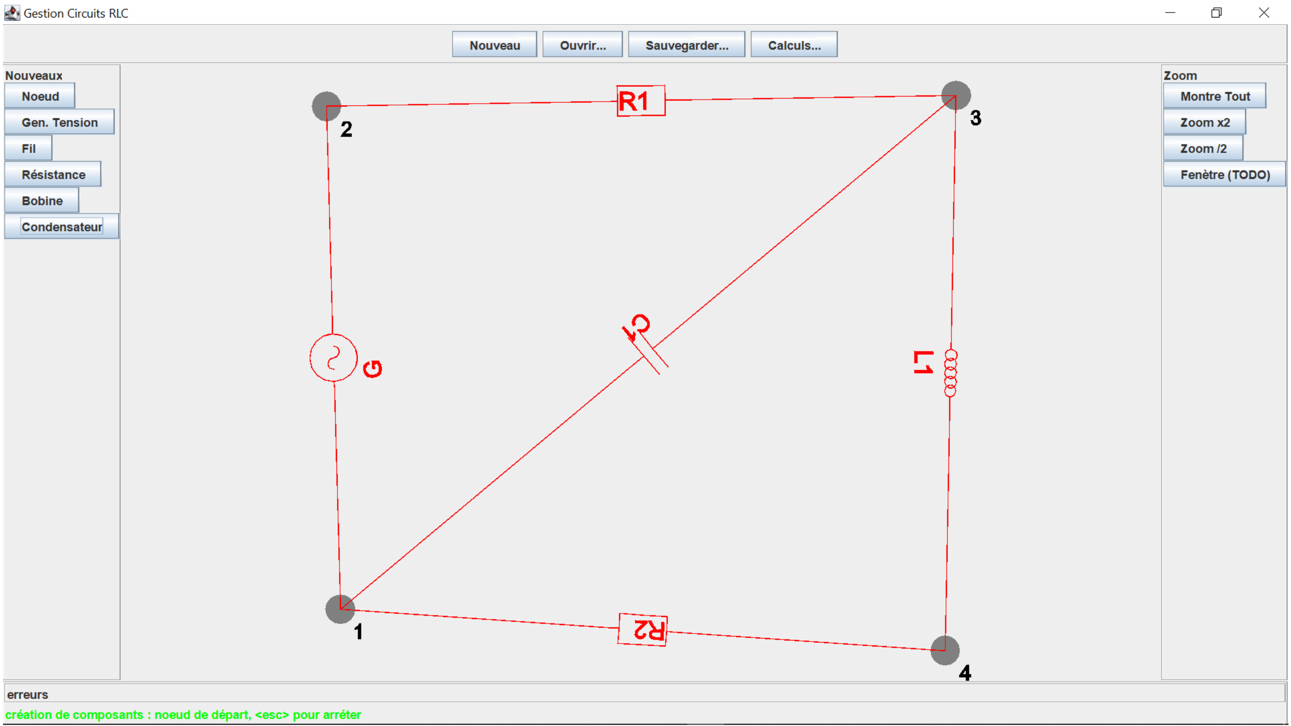
Passage circuit -> système linéaire complexe

Circuit

Partons du circuit ci-dessous



Avec les caractéristiques des composants affichés ci-dessous :

---- Composants

[GenerateurTension G (1) : 10.0 V ; entre noeud 1 et 2]

[Resistance R1 (2) : 200.0 Ohm ; entre noeud 2 et 3]

[Bobine L1 (3) : 0.01 H ; entre noeud 3 et 4]

[Resistance R2 (4) : 400.0 Ohm ; entre noeud 4 et 1]

[Condensateur C1 (5) : 100.0 microF ; entre noeud 3 et 1]

Nous voulons construire le système linéaire correspondant.

Rappel sur l'écriture matricielle.

Le système

$$\begin{cases} 2x_0 + 3x_1 = 4 \\ 5x_0 + 6x_1 = 7 \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On voit intuitivement que chaque ligne de la matrice correspond à une équation, et chaque colonne de la matrice correspond aux coefficients correspondant à une inconnue.

Inconnues

Quelles sont les inconnues : nous voulons connaître la tension et l'intensité pour chacun des composants. Il y a donc deux inconnues par composants, et donc, dans le cas de notre circuit qui contient 5 composants, il y a 10 inconnues. Il faut prendre une convention pour pour numéroter les inconnues. Pour cela, on numérote les composants :

0 : G

1 : R1

2 : L1

3 : R2

4 : C1

Puis on numérote les variables : on décide de numéroter d'abord toutes les tensions puis toutes les intensités soit pour les variables :

0 : V0 (tension aux bornes du composant N° 0 soit G)

1 : V1 (tension aux bornes du composant N° 1 soit R1)

2 : V2 (tension aux bornes du composant N° 2 soit L1)

3 : V3 (tension aux bornes du composant N° 3 soit R2)

4 : V4 (tension aux bornes du composant N° 4 soit C1)

5 : I0 (intensité traversant le composant N° 0 soit G)

6 : I1 (intensité traversant le composant N° 1 soit R1)

7 : I2 (intensité traversant le composant N° 2 soit L1)

8 : I3 (intensité traversant le composant N° 3 soit R2)

9 : I4 (intensité traversant le composant N° 4 soit C1)

Création du système

Puisque nous avons 10 inconnues, il nous faut trouver 10 equations si nous voulons résoudre le système. Il a trois types d'équations, venant respectivement de la loi d'Ohm (généralisée pour les circuit RLC), la loi des noeuds, et la loi des mailles.

Loi d'Ohm

A chaque composant est associé une équation de la forme :

$$\alpha V + \beta I + \gamma = 0$$

Les coefficients α, β, et γ sont des complexes (parfois des réels qui sont un cas particulier de complexes). Par exemple, pour une résistance, on a tout simplement

$$V = R I \text{ donc } \alpha = 1 ; \beta = -R ; \gamma = 0$$

On va donc avoir une équation (et donc une ligne de la matrice) pour chaque composant.

- Commençons par le générateur : V0 = fem (fem = 10 dans notre exemple) soit la « ligne » :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}V0\\V1\\V2\\V3\\V4\\I0\\I1\\I2\\I3\\I4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\end{pmatrix}$$

- pour R1, on a V1 = R1 I1 soit V1 – R1 I1 = 0 (R1 = 200 dans notre exemple). On ajoute donc une seconde équation (ligne) :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}V0\\V1\\V2\\V3\\V4\\I0\\I1\\I2\\I3\\I4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$$

- pour L1, on a V2 = (j L ω) I2. On voit que l'impédance (j L ω) est un imaginaire pur qui dépend de la pulsation ω. Dans notre exemple, on va prendre ω = 100. L = 0,01 Donc (j L ω) = j. On ajoute donc une troisième équation (ligne) :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}V0\\V1\\V2\\V3\\V4\\I0\\I1\\I2\\I3\\I4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$$

- pour R2, c'est comme R1, mais R2=400 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V0 \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ I0 \\ I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et enfin pour C1, on a V4 = 1/(j C ω) I4, et comme 1/j = -j ; C = 0,0001 et ω toujours 100, on obtient : V4 = (- 100 j) I4, ce qui nous donne la cinquième équation pour la loi d'Ohm (une équation par composant) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100\,j \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V0 \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ I0 \\ I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Loi des noeuds

Parmis les Nn noeuds du circuit, on en choisi Nn-1 (L'équation sur le dernier noeud serait redondante).

Dans notre exemple, on choisi les noeuds 1, 2, et 3 (voir sur image du circuit). La loi des noeuds indique que la somme algébrique des intensités entrantes/sortantes est nulle. Pour la notion de entrant/sortant, il faut associer un sens au composants. Dans notre cas, la description du générateur indique qu'il se trouve entre le noeud 1 et le noeud 2. Nous prenons la convention que la description « entre noeud i et noeud j » signifie que le noeud de départ est i, et le noeud d'arrivée et j.

Donc pour le noeud 1, G « part » du noeud 1, et C1 et R2 « arrivent » au noeud 1. Soit l'équation :

I0 – I3 – I4 = 0

Ce qui nous permet d'ajouter une nouvelle ligne à notre système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V0 \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ I0 \\ I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le noeud 2, G «arrive» au noeud 2, et R1 « part » du noeud 2. Soit l'équation :

-I0 + I1 = 0

Pour le noeud 3, R1 «arrive» au noeud 3, et C1 et L1 « partent » du noeud 3. Soit l'équation :

-I1 + I2 + I4 = 0

On ajoute les deux lignes correspondantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V0 \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ I0 \\ I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Loi des mailles

Il nous faut une base de maille.

Pour cela, on va d'abord déterminer les mailles : une suite de composants qui forment une boucle. Si le circuit est bien formé, tous les composants sont reliés. On peut donc partir de n'importe quel noeud. En partant du noeud 1, on peut traverser G puis R1 puis C1, et on retourne au noeud 1. [G, R1, C1] est donc une maille. De même, on voit facilement que [G, R1, L1, R2] et [-C1, L1, R2] sont également des mailles. J'ai noté « -C1 » dans la dernière maille pour indiquer que j'avais traversé C1 « à l'envers » : du noeud d'arrivée au noeud de départ. Un exemple d'algorithme permettant de calculer les mailles de façon systématique est indiqué dans « aide au calculs ».

En fait, si l'on écrit les équations pour toutes les mailles, on obtient des équations redondantes, car les mailles ne sont pas « indépendantes » : par exemple, si je traverse la maille [G, R1, C1] puis [-C1, L1, R2], c'est comme si j'avais en fait traversé la maille [G, R1, L1, R2].

Il faut donc supprimer les mailles redondantes. Une méthode est décrite pour cela dans l'aide au calcul, et un programme correspondant est fourni.

Dans notre exemple, on « voit » qu'une base de maille possible est : [G, R1, C1] et [-C1, L1, R2]. Il y a d'autres bases possibles, mais elle contiendraient toutes deux mailles. Cela tombe bien : nous avions jusqu'à présent 8 équations, avec les deux nouvelles venant de la base de mailles, cela nous fait 10.

Nous avons donc une système 10 équations 10 inconnues que nous pouvons donc essayer de résoudre. A contrario, si la base de maille ne contenait pas 2 mailles, c'est que notre circuit serait mal formé.

Pour la première maille, nous obtenons l'équation :

V0 + V1 + V4 = 0

Et pour la seconde (notez le « - » devant le V4 car C1 est traversé « à l'envers » dans la seconde maille) :

- V4 + V2 + V3 = 0

Soit, en complétant le système:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V0 \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ I0 \\ I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voilà, nous obtenons un système linéaire 10 équations 10 inconnues dans le corps des complexes. Il faut maintenant le résoudre. La première partie de l'aide aux calculs indique une méthode possible.

Note : on peut voir que la matrice contient surtout des zéros. C'est ce que l'on appelle une matrice creuse. Dans la pratique, pour créer la matrice, il est plus simple de créer une matrice nulle (tous les coeff à 0) de taille 2Nc x 2Nc, et un vecteur nul de taille 2Nc, puis de modifier seulement les coefficients non nuls.