

## 1) История метода конечных элементов. Подходы к численному решению задач МДТТ. (Л1)

В основе классического МКЭ лежит 2 момента:

- 1) Использование вариационных постановок вместо дифференциальных.
- 2) Использование сетки КЭ.

Вариационные подходы начали появляться в 1910-1920-х гг. Они связаны с именами Бубнова, Галеркина, Ритца.

### А) Метод Бубнова и Галеркина.

Бубнов - морской инженер, Галеркин математик.

Идея: искать приближенные решения дифференциальных уравнений, используя разложение искомой неизвестной функции по базису из известных функций.

Неизвестные коэффициенты линейной комбинации находятся путем составления уравнений так, чтобы невязка решения была ортогональна неким выбранным функциям (условие ортогональности). Если в многомерном пространстве невязка ортогональна большому числу базисных функций, то она близка нулю.

### Б) Метод Ритца.

Идея та же. Но решение ищется за счет минимизации функционала в конечномерном пространстве. В теории упругости это вариационный принцип Лагранжа.

В А и Б в качестве базисных функций использовались полиномиальные функции, тригонометрические функции и их комбинации.

В 1920-х гг в связи с использованием бетона в строительстве - **задача о сжатии бетонного кубика**. Двумерная задача. Нем. ученые дискретизировали квадратную область (заменяли фермой из стержней), чтобы прийти к системе лин. ур-й. Жесткость стержней подбиралась так, чтобы сжатие фермы было похоже на деформирование реального бетона. Присутствуют треугольные области, напоминающие треугольные КЭ.

**1940:** статья Куранта, в которой рассм-ся треуг. КЭ. Впервые разбиение области на треуг. подобласти и аппроксимация решения отдельно на каждой подобласти. Начало МКЭ.

**1960-е гг:** инженерный подход в развитии МКЭ. Исп-е технич. инжен. обр-я. Математика сводилась к матрицам и векторам. Треуг. элемент и теория упругости.

**1970-е гг:** переведена книга Стрэнга и Фикса (америк.), где проводится математическое исследование МКЭ.

**1968-70 гг:** Зенкевич. **1975:** переведена на русск. Сейчас 3 тома (Зенкевич и Тейлор). 1-й том посвящен общим вопросам МКЭ, 2-й – задачам МДТТ, 3-й – задачам гидромеханики.

**1970-72 гг:** появилась компания, потом наз. ANSYS.

До **1950-60 гг** (в докомпьютерную эпоху) **сопротивление материалов**. Рассматриваются одномерные вытянутые тела (стержни, балки), для которых решение задач обходится без ДУ или сводится к ОДУ. Для решения задач с прямоуг. плитами и пластинами придумали разложение в ряды Фурье.

В **50-60-ые гг** появились ракеты, и потреб. рассч-ть оболочки: круговые, конические и т.д. С помощью сопромата разрабатывался метод решения для конкретной задачи. Нет универсальности. Решать 3-х-мерные задачи методами сопромата вообще не было возможности.

**МКЭ** вместе с развитием компьютеров совершил революцию. Он дал инструмент для решения уравнений в частных производных, которые соответствуют уравнениям теории упругости, т.е. все эллиптические уравнения 2-го порядка успешно решаются этим методом, причем для **самых сложных по форме тел**. Универсальность.

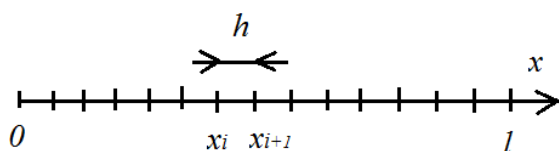
**Сеточные методы**, вариационно-сеточные методы тоже развивались, но постепенно стали менее популярны.

### 1) Теория разностных схем.

70-80-ые гг: школа вычислительной математики Самарского. «Разностные схемы».

Методы, используемые для написания разностных схем, были **прямым обобщением разностных схем, написанных для одномерного случая в 50-60-х гг.**

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

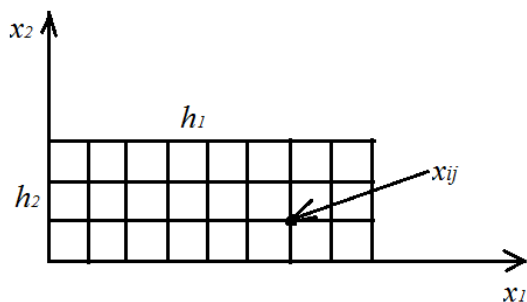


$$x_{i+1} - x_i = h$$

В результате замены производных получается разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f(x_i) = 0 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Возникла идея обобщения одномерной задачи на 2-х или 3-х-мерную. Область прямоугольная.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h_2^2} + f(x_{1ij}, x_{2ij}) = 0$$

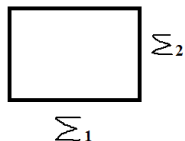
### 2) Вариационно-разностный метод.

Если написать более реалистичное уравнение, то его нельзя просто так заменить на разностное. Тогда появился вариационно-разностный метод.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f(x_1, x_2) = 0 \quad | \cdot u \int_V$$

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Sigma_2} = q \quad \text{граничное условие на границе } \Sigma_2$$

$$u|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{граничное условие на границе } \Sigma_1$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u \right) dV - \int_V k_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dV + \int_V f u dV = 0$$

$$\int_{\Sigma_1} k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} u d\Sigma + \int_{\Sigma_2} q u d\Sigma - \int_V \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV + \int_V f u dV = 0$$

$$u|_{\Sigma_1} = 0$$

Получили **вариационное уравнение**:

$$\int_V \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV - \int_V f u dV - \int_{\Sigma_2} q u d\Sigma = 0$$

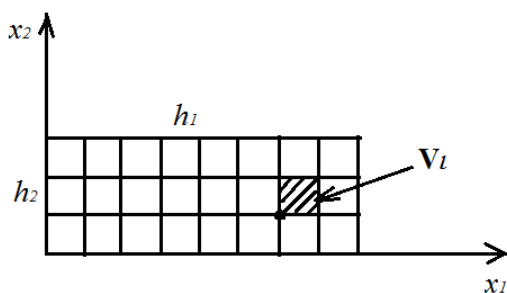
Пишем **функционал Лагранжа**:

$$L(u) = \frac{1}{2} \int_V \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV - \int_V f u dV - \int_{\Sigma_2} q u d\Sigma$$

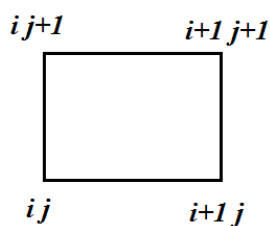
Ищется:

$$\min_v L(v)$$

Это слабая постановка.



$$\int_V = \sum_l \int_{V_l} \quad \text{в этом идея}$$



$$\int_{V_l} \varphi dV \approx \frac{1}{4} h_1 h_2 (\varphi_{ij} + \varphi_{i+1j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{i+1j+1})$$

(Аналог формулы трапеций.)

Для узла  $ij$ :

$$\varphi_{ij} \approx k_{1ij} \left( \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1} \right)^2 + k_{2ij} \left( \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_2} \right)^2$$

Для узла  $i+1j$ :

$$\varphi_{i+1j} \approx k_{1i+1j} \left( \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1} \right)^2 + k_{2i+1j} \left( \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j}}{h_2} \right)^2$$

$$ij+1 \mapsto \varphi_{ij+1} \approx \dots$$

$$i+1j+1 \mapsto \varphi_{i+1j+1} \approx \dots$$

Получили  $L \mapsto L^h$  – разностный функционал.

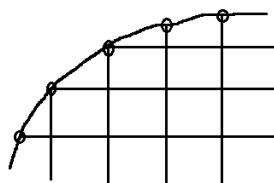
Нужно вычислить производные:

$$\frac{\partial L^h}{\partial u_{ij}} = 0 \quad \forall ij$$

Получается система линейных уравнений. Сложность заключается в том, что надо сидеть и дифференцировать, особенно на границе. Если задача 3-х-мерная, то будет много типов уравнений (27 типов уравнений для параллелепипеда). Для сложных областей все хуже. Граница криволинейная, граничные условия 2-го рода пишутся плохо.

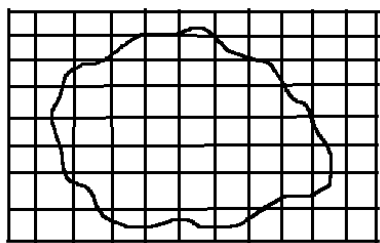
### Методы обобщения сеточных методов на сложные области

Если есть криволинейная граница, то можно нарисовать прямоугольную сетку, но как аппроксимировать ГУ в таких узлах?



Условия 1-го рода (Дирихле) еще как-то аппроксимировались, а для условий 2-го рода (Неймана), когда заданы производные по границе, так ничего нужного и не придумали.

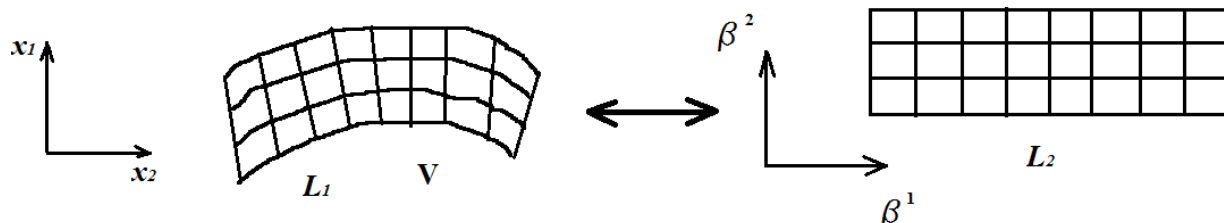
**А) Метод погружения.** Сложная криволинейная область погружается в прямоугольную область, на которой задается сетка, и задача решается в прямоугольной области, в которой уже все разработано, как решать.



Если граница у исходного тела свободная, то материал берется очень мягким, типа ваты. Если на границе заданы нулевые перемещения, то окружающий материал нужно взять очень жестким, который не деформируется.

Но все равно это было менее эффективно, чем в МКЭ, потому что в МКЭ используется не регулярная прямоугольная сетка, а сложная нерегулярная треугольная, косоугольная, криволинейная и т.д.

#### Б) Криволинейная сетка.



$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \beta^k} \frac{\partial \beta^k}{\partial x_1} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \beta^j} \end{bmatrix} - \text{матрица Якоби}$$

Но этот метод для достаточно простых областей. Это все развивалось в СССР. На Западе развивался МКЭ и был изначально заточен для областей любой формы.

**В) Другие методы обобщения сеточных методов на сложные области.** Сложная область составляется в виде объединения конечного числа прямоугольных областей.

Но **МКЭ** оказался: 1) более простым, 2) более универсальным, поэтому он вышел победителем. МКЭ совершил революцию, создал инструмент для решения задач не просто теории упругости и МДТТ, а вообще для целого класса уравнений в частных производных. Обычные линейные задачи в частных производных (эллиптические 2-го порядка) решаются без проблем.

**Задачи, решаемые МКЭ. ANSYS: сложные физические задачи:** теплопроводность, электромагнитные задачи, взаимодействие жидкости и деформируемой твердой стенки, т.е. сочетание разных задач с аэро-, гидро-, ДТТ, чтобы в едином комплексе можно было решать и анализировать такие **связанные задачи**.

#### Проблемы в МКЭ:

##### 1) Появление дополнительного малого параметра.

**Задачи для пластин и оболочек.** Для МКЭ сложнее, чем обычные 3-х-мерные задачи. В МКЭ есть один малый параметр – это размер КЭ  $h$ , и все решения исследуются при  $h \rightarrow 0$ . Но в оболочках есть **свой малый параметр** – это **толщина пластины**, и поэтому 2 малых параметра. Методы нужно изучать по отношению к поведению этих двух малых параметров. Какое у них отношение при стремлении к нулю?

**Несжимаемые среды. Малый параметр – это малая сжимаемость.** Несжимаемая жидкость – это предел малосжимаемой среды. Такие задачи научились решать раньше, чем задачи для тонких пластин и оболочек, для которых еще не придумано окончательное решение.

**2) Искажение сетки КЭ при больших деформациях.** Задача о затекании вязкой жидкости туда, где есть свободная граница. В МДТТ: железный кол вбивается динамически в песчаный грунт.

### Способы решения проблемы искажения сетки КЭ при больших деформациях:

А) **Альтернативные методы - методы гладких частиц.** Например, метод **SPH** (smooth particle hydrodynamics – гидродинамика гладких частиц). Узлы сетки есть, а жестких связей между частицами нет. **Бессеточные методы.**

Б) **Перестраивание сетки.** Как только сетка сильно искажается, то строится новая, более хорошая, сетка. И решение интерполируется на новую сетку. Точность теряется.

### → Задачи из книжки Зенкевича.

1) **Трехмерное моделирование шины.**

2) **Тест для автомобилей.** Кузов сильно деформируется, а деформации малые. Задачи искажения формы очень сложны.

3) **Задача внедрения штампа в твердое тело.** Происходят существенные деформации.

4) **Контактные задачи. Контактная задача Герца** – сжатие двух цилиндрических или сферических тел. Большое деформирование.

5) **Прошелкивание балки.** Арка, на нее сверху давят, и она прощелкивается вниз при достаточно большой нагрузке. Потери устойчивости. Научились проследивать процесс.

6) **Периодические структуры. Многомасштабный метод** (multiscale method). Перфорированная пластинка с дырками или включениями. Метод осреднения. 3 масштаба. На микромасштабе все гранулы осредняются, получается однородная среда, на мезомасштабе среда решается МКЭ.

### Почему называется МКЭ?

В МСС рассматривался какой-то элемент  $V$ , а потом эта область стягивается в точку  $V \rightarrow 0$ . И в результате из уравнения баланса, записанного для этого КЭ, получаются дифференциальные уравнения.

А в МКЭ элемент как был конечным, так и остается, – малым, но конечным. Поэтому и получается вместо дифференциальных уравнений разностные уравнения.

## 2) Дифференциальная постановка линейной статической задачи МДТТ. Вариационное уравнение, функционал Лагранжа.

(Л1)

### Дифференциальная постановка линейной статической задачи МДТТ.

Рассмотрим статическую задачу теории упругости. Динамическую рассматривать не будем, так как дискретизация по пространственным переменным и дискретизация по времени всегда осуществляются независимо друг от друга. МКЭ – это метод, позволяющий осуществлять дискретизацию по пространственным координатам  $x, y, z$ .

Для МДТТ типичной является смешанная краевая задача. А для гидромеханики типичны задачи с условием Дирихле на всей границе.

Пусть в области  $V$  задано уравнения равновесия.

$$(C_{ijkl}(x)u_{k,l})_{,j} + f_i = 0, \quad x \in V$$

$$\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{граница закреплена}$$

$$C_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2} = S_i \quad \text{поверхностные силы}$$



Тело может быть неоднородным.  $C_{ijkl}$  может зависеть от  $\vec{x}$ . Допускаются разрывы 1-го рода у функции  $C$  (композиты) (пределы слева и справа существуют).

МКЭ состоит в том, что решение  $\vec{u}$  (вектор перемещений) нужно разложить по базисным функциям. В **дифференциальных уравнениях** это делать совершенно неудобно по многим причинам:

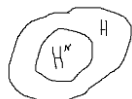
1) Решением дифференциального уравнения является не просто функция, удовлетворяющая диффер. уравнению, а функция  $\vec{u}$  из пространства  $H$ :

$$\vec{u} \in H \quad (\text{гильбертово пространство функций})$$

Не придумано такого пр-ва, в кот. было бы доказано, что решение этих задач существует.

2) Дифференциальная постановка задачи является сложной для композитов, где  $C_{ijkl}$  – разрывные функции, так как в уравнении есть внешняя производная по  $j$ . Нужно дифференцировать разрывные функции. Возникает вопрос, что под этим иметь в виду.

3) Если мы будем использовать методы Ритца или Бубнова-Галеркина, то мы должны перемещение  $\vec{u}$  раскладывать по некоторым базисным функциям. Базисная идея состоит в том, что мы будем искать решение не в пространстве  $H$ , а в каком-то внутреннем подпространстве  $H^N$  ( $H^N \subset H$ ), где  $N$  обозначает размерность пространства.



Решение задачи во внутреннем пространстве  $H^N$  называется **приближенным решением**.

Для практического применения пространство  $H^N$  надо задавать конструктивно. Это подпространство задается с помощью базисных функций.  $H^N$  – это линейная комбинация базисных функций. Так вот тут существует матем. проблема: не придумано таких базисных функций, чтобы иметь дело с дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

По этим причинам (и еще по многим другим) говорят о том, что для осуществления пространственной дискретизации задачи гораздо удобнее использовать не дифференциальную постановку, а **вариационную (или слабую) постановку задачи**.

Решение  $\vec{u} \in H$ , которое удовлетворяет системе диффер. уравнений, называется **сильным решением**. Оно более гладкое, должно обладать 2-мя производными.

**Слабое решение** должно обладать только одной производной. МКЭ состоит в том, чтобы для слабых решений строить базисные функции. Но здесь есть исключение. Например, для бессеточных методов слабые постановки не годятся, а сильные хорошо подходят.

Вариационная задача для теории упругости существует в 2-х эквивалентных видах:

- 1) вариационное уравнение,
- 2) задача минимизации функционала Лагранжа.

### 1) Вариационное уравнение.

Как получить вариационное уравнение? Нужно умножить уравнение равновесия на произвольную функцию  $\vec{v}(x)$  ( $\vec{v} \in H$ ), проинтегрировать по области  $V$ , сделать преобразование с помощью формулы Гаусса-Остроградского и использовать ГУ:

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}(x)u_{k,l})_{,j} + f_i &= 0 \quad | \cdot \vec{v}(x), \quad \vec{v} \in H \quad \int_V \\ \int_V (C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} v_i dV + \int_V f_i v_i dV &= 0 \\ \int_V (C_{ijkl}u_{k,l}v_i)_{,j} dV - \int_V C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} dV + \int_V f_i v_i dV &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} C_{ijkl}u_{k,l}n_j v_i d\Sigma + \int_{\Sigma_2} C_{ijkl}u_{k,l}n_j v_i d\Sigma - \int_V C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} dV + \int_V f_i v_i dV &= 0 \\ \text{Функция } \vec{v} \text{ из того же пространства, что и } \vec{u}, \text{ поэтому } v_i|_{\Sigma_1} &= 0 \\ C_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2} = S_i - \text{заданные поверхностные силы.} \\ \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \int_V C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} dV + \int_V f_i v_i dV &= 0 \end{aligned}$$

**Замечание.** Это неоднозначно, что  $\vec{v} \in H$  – тому же пространству, из которого мы хотим получить решение. В методе Галеркина  $u$  и  $v$  могут быть из разных пространств. Они берутся одинаковыми ради симметрии. Так как диффер. оператор исходной диффер. задачи теории упругости является самосопряженным, т.е. симметричным, то строить несимметричную аппроксимацию бессмысленно.

В результате получаем **вариационное уравнение** (раньше наз. интегральное тождество):

$$\int_V C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma$$

Что такое **слабое решение**?

$\vec{u} \in H$  называется **слабым решением**, или просто решением, этого вариационного уравнения, если оно удовлетворяет этому равенству для  $\forall \vec{v} \in H$ .



Левая часть уравнения:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dV - \text{энергия упругой деформации, если } \vec{v} = \vec{u}$$

Правая часть уравнения:

$$l(\vec{v}) = A^e(\vec{v}) = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \text{работа внешних сил на поле перемещений } \vec{v}$$

– это работа объемных и поверхностных сил (механическая интерпретация).

Физическая интерпретация этого равенства – это **баланс энергии и работы**:

На тело действуют объемные силы  $\vec{f}$  и поверхностные силы  $\vec{S}$ , в результате чего в упругом теле запасается упругая энергия, которая при  $\vec{v} = \vec{u}$  равна левой части уравнения.

**Преимущества этой вариационной постановки задачи:**

- 1) Доказано, что решение этого уравнения существует и единственно.
- 2) Там гораздо проще построить базисные функции.

Как выбирается пространство  $H$ ? В каких пространствах все это доказывается? Вариационные постановки связаны с пространством Соболева  $W_2^1$  (пространство функций, интегрируемых с квадратом производной).

$$H = \{ \vec{v}: \vec{v} \in W_2^1, \vec{v}|_{\Sigma_1} = 0 \}$$

Имеется в виду, что первая производная в обобщенном смысле существует.

ГУ бывают двух типов:

- 1) **Главные** ГУ – это условия Дирихле (I рода):  $u_i|_{\Sigma_1} = 0$ . Это условие надо дополнительно учитывать в подпространстве функций, где мы ищем решение (в выборе пространства).
- 2) **Естественные** ГУ – это условия Неймана (II рода):  $C_{ijkl} u_{k,l} n_j|_{\Sigma_2} = S_i$ . Это условие так называется, так как оно естественным образом входит в вариационное уравнение, и его никак учитывать не нужно.

Таким образом, эти ГУ совершенно по-разному входят в эту вариационную постановку. Поэтому если в ANSYS мы будем решать какую-то задачу, и на  $\Sigma_1$  зададим  $\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0$ , а на  $\Sigma_2$  ничего не зададим, то это будет соответствовать тому, что на  $\Sigma_2$  мы зададим  $\vec{S}|_{\Sigma_2} = 0$  (свободная граница). Эти  $\vec{S}$  естественно входят в вариационные уравнения, поэтому если мы не задали эти силы, то они автоматически становятся нулями. А если мы не задали главного условия  $\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0$ , то у нас никакого закрепления не будет.

Это вариационное уравнение замечательно тем, что от  $\vec{u}$  не надо брать вторых производных, а только первые. Поэтому если мы будем раскладывать решение  $\vec{u}$  по каким-то базисным функциям, т.е. искать приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций, то эти базисные функции  $\psi$  проще построить, от них требуется только существование первых производных, а вторых не надо.

Таким образом, становится понятно, почему для теории пластин и оболочек сложнее КЭ. Для пластин и оболочек, если пользоваться теорией Кирхгофа, уравнение

равновесия имеет четвертый порядок. В слабой постановке в ур-е будут входить вторые производные. Это настолько сложно, что еще даже не придумали.

**2) Задача минимизации функционала Лагранжа. Вариационный принцип Лагранжа.**  
Функционал Лагранжа:

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} v_{k,l} v_{i,j} dV - A^l(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v)$$

$$l(\vec{v}) = A^e(\vec{v}) = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \text{работа внешних сил на поле перемещений } \vec{v}$$

$\vec{u}$  называется **слабым решением**, если  $\vec{u} \in H$  и  $L(\vec{u}) \leq L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H$ .

Это вторая вариационная постановка, абсолютно эквивалентная первой. Она называется **вариационный принцип Лагранжа** и говорит о том, что  $\vec{u}$  – это такая функция, которая минимизирует функционал Лагранжа. Это задача поиска минимума функционала Лагранжа.

Дискретизация 1) – метод Галеркина.

Дискретизация 2) – метод Ритца.

### 3)Связь вариационного уравнения и функционала Лагранжа. Случаи эквивалентности и неэквивалентности постановок. Экстремум функционала Лагранжа. (Л2)

#### Связь вариационного уравнения и функционала Лагранжа.

##### 1)Вариационное уравнение:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v})$$

$$\int_V C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dV - \text{энергия упругой деформации, если } \vec{v} = \vec{u}$$

$$l(\vec{v}) = A^e(\vec{v}) = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \text{работа внешних сил на поле перемещений } \vec{v}$$

$$\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \vec{v}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \vec{u}, \vec{v} \in H$$

$$H = \{\vec{v}: \vec{v} \in W_2^1, \vec{v}|_{\Sigma_1} = 0\}$$

$W_2^1$  – пространство Соболева (пространство функций, интегрируемых с квадратом производной).

$a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$  – билинейный **симметричный** функционал.

Симметричность билинейного функционала – условие эквивалентности двух постановок.

##### 2)Задача минимизации функционала Лагранжа:

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v})$$

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} v_{k,l} v_{i,j} dV - A^l(\vec{v})$$

$$l(\vec{v}) = A^e(\vec{v}) = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \text{работа внешних сил на поле перемещений } \vec{v}$$

Найти  $\vec{u} \in H$ ,  $\vec{u}: L(\vec{u}) \leq L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H$ .

$\vec{u}$  – решение,  $\vec{v}$  – любая функция из  $H$ .  $L$  на  $\vec{u}$  достигает минимума.

#### Случаи эквивалентности и неэквивалентности постановок

В теории упругости постановки 1) и 2) совершенно эквивалентны друг другу. Почему это так? Почему минимум функционала Лагранжа существует?

Для любой ли эллиптической задачи 2-го порядка в частных производных существует две эквивалентные постановки? Нет, не всегда. В 1) постановке есть билинейный функционал  $a(\vec{u}, \vec{v})$ , а во 2) – квадратичный  $a(\vec{v}, \vec{v})$ . Любому билинейному **симметричному** функционалу можно поставить в соответствие квадратичный функционал. Но если бы билинейный функционал не был симметричным, то никакого

квадратичного функционала просто бы не существовало. Следовательно, не существовало бы вариационного принципа Лагранжа.

Таким образом, вариационное уравнение существует всегда, а функционал Лагранжа (и вообще задача минимизации функционала) существует только в том случае, если билинейный функционал в вариационном уравнении является симметричным. В теории упругости  $a(\vec{u}, \vec{v})$  является симметричным, потому что  $C_{ijkl}$  – симметрично относительно перестановки индексов:  $C_{ijkl} = C_{klij}$ . Это следует из термодинамических соотношений, из существования потенциала, потенциалом в квазистатических процессах является свободная энергия. Поэтому в теории упругости нет никакой разницы между этими двумя постановками. А если в какой-то другой задаче не будет симметрии, то постановка 2) просто не будет существовать.

Метод Галеркина исходит из уравнения 1), а метод Ритца – из уравнения 2). В теории упругости метод Галеркина и метод Ритца не различаются. Но в другой постановке может быть, что метод Галеркина есть, а метод Ритца нельзя применять, потому что постановка 2) в виде задачи минимизации функционала Лагранжа просто не существует.

1)  $a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v})$  – билинейный функционал

2)  $L(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v})$

Если  $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u}) \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 2)$ .

Если  $a(\vec{u}, \vec{v}) \neq a(\vec{v}, \vec{u}) \Rightarrow \nexists 2)$ .

Итак, если  $a(\vec{u}, \vec{v})$  – симметричный, то 1) и 2) эквивалентны. Если  $a(\vec{u}, \vec{v})$  – несимметричный, то задачи 2) и функционала Лагранжа не существует. Докажем это. Для этого найдем экстремум функционала Лагранжа.

### Экстремум функционала Лагранжа.

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v})$$

Найдем точку экстремума функционала Лагранжа (задача 2\*). Вычислим производную по Гато (дифференциал Гато) и приравняем ее нулю (необходимое условие экстремума – для квадратичного функционала это достаточно).

**Задачу 2\*** (нахождения экстремума функционала Лагранжа) можно сформулировать так:

$$DL(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Определение дифференциала Гато:

$$DL(\vec{u}, \vec{v}) = \left. \frac{d}{d\xi} L(\vec{u} + \xi \vec{v}) \right|_{\xi=0}$$

$$\begin{aligned} L(\vec{u} + \xi \vec{v}) &= \frac{1}{2} a(\vec{u} + \xi \vec{v}, \vec{u} + \xi \vec{v}) - l(\vec{u} + \xi \vec{v}) = \\ &= \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) + \frac{1}{2} \xi a(\vec{u}, \vec{v}) + \frac{1}{2} \xi a(\vec{v}, \vec{u}) + \frac{1}{2} \xi^2 a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{u}) - \xi l(\vec{v}) \end{aligned}$$

(Т.к.  $a$  – билинейный функционал, т.е. линейный по  $\forall$  аргументу;  $l$  – линейный функционал.)

$$DL(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} [a(\vec{u}, \vec{v}) + a(\vec{v}, \vec{u})] - l(\vec{v}) = 0$$

Получаем:

$$\frac{1}{2} [a(\vec{u}, \vec{v}) + a(\vec{v}, \vec{u})] = l(\vec{v})$$

А) Если  **$a$  – симметрично**:  $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$  (как это имеет место в теории упругости), то тогда задача нахождения экстремума функционала Лагранжа  $L$  и задача решения вариационного уравнения 1) эквивалентны. Про минимум мы пока не говорили.

Б) Если  **$a$  – несимметрично**:  $a(\vec{u}, \vec{v}) \neq a(\vec{v}, \vec{u})$ , тогда задачи на нахождение экстремальной точки  $L$  не существует. Или она существует, но совершенно не эквивалентна уравнению 1).

Следовательно, если в механике есть вариационное уравнение с несимметричным  **$a$**  (как, например, в теории вязкоупругости), то тогда ~~А~~ функционала, нахождение экстремальной точки которого было бы эквивалентно решению вариационного уравнения.

Итак, мы доказали, что если  $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$ , то 1)  $\Leftrightarrow$  2\*) (не задача минимизации, а задача нахождения экстремума).

$$\text{Т.е. } DL(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v}) - l(\vec{v})$$

### Минимум функционала Лагранжа.

Докажем, что экстремум функционала Лагранжа  $L$  – это минимум. Михлин «Проблема минимизации квадратичного функционала».

Условие (помимо симметрии), которое нужно наложить, чтобы можно было утверждать, что экстремум функционала Лагранжа  $L$  – это минимум:

$$a(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0, \text{ причем } a(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$$

Т.е.  **$a$**  должен быть симметричен ( $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$ ) и положительно определен.

Этот замечательный случай, например, соответствует, задачам линейной теории упругости (задаче для уравнения Пуассона).

#### Доказательство:

Будем доказывать, что экстремум функционала Лагранжа  $L$  – это минимум при дополнительном условии:

$$a(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0, \text{ причем } a(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0.$$

Пусть  $\vec{u}$  – слабое решение. Это означает:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}) \text{ или } DL(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v}) - l(\vec{v}).$$

Нам надо доказать, что  $\forall \vec{v} \quad L(\vec{u}) \leq L(\vec{v})$ .

Возьмем  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$  (так всегда можно представить).

Вычисляем (учитывая билинейность и симметричность  $a$  и линейность  $l$ ):

$$\begin{aligned}
L(\vec{v}) &= \frac{1}{2} a(\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}) - l(\vec{u} + \vec{w}) = \\
&= \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) + a(\vec{u}, \vec{w}) + \frac{1}{2} a(\vec{w}, \vec{w}) - l(\vec{u}) - l(\vec{w}) = \\
&= \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) + \frac{1}{2} a(\vec{w}, \vec{w}) - l(\vec{u}) = L(\vec{u}) + \frac{1}{2} a(\vec{w}, \vec{w})
\end{aligned}$$

$a(\vec{u}, \vec{w}) - l(\vec{w}) = 0$ ,  $\vec{u}$  – решение,  $\vec{w} - \forall$  функция,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in H$ ,  
т.е. верно вариационное уравнение.

$$\Rightarrow L(\vec{v}) = L(\vec{u}) + \frac{1}{2} a(\vec{w}, \vec{w}), \text{ где } \vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

Если  $a$  – положительно определенный, то  $a(\vec{w}, \vec{w}) \geq 0$ .

$\Rightarrow L(\vec{v}) \geq L(\vec{u}) \forall \vec{v} \in H$ , т.е. точка экстремума функционала Лагранжа – это точка минимума. Следовательно, решение задачи  $\exists$  и !

**Замечание.** Естественно, если функционал  $L$  умножить на  $(-1)$ , то можно говорить о максимуме. Во всей литературе знак для  $L$  выбирается так, что речь идет о минимуме.

В теории упругости еще есть вариационный принцип Кастильяно (Лагранжиан  $L$  – Кастильяниан  $K$ ). В части литературы  $K$  имеет максимум, в части – минимум (в зависимости от знака). Никакой разницы это не имеет.

Мы получили, что постановка 1) – более общая, вариационное уравнение существует для всех задач механики (линейной механики, МДТТ). А постановка 2) существует только в случае симметрии  $a$ : если нет симметрии, то нет 2). Но в МДТТ большинство задач являются симметричными.

#### 4) Слабые и сильные решения. Дискретизация уравнений.

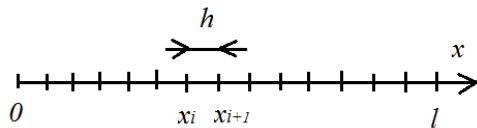
Процесс замены дифференциального уравнения системой алгебраических уравнений называется **дискретизацией**, а сама алгебраическая система **дискретным аналогом** дифференциального уравнения. Рассмотрим **способы построения дискретных аналогов дифференциальных уравнений в частных производных**.

##### 1) Теория разностных схем. Метод конечных разностей.

70-80-ые гг: школа вычислительной математики Самарского. «Разностные схемы».

Методы, используемые для написания разностных схем, были **прямым обобщением разностных схем, написанных для одномерного случая в 50-60-х гг.**

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

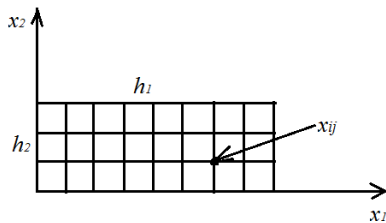


$$x_{i+1} - x_i = h$$

В результате замены производных получается разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f(x_i) = 0 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Возникла идея обобщения одномерной задачи на 2-х или 3-х-мерную. Разностные схемы, написанные для отрезка, можно обобщить на прямоугольную область, параллелепипед.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h_2^2} + f(x_{1ij}, x_{2ij}) = 0$$

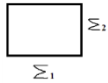
##### 2) Вариационно-разностный метод.

Если написать более реалистичное уравнение, то его нельзя просто так заменить на разностное. Тогда появился вариационно-разностный метод.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f(x_1, x_2) = 0 \quad | \cdot u \int_V$$

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{\Sigma_2} = q \quad \text{граничное условие на границе } \Sigma_2$$

$$u|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{граничное условие на границе } \Sigma_1$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) u \, dV + \int_V f u \, dV = 0$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u \right) \, dV - \int_V k_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \, dV + \int_V f u \, dV = 0$$

Теорема Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\Sigma} a^{(n)} d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \int_V a_{i,i} \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV$$

$$\int_{\Sigma_1} k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} u \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} q u \, d\Sigma - \int_V \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV + \int_V f u \, dV = 0$$

$$u|_{\Sigma_1} = 0$$

Получили **вариационное уравнение**:

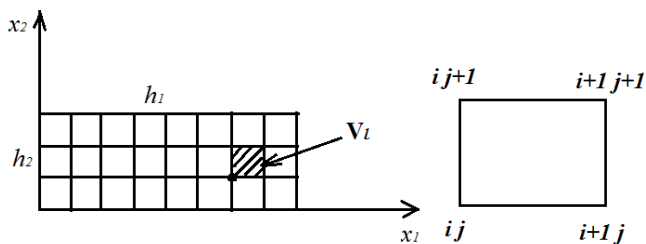
$$\int_V \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV - \int_V f u \, dV - \int_{\Sigma_2} q u \, d\Sigma = 0$$

Пишем **функционал Лагранжа**:

$$L(u) = \frac{1}{2} \int_V \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV - \int_V f u \, dV - \int_{\Sigma_2} q u \, d\Sigma$$

Ищется:  $\min_v L(v)$

Это слабая постановка.



$$\int_V = \sum_l \int_{V_l} \quad \text{в этом идея}$$

$$\int_{V_l} \varphi \, dV \approx \frac{1}{4} h_1 h_2 (\varphi_{ij} + \varphi_{i+1j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{i+1j+1})$$

(Аналог формулы трапеций.)

Для узла  $ij$ :

$$\varphi_{ij} \approx k_{1ij} \left( \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1} \right)^2 + k_{2ij} \left( \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_2} \right)^2$$

Для узла  $i+1j$ :

$$\varphi_{i+1j} \approx k_{1i+1j} \left( \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1} \right)^2 + k_{2i+1j} \left( \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j}}{h_2} \right)^2$$



$$ij + 1 \mapsto \varphi_{ij+1} \approx \dots$$

$$i + 1j + 1 \mapsto \varphi_{i+1j+1} \approx \dots$$

Получили  $L \mapsto L^h$  – разностный функционал.

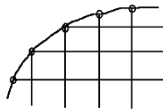
Нужно вычислить производные:

$$\frac{\partial L^h}{\partial u_{ij}} = 0 \quad \forall ij$$

Получается система линейных уравнений. Сложность заключается в том, что надо сидеть и дифференцировать, особенно на границе. Если задача 3-х-мерная, то будет много типов уравнений (27 типов уравнений для параллелепипеда). Для сложных областей все хуже. Граница криволинейная, граничные условия 2-го рода пишутся плохо.

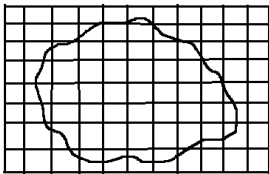
### Методы обобщения сеточных методов на сложные области

Стало понятно, что развитие разностных схем – это тупиковое направление. Прямоугольные области совершенно не покрывают то, что требуется решать в технике. Например, если есть криволинейная граница, то можно нарисовать прямоугольную сетку, но как аппроксимировать ГУ в таких узлах?



Условия 1-го рода (Дирихле) еще как-то аппроксимировались, а для условий 2-го рода (Неймана), когда заданы производные по границе, так ничего нужного и не придумали.

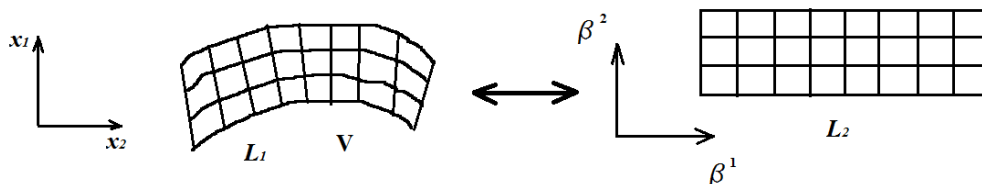
#### А) Метод погружения.



Сложная криволинейная область погружается в прямоугольную область, на которой задается сетка. Решения будут похожи, если окружающий материал задать в зависимости от ГУ. Если граница у исходного тела свободная, то материал берется очень мягким, типа ваты. Если граница закреплена, то окруж. материал берется очень жестким. Но все равно это было менее эффективно, чем в МКЭ. В МКЭ используется не регулярная прямоугольная сетка, а сложная нерегулярная треугольная, косоугольная, криволинейная и т.д.

#### Б) Криволинейная сетка.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \beta^k} \frac{\partial \beta^k}{\partial x_1} \quad J = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \beta^j} \right] \text{ – матрица Якоби}$$



Но этот метод для достаточно простых областей. Это все развивалось в СССР. На Западе развивался МКЭ и был изначально заточен для областей любой формы.

**В) Другие методы обобщения сеточных методов на сложные области.** Сложная область составляется в виде объединения конечного числа прямоугольных областей.

### 3) Метод конечных элементов (МКЭ).

**МКЭ** оказался: 1) более простым, 2) более универсальным, поэтому он вышел победителем. МКЭ совершил революцию, создал инструмент для решения целого класса уравнений в частных производных. Обычные линейные задачи в частных производных (эллиптические 2-го порядка) решаются без проблем.

#### Дифференциальная постановка линейной статической задачи МДТТ.

Рассмотрим статическую задачу теории упругости. Динамическую рассматривать не будем, так как дискретизация по пространственным переменным и дискретизация по времени всегда осуществляются независимо друг от друга. МКЭ – это метод, позволяющий осуществлять дискретизацию по пространственным координатам  $x, y, z$ .

Для МДТТ типичной является смешанная краевая задача. Пусть в области  $V$  задано уравнения равновесия.

$$(C_{ijkl}(x)u_{k,l})_{,j} + f_i = 0, \quad x \in V$$

$$\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{граница закреплена}$$

$$C_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2} = S_i \quad \text{поверхностные силы}$$



Тело может быть неоднородным.  $C_{ijkl}$  может зависеть от  $\vec{x}$ . Допускаются разрывы 1-го рода у функции  $C$  (композиты) (пределы слева и справа существуют).

Решение  $\vec{u} \in H$ , которое удовлетворяет системе диффер. уравнений, называется **сильным решением**. Оно более гладкое, должно обладать 2-мя производными.

МКЭ состоит в том, что решение  $\vec{u}$  (вектор перемещений) нужно разложить по базисным функциям. В **дифференциальных уравнениях** это делать совершенно неудобно по многим причинам:

1) Решением дифференциального уравнения является не просто функция, удовлетворяющая диффер. уравнению, а функция  $\vec{u}$  из пространства  $H$ :

$$\vec{u} \in H \quad (\text{гильбертово пространство функций})$$

Не придумано такого пр-ва, в кот. было бы доказано, что решение этих задач существует.

2) Дифференциальная постановка задачи является сложной для композитов, где  $C_{ijkl}$  – разрывные функции, так как в уравнении есть внешняя производная по  $j$ . Нужно дифференцировать разрывные функции. Возникает вопрос, что под этим иметь в виду.

3) Если мы будем использовать методы Ритца или Бубнова-Галеркина, то мы должны перемещение  $\vec{u}$  раскладывать по некоторым базисным функциям. Базисная идея состоит в том, что мы будем искать решение не в пространстве  $H$ , а в каком-то внутреннем подпространстве  $H^N$  ( $H^N \subset H$ ), где  $N$  обозначает размерность пространства.

Решение задачи во внутреннем пространстве  $H^N$  называется **приближенным решением**.

Для практического применения пространство  $H^N$  надо задавать конструктивно. Это подпространство задается с помощью базисных функций.  $H^N$  – это линейная комбинация

базисных функций. Так вот тут существует матем. проблема: не придумано таких базисных функций, чтобы иметь дело с дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

По этим причинам (и еще по многим другим) говорят о том, что для осуществления пространственной дискретизации задачи гораздо удобнее использовать не дифференциальную постановку, а **вариационную (или слабую) постановку задачи**.

**Слабое решение** должно обладать только одной производной. МКЭ состоит в том, чтобы для слабых решений строить базисные функции. Но здесь есть исключение. Например, для бессеточных методов слабые постановки не годятся, а сильные хорошо подходят.

Вариационная задача для теории упругости существует в 2-х эквивалентных видах: 1) вариационное уравнение, 2) задача минимизации функционала Лагранжа.

### 1) Вариационное уравнение.

Как получить вариационное уравнение? Нужно умножить уравнение равновесия на произвольную функцию  $\vec{v}(x)$  ( $\vec{v} \in H$ ), проинтегрировать по области  $V$ , сделать преобразование с помощью формулы Гаусса-Остроградского и использовать ГУ.

Функция  $\vec{v}$  из того же пространства, что и  $\vec{u}$ , поэтому  $v_i|_{\Sigma_1} = 0$

$C_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2} = S_i$  – заданные поверхностные силы.

В результате получаем **вариационное уравнение**:

$$\int_V C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j}dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma$$

$\vec{u} \in H$  называется **слабым решением**, или просто решением, этого вариационного уравнения, если оно удовлетворяет этому равенству для  $\forall \vec{v} \in H$ .

$$H = \{\vec{v}: \vec{v} \in W_2^1, \vec{v}|_{\Sigma_1} = 0\}$$

### Преимущества этой вариационной постановки задачи:

- 1) Доказано, что решение этого уравнения существует и единственно.
- 2) Там гораздо проще построить базисные функции, так как от  $\vec{u}$  не надо брать вторых производных, а только первые.

**2) Задача минимизации функционала Лагранжа. Вариационный принцип Лагранжа.**  
Функционал Лагранжа:

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl}v_{k,l}v_{i,j}dV - A^l(\vec{v}) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$$

$$l(\vec{v}) = A^e(\vec{v}) = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \text{работа внешних сил на поле перемещений } \vec{v}$$

$\vec{u}$  называется **слабым решением**, если  $\vec{u} \in H$  и  $L(\vec{u}) \leq L(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H$ .

Это вторая вариационная постановка, абсолютно эквивалентная первой. Она называется **вариационный принцип Лагранжа** и говорит о том, что  $\vec{u}$  – это такая функция, которая минимизирует функционал Лагранжа. Это задача поиска минимума функционала Лагранжа.

Теперь мы переходим к МКЭ. МКЭ начинается с того, что  $H$  аппроксимируется неким  $H^N$  – конечномерным подпространством. Дискретизация вариационного уравнения – метод Галеркина, дискретизация функционала Лагранжа – метод Ритца.

$$\vec{u}, \vec{v} \in H, \quad \vec{u}^N, \vec{v}^N \in H^N, \quad H^N \in H$$

$N$  – размерность пространства

$$u_i^N = \sum_{p=1}^N \alpha_i^p \psi_p(\vec{x}), \quad v_i^N = \sum_{q=1}^N \beta_i^q \psi_q(\vec{x})$$

$\psi_1, \dots, \psi_N$  – базис пространства  $H^N$

$$i = 1, 2, 3 \rightarrow 3D, \quad i = 1, 2 \rightarrow 2D, \quad i = 1 \rightarrow 1D$$

Теперь задача формулируется так:

**Приближенное решение**  $\vec{u}^N$  (приближение к  $\vec{u}$ ) – это такое решение, что

$$1) a(\vec{u}^N, \vec{v}^N) = l(\vec{v}^N) \quad \leftarrow \text{метод Галеркина}$$

$$2) L(\vec{u}^N) \leq L(\vec{v}^N) \quad \forall \vec{v}^N \quad \leftarrow \text{метод Ритца}$$

В симметричном случае  $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$ : 1)  $\Leftrightarrow$  2) эквивалентны.

В несимметричном случае  $a(\vec{u}, \vec{v}) \neq a(\vec{v}, \vec{u})$  метода Ритца  $\nexists$ , т.к.  $\nexists$  задачи минимизации функционала.

Покажем, как получается система линейных уравнений для **метода Галеркина**.

$$A) a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$$

$$B) a(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0, \quad a(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$$

В вариационное уравнение подставим разложения для  $\vec{u}^N, \vec{v}^N$  и воспользуемся билинейностью функционала  $a(\vec{u}, \vec{v})$ . Получаем:

$$a(\vec{u}^N, \vec{v}^N) = \sum_{P,Q=1}^N \left( \int_V C^{ijkl} \psi_{P,l} \psi_{Q,j} dV \right) \alpha_k^P \beta_i^Q = \sum_{P,Q=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P \beta_i^Q, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad P, Q = 1, \dots, N$$

$$K_{PQ}^{ki} = \int_V C^{ijkl} \psi_{P,l} \psi_{Q,j} dV \text{ – глобальная матрица жесткости}$$

$$A^l(\vec{v}^N) = \sum_{Q=1}^N \left( \int_V f^i \psi_Q dV \right) \beta_i^Q + \sum_{Q=1}^N \left( \int_{\Sigma_2} S^i \psi_Q d\Sigma \right) \beta_i^Q = \sum_{Q=1}^N F_Q^i \beta_i^Q$$

$$F_Q^i = \int_V f^i \psi_Q dV + \int_{\Sigma_2} S^i \psi_Q d\Sigma \quad \Rightarrow \quad \sum_{P,Q=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P \beta_i^Q = \sum_{Q=1}^N F_Q^i \beta_i^Q$$

$$\text{Функция } v_i^N = \sum_{q=1}^N \beta_i^q \psi_q(\vec{x}) \text{ – произвольная функция} \Rightarrow \beta_i^q \text{ – произвольные}$$

Сгруппируем, приравнявая коэффициенты при  $\beta_k^Q$ , и получим линейную систему:

$$\sum_{P=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P = F_Q^i \quad 3N \text{ уравнений}$$

Найдем  $\alpha_k^P \Rightarrow$  найдем  $\vec{u}^N$ . Это идеология метода Галеркина.

В МКЭ базисные функции  $\psi_i$  строятся на основе введения сетки, на основе рассмотрения этих КЭ. МКЭ – это частный случай метода Ритца и метода Галеркина. А частности состоит в том, что специальным образом выбираются базисные функции (с помощью введения сетки КЭ).

### 5) Метод Галеркина. Аппроксимация вектора перемещений, базисные функции, получение линейной системы.

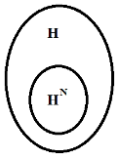
Исходное подпространство  $H$ .

$$\vec{u}, \vec{v} \in H$$

$\vec{u}, \vec{v}$  входят симметричным образом в  $a$  ( $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$ ) не только потому, что  $a$  – симметрично, а потому что  $\vec{u}, \vec{v}$  из одного пространства. С этого начинаются метод Галеркина и метод Ритца. МКЭ пока никакого нет.

МКЭ начинается с того, что  $H$  аппроксимируется неким  $H^N$  – конечномерным подпространством. Дискретизация вариационного уравнения – метод Галеркина, дискретизация функционала Лагранжа – метод Ритца.

#### Аппроксимация вектора перемещений, базисные функции.



$$\vec{u}, \vec{v} \in H, \quad \vec{u}^N, \vec{v}^N \in H^N, \quad H^N \in H$$

$N$  – размерность пространства

$$u_i^N = \sum_{p=1}^N \alpha_i^p \psi_p(\vec{x}), \quad v_i^N = \sum_{q=1}^N \beta_i^q \psi_q(\vec{x})$$

$\psi_1, \dots, \psi_N$  – базис пространства  $H^N$ .  $H^N$  задается с помощью базисных функций  $\psi_p$ .

$$i = 1, 2, 3 \dots 3D, \quad i = 1, 2 \dots 2D, \quad i = 1 \dots 1D$$

Теперь задача формулируется так:

**Приближенное решение  $\vec{u}^N$**  (приближение к  $\vec{u}$ ) – это такое решение, что

$$1) a(\vec{u}^N, \vec{v}^N) = l(\vec{v}^N) \quad \leftarrow \text{метод Галеркина}$$

$$2) L(\vec{u}^N) \leq L(\vec{v}^N) \quad \forall \vec{v}^N \quad \leftarrow \text{метод Ритца}$$

В симметричном случае ( $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$ ): 1)  $\Leftrightarrow$  2) эквивалентны.

В несимметричном случае ( $a(\vec{u}, \vec{v}) \neq a(\vec{v}, \vec{u})$ ) метода Ритца  $\nexists$ , т.к.  $\nexists$  задачи минимизации функционала.

Кроме того, метод Галеркина может рассматриваться в другом смысле, не как здесь. В методе Ритца есть функционал  $L$ ,  $\vec{u} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  обязаны быть из одного пространства. А в методе Галеркина  $\vec{u}$  можно брать из одного пространства, а  $\vec{v}$  – из другого. Если  $\vec{u}, \vec{v}$  – из одного пространства, то есть полная симметрия, и МКЭ именно для такого случая основан. Запишем, как получается система линейных уравнений.

#### Получение линейной системы уравнений. Метод Галеркина.

$$A) a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$$

$$B) a(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0, \quad a(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = A^l(\vec{v})$$

$$\int_V C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma \quad - \text{вариационное уравнение}$$

$$a(\vec{u}^N, \vec{v}^N) = A^l(\vec{v}^N)$$

$$\vec{u}^N \in H^N \quad \forall \vec{v}^N \in H^N$$

В вариационное уравнение подставим разложения для  $\vec{u}^N, \vec{v}^N$  и воспользуемся билинейностью функционала  $a(\vec{u}, \vec{v})$ . Получаем:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}^N, \vec{v}^N) &= \int_V C_{ijkl} u_{k,l}^N v_{i,j}^N dV = \\ &= \sum_{P,Q=1}^N \left( \int_V C^{ijkl} \psi_{P,l} \psi_{Q,j} dV \right) \alpha_k^P \beta_i^Q = \sum_{P,Q=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P \beta_i^Q, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad P, Q = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$K_{PQ}^{ki} = \int_V C^{ijkl} \psi_{P,l} \psi_{Q,j} dV$$

$K_{PQ}^{ki}$  – глобальная матрица жесткости

$$A^l(\vec{v}^N) = \sum_{Q=1}^N \left( \int_V f^i \psi_Q dV \right) \beta_i^Q + \sum_{Q=1}^N \left( \int_{\Sigma_2} S^i \psi_Q d\Sigma \right) \beta_i^Q = \sum_{Q=1}^N F_Q^i \beta_i^Q$$

$$\begin{aligned} F_Q^i &= \int_V f^i \psi_Q dV + \int_{\Sigma_2} S^i \psi_Q d\Sigma \\ \Rightarrow \sum_{P,Q=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P \beta_i^Q &= \sum_{Q=1}^N F_Q^i \beta_i^Q \end{aligned}$$

Функция:

$$v_i^N = \sum_{Q=1}^N \beta_i^Q \psi_Q(\vec{x}) - \text{произвольная функция}$$

$$\Rightarrow \beta_i^Q - \text{произвольные}$$

Сгруппируем, приравнявая коэффициенты при  $\beta_k^Q$ , и получим линейную систему:

$$\sum_{P=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P = F_Q^i \quad 3N \text{ уравнений}$$

Найдем  $\alpha_k^P \Rightarrow$  найдем  $\vec{u}^N$

Это идеология метода Галеркина.

$$\sum_{P=1}^N K_{PQ}^{ij} \alpha_i^P = F_Q^j \quad \Rightarrow \quad \sum_{Q=1}^N K_{PQ}^{ij} \alpha_j^Q = F_P^i \quad \text{следствие симметрии } C_{ijkl} = C_{jikl}$$

Теперь запишем **кратко**, как получается система линейных уравнений.

В уравнение  $a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v})$  подставим разложения для  $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u}^N = \sum_{P=1}^N \alpha^P \psi_P(\vec{x}), \quad \vec{v}^N = \sum_{Q=1}^N \beta^Q \psi_Q(\vec{x})$$

и воспользуемся билинейностью функционала  $a(\vec{u}, \vec{v})$ . Получаем:

$$\sum_{P,Q=1}^N \alpha^P \beta^Q a(\psi_P, \psi_Q) = \sum_{Q=1}^N \beta^Q l(\psi_Q)$$

Если функция  $\vec{v}$  – любая, то все коэффициенты  $\beta^Q$  – произвольные. Отсюда мы получаем систему линейных уравнений.

$\vec{v}$  – любая  $\Rightarrow \beta^Q$  – любые

Тогда немедленно возникает метод Бубнова-Галеркина.

$$\forall \beta^Q \sum_{P=1}^N \alpha^P a(\psi_P, \psi_Q) = l(\psi_Q) \leftarrow \text{система линейных уравнений}$$

$$K_{PQ} = a(\psi_P, \psi_Q), \quad F_Q = l(\psi_Q)$$

$K_{PQ}$  – глобальная матрица жесткости

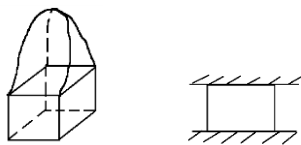
$$\sum_{P=1}^N K_{PQ} \alpha^P = F_Q \quad \text{метод Галеркина}$$

Во-первых, доказывают, что приближенное решение сводится к точному при увеличении числа базисных функций (это математический интерес).

Во-вторых, практический интерес представляет вопрос, как выбирать базисные функции  $\psi_P$ . Они должны быть такими, чтобы их линейная комбинация 1) хорошо аппроксимировала решение, 2) удовлетворяла ГУ задачи.

В то время, когда применяли этот метод, но еще не было вычислительных машин, базисные функции выбирались  $\psi_P$  так, чтобы линейная комбинация их небольшого числа достаточно хорошо аппроксимировала бы предполагаемое решение задачи, т.е. чтобы  $N$  было небольшим и чтобы приходилось решать линейную систему небольшого размера. Поэтому придумывали сложные функции, которые строились на базе тригонометрических функций  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ , т.е. представляли собой линейные комбинации классических элементарных функций.

Пример: профессор Филоненко-Бородич (кафедра теории упругости) придумал косинус-биномы (разность двух косинусов с разными частотами) и решал с их помощью задачу о равновесии параллелепипеда. С помощью косинус-биномов решалась задача с такими ГУ: сверху действовала такая куполообразная нагрузка в виде шапочки.



Методы такого типа были хороши для написания статей и диссертаций, но были мало пригодны для решения сложных инженерных задач.

Задача, которая представляла практический интерес и которая тоже решалась такими методами, но более сложно, – это сжатие параллелепипеда между жесткими плитами (моделирование опыта на сжатие реальных бетонных образцов). Членов суммы в такой задаче было очень много.

Когда появились компьютеры, возникло желание существенно увеличить  $N$ . Как выяснилось,  $N$  можно увеличить, если матрица  $\mathbf{a}$  будет разреженной. Если выбирать такие функции в виде косинус-биномов, то матрица будет плотной – все элементы ненулевые. Такие системы на компьютере решаются сложно. Тогда придумали МКЭ.

## б) Кусочно-линейная аппроксимация перемещения. Вектор неизвестных. Глобальная и локальная матрицы жесткости. (Л2,3)

### Метод конечных элементов.

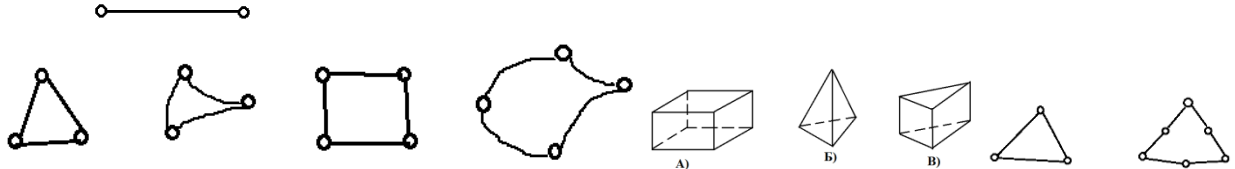
Базисные функции  $\psi_p$  – это функции с компактным носителем.

Число ненулевых элементов конечно при  $N \rightarrow 0$ .

Рассмотрим, как строятся эти базисные функции. МКЭ использует сетку.

**Что называется конечным элементом? Чем определяется КЭ?**

#### 1) Геометрические фигуры элементов.



#### 2) Выбор узлов.

Именно в узлах есть искомое приближенное решение. И по значениям искомой функции в узлах происходит интерполяция во всей остальной области.

#### 3) Выбор аппроксимации внутри элемента. Он связан с выбором узлов ( $2 \Leftrightarrow 3$ ).

Выбор аппроксимирующих функций внутри элемента связан с выбором узлов. Внутри  $\forall$  элемента используется многочлен (полином) – многочленная аппроксимация (интерполяция).

### Связь между глобальным и локальным описаниями.

Программы МКЭ так устроены, что сначала делается локальное описание внутри элемента, а потом осуществляется переход к глобальному описанию во всей области.

### Задача теории упругости.

$$\int_V C_{ijkl}(\vec{x}) u_{k,l} v_{i,j} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma \quad (*)$$

**Глобальное описание:**

$$u_k^N = \sum_{P=1}^N \alpha_k^P \psi_P(\vec{x}), \quad v_i^N = \sum_{Q=1}^N \beta_i^Q \psi_Q(\vec{x}), \quad u_k^N, v_i^N \in H^N$$

$d = 1, 2, 3$  – размерность задачи,  $k = 1, \dots, d$ ,  $P, Q = 1, \dots, N$

В МКЭ в 99% случаев используют декартову систему координат.

Базисные функции  $\psi_P$  выбираются одинаковыми для разных направлений вектора перемещений, так как перемещения по разным осям равноправны. Подставим  $u_k^N$  и  $v_i^N$  в уравнение (\*) и получим следующее.

$$\sum_{P=1}^N \sum_{Q=1}^N \left( \int_V C^{ijkl} \psi_{P,l} \psi_{Q,j} dV \right) \alpha_k^P \beta_i^Q = \sum_{Q=1}^N \left[ \int_V f^i \psi_Q dV + \int_{\Sigma_2} S^i \psi_Q d\Sigma \right] \beta_i^Q$$

$$K_{PQ}^{ki} = \int_V C^{ijkl} \psi_{P,l} \psi_{Q,j} dV, \quad F_Q^i = \int_V f^i \psi_Q dV + \int_{\Sigma_2} S^i \psi_Q d\Sigma$$



$$\sum_{P,Q=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P \beta_i^Q = \sum_{Q=1}^N F_Q^i \beta_i^Q$$

$P, Q$  – узлы глобальной области (большие буквы)

Так как функция  $\vec{v}^N \in H^N$  – любая в этом подпространстве, то, следовательно, коэффициенты  $\beta$  – любые, значит, это равенство истинно только если:

$$\sum_{P=1}^N K_{PQ}^{ki} \alpha_k^P = F_Q^i \quad \text{– система линейных уравнений}$$

Получили систему линейных уравнений.

$K_{PQ}^{ki}$  – **глобальная матрица жесткости**, она имеет блочную структуру

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdot & \cdot & K_{1N} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ K_{N1} & \cdot & \cdot & K_{NN} \end{bmatrix}, \quad K_{PQ} = \begin{bmatrix} K_{PQ}^{11} & \cdot & \cdot & K_{PQ}^{1d} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ K_{PQ}^{d1} & \cdot & \cdot & K_{PQ}^{dd} \end{bmatrix}$$

$P, Q = 1, \dots, N$  – номера узлов;  $d = 1, 2$  или  $3$  – размерность задачи

Размер матрицы  $\mathbf{K}$ :  $Nd \times Nd$ .

### Кусочно-линейная аппроксимация перемещения.

Основной вопрос: как выбрать базисные функции  $\psi_P$ . В классическом МКЭ во всей области  $V$  базисные функции  $\psi_P$  (глобальные) – это кусочно-полиномиальные функции. А в любом КЭ (локальные базисные функции) – это просто полином. Требуемое условие гладкости на границах элементов –  $C^0$ -гладкость, т.е. в сумме кусочно-полиномиальная функция должна быть непрерывна.

### Связь базисных функций и конечных элементов.

Рассмотрим, как задаются базисные функции с помощью КЭ. Вот у нас есть сетка, она разбита на конечные элементы. Вот есть узел с номером  $Q$ .

В классическом МКЭ базисные функции выбираются так:

$$\psi_P(\vec{x}^Q) = \delta_P^Q, \quad \vec{x}^Q \text{ – радиус-вектор узла } Q$$

Тогда из формулы сразу видно:

$$u_k^N(\vec{x}^Q) = \sum_{P=1}^N \alpha_k^P \psi_P(\vec{x}^Q) = \sum_{P=1}^N \alpha_k^P \delta_P^Q = \alpha_k^Q$$

$$u_k^N(\vec{x}^Q) = \alpha_k^Q$$

Итак,  $\psi_P$  выбираются так, что  $\alpha_i^P \equiv \hat{u}_i^P$  – перемещение в  $P$  узле по направлению  $i$ .

$$\psi_P(\vec{x}^Q) = \delta_P^Q$$

Т.е. в классическом МКЭ функции  $\psi_P$  подбирают так, чтобы коэффициенты  $\alpha_k^P$  являлись узловыми значениями искомой функции. Таким образом, решив линейную систему, сразу получаем значения перемещений в узлах.

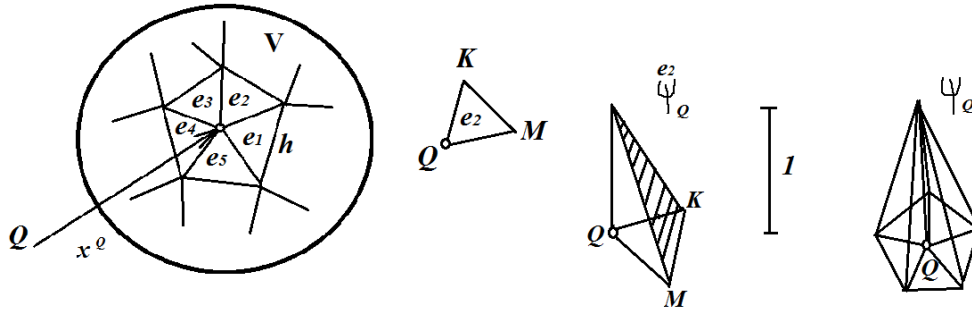
Вектор  $\hat{u}$  состоит из подвекторов.  $d = 1, 2$  или  $3$  – размерность задачи,

$N_n$  – общее число узлов в области,  $N_e$  – число элементов

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u}^1 \\ \vdots \\ \hat{u}^{N_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^1 \\ \vdots \\ \hat{u}_d^1 \\ \vdots \\ \hat{u}_1^N \\ \vdots \\ \hat{u}_d^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^N(\vec{x}^1) \\ \vdots \\ u_d^N(\vec{x}^1) \\ \vdots \\ u_1^N(\vec{x}^{N_n}) \\ \vdots \\ u_d^N(\vec{x}^{N_n}) \end{Bmatrix} \quad - \text{ вектор неизвестных}$$

Пусть к  $Q$  узлу примыкает несколько треугольных элементов. Во всей области функции  $\psi_Q$  – это кусочно-полиномиальные функции, потому что в каждом треугольнике – это будет полиномиальная функция. В каждом треугольнике – это линейные, самые простые функции.

Рассмотрим один треугольник QMK.



В области этого треугольника QMK функция  $\psi$  такая – линейная функция (такой заштрихованный треугольник, кусочек плоскости), а вне треугольника QMK – она ноль. А функция, соответствующая  $Q$  узлу – это совокупность таких треугольников (пирамида над многоугольной областью без дна), а вне этой области – это ноль.

Отсюда видно, что базисные функции  $\psi$  имеют малый носитель. Если характерная сторона этих треугольников  $h$ , то область, где функция  $\psi \neq 0$ , имеет диаметр порядка  $h$ .  $\psi \neq 0, \vec{x} \in D_h, \text{diam}(D_h) = O(h)$

Также видно, что даже если мы используем глобальное описание, то базисные функции  $\psi$ , определенные для всей области, все равно состоят из частей, и при конструировании (задании) этой функции  $\psi$  каждая часть задается в одном элементе. Поэтому удобнее использовать не глобальное описание, а сначала использовать локальное описание в каждом отдельном элементе. Это удобно, потому что можно использовать разные элементы, разные базисные функции в разных областях.

$$\psi_Q^{(e_2)} = \frac{1 - \frac{x - x_M}{x_K - x_M} - \frac{y - y_K}{y_M - y_K}}{1 - \frac{x_Q - x_M}{x_K - x_M} - \frac{y_Q - y_K}{y_M - y_K}}, \quad x \in V_{e_2}$$

$$\psi_Q^{(e_2)}(\vec{x}^Q) = 1, \quad \psi_Q^{(e_2)}(\vec{x}^M) = 0, \quad \psi_Q^{(e_2)}(\vec{x}^K) = 0$$

Эта формула написана только для треугольника QMK. В области многоугольника, содержащего узел  $Q$ , для каждого треугольного элемента функция  $\psi_Q^{(e_i)}$  описывается

подобной формулой, а для всей области многоугольника нужно ставить фигурную скобку и совмещать все эти формулы (а в программе – через оператор if).

$$\sum_{Q=1}^N K_{PQ}^{ij} \hat{u}_j^Q = F_P^i \quad Q = 1, \dots, N - \text{номера узлов}, \quad i, j = 1, \dots, 3 - \text{размерность задачи}$$

$$K\hat{u} = \hat{F}$$

### Локальное описание (в рамках одного элемента).

$n_e$  – число узлов одного элемента,  $\vec{x} \in V_e$  – область элемента

Чтобы пользоваться всякими вариационными принципами, в области элемента нужно задать аппроксимацию поля перемещений:

$$u_k(\vec{x}) = \sum_{q=1}^{n_e} \alpha_k^q \psi_q(\vec{x}) = \sum_{q=1}^{n_e} N_q(\vec{x}) \hat{u}_k^q, \quad \vec{x} \in V_e$$

Число базисных функций  $\psi_q(\vec{x})$  равно числу узлов  $n_e$  элемента.

Базисные функции выбираются так, что дельта-свойство верно.

$\psi_q(\vec{x}^p) = \delta_q^p$ ,  $\alpha_k^q = u_k(\vec{x}^q) = \hat{u}_k^q$  – узловые значения перемещений (обозначаются крышкой)

$\psi_q(\vec{x}) = N_q(\vec{x})$  – функции формы

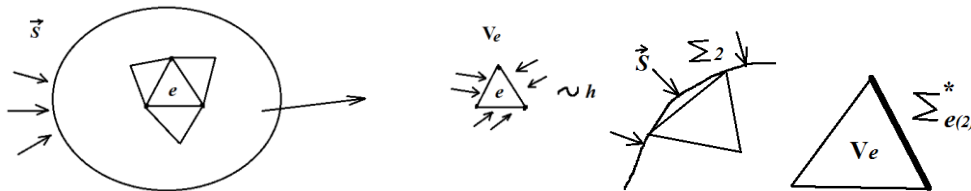
$$u_k(\vec{x}) = \sum_{q=1}^{n_e} N_q(\vec{x}) \hat{u}_k^q, \quad \vec{x} \in V_e$$

Теперь рассмотрим вариационный принцип.

### Вариационное уравнение.

$a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v})$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in H$  – бесконечномерное пространство

$a(\vec{u}^N, \vec{v}^N) = l(\vec{v}^N)$ ,  $\vec{u}^N, \vec{v}^N \in H^N$  – конечномерное подпространство



Запишем уравнение равновесия для отдельного КЭ:

$$\int_{V_e} C^{ijkl} u_{i,j}^N v_{k,l}^N dV = \int_{V_e} f_i v_i^N dV + \int_{\Sigma_{e(2)}^*} S_i v_i^N d\Sigma + \int_{\Sigma^{int}} S_i^* v_i^N d\Sigma$$

$\vec{S}^*$  – неизвестные силы со стороны окружающих элементов

Далее напомним интеграл по области  $V$  как сумму интегралов по областям элементов.

А интеграл по границе запишем как сумму интегралов по всем границам элементов.

Внешнюю реальную границу  $\Sigma_2$  заменяют суммой границ элементов, выходящих на внешнюю границу. В таком случае граница области спрямляется, часть области отбрасывается. Если говорить о теории упругости, то энергия деформации, которая сосредоточена в этой отбрасываемой области, стремится к 0 при  $h \rightarrow 0$ .

Получаем:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \int_{V_e} C_{ijkl} u_{k,l}^N v_{i,j}^N dV - \int_{V_e} f_i v_i^N dV - \int_{\Sigma_{e(2)}^*} S_i v_i^N d\Sigma \right] = 0 \quad (***)$$

Интегралы по внутренним границам  $\Sigma^{int}$  не учитываются (силы воздействия элементов друг на друга), так как они неизвестны и взаимоуничтожаются при суммировании:  $-\int + \int = 0$ .

Все, что написано в квадратных скобках, будем аппроксимировать на подпространстве. А на подпространстве мы знаем, что:

$$u_k^N = \sum_{p=1}^{n_e} N_p(\vec{x}) \hat{u}_k^p, \quad v_i^N = \sum_{q=1}^{n_e} N_q(\vec{x}) \hat{v}_i^q$$

$N_p(\vec{x})$  – функции формы, базисные функции,  $\hat{u}_k^p$  – узловые значения перемещений

$n_e$  – число узлов одного элемента,  $N_e$  – число элементов

Теперь надо подставить  $u_k^N, v_i^N$  в уравнения (\*\*\*)

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \sum_{p,q=1}^{n_e} \left( \int_{V_e} C^{ijkl}(\vec{x}) N_{p,l} N_{q,j} dV \right) \hat{u}_k^p \hat{v}_i^q - \sum_{q=1}^{n_e} \left[ \int_{V_e} f^i N_q(\vec{x}) dV + \int_{\Sigma_{e(2)}^*} S^i N_q(\vec{x}) d\Sigma \right] \hat{v}_i^q \right] = 0$$

Функции формы  $N_q$ , функции  $f^i, S^i$  и тензор  $C^{ijkl}$  – заданы,  $\Rightarrow$  эти интегралы можно вычислить. Тогда введем следующие обозначения.

$$K_{pq}^{(e)ki} = \int_{V_e} C^{ijkl}(\vec{x}) N_{p,l} N_{q,j} dV - \text{можно вычислить}$$

$K_{pq}^{(e)ki}$  – локальная матрица жесткости, или вклад в глобальную матрицу жесткости от е-го элемента, блочная матрица

(e) обозначает, что матрица получена интегрированием по е-му элементу

$$F_q^{(e)i} = \int_{V_e} f^i N_q(\vec{x}) dV + \int_{\Sigma_{e(2)}^*} S^i N_q(\vec{x}) d\Sigma - \text{можно вычислить}$$

$F_q^{(e)i}$  – локальные правые части

Уравнение упрощается:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \sum_{p,q=1}^{n_e} K_{pq}^{(e)ik} \hat{u}_k^p \hat{v}_i^q - \sum_{q=1}^{n_e} F_q^{(e)i} \hat{v}_i^q \right] = 0$$

Теперь надо вычислить сумму по всем элементам – самую внешнюю сумму. То, что написано в квадратных скобках, относится только к одному е-му элементу. Программа, реализующая МКЭ, сначала вычисляет все для каждого элемента. Удобство вычисления состоит в том, что можно вычислять вклады каждого элемента независимо от вкладов других элементов. Это значит, вклады каждого элемента в результирующую глобальную систему уравнений можно вычислять параллельно.

Теперь нужно уравнения просуммировать правильно, так как локальное уравнение использует локальную нумерацию узлов, а нам нужно сделать глобальную.

## 7) Таблицы узлов и элементов. Ассемблирование глобальной матрицы. (Л4)

### Ассемблирование.

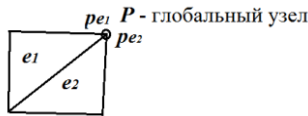
Мы получили систему уравнений с локальной нумерацией узлов:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \sum_{p,q=1}^{n_e} \left( \int_{V_e} C^{ijkl}(\vec{x}) N_{p,l} N_{q,j} dV \right) \hat{u}_k^p \hat{v}_i^q - \sum_{q=1}^{n_e} \left[ \int_{V_e} f^i N_q(\vec{x}) dV + \int_{\Sigma_{e(2)}^*} S^i N_q(\vec{x}) d\Sigma \right] \hat{v}_i^q \right] = 0$$

Или в упрощенном виде:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \sum_{p,q=1}^{n_e} K_{pq}^{(e)ki} \hat{u}_k^p \hat{v}_i^q - \sum_{q=1}^{n_e} F_q^{(e)i} \hat{v}_i^q \right] = 0$$

Теперь хочется эту систему уравнений переписать в таком виде, чтобы она выглядела как глобальная система уравнений, написанная сразу для всей области.



Узел имеет глобальный номер  $P$  и два локальных номера  $pe_1, pe_2$ .

Процесс, который в МКЭ позволяет от системы уравнений, записанных с помощью локальных номеров, перейти к системе уравнений, записанных в виде глобальных номеров, называется **ассемблированием**.

$P = 1, \dots, N$  – число узлов сетки

$pe_1 = 1, \dots, n_{e_1}$  – число узлов элемента  $e_1$ ,  $pe_2 = 1, \dots, n_{e_2}$  – число узлов элемента  $e_2$

В любой КЭ-программе есть такая таблица связи локальных и глобальных номеров.

$P = g(p, e)$

$P$  – глобальный номер,  $p$  – локальный номер,  $e$  – номер элемента

Эту таблицу задает программа, которая генерирует сетку конечных элементов. Мы считаем, что такая сетка уже есть и есть такая функция:

$P = g(p, e), \quad Q = g(q, e)$

Эти функции можно обратить:

$p = g^{-1}(P, e), \quad q = g^{-1}(Q, e)$

Теперь с помощью этой функции мы можем ту систему уравнений переписать в терминах глобальных номеров.

Определим обратную функцию:

$$g^{-1}(P, e) = \begin{cases} p, & P \in e \\ 0, & P \notin e \end{cases}$$

Определим локальную матрицу жесткости в терминах глобальных номеров:

$$K_{p(P,e)g(Q,e)}^{(e)ki} = \begin{cases} K_{pq}^{(e)ki}; & p, q > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$i, k$  – связаны с направлениями в декартовой системе координат

Определим правую часть элемента в терминах глобальных номеров:

$$F_{q(Q,e)}^{(e)i} = \begin{cases} F_q^{(e)i}; & q > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$N_e$  – число элементов

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \sum_{p,q=1}^N K_{p(P,e) g(Q,e)}^{(e)ki} \hat{u}_k^P \hat{v}_i^Q - \sum_{q=1}^N F_{q(Q,e)}^{(e)i} \hat{v}_i^Q \right] = 0$$

Теперь у нас уравнение записано в глобальной нумерации. Поменяем порядок суммирования.  $\hat{u}_k^P, \hat{v}_i^Q$  не зависят от элементов

$$\sum_{p,q=1}^N \left( \sum_{e=1}^{N_e} K_{p(P,e) g(Q,e)}^{(e)ki} \right) \hat{u}_k^P \hat{v}_i^Q - \sum_{q=1}^N \left( \sum_{e=1}^{N_e} F_{q(Q,e)}^{(e)i} \right) \hat{v}_i^Q = 0$$

Мы перешли от локального описания к глобальному, потому что сумма берется по всем узлам сетки, и неизвестные узловые перемещения записаны в глобальных номерах, что нам и требовалось.

$$K_{PQ}^{ik} = \sum_{e=1}^{N_e} K_{p(P,e) g(Q,e)}^{(e)ki} - \text{глобальная матрица жесткости}$$

Здесь будет много нулевых слагаемых, если индексы  $p, q = 0$ .

$$\hat{F}_Q^i = \sum_{e=1}^{N_e} F_{q(Q,e)}^{(e)i} - \text{правая часть (узловая величина)}$$

$$\sum_{p,q=1}^N K_{PQ}^{ik} \hat{u}_k^P \hat{v}_i^Q - \sum_{q=1}^N \hat{F}_Q^i \hat{v}_i^Q = 0$$

Дальше мы рассуждаем так. Поскольку в вариационном уравнении имеется в виду, что  $v_i$  – произвольные (так как в вариационном уравнении  $v_i$  – любая функция), то тогда и  $\hat{v}_i^Q$  – произвольные. А из этого следует, что равенство нулю будет тогда и только тогда, когда равно нулю то, что стоит при каждом  $\hat{v}_i^Q$ . Т.е. мы получаем такую систему уравнений:

$$\sum_{p=1}^N K_{PQ}^{ki} \hat{u}_k^P = \hat{F}_Q^i - \text{глобальная система уравнений}$$

Процесс суммирования, когда мы перешли от локальных матриц жесткости к глобальным, называется **ассемблированием**.

Сначала в программе ANSYS вычисляются локальные матрицы жесткости. Потом идет процесс ассемблирования локальных матриц жесткости, в результате чего получается глобальная система уравнений.

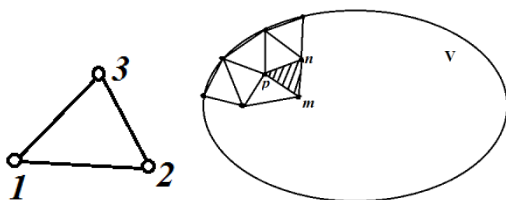
### Ассемблирование глобальной матрицы жесткости.

$$\forall e \quad K_{pq}^{(e)ij} \hat{u}_j^q = \hat{F}_p^i \quad (1)$$

$K_{pq}^{(e)ij}$  – локальная матрица жесткости

$p, q = 1, 2, 3$  значения индексов для одного элемента (локальная нумерация)

$i, j = 1, 2$  (2D)



Чтобы провести сборку (ассемблирование) всех элементов во всей области, нужно собрать все уравнения вместе для всех элементов. Для этого нужно использовать глобальную нумерацию. Поэтому в любой КЭ программе существуют две такие таблицы: таблица узлов и таблица элементов.

**Таблица узлов**

Номера узлов	$x$	$y$	$z$	координаты узлов для трехмерной задачи
1	$x_1$	$y_1$	$z_1$	координаты 1-го узла
2	$x_2$	$y_2$	$z_2$	координаты 2-го узла
⋮				
N	$x_N$	$y_N$	$z_N$	координаты N-го узла

**Таблица элементов**

Номер элемента	Тип элемента	Материал	Система координат	Номера узлов					
				1	2	3	...	$N_{node}$	
1	1	10	2	10	7	125	...	3	Глобальные номера узлов в общей сетке
2	7	10	3	9	7	125		4	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	
$N_e$	1	10	3	1025	1026	100		101	

**Типы элементов:** треугольный, четырехугольный и т.п.

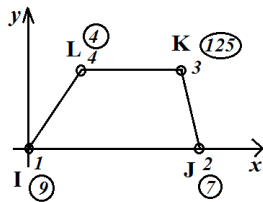
**Материал:** 1) упругий, пластический, 2) анизотропный, изотропный. (Например, упругий изотропный и упругий анизотропный – это разные материалы, они имеют разные номера.)

**Система координат:** локальная и глобальная. В какой системе координат заданы материальные свойства? Если материал **изотропный**, то все равно. А если материал **анизотропный**, то его свойства заданы либо в локальной, либо в глобальной системе координат. В любой КЭ программе есть по крайней мере 2 системы координат: глобальная и локальная, связанная с элементом. В КЭ программе должно быть разумное правило выбора локальной системы координат.

**Номера узлов:** локальные и глобальные. В таблице дано соответствие локального и глобального номеров каждого узла элемента, которое составляет программа генерации сетки.

В описании к ANSYS локальные узлы нумеруются так: I, J, K, L. Локальная система координат выбирается так, что первая ось ( $x$ ) направлена от узла I к узлу J. Вторая ось ( $y$ ) перпендикулярна оси  $x$ .

**Локальная система координат плоского четырехугольного элемента в ANSYS**  
(элемент 2 из таблицы)



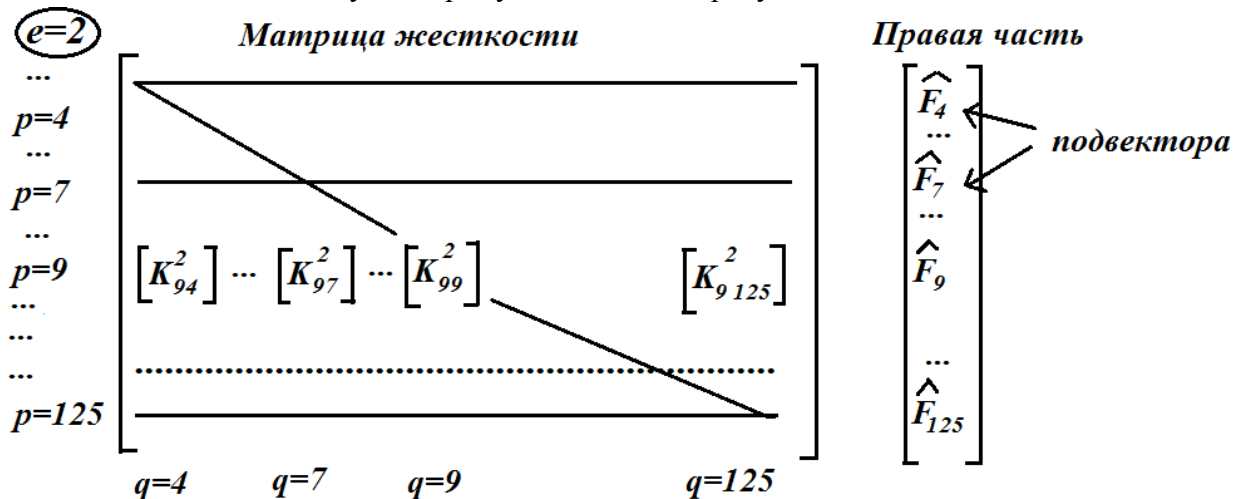
7 – глобальный номер узла, 2 – локальный номер узла  
J – локальный номер узла в текстовом описании

### Что делается при сборке всех локальных уравнений?

Локальные матрицы жесткости мы помещаем в глобальную матрицу жесткости просто за счет изменения нумерации. Пусть у нас есть глобальная матрица жесткости, которая по существу есть та же самая локальная, но переписанная в глобальной нумерации:

$$\forall e \quad K_{p(P,e)q(Q,e)}^{(e)ij} \hat{u}_j^q = \hat{F}_{p(P,e)}^i$$

Напишем глобальную матрицу жесткости и правую часть для 2-го элемента:



Видно, что если разница между номерами большая, то элемент стоит далеко от диагонали и ширина ленты большая.

Локальные подматрицы приплюсовываются к глобальной матрице предыдущего содержания. Этот процесс называется **ассемблированием глобальной матрицы**.

Так же строится правая часть и вектор неизвестных. В результате получается глобальная система уравнений:  $K\hat{u} = \hat{F}$ . После этого эту систему уравнений можно решать. Именно этим и занимается ANSYS.

Матрица, которая получается методом КЭ, характеризуется, по крайней мере, двумя параметрами (на  $p$ -й строчке):

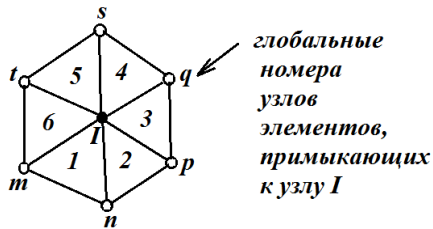
- 1) числом ненулевых элементов (число ненулевых элементов  $\rightarrow \infty$ , когда объем матрицы  $\rightarrow \infty$ ),
- 2) расстоянием между ненулевыми элементами (подматрицами) (расстояние может  $\rightarrow \infty$ , так как оно пропорционально  $N_1 \times N_2$ ).

Прямые методы потребуют много памяти и арифметических операций, там играет роль ширина ленты. В итерационных методах ширина ленты не играет никакой роли, там важно число ненулевых элементов на каждой строке.

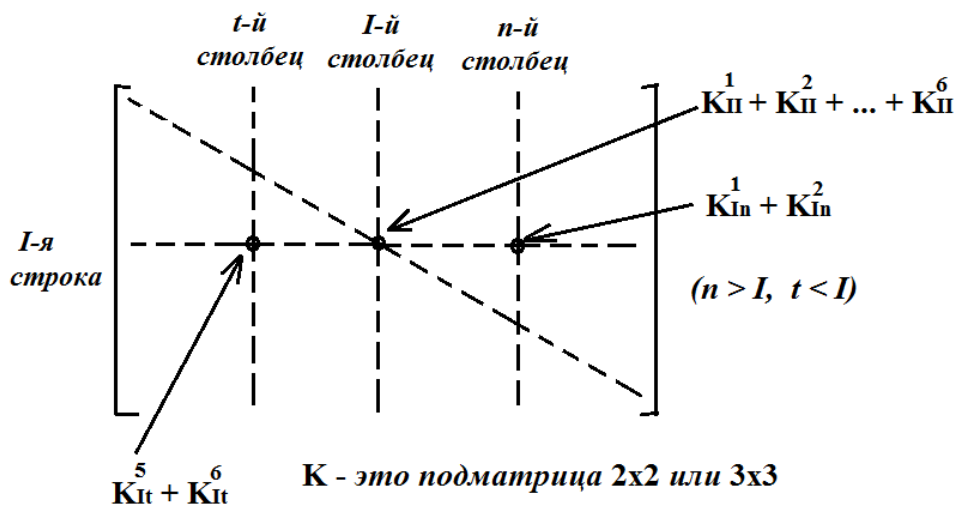


### Пример (ассемблирование глобальной матрицы).

Пусть у нас есть глобальный узел I. И к нему прилегают 6 элементов. Когда мы говорим, что число ненулевых элементов не зависит от мелкости сетки, это означает, что когда мы сетку будем дробить, то к этому I-му узлу также будут примыкать 6 элементов. Они будут меньше по размеру, но их число будет то же самое.



### I-я строка в глобальной матрице жесткости:



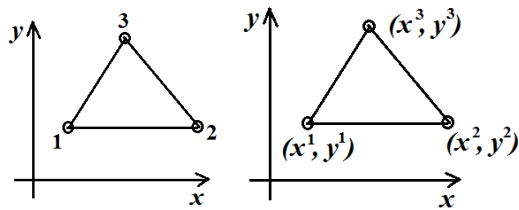
Элемент на диагонали в I-й строке – сумма подматриц от всех элементов, которые примыкают к этому узлу. Этот элемент будет самым большим по величине, поэтому говорят, что такие матрицы обладают **диагональным преобладанием**. Это сказывается благотворно на решении линейной системы.

Элемент на пересечении I-й строки и n-го столбца – это сумма двух локальных подматриц, так как I-й и n-й узлы одновременно принадлежат двум элементам: 1-му и 2-му, поэтому глобальный вклад будет только от этих двух элементов.

В данном примере на I-й строке 7 ненулевых подматриц ( $K_{II}$ ,  $K_{It}$ ,  $K_{Is}$ ,  $K_{Iq}$ ,  $K_{Ip}$ ,  $K_{In}$ ,  $K_{Im}$ ). Число ненулевых элементов больше, чем число подматриц. Каждая подматрица – это  $2 \times 2$  в двумерном случае или  $3 \times 3$  в трехмерном случае (в зависимости от размерности исходной задачи). В двумерной задаче, если скалярные элементы считать, то  $7 \cdot 2 = 14$  элементов.

## 8) Плоский треугольный конечный элемент. Функции формы треугольного элемента.

(Л14)



Плоский треугольник с локальными узлами 1, 2, 3. Это самый простой элемент. Он появился у инженеров самым первым в 1941 году, когда появился МКЭ.

Плоские узлы надо нумеровать либо все по часовой стрелке, либо против часовой стрелки.

### Функции формы треугольного элемента.

Вычислим **локальное уравнение** для плоского треугольного элемента: и матрицу жесткости, и правую часть.

$$K_{pq}^{ki} = \int_{V_e} C^{ijkl} N_{p,l} N_{q,j} dV$$

$N_p$  – функции формы

Будем считать, что материал изотропный и однородный:

$$C^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})$$

Чтобы вычислить матрицу жесткости, нужно найти функции формы  $N_p$  для треугольного элемента, которые будут удовлетворять следующим условиям:

1) в области элемента  $N_p$  линейны,

$$2) N_p(\vec{x}^q) = \delta_p^q$$

Как ищется такая функция формы? Аппроксимируем перемещения внутри элемента как линейную функцию  $x, y$ :

$$u_k(x, y) = \alpha_k^1 + \alpha_k^2 x + \alpha_k^3 y \quad (*)$$

$$u_k(x^p, y^p) = \alpha_k^1 + \alpha_k^2 x^p + \alpha_k^3 y^p, \quad p = 1, 2, 3 \text{ – номер узла}$$

$$\begin{cases} u_k(x^1, y^1) = \alpha_k^1 + \alpha_k^2 x^1 + \alpha_k^3 y^1 = \hat{u}_k^1 \\ u_k(x^2, y^2) = \alpha_k^1 + \alpha_k^2 x^2 + \alpha_k^3 y^2 = \hat{u}_k^2 \\ u_k(x^3, y^3) = \alpha_k^1 + \alpha_k^2 x^3 + \alpha_k^3 y^3 = \hat{u}_k^3 \end{cases}$$

Получилась линейная система уравнений.

$\hat{u}_k^i$  – заданное узловое перемещение в  $i$ -м узле по направлению  $k$

Находим отсюда  $\alpha_k^i$ , выразив их через правую часть  $\hat{u}_k^i$ . Отсюда можно найти  $N_p$ .  $(x^p, y^p)$ ,  $p = 1, 2, 3$  – это координаты узлов, это числа, известные из таблицы 1.

Решаем эту систему по **правилу Крамера**:

$$\alpha_k^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \quad i = 1, 2, 3$$

$\Delta$  – определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x^1 & y^1 \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^3 & y^3 \end{vmatrix} = 2S$$

$2S$  – удвоенная площадь треугольника

Геометрический смысл определителя  $\Delta$  состоит в том, что  $\Delta = 2S$ .

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \hat{u}_k^1 & x^1 & y^1 \\ \hat{u}_k^2 & x^2 & y^2 \\ \hat{u}_k^3 & x^3 & y^3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijm} \hat{u}_k^i x^j y^m = (\epsilon_{ijm} x^j y^m) \hat{u}_k^i = a_i \hat{u}_k^i$$

$$a_i = \epsilon_{ijm} x^j y^m$$

$\epsilon_{ijk}$  – символы Леви-Чивита

От индекса  $k$  ничего не зависит. Эта система одинаково решается для всех  $k$ .  
 $k$  – это номер перемещения по осям 1, 2, 3. А функции формы  $N$  – одинаковые.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \hat{u}_k^1 & y^1 \\ 1 & \hat{u}_k^2 & y^2 \\ 1 & \hat{u}_k^3 & y^3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} \hat{u}_k^j y^m = \left( \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} y^m \right) \hat{u}_k^j = b_j \hat{u}_k^j$$

$$b_j = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} y^m$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x^1 & \hat{u}_k^1 \\ 1 & x^2 & \hat{u}_k^2 \\ 1 & x^3 & \hat{u}_k^3 \end{vmatrix} = \left( \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} x^j \right) \hat{u}_k^m = c_m \hat{u}_k^m$$

$$c_m = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} x^j$$

$$\alpha_k^i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$u_k(x, y) = \alpha_k^1 + \alpha_k^2 x + \alpha_k^3 y = \frac{1}{\Delta} (\Delta_1 + \Delta_2 x + \Delta_3 y) = \frac{1}{\Delta} [a_i \hat{u}_k^i + (b_j \hat{u}_k^j) x + (c_m \hat{u}_k^m) y]$$

$$(1) u_k(x, y) = \frac{1}{\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \hat{u}_k^i \quad (2) u_k(x, y) = N_p(x, y) \hat{u}_k^p$$

$$\Rightarrow N_p(x, y) = \frac{1}{\Delta} (a_p + b_p x + c_p y)$$

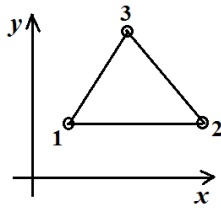
Из формулы (2) видно, что

$$(3) N_p(x^q, y^q) = \delta_p^q$$

Формула (3) – это определение функции  $N_p$ . Мы получили функции формы для треугольного элемента. Коэффициенты  $\Delta, a_p, b_p, c_p$  вычисляются по координатам узлов, которые даны в таблице.

### 9) Вектор узловых перемещений. Матрица жесткости треугольного элемента.

Интеграл от вектора сил. (Л15)



Мы уже получили функции формы  $N$  для треугольного элемента:

$$N_p(x, y) = \frac{1}{\Delta} (a_p + b_p x + c_p y), \quad p = 1, 2, 3, \quad p - \text{номер узла}$$

Это самый простейший треугольный элемент с 3-мя узлами.

$\Delta = 2S$  – удвоенная площадь треугольника

$a_p, b_p, c_p$  – коэффициенты, которые получаются в явном виде через координаты узлов треугольника

$$a_i = \epsilon_{ijm} x^j y^m, \quad b_j = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} y^m, \quad c_m = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijm} x^j, \quad \Delta = 2S$$

Получим матрицу жесткости для такого треугольного элемента в явном виде. Для этого подробно продумаем все выкладки. (Для других элементов матрицу жесткости в явном виде получить сложнее.)

Главная формула, в которой используется функция формы  $N$ :

$$\{u\}(x, y) = [N]\{\hat{u}\}$$

$\{u\}(x, y)$  – вектор перемещений как функция  $x, y$  внутри элемента

$[N]$  – матрица  $N$ , функция формы

$\{\hat{u}\}$  – **вектор узловых перемещений** (блочный вектор)

Для треугольного элемента так конкретизируется:

$$\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{u}^2 \\ \hat{u}^3 \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{u}^p\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^p \\ \hat{u}_2^p \end{Bmatrix}$$

$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$  – вектор перемещений, состоящий из значений  $u_1, u_2$ , в любой точке внутри области треугольного элемента

$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3] = [[N_1] \ [N_2] \ [N_3]]$  – блочная матрица, состоящая из подматриц  $N_1, N_2, N_3$ , матрица-строка

$[N_p] = \begin{bmatrix} N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{bmatrix}$  – диагональная матрица, состоящая из скалярных функций  $N_p$  на диагоналях, имеет размер  $2 \times 2$

Нули в матрице (диагональность матрицы) означают, что поле перемещений  $u_1$  (по 1-му направлению) аппроксимируется по узловым значениям  $\hat{u}_1^p$ . А перемещение  $u_2$  интерполируется по значениям в узлах перемещения  $\hat{u}_2^p$ .

Введем вектор деформаций:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

У нас плоская задача.

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Так пишут инженеры. Почему так писать удобнее?

Введем вектор перемещений:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Запишем **энергию деформации**  $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$  (свертку) в двухмерном случае:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\gamma_{12} = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}$$

$\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}$  – произведение арифметических векторов – удобная запись.

Запись становится, как в алгебре: арифметические вектора перемножаются, и не надо знать понятие тензора. Энергия деформации – это очень важная вещь, которая используется при формулировке вариационного уравнения.

Вектор деформаций:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Отсюда следует, что матрица D – это матрица-оператор:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Применим все эти обозначения, ориентированные на инженерное использование:

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{\hat{u}\}$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3] = \begin{bmatrix} [N_1] & [N_2] & [N_3] \end{bmatrix} \text{ – блочная матрица}$$

Умножение  $[D][N]$  приводит к умножению D на каждую из этих подматриц  $N_p$ :

$$[D][N] = [DN_1 \ DN_2 \ DN_3] = [B_1 \ B_2 \ B_3]$$

Тогда:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\hat{u}\}$$

$\{\hat{u}\}$  – вектор узловых перемещений

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ B_3]$$

$B_1, B_2, B_3$  – подматрицы

$$[B_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_p}{\partial y} & \frac{\partial N_p}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p & 0 \\ 0 & c_p \\ c_p & b_p \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}$$

Мы явно получили матрицу  $[B_p]$ .

$$N_p = \frac{1}{\Delta}(a_p + b_p x + c_p y)$$

Энергия деформации:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}$$

Нужно еще найти вектор  $\{\sigma\}$ .

Будем использовать закон Гука:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Это изотропная однородная теория упругости.

$[E]$  – матрица жесткости

$$\sigma_{12} = \mu\gamma_{12}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\hat{u}\}$$

$$\{\sigma\} = [E][B]\{\hat{u}\}$$

$$[E][B] = [E][B_1 \ B_2 \ B_3] = [EB_1 \ EB_2 \ EB_3]$$

$$[E][B_p] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_p & 0 \\ 0 & c_p \\ c_p & b_p \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)b_p & \lambda c_p \\ \lambda b_p & (\lambda + 2\mu)c_p \\ \mu c_p & \mu b_p \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}$$

$$\{\sigma\} = [EB_1 \ EB_2 \ EB_3]\{\hat{u}\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B_1 \ B_2 \ B_3]\{\hat{u}\}$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\hat{u}\}^T \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_2^T \\ B_3^T \end{bmatrix}$$

$$B_p^T = \begin{bmatrix} b_p & 0 & c_p \\ 0 & c_p & b_p \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}$$

Энергия деформации:

$$\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} = \{\hat{u}\}^T \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_2^T \\ B_3^T \end{bmatrix} [EB_1 \ EB_2 \ EB_3]\{\hat{u}\} = \{\hat{u}\}^T \begin{bmatrix} B_1^T EB_1 & B_1^T EB_2 & B_1^T EB_3 \\ B_2^T EB_1 & B_2^T EB_2 & B_2^T EB_3 \\ B_3^T EB_1 & B_3^T EB_2 & B_3^T EB_3 \end{bmatrix} \{\hat{u}\}$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} B_1^T EB_1 & B_1^T EB_2 & B_1^T EB_3 \\ B_2^T EB_1 & B_2^T EB_2 & B_2^T EB_3 \\ B_3^T EB_1 & B_3^T EB_2 & B_3^T EB_3 \end{bmatrix}$$

Это блочная матрица, каждый блок – матрица 2x2.

Это **симметричная** матрица, т.к. например:

$$[B_1^T EB_3] = [B_3^T EB_1]$$

Поэтому если ко всей этой матрице взять транспонированную, то получим ту же самую матрицу.

В итоге матрица жесткости элемента – это есть интеграл по области элемента от матрицы  $\tilde{K}$ .

### Матрица жесткости треугольного элемента:

$$K = \int_{V_e} \tilde{K} dV = \left(\frac{\Delta}{2}\right) \tilde{K}$$

Так как  $\Delta = 2S$  – удвоенная площадь треугольника.

Условно запишем матрицу жесткости так:

$$K_{pq} = \frac{\Delta}{2} [B_p^T E B_q], \quad p, q = 1, 2, 3$$

$[B_p^T E B_q]$  – блок  $2 \times 2$

$K_{pq}$  – одна из 9-ти подматриц жесткости

$$[B_p^T E B_q] = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} b_p & 0 & c_p \\ 0 & c_p & b_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)b_q & \lambda c_q \\ \lambda b_q & (\lambda + 2\mu)c_q \\ \mu c_q & \mu b_q \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)b_p b_q + \mu c_p c_q & \lambda b_p c_q + \mu c_p b_q \\ \lambda c_p b_q + \mu b_p c_q & (\lambda + 2\mu)c_p c_q + \mu b_p b_q \end{bmatrix}$$

$$K_{pq} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)b_p b_q + \mu c_p c_q & \lambda b_p c_q + \mu c_p b_q \\ \lambda c_p b_q + \mu b_p c_q & (\lambda + 2\mu)c_p c_q + \mu b_p b_q \end{bmatrix}$$

Мы получили матрицу жесткости треугольного элемента в явном виде.

Что тут можно понять? В этом элементе не надо ничего интегрировать. Поскольку функции формы – линейные функции, то деформации, вычисленные от них, – константы внутри элемента. И напряжения – тоже константы. Если у нас однородная изотропная теория упругости, то модули не зависят от направления. Поэтому подынтегральное выражение интегрировать не надо:  $\tilde{K}$  выносится за знак интеграла, а оставшийся интеграл равен площади треугольника.

**Вариационное уравнение** для данного элемента записывается так:

$$\int_{V_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{V_e} f_i v_i dV + \int_{\Sigma} S_i v_i d\Sigma$$

$\int_{\Sigma} S_i v_i d\Sigma$  – поверхностный интеграл (если он есть)

Билинейные формы:

$\{\hat{u}\}^T [K] \{\hat{u}\}$  – матрица жесткости  $[K]$  умножается на  $\{\hat{u}\}^T$  и  $\{\hat{u}\}$ , если нужно представлять

**функционал Лагранжа**

$\{\hat{v}\}^T [K] \{\hat{v}\}$  – матрица жесткости  $[K]$  умножается на  $\{\hat{v}\}^T$  и  $\{\hat{v}\}$ , если нужно представлять **вариационное уравнение**

Здесь мы будем рассматривать вариационное уравнение. Эти записи аналогичны. Для нас главное вычислить  $[K]$ . ( $[K]$  – одна и та же, что в функционале Лагранжа, что в вариационном уравнении.)

Теперь надо все эти векторно-матричные записи подставить в вариационное уравнение (или функционал Лагранжа) и получить локальную матрицу жесткости, но не с индексами, как мы делали раньше, а с помощью векторов, как написано во всей литературе.

$$\int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_e} \{v\}^T \{f\} dV + \int_{\Sigma_{2(e)}^*} \{v\}^T \{S\} d\Sigma$$

$\{f\}$  – вектор объемных сил

$\{S\}$  – вектор поверхностных сил

Дальше вычислим правую часть.

### Интеграл от вектора объемных сил.

Как вычислить интеграл от вектора сил? Нужно ввести вектор  $\{v\}$  и вектор  $\{f\}$ :

$$\{v\} = [N] \{\hat{v}\}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Вектор  $\{f\}$  состоит из двух значений  $f_1$  и  $f_2$  объемных сил (это заданные объемные силы).

$[N]$  – не симметричная матрица (каждая ее подматрица – симметричная, 2x2)

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3] = [[N_1] \ [N_2] \ [N_3]]$$

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_1] \\ [N_2] \\ [N_3] \end{bmatrix} \text{ – матрица – столбец}$$

$$[N_p] = \begin{bmatrix} N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{bmatrix} = [N_p]^T$$

Первый член правой части, связанный с объемными силами:

$$\int_{V_e} f_i v_i dV = \int_{V_e} (\{\hat{v}\}^T [N]^T \{f\}) dV = \{\hat{v}\}^T \int_{V_e} [N]^T \{f\} dV = \{\hat{v}\}^T \begin{bmatrix} \int_{V_e} [N_1]^T \{f\} dV \\ \int_{V_e} [N_2]^T \{f\} dV \\ \int_{V_e} [N_3]^T \{f\} dV \end{bmatrix}$$

Последний член – это вектор-столбец, состоящий из 3-х блоков, а каждый блок – это интеграл от матрицы 2x2, умножающейся на вектор из 2-х элементов.

$\{\hat{v}\}$  – вектор узловых перемещений для пробной функции  $v$ , а не для решения  $u$ . Это значение перемещения в узлах, поэтому выносится из-под знака интеграла.

Раньше, когда использовали такие треугольные элементы, то считалось, что достаточно для  $\{f\}$  аппроксимации в виде постоянного значения внутри элемента:

$$\{f\} \rightarrow \text{const}$$



Поэтому для точности считается достаточным, что  $\{f\}$  можно положить равным константе внутри элемента. Следовательно, можно  $\{f\}$  вынести из-под знака интеграла.

$$\{f\} \rightarrow \text{const} \Rightarrow \left( \int_{V_e} [N_p]^T dV \right) \{f\} = \left( \int_{V_e} [N_p] dV \right) \{f\}$$

$$\int_{V_e} f_i v_i dV = \{\hat{v}\}^T \begin{bmatrix} \left( \int_{V_e} [N_1] dV \right) \{f\} \\ \left( \int_{V_e} [N_2] dV \right) \{f\} \\ \left( \int_{V_e} [N_3] dV \right) \{f\} \end{bmatrix}$$

В этом случае все можно вычислить аналитически, численно ничего не нужно интегрировать. Интеграл от  $[N_p]$  можно вычислить аналитически без проблем, потому что:

$$[N_p] = \begin{bmatrix} N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{bmatrix} = [N_p]^T$$

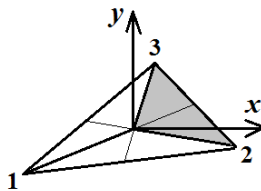
$$N_p = \frac{1}{\Delta} (a_p + b_p x + c_p y) - \text{известна}$$

И от таких функций нужно вычислять интеграл по площади элемента. Можно в лоб вычислять, но мы так не будем.

Вот у нас записано вариационное уравнение для элемента. Если мы систему координат сдвинем (просто трансляция), то вариационное уравнение не изменится. В него входит пробная функция вектора перемещений. Если систему координат сдвинуть как твердое тело (без вращения), то координаты меняются, а перемещения, деформации и напряжения не меняются.

Поэтому можно обосновать, что этот интеграл вычисляется не для общей ситуации, а для ситуации, когда **начало декартовой системы координат взято в центре тяжести элемента**.

Рассмотрим треугольный элемент:



Посчитаем интеграл в случае, когда начало координат лежит в центре тяжести элемента. Центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан. Так как нужно взять интеграл от диагональной матрицы  $[N_p]$ , то нас интересует интеграл от функции:

$N_p = \frac{1}{\Delta} (a_p + b_p x + c_p y)$  по области элемента. Если начало декартовой системы координат взять в центре тяжести элемента, тогда интеграл от членов  $b_p x$  и  $c_p y$  брать не нужно, потому что они равны нулю.

$$\int_{V_e} N_p(x, y) dV = \frac{1}{\Delta} \int_{V_e} a_p dV = \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta}{2} a_p = \frac{a_p}{2}$$

$$a_p = \text{const}$$

Другими словами, нам надо вычислить константу  $a_p$ . Мы уже получали формулу, позволяющую вычислить константу  $a_p$  через координаты узлов (1,2,3-го узла):

$$a_p = \epsilon_{prs} x^r y^s$$

$x^r$  – координата узла  $r$  (по  $x$ ),  $y^s$  – координата узла  $s$  (по  $y$ ).

Запишем явно эту формулу:

$$a_1 = x^2 y^3 - x^3 y^2 = \frac{\Delta}{3} \quad (*)$$

Это удвоенная площадь серого (заштрихованного) треугольника.

$$\epsilon_{123} = +1$$

$$\Rightarrow a_p = \frac{\Delta}{3}$$

Все три треугольника имеют одинаковые площади, так как это центр тяжести.

$$\Rightarrow \int_{V_e} N_p(x, y) dV = \frac{\Delta}{6}$$

Итак, правая часть, полученная только от вектора объемных сил:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{Bmatrix}, \quad \{F^p\} = \frac{\Delta}{6} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \quad p = 1, 2, 3$$

Считаем  $f_i = \text{const}$  в  $V_e$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому никакого у  $f_1, f_2$  никакого индекса, связанного с номером узла, нет и быть не может. Это заданные объемные силы.

$$\frac{\Delta}{6} = \frac{S}{3}$$

Мы получили замечательный результат. Коэффициент  $\frac{1}{3}$  (в формуле  $\frac{\Delta}{6} = \frac{S}{3}$ ) означает, что воздействие объемных сил (в двумерном случае это силы, распределенные по площади) распределяется равномерно между всеми узлами.

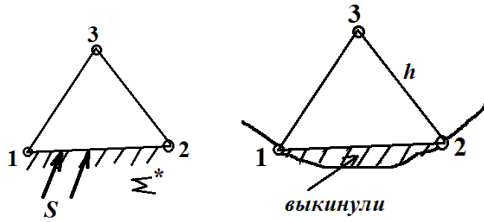
Умножение на площадь означает, что этот силы. Сама величина  $F$  в двумерной задаче – это есть объемная сила, т.е. сила, отнесенная к единице площади. И если здесь умножается на  $S$ , то получается вся сила, действующая на треугольник.

**Вклад в правую часть от объемных сил** имеет такую **механическую интерпретацию** – это вся сила, действующая на этот треугольник, и на каждый узел приходится  $\frac{1}{3}$  этого воздействия, т.е. поровну (при условии, что мы посчитали допустимой такую аппроксимацию, что эта сила равномерно распределена внутри элемента).

$F$  – объемная сила в двумерной задаче (сила, отнесенная к площади)

### Упр. Интеграл от вектора поверхностных сил.

Упр. Пусть есть треугольный элемент и пусть одна его сторона выходит на внешнюю границу.



$\Sigma^*$  – это внешняя граница, на нее действуют какие-то внешние силы  $S$  (поверхностные). Т.е. у нас есть такой вклад в уравнение:

$$\int_{\Sigma^*} S_i v_i d\Sigma$$

Вычислим, как на узлы распределяется это воздействие  $S$  поверхностных сил.

Приложенный вектор сил равен:

$S^*$  – длину стороны ( $S$  – это в двухмерном случае сила, приходящаяся на единицу длины)

Мы реальную границу заменили прямой границей – стороной треугольника. Это тоже некоторая ошибка аппроксимации. Мы не просто геометрически площадь выбрасываем. Мы выбрасываем некую площадь вместе с запасенной в ней упругой энергией. В этой площади есть напряжения и деформации, т.е. упругая энергия.

Доказано, что в случае таких элементов и еще многих других элементов действительно можно так делать, потому что: при  $h \rightarrow 0$  погрешность  $\rightarrow 0$ . Первым это доказал чешский ученый – Бабушка. Следовательно, для таких элементов вполне допустимо спрямлять границу.

Второй член правой части, связанный с поверхностными силами:

$$\int_{\Sigma_{2(e)}^*} S_i v_i d\Sigma = \int_{\Sigma_{2(e)}^*} (\{\hat{v}\}^T [N]^T \{S\}) d\Sigma = \{\hat{v}\}^T \int_{\Sigma_{2(e)}^*} [N]^T \{S\} d\Sigma = \{\hat{v}\}^T \begin{bmatrix} \int_{\Sigma_{2(e)}^*} [N_1]^T \{S\} d\Sigma \\ \int_{\Sigma_{2(e)}^*} [N_2]^T \{S\} d\Sigma \end{bmatrix}$$

Будем считать, что сила  $S$  равномерно распределена вдоль стороны  $\Sigma_{2(e)}^*$ .  $\{S\}$  можно положить равным константе внутри элемента.

Считаем  $s_i = \text{const}$  в на  $\Sigma_{2(e)}^*$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому никакого у  $s_1, s_2$  никакого индекса, связанного с номером узла, нет и быть не может. Это заданные объемные силы.

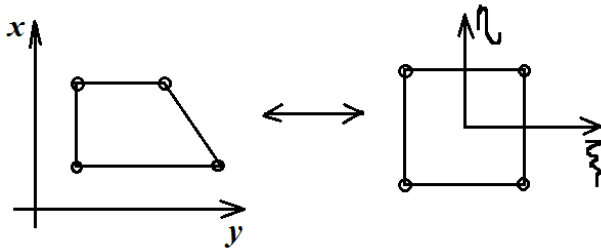
Получилось, что на каждый узел 1, 2 приходится  $\frac{1}{2}$  суммарной силы ( $S^*$  – длину стороны) при условии, если считать, что сила  $S$  равномерно распределена вдоль этой стороны. Считается, что такая допустимая погрешность находится в рамках погрешности аппроксимации, которая для данного элемента есть, поэтому точнее просто не может быть. Т.е. на узлы 1, 2 воздействие поверхностной силы распределяется поровну.

**10) Четырехугольный конечный элемент. Переход к криволинейным координатам, запись вариационного уравнения. Производные функций формы в начальных координатах. (Л16)**

В 4-х-угольном элементе линейную интерполяцию делать нельзя, потому что по 4-м узловым значениям нельзя линейным образом аппроксимировать перемещения внутри элемента. Был найден простой способ: не строить эти функции формы каждый раз заново для всяких разных фигур, а использовать **отображения**.

**Общая идея отображения.**

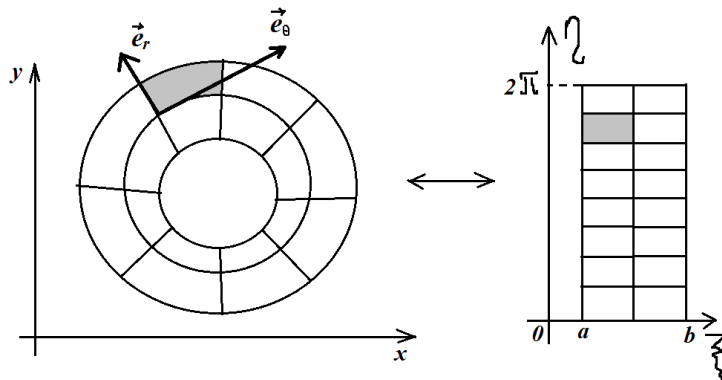
Если у нас есть такой 4-х-угольный элемент, то мы можем построить взаимно-однозначное отображение этого элемента на квадрат:



Если мы знаем функции формы для квадрата, то можно их получить для 4-х-угольного элемента произвольной формы, используя отображение.

**Переход к криволинейным координатам.**

Идея использовать отображения сходна использованию криволинейной системы координат. Если у нас есть кольцо, то удобно использовать элементы такого типа:



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Это частный случай отображения:

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta)$$

Это отображение отображает кольцо на такую прямоугольную область:

$$\xi = r \quad a \leq r \leq b$$

$$\eta = \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$a, b$  – радиусы внутренний и внешний

Это почти взаимно-однозначное отображение, если 0 и  $2\pi$  разделить. Сетка, которая построена в кольце, отображается на мнимую сетку в прямоугольной области. Здесь отображается вся область.

Общая идея – решать задачи, используя отображения. Вместо того чтобы решать задачу в какой-то криволинейной области, можно, используя отображение, решать задачу в прямоугольной области. Если такие функции  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  известны, то можно использовать отображение.

Отображение, которое у нас записано, – это введение криволинейной системы координат  $\xi, \eta$ . Но мы знаем, что если уравнение записано в криволинейных координатах, то там появляются ковариантные производные, которые записываются с помощью символов Кристофеля. Если компоненты вектора перемещений брать в локальном криволинейном базисе (здесь это векторы  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ), тогда возникают ковариантные производные и символы Кристофеля. Уравнения становятся громоздкими. В МСС так все и получается.

**Идея перехода в криволинейную систему координат в МСС состоит в следующем:**

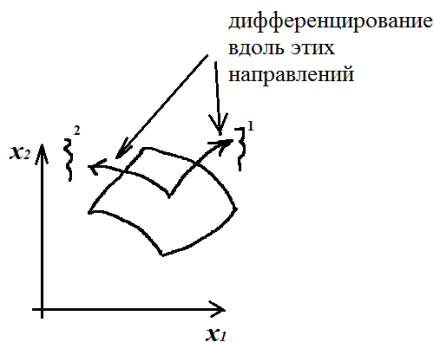
- 1) Берутся компоненты всех функций (перемещений, деформаций и т.д.) в криволинейном базисе.
- 2) Они дифференцируются по направлениям тоже криволинейного базиса (в данном случае по направлениям  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ).

В результате получается полный переход в криволинейную систему координат. Записываются уравнения в криволинейной системе координат (в сферической, цилиндрической и др.). Для численного решения это совсем неудобно.

**А в МКЭ, как и в более общем вариационном подходе, используется неполный переход в криволинейную систему координат:**

- 2) Дифференцирование осуществляется по криволинейным направлениям (по  $\xi$  и  $\eta$ ). В каждой точке есть какие-то криволинейные направления, и дифференцирование осуществляется вдоль этих криволинейных направлений.

- 1) Сами компоненты этих функций берутся в декартовом базисе.



Это есть неполное погружение в криволинейную систему координат. Такая система используется в МКЭ и в теории разностных схем. **И при этом не возникает символов Кристофеля и ковариантных производных**, потому что компоненты, которые дифференцируются, – декартовы. Сами вектора базиса не дифференцируются.

#### **Запись вариационного уравнения.**

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = A^e(\vec{v})$$

$A^e(\vec{v})$  – работа внешних сил

Перепишем его в более подробном виде в декартовой системе координат:

$$\int_V C_{ijkl}(\vec{x}) u_{k,l} v_{i,j} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma \quad (*)$$

Перепишем это уравнение, используя переход в неполную криволинейную систему координат. **Компоненты векторов  $\vec{u}, \vec{v}$  берутся в декартовом базисе:**

$$\vec{u} = u_i \cdot \vec{k}_i, \quad \vec{v} = v_i \cdot \vec{k}_i, \quad \vec{f} = f_i \cdot \vec{k}_i, \quad \vec{S} = S_i \cdot \vec{k}_i$$

$\vec{k}_i$  – векторы декартового базиса,  $\vec{f}$  – вектор объемных сил,  $\vec{S}$  – вектор поверхн. сил

$\vec{u}$  – вектор перемещений искомой функции,  $\vec{v}$  – вектор перемещений пробной функции

Но дифференцировать мы хотим по направлениям  $\xi_i$  – по криволинейным координатам.

В уравнении (\*) написаны производные по декартовым координатам. Выразим их через криволинейные координаты:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi^m} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x_l}$$

Обозначим:

$$\frac{\partial x_m}{\partial \xi^l} = A_l^m(\xi^1, \xi^2), \quad \frac{\partial \xi^m}{\partial x_l} = B_l^m(\xi^1, \xi^2)$$

Если система криволинейных координат  $\xi^1, \xi^2$  задана, то должны быть такие функции  $A_l^m(\xi^1, \xi^2)$  заданы как функции криволинейных координат.

Эти производные  $\frac{\partial x_m}{\partial \xi^l}$  и  $\frac{\partial \xi^m}{\partial x_l}$  – взаимно-обратные:

$$A_l^m \cdot B_n^l = \delta_n^m, \quad A_l^m, B_n^l – \text{взаимно-обратные матрицы}$$

Обозначим:

$$\det(A_n^m) = J \quad \text{якобиан преобразования}$$

Можно переписать:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = B_l^m \frac{\partial u_k}{\partial \xi^m}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = B_j^n \frac{\partial v_i}{\partial \xi^n}$$

$B_l^m$  – известные величины

Тогда интеграл по области в декартовых координатах можно записать через интеграл в переменных  $\xi^1, \xi^2$  (если двумерный случай) в вариационном равенстве.

$$dV = J dV_\xi; \quad d\Sigma = J_\Sigma d\Sigma_{2\xi}$$

$V_\xi$  – объем области в переменных  $\xi^1, \xi^2$

В криволинейной системе координат:

$$\int_{V_\xi} J C^{ijkl}(\vec{x}(\vec{\xi})) B_l^m \frac{\partial u_k}{\partial \xi^m} B_j^n \frac{\partial v_i}{\partial \xi^n} dV_\xi = \int_{V_\xi} J f_i v_i dV_\xi + \int_{\Sigma_{2\xi}} J_\Sigma S_i v_i d\Sigma_\xi$$

Переход в криволинейную систему координат был не полный, а частичный.

Обычный якобиан  $J$  – это детерминант матрицы  $A_n^m$ :

$$J = \det(A_n^m)$$

Якобиан  $J_\Sigma$  в каждой точке – это число, которое показывает, как преобразуются площади.  $J_\Sigma$  вычислять сложнее, он зависит от направления нормали. Эти формулы можно найти, например, в книжке Победри.

Обозначим:

$$JC^{ijkl}B_l^mB_j^n = C_\xi^{inkm}, \quad Jf_i = f_\xi^i, \quad JS_i = S_\xi^i$$

В результате у нас получится такое вариационное уравнение в области переменных  $\xi^1, \xi^2$ :

$$\int_{V_\xi} C_\xi^{inkm} \frac{\partial u_k}{\partial \xi^m} \frac{\partial v_i}{\partial \xi^n} dV_\xi = \int_{V_\xi} f_\xi^i v_i dV_\xi + \int_{\Sigma_{2\xi}} S_\xi^i v_i d\Sigma_\xi \quad (**)$$

Таким образом, используя отображение, мы от вариационного уравнения, записанного в декартовой плоскости, перешли к вариационному уравнению, записанному в переменных  $\xi^1, \xi^2$ .

В декартовом базисе все равно, где индексы писать, сверху или снизу. Компоненты всех функций  $f_i, S_i$  берутся в декартовом базисе. Индексы пишем сверху для удобства, чтобы они не сливались с  $\xi$ .

Компоненты  $C_\xi^{inkm}$  – частично в одном базисе, частично в другом. Они перестановочны по паре индексов:

$$C_\xi^{inkm} = C_\xi^{kmin}$$

Но они не симметричны, в отличие от обычных  $C^{ijkl}$ , если менять порядок индексов:

$$C_\xi^{inkm} \neq C_\xi^{nikm}, \quad \text{но} \quad C^{ijkl} = C^{jikl}$$

Это легко увидеть из формулы (\*\*).

Это преобразование показывает, как использовать криволинейную систему координат для решения вариационных уравнений. Если по каким-то причинам не нравится область, в которой нужно решать вариационное уравнение, эту область можно отобразить на более простую, ввести криволинейные координаты и решать эту задачу (такое преобразованное вариационное уравнение) в более простой области.

Исходное вариационное уравнение преобразуется, используя взаимно-однозначное отображение области в исходных переменных  $(x_1, x_2)$  на область в переменных  $(\xi^1, \xi^2)$ :

$x_i = x_i(\xi^1, \xi^2)$  – двумерная иллюстрация

$x_i = x_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  – в 3-х-мерном случае, общий вид

### Разные варианты реализации этой идеи.

1) Первая реализация этой идеи отображения – это использование **криволинейной системы координат, заданной аналитически – формулами** (как цилиндрическая  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , сферическая или эллиптическая система координат).

2) Второй вариант реализации идеи отображения (более общий, чем первый) – это **когда нет формул для отображения**. Есть какая-то криволинейная область, и мы хотим ее отобразить на прямоугольную область. Тогда это отображение строится численно. Нам не нужно знать эти функции  $x(\vec{\xi})$ , их численно восстанавливать никак не нужно. Нам нужно знать функции  $A_l^m$ , по функциям  $A_l^m$  мы найдем  $B_n^l$  (это компоненты обратной к  $A_l^m$  матрицы) и якобиан  $J = \det(A_n^m)$ .

Как численно задать отображение? Надо задать взаимно-однозначное отображение узлов сетки.

$(x_{ij}, y_{ij}) \leftrightarrow (\xi_{ij}, \eta_{ij})$  – взаимно-однозначное отображение между всеми узлами сетки

Нужно найти:

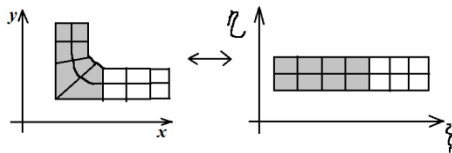
$$A_l^m = \frac{\partial x_m}{\partial \xi^l}$$

$x(\xi)$  – это неизвестная функция, мы не можем просто дифференцировать. Но мы знаем связь между  $x$  и  $\xi$ . Для каждого узла  $i, j$  мы знаем пару чисел  $(x_{ij}, y_{ij})$ .

Эти частные производные можно вычислить, используя **разностные производные**. У нас же есть сеточные функции  $x(i, j), y(i, j)$ . И при этом не нужно знать функции, задающие отображение одной области на другую, а надо знать только соответствие узлов. Такая идея может быть реализована в рамках теории разностных схем.

3) Эту идею можно углубить. **Можно отображать не всю область целиком, а подобласти** (часть области).

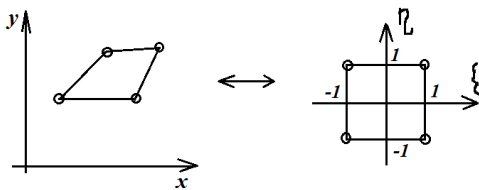
Область, изображенную на рисунке, можно отобразить на область, состоящую из двух прямоугольников. Потому что эти производные  $A_l^m$  на границах этих подобластей могут быть разрывны. И тогда их нельзя аппроксимировать разрывными производными. Тогда те линии поверхности, на которых эти производные могут оказаться разрывными, можно сделать границами подобластей, которые должны отображаться гладким образом.



Нужно, чтобы все подобласти гладким образом отображались на подобласти в переменных  $\xi, \eta$ .

### Реализация идеи отображения в МКЭ.

В МКЭ эта идея доведена до крайности: отображается не вся область и не какие-то подобласти, а **каждый элемент отдельно**. В МКЭ каждый криволинейный четырехугольный элемент сетки в координатах  $x, y$  взаимно-однозначно отображается на квадратный элемент со стороной 2 в координатах  $\xi, \eta$ .



Такое отображение связано с тем, что формулы интегрирования Гаусса получены для отрезка  $[-1; 1]$ .

Так в МКЭ реализуется идея отображения. Все остальное – то же самое, что мы уже обсуждали.

- 1) Вся область должна быть разбита на подобласти для каждого элемента.
- 2) В каждом элементе надо записать такое отображение.



### Производные функций формы в начальных координатах.

В МКЭ нужно вычислять не разностные производные, а производные от функций формы – от  $N$ -функций.

$$u_k = \sum_{p=1}^n N_p \hat{u}_k^p$$

Мы считаем, что функции формы в этом стандартном модельном элементе один раз и навсегда получены. Рассмотрим двумерный случай.

Пусть у нас функция  $N_p(\xi, \eta)$  известна как функция координат  $\xi$  и  $\eta$ . Нам нужно вычислить производные в первоначальных координатах  $(x, y)$  от функции формы  $N_p(\xi, \eta)$ , так как в вариационные уравнения входят производные от этих функций.

В частном двумерном случае:

$$\frac{\partial N_p}{\partial \xi} = \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N_p}{\partial \eta} = \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

И понятно, что зная  $\frac{\partial N_p}{\partial \xi}, \frac{\partial N_p}{\partial \eta}, \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ , можно найти производные  $\frac{\partial N_p}{\partial x}$  и  $\frac{\partial N_p}{\partial y}$ , решив эту систему линейных уравнений.

Запишем эту систему в общем виде:

$$\frac{\partial N_p}{\partial \xi^i} = \frac{\partial N_p}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial \xi^i}; \quad \text{где} \quad \frac{\partial x_m}{\partial \xi^i} = A_i^m$$

Получается такая линейная система уравнений. Теперь умножим левую и правую части этой системы на матрицу  $B_n^i$  слева. Получим:

$$B_n^i \frac{\partial N_p}{\partial \xi^i} = B_n^i A_i^m \frac{\partial N_p}{\partial x_m}, \quad B_n^i \frac{\partial N_p}{\partial \xi^i} = \delta_n^m \frac{\partial N_p}{\partial x_m}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N_p}{\partial x_n} = B_n^i \frac{\partial N_p}{\partial \xi^i} \quad (***)$$

Мы решили эту систему в общем виде. Если у нас задана функция  $N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  (или  $N_p(\xi, \eta)$  в частном двухмерном случае), то тогда с помощью этих  $A_i^m$  и  $B_n^i$  мы можем вычислить производную  $\frac{\partial N_p}{\partial x_n}$  по этим формулам (\*\*\*). А для вычисления конечного элемента, которое мы делали в прошлый раз, как раз нужны эти производные  $\frac{\partial N_p}{\partial x_n}$ , а не сами функции  $N$ .

Итак, действительно необязательно строить функции  $N_p$  для каждого четырехугольного элемента, достаточно построить функции  $N_p$  для модельного квадрата, а для любого четырехугольника вычислять по формуле (\*\*\*)

А как вычислять эти  $B_n^i$ ? Если это в рамках теории разностных схем, то их можно и нужно вычислять с помощью разностных производных (заменяя обычные производные разностными). А как это делается в рамках МКЭ? Самыми популярными являются **изопараметрические элементы, или изопараметрическое отображение.**

## 11)Изопараметрические элементы и отображения. Четырехугольный изопараметрический элемент. Билинейная аппроксимация. (Л6, 7)

### Изопараметрические элементы и отображения.

Идея состоит в том, что эти производные (матрица  $A_i^m$ ) вычисляются так, что отображение неизвестно. Отображение, которое аналитически не задано, задается приближенно, но с той же точностью, с которой функция  $N_p$  аппроксимирует исходные перемещения внутри. Другими словами, **отображение само задается с помощью тех же самых функций  $N_p$ .**

### Четырехугольный изопараметрический элемент.

Для двумерного случая 2D можно записать так ( $x$  – это отображение модельного элемента на исходный в плоскости  $x$ ):

$$\begin{aligned} x &= x^1 N_1(\xi, \eta) + x^2 N_2(\xi, \eta) + x^3 N_3(\xi, \eta) + x^4 N_4(\xi, \eta) \\ y &= y^1 N_1(\xi, \eta) + y^2 N_2(\xi, \eta) + y^3 N_3(\xi, \eta) + y^4 N_4(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (*)$$

$x^i$  – координата  $x$   $i$ -го узла,  $y^i$  – координата  $y$   $i$ -го узла

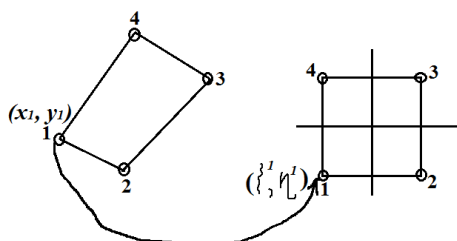
Общая идея отображения в МКЭ реализована так, что применяется отдельно к каждому элементу. И внутри каждого элемента отображение модельного элемента на исходный осуществляется теми же аппроксимирующими функциями  $N_p$ , которые аппроксимируют поле перемещений внутри элемента.

Можно убедиться, что это отображение действительно правильное.

1)  $N_p(\xi, \eta)$  используются, как видно из формул.

2) Отображение правильное, потому что оно каждый узел отображает туда, куда надо.

Вот у нас есть косоугольный 4-х-угольный элемент и модельный элемент в 2-х-мерном случае (в 3-х-мерном это куб). Узлы должны проходиться в одном направлении. Если они будут проходиться в разных направлениях, то якобиан отображения будет отрицательный (в 2-х-мерном случае).



Поймем, почему эти формулы соответствуют этому отображению. Основное свойство базисных функций  $N_p$  состоит в том, что они ассоциированы с узлами. Функция  $N_p$  в узле, имеющем тот же номер, что и сама функция, равна 1; а в остальных узлах она равна 0.

$$N_1(\xi^1, \eta^1) = 1$$

$$N_2(\xi^1, \eta^1) = N_3(\xi^1, \eta^1) = N_4(\xi^1, \eta^1) = 0$$

Тогда в первой точке мы получим  $x = x^1$ :

$$x(\xi^1, \eta^1) = x^1 N_1(\xi^1, \eta^1) + x^2 N_2(\xi^1, \eta^1) + x^3 N_3(\xi^1, \eta^1) + x^4 N_4(\xi^1, \eta^1) = x^1$$

$x^1$  – координата 1-го узла исходного отображения

Мы видим, что эти формулы делают то, что надо:

- 1) Они осуществляют ту же степень аппроксимации, что и аппроксимация поля перемещений внутри элемента, так как они записаны теми же функциями  $N_p$ .
- 2) Они соответствующие узлы переводят, куда надо:  
1-й узел переводят в 1-й узел; 2-й узел – во 2-й узел и т.д.

Это **частный случай реализации более общей идеи отображения**, используемой для решения вариационного уравнения и вообще для численного решения задач. Идея более общая, но в МКЭ в этом частном виде она наиболее широко используется.

В чем заключаются **частности**?

- 1) Для каждого элемента отображение строится отдельно от других элементов. Это соответствует духу и идеологии МКЭ. Мы уже обсуждали, что вначале для каждого элемента отдельно строится локальная матрица жесткости, а потом все локальные матрицы жесткости ассемблируются в одну глобальную матрицу жесткости.
- 2) Дальше эта идея конкретизируется в том, что строится изопараметрическое отображение стандартного модельного элемента на исходный элемент. Именно так все реализуется.

Чтобы вычислять  $\frac{\partial N_p}{\partial x_n}$ , нам нужны матрицы  $B_n^i$ . А матрицы  $B_n^i$  – это обратные матрицы к матрицам  $A_i^m$ . А матрица  $A_i^m$  – есть производная  $x$  по  $\xi$ . А это (\*) как раз формула  $x$  от  $\xi$ , так как  $N_p$  – это функции от  $\xi$ . При этом  $x^i$  – это координаты узлов, это просто числа. Значит, нам нужно вычислять производные от функций  $N_p$  по  $\xi$ .

$$\frac{\partial N_p}{\partial x_n} = B_n^i \frac{\partial N_p}{\partial \xi^i}$$

$$A_i^m = \frac{\partial x_m}{\partial \xi^i}, \quad A_i^m B_n^l = \delta_n^m, \quad B_n^l = \frac{\partial \xi^l}{\partial x_n}$$

Следовательно, ничего, кроме производных функции  $N_p$  по координатам  $\xi^i$  (или  $\xi, \eta$ ) в модельной плоскости  $(\xi, \eta)$ , вычислять не нужно вообще.

Изопараметрическое отображение (для 3-х мерного случая) задается так:

$$x_i = \sum_{p=1}^{n_e} x_i^p N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad i = 1, 2, 3, \quad x_i = \sum_{p=1}^{n_e} N_p x_i^p$$

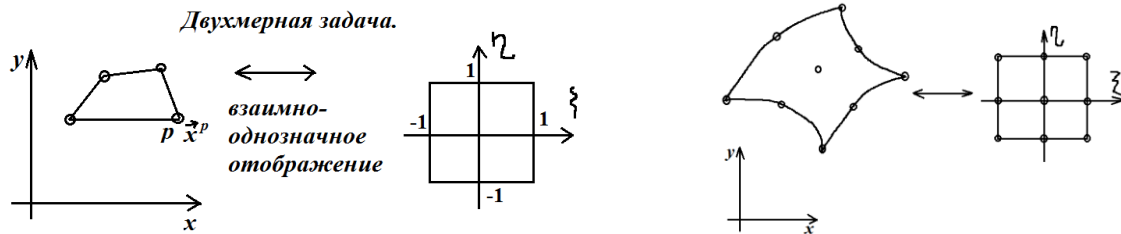
$i$  – номер оси в декартовых координатах (в 3-х-мерном случае)

$n_e$  – число узлов этого элемента,  $p$  – номер узла в элементе

$N_p$  – функции формы,  $x_i^p$  –  $i$ -я координата  $p$ -го узла

Запишем уравнение в векторном виде:

$$\vec{x} = \sum_{p=1}^{n_e} N_p(\vec{\xi}) \vec{x}^p, \quad \vec{x}^p - \text{координаты } p - \text{го узла} \quad (**)$$



Это задает изопараметрическое отображение:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi})$$

В 3-х-мерной задаче:  $x_i = x_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ,  $i = 1, 2, 3$

Мы рассматривали изопараметрическое отображение на примере четырехугольного элемента. Если этот элемент будет в 3-х-мерном пространстве, или треугольник, или призма – все будет то же самое. Эта формула (\*\*) – совершенно общая, она подходит и для более высоких полиномов. Если мы возьмем криволинейный четырехугольник, где выбрано больше узлов (квадратичный 4-х-угольный элемент), и научимся строить функции  $N$  в этих переменных  $\xi, \eta$ , так чтобы они были квадратичными функциями, то тогда отображение будет задаваться с помощью формул такого же вида (\*\*).

Идея состоит в том, чтобы само отображение задавать с помощью тех же самых функций формы, которые участвуют в аппроксимации перемещений внутри элемента:

$$u_i(\vec{\xi}) = \sum_{p=1}^{n_e} N_p(\vec{\xi}) \hat{u}_i^p$$

$p$  – номер узла,  $n_e$  – количество узлов в элементе,  $\vec{\xi}$  принадлежит этому элементу  
 $\hat{u}_i^p$  – значения перемещений в узлах

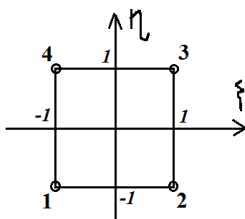
Аппроксимация поля перемещений внутри элемента и отображение косоугольного элемента на стандартный элемент осуществляется с помощью одних и тех же функций  $N_p$ . Именно этот факт называется **изопараметрическим**. Это говорит о том, что не нужно изобретать все элементы для всех криволинейных или косоугольных фигур, а достаточно их создать для стандартных фигур.

Мы будем рассматривать стандартный элемент четырехугольный, по форме это квадрат.

#### Четырехугольный изопараметрический элемент.

В осях  $\xi, \eta$ , форма квадрат. Узлы берем в вершинах квадрата – 4 вершины. Узлы – это точки, где будут узловые функции (перемещения), по которым аппроксимируется эта функция внутри элемента. **Самым простым способом аппроксимации в случае четырехугольного элемента является билинейная аппроксимация.**

#### Билинейная аппроксимация.



Стандартный элемент задан в переменных  $\xi, \eta$ . Как выбрать билинейные функции? Они называются билинейными, потому что они есть произведение линейных функций по  $\xi$  и по  $\eta$ . Относительно каждой координаты это линейные функции.

### Правило обозначений.

Вводятся числа  $\xi_i$  и  $\eta_i$  (где  $i$  – номер узла) по такому правилу:

$$\xi_i = -1 \quad \text{при} \quad \xi = -1$$

$$\xi_i = +1 \quad \text{при} \quad \xi = +1$$

$$\eta_i = -1 \quad \text{при} \quad \eta = -1$$

$$\eta_i = +1 \quad \text{при} \quad \eta = +1$$

$\xi, \eta$  – это числа

$i$  – это номер узла

Если для узла  $i$  (например,  $i = 1$ ) координата  $\xi = -1$ , то тогда  $\xi_i = -1$ .

И  $\eta_i = -1$  для узла  $i$ , если координата  $\eta$ , соответствующая узлу  $i$ , равна  $\eta = -1$ .

Для примера распишем все эти числа:

$$\xi_1 = -1 \quad \eta_1 = -1$$

$$\xi_2 = +1 \quad \eta_2 = -1$$

$$\xi_3 = +1 \quad \eta_3 = +1$$

$$\xi_4 = -1 \quad \eta_4 = +1$$

Все эти обозначения  $\xi_i$  и  $\eta_i$  используются для того, чтобы в общем универсальном виде записать функцию формы  $N_i$ , соответствующую узлу  $i$ . Причем  $i$  – это одноиндексная нумерация узлов.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_i \cdot \eta)$$

$\xi_i$  и  $\eta_i$  – это известные числа

Отсюда видно, что функция  $N_i$  есть произведение двух линейных функций – линейной функции от  $\xi$  и линейной функции от  $\eta$ . Т.е.  $N_i$  – это действительно билинейная функция. И такая аппроксимация для 4-х-угольного элемента является самой простой, которая вообще существует для 4-х-угольных элементов.

**Проверим эту формулу, например, для  $i = 3$ :**

$$\xi_3 = +1 \quad \eta_3 = +1$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_3 \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_3 \cdot \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi) \cdot (1 + \eta)$$

$$\text{узел 3} \quad N_3(1, 1) = 1$$

$$\text{узел 1} \quad N_3(-1, -1) = 0$$

$$\text{узел 2} \quad N_3(1, -1) = 0$$

$$\text{узел 4} \quad N_3(-1, 1) = 0$$

$$\Rightarrow N_i(\vec{x}^p) = \delta_i^p, \quad \vec{x}^p = (\xi, \eta)$$

Следовательно, в своем узле  $N_i = 1$ , в остальных узлах  $N_i = 0$ . Так и должно быть.

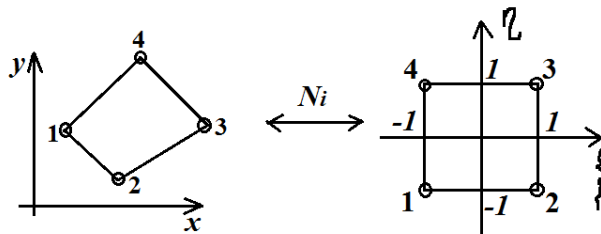
### Замечание.

Мы уже обсуждали, что в МКЭ при использовании метода Галеркина или Ритца это свойство:  $N_i(\vec{x}^p) = \delta_i^p$  аппроксимирующих функций  $N_i$  удобно. Это сделано для того, чтобы **коэффициенты разложения по базисным функциям имели физический смысл и были значениями искомой функции в узлах** (узловыми перемещениями).

В результате решения линейной системы находятся коэффициенты разложения решения по базисным функциям. Но если одновременно эти коэффициенты разложения равны значениям решения в узлах, то при решении этой линейной системы сразу находятся значения искомой функции в узлах.

Такой элемент называется **билинейным элементом**.

Теперь возникает вопрос: что с ним делать? Пусть у нас есть косоугольный четырехугольник в плоскости  $XY$ . И теперь надо использовать это отображение с помощью билинейных функций  $N_i$ .



И получится элемент в плоскости  $\xi\eta$ . Его строить не надо, его надо получать по тем формулам.

Этот элемент – самый надежный. И если есть возможность решать задачу с помощью этого элемента, то это самый лучший на свете элемент, который был придуман. Но бывает, что невозможно решать задачу с помощью этого элемента.

### Замечание.

В этой плоскости ( $\xi\eta$ ) функция  $N_i$  – билинейна. Если при отображении опять использовать билинейные функции, то в матрице жесткости в переменных  $xu$  будет полином более высокого порядка, чем полином в матрице жесткости для стандартного элемента. Потому что в матрицу жесткости при этом отображении входят производные от билинейных функций. А если билинейную функцию продифференцировать по одной координате, то по другой координате она останется линейной. Это означает следующее.

Если само решение есть билинейная функция (в тестовых примерах можно так подобрать) и если мы решаем задачу (в плоскости  $\xi\eta$ ) с помощью билинейной аппроксимации внутри каждого элемента, то мы получим приближенное решение, которое совпадает с точным. Но это будет так, если действовать в переменных  $\xi\eta$ .

А если использовать идею изопараметрических элементов (если решать задачу в плоскости  $xu$ ), т.е. там подобрать такую тестовую задачу, чтобы ее точным решением была билинейная функция, и решать ее с помощью изопараметрических билинейных элементов, то мы не получим точного решения. Мы получим решение с некоторой погрешностью.

Это не страшно. Ведь решение настоящей задачи не описывается билинейной функцией. Погрешность будет мала при стремлении размера элемента к 0. Билинейные элементы – самые лучшие элементы.

### Замечание.

Здесь возникает аналогия. Как у нас записывалась локальная матрица жесткости?

$$K_{pq}^{ki} = \int_{V_e} C^{ijkl} N_{p,l} N_{q,j} dV = \int_{V_\xi^e} (C^{ijkl} B_l^m N_{p,m} B_j^n N_{q,n}) J dV_\xi$$

$B_l^m$ ,  $N_{p,m}$ ,  $B_j^n$ ,  $N_{q,n}$  – полиномы,  $J$  – якобиан преобразования

1) В случае, если не использовать изопараметрическое преобразование:

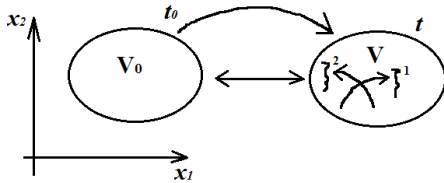
$$K_{pq}^{ki} = \int_{V_e} C^{ijkl} N_{p,l} N_{q,j} dV$$

2) В случае, если использовать изопараметрическое отображение:

$$K_{pq}^{ki} = \int_{V_\xi^e} (C^{ijkl} B_l^m N_{p,m} B_j^n N_{q,n}) J dV_\xi$$

Это отображение очень похоже на **отображение Пиолы в МСС**. Идея изопараметрических элементов основана на отображении. И математически это именно такое отображение, которое есть в МСС и которое приводит к образованию 1-го тензора напряжений Пиолы. Само отображение тоже называется отображением Пиолы.

Если была начальная область  $V_0$  какой-то сплошной среды в момент  $t_0$ , и она преобразовалась в область  $V$  в момент времени  $t$ , то тензор Пиолы вводится именно таким образом, что делается однозначное соответствие. Мы вводим  $x_1, x_2$  – глобальную систему координат, которая имеет место быть и для начального, и для текущего состояния.



Координаты в начальном состоянии (лагранжевы):  $\xi_i = x_i|_{t=t_0}$

Если мы в качестве лагранжевых координат  $\xi^1, \xi^2$  возьмем декартовы пространственные координаты в начальный момент времени, то тогда это преобразование записывается так (закон движения):  $\forall t: x_i = x_i(\xi, t)$ . Если  $t$  фиксировано, то это есть то самое преобразование, которое рассматривается в МКЭ, просто в МКЭ физическая подоплека другая, там нет такой физической сущности, как в МСС. Но математическое преобразование абсолютно то же самое.

Нарисуем координатные линии  $\xi^1, \xi^2$  (криволинейные координаты). Если дифференцировать по криволинейным направлениям, то возникнет тензор напряжений Пиолы. Такое же преобразование используется в МКЭ для каждого элемента. Разница лишь в том, что в МСС это преобразование используется так, что возникает тензор Пиолы, а в МКЭ уже нет никакого тензора напряжений Пиолы, а вся энергия записана в терминах перемещений.

- 1) В реальных задачах  $C^{ijkl}$  редко бывают постоянными. Они явл. функциями координат.
- 2) Если мы используем изопараметрические элементы, то в интеграле стоят функции  $B$  и  $N$ , которые не явл. постоянными. Как вычислять интеграл?

## 12) Численное интегрирование. Квадратурные формулы Гаусса, точки Гаусса.

(Л17)

### Численное интегрирование.

Вспомним, как записывалась локальная матрица жесткости (по области элемента):

$$K_{pq}^{ik} = \int_{V_e} C^{ijkl} N_{p,j} N_{q,l} dV = \int_{V_\xi^e} (C^{ijkl} B_l^m N_{p,m} B_j^n N_{q,n}) J dV_\xi$$

$B_l^m$ ,  $N_{p,m}$ ,  $B_j^n$ ,  $N_{q,n}$  – полиномы,  $J$  – якобиан преобразования

1) Если **не** использовать изопараметрическое преобразование, 2) если использовать.

Возникает вопрос: как вычислять этот интеграл? Но на практике **интегралы вычисляются численно**.

### Какие квадратурные формулы использовать?

Узлы, в которых происходит интерполяция (т.е. узлы элемента), и узлы, с помощью которых вычисляется интеграл, – это разные узлы. Рассмотрим, **как интегрировать в области, которая является либо квадратом в 2D, либо кубом в 3D**.

Мы знаем, что существуют разные квадратурные формулы, имеющие разную точность (формулы Ньютона-Котеса, формулы Ньютона, формулы Гаусса). Какие формулы лучше всего использовать в МКЭ? Формулы Гаусса, потому что они более точные.

### Отличие квадратурных формул Ньютона и Гаусса.

Принципиальное отличие формул Гаусса от формул Ньютона состоит в том, что в формулах Ньютона точки  $\xi_i$  задаются заранее (например, равномерным шагом), а весовые коэффициенты  $C_i$  нужно определять, а в формулах Гаусса и  $\xi_i$ , и  $C_i$  подлежат определению. Эти числа ( $\xi_i, C_i$ ) находятся из такого условия:

$$\xi_i, C_i: I(\xi^j) = S(\xi^j)$$

$\xi^j$  ( $\xi$  в степени  $j$ ) – это одночлен

Квадратурная формула должна равняться точно интегралу, если интегрируемая функция многочлен. В силу линейности квадратурной формулы, линейности интеграла и линейности многочлена достаточно это требовать и проверять только для одночленов такого вида, не надо писать полный многочлен с коэффициентами.

**Формулы Ньютона** (в том числе формулы Симпсона – разновидности формулы Ньютона) позволяют точно проинтегрировать многочлены таких степеней:

$j = 0, 1, \dots, n-1$ , если  $n$  – четное

$j = 0, 1, \dots, n$ , если  $n$  – нечетное

**Формулы Гаусса** точны для многочленов таких степеней:

$J = 0, 1, \dots, 2n-1$

$n$  – число узлов

Это так, потому что для формул Гаусса неизвестными являются  $\xi_i$  и  $C_i$ , поэтому должно быть  $2n$  уравнений. А для формул Ньютона  $\xi_i$  заданы, а неизвестными являются  $C_i$ , а их  $n$  штук, поэтому должно быть  $n$  уравнений. Формулы Ньютона еще обладают таким свойством, что если нечетное число узлов, то она точна для степеней, на 1 больше, чем та степень полинома, для которого она выводится. Это происходит потому, что там



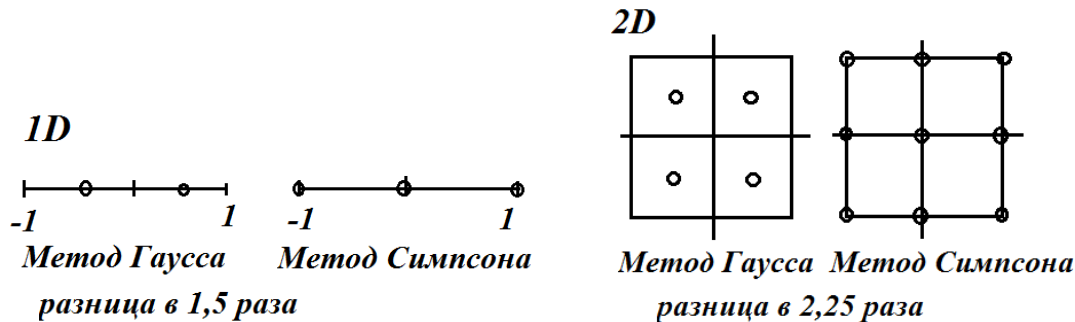
берется интеграл по симметричному отрезку от антисимметричной функции, а он равен 0 независимо от формулы. Поэтому по точности формула Симпсона для 3-х узлов эквивалентна формуле Гаусса для 2-х узлов:

**Формула Гаусса ( $n = 2$ ) точна для полинома степени  $2n - 1 = 3$**

**Формула Ньютона (Симпсона) ( $n = 3$ ) точна для полинома степени  $n = 3$**

Ради эффективности используются формулы Гаусса (квадратуры Гаусса), потому что они требуют меньше узлов для достижения той же точности, чем формулы Ньютона.

**Пример.** Если мы хотим, чтобы формула была более точной, надо увеличить число узлов.



**1D:** При интегрировании по отрезку формула Гаусса с 2-мя узлами дает ту же точность, что и формула Симпсона с 3-мя узлами. Узлов **в 1,5 раза** больше, а, следовательно, во столько же раз больше арифметических операций. В каждой точке одинаковое число операций у формулы Гаусса и у формулы Ньютона.

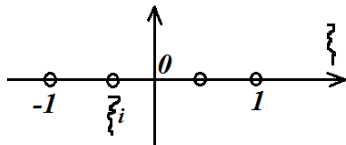
**2D:** Если мы будем интегрировать по квадрату, то формула Гаусса будет соответствовать 4-м узлам, а формула Симпсона 9-ти. Узлов больше в **2,25 раза**.

**3D:** При интегрировании по кубу формула Гаусса приводит к 8-ми узлам, а формула Симпсона даст 27 узлов. Получается разница в **3,375 раза**.

### Квадратурные формулы Гаусса, точки Гаусса.

Будем выводить для одномерного отрезка, потому что квадрат или куб – это есть прямое произведение отрезков. Следовательно, мы понимаем, что вычисление интеграла по области квадрата или куба – это последовательное применение квадратурных формул, выведенных для отрезка, поэтому ничего нового здесь изобретать не надо.

Возьмем стандартный отрезок:



В численных методах используется отображение любого отрезка  $[a, b]$  на стандартный отрезок  $[-1, 1]$ . И квадратурные формулы выводятся для стандартного отрезка. Итак, на отрезке  $[-1, 1]$  выбираются какие-то узлы – точки  $\xi_i$ .

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (*)$$

Интеграл  $(*)$   $I(f)$  приближенно заменяется квадратурными формулами  $S(f)$ :

$$S(f) = \sum_{j=1}^n C_j f(\xi_j)$$

$w_i$  – весовые коэффициенты.

Все квадратурные формулы есть линейная комбинация значений функции в узлах.  $S(f)$  – это всегда линейная функция. Это следует из фундаментального и общего соображения, что интеграл  $I(f)$  – это линейный функционал от функции  $f$ . Поэтому  $S(f)$  должно быть линейным функционалом от дискретной функции  $f$ , т.е. от значений функции в узлах. А что такое линейный функционал от конечного набора  $f$  в узлах? Это линейная комбинация.

**Интеграл (\*) вычисляется по формулам Гаусса.** В формулах Гаусса подбираются как  $C_i$ , так и координаты  $\xi_i$ . Эти числа  $(\xi_i, C_i)$  находятся из условия, что **квадратурная формула должна точно равняться интегралу, если интегрируемая функция – многочлен:**

$$\sum_{i=1}^n C_i f(\xi_i) = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (**)$$

Это равенство будет точным в том случае, если

$$f(\xi) = 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^q$$

Чему должно равняться  $q$ , чтобы в таком случае приближенное решение совпадало с точным?

**Неизвестных параметров** в этой формуле, которые мы можем подбирать,  **$2n$** , потому что неизвестны  $C_i$  и точки  $\xi_i$ .  $\xi_i$  – это узлы квадратурной формулы Гаусса, они не обязаны совпадать с узлами конечного элемента. Поскольку используются формулы Гаусса для вычисления интеграла, то эти точки  $\xi_i$  часто в литературе называются гауссовыми точками. **Гауссовы точки** – это узлы квадратурной формулы Гаусса.

А сколько таких уравнений можно написать, если  $f(\xi) = 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^q$ ? Таких уравнений будет  $(q + 1)$ . Систему уравнений мы можем решить, когда число уравнений равно числу неизвестных:

$$2n = q + 1$$

Отсюда следует, что максимальная степень полинома, до которой формула может быть точна, равна  $(2n - 1)$ .

$$q = 2n - 1$$

Следовательно, формулы Гаусса обеспечивают точное интегрирование для полиномов степени  $(2n - 1)$ .

Например, если будет 2 узла:  $n = 2$ , то для полинома 3-й степени будет точное интегрирование. Отсюда можно сделать вывод, что **формулы Гаусса с двумя узлами на отрезке вполне достаточно для билинейного конечного элемента**. Она обеспечивает точный интеграл.

#### Замечание.

Если подобрать правильную степень формулы Гаусса (число узлов – точность этой формулы), то она тоже точно проинтегрирует полином. Если формула Гаусса используется того порядка точности, что она позволяет точно проинтегрировать подынтегральную функцию, то тогда это называется **полное интегрирование (full integration)**.

А если формула Гаусса используется такая, что она приближенно интегрирует (т.е. более низкого порядка, чем тот полином, который надо интегрировать), то это называется **сокращенное интегрирование (reduced integration)**. Так делают, если задачи сложные:



$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \frac{C_1}{C_2} = -\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^3 \Rightarrow \frac{\xi_2}{\xi_1} = \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^3$$

$$1) \frac{\xi_2}{\xi_1} = 0 \text{ — не подходит}$$

$$2) \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\xi_2}{\xi_1} = \pm 1$$

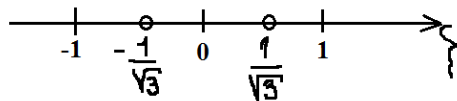
$$a) \xi_2 = \xi_1 \text{ — не подходит}$$

$$б) \xi_2 = -\xi_1 \text{ — подходит}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$$

$$2\xi_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Это и есть гауссовы точки для случая  $n = 2$ . Именно они и используются.



**Как проинтегрировать по квадрату?**

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta \approx \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^n C_i f(\xi_i; \eta) \right) d\eta \approx \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n C_i f(\xi_i; \eta_j) \right) C_j =$$

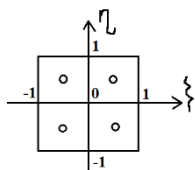
$$= \sum_{i,j=1}^n C_i C_j f(\xi_i; \eta_j)$$

$\eta$  – фиксир

$C_i, C_j$  – одинаковые, так как область квадратная

$n$  – число Гауссовых точек (поскольку область квадратная, разумно считать, что число гауссовых точек одинаково по обоим направлениям, т.е. что одинаковая точность у формулы интегрирования по  $\xi$  и по  $\eta$ )

В двумерной области получились 4 гауссовы точки.



Для 3-х-мерной области точек будет 8.

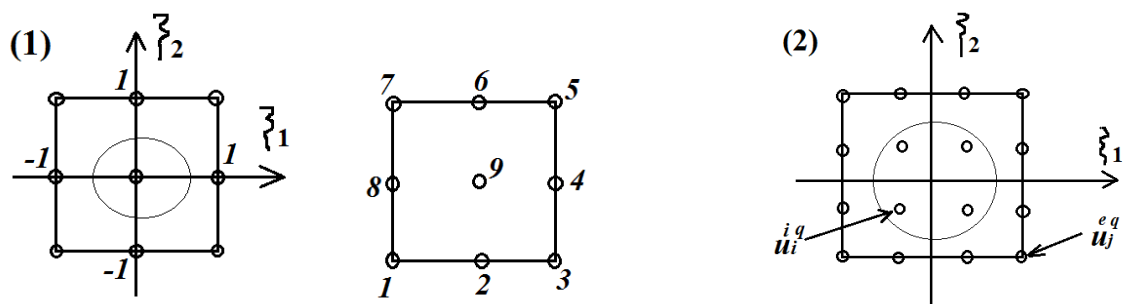
Все другие четырехугольные элементы можно отобразить на стандартные, используя изопараметрическое преобразование. Следовательно, вопрос с интегрированием решен по существу для всех четырехугольных элементов.

### 13) Лагранжевы элементы высших порядков. Функции формы. (Л17)

Мы построили всякие формулы интегрирования разного порядка точности (порядок точности определяет число гауссовых точек). Мы считали, что если 2 гауссовы точки, то формула будет точна для полиномов 3-й степени по каждому направлению. Раз существуют формулы интегрирования любой точности, то хочется и элементы рассмотреть более высокой точности, чем те, которые мы рассматривали.

Те элементы, которые мы рассмотрели, это **линейный треугольник** и **билинейный четырехугольник**. Это самые элементарные элементы, а все остальные элементы – высшего порядка. Будем их строить.

Элементы более высокого порядка – это имеется в виду, что полиномы надо использовать более высокого порядка, чем те, которые до сих пор использовались. Например, квадратичные и далее. Это означает, что надо рисовать большее число узлов.



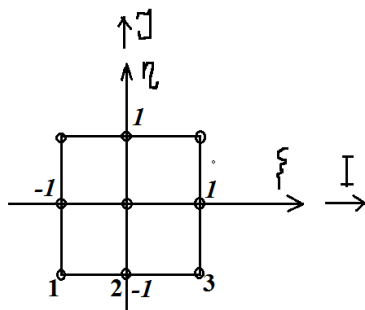
#### (1) Квадратичный элемент.

В таком элементе по каждому направлению аппроксимация может быть **квадратичная**, а аппроксимация двухмерной области – это будем произведение одномерных квадратичных областей. Построенные элементы называются **элементами лагранжевого типа**.

#### (2) Кубический элемент.

В этом элементе по каждому направлению 4 узла, значит, можно **кубический** полином использовать. Дальше продолжать не имеет смысла, потому что уже кубические элементы в ANSYS не используются, а элементы более высокого порядка тем более не используются.

Рассмотрим квадратичный четырехугольный элемент с 9-ю узлами.



У нас есть **одноиндексная нумерация** узлов в элементе:

$$p = 1, \dots, n_e, \quad n_e - \text{число узлов этого элемента}$$

В МКЭ принята одноиндексная нумерация, потому что элементы бывают разной формы. Одноиндексная нумерация всех узлов является типичной в МКЭ.

В такой квадратной области естественной кажется **двухиндексная нумерация**:  $IJ$  (В кубической области можно ввести трехиндексную нумерацию.)

Взаимнооднозначное соответствие:

$$p \leftrightarrow IJ$$

$$1 \leftrightarrow 11$$

$$2 \leftrightarrow 21$$

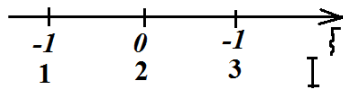
$$3 \leftrightarrow 31 \text{ и т.д.}$$

Будем строить **лагранжевы элементы**. Для построения функций формы таких элементов используются полиномы Лагранжа.

Введем **фундаментальный полином Лагранжа степени  $n$  по каждому направлению** (например, по направлению  $\xi$ ):

$$l_I^n(\xi) = \prod_{\substack{L=1 \\ L \neq I}}^n \frac{(\xi - \xi_L)}{(\xi_I - \xi_L)}$$

Эта формула соответствует одномерному отрезку.



$n$  – число узлов по направлению  $\xi$

$I$  – индекс, который меняется по оси  $\xi$ , на этой картинке он принимает значения 1,2,3.

Это полином степени  $(n - 1)$ . Это естественно – по  $n$  узлам можно провести интерполяционный полином  $(n - 1)$  степени. Если 3 узла (как на картинке), то полином 2-й степени.

**Свойство полинома Лагранжа:**

$$l_I^n(\xi_k) = \delta_{Ik} \quad (\text{в точке } \xi_k \text{ полином либо 0, либо 1})$$

Точно такой же полином Лагранжа можно написать по второму направлению  $\eta$ :

$$l_J^n(\eta) = \prod_{\substack{L=1 \\ L \neq J}}^n \frac{(\eta - \eta_L)}{(\eta_J - \eta_L)}$$

$$l_J^n(\eta_k) = \delta_{Jk}$$

**Пример:**

$$I = 1 \quad l_1^3(\xi) = \prod_{\substack{L=1 \\ L \neq I}}^3 \frac{(\xi - \xi_L)}{(\xi_1 - \xi_L)} = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} \cdot \frac{(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)}{(-1 - 0)} \cdot \frac{(\xi - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)$$

$$l_1^3(\xi_1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) = 1$$

$$l_1^3(\xi_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (0 - 1) = 0$$

$$l_1^3(\xi_3) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 - 1) = 0$$

### Функции формы.

Эта функция (полином Лагранжа) замечательна тем, что она удовлетворяет требованию для функции формы в МКЭ:

1) Она есть полином нужной степени. Если у нас  $n$  узлов, то это полином степени  $(n - 1)$ . Если 3 узла, то это полином 2-й степени. Если 2 узла, то полином 1-й степени. В случае 2-х узлов мы получим билинейный полином. Т.е. билинейный полином является частным случаем полинома Лагранжа.

2) Она обладает дельта-свойством. В своем узле (равном номеру функции) она равна 1, в остальных узлах она равна 0. Функция  $N_i$ , которую мы строили, линейную в треугольнике и билинейную в четырехугольнике, тоже обладала этим свойством.

Полиномы Лагранжа реально используются в качестве базисных функций, **функций формы  $N_p$** .

Напишем **функцию формы  $N_p$** :

$$N_p(\xi, \eta) = N_{IJ}(\xi, \eta) = l_I^n(\xi) l_J^n(\eta)$$

Функция формы строится как произведение одномерных функций. Так записываются базисные функции, и так они могут быть построены для любых степеней (2, 3 – биквадратичные и бикубические элементы).

Полученные элементы называются **лагранжевыми элементами**, потому что в них используются полиномы Лагранжа. По существу это интерполяционный полином Лагранжа.

#### Замечание.

Возникает практический вопрос: до какой степени полиномы используются? Если посмотреть Help к программе ANSYS, то мы увидим, что **полиномы используются до 2-й степени**. Одна из причин, почему не используются элементы такого сорта более высоких порядков (кубические и более), – это известное свойство интерполяционного полинома Лагранжа. Это свойство состоит в том, что при равномерном распределении узлов получаются очень плохие аппроксимации вблизи краев этого отрезка, даже для очень гладких функций.

#### Замечание.

Здесь возникает некоторая неприятность, что **появляется узел внутри**. Если будет более высокая степень полинома, то будет больше узлов. Он дает дополнительную степень свободы, дополнительные неизвестные в окончательную систему уравнений. Но поскольку он находится внутри, то **его можно исключить на элементном уровне** (есть такой термин в МКЭ). Можно сформировать окончательную систему уравнений и ее решать, и там что-то исключать из нее, – это уже будет **на уровне глобальной системы**. А можно еще до процесса ассемблирования это проделать с одним элементом, это и называется **на элементном уровне**. Тогда при ассемблировании вкладов элементов в глобальную систему эти значения вообще не войдут в глобальную систему, если их исключить на элементном уровне. Это **метод конденсации**.

#### 14) Метод конденсации. Макроэлементы. (Л8)

##### Метод конденсации.

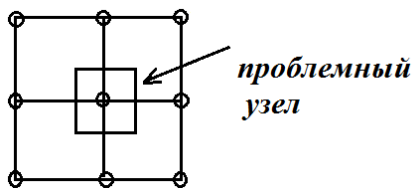
У элементов более высоких порядков, чем линейные и билинейные, возникают внутренние узлы, которые находятся не на границе элементов, а внутри. Они дают дополнительные степени свободы, дополнительные неизвестные в окончательную систему уравнений. При ассемблировании узлы (и узловые неизвестные), которые на границе, соединяются в уравнения с другими элементами. А те, которые внутри, так и остаются сами по себе.

Поскольку узел находится внутри, то **его можно исключить на элементном уровне**. Тогда при ассемблировании вкладов элементов в глобальную систему эти значения вообще не войдут в глобальную систему. Это **метод конденсации**.

**Конденсация** – это процесс освобождения от внутренних узлов (и узловых неизвестных в этих узлах). Конденсация уменьшает размер матрицы, написанной для этого элемента, за счет уменьшения числа узловых неизвестных. Процесс конденсации **хорошо распараллеливается**, и может быть сделан для каждого элемента независимо.

Конденсация означает сжатие. В результате глобальная система уравнений становится меньше.

Нужно решить простую линейную систему уравнений.



В таком элементе по каждому направлению аппроксимация может быть **квадратичная**, а аппроксимация двумерной области – это будем произведение одномерных квадратичных областей. Построенные элементы называются элементами лагранжевого типа. Будем освобождаться от внутреннего узла.

Локальная система линейных уравнений (для отдельного элемента):

$$K\hat{u} = \hat{F}$$

$\hat{u}$  – вектор всех неизвестных в элементе

Выходом применения МКЭ является такая система линейных уравнений, записанная для каждого элемента. В неизвестные  $\hat{u}$  входят неизвестные во всех узлах, в том числе во внутренних узлах, от которых мы хотим освободиться. Для того чтобы это сделать, надо всю систему написать в блочном виде.

Представим вектор неизвестных в блочном виде:

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u}^I \\ \hat{u}^e \end{Bmatrix}$$

$I$  – внутренние узлы данного элемента

$e$  – внешние узлы данного элемента

Представим правую часть в блочном виде:

$$\hat{F} = \begin{Bmatrix} \hat{F}^I \\ \hat{F}^e \end{Bmatrix}$$

Получаем блочное уравнение:

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{Ie} \\ K_{eI} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^I \\ \hat{u}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}^I \\ \hat{F}^e \end{Bmatrix}$$



$K_{Ie}$  – вне-диагональный блок матрицы, который связывает внешние и внутренние узлы

Мы хотим исключить  $\hat{u}^I$  и получить систему только для внешних неизвестных. Потому что внешние  $\hat{u}^e$  должны сопрягаться с перемещениями из других соседних блоков. А внутреннее  $\hat{u}^I$  ни с чем не должно сопрягаться, поэтому его можно исключить.

Первое уравнение системы:

$$K_{II}\hat{u}^I + K_{Ie}\hat{u}^e = \hat{F}^I$$

Первое уравнение написано для внутренних узлов. Количество этих векторных уравнений равно числу внутренних узлов.

$$\hat{u}^I = K_{II}^{-1}\hat{F}^I - K_{II}^{-1}K_{Ie}\hat{u}^e$$

В данном случае  $K_{II}$  – это не матрица, а число.

Теперь подставим  $\hat{u}^I$  во второе уравнение системы.

Второе уравнение системы написано для внешних узлов:

$$K_{eI}\hat{u}^I + K_{ee}\hat{u}^e = \hat{F}^e$$

$$K_{eI}K_{II}^{-1}\hat{F}^I - K_{eI}K_{II}^{-1}K_{Ie}\hat{u}^e + K_{ee}\hat{u}^e = \hat{F}^e$$

$$(K_{ee} - K_{eI}K_{II}^{-1}K_{Ie})\hat{u}^e = \hat{F}^e - K_{eI}K_{II}^{-1}\hat{F}^I$$

Если на внутренний узел действует какая-то внешняя сила (например, объемные силы), то это будет прибавка к внешним силам. Если объемных сил нет, то этот член будет равен нулю.

Обозначим:

$$\tilde{K} = K_{ee} - K_{eI}K_{II}^{-1}K_{Ie}$$

$$\tilde{F}^e = \hat{F}^e - K_{eI}K_{II}^{-1}\hat{F}^I$$

$\tilde{K}$  – конденсированная матрица жесткости

$\tilde{F}^e$  – конденсированная правая часть

$$\tilde{K}\hat{u}^e = \tilde{F}^e$$

Получили систему уравнений, которая имеет меньшую размерность. В эту систему уравнений уже не входят внутренние степени свободы.

Теперь, когда мы получили матрицу жесткости сжатого (конденсированного) элемента, мы можем ее ассемблировать вместе с матрицами жесткости окружающих элементов для получения глобальной матрицы.

Метод конденсации может применяться самостоятельно и приводить к технологии построения макроэлементов.

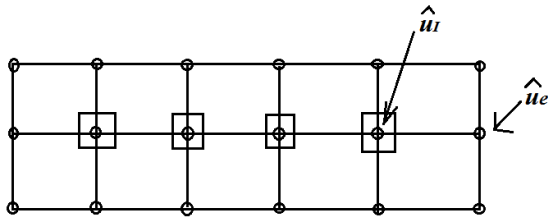
### Макроэлементы.

Эта технология была развита, когда были маломощные компьютеры, когда памяти у компьютеров было мало для хранения всяких данных. Она была придумана, чтобы уменьшать размер результирующей глобальной системы уравнений.

Эту идею можно развить. Например, применить ее не к одному элементу, а к какому-то количеству выбранных элементов, и на их базе образовать один элемент, который мы назовем **макроэлементом**.

Идея макроэлементов состоит в построении такого макроэлемента, у которого матрица жесткости была бы меньше, было бы меньше узловых неизвестных.

**Пример.** Строим сетку из обычных элементов.



Теперь мы хотим эту всю область принять за макроэлемент. Тогда узлы, обведенные квадратиками, мы считаем **внутренними**, а внешние узлы будем считать действительно **внешними** узлами. Мы можем исключить вклад внутренних узлов в глобальную матрицу жесткости. Для этого матрицу  $\hat{u}$  мы точно так же представляем в блочном виде:

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u}^I \\ \hat{u}^e \end{Bmatrix}$$

Теперь надо неизвестные (степени свободы)  $\hat{u}^I$  исключить. Исключить их можно точно так же:

1) Записать все уравнения для каждого элемента  $\alpha = 1, \dots, N_{el}$ :

$$K^\alpha \hat{u}^\alpha = \hat{F}^\alpha$$

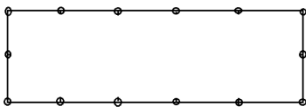
2) Проассемблировать и собрать глобальную систему уравнений для всего ансамбля элементов:

$$K \hat{u} = \hat{F}$$

3) Точно по этой же процедуре исключить неизвестные, которые соответствуют внутренним узлам, – т.е. сделать **конденсацию**. В результате конденсации получится уравнение:

$$\tilde{K} \hat{u}^e = \tilde{F}^e$$

Это уравнение соответствует такому макроэлементу:



Таким образом, мы построим матричное уравнение, куда входит матрица жесткости такая, что она умножается только на значения перемещений внешних узлов. Здесь дополнение состоит только в том, что надо проассемблировать локальные матрицы для всех этих узлов в глобальную матрицу для ансамбля элементов.

Далее макроэлемент можно ассемблировать вместе с другими (соседними) макроэлементами.

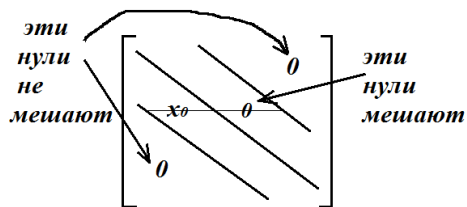
Таким образом, вместо элементов используются макроэлементы. Макроэлементы делаются, чтобы было меньше степеней свободы (неизвестных) в окончательной глобальной системе уравнений. В нее войдут только неизвестные внешних узлов, и, следовательно, глобальная система уравнений будет меньше (в нашем примере на 4 узловых значения).

А если нам понадобится какая-то информация в выкинутых точках? Поскольку задача решена, найдены все искомые функции, то надо будет либо решить отдельно задачу для этой подобласти, либо сделать интерполяцию.

### Минусы этой технологии.

В этой технологии есть минусы. **Число ненулевых элементов в глобальной матрице на каждой строчке увеличивается. Мы саму систему уменьшаем, а при этом число ненулевых элементов на каждой строчке возрастает.**

Важно, какими методами решается система уравнений, – прямыми или итерационными. Для **итерационных методов** лучше так – пусть будет больше уравнений, но матрица будет разреженной. А для **неитерационных методов** важно, каким методом мы решаем систему с матрицами. Если это прямые методы, которые используют графы и т.д. (например, прямые методы Гаусса или Холецкого), то сначала исключаются неизвестные. Про ленточную матрицу известно, что нули, которые стоят вне ленты, вообще ни на что не влияют, с ними никаких операций в методе Гаусса или Холецкого не делается. Т.е. все, что вне ленты, никак в решениях не участвует.



Вопрос состоит в том, что делается с нулями, которые стоят внутри ленты. В самых **примитивных методах** решений, которые были давно, все делалось, как делалось. Нули там или нет – это было неважно. С нулями работа происходила так же, как и с другими числами. Поэтому в таких методах неважно, нули или не нули внутри ленты, а важно было исключить лишние неизвестные, чтобы система была поменьше.

А в **современных методах**, где разработаны всякие решатели для разреженных матриц, сначала делаются не сами операции с элементами, а операции с указателями. Проводится исключение неизвестных и выясняется, какое будет заполнение в процессе исключения, т.е. сколько будет случаев, когда на каком-то месте в исходной матрице был ноль, а в результате исключения появляется не ноль. И под этот «не ноль» надо выделять память. В таких методах используются графы. Таким образом, заранее выясняется, какие номера будут у ненулевых элементов в процессе заполнения, что обязательно происходит в методах Гаусса и Холецкого. Когда такая операция с матрицей проводится, известно, сколько памяти будет занимать уже заполненная матрица (потому что надо выделить динамическую память). Только после этого начинаются вычисления с реальными числами. Если такие методы использовать, то тут трудно понять, что лучше – то ли иметь большую матрицу, но мало заполненную, то ли малую матрицу, но сильнее заполненную. Заранее неизвестно, что метод использования макроэлементов будет эффективным.

Есть пример, когда используют макроэлементы в трехмерном случае и решают систему до 30 млн уравнений. Это сложные области, блоки, связанные с реакторами, со сложной геометрией. Получается большая система, которую уменьшают с помощью макроэлементов, решают меньшую систему.

Тем не менее в таких элементах, с которых мы начали (лагранжевы элементы более высокого порядка) кажется естественным внутренние неизвестные исключить.

## 15) Серендиповы элементы. Сравнение степеней функций формы билинейных, лагранжевых и серендиповых элементов. (Л8)

### Серендиповы элементы.

Те элементы, которые строятся с помощью полиномов Лагранжа, называются **лагранжевы** элементы. Но есть другой тип элементов – **серендиповы** элементы. Serendipity – в переводе с англ. «интуитивная прозорливость». Эти элементы получены благодаря прозорливости. Их придумали интуитивно, они не следуют ни из какой глубокой теории. Квадратичные элементы, которые запрограммированы в программе ANSYS (и описаны в руководстве к ANSYS), это как раз серендиповы элементы.

### Сравнение степеней функций формы билинейных, лагранжевых и серендиповых элементов.

Чем **серендиповы** элементы лучше элементов лагранжевого типа, если бы мы не исключали неизвестные? Хотелось, чтобы была математическая стройность. Например, если мы используем двумерные функции формы, то хочется, чтобы они соответствовали общему виду полинома  $n$ -й степени от 2-х переменных. Если мы используем линейную интерполяцию, то хочется, чтобы использовалась линейная функция общего вида. Если мы используем квадратичную интерполяцию, то хочется, чтобы был полином 2-й степени общего вида. А при использовании лагранжевых полиномов получается совсем не так.

Элементы (функции  $N$ ), построенные на произведении одномерных лагранжевых элементов:

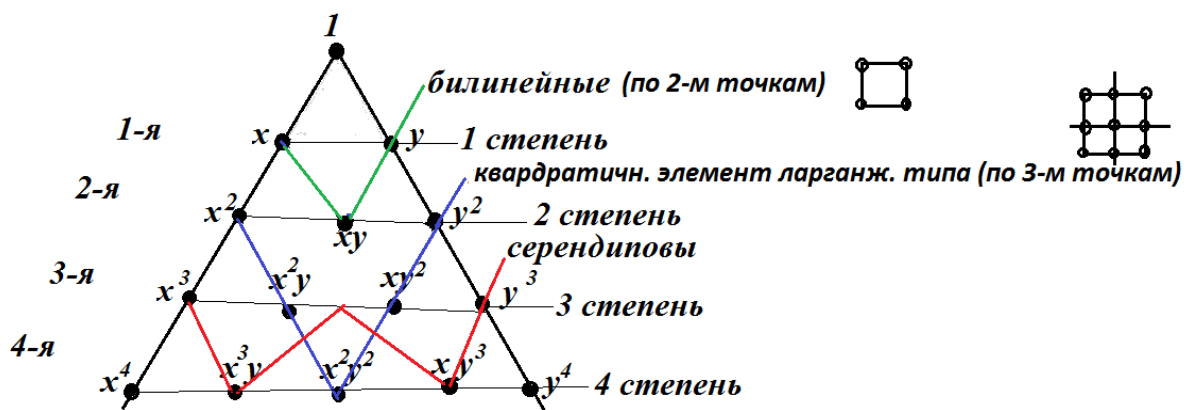
$$N_p = l_i^n(\xi_1)l_j^n(\xi_2) \leftarrow \text{лагранжевы элементы}$$

не дают общий вид полинома  $n$ -й степени от 2-х переменных.

### Треугольник Паскаля.

У Зенкевича пояснение ведется с помощью **треугольника Паскаля**.

#### Степени в функциях формы 4-х угольных элементов



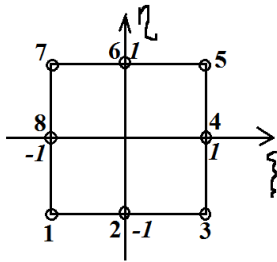
Таким образом, если считать, что разумной является аппроксимация, соответствующая общему полиному  $n$ -й степени от двух неизвестных, то те, аппроксимации, которые мы строили с помощью элементов лагранжевого типа, совсем не соответствуют этой идее. Поэтому появляется мысль построить другие функции формы, чтобы область была ближе к треугольной области, у которой нижнее основание – это горизонтальная прямая.

### Что входит в серендиповы элементы (красная линия).

Серендиповы элементы лучше выровнены и более приближены к горизонтальной линии, чем лагранжевы элементы 2-го порядка.

### Квадратичный серендипов элемент.

Рассмотрим четырехугольный элемент. Так как существует изопараметрическое преобразование, то это будет квадрат. **В серендиповых элементах внутреннего узла нет изначально.**



Сначала строятся функции формы для узлов, расположенных в серединах сторон.

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$N_2 = 1$  в точке 2,  $N_2 = 0$  во всех остальных узлах

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_2 - \frac{1}{2}N_8$$

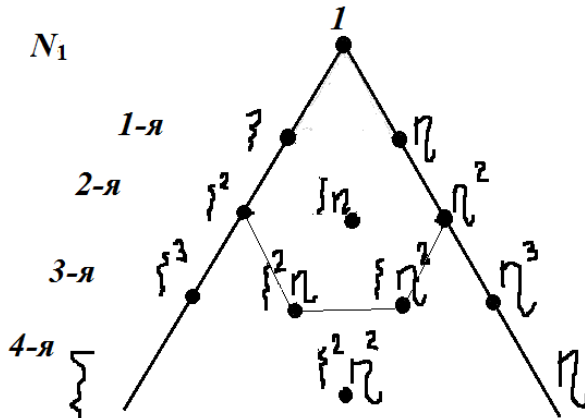
$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$  – билинейная функция, соответствующая билинейному элементу

$$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) = 1 \text{ в узле 1}$$

$$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) = 0 \text{ в узлах 3 и 7}$$

$$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) = \frac{1}{2} \text{ в узлах 2 и 8 (так как билинейная функция)}$$

Поэтому нужно добавить член  $-\frac{1}{2}N_2 - \frac{1}{2}N_8$ , так как  $N_2 = 1$  в точке 2 (и 0 в остальных точках),  $N_8 = 1$  в точке 8 (и 0 в остальных точках), и если мы вычтем этот член, то получим нули в точках 2 и 8.



Аналогично можно написать функции формы для всех остальных узлов, и, таким образом, мы получим квадратичный элемент, который не содержит внутреннего узла и, согласно Зенкевичу, образует другое семейство элементов серендипового типа.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_2 - \frac{1}{2}N_8$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_2 - \frac{1}{2}N_4$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi)$$

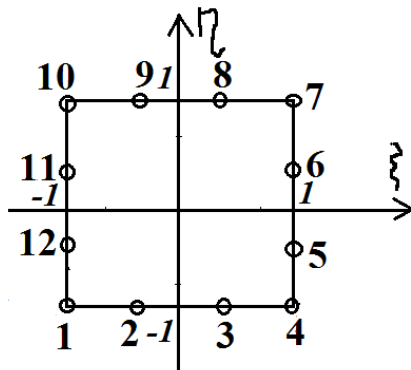
$$N_5 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_4 - \frac{1}{2}N_6$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_8$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)$$

**Кубический серендипов элемент.**



$$N_2 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta)$$

$$N_2(\text{точка 2})\left(-\frac{1}{3}; -1\right) = \frac{9}{32}\left(1 - \frac{1}{9}\right)(1 + 1)(1 + 1) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2}{32 \cdot 9} = 1$$

$$N_3 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta)$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 + 3\eta)(1 - \xi)$$

$$N_{12} = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 - 3\eta)(1 - \xi)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{2}{3}(N_2 + N_{12}) - \frac{1}{3}(N_3 + N_{11})$$

$$N_5 = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 - 3\eta)(1 + \xi)$$

$$N_6 = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 + 3\eta)(1 + \xi)$$

$$N_8 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 + \eta)$$

$$\begin{aligned}
N_9 &= \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 + \eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{2}{3}(N_3 + N_5) - \frac{1}{3}(N_2 + N_6) \\
N_7 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{2}{3}(N_6 + N_8) - \frac{1}{3}(N_5 + N_9) \\
N_{10} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{2}{3}(N_9 + N_{11}) - \frac{1}{3}(N_8 + N_{12})
\end{aligned}$$

В Help ANSYS есть билинейные элементы и серендиповы элементы 2-го. Это элементы h-типа.

#### **h-метод.**

Необходимо отметить, что мы рассматриваем элементы, которые называются **h-элементами**. Это называется **h-метод**. При входе в программу ANSYS нужно поставить галочку, какой метод мы будем использовать. Надо использовать **h-метод**. Он самый популярный и самый проверенный метод.

$h$  – характерный размер элемента. **h-метод** – это метод, который обеспечивает сходимость решения к точному (к выходу на константу) за счет уменьшения шага сетки  $h$  (размеров элемента).

Практически в МКЭ дают такую оценку: постепенно измельчают сетку, и решение должно выходить на некую константу. Решению можно доверять на той сетке, где решение вышло на константу. Если решение не вышло на константу, то ему доверять нельзя, потому что на более мелкой сетке решение может уйти куда-то дальше.

Математика может получить какую-то оценку по нормам:  $\|u - u_{\text{точное}}\| \leq Ch^n$ . Эта оценка означает следующее: если шаг сетки будет уменьшаться, то решение будет ближе к точному в некой интегральной норме (сумма квадратов по всей области). Но инженеров интересует конкретное место – какая точность решения в месте, где может разрушиться. Зачем им интеграл по всей области?

Поэтому основной метод проверки точности решения – не в интегральной норме, а буквально в каждой точке. ANSYS показывает, как решение сходится к интегральной норме. Но потом можно проверять, как решение сводится к константе в любой точке. Это все достигается уменьшением шага  $h$ .

#### **p-метод.**

В **p-методе** лучшая точность будет достигаться за счет повышения степени полинома (увеличения количества узлов в элементе), а не за счет измельчения сетки (увеличения числа элементов). Но степень интерполяционного полинома нельзя повышать, потому что при равномерном распределении узлов при повышении степени интерполяционного полинома ошибка только растет. Поэтому в методах, которые используют более высокие степени полинома, узлы должны выбираться неравномерно. Например, в корнях полинома Чебышева, либо в корнях полинома Лежандра.

**p-метод** менее популярен, особенно в нелинейных задачах. (**p** – это степень.) В нелинейных задачах уточнение решения происходит за счет измельчения сетки.