# Амортизированный анализ

- 1. Стек с multipop
- 2. Двоичный счетчик
- 3. Стек с multipop и multipush.

Остается ли справедливой амортизированная оценка стоимости стековых операций, равная O(1), если включить в множество стековых операций операцию multipush, помещающая в стек k элементов?

- 4. Счетчик с decrement
  - Покажите, что если бы в примере с k-битовым счетчиком была включена операция decrement, то стоимость операций была бы равна  $\Theta(kn)$ .
- 5. Предположим, что над структурой данных выполняется n операций. Стоимость i-ой по порядку операции равна i, если i это точная степень двойки, и 1 иначе. Определить с помощью группового анализа, метода предоплаты и метода потенциалов амортизированную стоимость операции.
- 6. Рекурсивный обход дерева
- 7. Стек с копированием.

Предположим, что над стеком выполняется последовательность операций. Размер стека при этом никогда не превышает k. После каждых k операций производится резервное копирование стека. Присвоив различным стековым операциям соответствующие стоимости, покажите, что стоимость n стековых операций, включая копирование стека, равна O(n).

8. Счетчик с reset.

Предположим, что нам нужно иметь возможность не только увеличивать показания счетчика, но и сбрасывать его. Считая, что время проверки или модификации одного бита составляют  $\Theta(1)$ , покажите, как осуществить реализацию счетчика в виде массива битов, чтобы выполнение произвольной последовательности из n операций Increment и Reset над изначально обнуленным счетчиком потребовало бы время O(n).

- 9. Чему равна полная стоимость выполнения n стековых операций push, pop, multipop, если предположить, что в начале стек содержит k объектов, а в конце m.
- 10. Очередь с минимумом. Найти амортизированную стоимость операций.
- 11. Дек с минимумом на стеках. Найти амортизированную стоимость операций.

### Деревья отрезков

- 1. Найти минимум на отрезке от l до r, а так же число элементов, равных этому значению.
- 2. Найти значение суммы  $a_l a_{l+1} + a_{l+2} a_{l+3} + \dots \pm a_{r-1}$ .
- 3. Найти значение суммы  $a_l + 2a_{l+1} + 3a_{l+2} + \dots + (r-l)a_{r-1}$ .
- 4. Подсчёт количества нулей, поиск k-го нуля.
- 5. Посчитать количество инверсий в перестановке.
- 6. Есть массив a из n целых чисел и две операции:
  - (a) присвоить значение:  $a_i = x$
  - (b) найти минимальное i:
    - i. для которого  $a_i > k$
    - ії. для которого  $a_i \geq k$  на отрезке от l до r
- 7. Покраска забора запросы в порядке следования  $[l_i \dots r_i]$  покрасить в цвет  $c_i$  найти сколько какого цвета в итоге.
- 8. Покраска забора 2 красит несколько ребят, и некоторые из них только через одну, а запросы такие же просто понять, что нам нужно два дерева отрезков
- 9. Дано n целых чисел  $a_1, a_2, \ldots, a_n$  и q запросов. Запрос числа l и k. Ответ на запрос минимальное число r, такое что  $a[l \ldots r]$  содержит k различных чисел. оффлайн обработка.

- 10. Есть массив a из n булеанов. Нужно обрабатывать запросы за O(logn):
  - (a) присвоить значение x всем элементам отрезка, найти ближайшую к i единицу
  - (b) изменить значение всех элементов отрезка на противоположное, найти число единиц на отрезке
  - (c) присвоить значение x всем элементам отрезка,
    - і. выполнить for (i = l ... r 1) : a[i] = a[i] and a[i 1],
    - іі. выполнить for (i = l ... r 1) : a[i] = a[i] or a[i 1],
    - ііі. найти число единиц на отрезке
  - (d) присвоить значение х всем элементам отрезка, найти число непрерывных отрезков из единиц
  - (е) присвоить значение х всем элементам отрезка, найти самый длинный непрерывный отрезок из единиц
- 11. Сумма квадратов: мы хотим вычислить сумму квадратов на отрезке с возможностью увеличения на отрезке и присваивания на отрезке.
- 12. Дано n целых чисел  $a_1, a_2, \ldots a_n$  и q запросов. Запрос числа l и k. Ответ на запрос минимальное число r, такое что  $a[l \ldots r]$  содержит k различных чисел. оффлайн обработка + онлайн (можно просто хранить все возможные деревья, если памяти не жалко)
- 13. Дан массив цифр от 0 до 9. Необходимо обрабатывать запросы «увеличить цифру на 1» на отрезке (при этом 9 переходит в 0), а также запросы на сумму чисел на отрезке.
- 14. Дан отсортированный массив a длины n. Необходимо ответить на qзапросов, каждый из которых бывает двух типов:
  - (a) сделать  $a_i = \min(a_i, x)$  для всех  $i \leq r$
  - (b) Найти сумму на отрезке от l до r
- 15. В языке племени Умба количество слогов определяется не количеством гласных букв в слове, а количеством подряд идущих одинаковых символов. Например, в словах "a", "aaaa", "aaba" и "aaaabbaabbcee" ровно 1, 1, 3 и 7 слогов соответственно. Все слова в языке племени это непрерывные подстроки главной строки S. Длина S составляет ровно n символов и никогда не меняется. Однако, допустимы изменения самой строки S, что добавляет новые слова и запрещает старые. Надо придумать структуру данных для выполнения следующих операций:
  - (a) Поменять символ в строке S на позиции i на новый символ x
  - (b) Посчитать количество слогов в слове, которое является (l,r)-подстрокой строки S
- 16. Дан массив a длины n, все числа целые неотрицательные и не превосходят C. Необходимо обработать онлайн q запросов, каждый из которых бывает трёх типов:
  - (a) Изменить какое-то  $a_i$
  - (b) Все числа на отрезке  $[l_i; r_i]$  взять по модулю  $x_i$
  - (c) Найти сумму на отрезке  $[l_i; r_i]$
- 17. Дан массив inv, где inv[i] это количество инверсий, которые образует i-ый элемент с элементами, которые левее его. Хотим по массиву inv восстановить исходную перестановку.
- 18. Есть бесконечная последовательность, состоящая из всех положительных целых чисел в порядке возрастания:  $p=1,2,3,\ldots$ 
  - К ней последовательно применили n операций swap. Операция swap(a,b) меняет местами элементы последовательности на позициях a и b. Требуется найти количество инверсий после каждой операции swap, т.е. количество таких пар индексов (i,j), что i < j и  $p_i > p_j$ .
- 19. Вам даны две перестановки p и q, состоящие из n элементов, и m запросов вида:  $l_1, r_1, l_2, r_2$  ( $l_1 \le r_1; l_2 \le r_2$ ). Ответом на запрос является количество целых чисел от 1 до n, таких что их позиция в первой перестановке находится в отрезке  $[l_1, r_1]$  (границы отрезка включаются), а позиция во второй перестановке в отрезке  $[l_2, r_2]$  (границы отрезка включаются).
  - Позицией числа v ( $1 \le v \le n$ ) в перестановке  $g_1, g_2, \ldots, g_n$  называется такое число i , что  $g_i = v$  .
- 20. Вам дан ациклический связный граф. Необходимо ответить на q запросов: найти LCA для вершин v и u.
- 21. Есть строка из n круглых скобок. Нужно обрабатывать запросы:
  - (a) изменить i-ю скобку
  - (b) проверить, правильная ли сейчас последовательность

- (c) проверить, является ли правильной скобочной последовательностью подстрока с l до r
- (d) найти наибольший префикс подстроки с l до r, который является правильной последовательностью
- 22. В решении этой задачи необходимо использовать Дерево отрезков <u>без интервальной модификации</u>. Опишите алгоритм решения следующей задачи. Перед вами полоска длины N, разбитая на N одинаковых квадратиков, пронумерованных слева направо числами от 0 до N-1. За одну операцию изменения (метод, предоставляемый интерфейсом вашей структуры данных) вы должны перекрасить все клетки с номерами от L до R включительно: белые должны стать черными, а черные белыми. В запросах поиска необходимо определить цвет клетки в позиции X. Изначально задается раскраска полоски в черный и белый цвет. Интерфейс:
  - (a) Init(vector colors); Время работы метода должно быть линейным
  - (b) ChangeColor(L, R); Время работы метода должно быть O(log N)
  - (c)  $\operatorname{GetColor}(X)$ . Время работы метода должно быть  $O(\log N)$
- 23. Дано множество из n точек в трехмерном пространстве с вещественными координатами  $(x_i, y_i, z_i)$ . Точка  $(x_i, y_i, z_i)$  называется оптимальной по Парето, если не существует никакой другой точки  $(x_j, y_j, z_j)$  в множестве, такой, что  $x_i \le x_j, y_i \le y_j, z_i \le z_j$ , причем хотя бы одно из неравенств строгое. Найти количество точек, оптимальных по Парето в данном множестве.
- 24. Дан массив из п нулей. Предложите структуру, которая умеет реализовывать следующие операции:
  - (a) Установить все значения от l до r в единицу
  - (b) Установить все значения от l до r в ноль
  - (c) Посчитать количество максимальных по включению отрезков, состоящих из единиц, внутри (l, r)-подмассива рассматриваемого массива
- 25. На экране расположены прямоугольные окна, каким-то образом перекрывающиеся (со сторонами, параллельными осям координат). Вам необходимо найти точку, которая покрыта наибольшим числом из них. Окна заданы координатами левой нижней и правой верхней точки.
- 26. В граф добавляются и удаляются ребра. Требуется после каждого изменения печатать количество компонент связности.
- 27. Дано подвешенное дерево с корнем в первой вершине. Все ребра имеют веса (стоимости). Вам нужно ответить на M запросов вида "найти у двух вершин минимум среди стоимостей ребер пути между ними".

#### Meet in the middle

1. Предложите алгоритм, который по заданному числу N находит количество четверок целых положительных чисел (x,y,z,t) - решений уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = N$$

- 2. У вас есть несколько камней известного веса  $w_1, w_2, \dots w_n$ . Придумайте, как распределить камни в две кучи так, что разность весов этих двух куч будет минимальной.
- 3. Задано прямоугольное поле размера  $n \times m$ . В каждой клетке записано целое число; число, записанное в клетке (i,j) равно  $a_{ij}$ .

Ваша задача — посчитать количество путей из клетки (1,1) в клетку (n,m), удовлетворяющих следующим условиям:

- (a) Из клетки можно перемещаться только вниз или только вправо. Более формально, из клетки (i,j) можно переместиться в клетку (i,j+1) или в клетку (i+1,j).
- (b) Xor всех чисел на пути из клетки (1,1) в клетку (n,m) должен быть равен k.
- 4. Даны a, b, m. Хотим найти решение уравнения:

$$a^x = b \mod m$$

где a и m взаимно просты.

5. Дан неориентированный, невзвешенный граф G. Нужно найти количество подклик данного графа. Граф задан матрицей смежности.

#### Разное

- 1. У нас есть число 1, за ход можно заменить его на любое из x + 1, x + 5, 2x, 5x. За какое минимальное число ходов мы можем получить n?
- 2. Даны две последовательности a и b, найти c, являющуюся подпоследовательностью и a, и b такую, что  $len(c) \to \max$ . Например, для последовательностей  $\langle 1, 3, 10, 2, 7 \rangle$  и  $\langle 3, 5, 1, 2, 7, 11, 12 \rangle$  возможными ответами являются  $\langle 3, 2, 7 \rangle$  и  $\langle 1, 2, 7 \rangle$ .
- 3. Дан склад грузов  $a_1, a_2, \ldots, a_n$ . Есть бесконечное множество машин размера K. При погрузке должно выполняться требование, что  $\sum a_i \leq K$ . Загружают машины по одной, погруженная машина сразу уезжает. Погрузчик может брать только самый левый/правый груз из массива. Задача: минимизировать число машин, использованное для перевозки грузов.
- 4. Нам дано n предметов с натуральными весами  $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ . Требуется выбрать подмножество предметов суммарного веса не больше S.
- 5. Дана последовательность a длины n. Найти ее самую длинную возрастающую подпоследовательность.
- 6. Найти количество способов закрасить таблицу  $n \times m$  с помощью 0 и 1 так, чтобы не было квадратов  $2 \times 2$  только из 0 или 1.

### Декомпозиция

- 1. У вас есть поезд, в котором k мест. Поезд идет через N+1 город (занумерованы от 0 до N). Когда человек хочет купить билет, он называет два числа x и y номера станций, откуда и куда он хочет ехать. При наличии хотя бы одного сидячего места на этом участке на момент покупки ему продается билет, иначе выдается сообщение «билетов нет» и билет не продается. Ваша задача написать программу, обслуживающую такого рода запросы в порядке их прихода.
- 2. Надо придумать способ, как можно достаточно эффективно отвечать на следующие запросы:
  - (а) найти сумму на отрезке
  - (b) вставить новый элемент на позицию i
  - (c) удалить *i*-ый элемент
- 3. Научиться отвечать на следующие запросы:
  - (a) Увеличить все элементы на отрезке на x.
  - (b) Найти количество элементов, которые  $\leq x$  на отрезке от l до r.
- 4. Дано k бочонков с медом kegs, стоящие в ряд.

У каждого бочонка есть значение  $s_i$ —текущие количество меда в нем,  $c_i$  - объем бочонка. Есть операция прибавить на отрезке с l по r арифметическую прогрессию:

$$kegs_{l} + a, kegs_{l+1} + a + b, kegs_{l+2} + a + 2b, \dots, kegs_{r-1} + a + (r-1-l) \cdot b$$

Необходимо для каждого бочонка вывести первый запрос, когда он переполнится.

- 5. Дан граф. Два вида запросов:
  - (а) перекрасить вершину в какой-то цвет
  - (b) сказать сколько для данной вершины различных цветов среди ее соседей
- 6. Маленький Петя очень любит играть. Больше всего он любит играть в игру «Лунки». Это игра для одного игрока со следующими правилами:

Есть N лунок, расположенных в ряд, пронумерованных слева направо числами от 1 до N. У каждой лунки изначально установлена своя сила выброса (у лунки с номером i она равна  $a_i$ ). Если вбросить шарик в лунку i, то он тут же вылетит из нее и попадет в лунку  $i+a_i$ , после чего он опять вылетит и т.д.. Если же лунки с таким номером нету, то он просто вылетит за край ряда.

Вам необходимо научиться обрабатывать M ходов, каждый из которых может иметь следующий вид:

- Установить силу выброса лунки a равной b.
- Вбросить шарик в лунку а и посчитать количество прыжков шарика, прежде чем он вылетит за край ряда, а так же записать номер лунки, после выпрыгивания из которой шарик вылетел за край.

## Персистентные структуры

- 1. Дано n целых чисел  $a_1, a_2, \ldots, a_n$  и q запросов. Запрос числа l и k. Ответ на запрос минимальное число r, такое что  $a[l \ldots r]$  содержит k различных чисел.
- 2. Как можно реализовать персистентный двусвязный список? Определить тип персистентности. Посчитать амортизированную оценку для операции insert.
- 3. Как можно реализовать персистентный статический массив? Определить тип персистентности.
- 4. Как можно применить персистентное до для решения задачи про мед.
- 5. Как можно применить персистентное до для решения задачи про две перестановки.