Elektromagnetische Wellen

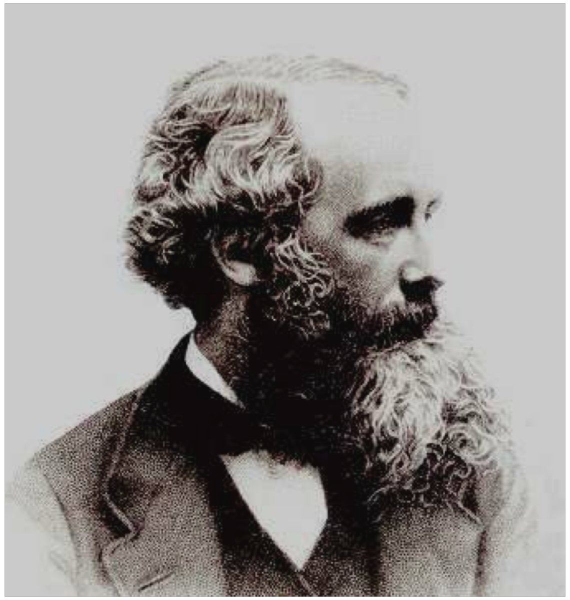
Optik, Strahlung, Fernerkundung

Sommersemester 2019

Stefan Bühler

Meteorologisches Institut

Universität Hamburg



James Clerk Maxwell
1831-1879
(Bild Université de Nantes)

Übersicht – alle Kapitel

Übersicht

- Maxwell Gleichungen im Vakuum
- Elektromagnetische Wellen
- Frequenzspektrum
- Kohärenz und Polarisation
- Wellen im Medium
- Komplexer Wellenvektor
- Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- Zusammenfassung

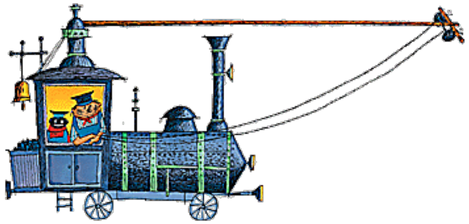
Übersicht

- **Maxwell Gleichungen im Vakuum**
- Elektromagnetische Wellen
- Frequenzspektrum
- Kohärenz und Polarisation
- Wellen im Medium
- Komplexer Wellenvektor
- Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- Zusammenfassung

Maxwell-Gleichungen in Vakuum

Ⓣ

$\mathrm{rot}\,\vec{E}$	=	$-\partial\vec{B}/\partial t$	Induktion
$\mathrm{rot}\,\vec{B}$	=	$\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t$	Ströme und veränderliche E-Felder erzeugen Magn. Wirbelfelder
$\mathrm{div}\,\vec{E}$	=	ρ / ε_0	Ladung ist Quelle von E
$\mathrm{div}\,\vec{B}$	=	0	keine magnetischen Monopole



$\vec{E}$: elektrische Feldstärke [V/m]

$\vec{B}$: magnetische Flussdichte [V/m]

$\vec{J}$: elektrische Stromdichte [A/m^2]

ρ : Ladungsdichte [As/m^3]

rot : Rotation ($\nabla\times$)

div : Divergenz (∇)

μ_0, ε_0 : Permeabilität und Permittivität des Vakuums

James Clerk Maxwell
1831-1879
(Bild Université de Nantes)

Divergenz, Rotation und Laplace

$$\operatorname{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Achtung: div(Vektorfeld) = Skalar
grad(skalares Feld) = Vektor,
beides wird mit ∇ notiert.

Nützliche Rechenregel:
rot (rot E) = grad (div E) - laplace E

$$\operatorname{laplace}\vec{E} = \nabla^2\vec{E} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Achtung, Klammerung hier wichtig!

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Ⓣ

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\partial \vec{B}/\partial t \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \, \partial \vec{E}/\partial t \\
\nabla \vec{E} &= 0 \\
\nabla \vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

ohne Ströme und Ladungen

d/dt

1. 2.

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

zeigen Hausaufgabe
(rot rot = grad div-laplace.
Achtung, Kreuzprodukt nicht assoziativ)

$$\longrightarrow \quad -\nabla(\nabla \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ohne Ladungen $\nabla \vec{E} = 0$

$$\boxed{\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E}}$$

Wellengleichung

Interpretation

- Elektrische (E) und magnetische (B) Felder sind miteinander verbunden: Sich änderndes E-Feld erzeugt ein B-Feld, und umgekehrt. (So funktionieren z.B. Dynamos und Motoren.)
- Jede Störung in E oder B führt daher zu einer sich ausbreitenden Welle.

Übersicht

Maxwell Gleichungen im Vakuum

Elektromagnetische Wellen

Frequenzspektrum

Kohärenz und Polarisation

Wellen im Medium

Komplexer Wellenvektor

Optischer Weg und Anwendung GPS Messung

Zusammenfassung

Was ist eine Welle?

Q ▶ Eine Welle ist eine sich im Raum ausbreitende Störung

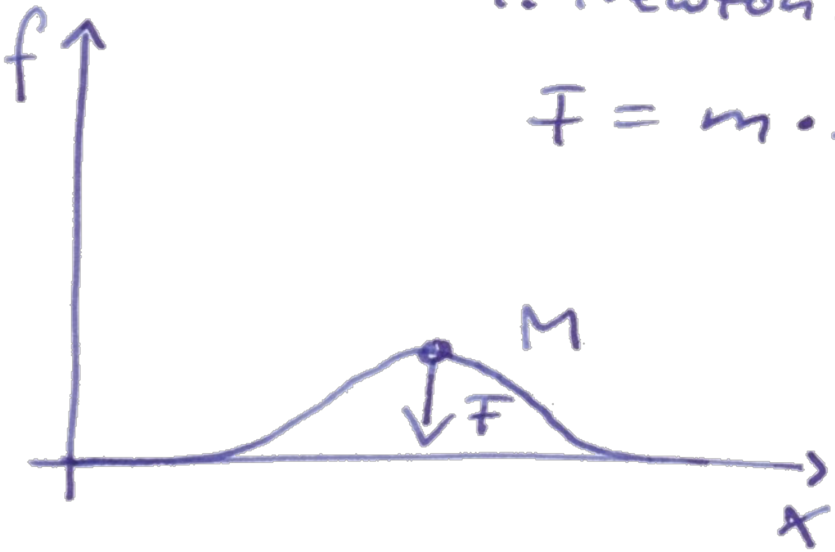
▶ Demo:
http://www.physics.nyu.edu/~ts2/Animation/waves.html#

▶ Beispiel eingespannte Saite:

$f(x, \cancel{y, z}, t)$

1. Newton:

$F = m \cdot \ddot{f}$



Rückstellkraft:

$F \sim k f'' = m \ddot{f}$

$\ddot{f} = \frac{k}{m} f''$

Gegenbeispiel Diffusion

Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Oder

$$\dot{c} = D c''$$

Geschwindigkeit ist proportional zur Krümmung, nicht die Beschleunigung

➔ Keine Welle

Sich ausbreitende Störung Mathematisch

$$f(x,t) = f(x - vt)$$

Egal wie f aussieht:

$$f(0{,}0) = f(v,1) = f(2v,2)$$

Pro Zeitschritt schiebt sich die Störung jeweils um v weiter und es gilt:

$$\ddot{f} = v^2 f''$$

Vergleich mit der physikalischen Gleichung für die eingespannte Saite $\ddot{f} = {}^{k}/_{m}\, f''$ liefert z.B.:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \frac{\text{Elastizitätsgröße}}{\text{Trägheitsgröße}}$$

Herleitung

$$f(x,t) = f(x - vt) = f\big(a(x,t)\big)$$

Mit

$$a = x - vt$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} = -\mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial a}$$

$$\ddot{f} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial a}$$

$$f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$$

Also

$$\ddot{f} = v^2 f''$$

Zurück zur elektromagetischen (EM) Welle

Aus Maxwell Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der EM Welle ist also

$$c_0 := \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Schreibweisen der Wellengleichung

1-Dimensional:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$$

3-Dimensional:

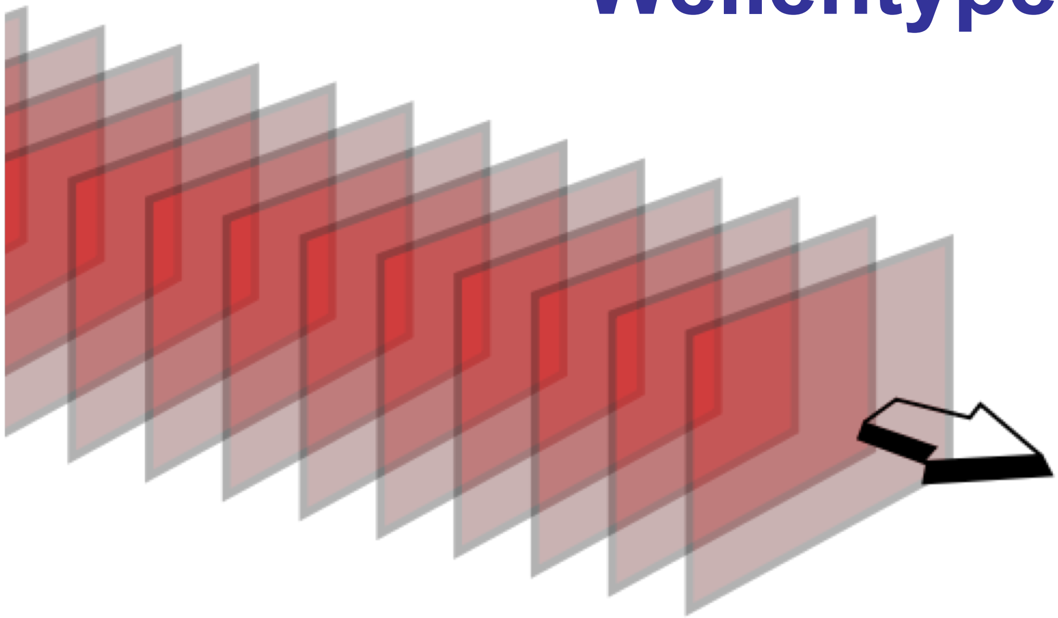
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

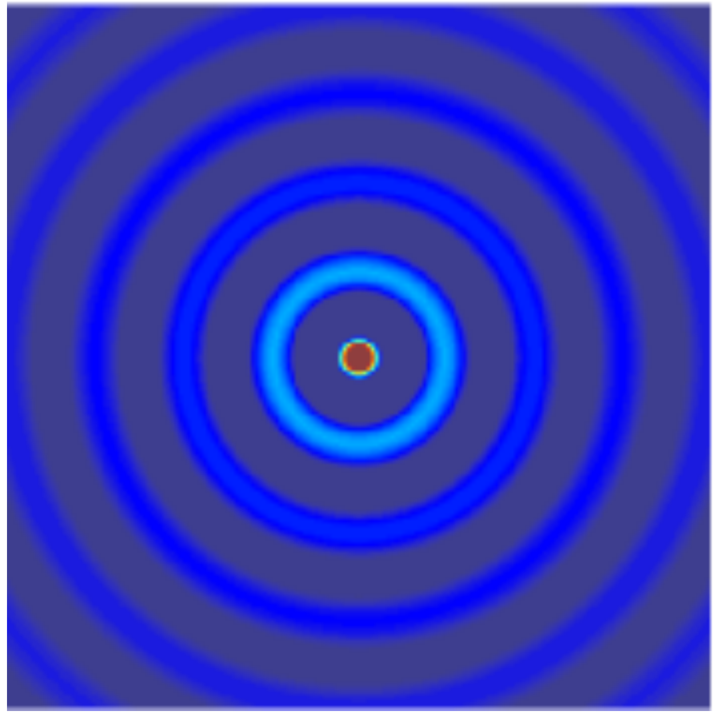
oder kompakter:

$$\Delta E(x,y,z,t) = \nabla^2 E(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

Laplace Operator Nabla Operator

Wellentypen





Ausbreitung in ...

1 Raumdimension: Ebene Welle

2 Raumdimensionen: Zylinderwelle

3 Raumdimensionen: Kugelwelle

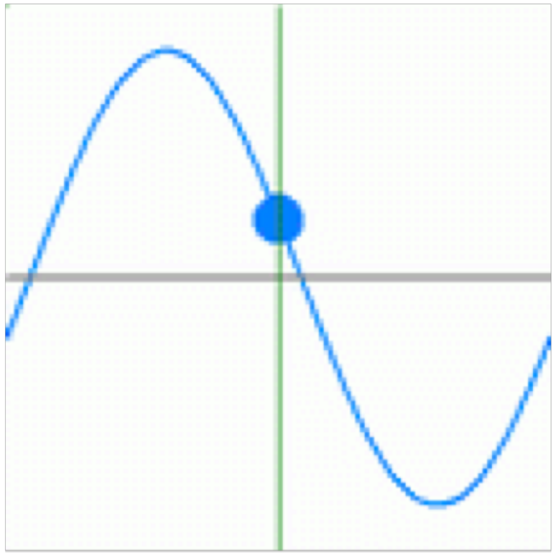
Alle Bilder: Wikipedia

Warum ebene Wellen

- Eine mögliche Lösung der Wellengleichung. (Neben anderen.)
- Warum beschäftigen wir uns gerade mit diesen?
  - Sind am einfachsten.
  - Oft anwendbar (aber nicht immer).
  - Viele Aspekte gelten analog auch für andere Wellentypen.
  - Superpositionsprinzip: Wellen überlagern sich ungestört. ➔ Man kann komplexere Wellen als Kombination der Grundtypen verstehen.

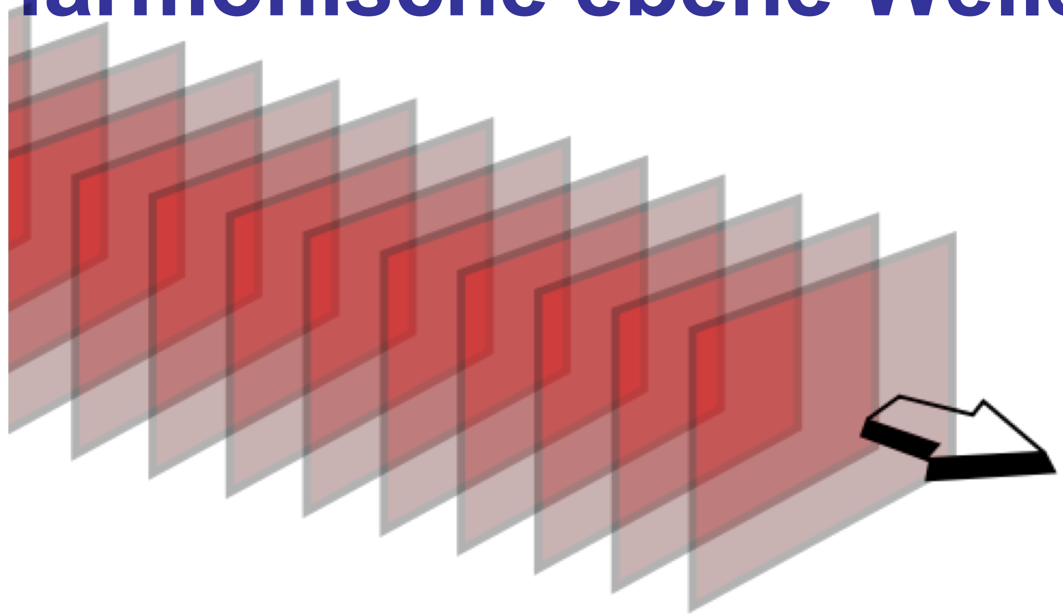
Harmonische Wellen

- Heißt einfach, dass die Welle sinusförmig in Raum und Zeit ist.
- Andere Wellenformen können als Überlagerung (Superposition) harmonischer Wellen verstanden werden (Idee der Fourier-Analyse)



Animation: Wikipedia

Harmonische ebene Wellen



- Sinusförmig in Raum und Zeit
- Raumachse und Zeitachse durch Dispersionsrelation verbunden
- Läuft in eine Richtung
- Ebene Wellenfronten (Flächen konstanter Phase)

Quelle der Bilder: Wikipedia

Ebene Harmonische Welle Mathematisch

Wellengleichung: $$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$$

Lösung der Wellengleichung (kann man einfach durch einsetzen zeigen)

$$\begin{aligned} E(x,t) &= E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \\ &= E_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu t + \varphi) \\ &= E_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \varphi) \end{aligned}$$

E: E-Feld
E_0: Amplitude
φ: Phase
x: Weg in Ausbreitungsrichtung
t: Zeit
k: Wellenzahl
λ: Wellenlänge
ω: Kreisfrequenz
ν: Frequenz
T: Periode

E_0 und φ sind nur Konstanten, für die Diskussion nicht wichtig.

3D Vektorfeld, komplexe Notation

Das Feld E kann auch ein Vektor sein, anstatt eines Skalars.

Komplexe Notation (nur Konvention):

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) \quad = \quad \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$$

mit $\vec{E}_0 = \vec{A} + i\vec{B}$

Wellenvektor

bedeutet eigentlich

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) \quad = \quad \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right\} = \vec{A}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \vec{B}\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle

Jetzt wieder scalar (der Einfachheit halber)

$$E(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\ddot{E}(x,t) = -i\omega\ (-i\omega)E(x,t) = -\omega^2 E(x,t)$$

$$E''(x,t) = ik\ (ik)E(x,t) = -k^2 E(x,t)$$

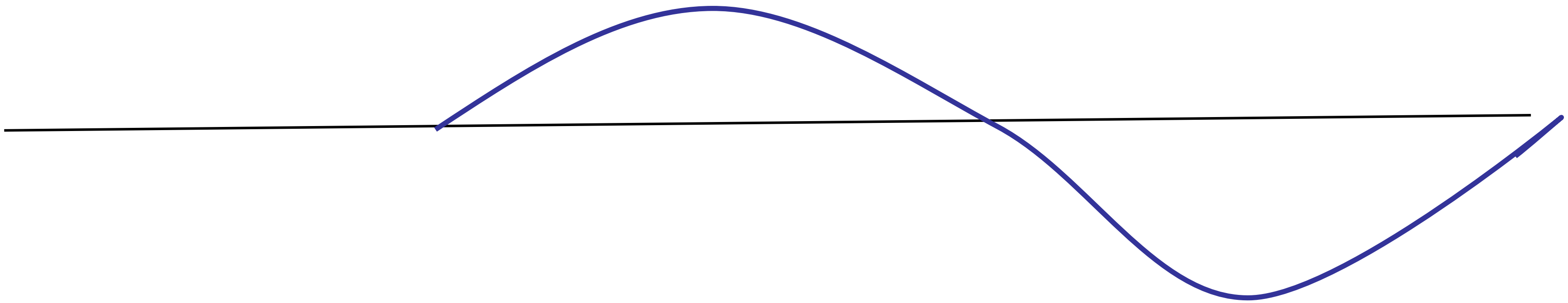
Also

$$\ddot{E} = \frac{\omega^2}{k^2} E''$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also

$$c = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \frac{\omega}{k}$$

Anschaulich



In einer Periode T schiebt sich die Welle genau eine Wellenlänge weiter.

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

Mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

wird das zu

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Dispersionsrelation (Worterklärung später)

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

$$c = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \frac{\omega}{k}$$

Achtung! Maxwell Gl. nur erfüllt, wenn:

$$c \overset{!}{=} c_0 := \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Bei vorgegebenem ω ist k also nicht frei wählbar, sondern ergibt sich aus

$$k = \omega / c_0 \qquad \text{oder} \quad \lambda = \frac{c_0}{\nu} = c_0 T$$

Energie

Elektromagnetische Wellen transportieren Energie.

Petty:
„Just as gravity waves on the surface of the ocean efficiently transport energy from a North Pacific storm to the sunny beaches of California, where that energy is violently deposited on the bodies of inattentive bathers, EM radiation transports vast quantities of energy from the thermonuclear furnace of the sun to the vinyl seat cover of your parked car.“

Grundgröße ist die **Strahlungsflussdichte = Energieflussdichte = Leistungsdichte (Leistung pro Fläche) = Irradianz,** gemessen in W/m^2.

Energieflussdichte für ebene harmonische elektromagnetische Welle

Generell gilt:
Energieflussdichte = **Intensität**
= zeitlich gemittelter Poynting Vektor:

$$\vec{F} = \left\langle \vec{S} \right\rangle = \left\langle \vec{E} \times \vec{H} \right\rangle$$

Speziell für die ebenen Wellen gilt:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

wobei E_0 die Amplitude des E-Feldes ist.

Energiegehalt ist also das Quadrat der Wellenamplitude!

Später werden wir oft nur die Intensität betrachten (z.B. in der Strahlungstransfergleichung). Diese Folie hier ist wichtig, weil sie zeigt, wie jenes Bild auf den fundamentaleren Maxwell Gleichungen aufbaut.

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen

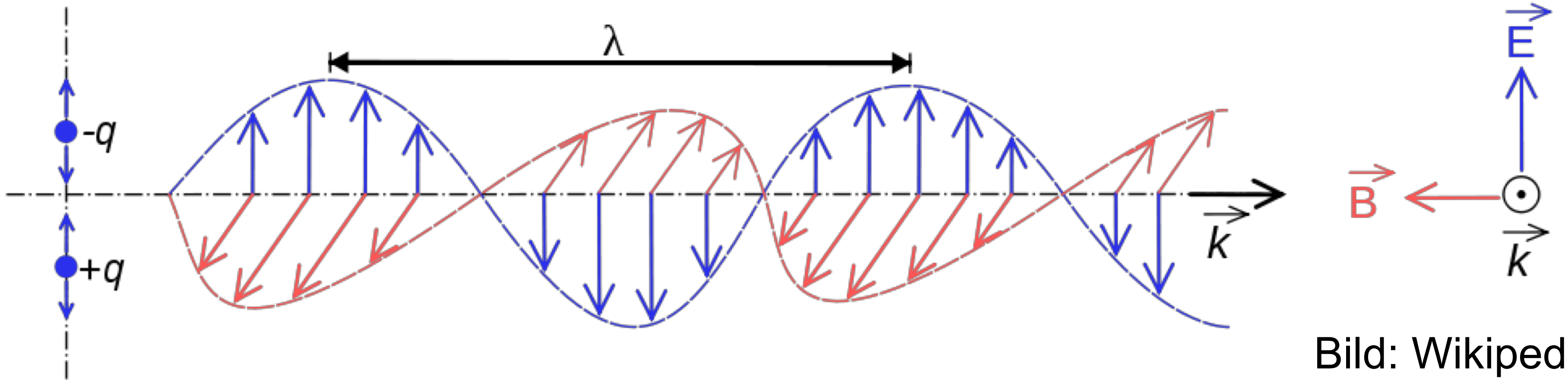


Bild: Wikipedia

E und B sind bei ebenen elektromagnetischen Wellen im Vakuum senkrecht zueinander und zur Ausbreitungsrichtung.

Übersicht

- Maxwell Gleichungen im Vakuum
- Elektromagnetische Wellen
- **Frequenzspektrum**
- Kohärenz und Polarisation
- Wellen im Medium
- Komplexer Wellenvektor
- Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- Zusammenfassung

Frequenz-Zerlegung

- Natürliche Strahlung hat meistens nicht nur eine einzige Frequenz (sie ist nicht **monochromatisch**).
- Wir können uns aber beliebige elektromagnetische Fluktuationen als Superposition monochromatischer Elementarwellen vorstellen:

$$f(t) = \int_0^\infty \alpha(\nu) \sin[2\pi\nu t + \phi(\nu)] \, d\nu$$

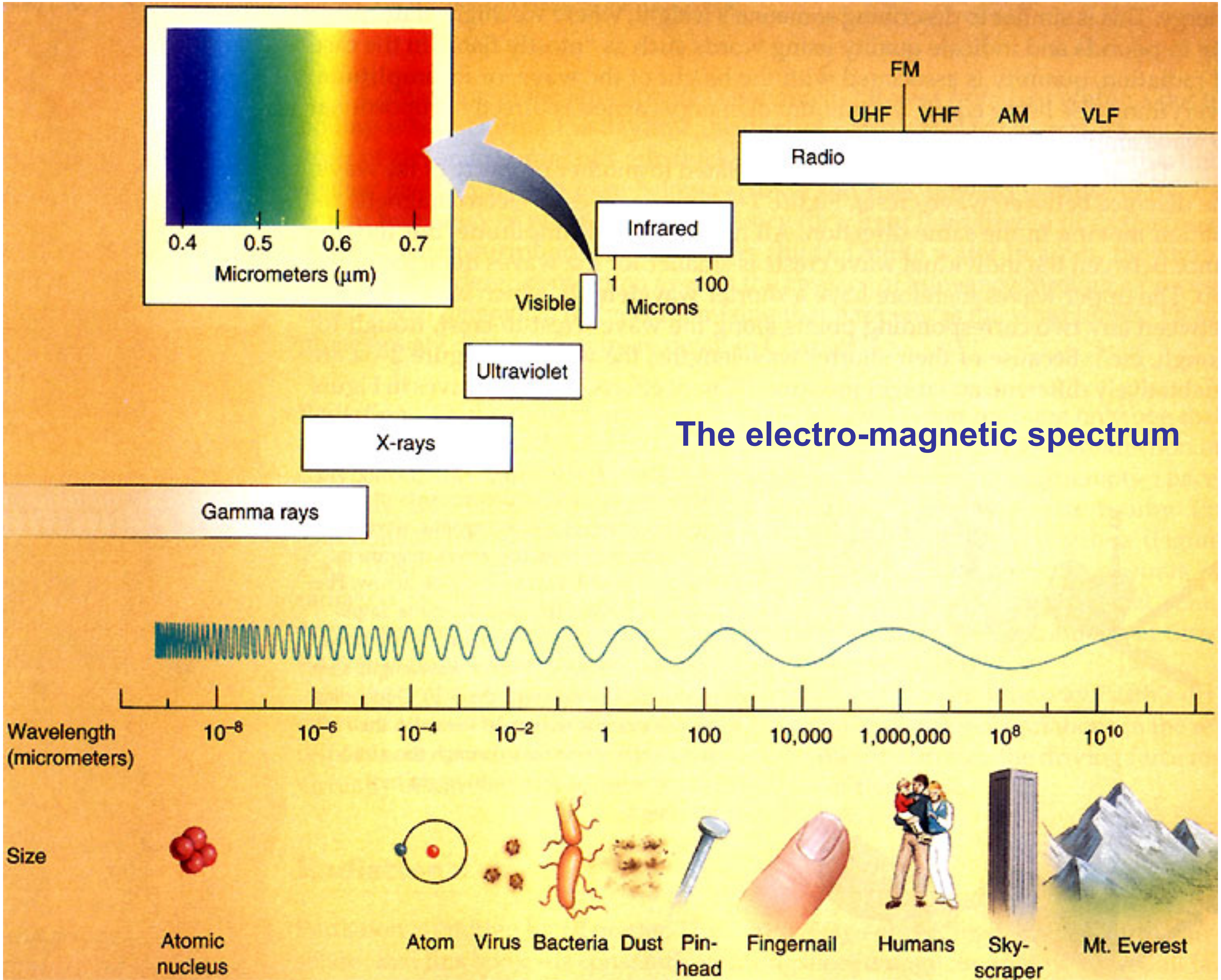
oder in complexer Notation:

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty S(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, d\nu$$

wobei S sowohl Amplitude als auch Phase enthält.

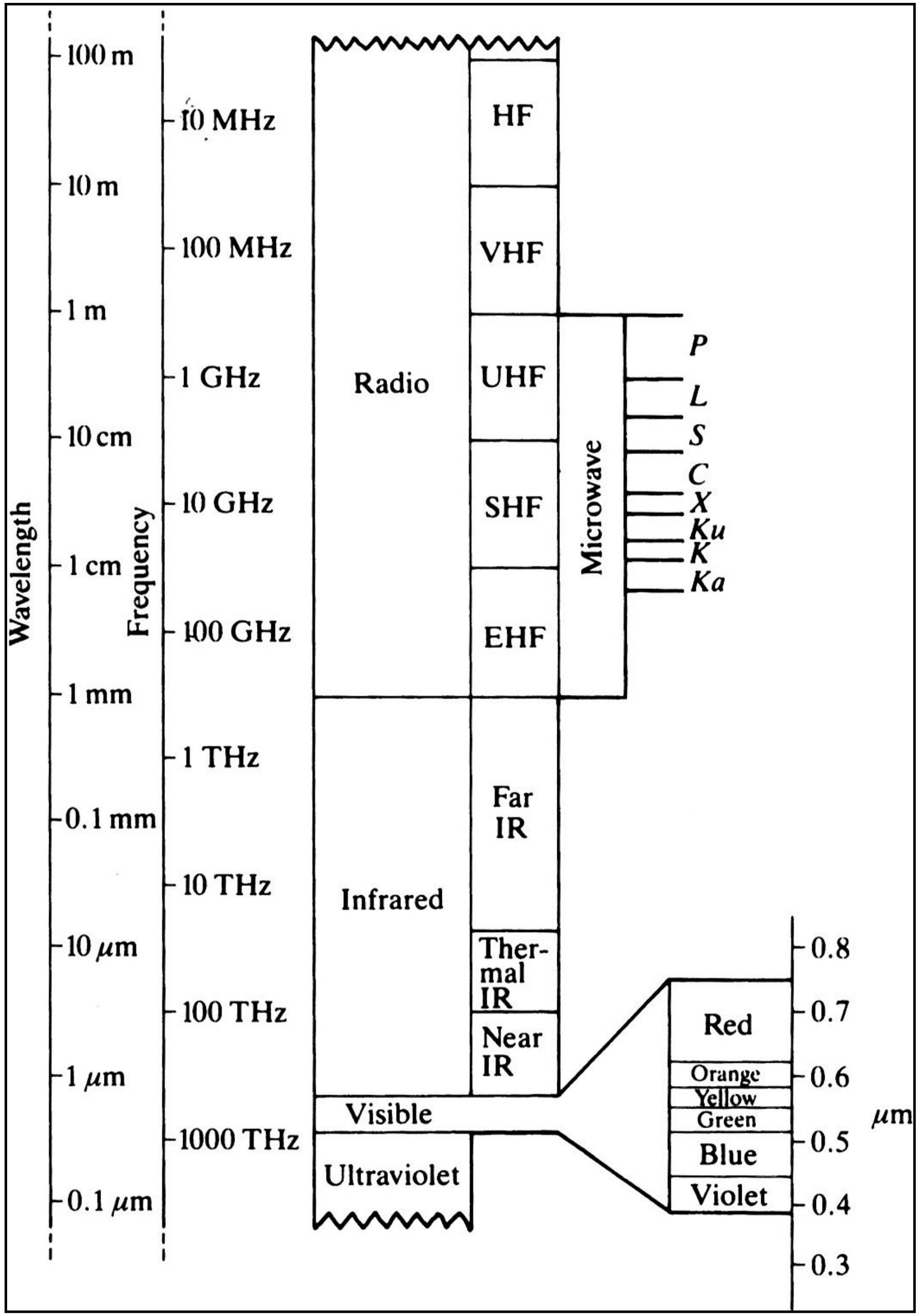
Konsequenzen der Frequenz-Zerlegung

- Das hat sehr weitreichende Konsequenzen.
- Z.B. rechnen wir Strahlungstransfer in der Regel monochromatisch (für eine Frequenz) d.h., jede Frequenz wird für sich betrachtet.
- Vielen ist das „Frequenzbild“ von Strahlung mehr vertraut als das „Zeitbild“.
- Wir sprechen vom elektromagnetischen Spektrum.
- Verschieden Frequenzen haben distinkte physikalische Eigenschaften, etc..
- Dabei sind alle „nur“ Schwingungen im E- (und B-) Feld.
- Ausblick auf später: Strahlung hat auch einen Teilchencharakter (Photonen). Jedes Photon hat eine distinkte Frequenz.



The electro-magnetic spectrum

http://www.geog.ucsb.edu/~joel/g110_w02/chapt02/energy_rad/energy_rad.html



Rees Fig. 2.1 Das Elektromagnetische Spektrum.

Zur Fernerkundung der Atmosphäre wird hauptsächlich der Bereich Radio bis UV genutzt.

Beispiele?

Radio: GPS Okultation

?

Mikrowelle: AMSU-A/-B, RADAR

Infrarot: Meteosat, HIRS, AVHRR

Sichtbar: Meteosat, AVHRR, LIDAR

UV: GOME/SCIAMACHY

Übersicht

- Maxwell Gleichungen im Vakuum
- Elektromagnetische Wellen
- Frequenzspektrum
- **Kohärenz und Polarisation**
- Wellen im Medium
- Komplexer Wellenvektor
- Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- Zusammenfassung

Kohärenz

- Kohärente Strahlung kommt von einem einzelnen Oszillator, oder von perfekt synchronisierten Oszillatoren. Typischerweise künstlich (z.B. LASER).
- Natürliche Strahlung ist meistens inkohärent.
- Streng mathematisch impliziert monochromatisch auch kohärent. (Ein einziger durchgehender Wellenzug).
- Wichtiger Sonderfall: Quasi-monochromatisch: Viele unabhängige Oszillatoren mit der gleichen Frequenz ergeben ein schmales Frequenzspektrum (aber eben keine Delta-Funktion).

Polarisation

Für Strahlung, die sich in z-Richtung ausbreitet, kann der E-Vektor irgendwo in der x-y-Ebene schwingen.

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Basis ist:

$$\vec{E}_x(z,t) = E_x \hat{e}_x \sin(kz - \omega t + \phi_x)$$
$$\vec{E}_y(z,t) = E_y \hat{e}_y \sin(kz - \omega t + \phi_y)$$

Die allgemeine Lösung ist die Kombination dieser beiden Teillösungen. E_x, E_y, ϕ_x, ϕ_y bestimmen den Polarisationszustand der Welle.

Die Polarisation ist für die Fernerkundung wichtig.

Polarisation

- E-Feld kann in einer beliebigen Richtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen.
- Bild rechts zeigt die Bewegung des E-Feld Vektors in der Ebene senkrecht zur Ausbreitung.

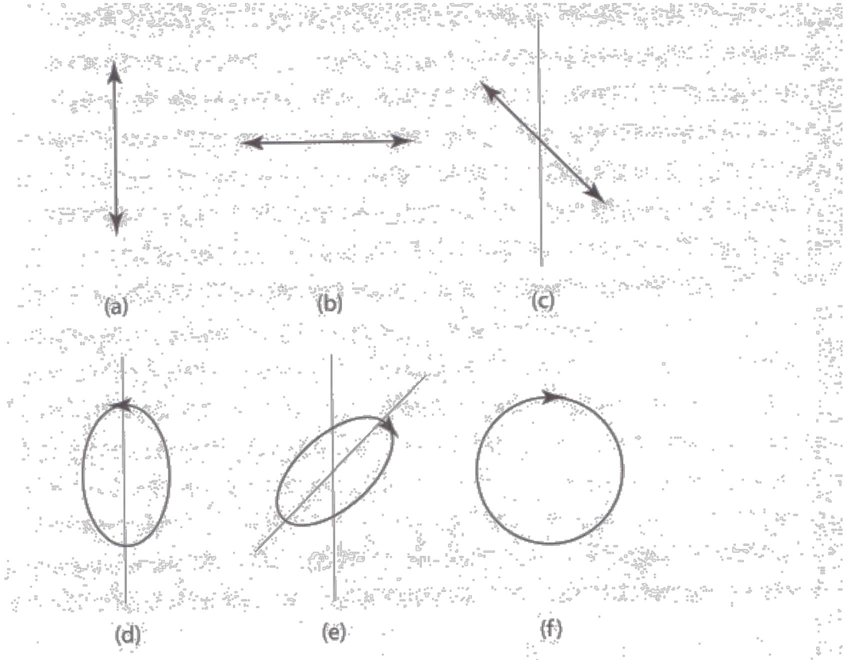


Fig. 2.2: Examples of different types of polarization, depicted in terms of the vibration of the electric field vector in a fixed plane perpendicular to the direction of propagation. (a) vertical linear, (b) horizontal linear, (c) linear at 45°, (d) elliptical counterclockwise, with vertical major axis, (e) elliptical clockwise, with the major axis oriented at a 45° angle, (f) circular, clockwise. Note that an infinity of combinations of orientation, ellipticity, and sense of rotation are also possible.

- Grundfälle:
  - linear in verschiedenen Richtungen
  - Elliptisch, zirkulär
  - Alle Formen lassen sich als Überlagerung zweier senkrechter E-Wellen mit verschiedener Phase verstehen.

Lineare und zirkulare Polarisation

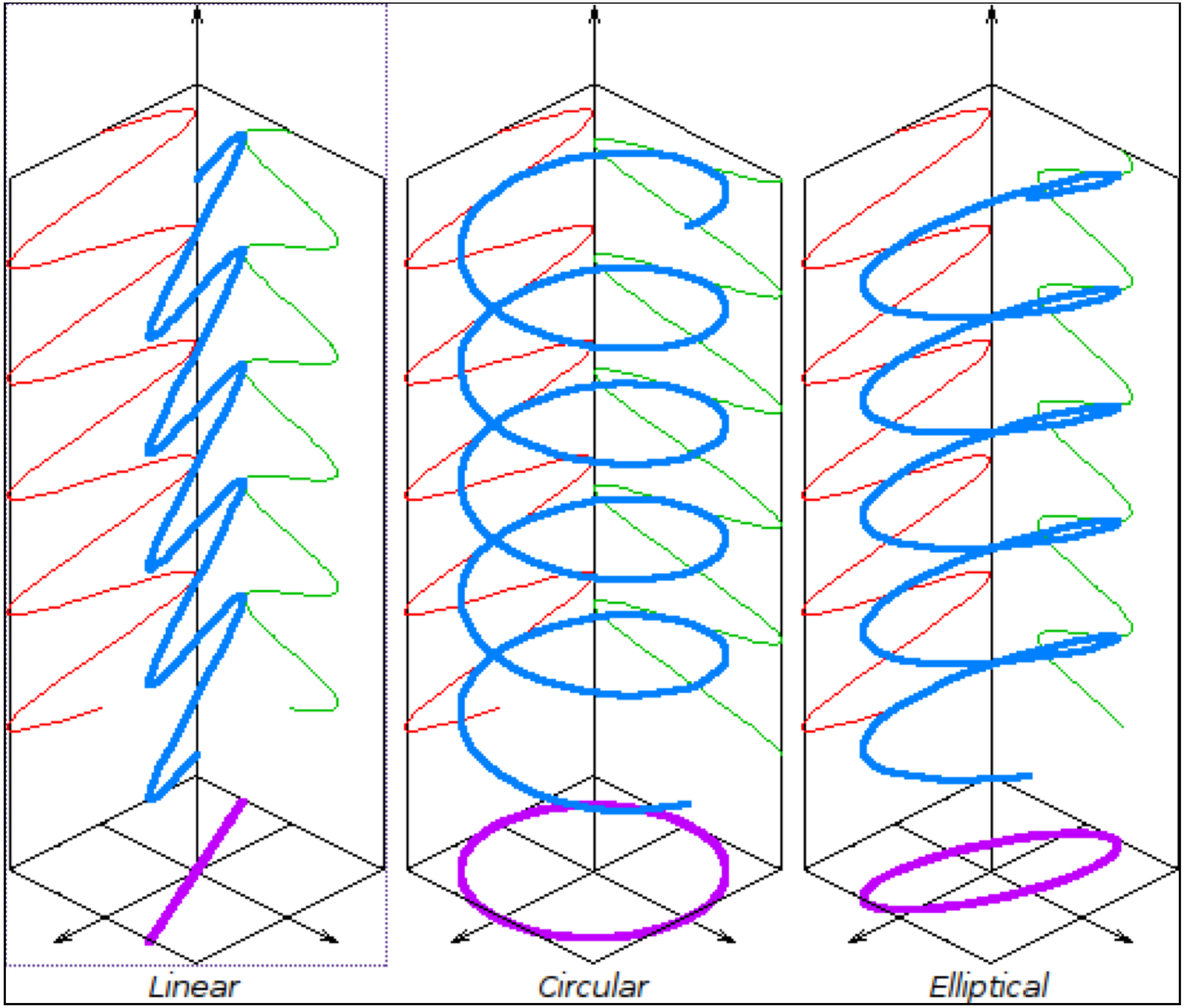
Linear:

- E-Vektor-Spitze beschreibt eine Linie in der x-y-Ebene.
- Bedingung: $\phi_y - \phi_x = 0, \pi, -\pi$ (in Phase)

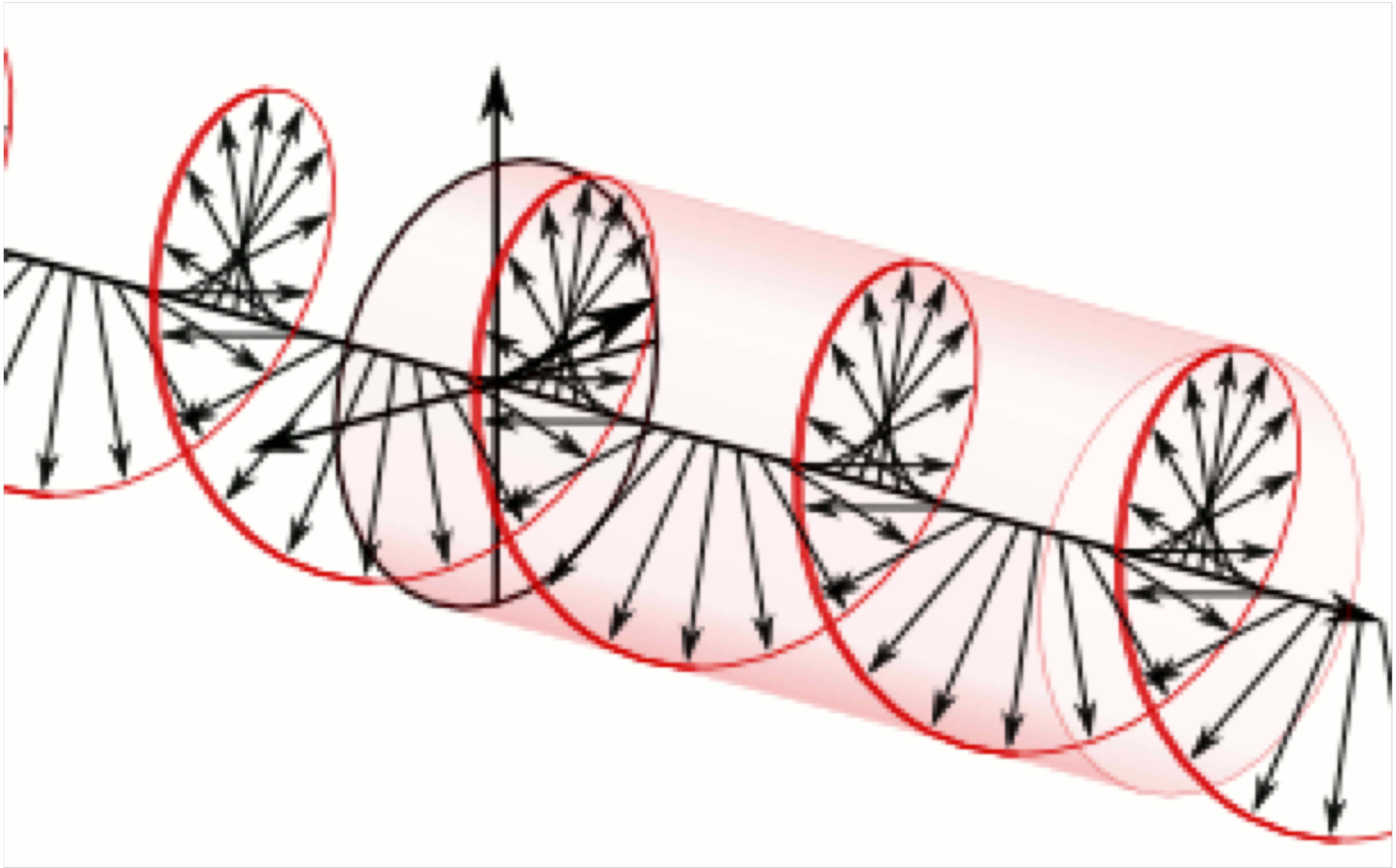
Zirkular:

- E-Vektor-Spitze beschreibt einen Kreis in der x-y-Ebene.
- Bedingung: $\phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (90° Phasenverschoben)
  und $E_x = E_y$

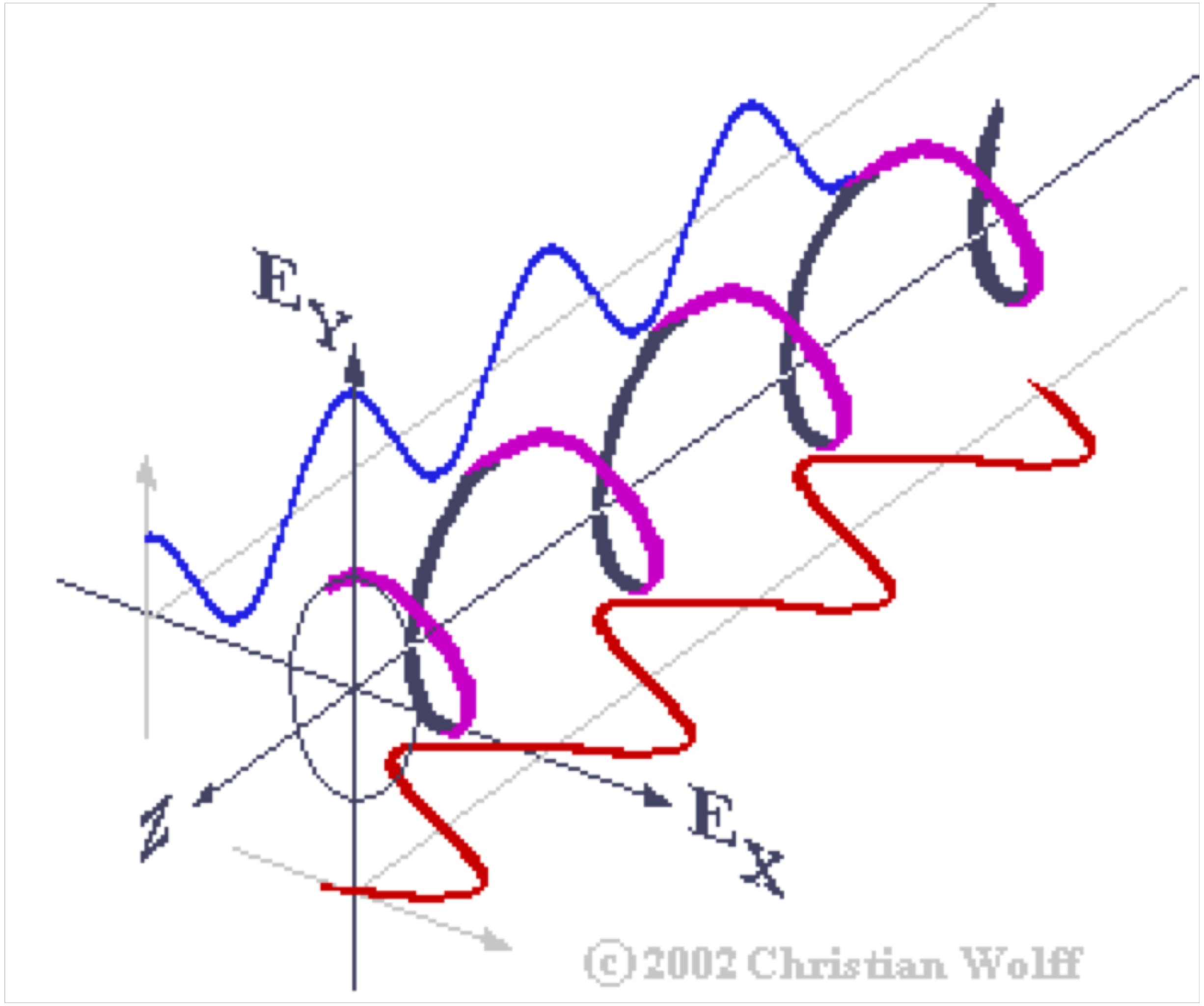
Elliptisch: Irgendwas dazwischen (allgemeiner Fall)



Source: Wikipedia
Different kinds of polarisation.



Animation: Wikipedia



Quelle: Chrisitan Wolff,
http://www.radartutorial.eu

Relevanz der Polarisation für die Meteorologie

- Kann ausgenützt werden, um bestimmte Informationen zu gewinnen.
  Beispiel: RADAR/LIDAR, das zurückgestreute Signal in der orthogonalen Polarisation (zur gesendeten) enthält Information über die Form der streuenden Teilchen.
- Detektoren können oft nur eine Polarisation empfangen (Beispiel Mikrowellenradiometer / AMSU). Oft eher lästig, muss aber berücksichtigt werden.

Polarisation bei Reflektion

Wikipedia

Effect of a polarizer on reflection from mud flats. In the picture on the left, the polarizer is rotated to transmit the reflections as well as possible; by rotating the polarizer by 90° (picture on the right) almost all specularly reflected sunlight is blocked.

Polarisation bei Streuung

Wikipedia

The effects of a polarizing filter on the sky in a photograph. The picture on the right uses the filter.

Polarisation und Kohärenz

- Kohärente Strahlung hat immer eine wohldefinierte Polarisation. (Ist ja nur eine einzige Welle.)
- Inkohärente Strahlung kann polarisiert sein, oder auch nicht. ➔ Wichtige Information ist dann der **Polarisationsgrad** (Definition später).
- Natürliche Strahlung ist oft zunächst unpolarisiert, kann aber durch Interaktion mit Materie polarisiert werden (durch Reflektion oder Streuung).

- Wie misst / charakterisiert man den Polarisationszustand inkohärenter (natürlicher) Strahlung?

  → **Stokes Vektor**

Stokes Vektor

Ⓣ

Ein Vektor von genau 4 verschiedenen Intensitäten, die mit entsprechenden Detektoren einfach gemessen werden können:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{totale Intensität} \\ \text{vertikal – horizontal} \\ +45^\circ \;\; – -45^\circ \\ \text{rechts zirkular – links zirkular} \end{array}$$

Polarisation auf der Basis von **Intensitäten**, nicht **Amplituden**.

Stokes Vektor

Ⓣ

$$I = I_v + I_h = I_{+45^\circ} + I_{-45^\circ} = I_r + I_l$$

$$Q = I_v - I_h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(E_v^2 - E_h^2\right)$$

$$U = I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(E_{+45^\circ}^2 - E_{-45^\circ}^2\right) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_v E_h \cos\left(\phi_v - \phi_h\right)$$

$$V = I_r - I_l = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_v E_h \sin\left(\phi_v - \phi_h\right)$$

- Alle I_x sind Intensitäten, alle E_x Amplituden, und die ϕ_x Phasenunterschiede.
- Vorzeichen für U+V: Koordinatensystem des Betrachters, der der Welle entgegen schaut.
- Die Definition mit Amplituden und Phasen gilt nur für kohärente Strahlung, die mit Intensitäten ist allgemein.

Beispiele

Alle Beispiele für $\dfrac{\vec{S}}{I}$

[1 0 0 0]

unpolarisiert

[1 1 0 0]

vollständig vertikal polarisiert

[1 0.5 0 0]

teilweise vertikal polarisiert

[1 -1 0 0]

vollständig horizontal polarisiert

[1 0 1 0]

vollständig +45° linear polarisiert

[1 0 0 0.5]

teilweise rechts zirkular polarisiert

Das Besondere an den Stokes Parametern

- Beschreiben vollständig den Polarisationszustand inkohärenter Strahlung
- Können einfach gemessen werden

Unpolarisiert:

$$Q = U = V = 0$$

?

Vollständig polarisiert:

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

?

Polarisationsgrad:

$$p = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}$$

?

Additivität

Stokes Parameter sind **additiv** für inkohärente Strahlung:

[1 0 0 0] = 0.5 [1 1 0 0] + 0.5 [1 -1 0 0]

(Upolarisiert besteht zu gleichen Teilen aus horizontal + vertikal polarisierter Strahlung.)

Übersicht

- Maxwell Gleichungen im Vakuum
- Elektromagnetische Wellen
- Frequenzspektrum
- Kohärenz und Polarisation
- **Wellen im Medium**
- Komplexer Wellenvektor
- Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- Zusammenfassung

Rolle des Mediums für die Maxwellgleichungen

Ⓔ

Wird ein Material ins Elektrische oder Magnetische Feld gebracht, so wird es polarisiert oder magnetisiert. Man muss dann zwei zusätzliche Felder einführen, *D* und *H*.

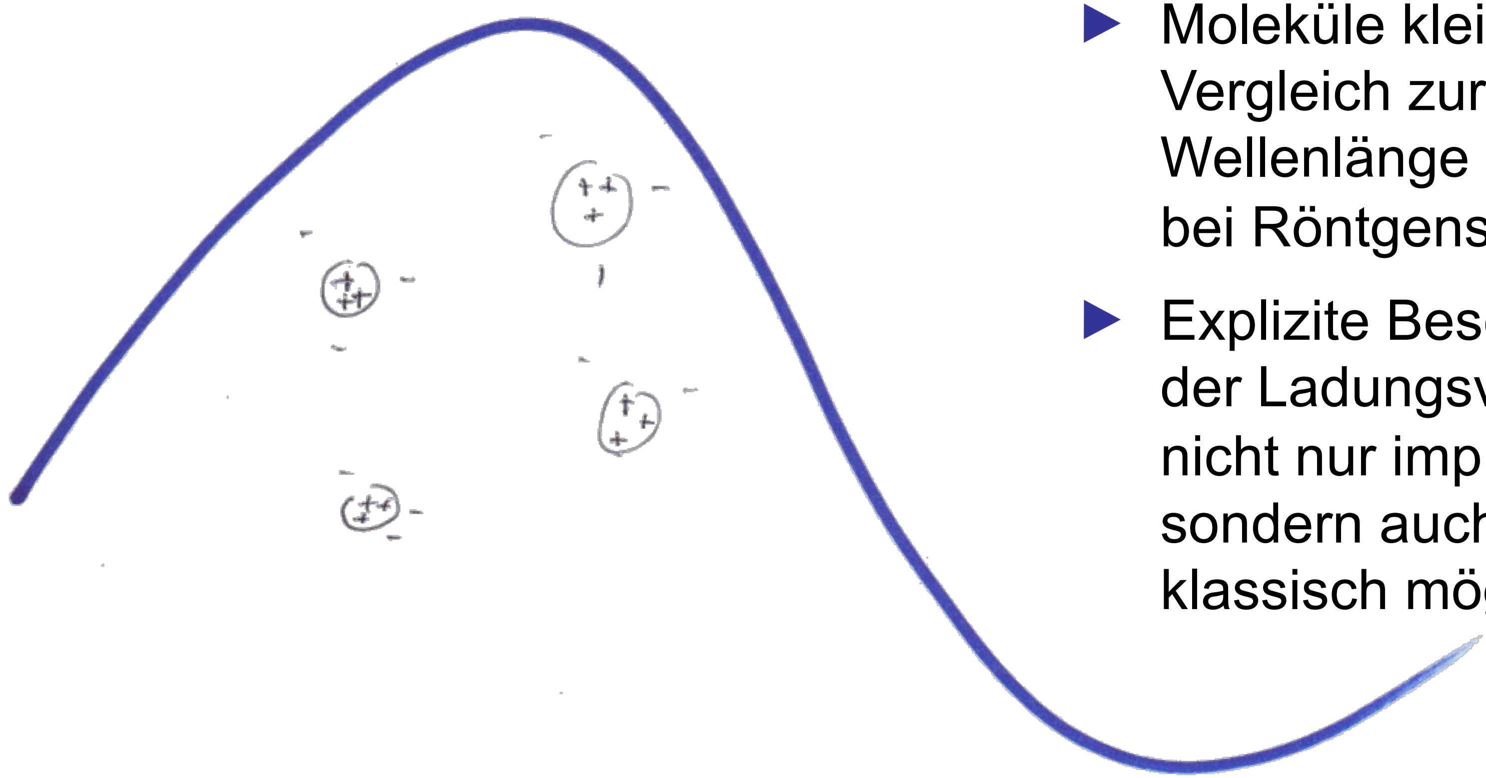
Idee damit:

D ist das elektrische Feld der **freien** Ladungen, also ohne Ladungen die in Atomen gebunden sind.

H ist das magnetische Feld der **freien** Ströme.

Man spricht auch von mikroskopischen (Vakuum) und makroskopischen (mit Material) Maxwellgleichungen.

Medium und elektromagnetische Welle



- Moleküle klein im Vergleich zur Wellenlänge (nicht mehr bei Röntgenstrahlen)
- Explizite Beschreibung der Ladungsverteilung nicht nur impraktikabel, sondern auch nicht klassisch möglich

elektrische Flussdichte $\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (Feld der freien Ladungen)

magnetische Feldstärke $\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ (Feld der freien Ströme)

$\vec{P}$: Polarisation (des Mediums, hier nicht der Strahlung)

$\vec{M}$: Magnetisierung

Maxwell Gleichungen mit Materie

Die Maxwell-Gleichungen sind dann:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{E} &= -\partial\vec{B}/\partial t \\
\operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\
\operatorname{div}\vec{D} &= \rho_{\text{frei}} \\
\operatorname{div}\vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

In den beiden Gl. in denen Ströme und Ladungen vorkommen wird E durch D und B durch H ersetzt.

Plus Materialgleichungen (hier für isotropes lineares Medium):

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\
\vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}
\end{aligned}$$

Materialkonstanten

- Die **Dielektrizitätskonstante** ε beschreibt die elektrischen Eigenschaften des Materials.
- Die **Permeabilität** μ beschreibt die magnetischen Eigenschaften des Materials.

Wellengleichung mit Materialkonstanten

Ⓣ

Die analoge Herleitung wie im Vakuumfall ergibt für Wellengleichung im Medium:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\, \mu\, \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Die Lösung ist wieder eine ebene Welle $\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}$,

mit der Dispersionsrelation

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\varepsilon\, \mu\, \mu_0\, \varepsilon_0} = \frac{c_0^2}{n^2}$$

c^2 $\quad$ c_0^2

$$\boxed{n^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = \varepsilon\mu}$$

Die Materialkonstante n heißt **Brechungsindex**.

Geschwindigkeit der Welle im Medium

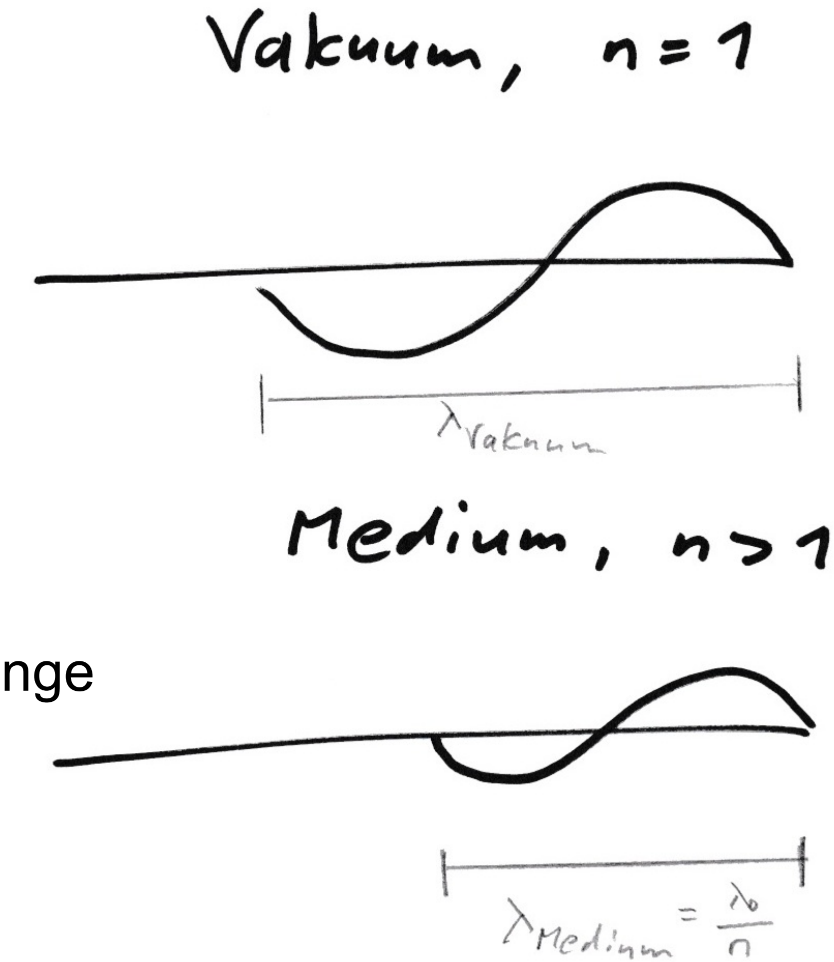
- Die Welle läuft also in jedem Medium langsamer als im Vakuum, und zwar mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{c_0}{n}$$

Wellenlänge und Frequenz im Medium

Die Dispersionsrelation zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, Wellenlänge, und Frequenz gilt auch im Medium:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c_0}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$



Wellenlänge also im Medium kürzer!

Macht intuitiv Sinn, weil in einer Schwingungsperiode genau eine Wellenlänge zurückgelegt wird

Die Frequenz bleibt gleich!

Dispersion – Begriffsklärung

Dispersion kommt von lat. dispersio „Zerstreuung“, von dispergere „verteilen, ausbreiten, zerstreuen“ (Wikipedia), und bezeichnet:

Allgemein: Eine (feine) Verteilung, Ausbreitung oder Zerstreuung.

Physik: die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle von der Wellenlänge.

Die **Dispersionsrelation** ist die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz ω und der Kreiswellenzahl k:

$$k = \mathrm{f}(\omega)$$

Im einfachsten Fall sind Kreisfrequenz und Kreiswellenzahl stets proportional

$$k = \omega / v$$

mit der konstanten Phasengeschwindigkeit $v=\omega/k$. In diesem Fall gibt es also **keine** Dispersion.

Dispersion für EM Wellen in Material

Für EM Wellen im Material (z.B. Atmosphäre, Glas) gilt:

$$\lambda = \frac{c_0}{n\nu} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{n\omega}{c_0}$$

Wenn also $n = n(\nu)$, dann gibt es Dispersion. Man spricht dann von einem **dispersiven Medium**.

Luft ist nicht dispersiv, Glas schon.

Zwei verschiedene Wellenzahlen

Achtung Begriffsverwirrung:

Die (Kreis)wellenzahl *k* ist verwandt mit der **Wellenlänge**.

$$(\mathit{Kreis})\text{wellenzahl:} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Es gibt aber auch eine **Frequenzeinheit** „Wellenzahl“ (Kaiser):

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c_0} = \frac{1}{\lambda_0} \qquad (\lambda_0 = \text{ Wellenlänge im Vakuum})$$

Die beiden sind konzeptionell verschieden, und unterscheiden sich numerisch im Vakuum um 2*π.*

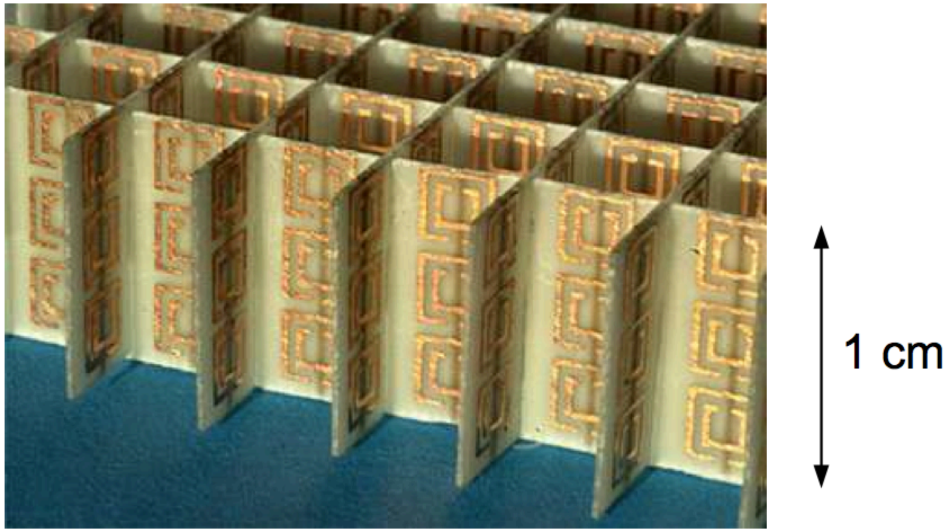
Negativer Brechungsindex?

Dispersionsrelation $\boxed{n^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = \varepsilon\mu}$

Kurioser Spezialfall: Weil die Dispersionsrelation strenggenommen für die Quadratische Gleichung oben gilt, sind auch negative Werte von n physikalisch möglich. Diese lassen sich sogar in Meta-Materialien tatsächlich experimentell nachweisen. In solchen Medien läuft die Phase dann rückwärts! Die Theorie dazu hat Victor Veselago 1968 entwickelt (ohne an Metamaterialien zu denken). Erst Ende der 1990-er wurde die Idee von John Pendry und anderen wieder aufgegriffen und entsprechende Metamaterialien entwickelt.

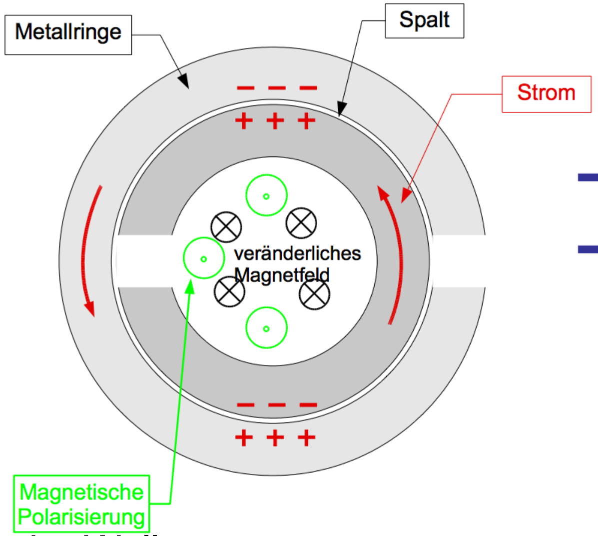
Meta-Material

- Aus kleinen Schwing-kreisen lässt sich ein Meta-Material aufbauen
- Brechungsindex lässt sich „designen“ durchs Design der Schwing-kreise
- So kann man sich auch modellhaft natürliche Medien vorstellen (die Moleküle bilden die Schwingkreise)



(R. A. Shelby, D. R. Smith, und S. Schultz, Science, 2001)

Der Spalt-Ring-Oszillator



Große Kapazität zwischen den Ringen

→ Strom kann fließen

→ Schwingkreis, wechselwirkt mit dem Magnetfeld

(J.B. Pendry et al., IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1999)

Übersicht

- Maxwell Gleichungen im Vakuum
- Elektromagnetische Wellen
- Frequenzspektrum
- Kohärenz und Polarisation
- Wellen im Medium
- **Komplexer Wellenvektor**
- Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- Zusammenfassung

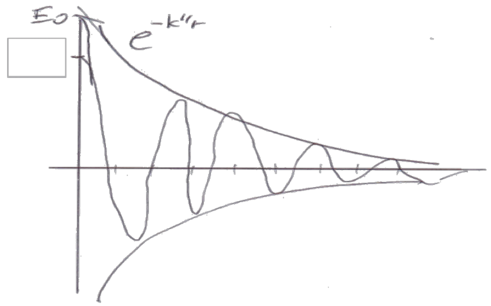
Der komplexe Wellenvektor

- Ebene Welle nochmal: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$
- Der Einfachheit halber Ausbreitung in skalarer *r*-Richtung: $\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 e^{i(kr-\omega t)}$
- Bisher hatte ich stillschweigend angenommen, *k* wäre real. Was wäre, wenn *k* komplex wäre?

$$k = k' + ik''$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 e^{i(k'r+ik''r-\omega t)}$$

$$= \vec{E}_0 e^{i(k'r-\omega t)} e^{-k''r}$$



- k´´ heißt Amplituden-Absorptionskoeffizient. Einheit [1/m]. Er beschreibt, wie die Amplitude der Welle abnimmt (**Absorption**).

Schönere Abbildung der Dämpfung einer Welle

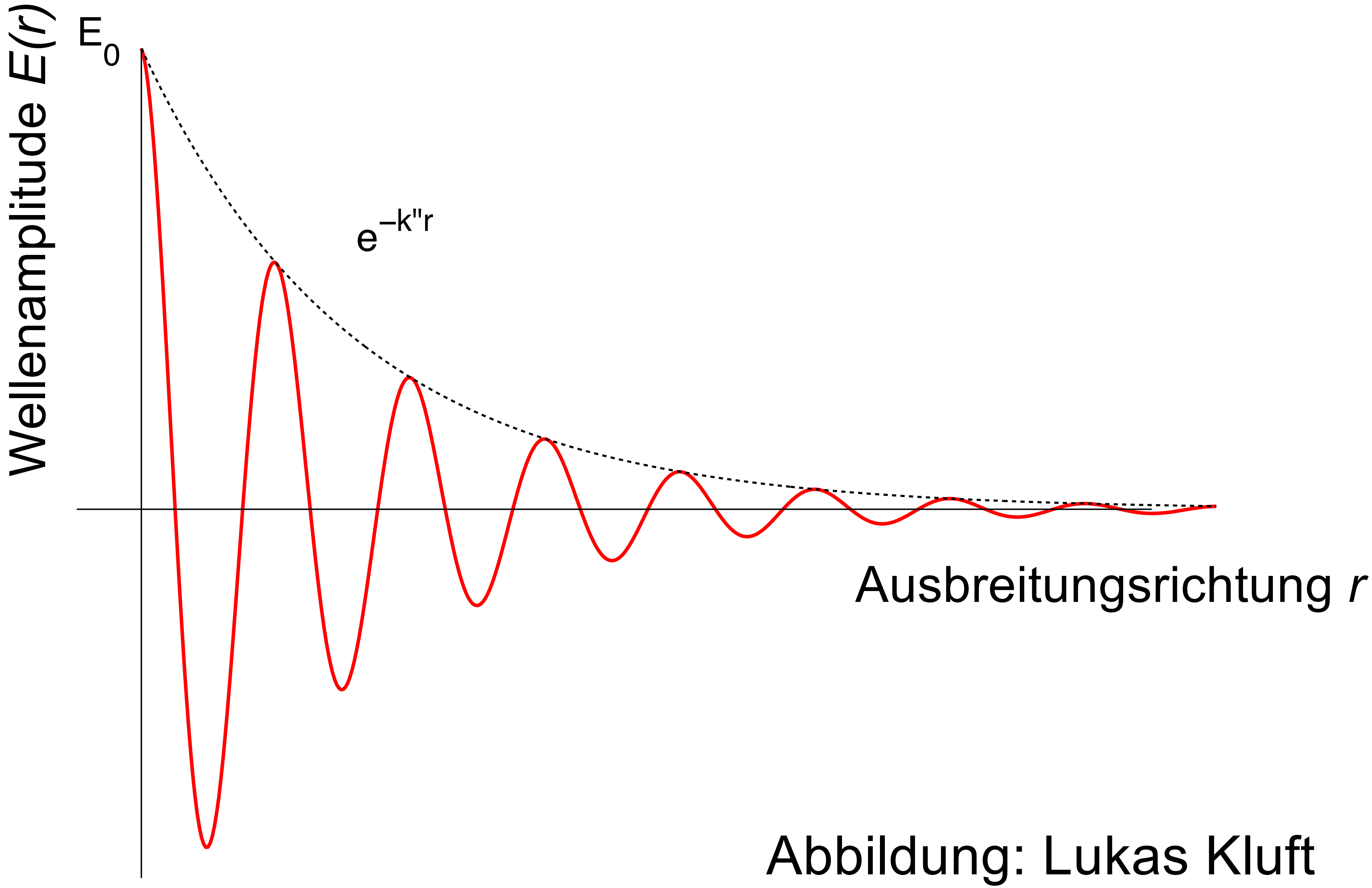


Abbildung: Lukas Kluft

Amplitudenabsorption und Energieabsorption

Für den Energiefluss der Welle gilt wie oben hergeleitet:

$$F(r) \propto \left[E_0 e^{-k''r}\right]^2$$

daher $F(r) = F_0 e^{-2k''r}$

(Energiefluss proportional zum Quadrat der Amplitude.)

Der **Energie-**Absorptionskoeffizient für die der Welle ist daher:

$$\alpha = 2k''$$

Absorptionskoeffizient ohne Zusatz bedeutet meistens α, nicht k''.

Komplexer Brechungsindex

Dispersionsrelation:

$$c = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$$

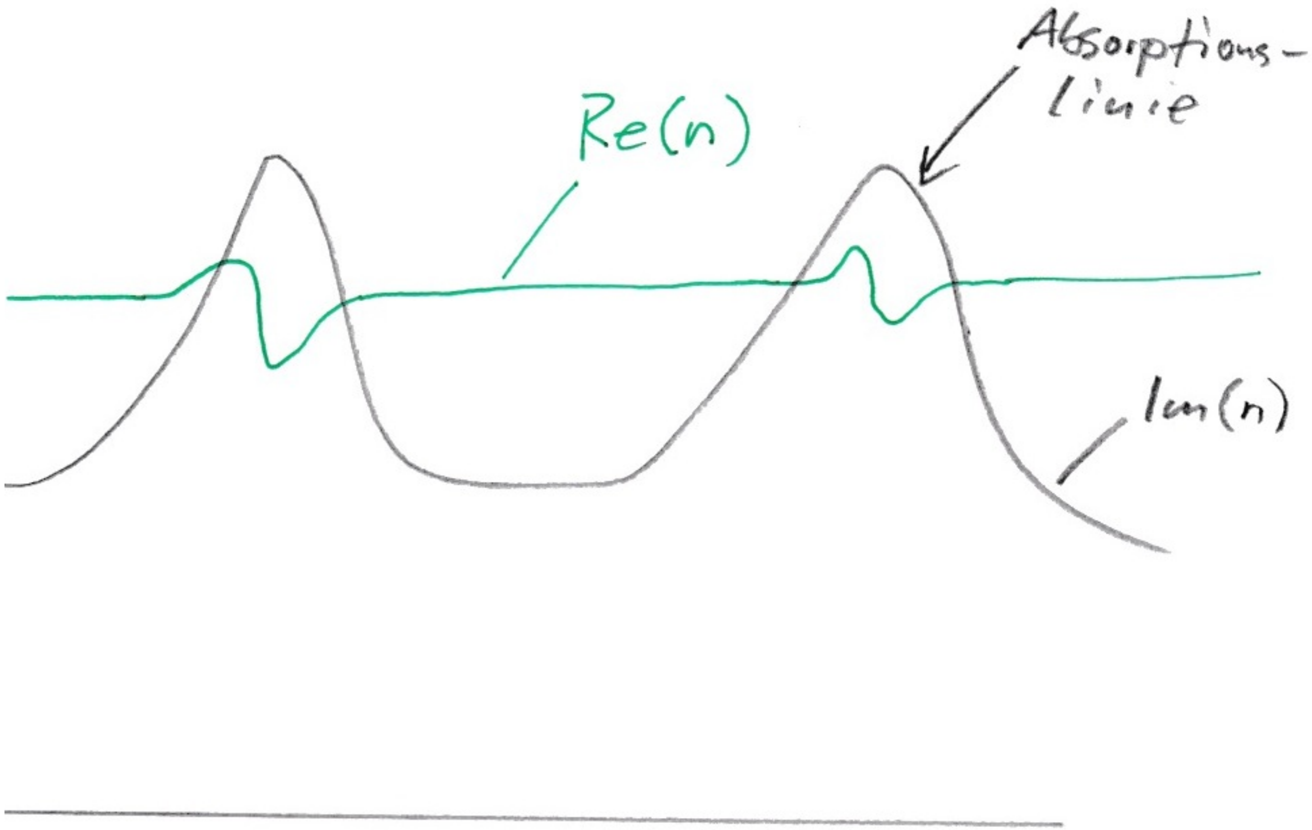
$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega n}{c_0} = \frac{2\pi\nu n}{c_0}$$

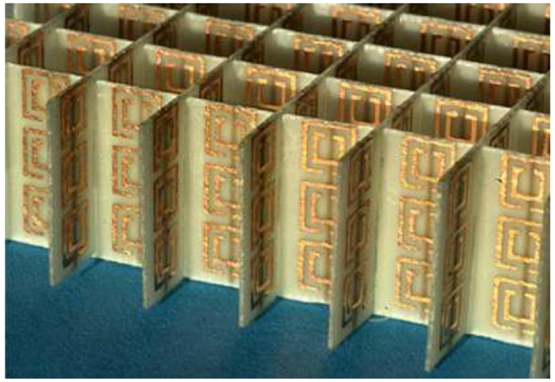
Die Frequenz *ν* ist reell. Damit *k* komplex sein kann, muss also *n* komplex sein.

Explizite Formel für Energieabsorptionskoeffizient *α:*

$$\alpha = \frac{4\pi\nu n''}{c_0} = \frac{4\pi n''}{\lambda_0}$$

Frequenzabhängigkeit des komplexen Brechungsindex





Gedankenbild: kleine Oszillatoren im Medium, die mitschwingen und Energie absorbieren können (**Lorentz Modell**).

Re(n) hängt kaum von Frequenz ab → Wird mit einfachen Formeln beschrieben.

Im(n) hängt stark von der Frequenz ab → Linienspektrum

Vom anderen Ende her betrachtet

- (Homogenes) Medium bewirkt mehrere Dinge:
  - Strahlung wird absorbiert (Spektrallinien)
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit wird langsamer (dieser Effekt heißt Brechung, warum wird im nächsten Kapitel noch klarer)
- Man kann beide Effekte zusammen mit dem komplexen Brechungsindex n beschreiben. (Das ist elegant, und folgt direkt aus den Maxwell-Gleichungen.)
- Im „Alltag“ betrachtet man Absorption und Brechung meistens als zwei komplett verschiedene Phänomene.
- Oft bedeutet „Brechungsindex“ nur $\mathrm{Re}(n)$.

Übersicht

- Maxwell Gleichungen im Vakuum
- Elektromagnetische Wellen
- Frequenzspektrum
- Kohärenz und Polarisation
- Wellen im Medium
- Komplexer Wellenvektor
- **Optischer Weg und Anwendung GPS Messung**
- Zusammenfassung

Der optische Weg

- Im Medium läuft die Welle langsamer, und die Wellenlänge ist kleiner.
- Man kann das so sehen, dass der zurückzulegende Weg scheinbar länger wird.
- Optischer Weg:

$$L = \int_{\text{Start}}^{\text{Ziel}} \mathrm{Re}(n(s))\, ds$$

- Achtung, der Weg auf dem das Integral zu rechnen ist, kann vom geometrisch kürzesten abweichen (warum, das kommt im nächsten Kapitel).
- Diskret: **Trapezregel** ?

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}(n_i)\Delta s_i \quad \text{oder genauer } L = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mathrm{Re}(n_{i+1}) + \mathrm{Re}(n_i)}{2}(s_{i+1} - s_i)$$

Anwendung GPS

- Der gemessene „optische“ Abstand eines GPS Empfängers zum Satelliten ist durch die Atmosphäre scheinbar größer als der tatsächliche geometrische Abstand.
- Annahme: Tatsächlicher Abstand bekannt.
- Dann sagt die Differenz etwas über die Atmosphäre.
- Welche Information enthält so eine Messung?
  ➔ **Hausaufgabe!**

Achtung Verwechslungsgefahr!

- Optischer **Weg** (Synonyme: optische Weglänge, optical path length, optical distance):
  - Integral über Re(n)
  - Wie stark wird die Welle verzögert?
- Optische **Dicke** (Synonyme: optische Tiefe, optical depth, optical thickness):
  - Integral über den Extinktionskoeffizienten (= Absorptionskoeffizient α von oben, plus andere Effekte)
  - Verwandt mit Im(n)
  - Zentrale Größe bei der Lösung der Strahlungstransfergleichung (kommt später)
  - Wie stark wird die Welle abgeschwächt?
- Optische **Dichte**
  - Kann sich entweder auf Re(n) oder auf Im(n) beziehen
  - Sollte man also wohl besser vermeiden!

Übersicht

- ▶ Maxwell Gleichungen im Vakuum
- ▶ Elektromagnetische Wellen
- ▶ Frequenzspektrum
- ▶ Kohärenz und Polarisation
- ▶ Wellen im Medium
- ▶ Komplexer Wellenvektor
- ▶ Optischer Weg und Anwendung GPS Messung
- ▶ **Zusammenfassung**

Zusammenfassung

- Dieses Kapitel war ein „Überflug“ über viel Physik aus Schule und Physikkurs.
- Viele Eigenschaften von Strahlung kann man anhand der Maxwell Gleichungen verstehen, aber
  - Quantenphänomene fehlen (wichtig z.B. für Absorption/Emission).
  - Oft zu „low level“ für die praktische Anwendung, andere Bilder sind viel einfacher, z.B. geometrische Optik.
- Auch im „high level“ Bild sind die Welleneigenschaften der Strahlung oft wichtig.

Leseempfehlung

- Petty, Kapitel 2.0 bis 2.5.