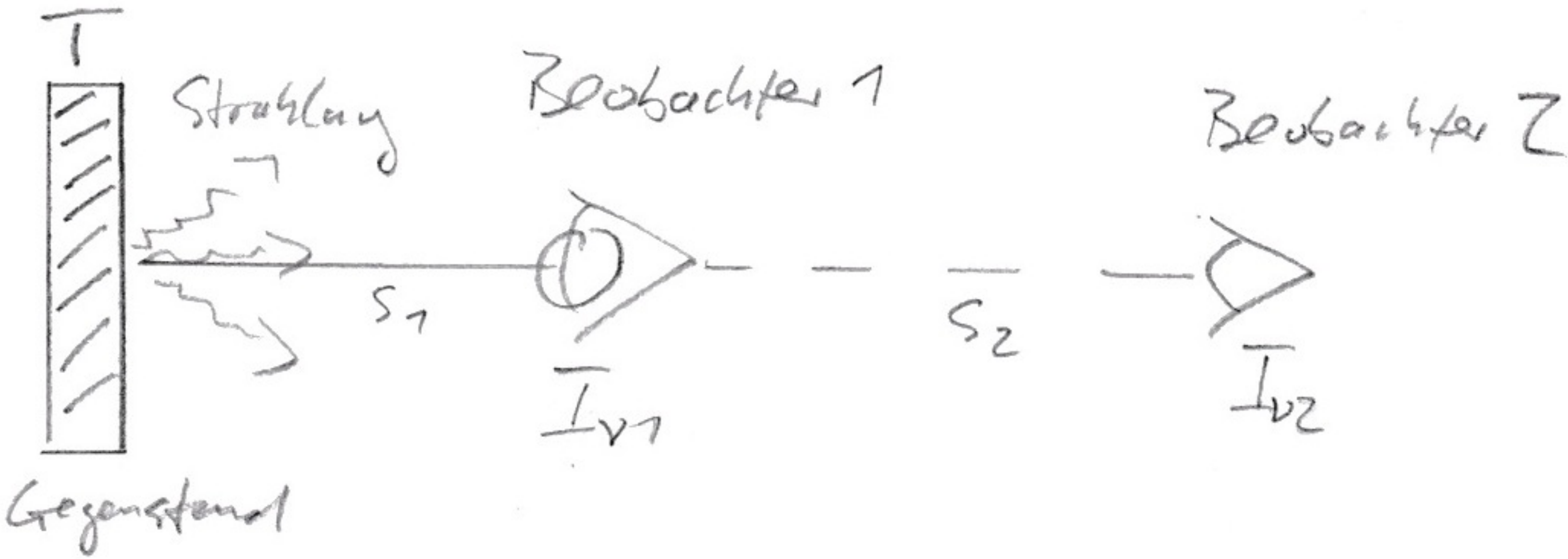
Übersicht

- Intensität und Abstand
- Extinktion
- Emission
- Die Strahlungstransfergleichung
- Analytische Lösung ohne Streuung
- Homogene Schicht ohne Streuung
- Zusammenfassung

Übersicht

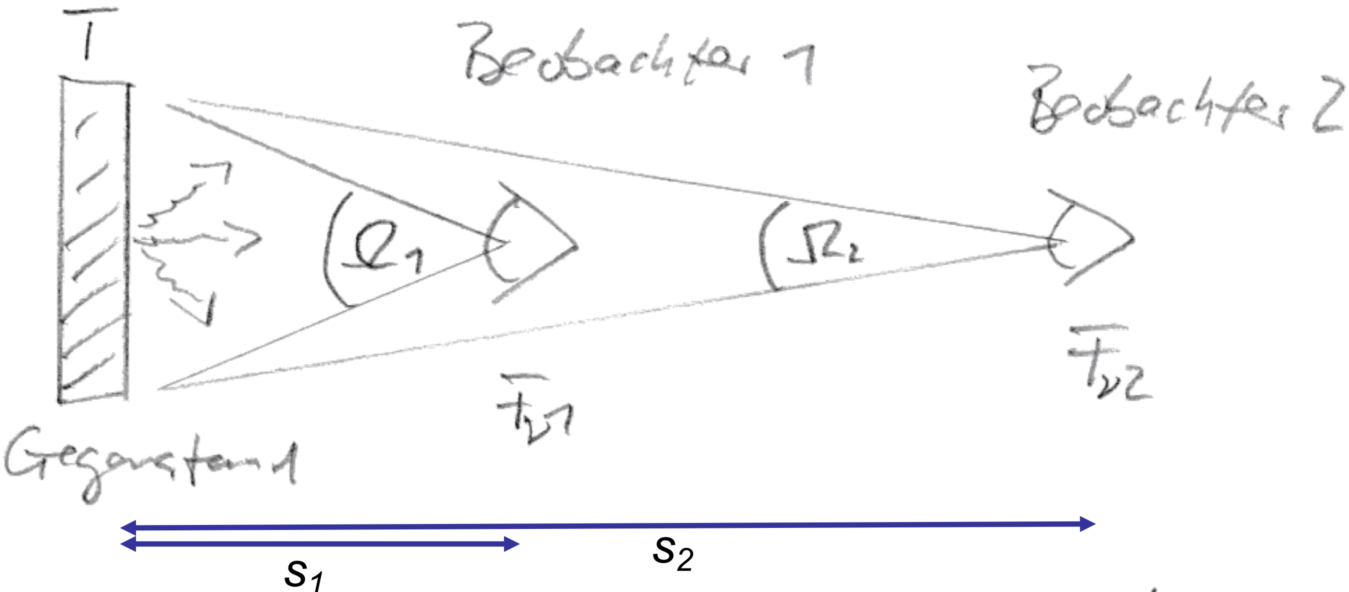
- **Intensität und Abstand**
- Extinktion
- Emission
- Die Strahlungstransfergleichung
- Analytische Lösung ohne Streuung
- Homogene Schicht ohne Streuung
- Zusammenfassung

Ein Gedankenexperiment



- Welche Intensität (= spektrale Radianz) ist größer, $I_{\nu 1}$ oder $I_{\nu 2}$?
($[I_\nu] = [\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\ \mathrm{sr}\ \mathrm{Hz})]$)
- ? Trickfrage! Die beiden Intensitäten sind gleich.
- Argumente:
  - Sonst würde Helligkeitstemperatur als Einheit keinen Sinn machen (da kommt ja kein Abstand vor).
  - Betrachte den (monochromatischen) Energiefluss...

Spektraler Strahlungsfluss (Spektrale Irradianz)



- Vom Beobachter her denken, dort ist der Energiefluss definiert.
- Energiefluss nimmt mit dem Abstand ab, wie erwartet.
- Aber Intensität ist so konstruiert, dass sie entlang des Weges erhalten bleibt.

$$F_\nu(\text{Objekt}) = \int_{\Omega_\text{Objekt}} I_\nu(\text{Objekt}) \cos\vartheta \, d\Omega$$

$$\Omega_\text{Objekt} = \frac{\text{Fläche des Objekts}}{\text{Fläche Kugel mit Radius } s}$$

$$= \frac{A_\text{Objekt}}{4\pi s^2}$$

$$\Rightarrow F_\nu(\text{Objekt}) \sim \frac{1}{s^2}$$

Noch ein Beispiel

- Isotrope Strahlungsquelle (strahlt gleichmäßig nach allen Seiten)
- Betrachte Kugelflächen bei verschiedenem Radius *r*.
- Gesamtenergiefluss bleibt immer gleich, aber die Größe der Fläche wächst mit r^2
- Energieflussdichte (Irradianz) nimmt ab mit $1/r^2$
- Irradianz ist Radianz integriert über einen Raumwinkel
- Raumwinkel der Strahlungsquelle, vom Beobachter her gesehen, nimmt ab mit $1/r^2$
- Irradianz ~1/r2, Raumwinkel ~1/r2

➔ Radianz=Irradianz/Raumwinkel bleibt konstant

➔ Intensität (Radianz pro Frequenzintervall) bleibt ebenfalls mit dem Abstand konstant

Notation

Ich lasse das Subscript von jetzt an weg, also:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_\nu$$

bezeichnet die Intensität (monochromatische Radianz) in $W/(m^2\ sr\ Hz)$

Sterne

- Was ist mit Sternen, weiter entfernte Sterne leuchten doch schwächer als nahe?

?

  - Sterne sind so weit weg, dass ich das I überhaupt nicht messen kann, nur das F über einen endlichen Raumwinkel um den Stern herum. (Sie bleiben immer punktförmig, egal wie groß ich das Bild vergrößere.)
  - Mathematisch: I ist eine Delta-Funktion in ϑ und ϕ.

Intensität im Medium

- Im Vakuum läuft die Intensität also unverändert immer weiter. (Man spricht auch von einem „Pencil Beam", ungefähr = ein Lichtstrahl.)
- Was passiert in einem Medium, z.B. in der Atmosphäre?

?

$$\frac{dI}{ds} = -\text{Extinktion} + \text{Emission}$$

- Die Strahlung kann durchs Medium abgeschwächt oder verstärkt werden.

Übersicht

- Intensität und Abstand
- **Extinktion**
- Emission
- Die Strahlungstransfergleichung
- Analytische Lösung ohne Streuung
- Homogene Schicht ohne Streuung
- Zusammenfassung

Das Gesetz von Lambert (in differentieller Form)

$$\frac{dI}{ds}(\text{ext}) = -k\,I$$

I: Intensität der Strahlung [W/(m^2 sr Hz)]

s: Weg [m]

k: Extinktionskoeffizient [1/m]

- Extinktion ist proportional zur Intensität! (Pro Meter Weg wird ein bestimmter Prozentsatz der Strahlung verschluckt)

- Wodurch passiert Extinktion?

Milch + Tinte...

Wodurch passiert Extinktion

Absorption

Streuung

3 Ursachen von Extinktion, die verschiedenen physikalischen Prozessen entsprechen:

- Absorption: Energie des Photons wird in thermische Energie umgewandelt
- Elastische Streuung: Photon wird in eine andere Richtung gestreut (fehlt also in der betrachteten Ausbreitungsrichtung *ds*)
- Inelastische Streuung: Beides gleichzeitig passiert dem gleichen Photon. (Selten, passiert nur 1 in 1e7 Photonen. Kann bei passiver Fernerkundung vernachlässigt werden, aber wichtig bei Raman-Lidar)

Rolle der Wellenlänge für die Streuung

- Je kleiner die Frequenz (je größer die Wellenlänge), desto größer müssen streuende Objekte sein, um eine Rolle zu spielen.

Table 3.1: Scattering objects and spectral regions. UV = ultraviolet, Vis = visible, IR = infrared, sub-mm = sub-millimeter.

Scattering objects	Important for
air molecules [nm]	UV/Vis (blue sky color)
aerosol particles [μm]	UV/Vis (hazy white sky)
cloud droplets and ice crystals [<1 mm]	IR, sub-mm
rain, snow [>1 mm]	microwaves

Quelle: Mein eigenes altes Skript.

Lineares Medium

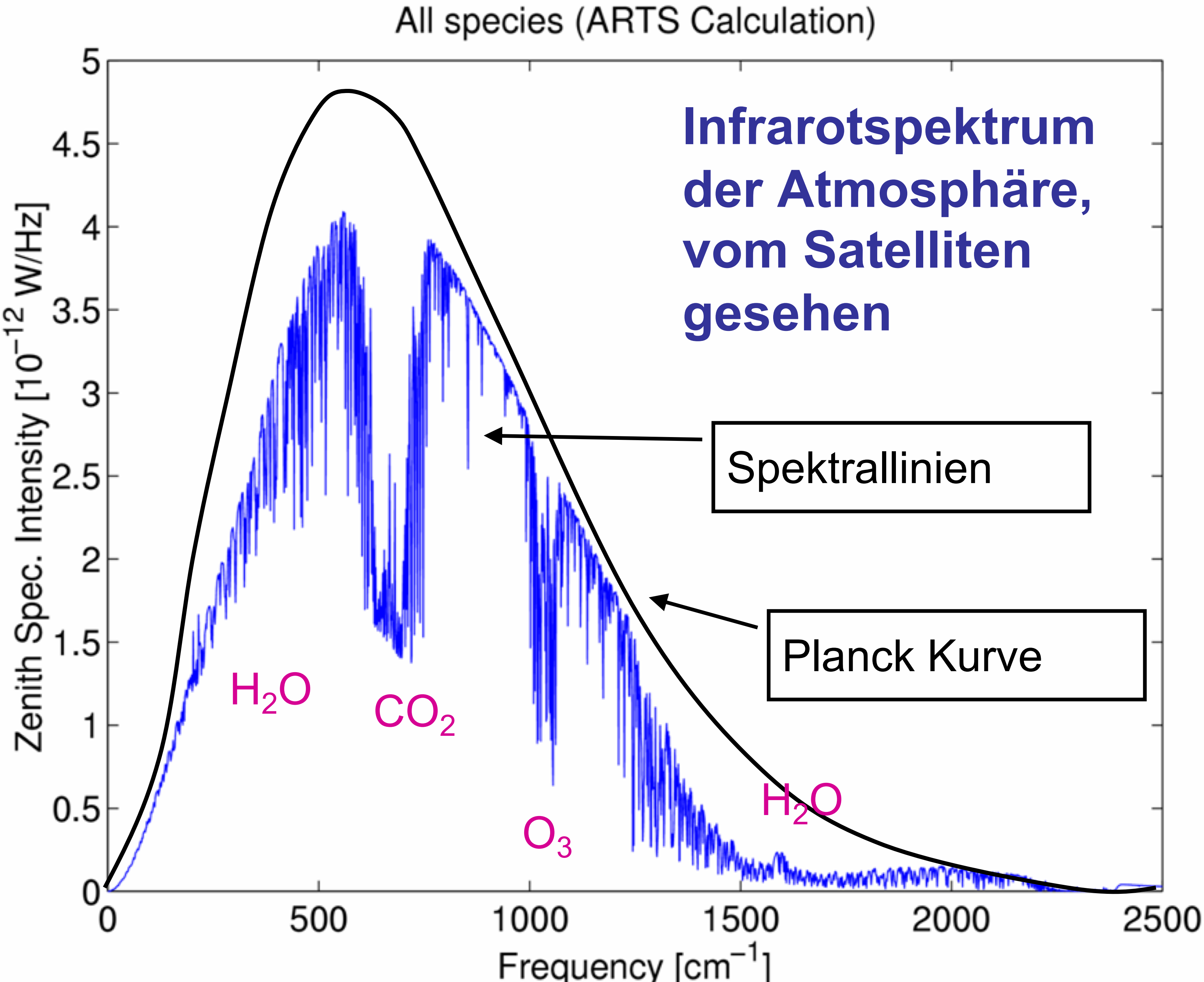
- Ebenfalls Gesetz von Lambert: Extinktion ist proportional zur Menge des Absorbers, und alle verschiedenen Prozesse addieren sich:

$$\begin{aligned} k &= \alpha(\nu) + \sigma(\nu) \\ &= \sum_i n_i \tilde{\alpha}(\nu) + \sum_j n_j \tilde{\sigma}(\nu) \end{aligned}$$

k:	extinction coefficient
α:	absorption coefficient
σ:	scattering coefficient
i:	index of absorbing gas species, e.g., H_2O, O_3
n_i:	number density of gas molecules
$\tilde{\alpha}$:	absorption cross-section $[m^2]$
j:	index of scattering species, e.g., cloud droplets
$\tilde{\sigma}$:	scattering cross-section $[m^2]$

Absorptions- und Streuquerschnitte

- Die Absorptions- und Streuquerschnitte sind keine trivialen Größen, sondern es gibt ganze Wissenschaftszweige, die sich mit ihnen beschäftigen. Welche?
  - Absorption: Spektroskopie (+Quantenmechanik)
  - Streuung: Streutheorie
- Diese Größen hängen auf sehr charakteristische Weise vom Medium ab, darauf beruht der größte Teil der Fernerkundung



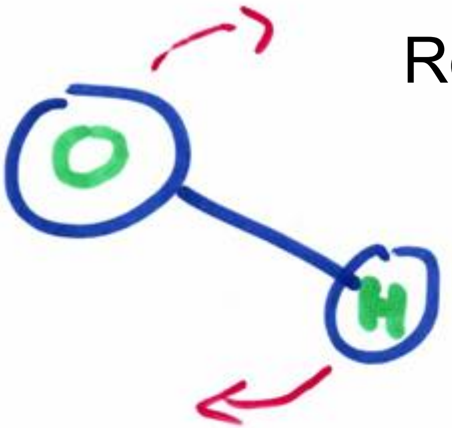
All species (ARTS Calculation)
Infrarotspektrum der Atmosphäre, vom Satelliten gesehen
Spektrallinien
Planck Kurve
H_2O
CO_2
O_3
H_2O
Zenith Spec. Intensity [10^{-12} W/Hz]
Frequency [cm^{-1}]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
0
500
1000
1500
2000
2500

Warum gibt es Spektrallinien?

- Luft besteht aus Molekülen (Stickstoff N_2, Sauerstoff O_2, Kohlendioxid CO_2, Spurengase wie Ozon O_3, ...)
- Moleküle können nur bei ganz bestimmten Frequenzen Strahlung absorbieren

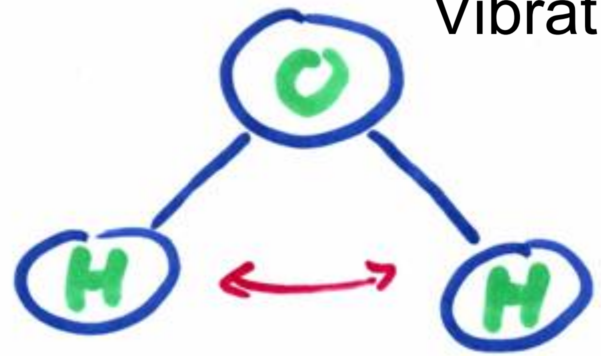
Warum?

Quanten

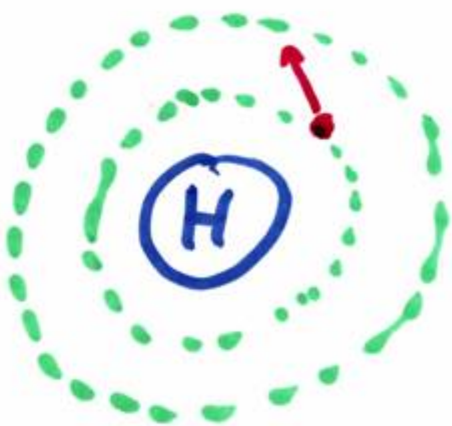


Rotation

Vibration



Elektronensprung

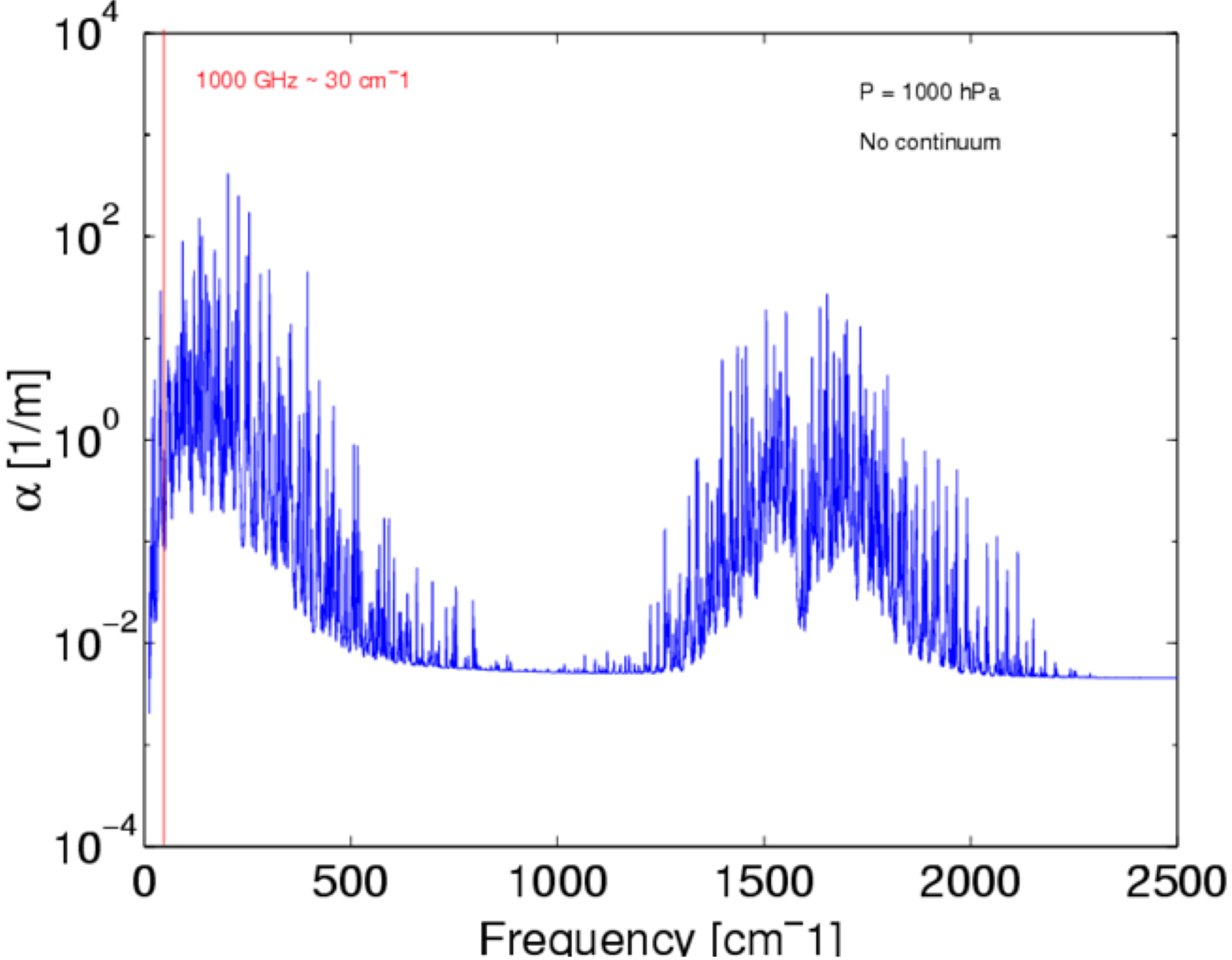


Nur „diskrete“ = bestimmte Zustände möglich

Energie der Strahlung muss genau passen

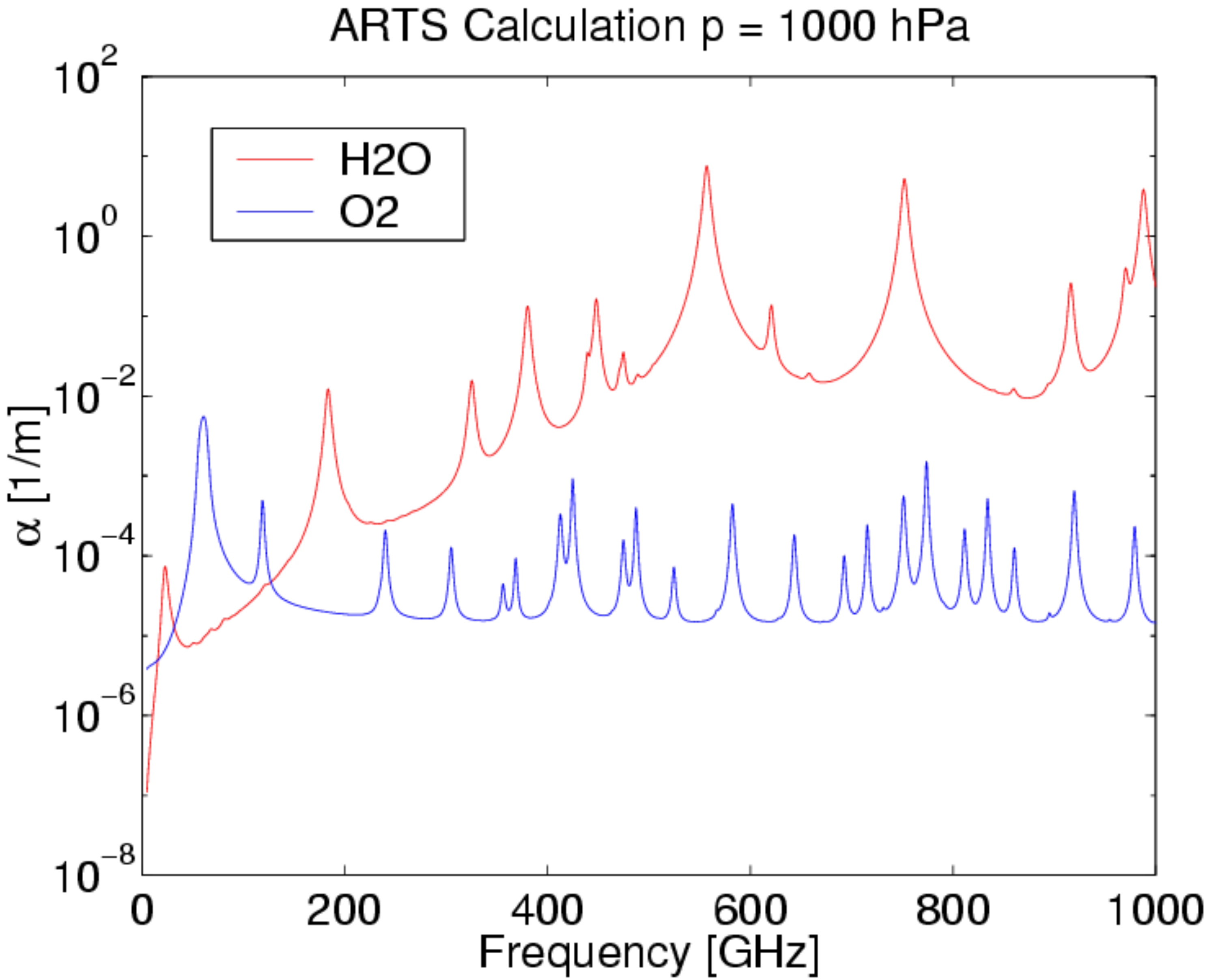
Jedes Molekül hat sein typisches Spektrum

Wasserdampfspektrum



Das Spektrum kann ziemlich kompliziert aussehen...

Der Mikrowellenbereich



Was kann man messen?

- H_2O --- Wasserdampf
- O_3 --- Ozon
- + viele mehr

Messung der Konzentration

- CO_2 --- Kohlendioxyd
- O_2 --- Sauerstoff
- Gleichmäßig verteilt

Messung der Temperatur

- Wolken, Regen

Zurück zum Strahlungstransfer

- Der Absorptionskoeffizient α ist also stark von der Frequenz abhängig.
- (Der Streukoeffizient σ auch)
- Für jede Frequenz einzeln gelten die Strahlungstransfer-Differentialgleichungen.
- In dem einfachen Fall den wir bisher betrachten

$$\frac{dI}{ds}(\mathrm{ext}) = -k\,I$$

I: Intensität der Strahlung [W/(m^2 sr Hz)]

s: Weg [m]

k: Extinktionskoeffizient [1/m]

Analytische Lösung der Differentialgleichung

$$I(s) = I(0)e^{-\int_0^s k(s')ds'}$$

$$= I(0)\, e^{-\tau(0,s)} \qquad \tau \text{ heißt Opazität, optische Dicke}$$

$$= I(0)\, t(0,s) \qquad t \text{ heißt Transmission (Transmissivität)}$$

Für homogenes Medium:

$$I(s) = I(0)\exp(-ks)$$

Das ist das Extinktionsgesetz.

Opazität

$$\tau(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} k(s')\, ds'$$

Erinnerung:

$$\frac{dI}{ds}(\text{ext}) = -k\, I$$

I: Intensität der Strahlung [W/(m^2 sr Hz)]

s: Weg [m]

k: Extinktionskoeffizient [1/m]

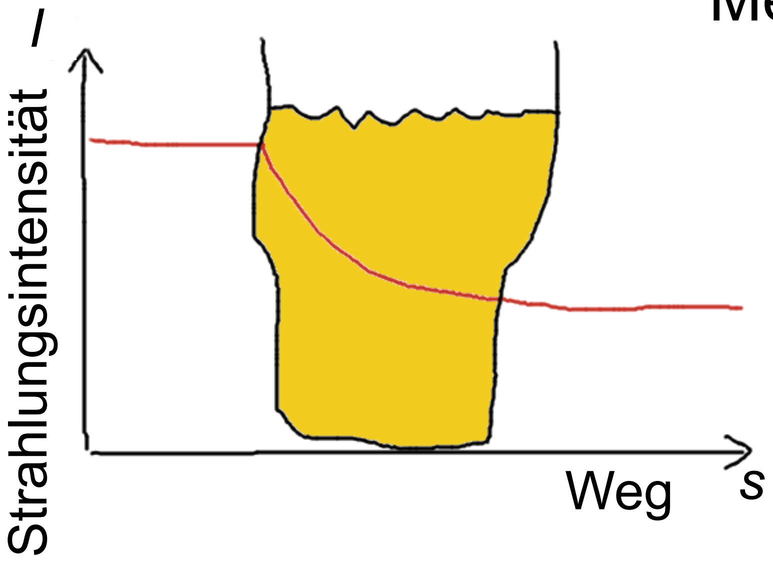
- Synonyme für **Opazität**: optische **Dicke**, optische **Tiefe**, optische **Dichte.**
- Achtung Verwechslungsgefahr: Optischer **Weg** (manchmal leider ebenfalls **Dichte**) bezeichnet das Integral über den **Real**teil des Brechungsindex,
  Das α, das im k mit steckt, hängt mit dem **Imaginär**teil des Brechungsindex zusammen.

$$k = \alpha + \sigma$$

$$\alpha = \frac{4\pi\nu n''}{c_0} = \frac{4\pi n''}{\lambda_0}$$

Extinktionsgesetz anschaulich: Beer's Law

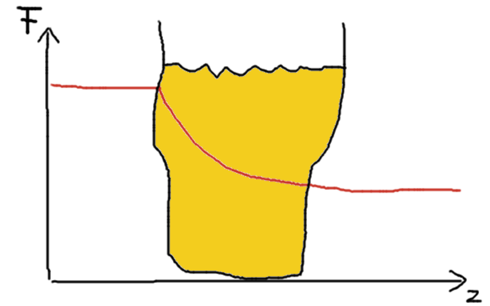
- The wider the glass, and the darker the brew, the less the amount of light that comes through.



Source: ? (told to me by Christian Melsheimer)

$$I(s) = I_0 \exp(-ks)$$

Ein Gesetz mit vielen Namen



- Das Extinktionsgesetz heißt auch:
  - Beer‘s Gesetz
  - Lambert‘s Gesetz
  - Bouguer‘s Gesetz
  - Oder jede beliebige Kombination daraus, je nach Land, zum Beispiel „Lambert-Beersches Gesetz“

- Laut Bohren hat Beer das Gesetz nie erwähnt, und es wurde zuerst von Pierre Bouguer formuliert (Essay on the Gradation of light, 1729).
  Bohren nennt das ein gutes Beispiel für „**Stigler's law of eponymy**“ (Stiglers Gesetz, Eponym = Wort, das aus einem Eigennamen abgeleitet ist):
  Keine wissenschaftliche Entdeckung ist nach ihrem Entdecker benannt.

Was passiert für einen Stapel von homogenen Schichten?

Ⓣ

$$\tau_{\text{total}} = \tau_1 + \tau_2 + \ldots$$
$$\mathcal{T}_{\text{total}} = \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 \cdot \ldots$$

- Opazität addiert sich.
- Transmission multipliziert sich.

- Das ist wichtig, in der Praxis löst man Strahlungstransferprobleme oft, indem man das Medium in diskrete Schichten unterteilt.

Übersicht

- Intensität und Abstand
- Extinktion
- **Emission**
- Die Strahlungstransfergleichung
- Analytische Lösung ohne Streuung
- Homogene Schicht ohne Streuung
- Zusammenfassung

Formell

- Strahlung könnte auf dem Weg durch das Medium auch zunehmen.
- Rein formell schreiben wir in Analogie zur **Extinktion** für den Prozess der **Emission**:

$$\frac{dI}{ds}(\mathrm{emiss}) = S$$

I: Intensität der Strahlung [W/(m^2 sr Hz)]

s: Weg [m]

S: Quellterm der Emission

Volle Strahlungstransfergleichung

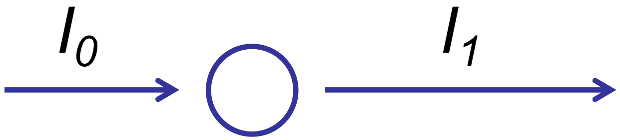
$$\frac{dI}{ds} = -kI + S$$

Erinnerung 1: Monochromatische Gl.: Gilt separat für jede Frequenz. Alle Größen (außer *s*) sind Funktionen von *s* und Frequenz ν.

Erinnerung 2: „Pencil Beam" Gl.: Gilt separat für jede Richtung. Alle Größen sind im Prinzip Funktionen der Richtung, was man bei *k* und *S* oft vernachlässigen kann, bei *I* aber nie.

- Sind wir jetzt fertig?
- ? Nein! Offene Fragen:
  - Was ist *S*?
  - (Und später: Lösung der Differentialgleichung)

Wie kann die Intensität zunehmen?



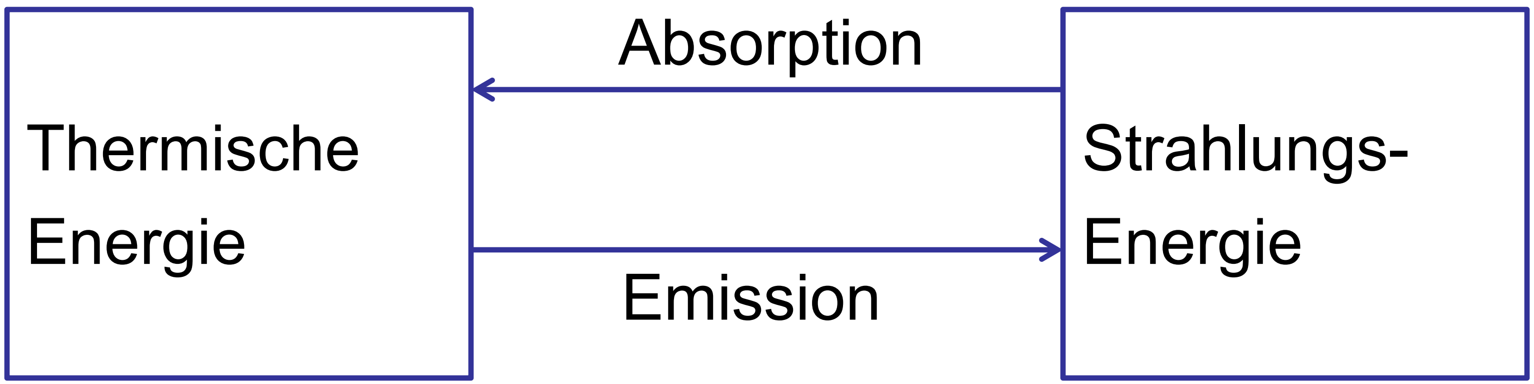
Wieder nur 2 fundamentale Wege:

?

1. Thermische Emission
2. Streuung

Thermische Emission

Das Gegenstück zur Absorption



Wie hieß das Gesetz hierfür nochmal?

→ Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Thermische Emission Mathematisch

$$S(\text{thermisch}) = \alpha(\nu,\ldots)\,J(\nu,T)$$

S: Quellterm der thermischen Emission

α: Absorptionskoeffizient (der selbe, der auch bei der **Extinktion** vorkam)

J: Quellfunktion, hängt nicht vom Medium ab

T: Temperatur

Erinnerung Extinktion:

$k = \alpha + \sigma$

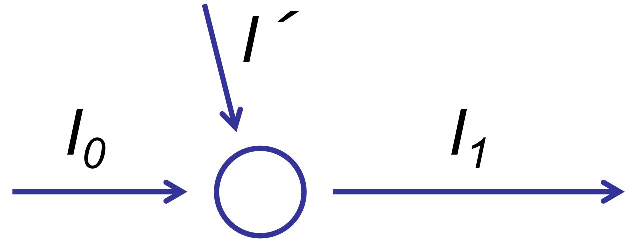
$=$ Absorption + Streuung

- Was ist J?
- Im allgemeinen Fall schwer zu berechnen, aber einfach im Fall mit lokalem Thermodynamischem Gleichgewicht (LTE).
- Dann ist J genau die Planck Funktion $B(\nu,T)$, die im letzten Kapitel eingeführt wurde.

Erinnerung:

$$B(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2\left(e^{h\nu/kT} - 1\right)}$$

Streuung



- Genau wie Streuung **aus** der Ausbreitungsrichtung für Extinktion sorgt, so sorgt Streuung aus anderen Richtungen **in** die Ausbreitungsrichtung für Emission:

$$S(streu) = \frac{\sigma}{4\pi}\int_{4\pi} P(\hat{n}',\hat{n}) I(\hat{n}')\, d\hat{n}'$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi}\int_{\vartheta=-\pi/2}^{+\pi/2}\int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} P(\vartheta',\varphi',\vartheta,\varphi) I(\vartheta',\varphi') \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

S: Quellterm (Einheit Intensität)
σ: Streu-Koeffizient
P: Phasenfunktion (Name historisch)
$\hat{n}',\hat{n}$: Richtungs(einheits)vektoren
I: Strahlungs-Intensität
4π: Konventionelle Normalisierung (steckt in Definition von P)

- Das σ ist das gleiche wie im Extinktions-Term! (Die Strahlungsintensität, die aus einer Richtung entfernt wird, wird anderen Richtungen zugeschlagen. → Elastische Streuung)

Erinnerung Extinktion:
$k = \alpha + \sigma$
= Absorption + Streuung

Übersicht

- Intensität und Abstand
- Extinktion
- Emission
- **Die Strahlungstransfergleichung**
- Analytische Lösung ohne Streuung
- Homogene Schicht ohne Streuung
- Zusammenfassung

Strahlungstransfergleichung

$$\frac{dI}{ds} = -(\alpha + \sigma)I \ + \ \alpha B(T) \ + \ \sigma \int_\Omega PI \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Extinktion *therm. Emission* *Streu-Quellterm*

- Engl.: Radiative Transfer Equation (**RTE**)
- Achtung: Alle Größen hier sind Frequenzabhängig.
- Die Gleichung gilt für jede Frequenz einzeln (monochromatische) und jede Richtung einzeln (‚Pencil Beam‘).
- Um Energieflüsse (Irradianz) zu berechnen, müssen wir die Gleichung für viele verschiedene Frequenzen und Richtungen lösen, dann integrieren.

Strahlungstransfergleichung

$$\frac{dI}{ds} = -(\alpha + \sigma)I \;+\; \alpha B(T) \;+\; \sigma \int_{\Omega} PI \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Extinktion — *therm. Emission (therm. Quellterm)* — *Streu-Quellterm*

Extinktion: $\alpha + \sigma$ (Absorption+Streuung)

Thermische Emission: Nur α

Streu-Quellterm: Nur σ

Vektor-Strahlungstransfergleichung

- Nur der Vollständigkeit halber:
- Wenn wir auch Polarisation beschreiben wollen, können wir Intensität *I* durch den Stokes Vektor [*I*, *Q*, *U*, *V*] ersetzen.

The vector radiative transfer equation (VRTE) is

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}(\nu,\mathbf{r},\hat{\mathbf{n}})}{\mathrm{d}s} = -\mathbf{K}(\nu,\mathbf{r},\hat{\mathbf{n}})\mathbf{s}(\nu,\mathbf{r},\hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{a}(\nu,\mathbf{r},\hat{\mathbf{n}})B(\nu,\mathbf{r}) + \int_{4\pi} \mathrm{d}\hat{\mathbf{n}}'\mathbf{Z}(\nu,\mathbf{r},\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}')\mathbf{s}(\nu,\mathbf{r},\hat{\mathbf{n}}'), \tag{6.35}$$

where $\mathbf{s}$ is the specific intensity vector, $\mathbf{K}$ is the total extinction matrix, $\mathbf{a}$ is the total absorption vector, B is the Planck function and $\mathbf{Z}$ is the total phase matrix. Furthermore ν is the frequency of the radiation, $\mathrm{d}s$ is a path-length-element of the propagation path, $\mathbf{r}$ represents the atmospheric position and $\hat{\mathbf{n}}$ the propagation direction. Equation 6.35 is valid for monochromatic or quasi-monochromatic radiative transfer. We can use this equation for

Quelle: ARTS Theory Guide (http://www.sat.ltu.se/arts/misc/arts-doc/uguide/arts_theory.pdf)

Lösung?

$$\frac{dI}{ds} = -(\alpha+\sigma)I \; + \; \alpha B(T) \; + \; \sigma \int_\Omega PI \frac{d\Omega}{4\pi}$$

- Strahlungsfeld in einer bestimmten Richtung hängt durch die Streu-Emission von der Strahlung in allen anderen Richtungen ab.

➔ Mit Streuung lässt sich die Gleichung nicht analytisch lösen. (Es gibt aber zahlreiche numerische Verfahren.)

- Wichtiger Spezialfall: Keine Streuung

→ Nächster Abschnitt!

Übersicht

- Intensität und Abstand
- Extinktion
- Emission
- Die Strahlungstransfergleichung
- **Analytische Lösung ohne Streuung**
- Homogene Schicht ohne Streuung
- Zusammenfassung

Schwarzschild-Gleichung

$$\frac{dI}{ds} = -(\alpha + \cancel{\sigma})I \ + \ \alpha B(T) \ + \ \cancel{\sigma \int_{\Omega} PI \frac{d\Omega}{4\pi}}$$

$$\frac{dI}{ds} = -\alpha I + \alpha B(T)$$

$$= \alpha(B(T) - I)$$ Schwarzschild-Gleichung

Historisch

$$\frac{dI}{ds} = \alpha(B(T) - I)$$

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1906. Heft 1.

Inhalt:

K. Schwarzschild, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, 1906

Man verfolge zunächst die nach innen wandernde Energie B. Geht man um eine unendlich dünne Schicht dh nach innen, so geht von der von außen kommenden Energie B der Bruchteil $B.a\,dh$ verloren, auf der anderen Seite kommt durch die nach der einen Seite gehende Eigenstrahlung der Schicht dh der Betrag $aE\,dh$ hinzu, es ergiebt sich also im Ganzen:

$$\frac{dB}{dh} = a(E - B). \tag{7}$$

(Unser *I* heißt bei ihm *B*, unser *B* heißt bei ihm *E*)

Schwarzschild-Gleichung

$$\frac{dI}{ds} = \alpha(B(T) - I)$$

Annahme: α und T konstant (homogenes Medium)

Was passiert mit I wenn die Strahlung lange genug durch das Medium läuft ($s \rightarrow \infty$)?

? **Denkhilfe**:

$I<B(T)$ ➔ I nimmt mit dem Weg zu

$I>B(T)$ ➔ I nimmt mit dem Weg ab

➔ Wenn α und T konstant sind, so ist nach genügend langer Wegstrecke $I=B(T)$.
Und wenn ich I in Einheiten von Helligkeitstemperatur T_b beschreibe, dann ist $T_b=T$.

Analytische Lösung der Schwarzschild Gleichung

Die Gleichung lässt sich integrieren:

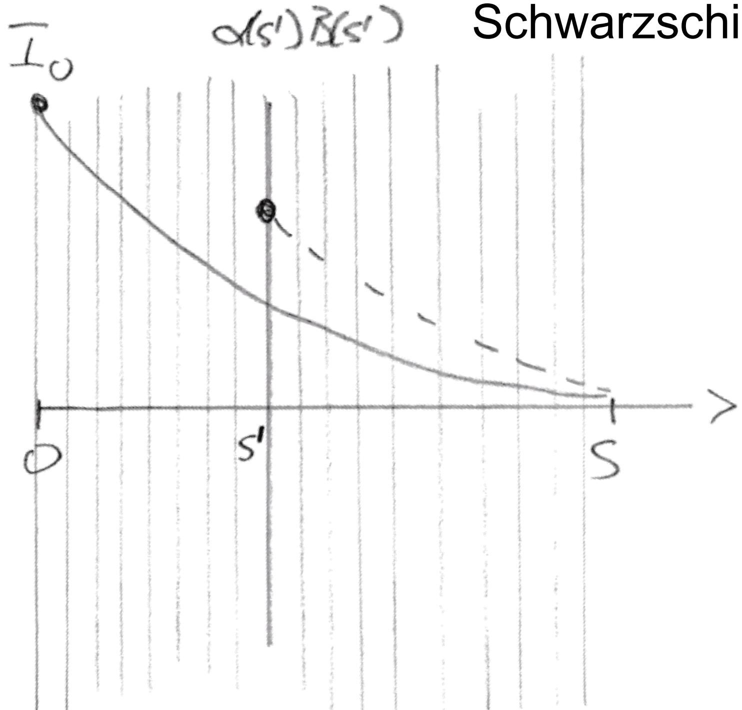
Differentialform:

$$\frac{dI}{ds} = \alpha(B(T) - I)$$

$$\tau(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \alpha(s')ds' \qquad \text{(Opazität)}$$

$$I(s) = I(0)e^{-\tau(0,s)} + \int_0^s \alpha(s')B(s')e^{-\tau(s',s)}ds'$$

Integralform der Schwarzschildgleichung



- $I(0)$: Hintergrund (z.B. Kosmische Hintergrundstrahlung oder Emission der Oberfläche).
- Jede Schicht emittiert $\alpha B(T)$.
- Emission jeder Schicht wird durch exp(-τ) abgeschwächt .
- In der Praxis wird das Integral numerisch berechnet (durch eine diskrete Summe ersetzt)

Herleitung Integralform Schwarzschildgleichung

- Idee:
- Schreibe als Differentialgleichung in Opazität τ.
- Achtung, wenn *s* so definiert ist, dass es zum Sensor hin zunimmt (Ausbreitungsrichtung der Strahlung), dann nimmt die Opazität mit steigendem *s* ab (sonst klappt es nicht).

$$d\tau = -\alpha\, ds$$

- Multipliziere mit integrierendem Faktor $e^{-\tau}$
- Genaue Rechnung in Petty Gl. 8.5-8.13, handschriftlich siehe nächste Seite.

Herleitung Integralform Schwarzschildgleichung

$$\frac{dI}{ds} = \alpha (B - I)$$

$$d\tau = -\alpha\, ds$$

Schaue vom Sensor aus rückwärts
→ ds negativ
→ dτ positiv

$$\rightarrow \frac{dI}{d\tau} = \cancel{B-I}\; I - B$$

Multipliziere beide Seiten mit $e^{-\tau}$

$$\frac{dI}{d\tau} e^{-\tau} = (\cancel{B-I}\; I-B)\, e^{-\tau}$$

Exkurs:

Produktregel

$$\frac{d}{d\tau}\left[I e^{-\tau}\right] = \frac{dI}{d\tau} e^{-\tau} - I e^{-\tau}$$

$$\underbrace{\frac{dI}{d\tau} e^{-\tau} - I e^{-\tau}} = -B e^{-\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[I e^{-\tau}\right] = -B e^{+\tau}$$

Integriere vom Sensor rückwärts bis zu einem beliebigen Punkt ($\tau = 0 \ldots \tau'$)

$$\int_0^{\tau'} \frac{d}{d\tau}\left[I e^{-\tau}\right] = -\int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

$$\left[I e^{-\tau}\right]_0^{\tau'} = -\int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

$$I(\tau') e^{-\tau'} - I(0) \cdot 1 = -\int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

$$I(0) = I(\tau') e^{-\tau'} + \int_0^{\tau'} B e^{-\tau} d\tau$$

Quelle:

Petty, Gl. 8.5 – 8.13

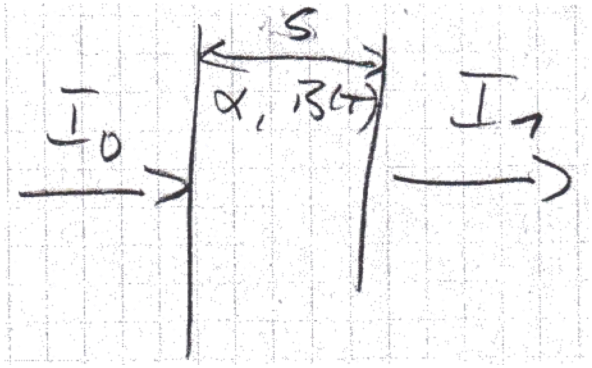
Knackpunkt:

dτ hat umgekehrtes Vorzeichen zu ds!

Übersicht

- Intensität und Abstand
- Extinktion
- Emission
- Die Strahlungstransfergleichung
- Analytische Lösung ohne Streuung
- **Homogene Schicht ohne Streuung**
- Zusammenfassung

Homogene Schicht

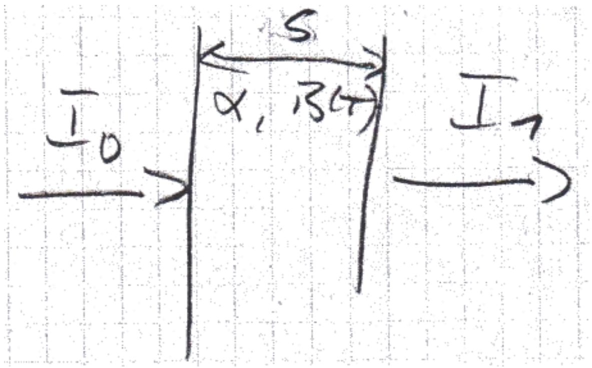


- Interessant, weil ich mir jedes Medium als Stapel homogener Schichten entlang des Weges *s* vorstellen kann. (Beliebig exakt, wenn ich die Schichten dünn genug mache.)
- Infinitesimal dünne Schicht: Schwarzschild Gleichung: $dI = \alpha(B(T) - I)\, ds$
- Jetzt suche ich aber die analytische Lösung für eine endlich dicke Schicht!

➔ Setze homogene Schicht in Integralform der Schwarzschildgleichung ein

Opazität für Homogene Schicht

$$\tau(s_1,s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \alpha(s')\,ds' = \alpha\,(s_2 - s_1)$$



Integralform der Schwarzschild-Gleichung:

$$I(s) = I(0)e^{-\tau(0,s)} + \int_0^s \alpha(s')B(s')e^{-\tau(s',s)}ds'$$

Homogene Schicht:

$$I_1 = I_0 e^{-\alpha(s-0)} + \alpha\,B(T)\int_0^s e^{-\alpha\,(s-s')}\,ds'$$

$$= I_0 e^{-\alpha s} + \alpha\,B(T)\int_0^s e^{-\alpha\,s}e^{\alpha\,s'}\,ds'$$

$$= I_0 e^{-\alpha s} + \alpha\,B(T)\,e^{-\alpha\,s}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\,s'}\right]_0^s$$

$$= I_0 e^{-\alpha s} + \cancel{\alpha}\,B(T)\,e^{-\alpha\,s}\left(\frac{1}{\cancel{\alpha}}e^{\alpha\,s} - \left(\frac{1}{\cancel{\alpha}}\cdot 1\right)\right)$$

$$\boxed{I_1 = I_0 e^{-\alpha s} + B(T)\left(1 - e^{-\alpha s}\right)}$$

Oder mit Definition der Transmission:

$$t(s_1,s_2) = e^{-\tau(s_1,s_2)} \qquad \text{(generell)}$$

$$= e^{-\alpha s} \qquad \text{(homogene Schicht)}$$

$$\boxed{I_1 = t\,I_0 + (1-t)\,B}$$

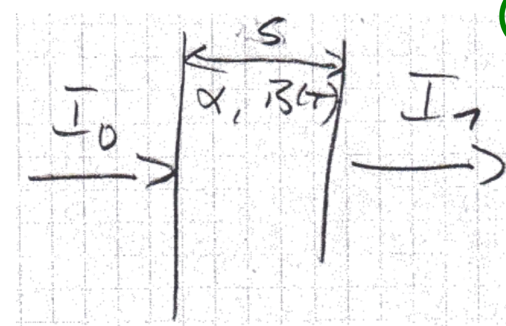
Transmittierte Strahlung

Emittierte Strahlung

Zwei Interessante Extremfälle

	Opazität		Transmission
1.	$\tau >> 1$	$\Rightarrow$	$t \rightarrow$ **?**
2.	$\tau << 1$	$\Rightarrow$	$t \rightarrow$ **?**

Extremfall 1: Optisch dick



$$\lim_{t \to 0} I_1 = \lim_{t \to 0} \left(t\, I_0 + (1 - t) B \right) = B$$

- Wir sehen einfach die Planck Emission $B(T)$, die der Temperatur der Schicht entspricht.
- Die Hintergrundstrahlung I_0 hat keinen Einfluss mehr.
- Das hatten wir uns schon anhand der Differentialform der Schwarschildgleichung ($dI = ds\, \alpha(B-I)$) klargemacht, wenn der Weg lang ist.
- Jetzt haben wir klarere Kriterien (τ oder t) wann dieser Fall vorliegt.

Extremfall 2: Optisch dünn

Ⓣ

$$\lim_{t \to 1} I_1 = \lim_{t \to 1} \left(t\, I_0 + (1-t)\, B \right) = I_0$$

- Für t=1 (τ=0) geht die Strahlung einfach unverändert durch. (Nicht sehr überraschend.)
- Temperatur der Schicht (und damit *B*(*T*)) spielt keine Rolle.
- Interessanter ist aber der Fall, dass die Opazität τ zwar klein ist, aber nicht Null. → Nächste Seite.

Mehr zum optisch dünnen Fall

$$t = e^{-\tau} = 1 - \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \ldots$$

Reihenentwicklung der e-Funktion

$$\tau << 1$$

$$\Rightarrow \quad t \approx 1 - \tau$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = t\, I_0 + (1 - t) B \approx (1 - \tau) I_0 + \tau B = I_0 + \tau (B - I_0)$$

- Entspricht genau der Differentialform der Schwarzschild Gleichung ($dI = ds\ \alpha(B\text{-}I)$).
- Änderung der Intensität proportional zur optischen Dicke

➔ Linearer Fall

Übersicht

- Intensität und Abstand
- Extinktion
- Emission
- Die Strahlungstransfergleichung
- Analytische Lösung ohne Streuung
- Homogene Schicht ohne Streuung
- **Zusammenfassung**

Zusammenfassung

- Die Strahlungstransfergleichung ist eigentlich ziemlich intuitiv...
- ...und ohne Streuung auch leicht analytisch zu lösen
- Mit diesem Kapitel kann man alle thermischen Messungen verstehen, wenn Streuung keine Rolle spielt
  - Temperaturmessung mit IR und Mikrowellen-Sensoren
  - Spurengasmessungen mit IR und Mikrowellen-Sensoren
  - Operationelle Meteorologische Instrumente wie AMSU und HIRS, thermische Kanäle von Meteosat und AVHRR

Leseempfehlung

- Petty, Kapitel 7+8.