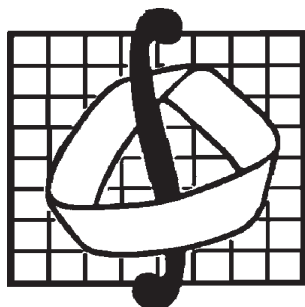


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

**Численный анализ нелинейных задач
механики композитов.**

С.В. Шешенин

Москва 2012 год

С.В. Шешенин
**Численный анализ нелинейных задач механики
композитов.**

В книге описано применение метода конечных элементов.

Для студентов, аспирантов и широкого круга специалистов, занимающихся решением нелинейных задач МДТТ.

Рецензент — д.ф.м.н.

Оглавление

Часть I	Формулировки краевых задач.	9
Глава 1.	Постановки нелинейных краевых задач МДТТ	9
1.1	Одномерное деформирование	9
1.2	Меры деформированного состояния	12
1.3	Меры напряженного состояния	18
1.4	Определяющие соотношения упругого материала . .	27
1.5	Вариационные постановки краевых задач	39
Глава 2.	Большие деформации.	49
2.1	Соотношения гиперупругого материала.	50
2.2	Экспериментальное определение материальных кон- стант.	59
2.3	Проверка положительности касательного модуля. . .	70
2.4	Смешанная вариационная постановка	71
2.5	Анизотропная упругая среда.	78
2.6	Соотношения вязко-упругого материала.	83
Глава 3.	Геометрически нелинейное деформирование с малыми деформациями.	83
3.1	Физически линейная теория упругости	86
3.2	Деформационная теория пластичности.	91
3.3	Теория течения.	101
3.4	Определяющее соотношение гипопругого материала в текущей конфигурации.	106
Глава 4.	Линеаризированное вариационное уравне- ние.	113
4.1	Линеаризация вариационного уравнения по парамет- ру нагружения в начальной конфигурации.	113
4.2	Линеаризация вариационного уравнения в текущей конфигурации. Лагранжев подход с адаптацией. . . .	123
4.3	Существование и единственность решения линеаризо- ванной задачи теории упругости.	127
4.4	Существование и единственность решения краевой за- дачи деформационной теории пластичности при ма- лых деформациях.	131
4.5	Коротационные производные.	131
4.6	Линеаризация смешанной постановки.	138
4.7	Постановки линейной теории упругости.	143

4.8	Случай следящей нагрузки.	144
Глава 5.	Итерационные методы решения нелинейных задач.	147
5.1	Одномерное деформирование	147
5.2	Неединственность решений нелинейных задач	151
5.3	Модельная задача о прощелкивании	156
5.4	Методы дискретизации по времени	165
5.5	Методы упругих решений	171
5.6	Итерационный метод СН-ЭВМ.	175
Часть II	Методы численного моделирования.	175
Глава 6.	Пространственная дискретизация методом конечных элементов.	176
6.1	Введение в МКЭ	176
6.2	Изопараметрическое преобразование	195
6.3	Численное интегрирование.	203
Глава 7.	Методы решения.	203
7.1	Метод интегрирования по параметру нагружения	203
7.2	Метод Ньютона	209
7.3	Усовершенствование метода Ньютона	211
7.4	Прослеживание процесса деформирования в закритическом состоянии.	214
Глава 8.	Моделирование пневматических шин.	219
Глава 9.	Осреднение периодических в плане пластин	219
Глава 10.	Динамическое нагружение железобетонных конструкций	219
Глава 11.	Моделирование фильтрации в деформируемой среде	219
11.1	Геометрически и физически нелинейная модель фильтрации	219
11.2	Линейная модель нестационарной фильтрации.	228
11.3	Применение метода осреднения к пористой среде.	230

Введение

Вычислительные методы стали важным инструментом для моделирования всевозможных процессов и явлений. Поэтому сложился термин - численное моделирование. При моделировании деформирования твердых тел существует нескольких этапов, например, формулировка механической или физической модели, постановка математической задачи и ее решение с использованием компьютера. Подробнее этот вопрос обсуждается в [38, 1].

Длительное время было возможным эффективно решать только обыкновенные дифференциальные уравнения. В механике деформируемого твердого тела они описывают одномерные задачи. Классическая теория сопротивления материалов в математическом плане основывается на решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановки задач в сопромате с одной стороны учитывают форму изучаемых элементов конструкций и специфику нагрузок, с другой соответствуют вычислительным возможностям, которые существовали на момент создания и расцвета этого раздела механики. Сведение двух- и трехмерных краевых задач теми или иными способами к решению обыкновенных дифференциальных уравнений было широко используемым приемом в “докомпьютерную” эпоху. Распространение электронных вычислительных машин в 60е годы прошлого столетия привело к совершенно новым возможностям, что вызвало интенсивное развитие разностных и конечно-элементных методов решения уравнений в частных производных. Впервые появилась возможность эффективно решать двух- и трехмерные краевые задачи. Вскоре возникла вычислительная механика, в частности, вычислительной механика композитов.

Разностные методы основаны на идее замены производных разностными производными. Разностные схемы, аппроксимирующие двух- или трехмерные уравнения в частных производных строились как прямое обобщение одномерных разностных уравнений. Наиболее широко разностные схемы использовались на прямоугольных (параллелепипедных) регулярных сетках. Несмотря на то, что попытки распространения разностных схем на области сложной формы делались различными авторами [45, 60, 54, 53], более универ-

сальным и более распространенным оказался метод конечных элементов (МКЭ), который с самого начала ориентировался на дискретизацию вариационных уравнений в областях, теоретически говоря, произвольной формы. В рамках чисто разностного метода затруднительно аппроксимировать граничные условия второго рода на криволинейных границах или условия сопряжения на внутренних криволинейных границах, где происходит разрыв коэффициентов уравнения. Вариационно-разностный (ВРМ) метод справляется с этими проблемами лучше, однако уступает МКЭ по универсальности. Большинство примеров использования разностного метода или ВРМ ограничено случаями относительно простых по форме областей и гладких регулярных сеток. Еще одним подходом аппроксимации является интегро-интерполяционный метод [44], берущий начало с работы [32]. В этом подходе аппроксимируется интегральное уравнение баланса, а метод близок к вариационно-разностному методу.

Аппроксимация уравнений баланса лежит в основе также метода конечных объемов, являющегося распространенным методом дискретизации в вычислительной механике жидкости. Отправной точкой метода конечных объемов является интегральная формулировка законов сохранения массы, импульса, энергии и др. Балансовые соотношения записываются для небольшого объема, а их дискретный аналог получается суммированием по всем граням выделенного объема потоков массы, импульса и т.д., вычисленных с помощью численного интегрирования. Интегральная формулировка законов сохранения возможна для ячейки любой формы, поэтому метод годится для дискретизации уравнений на нерегулярных сетках. Если квадратурные формулы, используемые для вычисления поверхностных интегралов соприкасающихся граней соседних ячеек, одинаковы, то обеспечивается консервативность численной схемы, т.е. точное соблюдение баланса в рамках используемой квадратурной формулы.

В вычислительной механике деформируемого твердого тела наибольшую популярность приобрел МКЭ, основывающийся на аппроксимации вариационных уравнений. Иногда считают, что отправной точкой этого МКЭ стал метод расчета ферм, где неизвестными являются перемещения узлов. Можно найти работы начала прошлого столетия, когда твердое деформируемое тело заменялось фермой, причем жесткости стержней подбирались так, чтобы обеспечить эквивалентность деформирования исходного тела и фермы.

Например, в [27, 28, 29] опыт на сжатие бетонного кубика моделировался с помощью такого подхода.

Важный момент, который был обнаружен как в рамках вариационно-разностного метода, так и метода конечных элементов — это необходимость использования вариационного, а не дифференциального уравнения, для получения качественной конечномерной аппроксимации исходной задачи. Необходимость использования вариационного уравнения обусловлена рядом причин. Достоинство такого подхода, например состоит в том, что осуществляется непосредственно аппроксимация уравнения, выражающего баланс энергии деформирования и работы внешних сил.

С математической точки зрения метод представляет собой вариант метода Рэлея - Ритца (или Бубнова-Галеркина). Как известно, в этих методах решается не дифференциальная задача, а эквивалентная вариационная. При этом решение ищется в виде комбинации базисных функций. Эта идея не являлась новой на момент возникновения МКЭ. Новым оказался выбор базисных функций в виде кусочно-полиномиальных функций с малым носителем. Именно этим выбором определяется успех МКЭ, поскольку каждая функция равна нулю на большей части области, что приводит в конечном счете к алгебраической системе уравнений с разреженной матрицей. Именно, системы с разреженными ленточными матрицами могут эффективно решаться прямыми и итерационными методами при весьма значительном размере системы.

Возникновение метода конечных элементов также связывают с работой [51], в которой метод трактуется как вариационный метод с пробными функциями, имеющим локальный носитель. Такая функция отлична от нуля только в окрестности каждого узла сетки размера порядка размера конечного элемента h . Исследование математических аспектов МКЭ можно найти в ряде известных работ, например в [34, 4, 58, 16] .

С другой стороны, метод получил интенсивное развитие в работах инженеров (см. например, [30, 31]). Ближе к концу шестидесятых появилась первая книга, описывающая МКЭ [17] , позже переведенная на русский язык [35]. Метод оказался чрезвычайно востребованным и уже в начале семидесятых годов была выпущена первая версия ныне популярного коммерческого пакета программ ANSYS.

Параллельное развитие как вычислительных процедур, так и вычислительной техники привело к тому, что теперь решение стан-

дартных линейных двух- и трехмерных, а тем более одномерных, краевых задач стало рутинным делом. Интересными для вычислительной механики являются физически и геометрически нелинейные задачи; контактные задачи; задачи, в которых связаны различные физические процессы и задачи, в которых имеются малые физические или геометрические параметры. Поскольку композит содержит такие параметры, то уже поэтому вычислительная механика композитов [37] является интересной и сложной областью механики деформируемого твердого тела. Общую математическую основу для определения напряженно – деформированного состояния в композитах создает метод осреднения [9, 36].

В предлагаемой книге приводятся теория и примеры приложения вычислительных процедур, применяемых для решения сложных, часто нелинейных краевых задач механики композитов. Рассматриваются, в том числе, резинокордные композиты. Большое внимание уделено постановкам и методам решения геометрически нелинейных задач. Как известно, в геометрически нелинейной теории существует целый ряд различных мер напряжений и деформаций. Отличительной особенностью изложения является введение этих мер не всех сразу, как часто принято, а по мере необходимости при изложении постановок краевых задач. Конечно, в литературе известен целый ряд фундаментальных книг по геометрически нелинейным задачам, например, [24, 15, 14, 20, 41]. Аспекты численной реализации постановок краевых задач отражены в литературе не столь широко, хотя применение МКЭ для нелинейных задач можно найти в [56, 23]. Опыт автора по численному решению задач нелинейной механики деформируемого твердого тела и, в первую очередь, опыт, связанный с трехмерным моделированием пневматических шин, послужил мотивацией для написания этой книги.

Изложение основано на нескольких курсах лекций, которые автор прочитал на механико–математическом факультете МГУ. Автор выражает благодарность студентам и аспирантам, помогавшим в создании этой книги, прежде всего О. Ходос, С. Бахметьеву, К. Скопцову, М. Козлову.

Часть I

ФОРМУЛИРОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Глава 1.

Постановки нелинейных краевых задач МДТТ

1.1. Одномерное деформирование

Рассмотрим одномерные примеры, показывающие разницу между нелинейным и линеаризованным описаниями деформирования. При деформировании стержня измеряемыми в опыте величинами являются растягивающая сила, удлинение и уменьшение поперечных размеров. Для количественного описания удлинения могут применяться различные меры. Это так называемая инженерная мера

$$\varepsilon_E = \frac{l - L}{L}$$

где L – начальная длина, l – текущая длина или логарифмическая деформация

$$\varepsilon_L = \int_L^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{L}$$

Естественно, что если деформация ε_E мала, то обе меры приближенно равны друг другу

$$\varepsilon_L = \ln(1 + \varepsilon_E) \approx \varepsilon_E$$

При этом растягивающая сила пропорциональна деформации

$$T = (EA) \varepsilon_E$$

При значительной деформации не следует надеяться на линейную зависимость между силой T и какой-либо мерой деформации. Например, можно предположить, что верно предыдущее соотношение.

Однако, не менее разумно считать, что имеет место линейная зависимость между приращением силы и мгновенной деформацией

$$dT = (EA) \frac{dl}{l}$$

Но тогда получается линейной зависимостью между силой F и деформацией ε_L .

$$T = (EA) \varepsilon_L$$

Разница же мер деформаций ε_E и ε_L уже при $\varepsilon_E = 30\%$ равна 13%. При $\varepsilon_E = 50\%$ разница ε_E и ε_L составляет 20%, а если $\varepsilon_E = 100\%$, то разница ε_E и ε_L достигает 30%.

Опыт показывает, что ни одно из рассмотренных линейных определяющих соотношение не имеет места при больших деформациях. Линейная связь между напряжением и деформацией имеет место только при малой деформации, когда между всеми мерами деформации разница отсутствует.

Рассмотрим пример похожий на пример из [56] процесса деформирования, в котором проявляется разница между геометрически нелинейным процессом деформирования и его линейризацией (см. рис. 1.1).

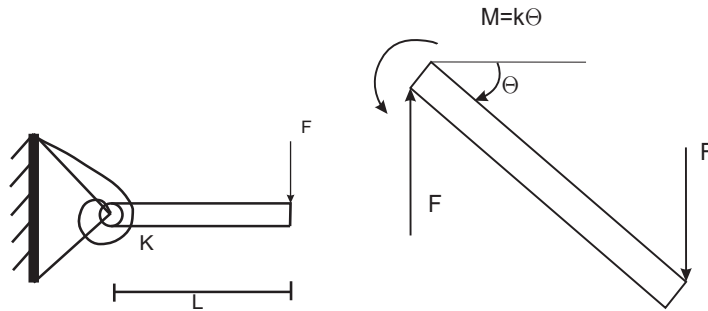


Рис. 1.1 Модельная задача о консоли

В этой задаче рассматривается консольный стержень, который является абсолютно жестким на изгиб, но может деформироваться в продольном направлении и поворачиваться относительно точки закрепления. Начальная длина консоли равна L . При повороте возникает момент, пропорциональный углу поворота Θ относительно

начального горизонтального положения $M = k\Theta$, и продольная сила T , пропорциональная удлинению $\Delta l = l - L$. Уравнения равновесия моментов и сил вдоль оси стержня в деформированном состоянии имеют вид:

$$\begin{aligned} Fl \cos \Theta &= k \Theta, \quad (l = L + \Delta l) \\ T &= (EA)\varepsilon \end{aligned}$$

Примем сначала, что $\varepsilon = \varepsilon_E$. Для уменьшения числа параметров задачи введем безразмерные величины: $\tilde{F} = FL/k$ – безразмерная сила, $\tilde{E} = ELA/k$ – безразмерный модуль Юнга. Относительно безразмерных неизвестных \tilde{F} и ε получим нелинейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{F}(1 + \varepsilon) &= \Theta / \cos \Theta \\ \tilde{F} \sin \Theta &= \tilde{E} \varepsilon \end{aligned} \quad (1.1)$$

При $\Theta \rightarrow 0$ получаем линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \Theta \\ \varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь линейная система возникает из общей нелинейной также, как линейная теория упругости получается из нелинейной при стремлении деформаций к нулю. Чтобы сравнить решения линейной и нелинейной систем, нелинейную систему нужно решить. Исключая деформацию ε , получим квадратное уравнение относительно силы \tilde{F}

$$\tilde{F}^2 + \left(\frac{\tilde{E}}{\sin \Theta} \right) \tilde{F} - \left(\frac{\tilde{E} \Theta}{\sin \Theta \cos \Theta} \right) = 0 \quad (1.3)$$

из которого находится сила \tilde{F}

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{\tilde{E}}{\sin \Theta} \right) + \sqrt{\left(\frac{\tilde{E}}{\sin \Theta} \right)^2 + 4 \frac{\tilde{E} \Theta}{\sin \Theta \cos \Theta}} \right\} \quad (1.4)$$

Разница между геометрически нелинейным решением и решением линеаризованной в "в нуле" задачи приведены на рис. ____.

Задачи механики деформируемого твердого тела можно разделить по крайней мере на следующие типы:

1. Геометрически и физически линейные.
2. Геометрически линейные и физически нелинейные.
3. Геометрически нелинейные и физически линейные.
4. Геометрически и физически нелинейные.

Геометрически и физически линейные задачи - это задачи линейной теории упругости, где описание деформирования полностью линеаризовано относительно начального (обычно нулевого) напряженно-деформированного состояния, а определяющим соотношением является закон Гука. Действительно, для многих материалов линейное определяющее соотношение выполняется для столь малых деформаций, при которых геометрическая линеаризация вполне оправдана. Например, для стали закон Гука нарушается при деформациях около половины процента. При превышении предела упругости связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной, однако еще может использоваться линейная теория деформирования. При этом возникают задачи второго типа. Примером служит классическая теория пластичности. Тонкие тела могут деформироваться так, что собственно деформации являются малыми, но изменение формы тела оказывается весьма заметным. При этом определяющим соотношением может служить закон Гука, но деформирование описывается нелинейными соотношениями. Так возникают задачи третьего типа. Этому классу принадлежат задачи изгиба тонких и гибких балок, пластинок и т.п. Геометрически и физически нелинейные задачи возникают при моделировании деформирования, например, резиноподобных материалов, называемых эластомерами.

1.2. Меры деформированного состояния

В этом параграфе кратко излагается теория нелинейного деформирования. Безусловно, подобное описание можно найти во многих книгах, например [15, 24, 56]. Однако обозначения, используемые для одних и тех же понятий и величин, применяются разные. Поэтому для удобства читателя ниже определяются меры деформации, которые используются далее и поясняются обозначения.

Прежде всего, приведем используемое ниже определение двойного скалярного произведения тензоров, поскольку оно в литературе

вводится по-разному. Пусть \vec{k}_i обозначают вектора декартова базиса. Обычное скалярное произведение двух тензоров второго ранга определяется всегда одинаково

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = a_{im} \vec{k}_i (\vec{k}_m \cdot \vec{k}_n) \vec{k}_j b_{nj} = a_{in} b_{nj} \vec{k}_i \vec{k}_j$$

Другими словами, скалярно умножаются друг на друга вектора диад, расположенные рядом. Такое же правило действует и при скалярном умножении тензоров разных рангов. Если \vec{e}_i – вектора локального базиса какой-либо криволинейной системы координат ξ^i , $i = 1, 2, 3$ и

$$\underset{\sim}{a} = a_{im} \vec{e}^i \vec{e}^m = a^{im} \vec{e}_i \vec{e}_m, \quad \underset{\sim}{b} = b_{nj} \vec{e}^n \vec{e}^j = b^{nj} \vec{e}_n \vec{e}_j$$

то аналогично

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = a_{im} b_{nj} \vec{e}^i (\vec{e}^m \cdot \vec{e}^n) \vec{e}^j = a_{im} g^{mn} b_{nj} \vec{e}^i \vec{e}^j = a_i^n b_{nj} \vec{e}^i \vec{e}^j$$

Также скалярное произведение выражается с помощью взаимно обратных якобиевых матриц g^{ij} и $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = g_{mn} a^{im} b^{nj} \vec{e}_i \vec{e}_j = g^{mn} a_{im} b_{nj} \vec{e}^i \vec{e}^j$$

Однако для двойного скалярного произведения используются различные определения. В [24, 10] двойное скалярное произведение записывается в виде

$$\underset{\sim}{a} : \underset{\sim}{b} = g^{ij} g^{mn} a_{im} b_{nj}$$

или в декартовой системе координат

$$\underset{\sim}{a} : \underset{\sim}{b} = a_{im} b_{mi}$$

Действительно,

$$\underset{\sim}{a} : \underset{\sim}{b} = a_{im} \vec{e}^i \vec{e}^m : b_{nj} \vec{e}^n \vec{e}^j = a_{im} b_{nj} (\vec{e}^m \cdot \vec{e}^n) (\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j) = g^{ij} g^{mn} a_{im} b_{nj}$$

Однако в другой части литературы (см., например [56]) двойное скалярное произведение определяется как $\underset{\sim}{a} : \underset{\sim}{b} = \text{trace}((\underset{\sim}{b})^T \cdot \underset{\sim}{a})$, что в декартовой системе координат дает $\underset{\sim}{a} : \underset{\sim}{b} = a_{ij} b_{ij}$. Мы будем использовать именно это определение.

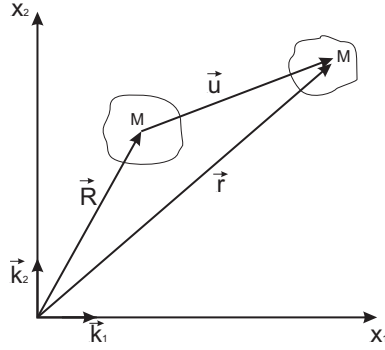


Рис. 1.2 Перемещение материальной частицы M деформируемой среды.

Движение материальной частицы деформируемой среды схематично показано на рис. 1.2. Радиус-вектор \vec{r} материальной частицы (материальной точки) в момент t равен радиусу-вектору той же точки \vec{R} в начальный момент t_0 плюс перемещение \vec{u} : $\vec{r} = \vec{R} + \vec{u}$. То же в декартовой системе координат выглядит так $x_i = X_i + u_i$ и $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$, $u_i = u_i(X_1, X_2, X_3, t)$. Здесь круглые x обозначают декартовы координаты одной и той же материальной точки в текущий момент времени t (в текущей области или конфигурации), а прямые X – в начальный момент t_0 (в начальной области или конфигурации): $\vec{r} = x_i \vec{k}_i$ (или $\vec{x} = x_i \vec{k}_i$), а $\vec{R} = X_i \vec{k}_i$ (или $\vec{X} = X_i \vec{k}_i$). Формулы $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ при фиксированном t означают, что начальные координаты X_i являются криволинейными координатами для радиус-вектора в текущий момент t .

Для определения мер конечных деформаций удобно вводить криволинейные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 как для текущего состояния, так и начального: $\vec{X} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, тогда $\vec{x} = \vec{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$. Координаты ξ^i (см. рис. 1.2) (в частном случае X_i), называемые лагранжевыми, не изменяются для материальной частицы во время движения. Локальные базисы криволинейной системы координат определяются формулами

$$\vec{E}_i = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i}, \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \quad (1.5)$$

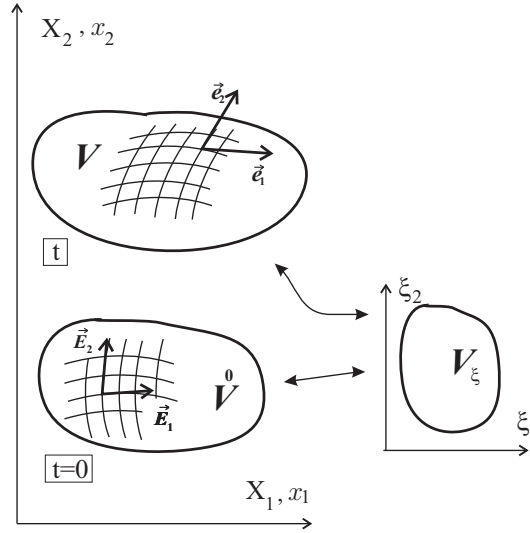


Рис. 1.3 Криволинейные лагранжевы координаты.

Диадные базисы имеют вид: $\vec{E}_i \vec{E}_j \equiv \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j$ – базис криволинейной системы координат ξ^i , определенный в каждой точке области V , занимаемой телом в начальный момент t_0 ; $\vec{e}_i \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ – базис системы координат ξ^i , в области V , занимаемой телом в текущий момент t ; $\vec{k}_i \vec{k}_j = \vec{k}_i \otimes \vec{k}_j$ – декартов диадный базис. Метрический тензор представляется в виде

$$\underset{\sim}{I} \equiv \underset{\sim}{I}_2 = \delta_{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j = G^{ij} \vec{E}_i \vec{E}_j = g^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

где

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad G_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j, \quad G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i$$

а δ_{ij} - символы Кронекера. При описании мер деформированного состояния, прежде всего, возникает тензор, называемый градиентом деформации (deformation gradient) [56]. Последний термин, конечно, не следует понимать как градиент какой-либо меры деформации. Данный тензор является градиентом радиус-вектора и в декартовой системе координат определяется в виде

$$\underset{\sim}{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \quad (1.6)$$

Определим градиент в начальной конфигурации произвольного вектора \vec{a} , следуя [56]

$${}^0\nabla \vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^i} \vec{E}^i \quad (1.7)$$

Хотя ∇ является вектором, мы не будем использовать стрелку, поскольку далее всегда ∇ используется только для обозначения градиента. В декартовых координатах последнее выражение представляется так

$${}^0\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \quad (1.8)$$

Часто частную производную для сокращения записи будем обозначать запятой, если из контекста понятно, по какой переменной происходит дифференцирование: $\frac{\partial a_i}{\partial X_j} = a_{i,j}$.

В частности, градиент в начальной конфигурации радиус-вектора \vec{r} из текущей конфигурации равен

$${}^0\nabla \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \vec{E}^i = \vec{e}_i \vec{E}^i \quad (1.9)$$

В декартовых координатах

$${}^0\nabla \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j$$

поэтому градиент деформации также выражается в виде $\tilde{F} = \vec{e}_i \vec{E}^i$. Имеющееся в литературе различие в определении градиента радиус-вектора связано с тем, что градиент любого вектора \vec{a} в части отечественной литературы (например, [24, 40]) определяется в виде (в данном случае речь идет о градиенте в начальной конфигурации)

$${}^0\nabla \vec{a} = \vec{E}_i \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^i} \quad (1.10)$$

В декартовых координатах последнее выражение представляется так

$${}^0\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_j}{\partial X_i} \vec{k}_i \vec{k}_j \quad (1.11)$$

Если подставить $\vec{a} = \vec{r}$, то получится тензор, транспонированный по отношению к градиенту деформации (1.6). Соответственно, в части

отечественной литературы градиент деформации определяется согласно определению (1.10). В дальнейшем мы будем использовать определения (1.7), (1.8) в качестве определения градиента вектора (в том числе (1.9) для градиента радиус вектора).

В соответствии с определением (1.7) градиент в текущей конфигурации вектора \vec{a} определяем в виде

$$\nabla \vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^i} \vec{e}^i \quad (1.12)$$

В декартовом базисе последнее определение (1.12) приобретает вид

$$\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \quad (1.13)$$

Тензор F_{\sim} позволяет определить как изменился материальный отрезок $d\vec{X}$ в результате деформирования

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \frac{d}{d\xi} \vec{x}(\vec{X} + \xi d\vec{X})|_{\xi=0} = \frac{\partial(x_i \vec{k}_i)}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial(x_i \vec{k}_i)}{\partial X_j} (\vec{k}_j \cdot d\vec{X}) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j}_{F_{\sim}} \cdot d\vec{X} = F_{\sim} \cdot d\vec{X} \end{aligned}$$

В результате получили, что $d\vec{x} = F_{\sim} \cdot d\vec{X}$. Здесь использован дифференциал по направлению (дифференциал в смысле Гато)

$$D\vec{x}(\vec{X}, d\vec{X}) = \frac{d}{d\xi} \vec{x}(\vec{X} + \xi d\vec{X})|_{\xi=0} \quad (1.14)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \quad (1.15)$$

то тензор F_{\sim} преобразует векторы локального базиса \vec{E}_i в начальной конфигурации в соответствующие векторы \vec{e}_i базиса в актуальной конфигурации

$$\vec{e}_i = F_{\sim} \cdot \vec{E}_i \quad (1.16)$$

Для количественного описания деформирования помимо \tilde{F} можно ввести множество различных мер деформаций. Мера Коши-Грина определяется соотношением

$$\tilde{C} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} = g_{ij} \vec{E}^i \vec{E}^j, \quad (1.17)$$

В декартовых координатах

$$\tilde{C} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \vec{k}_j \vec{k}_i \cdot \frac{\partial x_m}{\partial X_n} \vec{k}_m \vec{k}_n = \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \frac{\partial x_m}{\partial X_n} \vec{k}_j \vec{k}_n = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j$$

Тензором деформаций Лагранжа-Грина называется близкая по смыслу мера деформации, задаваемая следующим образом

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}(\tilde{C} - \tilde{I}) = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \vec{E}^i \vec{E}^j, \quad (\tilde{I} = G_{ij} \vec{E}^i \vec{E}^j) \quad (1.18)$$

где $\tilde{I} \equiv \tilde{I}_2$ — единичный тензор второго ранга, являющийся метрическим тензором в евклидовом пространстве (компоненты тензора \tilde{E} в литературе обозначаются также как ε_{ij}^0). При больших деформациях использование мер (1.17) и (1.18) эквивалентно друг другу. Использование тензора (1.18) имеет преимущество при малых деформациях, поскольку позволяет линеаризировать формулы относительно этого тензора. В декартовой системе координат $\vec{E}_i = \vec{k}_i$ и $G_{ij} = \delta_{ij}$, $g_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j}$, поэтому выражение (1.18) приобретает вид $E_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij})$.

В случае одномерного деформированного состояния тензор деформаций Лагранжа-Грина имеет единственную ненулевую компоненту ε_G :

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{L} \right)^2 - 1 \right]$$

Если деформация ε_E мала, то деформация ε_G приближенно равна ε_E

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l-L}{L} \right) \left(\frac{l+L}{L} \right) \approx \frac{l-L}{L} \frac{1}{2} \frac{2L}{L} \approx \varepsilon_E$$

1.3. Меры напряженного состояния

Тензор Коши. Как известно из курса механики сплошной среды вектор внутренних сил \vec{S} , действующий на материальную площадку с нормалью \vec{n} выражается соотношением

$$\vec{S}(\vec{n}) = \vec{S}(\vec{e}^i)n_i \quad (1.19)$$

где $\vec{S}^i = \vec{S}(\vec{e}^i)$ вектор внутренних сил, действующий на координатную площадку, перпендикулярную вектору \vec{e}^i (вектором внутренних сил называется вектор силы, отнесенный к площади площадки, на которую он действует). Вектора \vec{S}^i можно разложить по векторам локального базиса \vec{e}_i (1.5)

$$\vec{S}^i = \sigma^{ij}\vec{e}_j \quad (1.20)$$

и определить тензор напряжений Коши $\underset{\sim}{\sigma}$, называемый также тензором истинных напряжений, следующим образом

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sigma^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \quad (1.21)$$

Относительно встречающихся в литературе обозначений нужно иметь в виду, что тензор $\underset{\sim}{\sigma}$ часто обозначают как $\underset{\sim}{T}$. В декартовом базисе компонента σ_{ij} равна напряжению, действующему на площадку, перпендикулярную \vec{k}_i по направлению \vec{k}_j . Вектор внутренних сил, действующей на площадку с нормалью \vec{n} вычисляется посредством скалярного умножения тензора напряжений Коши на единичный вектор нормали

$$\vec{S}^n = \vec{S}(\vec{n}) = \vec{S}^i n_i = (\sigma^{ij}\vec{e}_j)n_i = \underbrace{\sigma^{ij}\vec{e}_j\vec{e}_i}_{\underset{\sim}{\sigma}} \cdot \vec{n} = \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (1.22)$$

Уравнение равновесия внутренних сил \vec{S}^n и массовых сил \vec{f} , действующих на произвольный материальный объем V с границей Σ ,

$$\int_{\Sigma} \vec{S}^n d\Sigma + \int_V \rho \vec{f} dV = 0 \quad (1.23)$$

при помощи преобразования первого интеграла посредством (1.22) и теоремы Гаусса-Остроградского приводит к дифференциальному уравнению равновесия

$$\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\sigma} + \rho \vec{f} = 0, \quad \vec{x} \in V \quad (1.24)$$

Как хорошо известно, уравнение равновесия моментов просто

$$\int_{\Sigma} \vec{x} \times \vec{S}^n d\Sigma + \int_V \vec{x} \times \rho \vec{f} dV = 0$$

означает симметрию тензора напряжений Коши

$$\sigma_{\sim}^T = \sigma_{\sim} \quad (1.25)$$

Если силами инерции пренебречь нельзя, то необходимо использовать уравнения движения. Интегральное уравнение движения

$$\int_{\Sigma} \vec{S}^n d\Sigma + \int_V \rho \vec{f} dV = \int_V \rho \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} dV \quad (1.26)$$

которое приводит к следующему дифференциальному уравнению

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma_{\sim} + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}, \quad \vec{x} \in V \quad (1.27)$$

Дифференциальные уравнения равновесия или движения выполняются в области V . На ее границе будем рассматривать два типа граничных условий. На части границы Σ_1 заданы нулевые перемещения, а на оставшейся части Σ_2 заданы поверхностные силы

$$\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \sigma_{\sim} \cdot \vec{n}|_{\Sigma_2} = \vec{S} \quad (1.28)$$

Уравнение (1.24) сформулировано в инвариантной форме, и может быть стандартным образом записано в любой системе координат при использовании соответствующих символов Кристоффеля в выражениях ковариантных производных. Наиболее простой вид уравнения имеют, конечно, в декартовых координатах

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad \vec{x} \in V$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i$$

Таким образом, дифференциальные уравнения сформулированы в области V , которая неизвестна до решения задачи. То же касается неизвестной границы Σ_2 . Это неудобство может быть преодолено несколькими путями. Первый способ состоит в отображении неизвестной области V на какую-нибудь известную область, например,

начальную область $\overset{0}{V}$ и преобразовании уравнений. Такое преобразование называется преобразование Пиолы [46, 18]. При отображении граница Σ отображается на границу $\overset{0}{\Sigma}$. Система координат (декартова X_i или криволинейная ξ_i), с помощью которой параметризуется область $\overset{0}{V}$, является криволинейной системой координат в области V , занимаемой деформируемым телом в текущий (или актуальный) момент t . Такой подход называется полностью лагранжевым (TL - Total Lagrangian) [43], а система координат лагранжевой.

Первый тензор Пиолы – Кирхгофа. Осуществим преобразование к начальной области. При этом используется уравнение сохранения массы, которое выражается следующим соотношением

$$\rho dV = \overset{0}{\rho} d\overset{0}{V} \quad (1.29)$$

Поэтому интегралы в (1.23) или (1.26), содержащие массовую силу и ускорение, преобразуются просто

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\rho} \vec{f} d\overset{0}{V}, \quad \int_V \rho \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} dV = \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\rho} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} d\overset{0}{V}$$

Преобразование первого члена в (1.23) или (1.26) осуществляется с помощью формулы [38] преобразования координатных площадок

$$d\Sigma n_\alpha = J (d\overset{0}{\Sigma} N_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3$$

где J есть якобиан отображения области V на область $\overset{0}{V}$

$$J = \det \tilde{F}, \quad \left(J = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \right) \quad (1.30)$$

В результате получаем

$$\int_\Sigma \vec{S}^n d\Sigma = \int_\Sigma \vec{S}^i n_i d\Sigma = \int_{\overset{0}{\Sigma}} \vec{S}^i N_i J d\overset{0}{\Sigma} = \int_{\overset{0}{\Sigma}} \vec{S}^N J d\overset{0}{\Sigma} \quad (1.31)$$

Компоненты P^{ij} тензора Пиолы, называемого также первым тензором Пиолы-Кирхгофа, определяется с помощью разложения векторов внутренних напряжений \vec{S}^i по векторам локального базиса \vec{E}_i в начальной области

$$J \vec{S}^i = \Pi^{ij} \vec{E}_j \quad \Rightarrow \quad J \vec{S}^N = \Pi^{ij} \vec{E}_j N_i$$

Первый тензор Пиолы-Кирхгофа определяется соотношением

$$\underset{\sim}{P} = \Pi^{ji} \vec{E}_i \vec{E}_j \quad (1.32)$$

Его мы для краткости будем называть также просто тензором Пиолы. Тензор Пиолы не следует путать с тензором, определяемым в виде

$$\underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{P}^T = \Pi^{ij} \vec{E}_i \vec{E}_j$$

Последний тензор иногда называют тензором Лагранжа [10]. Ниже записан вектор внутренних напряжений \vec{S}^n с помощью тензоров напряжений Коши и Пиолы

$$\underset{\sim}{P} \cdot \vec{N} = \Pi^{ji} \vec{E}_i \vec{E}_j \cdot \vec{N} = \Pi^{ji} \vec{E}_i N_j = J \vec{S}^j N_j = J \vec{S}^{\vec{N}}$$

$$\underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot \vec{n} = \sigma^{ij} \vec{e}_i n_j = \sigma^{ji} \vec{e}_i n_j = \vec{S}^j n_j = \vec{S}^{\vec{n}}$$

причем $\underset{\sim}{P} \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \underset{\sim}{\Pi}$. В отличие от тензора напряжений Коши тензоры $\underset{\sim}{\Pi}$ и $\underset{\sim}{P}$ являются несимметричными. В итоге из (1.31) получаем

$$\int_{\underset{\sim}{\Sigma}}^0 \vec{N} \cdot \underset{\sim}{\Pi} d\underset{\sim}{\Sigma} = \int_{\underset{\sim}{\Sigma}}^0 \underset{\sim}{P} \cdot \vec{N} d\underset{\sim}{\Sigma} = \int_{\underset{\sim}{\Sigma}}^0 \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{n} d\underset{\sim}{\Sigma} \quad (1.33)$$

и, следовательно,

$$\int_V^0 \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\Pi}^T d\underset{\sim}{V} = \int_V^0 \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{P} d\underset{\sim}{V} = \int_V^0 \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\sigma} dV$$

Поэтому дифференциальные уравнение движения (равновесия) относительно тензора Пиолы выглядят так

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{\rho} \vec{f} = \underset{\sim}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad \left(\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{\rho} \vec{f} = 0 \right), \quad \vec{x} \in \underset{\sim}{V} \quad (1.34)$$

Все величины в (1.34) являются функциями лагранжевых криволинейных координат ξ^i (в частном случае, декартовых координат X_i).

Уравнения сформулированы в заданной области $\underset{\sim}{V}$. В индексной записи уравнения выглядят так

$$\underset{\sim}{\nabla}_j P^{ij} + \underset{\sim}{\rho} f^i = \underset{\sim}{\rho} \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad \left(\underset{\sim}{\nabla}_j P^{ij} + \underset{\sim}{\rho} f^i = 0 \right), \quad \vec{x} \in \underset{\sim}{V}$$

Например, в декартовых координатах получаем уравнения движения внешне похожее на уравнение, которое имеет место в геометрически линейной теории

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + {}^0 \rho f_i = {}^0 \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

В декартовых координатах связь между объемными и поверхностным интегралами, а также операция градиента записываются в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} {}^0 P \cdot \vec{N} d\Sigma &= \int_{\Sigma} P_{ij} N_j \vec{k}_i d\Sigma = \int_V {}^0 \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} \vec{k}_i dV \\ {}^0 \vec{\nabla} \cdot P &= \frac{\partial (P^{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j)}{\partial X_m} \cdot \vec{k}_m = \frac{\partial P^{ij}}{\partial X_j} \vec{k}_i \end{aligned}$$

Важно найти соотношение, связывающее тензоры напряжений Коши $\vec{\sigma}$ и Пиолы P . Это может быть сделано следующим образом. Действительно, из

$$J \vec{S}^i N_i = J \sigma^{ij} \vec{e}_j N_i = J \sigma^{ij} \vec{e}_j \vec{E}_i \cdot \vec{N} = P \cdot \vec{N}$$

Следует, что $P = J \sigma^{ij} \vec{e}_j \vec{E}_i$. Учитывая формулу (1.16)

$$\vec{e}_j = F \cdot \vec{E}_j = \vec{E}_j \cdot F^T$$

и вытекающее из нее соотношение

$$\vec{E}_j = \vec{e}_j \cdot (F^T)^{-1} = \vec{e}_j \cdot (F^{-1})^T = \vec{e}_j \cdot (F^{-T})$$

получаем

$$P = J \underbrace{\sigma^{ij} \vec{e}_j \vec{e}_i}_{\vec{\sigma}} \cdot F^{-T} = J \vec{\sigma} \cdot F^{-T}$$

Следовательно, связь между уже введенными тензорами напряжений устанавливается следующими формулами

$$P = J \vec{\sigma} \cdot F^{-T}, \quad \vec{\sigma} = J^{-1} P \cdot F^T, \quad \Pi = P^T \quad (1.35)$$

Формулировка граничного условия на части поверхности Σ_2 (или ${}^0 \Sigma_2$) является более сложной задачей, чем в геометрически линейной

теории упругости. Граничные условия на Σ_2 текущей области или Σ_2^0 начальной области можно сформулировать только, если известно, как нагрузка по величине и направлению зависит от деформирования поверхности. Пусть \vec{S} есть вектор поверхностной силы в момент t , который действует на границу области Σ_2 . В общем случае вектор \vec{S} зависит от деформирования границы Σ , т.е. правая часть в граничном условии также, как и левая, зависит от решения \vec{u} : $\vec{S} = \vec{S}(\vec{u}, t)$.

Чтобы конкретизировать правую часть граничного условия, делают предположения разной степени реалистичности. Предположим, что вектор внешней нагрузки зависит известным образом от координат и времени, т.е. $\vec{S} = \vec{S}(\vec{x}, t)$. Однако, в этом случае правая часть граничного условия, сформулированного в текущей конфигурации, задана как функция координат и времени

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{S}(\vec{x}, t)$$

То же условие, сформулированное на границе начальной области, выглядит сложнее. Действительно, используя снова преобразование Пиолы (1.33), получаем

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} d\Sigma = P \cdot \vec{N} d\Sigma^0$$

Следовательно, в начальной конфигурации, граничное условие выглядит следующим образом

$$P \cdot \vec{N}|_{\Sigma_2^0} = J_\Sigma(\vec{u}) \vec{S}(\vec{x}, t)$$

где отношение $J_\Sigma = d\Sigma/d\Sigma^0$ зависит от перемещения \vec{u} , если только изменением площади поверхности нельзя пренебречь.

Можно сделать иное предположение, при котором правая часть граничного условия, сформулированного в начальной области, не зависит от вектора перемещения. Именно, предположим, что внешняя нагрузка такая, что вектор $\vec{S}^0 = \vec{S} d\Sigma/d\Sigma^0$ является заданной функцией времени и координат. Такой тип нагружения называется "мертвым". Следовательно, получаем из предыдущего соотношения

$$P \cdot \vec{N}|_{\Sigma_2^0} = \vec{S}^0(\vec{X}, t) \quad (1.36)$$

где вектор

$$\vec{S}^0 = J_\Sigma \vec{S}$$

известен как функция времени и координат. Это пример граничного условия, сформулированного в начальной области, когда правая часть известна до решения задачи.

Конечно, \vec{S}^0 в (1.36) не является поверхностной нагрузкой в начальный момент $t = 0$, а преобразованием вектора \vec{S} к начальной конфигурации. Как уже отмечалось, в случае, если внешняя нагрузка не является "мертвой", то вектор \vec{S}^0 зависит от деформирования поверхности границы области и поэтому выражается через вектор перемещения \vec{u} , т.е. $\vec{S}^0 = \vec{S}^0(\vec{u}, t)$. Последнее верно, если даже вектор \vec{S} не зависит от перемещения \vec{u} . Поэтому в общем случае, \vec{S}^0 не совсем точно называть правой частью граничного условия, поскольку она также зависит от решения, как и левая часть.

Рассмотрим теперь граничное условие в случае, когда на границе действует внешнее давление $p(t)$ – наиболее распространенный тип следящей нагрузки. В таком случае граничное условие на границе актуальной области имеет вид

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}|_{\Sigma_2} = -p(t)\vec{n}$$

Правая часть в последнем уравнении зависит от вектора перемещения, поскольку вектор внешней нормали зависит от изменения границы области в процессе деформирования области V . На границе начальной области это условие записывается так

$$\vec{P} \cdot \vec{N}|_{\Sigma_2} = -p(t)\vec{n}J_\Sigma$$

Его можно переписать в виде, похожем на (1.36)

$$\vec{P} \cdot \vec{N}|_{\Sigma_2} = \vec{S}^0(\vec{u}, t) \quad (1.37)$$

если ввести теперь

$$\vec{S}^0 = -p(t)\vec{n}J_\Sigma$$

Правая часть граничного условия (1.37) с помощью вектора \vec{S}^0 просто маскирует сложность граничного условия в случае следящей нагрузки в виде давления.

Итак, дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия, записанные относительно тензора Пиолы, выглядят следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{P} + \overset{0}{\rho} \vec{f} = 0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{V} \\ \underset{\sim}{P} \cdot \vec{N} = \vec{S}^0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{\Sigma}_2 \\ \vec{u} = 0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{\Sigma}_1 \end{array} \right. \quad (1.38)$$

Для сравнения запишем эти же уравнения относительно тензора напряжений Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underset{\sim}{\sigma} + \rho \vec{f} = 0, \quad \vec{x} \in V \\ \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{S}, \quad \vec{x} \in \Sigma_2 \\ \vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (1.39)$$

Если в этих системах все функции зависят от координат ξ^i и t , то можно сказать, что уравнения (1.38) и (1.39) сформулированы в одной и же области V_ξ , на которую отображаются начальная $\overset{0}{V}$ и текущая V области соответственно с помощью криволинейных координат ξ^i .

Уравнения (1.38) и (1.39) справедливы при квазистатическом процессе деформирования. В случае динамической задачи в уравнениях движения в правых частях следует добавить ускорения $\overset{0}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ и $\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ соответственно. Если рассматривать тензор напряжений Лагранжа $\underset{\sim}{\Pi}$, транспонированный к $\underset{\sim}{P}$, то уравнения (1.38) переписываются так

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\Pi}^T + \overset{0}{\rho} \vec{f} = 0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{V} \\ \vec{N} \cdot \underset{\sim}{\Pi} = \vec{S}^0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{\Sigma}_2 \\ \vec{u} = 0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{\Sigma}_1 \end{array} \right.$$

В декартовых координатах уравнения равновесия и граничные условия на $\overset{0}{\Sigma}_2$ в начальной конфигурации выглядят так

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial X^j} + \overset{0}{\rho} f_i = 0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{V}, \quad P_{ij} N_j = S_i^0, \quad \vec{X} \in \overset{0}{\Sigma}_2$$

или

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial X^i} + \rho f_j = 0, \quad \vec{X} \in V, \quad \Pi_{ij} N_i = S_j^0, \quad \vec{X} \in \Sigma_2$$

Уравнения равновесия и граничные условия Σ_2 в декартовых координатах, но в текущей конфигурации имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + \rho f_i = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad \sigma_{ij} n_j = S_i, \quad \vec{x} \in \Sigma_2$$

Рассмотренных мер напряжений и деформаций достаточно, чтобы сформулировать определяющие соотношения нелинейно-упругого тела, что и будет сделано в следующем параграфе. Это позволит сформулировать сначала краевую задачу, а затем вариационное уравнение. В конце текущего параграфа сравним введенные меры напряжений на примере простейшего одномерного напряженного состояния в задаче растяжения стержня.

1.4. Определяющие соотношения упругого материала

Упругий потенциал. Широко распространенной является модель гиперупругого материала, т.е. такого, для которого существует потенциал тензора напряжений. Для введения упругого потенциала начнем рассмотрение с работы поверхностных сил dA^Σ на приращении перемещения $d\vec{u}$

$$dA^\Sigma = \int_\Sigma \vec{S}^n \cdot d\vec{u} d\Sigma = \int_\Sigma \vec{S}^i n_i \cdot d\vec{u} d\Sigma = \int_\Sigma (\sigma^{ij} v_i dt) n_j d\Sigma$$

где $\vec{v} = \dot{\vec{u}} = \partial \vec{u} / \partial t$ есть скорость материальной точки. Преобразование выражения работы dA^Σ можно продолжить

$$dA^\Sigma = \int_V \sigma^{ij}{}_{,j} v_i dt dV + \int_V \sigma^{ij} v_{i,j} dt dV = - \underbrace{\int_V \rho F^i v_i dt dV}_{dA^V} + \int_V \sigma^{ij} v_{i,j} dt dV$$

где запятой обозначена ковариантная (в декартовой системе координат - частная) производная в актуальной конфигурации. Следовательно,

$$dA^\Sigma + dA^V = \int_V \sigma^{ij} v_{i,j} dt dV \quad (1.40)$$

Последнее соотношение обычно трактуют так, что работа поверхностных и массовых сил, совершенная по отношению к деформируемой среде в области V равна работе напряжений в этой области. Последнюю обозначают как работу внутренних сил

$$dA^{int} = \int_V \sigma^{ij} v_{i,j} dt dV \quad (1.41)$$

Нужно заметить, что область V может быть как всей областью, занимаемой деформируемой средой, так и произвольным объемом внутри, например, материальной частицей.

Уравнения притока тепла к частице имеет вид

$$\rho \dot{U} = \sigma^{ij} v_{i,j} + \rho \dot{Q} \quad (1.42)$$

и означает, что приращение внутренней энергии dU равно работе внутренних напряжений и притоку тепла dQ . Через v_{ij} обозначены компоненты тензора скоростей деформаций

$$v_{\sim} = 1/2(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \quad (1.43)$$

обозначаемого в иностранной литературе часто как \tilde{d} . В частном случае адиабатического процесса: $dQ = 0$, поэтому $\rho dU = \sigma^{ij} dv_{ij}$. Заметим, что здесь левая часть не является полным дифференциалом какой-либо функции.

Для определения потенциала напряжений снова применим преобразование Пиолы

$$\begin{aligned} dA^\Sigma &= \int_\Sigma \vec{S}^i n_i \cdot d\vec{u} d\Sigma = \int_\Sigma \underbrace{J \vec{S}^i N_i}_{\vec{P} \cdot \vec{N}} \cdot (d\vec{u}) d\Sigma = \\ &= \int_\Sigma (d\vec{u} \cdot \vec{P} \cdot \vec{N}) d\Sigma = \int_\Sigma P^{ij} N_j du_i d\Sigma = \\ &= \int_V P^{ij}{}_{,j} du_i dV + \int_V P^{ij} du_{i,j} dV \end{aligned}$$

Учитывая уравнение равновесия

$$P^{ij}{}_{,j} + \rho F^i = 0$$

получим

$$dA^{int} = dA^\Sigma + dA^V = \int_V P^{ij} du_{i,j} dV \quad (1.44)$$

Естественно, что запятая в соотношениях выше обозначает ковариантную производную, определенную в начальной конфигурации. Уравнение (1.44), записанное в начальной конфигурации, является аналогом соотношения (1.40), записанного в актуальном состоянии.

Интегрируя по области уравнение (1.42) и, используя уравнение (1.40), получим интегральную форму уравнение (1.42)

$$\int_V \rho dU dV = dA^\Sigma + dA^V + \int_V \rho dQ dV$$

Преобразование к начальной области с учетом предыдущего соотношения дает

$$\int_V^0 \rho dU dV = \int_V^0 P^{ij} du_{i,j} dV + \int_V^0 \rho dQ dV$$

Поскольку последнее уравнение верно не только для всей области, но и для любого объема внутри, то следствием является дифференциальное уравнение притока тепла, сформулированное для начальной конфигурации

$$\rho^0 dU = P^{ij} du_{i,j} + \rho^0 dQ \quad (1.45)$$

Для определения упругого потенциала в изотермическом случае необходимо рассматривать вместо внутренней энергии U свободную энергию $\Psi = U - TS$, где S есть энтропия, определяемая из следующего соотношения, верного для упругой, т.е. обратимой среды

$$TdS = dQ \quad (1.46)$$

Из соотношений (1.45), а также соотношения

$$dU = d\Psi + dTS + TdS$$

следует уравнение

$$\rho^0 d\Psi + \rho^0 SdT + \rho^0 TdS = P^{ij} du_{i,j} + \rho^0 dQ$$

При учете обратимости упругой среды (1.46) последнее уравнение упрощается

$$\rho^0 d\Psi + \rho^0 SdT = P^{ij} du_{i,j} \quad (1.47)$$

Таким образом, для изотермического процесса $dT = 0$ существует потенциал напряжений, называемый упругим потенциалом. Действительно, из равенства

$$\overset{0}{\rho} d\Psi = P^{ij} du_{i,j}$$

следует, что функция (упругий потенциал)

$$W = \overset{0}{\rho} \Psi, \quad (dW = \overset{0}{\rho} d\Psi = d(\overset{0}{\rho} \Psi))$$

является потенциалом напряжений, как видно из следующего уравнения

$$P^{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}}, \quad (dW = P^{ij} du_{i,j}) \quad (1.48)$$

где $W = W(u_{i,j})$.

Итак, для изотермических процессов существует упругий потенциал. Такой материал называется гиперупругим в отличие от просто упругого материала, для которого функция $P^{ij} = P^{ij}(u_{i,j})$ не является потенциальной. Потенциал у тензора Пиолы существует и для адиабатических процессов как это следует из (1.45). Именно, при $dQ = 0$ получаем, что если определить упругий потенциал в виде $W = \overset{0}{\rho} U$, то снова получим (1.48). Для гиперупругого материала приращение работы внутренних напряжений выражается через дифференциал упругого потенциала

$$dA^{int} = \int_V P^{ij} du_{i,j} d\overset{0}{V} = \int_V dW d\overset{0}{V} \quad (1.49)$$

Мощностью внутренних напряжений (внутренних сил) N называется предел отношения приращения работы внутренних напряжений к соответствующему приращению времени.

$$N = \int_V P^{ij} \dot{u}_{i,j} d\overset{0}{V} \quad (1.50)$$

Таким образом, определяющее соотношение гиперупругого материала имеет вид

$$\underset{\sim}{P} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{F}}, \quad \left(dW = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{F}} : d\underset{\sim}{F} \right) \quad (1.51)$$

Меры напряжений и деформаций, с помощью которых можно вычислить мощность внутренних напряжений, называются энергетически сопряженными. Из (1.51) следует, что таковыми являются тензор Пиолы и градиент вектора перемещений или градиент деформации \tilde{F} .

Тензор напряжений Пиолы возник при отображении текущей (или актуальной) области тела на начальную. Естественно, что отображение можно осуществить и на какую-нибудь другую область. Идея использования отображения весьма плодотворна и часто используется не только в механике, но и в численных методах. Она, например используется при построении параметрических конечных элементов [57]. При этом не вся область, а каждый малый элемент, на которые делится область, отображается на стандартную область. В двумерном случае стандартной областью является квадрат, а в трехмерном – куб. Идея отображения всей области или ее подобласти (не малой) рассматривалась в [13, 59] для построения итерационных методов с операторами, эквивалентными по спектру [13].

Можно уже сейчас представить, что при использовании отображения и параметрических элементов фактически стирается разница между формулировками задачи в начальной и текущей областях. Подробно этот вопрос будет рассмотрен при рассмотрении в параграфе 6.2. Здесь же рассмотрим еще второй тензор Пиолы – Кирхгофа, который в отличие от первого является симметричным. Он возникает при записи мощности внутренних сил с использованием скорости тензора деформаций Лагранжа – Грина (1.18) или меры Коши – Грина (1.17).

Второй тензор Пиолы-Кирхгофа. Тензор деформаций Лагранжа – Грина определяется формулой (1.18) : $\tilde{E} = \frac{1}{2}(\tilde{F}^T \cdot \tilde{F} - I)$ Его скорость, обозначаемая точкой, выражается в виде

$$\dot{\tilde{E}} = \frac{1}{2}[\dot{\tilde{F}}^T \cdot \tilde{F} + \tilde{F}^T \cdot \dot{\tilde{F}}] \quad (1.52)$$

Найдем связь между тензором скоростей деформаций (1.43) и скоростью тензора деформаций Лагранжа – Грина. Для этого сначала выразим скорость деформаций через скорость деформационного

градиента $\underset{\sim}{F}$, используя декартовы координаты

$$\underset{\sim}{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right) \vec{k}_i \vec{k}_j$$

Учитывая, что

$$\underset{\sim}{F} = \frac{\partial x_p}{\partial X_q} \vec{k}_p \vec{k}_q, \quad \underset{\sim}{F}^{-1} = \frac{\partial X_p}{\partial x_q} \vec{k}_p \vec{k}_q, \quad \dot{\underset{\sim}{F}} = \frac{\partial v_p}{\partial X_q} \vec{k}_p \vec{k}_q$$

получим, что

$$\underset{\sim}{d} = \frac{1}{2} [\dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} + \underset{\sim}{F}^{-T} \cdot \dot{\underset{\sim}{F}}^T]$$

Теперь легко доказать формулы, устанавливающие связь между тензором скоростей деформаций и скоростью тензора деформации Лагранжа – Грина

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}^{-T} \cdot \dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1}, \quad \dot{\underset{\sim}{F}} = \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{d} \cdot \underset{\sim}{F} \quad (1.53)$$

Действительно, из приведенного выше выражения для $\underset{\sim}{d}$ и (1.52) следует, что

$$\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{d} \cdot \underset{\sim}{F} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{F}^T \cdot \dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{F} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \cdot \dot{\underset{\sim}{F}}^T \cdot \underset{\sim}{F} = \frac{1}{2} [\underset{\sim}{F}^T \cdot \dot{\underset{\sim}{F}} + \dot{\underset{\sim}{F}}^T \cdot \underset{\sim}{F}] = \dot{\underset{\sim}{F}}$$

Как уже было отмечено, второй тензор Пиолы–Кирхгофа возникает при записи приращения работы напряжений с помощью скорости тензора деформаций Лагранжа – Грина

$$\begin{aligned} dA^{int} &= \int_V \sigma^{ij} v_{ij} dt dV = \int_V \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} dt dV = \int_V J \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{F}^{-T} \cdot \dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1}) dt dV = \\ &= \int_V \underbrace{(\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot J \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T})}_{\underset{\sim}{S}} : \dot{\underset{\sim}{F}} dt dV \end{aligned}$$

Таким образом, второй тензор Пиолы–Кирхгофа определяется формулой

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot J \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \quad (1.54)$$

Для краткости мы будем называть его также просто тензором Кирхгофа. С его помощью работа напряжений представляется сверткой со скоростью тензора деформаций Лагранжа – Грина

$$dA^{int} = \int_V \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{F}} dt dV$$

Поскольку из (1.49) следует, что $dA^{int} = \int_V dW d\overset{0}{V}$, то дифференциал упругого потенциала выражается следующей сверткой

$$dW = S^{ij} dE_{ij}$$

Поэтому, тензор Кирхгофа также является потенциальным

$$S^{ij} = \frac{\partial W(E_{ij})}{\partial E_{ij}}$$

или

$$S^{ij} = 2 \frac{\partial W(C_{ij})}{\partial C_{ij}}$$

Таким образом, возникли следующие энергетически сопряженные пары тензоров напряжений и деформаций: тензор Пиолы \tilde{P} и градиент деформации \tilde{F} и Кирхгофа \tilde{S} и тензор деформаций Лагранжа – Грина \tilde{E} . Энергетическая сопряженность означает, что

$$dW = \tilde{P} : d\tilde{F} = \tilde{S} : d\tilde{E}$$

Существуют и другие сопряженные пары [15]. Понятие энергетически сопряженных тензоров возникло в работах [8, 48].

Здесь следует заметить, что тензор напряжений Коши не обладает потенциалом, однако позволяет вычислять мощность внутренних напряжений $N = dA^{int}/dt$ с помощью свертки и тензором \tilde{d} . Мощность может быть представлена различными способами

$$N = \int_V \tilde{\sigma} : \tilde{d} dV = \int_V \tilde{P} : \overset{0}{\nabla} \tilde{d} \overset{0}{V} = \int_V \tilde{S} : \tilde{\dot{E}} d\overset{0}{V}$$

Те же формулы в компонентах выглядят так

$$N = \int_V \sigma^{ij} v_{ij} dV = \int_V P^{ij} \dot{u}_{i,j} d\overset{0}{V} = \int_V S^{ij} \dot{E}_{ij} d\overset{0}{V}$$

Связь между тензорами Кирхгофа (вторым тензором Пиолы – Кирхгофа) \tilde{S} и Пиолы (первым тензором Пиолы – Кирхгофа) \tilde{P} следует из (1.35) $\tilde{P} = J \tilde{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T}$ и (1.54) $\tilde{S} = \tilde{F}^{-1} \cdot J \tilde{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T}$:

$$\tilde{S} = \tilde{F}^{-1} \cdot (\tilde{P} \cdot \tilde{F}^T) \cdot \tilde{F}^{-T} = \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{P}$$

т.е.,

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{P} \quad (1.55)$$

Интересно выписать компоненты этих тензоров. Тензор Коши, естественно, задается компонентами в актуальном базисе

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j;$$

Учитывая (1.55), получим выражение для тензора Пиолы

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{J\sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} = \underset{\sim}{J\sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{E}_j}$

Учитывая связь между векторами локальных базисов в начальном и текущем состояниях

$$\vec{e}_j = \underset{\sim}{F} \cdot \vec{E}_j = \vec{E}_j \cdot \underset{\sim}{F}^T \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_j = \vec{e}_j \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}$$

получаем выражение тензора Пиолы через компоненты тензора Коши

$$\underset{\sim}{P} = J\sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{E}_j$$

Аналогично можно получить

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{J\sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} = \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{J\sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{E}_j}$

Учитывая, что

$$\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \vec{e}_i = \vec{E}_i$$

получаем, что компоненты тензора Кирхгофа в начальном локальном базисе равны компонентам тензора Коши в актуальном базисе, умноженным на якобиан преобразования Пиолы J

$$\underset{\sim}{S} = J\sigma^{ij} \vec{E}_i \vec{E}_j$$

Компоненты тензора Пиолы точно такие же, но в смешанном диадном базисе, состоящем из векторов текущего и начального базисов.

Принята следующая классификация моделей упругого тела [3]. Если тензор напряжений Кирхгофа является функцией тензора деформаций Лагранжа – Грина, то такой материал называется упругим. При этом существование упругого потенциала не предполагается. Если же вдобавок тензор напряжений является потенциальным, то материал называется гиперупругим. Если существует только квазилинейная связь между скоростями тензора напряжений и деформаций, то среда называется гипопругой.

Приведем формулы, связывающие все рассмотренные тензоры напряжений между собой, которые легко выводятся исходя из материала данного параграфа

$$\tilde{\sigma} = \tilde{F} \cdot (J^{-1} \tilde{S}) \cdot \tilde{F}^T, \quad \tilde{S} = \tilde{F}^{-1} \cdot (J \tilde{\sigma}) \cdot \tilde{F}^{-T} \quad (1.56)$$

$$\tilde{\sigma} = (J^{-1} \tilde{P}) \cdot \tilde{F}^T, \quad \tilde{P} = (J \tilde{\sigma}) \cdot \tilde{F}^{-T} \quad (1.57)$$

$$\tilde{S} = \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \tilde{F} \cdot \tilde{S} \quad (1.58)$$

Для сравнения, приведем также формулы, связывающие тензор скоростей деформаций и скорость тензора Лагранжа – Грина

$$\tilde{d} = \tilde{F}^{-T} \cdot \dot{\tilde{E}} \cdot \tilde{F}^{-1}, \quad \dot{\tilde{E}} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{d} \cdot \tilde{F} \quad (1.59)$$

Пример. Рассмотрим описанные меры напряжений и деформаций на примере одноосного однородного напряженного состояния, возникающего при растяжении стержня силой $P = P(t)$. Пусть при растяжении длина образца l задается формулой $l = \alpha(t)L$, где L – начальная длина.

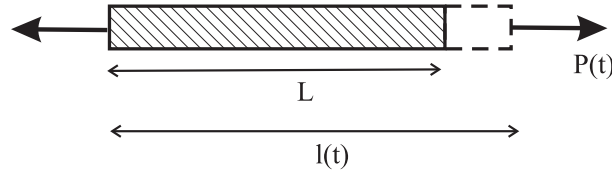


Рис. 1.4 Растяжение стержня.

Тогда связь начальных X_i и текущих x_i координат имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(X_1, X_2, X_3, t) &= \alpha(t)X_1, \\ x_2(X_1, X_2, X_3, t) &= \beta(t)X_2, \\ x_3(X_1, X_2, X_3, t) &= \beta(t)X_3 \end{aligned} \quad (1.60)$$

При этом градиент деформации получается следующим

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \beta(t) \end{bmatrix}$$

в декартовом базисе $\vec{k}_i \vec{k}_j$, ($\vec{E}_i = \vec{k}_i, |\vec{k}_i| = 1$). Вектора текущего базиса $\vec{e}_i = \underset{\sim}{F} \cdot \vec{E}_i$ равны

$$\vec{e}_1 = \alpha(t) \vec{k}_1, \quad \vec{e}_2 = \beta(t) \vec{k}_2, \quad \vec{e}_3 = \beta(t) \vec{k}_3$$

Если материал можно считать несжимаемым, то $J = \det(\underset{\sim}{F}) = 1$ поэтому $\alpha\beta^2 = 1$, следовательно, $\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Эта формула часто используется при обработке опытов на одноосное растяжение резиноподобных материалов.

Далее, мера Коши - Грина $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}$ и тензор деформации Лагранжа - Грина $\underset{\sim}{E}$ в данном примере имеют простые выражения в базисе $\vec{k}_i \vec{k}_j$

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Инженерные деформации в продольном и поперечном направлениях равны $\varepsilon_1 = \frac{l-L}{L} = \alpha - 1$, $\varepsilon_{2,3} = \frac{d-D}{D} = \beta - 1$. При малых деформациях, конечно, получаем, что $E_i \approx \varepsilon_i$. Скорость тензора $\underset{\sim}{E}$ в базисе $\vec{k}_i \vec{k}_j$ выражается матрицей

$$\dot{\underset{\sim}{E}} = \begin{bmatrix} \alpha\dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \beta\dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \beta\dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Единственная компонента тензора напряжений Коши $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_1 \vec{k}_1 \vec{k}_1$ в декартовом базисе, отличная от нуля, равна

$$\sigma_1 = \frac{P(t)}{\Sigma} = \frac{P(t)}{\beta^2 \overset{0}{\Sigma}} = \frac{1}{\beta^2} f(t)$$

где $f = \frac{P}{\overset{0}{\Sigma}}$ обозначает силу, отнесенную к начальной площади, и учтено, что $\Sigma = \beta^2 \overset{0}{\Sigma}$. В локальном базисе актуального состояния $\vec{e}_1 = \alpha(t) \vec{k}_1$ получаем $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_1 \frac{1}{\alpha^2} \vec{e}_1 \vec{e}_1$, т.е. контравариантная компонента равна

$$\sigma^{11} = \frac{\sigma_1}{\alpha^2}$$

Таким образом, компонента тензора Коши в декартовом базисе равна растягивающей силе, деленной на текущую площадь, а контравариантная компонента этим свойством, конечно, не обладает. Далее полезно пояснить смысл компонент обоих тензоров Пиолы – Кирхгофа. Начнем со второго тензора Пиолы – Кирхгофа $\tilde{S} = S_{11}\vec{k}_1\vec{k}_1$, причем в декартовом базисе $S_{11} = S^{11} = J\sigma^{11} = (\alpha\beta^2)\frac{\sigma_1}{\alpha^2}$. Следовательно, ненулевая компонента

второго тензора Пиолы – Кирхгофа равна $S_{11} = \frac{\beta^2}{\alpha}\sigma_1 = \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{f}{\beta^2} = \frac{f(t)}{\alpha}$.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что компонента второго тензора Пиолы – Кирхгофа в декартовом базисе не равна силе, деленной ни на текущую площадь, ни на начальную.

Тот же результат можно получить немного по другому. Соотношение $\tilde{S} = J\tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T}$, запишем в декартовых координатах $S_{ij} = JF_{im}^{-1}\sigma_{mn}F_{nj}^{-T}$. Следовательно, $S_{11} = \alpha\beta^2(F_{11}^{-1})^2\sigma_1$, ($\sigma_1 = \sigma_{11}$). Таким образом, компонента S_{11} равна

$$S_{11} = \alpha\beta^2\frac{1}{\alpha^2}\sigma_1 = \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{f}{\beta^2} = \frac{f}{\alpha}$$

т.е. получилось то же самое выражение. Закончим пример вычислением ненулевой компоненты первого тензора Пиолы–Кирхгофа, действуя аналогично предыдущему. Поскольку $\tilde{P} = J\tilde{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T}$, то $P_{11} = (\alpha\beta^2)\sigma_1(F^{-T})_{11} = \alpha\beta^2\frac{1}{\alpha}\sigma_1 = \beta^2\frac{f}{\beta^2} = f$. Таким образом, компонента P_{11} равна растягивающей силе, деленной на начальную площадь.

Пример. Рассмотрим еще один пример, показывающий разницу между компонентами тензора Коши и тензоров напряжений Пиолы–Кирхгофа. В этом примере речь идет об упругом стержне, испытывающем растягивающую силу T вдоль своей оси и поворачивающимся на угол φ . При этом любая компонента любого тензора напряжений, имеющая хотя бы один индекс "3" равна нулю. Предположим, что внешняя растягивающая сила приводит к малой деформации растяжения, поэтому преобразование начальных координат любой материальной точки стержня в текущие приближенно задается поворотом на угол φ

$$x_1 = X_1 \cos \varphi - X_2 \sin \varphi, \quad x_2 = X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi$$

Следовательно, компоненты тензора \tilde{F} равны

$$x_{1,1} = \cos \varphi, \quad x_{1,2} = -\sin \varphi, \quad x_{2,1} = \sin \varphi, \quad x_{2,2} = \cos \varphi$$

Поскольку $\vec{e}_i = \tilde{F} \cdot \vec{E}_i$ и $\vec{E}_i = \vec{k}_i$, то

$$(\vec{e}_1)_1 = \cos \varphi, \quad (\vec{e}_1)_2 = \sin \varphi, \quad (\vec{e}_2)_1 = -\sin \varphi, \quad (\vec{e}_2)_2 = \cos \varphi,$$

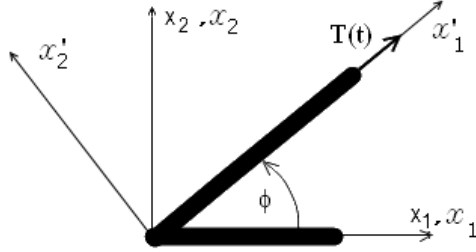


Рис. 1.5 Пример нелинейной задачи: стержень испытывает большой поворот и малое растяжение.

На правом конце стержня граничное условие можно сформулировать в виде двух эквивалентных уравнений

$$\vec{P} \cdot \vec{N} = \vec{S}^0 \quad \text{или} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{S}$$

Согласно условию, растягивающая сила приводит к малой деформации растяжения. Поэтому изменениями объема ($J \approx 1$) и площади поперечного сечения A можно пренебречь, т.е. $\vec{S} = \vec{S}^0$. Приведенные выше уравнения можно записать в декартовом базисе \vec{k}_i , в котором

$$\vec{S} = (T/A)\{\cos \varphi, \sin \varphi\}, \quad \vec{N} = \{1, 0\}, \quad \vec{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$$

В декартовой системе координат X_i первое условие записывается следующим образом

$$P_{11} = (T/A) \cos \varphi, \quad P_{21} = (T/A) \sin \varphi \quad (1.62)$$

Вследствие однородности напряженного состояния, эти формулы дают ненулевые компоненты тензора Пиолы в любой точке стержня. Второе условие выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \cos \varphi + \sigma_{12} \sin \varphi &= (T/A) \cos \varphi \\ \sigma_{21} \cos \varphi + \sigma_{22} \sin \varphi &= (T/A) \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.63)$$

Вышеприведенные формулы дают связь между ненулевыми компонентами тензора Коши в нештрихованной системе координат.

Заметим, что в штрихованной системе координат x'_i , повернутой на угол φ , отлична от нуля только одна компонента $\sigma'_{11} = T/A$, что следует

из граничного условия, записанного в штрихованной системе координат. Тогда, пользуясь преобразованием компонент тензора Коши, найдем его компоненты в нештрихованной системе

$$\sigma_{ij} = F_{ik} F_{jl} \sigma'_{kl} = F_{i1} F_{j1} \sigma'_{11}$$

Поэтому

$$\sigma_{11} = \sigma'_{11} \cos^2 \varphi, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma'_{11} \cos \varphi \sin \varphi, \quad \sigma_{22} = \sigma'_{11} \sin^2 \varphi$$

Если подставить эти формулы в (1.63), то снова получится, что единственная ненулевая компонента тензора Коши в штрихованной системе координат $\sigma'_{11} = T/A$.

Вспоминая, что при условии $J = 1$ компоненты тензора Коши в штрихованной системе координат равны компонентам тензора Пиолы–Кирхгофа в нештрихованной, имеем $s_{11} = \sigma'_{11} = T/A$, причем все остальные компоненты равны нулю. Теперь формулы (1.62) можно получить, исходя из соотношения $\tilde{P} = \tilde{F} \cdot \tilde{S}$:

$$P_{11} = s_{11} \cos \varphi, \quad P_{21} = s_{11} \sin \varphi, \quad P_{22} = P_{23} = 0$$

1.5. Вариационные постановки краевых задач

Дифференциальная постановка краевой задачи. В линейной теории упругости существуют постановки краевых задач в перемещениях и напряжениях [50]. В геометрически нелинейной теории эффективно краевая задача может быть сформулирована только в перемещениях. Пусть вектор перемещения является функцией криволинейных координат ξ^i и времени: $\vec{u} = \vec{u}(\xi^i, t)$. Меры деформаций \tilde{C} и \tilde{E} зависят от вектора перемещений. Поэтому для упругой и гиперупругой сред тензор напряжений Пиолы также зависит от \vec{u} : $\tilde{P} = \tilde{P}(\vec{u})$.

Постановка квазистатической смешанной краевой задачи относительно вектора перемещений при использовании тензора Пиолы записывается в виде следующей системы уравнений, граничных и

начальных условий

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{u}) + \rho^0(\vec{\xi}) \vec{f}(\vec{\xi}, t) = 0 \\ \vec{P}(\vec{u}) \cdot \vec{N}(\vec{\xi})|_{\Sigma_2} = \vec{S}^0(\vec{\xi}, t) \\ \vec{u}|_{\Sigma_1} = 0 \\ \vec{u}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Небесполезно подчеркнуть, что именно смешанные краевые задачи наиболее часто приходится решать в механике деформируемого твердого тела.

В численных методах на основе МКЭ криволинейные координаты используются редко, поэтому целесообразно записать краевую задачу в начальной области $\overset{0}{V}$ в декартовых координатах

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j}(\vec{u}) + \rho^0(\vec{X}) f_i(\vec{X}, t) = 0, & \vec{X} \in \overset{0}{V} \\ P_{ij}(\vec{u}) N_j(\vec{X})|_{\Sigma_2} = S_i^0(\vec{X}, t) \\ u_i|_{\Sigma_1} = 0 \\ u_i|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

В случае динамической задачи уравнения равновесия заменяются уравнениями движения и добавляется начальное условие

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j}(\vec{u}) + \rho^0(\vec{X}) f_i(\vec{X}, t) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, & \vec{X} \in \overset{0}{V} \\ P_{ij}(\vec{u}) N_j(\vec{X})|_{\Sigma_2} = S_i^0(\vec{X}, t) \\ u_i|_{\Sigma_1} = 0 \\ u_i|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = V_i(\vec{X}) \end{cases} \quad (1.66)$$

Таким образом, краевая задача для упругого материала удобнее формулируется с использованием тензора Пиолы в начальной области. Можно поставить краевую задачу относительно перемещения и в текущей области, однако смысл такая постановка может иметь только, если область V в актуальный момент задана. Следовательно, может показаться, что формулировка в текущей области вряд

ли интересна для большинства практических задач. Однако далее будет выяснено, что это верно только, если речь идет о краевой задаче, сформулированной в терминах вектора перемещения. Для численного решения гораздо более удобными являются постановки относительно скорости (или дифференциала) вектора перемещения. При этом будет показано, что формулировки в начальной и текущей областях почти равноценны друг другу. Также важно подчеркнуть, что дифференциальные краевые задачи мало приспособлены для получения эффективной конечномерной аппроксимации, необходимой при численном решении. Поэтому следует перейти к вариационным формулировкам, что будет сделано в следующем параграфе.

Вариационная постановка. Начнем с формулировки вариационного уравнения в текущей конфигурации. Умножая дифференциальное уравнение равновесия (1.39) на функцию $\vec{w}(\vec{x})$, интегрируя по частям и применяя граничные условия краевой задачи (1.39), получим вариационное уравнение:

$$\int_V \sigma_{ij}(\vec{u}) w_{i,j} dV = A^e(\vec{u})[\vec{w}]$$

где правая часть представляет собой работу внешних сил

$$A^e(\vec{u})[\vec{w}] = \int_V \rho f_i w_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i(\vec{u}) w_i d\Sigma$$

Здесь и далее выкладки проводятся в декартовой системе координат.

Целесообразно отметить, что в общем случае геометрически нелинейной теории в отличие от линейной теории упругости второй член в правой части не является линейным функционалом, а нелинейно зависит от решения \vec{u} . Вариационное уравнение принято записывать кратко

$$\varphi(\vec{u}, \vec{w}) = A^e(\vec{u})[\vec{w}] \quad (1.67)$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{w}) = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}) w_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}) d_{ij}(\vec{w}) dV$$

где $d_{ij}(\vec{w}) = 1/2(w_{i,j} + w_{j,i})$, т.е. явно указано, что тензор скоростей деформаций является оператором от векторного поля \vec{w} . В терминах

механики в вариационном уравнении (1.67) \vec{u} является действительным перемещением, \vec{w} — возможным в соответствии с граничными условиями на части границы Σ_1 . В математической литературе \vec{w} называется пробной функцией, а \vec{u} слабым решением из Гильбертового пространства функций G , если уравнение (1.67) выполняется для любой функции \vec{w} из того же пространства. Существуют и другие определения слабого решения [4] (или [26]), однако наиболее используемым для численного решения является приведенное выше, когда решение \vec{u} и пробная функция \vec{w} принадлежат одному пространству. Для уравнений второго порядка, каковыми являются уравнения равновесия в перемещениях, в качестве пространства G выбирается подпространство пространства W_1^2 , т.е. функций, определенных в области V и интегрируемых с квадратом производной [4]: $G = \{\vec{w} : \vec{w} \in W_1^2, \vec{w}|_{\Sigma_1} = 0\}$.

Если принять допущение, что плотность внешней нагрузки \vec{S} , действующей на актуальную границу, ни по величине, ни по направлению не зависит от перемещения \vec{u} , то работа внешних сил будет линейным функционалом, так же, как в геометрически линейной теории упругости

$$A^e[\vec{w}] = \int_V \rho f_i w_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i(t) w_i d\Sigma$$

Правая часть (1.67) существенно упрощается, но, как уже отмечалось, вероятность такого типа нагружения в практических задачах крайне мала.

Вариационная задача в начальной конфигурации получится, если умножить дифференциальное уравнение (1.64) (или (1.65)) на пробную функцию \vec{w} из G , проинтегрировать по частям и учесть граничные условия из системы (1.64):

$$\int_V P_{ij}(\vec{u}) w_{i,j} dV = A^e(\vec{u})[\vec{w}], \quad \forall \vec{w} \in G \quad (1.68)$$

где

$$A^e(\vec{u})[\vec{w}] = \int_V \rho f_i w_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i^0(\vec{u}) w_i d\Sigma$$

Вектор \vec{u} есть решение (действительное перемещение), \vec{w} — пробная функция или возможное, в соответствии с граничным условием

на $\overset{0}{\Sigma_1}$, перемещение. В случае "мертвой" нагрузки \bar{S}^0 правая часть (1.68) является линейным функционалом

$$A^e[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\rho} f_i(\vec{X}, t) w_i d\overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} S_i^0(\vec{X}, t) w_i d\overset{0}{\Sigma}$$

и не отличается от правой части вариационного уравнения в линейной теории упругости.

Приведенные выше вариационные уравнения справедливы для упругого материала. Для гиперупругого материала при "мертвой" нагрузке можно дополнительно определить функционал Лагранжа в начальной конфигурации

$$L(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\overset{0}{V}} W(\vec{u}) d\overset{0}{V} - \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\rho} f_i(\vec{X}, t) u_i d\overset{0}{V} - \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} S_i^0(\vec{X}, t) u_i d\overset{0}{\Sigma}$$

такой, что задача нахождения его стационарного значения в точности совпадает с вариационным уравнением (1.68). Для того, чтобы в этом убедиться вычислим дифференциал функционала L , понимаемый в смысле Гато [49]

$$DL(\vec{u})[\vec{w}] = \left. \frac{dL(\vec{u} + \zeta \vec{w})}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}$$

Дифференциал DL нелинейно зависит от аргумента в круглых скобках и линейно от аргумента в квадратных скобках. Если в результате дифференцирования окажется, что зависимость от второго аргумента \vec{w} нелинейна, то дифференциал Гато не существует. Непосредственное вычисление дифференциала функционала L приводит к соотношению

$$DL(\vec{u})[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \frac{\partial W(\vec{u})}{\partial u_{ij}} w_{i,j} d\overset{0}{V} - A^e[\vec{w}]$$

Из последнего соотношения видно, что дифференциал является линейным функционалом \vec{w} . Учитывая потенциальность тензора Пиюлы (1.51) для гиперупругого материала, получаем, что уравнение для нахождения стационарной точки функционала L

$$DL(\vec{u})[\vec{w}] = 0, \quad \forall \vec{w} \in G \quad (1.69)$$

совпадает с вариационным уравнением (1.68).

Вторая форма вариационного уравнения (1.51) использует тензор напряжений Кирхгофа

$$\int_{\overset{0}{V}} S_{ij}(\vec{u}) DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{0}{V} = A^e[\vec{w}] \quad (1.70)$$

Здесь

$$DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{dE(\vec{u} + \zeta \vec{w})}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = 1/2[(\overset{0}{\nabla} \vec{w})^T \cdot \underset{\sim}{F}(\vec{u}) + \underset{\sim}{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{w}] \quad (1.71)$$

или в индексной форме в декартовых координатах

$$DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] = 1/2[w_{m,i}F_{mj}(\vec{u}) + F_{mi}(\vec{u})w_{m,j}]$$

Уравнение (1.70) следует из (1.68) поскольку, учитывая $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{P}$, получаем

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S} : \frac{1}{2}[(\overset{0}{\nabla} \vec{w})^T \cdot \underset{\sim}{F}(\vec{u}) + \underset{\sim}{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{w}] &= \\ &= \frac{1}{2}\underset{\sim}{S}^T : \overset{0}{\nabla} (\vec{w})^T \cdot \underset{\sim}{F}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{w} = \\ &= \frac{1}{2}P_{ni}F_{jn}^{-1}w_{m,i}F_{mj} + \frac{1}{2}F_{in}^{-1}P_{nj}F_{mi}w_{m,j} = P_{mj}w_{m,j} = \underset{\sim}{P} : \overset{0}{\nabla} \vec{w} \end{aligned}$$

Используя производную Гато, скорость тензора деформаций Лагранжа – Грина можно записать следующей формулой

$$\dot{\underset{\sim}{E}} = \frac{dE(\vec{u})}{dt} = 1/2[(\overset{0}{\nabla} \vec{v})^T \cdot \underset{\sim}{F}(\vec{u}) + \underset{\sim}{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{v}] = DE_{ij}(\vec{u})[\vec{v}]$$

Для гиперупругого материала уравнение (1.70) имеет вид

$$\int_{\overset{0}{V}} \frac{\partial W(\vec{u})}{\partial E_{ij}} DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{0}{V} = A^e[\vec{w}]$$

Приведенные выше вариационные уравнения (1.68), (1.70) эквивалентны друг другу и служат отправной точкой в построении численных алгоритмов решения задачи квазистатического деформирования упругого тела. Из теории вариационных задач геометрически

линейной теории известно, что на связь $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$ тензоров напряжений и деформаций можно наложить ограничения, которые обеспечивают существование и единственность решений краевых задач. Это так называемые условия положительности и ограниченности касательного модуля [7]

$$\begin{aligned} \tilde{h} : D\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})[\tilde{h}] &\geq c_1 \tilde{h} : \tilde{h} > 0, \\ \tilde{h} : D\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})[\tilde{h}] &\leq c_2 \tilde{h} : \tilde{h}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

которые должны выполняться для любого симметричного тензора второго ранга \tilde{h} . Первое условие обеспечивает сильную эллиптичность вариационной задачи. Приведенные выше условия являются обобщением условий, которые предлагались разными авторами и в различных областях механики деформируемого твердого тела. В теории пластичности известен постулат Драккера [5]. Этот постулат, называемый также постулатом устойчивости материала [5], имеет своим следствием первое из приведенных неравенств (условие эллиптичности). Условие устойчивости материала запрещает ему иметь, так называемую, "падающую" диаграмму напряжение – деформация $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$. Такие диаграммы наблюдаются в экспериментах, однако часто обусловлены возникновением повреждаемости материала. В данном контексте интересно отметить, что "нырок" на диаграмме $\sigma_u(\varepsilon_u)$ в теории пластичности двузвенных ломаных связан с тем, что процесс деформирования является непростым и не нарушает постулата Драккера и неравенства (1.72). В теории пластичности неравенство типа неравенства (1.72) впервые предложены для деформационной пластичности в [21]. Следует, видимо, считать, что условие положительности касательного модуля (1.72) адекватно отражает поведение сплошного неповрежденного материала.

В нелинейной упругости известен ряд критериев, имеющих аналогичный смысл [24]. Это, например, критерий монотонности Колемана–Нолла [24]

$$\left(P(\tilde{F}_2) - P(\tilde{F}_1) \right) : \left(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1 \right) > 0,$$

из которого следует дифференциальный критерий

$$d\tilde{F}^T : D\tilde{P}(\tilde{F})[d\tilde{F}] > 0. \quad (1.73)$$

Следует сразу заметить, что последнее неравенство не соответствует сущности геометрически нелинейной теории. Действительно, если принять, что обобщение условий положительности и ограниченности касательного модуля для геометрически нелинейной теории может быть осуществлено в духе последнего критерия, то это означает, что должны выполняться неравенства

$$c_1 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} \leq \underset{\sim}{h} : DP(F)[\underset{\sim}{h}] \leq c_2 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h}$$

Здесь предполагается, что определяющее соотношение задано в форме $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{F})$. Эти неравенства должны выполняться для любого, вообще говоря, несимметрично тензора $\underset{\sim}{h}$. Тогда, например, для "мертвой" нагрузки можно доказать, что решение вариационной задачи единственно. Однако единственности, вообще говоря, нет в краевых задачах геометрически нелинейной теории. Это демонстрирует пример деформирования цилиндрической оболочки, изображенный на рис. 1.6.

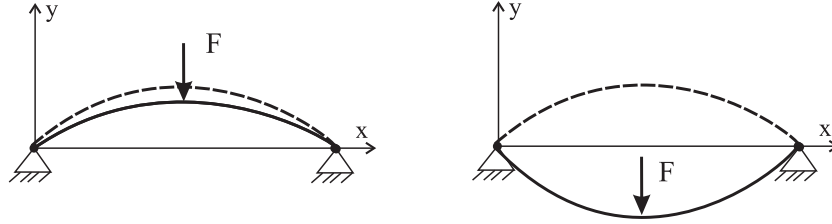


Рис. 1.6 Пример, показывающий существование двух решений при "мертвой" нагрузке

Поэтому обобщение неравенств положительности и ограниченности касательного модуля на случай геометрически нелинейной теории должно быть не столь прямолинейным. Другими словами, приведенное условие (1.73) слишком жесткое. Поэтому возникает вопрос, какое условие следует поставить как разумное ограничение на определяющее соотношение?

Представляя дифференциал тензора Пиолы через производную, вышеприведенные неравенства можно переписать немного иначе

$$c_1 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} \leq \underset{\sim}{h} : \frac{\partial \underset{\sim}{P}}{\partial \underset{\sim}{F}} : \underset{\sim}{h} \leq c_2 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h}$$

Касательный модуль равен $\tilde{C}^F = \partial P / \partial \tilde{F}$ (в [24] последний тензор назван тензором упругости). Он симметричен относительно перестановки пар индексов и несимметричен относительно перестановок индексов внутри каждой пары. Представим квадратичную форму $C_{ijkl}^F h_{ij} h_{kl}$ следующим образом

$$C_{ijkl}^F h_{ij} h_{kl} = C_{(ij)(kl)}^F h_{(ij)} h_{(kl)} + 2C_{[ij](kl)}^F h_{[ij]} h_{(kl)} + C_{[ij][kl]}^F h_{[ij]} h_{[kl]}$$

где

$$\begin{aligned} h_{(ij)} &= \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}), & h_{[ij]} &= \frac{1}{2}(h_{ij} - h_{ji}) \\ C_{(ij)kl}^F &= \frac{1}{2}(C_{ijkl}^F + C_{jikl}^F), & C_{[ij]kl}^F &= \frac{1}{2}(C_{ijkl}^F - C_{jikl}^F) \end{aligned}$$

и аналогично относительно второй пары индексов у тензора \tilde{C}^F .

Назовем условием устойчивости материала следующее неравенство

$$\tilde{h} : C_{sym}^F : \tilde{h} \geq c_1 \tilde{h} : \tilde{h}, \quad \left(C_{(ij)(kl)}^F h_{ij} h_{kl} > c_1 h_{ij} h_{ij} \right), \quad (1.74)$$

которое предположительно должно выполняться для любого симметричного тензора \tilde{h} . Неравенство (1.74) будем рассматривать как обобщение условия положительности касательного модуля на случай геометрически нелинейной теории упругости.

До сих пор условия, накладываемые на определяющее соотношение, обсуждались в случае, когда $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{F})$. Если определяющее соотношение задано в виде зависимости тензоров \tilde{S} и \tilde{E} (обычно линейной или квазилинейной), то при этом подразумевается, что оно используется в специальном случае деформирования, который характеризуется малыми деформациями, но большими поворотами материальных частиц деформируемого твердого тела. Тогда обобщение условия положительности и ограниченности касательного модуля можно сформулировать условия в виде следующих неравенств

$$c_1 \tilde{h} : \tilde{h} \leq \tilde{h} : \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}} : \tilde{h} \leq c_2 \tilde{h} : \tilde{h} \quad (1.75)$$

Первое условие означает положительность касательного модуля $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}}$, второе — его ограниченность. Отношение $\xi_c = c_1/c_2$ в определенном смысле показывает насколько сложно решить численно

краевую (точнее вариационную) задачу для упругого материала с тензором модулей упругости, определяемым касательным модулем $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}}$. Чем меньше отношение ξ_c , тем задача труднее. Отношение $1/\xi_c$ можно назвать числом обусловленности тензора $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}}$.

Интересно отметить, что преобразование Пиолы может быть описано с помощью вариационного уравнения (1.67), в котором производную от пробной функции \vec{w} преобразуем с помощью отображения области V на некоторую область V^ξ в пространстве координат ξ^i

$$\int_{V^\xi} J^\xi \sigma^{ij}(\vec{w}) B_j^m w_{i,m_\xi} dV^\xi = \int_{V^\xi} (J^\xi \rho) f_i w_i dV^\xi + \int_{\Sigma_2^\xi} J_\Sigma^\xi S_i(\vec{w}) w_i d\Sigma^\xi \quad (1.76)$$

где матрица $[B]$ и обратная к ней матрица $[A]$ определяются отображением $\phi_\xi: x_i = x_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$:

$$A_j^i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad B_j^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad A_m^i B_j^m = \delta_j^i$$

$$J = \frac{dV}{dV^\xi} \det[A], \quad J_\Sigma^\xi = \frac{d\Sigma}{d\Sigma^\xi}$$

Уже отмечалось, что идея отображения является весьма продуктивной. Например, преобразование вариационного уравнения с помощью отображения применяется для его дискретизации при использовании параметрических (обычно изопараметрических) конечных элементов.

Преобразование, рассмотренное выше является достаточно общим так, как область V^ξ может быть выбрана достаточно произвольно. Собственно преобразование Пиолы получается, если $V^\xi = \overset{0}{V}$, тогда $A_j^i = F_j^i$, а свертка $J^\xi \sigma^{ij} B_j^m$ равна декартовым компонентам P^{im} тензора Пиолы. Преобразование правой части уравнения предыдущего уравнения очевидно. Можно также выбрать область V^ξ , равной области V занимаемой деформируемым телом в какой-то предыдущий момент времени или просто удобной с точки зрения численного алгоритма.

Можно заметить, что для гиперупругого материала численное решение может заключаться также в поиске экстремальных точек

функционала Лагранжа. Существование функционала Лагранжа не дает столь существенного эффекта при решении геометрически нелинейных задач, как при решении линейных задач теории упругости. Во-первых, точка экстремума необязательно является точкой минимума, во-вторых, стационарных точек может быть несколько. Тем не менее, использование функционала Лагранжа, может быть использовано при поиске точки его глобального минимума. С другой стороны, формулировка задачи в виде решения вариационного уравнения является более общей, поскольку справедлива для любого упругого материала, а не только гиперупругого. Здесь следует оговориться, что приведенные вариационные уравнения справедливы для любого упругого материала, кроме несжимаемого. Модель несжимаемого материала является весьма актуальной, поскольку модуль объемного сжатия эластомеров, обычно, существенно превосходит модуль сдвига. Поэтому эластомеры моделируются либо как несжимаемые материалы, либо как малосжимаемые. Вариационная постановка для несжимаемого тела рассмотрена в параграфе 2.4 главы 2.

Глава 2.

Большие деформации.

Проблема построения определяющих соотношений в геометрически нелинейной теории является сложной. Сложность касается как теоретических аспектов, так и экспериментальной верификации соотношений. Поэтому в главах 2, 4.1 рассматриваются такие определяющие соотношения, которые приняты в качестве достоверных и прошедших проверку экспериментальными исследованиями и практикой. Следовательно, эти соотношения могут применяться для численного моделирования. В данной главе описываются определяющие соотношения гиперупругого тела, широко применяемые для моделирования резин и резинокордных композитов.

2.1. Соотношения гиперупругого материала.

Ниже описывается детализация определяющих соотношений в случае, когда деформации являются большими и упругими, т.е. полностью обратимыми. Предполагается существование упругого потенциала. В параграфе 1.4 были рассмотрены три пары тензоров, свертка которых равна мощности работы внутренних сил N :

$$N = \int_V \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} dV = \int_V \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\dot{E}} dV = \int_V \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{\nabla} \underset{\sim}{v} dV$$

$$\left(N = \sigma^{ij} d_{ij} = S^{ij} \dot{E}_{ij} = P^{ij} v_{i,j} \right)$$

Приведенные выше формулы для мощности эквивалентны следующим выражениям для дифференциала упругого потенциала $dW = \sigma^{ij} d_{ij} dt = S^{ij} dE_{ij} = P^{ij} du_{i,j}$, из которых следует

$$S^{ij} = \frac{\partial W(E_{ij})}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial C_{kl}} \cdot \frac{\partial C_{kl}}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (2.1)$$

Поскольку тензоры $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{E}$ симметричны, то правильно предыдущие формулы следует записывать так

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial E_{ji}} \right), \quad S_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial C_{ji}} \right).$$

Скалярная функция W , зависящая от компонент тензора деформаций, зависит от инвариантов этого тензора, поскольку инварианты в силу своего определения не зависят как и W от преобразования системы координат. Конкретизация этой зависимости собственно и представляет основную задачу. Проще всего конкретизировать вид определяющего соотношения (2.1) гиперупругого материала в случае изотропии, так как в этом случае существует только три независимых инварианта у тензора деформаций (см. [6, 24, 15]). Следовательно, можно записать

$$W = W(I_1(\underset{\sim}{C}), I_2(\underset{\sim}{C}), I_3(\underset{\sim}{C}))$$

и, далее

$$\underset{\sim}{S} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underset{\sim}{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underset{\sim}{C}} \right]$$

Здесь используются стандартные инварианты

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{C}) &= \text{tr} \tilde{C} = G^{ij} g_{ij}, \quad (I_1 = g_{ii} \text{ в декартовой системе координат}), \\ I_2(\tilde{C}) &= \frac{1}{2}[\tilde{I}_1^2 - I_1(\tilde{C}^2)], \quad I_3(\tilde{C}) = \det \tilde{C}. \end{aligned}$$

Ответ на вопрос, почему потенциал зависит от трех инвариантов и почему именно эти инварианты выбраны в качестве независимых, связан с теоремой Гамильтона - Кэлли [], которая утверждает, что симметричный тензор второго ранга удовлетворяет тому же кубическому уравнению, что и его собственные значения

$$\tilde{C}^3 - I_1 \tilde{C}^2 + I_2 \tilde{C} - I_3 \tilde{I} = 0,$$

где коэффициентами уравнения являются как раз величины I_1, I_2, I_3 . Поэтому в силу этого уравнения любой другой $I_k^* = I_1(\tilde{C}^k)$, $k = 3, 4, \dots$ может быть выражен алгебраически через I_1, I_2, I_3 и $I_1(\tilde{C}^2)$. Так как $I_1(\tilde{C}^2)$ выражается через I_1, I_2 , то любой инвариант вида I_k^* тоже выражается через I_1, I_2, I_3 .

Для того, что продолжить конкретизацию формулы для компонент тензора Кирхгофа, нужно продифференцировать инварианты. Это удобнее сделать в главных осях тензора \tilde{C} . Главные оси есть оси системы координат, совпадающие по направлению с главными векторами тензора $\tilde{C} = g_{ij} \vec{E}^i \vec{E}^j$. Для симметричного тензора собственные векторы \vec{I}_α , $\alpha = 1, 2, 3$ ортогональны: $\vec{I}_\alpha \cdot \vec{I}_\beta = 0$, $\alpha \neq \beta$, причем, конечно, их можно ортонормировать $|\vec{I}_\alpha| = 1$. В базисе векторов \vec{I}_α тензор \tilde{C} представляется в виде

$$\tilde{C} = \sum_{\alpha=1}^3 C_\alpha \vec{I}_\alpha \vec{I}_\alpha$$

где C_α — собственные значения тензора \tilde{C} . Задача на собственные значения выглядит следующим образом

$$\tilde{C} \cdot \vec{I}_\alpha = C_\alpha \vec{I}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

В декартовом базисе она записывается так

$$(g_{ij} - C_\alpha \delta_{ij}) I_\alpha^j = 0, \quad i, \alpha = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где $\vec{I}_\alpha = I_\alpha^j \vec{k}_j$, $C^2 = \sum_{\alpha=1}^3 C_\alpha^2 \vec{I}_\alpha \vec{I}_\alpha$, а инварианты представляются в виде

$$I_1 = \sum_{\alpha=1}^3 g_\alpha, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{\alpha=1}^3 g_\alpha \right)^2 - \sum_{\alpha=1}^3 g_\alpha^2 \right], \quad I_3 = \prod_{\alpha=1}^3 g_\alpha$$

Теперь можно вернуться к дифференцированию инвариантов по тензору $\underset{\sim}{C}$. Поскольку $\frac{\partial I_1}{\partial g_\alpha} = 1$, то можно заключить, что

$$\frac{\partial I_1(\underset{\sim}{C})}{\partial \underset{\sim}{C}} = \underset{\sim}{I}.$$

Аналогично, исходя из равенств $\frac{\partial I_2(\underset{\sim}{C})}{\partial g_\alpha} = I_1 \cdot 1 - g_\alpha$, $\frac{\partial I_3}{\partial g_\alpha} = I_3 g_\alpha^{-1}$, получим

$$\frac{\partial I_2}{\partial \underset{\sim}{C}} = I_1 \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \underset{\sim}{C}} = I_3 \underset{\sim}{C}^{-1}$$

В итоге получаем выражение для тензора Пиолы–Кирхгофа

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S} &= 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \underset{\sim}{I} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \underset{\sim}{C}^{-1} \right] = \\ &= 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \underset{\sim}{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \underset{\sim}{C} + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \underset{\sim}{C}^{-1} \right] \end{aligned}$$

Вводя обозначения [24]

$$\psi_0 = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right), \quad \psi_1 = -2 \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \psi_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3$$

определяющее соотношение можно записать в более компактном виде

$$\underset{\sim}{S} = \psi_0 \underset{\sim}{I} + \psi_1 \underset{\sim}{C} + \psi_2 \underset{\sim}{C}^{-1} \quad (2.4)$$

Это общий вид зависимости $\underset{\sim}{S}$ от $\underset{\sim}{C}$ для изотропного гиперупругого материала. Можно избавиться от отрицательной степени $\underset{\sim}{C}^{-1}$ с помощью формулы Гамильтона - Кэли, как это пояснено ниже

$$\underset{\sim}{C}^3 - I_1 \underset{\sim}{C}^2 + I_2 \underset{\sim}{C} - I_3 \underset{\sim}{I} = 0 \quad \left| \times \underset{\sim}{C}^{-1} \right| \Rightarrow I_3 \underset{\sim}{C}^{-1} = \underset{\sim}{C}^2 - I_1 \underset{\sim}{C} + I_2 \underset{\sim}{I}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \psi_0 I + \psi_1 \tilde{C} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} (\tilde{C}^2 - I_1 \tilde{C} + I_2 I) = \\ &= \underbrace{\left(\psi_0 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} I_2 \right)}_{\varphi_0} I + \underbrace{\left(\psi_1 - 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} I_1 \right)}_{\varphi_1} \tilde{C} + \underbrace{2 \frac{\partial W}{\partial I_3}}_{\varphi_2} \tilde{C}^2 \end{aligned}$$

В итоге приходим ко второй форме определяющего соотношения

$$\tilde{S} = \varphi_0 I + \varphi_1 \tilde{C} + \varphi_2 \tilde{C}^2 \quad (2.5)$$

Еще раз следует подчеркнуть, что это общий вид определяющего соотношения изотропного гиперупругого материала. Оно может быть конкретизировано только за счет выбора трех функций φ

$$\varphi_0 = \psi_0 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} I_2, \quad \varphi_1 = \psi_1 - 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} I_1, \quad \varphi_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_3}$$

Определяющее соотношение (2.5) можно записать, конечно, в терминах других тензоров напряжений и деформаций, например, в терминах тензора напряжений Коши и меры деформаций Фингера, определяемой соотношением

$$\tilde{\Phi} = \tilde{F} \cdot \tilde{F}^T = G^{ij} \tilde{e}_i \tilde{e}_j$$

(полезно сравнить последнюю формулу с определением меры Коши–Грина $\tilde{C} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} = g_{ij} \tilde{E}^i \tilde{E}^j$). Преобразование определяющего соотношения при помощи формулы (1.56) пояснено ниже

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= J^{-1} \tilde{F} \cdot \tilde{S} \cdot \tilde{F}^T = J^{-1} \tilde{F} (\psi_0 \tilde{F} \cdot \tilde{F}^T + \psi_1 \tilde{C} + \psi_2 \tilde{C}^{-1}) \cdot \tilde{F}^T = \\ &= J^{-1} \psi_0 \tilde{\Phi} + \psi_1 \tilde{F} \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{F}^T + \psi_2 \tilde{F} \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{F}^T \end{aligned}$$

Учитывая $\tilde{F} \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{F}^T = \tilde{F} \cdot \tilde{F}^T \cdot (\tilde{F} \cdot \tilde{F}^T) = \tilde{\Phi}^2$ и $\tilde{F} \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{F}^T = \tilde{F} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{F}^{-T} \cdot \tilde{F}^T = I$, приходим к определяющему соотношению

$$\tilde{\sigma} = J^{-1} (\psi_2 I + \psi_0 \tilde{\Phi} + \psi_1 \tilde{\Phi}^2) \quad (2.6)$$

Доказательство равенства $\tilde{F} \cdot \tilde{F}^T = G^{ij} \tilde{e}_i \tilde{e}_j$ следует из того, что согласно

$$(1.9) \quad \tilde{F} = (\overset{0}{\nabla} \tilde{r})^T = \tilde{e}_i \tilde{E}^i \text{ и, следовательно, } \tilde{\Phi} = \tilde{F} \cdot \tilde{F}^T = \tilde{e}_i \tilde{E}^i \cdot \tilde{E}^j e_j =$$

$G^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$, поскольку компоненты фундаментальной матрицы в начальном состоянии равны $G_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$.

Уравнения (2.5) и (2.6) задают, конечно, одно и тот же определяющее соотношение, но тензоры $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\Phi}$ отнесены к актуальному состоянию, \tilde{S} , \tilde{C} – к начальному. Отнесены – это значит, что используются при формулировке задач либо в области начального состояния V_0 , либо текущего V . Если записать определяющие соотношения (2.4) и (2.6) в компонентной форме, первое – в базисе $\vec{E}_i\vec{E}_j$ начального состояния, а второе – в базисе $\vec{e}_i\vec{e}_j$ текущего состояния, то оба соотношения выглядят одинаково

$$J\sigma^{ij} = \psi_2 g^{ij} + \psi_0 G^{ij} + \psi_1 g_{kl} G^{ik} G^{jl}.$$

Собственные векторы тензора $\tilde{\Phi} \vec{i}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ равны $\vec{i}_\alpha = \tilde{F} \cdot \vec{I}_\alpha$. Действительно, преобразуя уравнение (2.2) получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{-T} \cdot (\tilde{C} \cdot \vec{I}_\alpha - C_\alpha \vec{I}_\alpha) &= \tilde{F}^{-T} \cdot (\tilde{C} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{F} \cdot \vec{I}_\alpha - C_\alpha \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{F} \cdot \vec{I}_\alpha) \\ &= \tilde{I} \cdot \vec{i}_\alpha - C_\alpha \tilde{F}^{-T} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \vec{i}_\alpha = \tilde{I} \cdot \vec{i}_\alpha - C_\alpha \tilde{\Phi}^{-1} \cdot \vec{i}_\alpha = \end{aligned}$$

т.е.

$$(\tilde{I} - C_\alpha \tilde{\Phi}^{-1}) \cdot \vec{i}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

Поэтому приходим к уравнению

$$(\tilde{\Phi} - C_\alpha \tilde{I}) \cdot \vec{i}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

которое представляет собой задачу на собственные значения для меры Фингера. Следовательно, можно представить меру Фингера в базисе ее собственных значений

$$\tilde{\Phi} = \sum_{\alpha=1}^3 C_\alpha \vec{i}_\alpha \vec{i}_\alpha$$

Легко видеть, что собственные векторы \vec{i}_α и \vec{I}_α имеют одинаковые компоненты g_α^i соответственно в базисах \vec{e}_i и \vec{E}_i .

Представление одного и того же определяющего соотношения в начальной и текущей конфигурациях с помощью различных тензоров напряжений и деформация объясняет, почему в нелинейной механике деформируемого твердого тела вводится в рассмотрение

множество различных мер напряжений и деформаций — это связано с удобством формулировки уравнений и соотношений в различных конфигурациях. Однако, для гиперупругого тела определяющее соотношение по-существу задается только упругим потенциалом. Даже для изотропного материала задача выбора подходящей аппроксимации W как функции трех аргументов является достаточно сложной. Правда, на протяжении истории развития нелинейной теории упругости в этом направлении проводились многочисленные исследования и были предложены различные аппроксимации.

Рассмотрим конкретные потенциалы. В нелинейной упругости принято говорить о материале, подразумевая тот или иной потенциал или, в общем, то или иное определяющее соотношение. Ниже приведен потенциал материала Сен-Венана – Кирхгофа:

$$W(\underset{\sim}{E}) = \frac{1}{2} \lambda (I_1(\underset{\sim}{E}))^2 + \mu \underset{\sim}{E} : \underset{\sim}{E} \quad (2.7)$$

Такой потенциал, который является прямым обобщением квадратичного потенциала линейной теории упругости, годится только для малых деформаций, сопровождающимися большими поворотами. Он приводит определяющему соотношению вида

$$\underset{\sim}{S} = \lambda I_1(\underset{\sim}{E}) \underset{\sim}{I} + 2\mu \underset{\sim}{E}$$

В [15] этот потенциал назван стандартным и записан относительно инвариантов меры деформаций Коши-Грина

$$W = \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) (I_1(\underset{\sim}{C}) - 3)^2 + \mu (I_1(\underset{\sim}{C}) - 3) - \frac{\mu}{2} (I_2(\underset{\sim}{C}) - 3), \quad (2.8)$$

что приводит к определяющему соотношению

$$\underset{\sim}{S} = \frac{\lambda}{2} (I_1(\underset{\sim}{C}) - 3) \underset{\sim}{I} + 2\mu \underset{\sim}{E} = \lambda I_1(\underset{\sim}{E}) \underset{\sim}{I} + 2\mu \underset{\sim}{E}$$

В случае анизотропного материала аналогичный потенциал выглядит следующим образом

$$W = \frac{1}{2} \underset{\sim}{E} : \underset{\sim}{C}^E : \underset{\sim}{E}.$$

Далее будем рассматривать потенциалы, которые предназначены для широкого диапазона деформаций. В случае изотропного материала, потенциал обычно рассматривается состоящим из суммы

двух слагаемых. Первая $W_{sh}(I_1, I_2)$ отвечает за свойства при сдвиге, вторая $W_{vol}(I_3)$ – за поведение материала при объемной деформации. Самым простым, пожалуй, является, так называемый, неогуковский потенциал. Предположим, что деформирование осуществляется так, что объем не изменяется. Тогда $I_3(\tilde{C}) = \det(\tilde{F}^T \cdot \tilde{F}) = (\det \tilde{F})^2 = J^2 = 1$ и

$$W_{sh} = \frac{\mu}{2}(I_1(\tilde{C}) - 3).$$

(при отсутствии деформаций $\tilde{C} = I$ и, следовательно, $I_1(\tilde{C}) = 3$).

Распространенной моделью является несжимаемый материал, для которого $J = 1$. Тогда

$$W = W(I_1, I_2, 1) = W_{sh}(I_1, I_2),$$

а условие $J = 1$ рассматривается как соотношение связи, наложенной на деформирование. Конечно, несжимаемость может выполняться только приближенно и означает, что жесткость материала при всестороннем сжатии намного больше жесткости при сдвиге. Математически реализовать уравнение связи можно методом штрафа, который состоит в том, что сдвиговой части потенциала добавляется потенциал, называемый штрафом. Этот член сильно увеличивается, если при деформировании происходит отклонение от выполнения условия несжимаемости $J = 1$. Часто штрафной член, который с точки зрения механики есть просто потенциал при объемном деформировании, выбирается в виде

$$W_{vol} = \frac{K}{2}(J - 1)^2,$$

где модуль K можно трактовать либо как модуль объемного сжатия в недеформированном состоянии, либо как штрафной коэффициент. Кроме этого, полагается что при деформациях, для которых $J \neq 1$, "сдвиговая" часть потенциала должна зависеть от приведенных инвариантов. Эти инварианты определяются как обычные инварианты, но зависящие от тензора $\bar{\tilde{F}}$. Последний определяется в виде

$$\bar{\tilde{F}} = \tilde{F}/J^{1/3}. \quad (2.9)$$

Ясно, что $\det(\bar{\tilde{F}}) = \det(\tilde{F})/J = 1$, поэтому этот тензор можно называть девиатором градиента деформации. Приведенные инварианты

равны

$$\bar{I}_1 = I_1(\bar{C}), \quad \bar{I}_2 = I_2(\bar{C}), \quad \bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F}$$

В итоге полный потенциал задается в виде

$$W = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{vol}(J).$$

физически такой потенциал соответствует малосжимаемой среде. Можно заметить, что другим распространенным "объемным" потенциалом является следующий

$$W_{vol} = \frac{K}{2} \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right),$$

Рассмотрим еще примеры "сдвиговых" потенциалов, реально применяющихся на практике или известных из литературы. Во-первых, это потенциал Муни

$$W_M = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) \quad (2.10)$$

Для этого потенциала модуль сдвига в недеформированном состоянии (когда $\bar{C} = \bar{I}$) равен $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$. Во-вторых, обобщение потенциала Муни — потенциал Муни–Ривлина

$$W_{MR} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3). \quad (2.11)$$

Вообще, потенциалом Муни–Ривлина называют различные обобщения потенциала Муни, например, следующее или

$$W_{MR} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2$$

Такие потенциалы могут быть записаны в виде общей полиномиальной формы

$$W_{MR} = \prod_{i,j=1}^{m_1, m_2} C_{ij}(\bar{I}_1 - 3)^i(\bar{I}_2 - 3)^j, \quad W_{vol} = \prod_i^{m_3} \frac{k_i}{2} (J - 1)^{2i}.$$

Легче понять формулы для потенциалов, если их записать в терминах главных деформаций. Для этого нужно рассмотреть тензор искажений, который возникает из полярного разложения деформационного градиента [24]

$$\bar{F} = \bar{R} \cdot \bar{U}, \quad (\bar{U}^T = \bar{U}, \quad \bar{R}^T = \bar{R}^{-1}),$$

где \tilde{U} – симметричный тензор искажений, \tilde{R} – ортогональный тензор поворота. Поскольку $\tilde{C} = \tilde{F}^T \tilde{F} = \tilde{U} \tilde{R}^{-1} \tilde{R} \tilde{U} = \tilde{U}^2$, то тензоры \tilde{C} и \tilde{U} имеют одни и те же собственные векторы. Следовательно тензор искажение представляется в главных осях деформаций следующим образом

$$\tilde{U} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \vec{I}_{\alpha} \vec{I}_{\alpha}$$

Поскольку $\tilde{C} = \sum_{\alpha=1}^3 C_{\alpha} \vec{I}_{\alpha} \vec{I}_{\alpha}$, то $C_{\alpha} = \lambda_{\alpha}^2$. Существуют потенциалы, которые удобнее задавать в терминах собственных значений λ_{α} при условии несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Например, потенциал Черныха [15]

$$W = \mu [(1 + \beta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + (1 - \beta)(\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-3} - 3)]$$

или потенциал Одена

$$W = \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)$$

Для сравнения запишем потенциал Муни относительно главных удлинений/сжатий λ_i

$$W = \mu \left[(1 + \beta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + (1 - \beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right) \right]$$

Действительно, учитывая, что потенциал Муни, записанный с использованием констант μ и β , имеет вид

$$W = \mu [(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3)],$$

а также, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} [(C_1 + C_2 + C_3)^2 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2] = \\ &= C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3 \end{aligned}$$

получим

$$W = \mu [(1 + \beta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + (1 - \beta)(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3)]$$

Теперь осталось только использовать условие несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

Потенциалы выраженные в терминах λ_i , т.е. собственных значений тензора U , вообще говоря, не удобны для вычислений, поскольку $U = \sqrt{\tilde{C}}$. Чтобы вычислить корень из тензора нужно найти его собственные значения и векторы, затем перейти к базису, составленному из собственных векторов (к главным осям), потом извлечь корни из собственных значений и, наконец, осуществить преобразование компонент тензора к исходному координатному базису. Еще недавно, такая операция была слишком дорогостоящей в смысле времени вычислений на компьютере, однако производительность компьютеров непрерывно растет.

Если потенциал задан как функция тензора искажений $W = W(U)$, то определяющее соотношение можно получить следующим образом:

$$S_{\sim} = 2 \frac{\partial W}{\partial \tilde{C}} = 2 \frac{\partial W}{\partial U} : \frac{\partial U}{\partial \tilde{C}}$$

Поскольку $U = \tilde{C}^{1/2}$, то $\frac{\partial U}{\partial \tilde{C}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}}} = \frac{1}{2U}$. Следовательно,

$$S_{\sim} = U^{-1} \frac{\partial W}{\partial U}$$

Для определения из эксперимента материальных констант, входящих в ту или иную формулу упругого потенциала, обычно требуется записать определяющее соотношение в главных осях \vec{l}_{α} . Последнее соотношение тогда примет вид

$$S_{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\alpha}} \quad (2.12)$$

2.2. Экспериментальное определение материальных констант.

Рассмотрим более подробно как можно экспериментально определить параметры, входящие в упругий потенциал. Удобно, если определяющее соотношение записано в главных осях, поскольку в эксперименте проще всего осуществить одноосное или двухосное растя-

жение. В главных осях начальной конфигурации \vec{I}_α тензор напряжения $\underset{\sim}{S}$ можно записать так

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha \vec{I}_\alpha \vec{I}_\alpha$$

Векторы \vec{I}_α – единичные, а S_α являются собственными значениями тензора $\underset{\sim}{S}$

$$\underset{\sim}{S} \cdot \vec{I}_\alpha = S_\alpha \vec{I}_\alpha \quad (2.13)$$

Тензор напряжений Коши также представляется в своих главных осях (главных осях актуальной конфигурации). Действительно, поскольку $\underset{\sim}{\sigma} = J^{-1} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{F}^T$, то

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 J^{-1} S_\alpha (\underset{\sim}{F} \cdot \vec{I}_\alpha) (\underset{\sim}{F} \cdot \vec{I}_\alpha)$$

и можно обозначить $\vec{i}_\alpha^* = \underset{\sim}{F} \cdot \vec{I}_\alpha$ и $J^{-1} S_\alpha = \sigma_\alpha^*$. Векторы \vec{i}_α^* в отличие от \vec{I}_α получаются не единичными. Действительно, используя полярное разложение, получаем

$$\vec{i}_\alpha^* = \underset{\sim}{F} \cdot \vec{I}_\alpha = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{U} \cdot \vec{I}_\alpha = \underset{\sim}{R} \cdot (\lambda_\alpha \vec{I}_\alpha) = \lambda_\alpha \underset{\sim}{R} \cdot \vec{I}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{i}_\alpha$$

где λ_α – собственные значения тензора искажений $\underset{\sim}{U} : \underset{\sim}{U} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \vec{I}_\alpha \vec{I}_\alpha$. При обработке экспериментов целесообразно иметь дело с представлением тензора Коши

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha \vec{i}_\alpha \vec{i}_\alpha$$

, в ортонормированном базисе $\vec{i}_\alpha = \vec{i}_\alpha^* / |\vec{i}_\alpha^*| = \vec{i}_\alpha^* / \lambda_\alpha = \underset{\sim}{R} \cdot \vec{I}_\alpha$ и, поэтому $\sigma_\alpha = \lambda_\alpha^2 \sigma_\alpha^*$. Учитывая (2.12) и $S_\alpha = J \sigma_\alpha^*$, получаем, что

$$\sigma_\alpha = J^{-1} \lambda_\alpha \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha} \quad (2.14)$$

Величины σ_α являются собственными значениями тензора Коши. Действительно, преобразуем выражение уравнение (2.13) в задачу на собственные значения для тензора Коши следующим образом

$$\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{S} \cdot \left(\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \right) \cdot \underset{\sim}{I}_\alpha = S_\alpha \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{I}_\alpha$$

или

$$\underset{\sim}{\sigma} \cdot \left(\underset{\sim}{F}^{-T} \cdot \underset{\sim}{I}_\alpha \right) = J^{-1} S_\alpha \underset{\sim}{I}_\alpha^*$$

Используя снова полярное разложение $\underset{\sim}{F}^{-T} = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{U}^{-1}$, получим $\underset{\sim}{\sigma} \cdot \left(\underset{\sim}{R} \cdot \frac{1}{\lambda_\alpha} \underset{\sim}{I}_\alpha \right) = \sigma_\alpha^* \underset{\sim}{I}_\alpha^*$ или окончательно

$$\underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{I}_\alpha = \sigma_\alpha \underset{\sim}{I}_\alpha$$

Представление тензора Коши в ортонормированном базисе собственных векторов, соответственно, выглядит следующим образом

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha \underset{\sim}{I}_\alpha \underset{\sim}{I}_\alpha$$

Напряжение σ_α удобно тем, что его легко можно вычислить из результатов измерений. Действительно, рассмотрим состояние трехосного растяжения/сжатия во взаимно перпендикулярных направлениях. В этом опыте главные оси сохраняют постоянное направление по отношению к пространственно декартовой системе координат. При этом лагранжева система координат, выбранная в начальный момент деформирования декартовой, остается прямоугольной и впоследствии. Пусть F_α есть сила, измеренная в направлении оси α , тогда $\sigma_\alpha = F_\alpha / \Sigma_\alpha$, где Σ_α – площадь образца в сечении, перпендикулярном направлению α . Главные удлинения в направлениях α, β, γ (собственные значения тензора $\underset{\sim}{U}$) есть $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma$. Тогда

площадь Σ_α связана с начальной площадью $\overset{0}{\Sigma}_\alpha$ соотношением $\Sigma_\alpha = \lambda_\beta \lambda_\gamma \overset{0}{\Sigma}_\alpha$. Выражение для силы F_α следует из формулы (2.14) $F_\alpha / \overset{0}{\Sigma} = \sigma_\alpha(\lambda_\beta \lambda_\gamma) = J^{-1}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha}$.

Приведем конкретизацию для стандартного потенциала (2.8) [15] $W = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)(I_1 - 3)^2 + \mu(I_1 - 3) - \frac{\mu}{2}(I_2 - 3)$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

Вычисляя производную $\frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha}$, получим выражение для силы

$$F_\alpha / \Sigma = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(I_1 - 3) \cdot \lambda_\alpha + 2\mu \cdot \lambda_\alpha - \mu(\lambda_\beta^2 + \lambda_\gamma^2) \cdot \lambda_\alpha$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma$$

В наиболее простом опыте на одноосное растяжение измеряются F_1 и λ_1, λ_2 , причем $F_2 = F_3 = 0$, а удлинения в поперечном направлении одинаковы $\lambda_2 = \lambda_3$. Для определения двух неизвестных параметров материала λ и μ получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda+2\mu}{2}\right)(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3)\lambda_1 + 2\mu\lambda_1 - \mu\lambda_1 \cdot (2\lambda_2^2) &= F_1 \\ \left(\frac{\lambda+2\mu}{2}\right)(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3)\lambda_2 + 2\mu\lambda_2 - \mu\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для моментов нагружения $t_i, i = 1, \dots, N$, получаем системы уравнений

$$\begin{aligned} A_{(i)}\lambda_{(i)} + B_{(i)}\mu_{(i)} &= F_{(i)} \\ C_{(i)}\lambda_{(i)} + D_{(i)}\mu_{(i)} &= 0 \end{aligned}$$

где $A_{(i)} = (\lambda_{1(i)}^2 + 2\lambda_{2(i)}^2 - 3)\lambda_{1(i)}/2$, $B_{(i)} = (\lambda_{1(i)}^2 + 2\lambda_{2(i)}^2 - 3)\lambda_{1(i)} + 2\lambda_{1(i)} - 2\lambda_{1(i)}2\lambda_{2(i)}^2$, $C_{(i)} = (\lambda_{1(i)}^2 + 2\lambda_{2(i)}^2 - 3)\lambda_{2(i)}/2$, $D_{(i)} = (\lambda_{1(i)}^2 + 2\lambda_{2(i)}^2 - 3)\lambda_{2(i)} + 2\lambda_{2(i)} - 2\lambda_{2(i)}(\lambda_{1(i)}^2 + \lambda_{2(i)}^2)$, $F_{(i)} = F_1(\lambda_{1(i)})$. Вычисляя $\lambda_{(i)}, \mu_{(i)}$ для различных значений $F_{(i)}$ можно найти параметры λ, μ методом наименьших квадратов: $\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_{(i)}, \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_{(i)}$.

Из системы (2.15) следует соотношение, являющееся аналогом отношения Пуассона

$$\lambda_2^2 = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \lambda_1^2$$

Достоинство стандартного потенциала состоит в том, что он переходит в "стандартный" квадратичный потенциал линейной теории упругости, если деформации малы, т.е. при $\lambda_\alpha \rightarrow 1, (\alpha = 1, 2, 3)$, что непосредственно следует из (2.7). Можно определить параметры стандартного потенциала при малых деформациях, а затем наблюдать до какой деформации потенциал обеспечивает приемлемую точность.

Приведем пример. Сравнение с экспериментом было проведено для эластомера при $\nu = 0.495$ ($\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$), что типично для резиноподобных материалов, обладающих малой сжимаемостью. На ри-

сунке 2.1 показано сравнение напряжения, вычисленного с использованием стандартного потенциала (сплошная линия помеченная цифрой 1) и измеренного напряжения (пунктирная линия, цифра 2). Несложно убедиться, что область применимости ограничена деформациями порядка $10 \div 20$ процентов. Такой результат подтверждает, что стандартный потенциал не предназначен для больших деформаций, но вполне подходит деформирования с малыми деформациями, но большими поворотами материальных частиц.

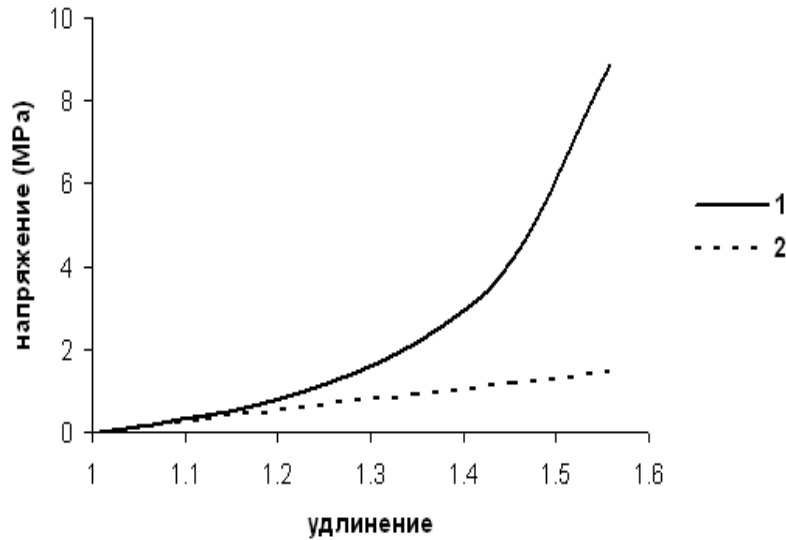


Рис. 2.1 Аппроксимация кривой напряжение – деформация при одноосном нагружении.

Теперь перейдем к потенциалам, которые предназначены именно для описания эластомеров при больших деформациях. Часто при обработке измерений, полученных в опытах с эластомерами, предполагают несжимаемость материала, т.е. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. В таком случае
$$\Sigma_{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \Sigma_{\alpha}^0.$$

Самым известным является потенциал Муни (2.10), часто запи-

сываемый в виде

$$W^{sh} = \frac{1}{4}\mu[(1+\beta)(I_1(C) - 3) + (1-\beta)(I_2(C) - 3)] \quad (2.16)$$

Инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина относительно главных удлинений в случае несжимаемости можно представить следующим образом

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}$$

Для несжимаемого материала формула (2.14) приобретает вид

$$\sigma_\alpha = \lambda_\alpha \frac{\partial W^{sh}}{\partial \lambda_\alpha} + p \quad (2.17)$$

где p есть гидростатическое давление, является независимой величиной наряду с вектором перемещения.

Если обозначить $\lambda = \lambda_1, \sigma = \sigma_1$, то в одноосном опыте $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, $\sigma \neq 0$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Определяющие соотношения приобретают вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}\mu[(1+\beta)\lambda_1^2 - (1-\beta)\lambda_1^{-2}] + p \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}\mu[(1+\beta)\lambda_2^2 - (1-\beta)\lambda_2^{-2}] + p = 0 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}\mu[(1+\beta)\lambda_3^2 - (1-\beta)\lambda_3^{-2}] + p = 0 \end{aligned}$$

Гидростатическое давление можно исключить, вычитая из первого уравнения второе

$$\sigma = \frac{1}{2}\mu[(1+\beta)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - (1-\beta)(\lambda_1^{-2} - \lambda_2^{-2})]$$

Для получения из экспериментальных данных параметров β и μ и проведем линеаризацию последнего уравнения. Для этого воспользуемся методом спрямляющих координат [15]:

$$x = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}) - (\lambda_2^2 - \lambda_2^{-2})}{(\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2}) - (\lambda_2^2 + \lambda_2^{-2})}, \quad y = \frac{\sigma_1}{(\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2}) - (\lambda_2^2 + \lambda_2^{-2})}$$

в которых переписывается в виде линейного уравнения

$$y = \frac{\mu}{2}(x + \beta)$$

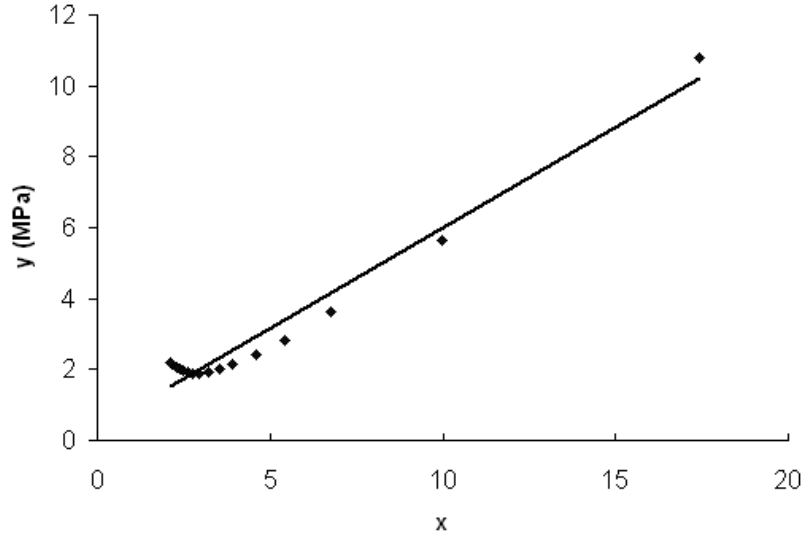


Рис. 2.2 Прямая в спрямляющих координатах.

Таким образом, теперь, чтобы определить константы β и μ в выражении для потенциала (2.16), необходимо по экспериментальным данным вычислить точки $\{x_i, y_i\}, i = 1, \dots, N$ на координатной плоскости x, y и построить прямую методом наименьших квадратов. На рисунке 2.2 приведен пример такого построения. В результате вычислены параметры потенциала Муни $\beta = 1.90$ и $\mu = 1.00 \text{ MPa}$. Точность аппроксимации помощью такого потенциала можно видеть на рисунка 2.3. На этом рисунке экспериментально определенное напряжение сравнивается с вычисленным с помощью потенциала Муни. Как видно точность аппроксимации достаточно высока вплоть до $100 \div 130$ процентов деформации растяжения.

Более точно аппроксимации и в более широком диапазоне деформаций можно добиться, если использовать потенциал Муни – Ривлина. Уже было отмечено, что существует целое семейство таких потенциалов, и мы опишем методику определения параметров потенциала на примере потенциала следующего вида

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1 - 3)^2 + C_4(I_1 - 3)^3$$

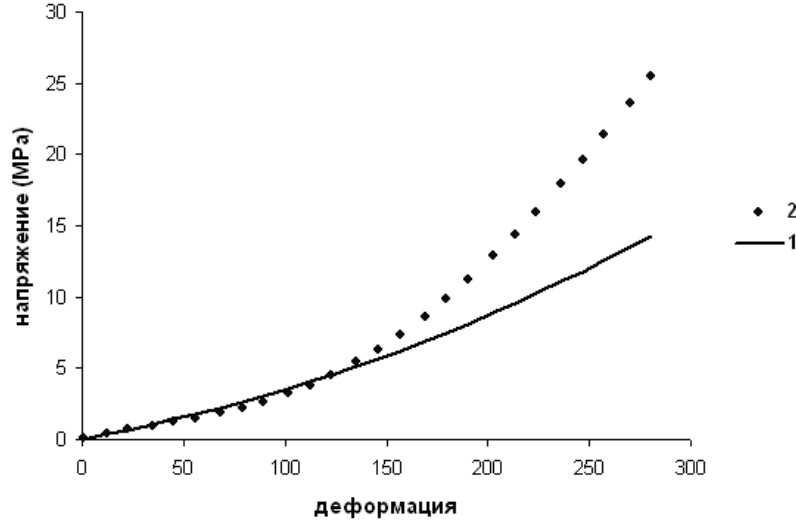


Рис. 2.3 Аппроксимация напряжения при одноосном растяжении с помощью потенциала Муни.

Методика определение констант C_1, C_2, C_3, C_4 отличается от процедуры определения констант в потенциале Муни. Формула (2.17) приобретает вид

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2C_1\lambda_1^2 + C_2\left(\frac{-2}{\lambda_1^2}\right) + 2C_3(I_1 - 3) \cdot 2\lambda_1^2 + 3C_4(I_1 - 3)^2 \cdot 2\lambda_1^2 + p \\ \sigma_2 &= 2C_1\lambda_2^2 + C_2\left(\frac{-2}{\lambda_2^2}\right) + 2C_3(I_1 - 3) \cdot 2\lambda_2^2 + 3C_4(I_1 - 3)^2 \cdot 2\lambda_2^2 + p = 0 \\ \sigma_3 &= 2C_1\lambda_3^2 + C_2\left(\frac{-2}{\lambda_3^2}\right) + 2C_3(I_1 - 3) \cdot 2\lambda_3^2 + 3C_4(I_1 - 3)^2 \cdot 2\lambda_3^2 + p = 0\end{aligned}$$

Действуем аналогично предыдущему и вычитаем из первого уравнения второе уравнение с целью исключить гидростатическое давление

$$\sigma_1 = 2C_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + C_2\left(\frac{-2}{\lambda_1^2} + \frac{2}{\lambda_2^2}\right) + 4C_3(I_1 - 3)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 6C_4(I_1 - 3)^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$$

После преобразования предыдущее уравнение приобретает вид

$$\sigma_1 = \lambda^6(6C_4) + \lambda^4(4C_3 - 36C_4) + \lambda^3(18C_4) + \lambda^2(54C_4 - 12C_3 + 2C_1) + \\ + \lambda(2C_2 + 4C_3 - 36C_4) + \lambda^{-1}(-54C_4 + 12C_3 - 2C_1) + \\ + \lambda^{-2}(-2C_2 - 8C_3 + 72C_4) + \lambda^{-3}(-24C_4)$$

Далее умножаем обе части уравнения на λ и делаем замену $y(\lambda) = \sigma \cdot \lambda^3$

$$y(\lambda) = C_1(2\lambda^5 - 2\lambda^2) + C_2(2\lambda^4 - 2\lambda) + C_3(4\lambda^7 - 12\lambda^5 + 4\lambda^4 + 12\lambda^2 - 8\lambda) + \\ + C_4(6\lambda^9 - 36\lambda^7 + 18\lambda^6 + 54\lambda^5 - 36\lambda^4 - 54\lambda^2 + 72\lambda - 24)$$

Для определения констант потенциала Муни-Ривлена воспользуем-

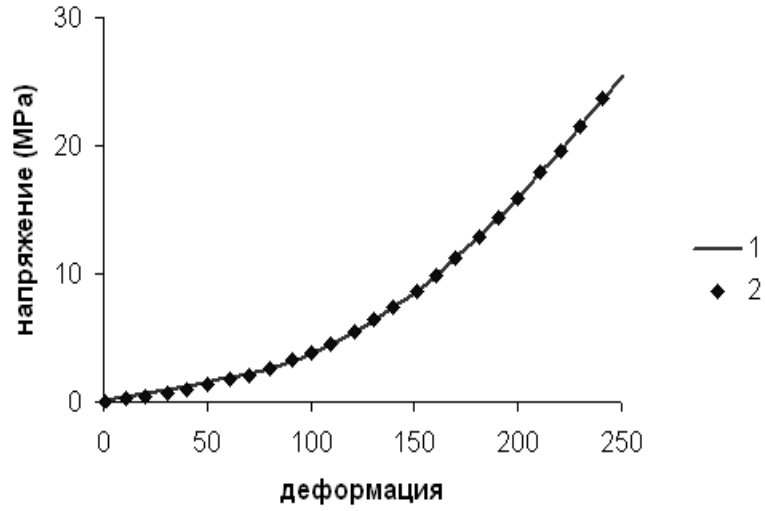


Рис. 2.4 Аппроксимация напряжения при одноосном растяжении с помощью потенциала Муни-Ривлина.

ся методом наименьших квадратов. Из эксперимента знаем значения $\sigma_i \lambda_i^3$, $i = 1, \dots, N$. Требуется подобрать константы для функции так, чтобы отклонение этой функции экспериментальных данных было минимальным, т.е.

$$\Phi(C_1, C_2, C_3, C_4) = \sum_{i=1}^N (y(\lambda_i) - \sigma_i \lambda_i^3)^2 \rightarrow \min$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 4$$

Эта система линейных уравнений имеет вид

$$\sum_{i=1}^N 2(y(\lambda_i) - \sigma_i \lambda_i^3) \cdot \frac{\partial y}{\partial C_k}(\lambda_i) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Решение последней системы позволяет найти константы C_1, C_2, C_3, C_4 и тем самым определить потенциал Муни – Ривлина. Сравнение "расчетного" и "экспериментального" напряжений показано на рисунке 2.4 для того же материала, который использовался при аппроксимации двух предыдущих потенциалов. Из графика хорошо видно, что потенциал Муни–Ривлина с четырьмя константами обеспечивает существенно лучшее совпадение аппроксимации с экспериментальными данными до деформации 250% . При деформациях свыше 40 % данный потенциал обеспечивает хорошую точность, и при деформациях более 100 % потенциал на исследованных материалах показал ошибку около 1 %. С другой стороны для небольших деформаций точность хуже и здесь может использоваться потенциал Муни. Таким образом, можно обеспечить высокую точность аппроксимации либо за счет дальнейшего увеличения параметров в потенциале типа Муни – Ривлина.

В общем виде потенциалы типа Муни – Ривлина, как уже отмечалось, записываются следующим образом

$$W_{MR} = \sum_{i,j=1}^{m_1, m_2} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.18)$$

Формула (2.18) справедлива, если объем не меняется ($I_3 = 1$). В общем случае деформирования потенциал следует переписать в виде

$$W_{MR} = \sum_{i,j=1}^{m_1, m_2} C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j$$

где

$$\bar{I}_1 = I_1/I_3^{1/3}, \quad \bar{I}_2 = I_2/I_3^{2/3}, \quad I_3 = J^2$$

Введение модифицированных инвариантов \bar{I}_1, \bar{I}_2 эквивалентно вычислению обычных инвариантов от тензора \tilde{C} , равного $\tilde{C}/J^{1/3}$.

$\bar{I}_1 = I_1(\bar{\tilde{C}})$, $\bar{I}_2 = I_2(\bar{\tilde{C}})$. Конечно, справедливо прежнее определение $\bar{\tilde{C}}$ через девиатор градиента деформации $\bar{\tilde{C}} = \bar{\tilde{F}}^T \cdot \bar{\tilde{F}}$, где последний был определен формулой (2.9). Тензор $\bar{\tilde{C}}$ можно назвать девиатором меры деформаций, поскольку количественно характеризует часть деформации, отличной от деформации изменения объема (деформация чистого искажения). Для тензора деформаций Лагранжа–Грина \tilde{E} девиатор определяется аналогично $\bar{\tilde{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\tilde{C}} - I)$. При $\tilde{F} \rightarrow I$ тензор $\bar{\tilde{E}}$ переходит в обычный девиатор тензора малых деформаций.

До сих пор определение параметров материала, входящих в потенциал, было основано на приближении экспериментальной кривой напряжение–деформация аналитической зависимостью, полученной с помощью потенциала. Однако потенциал, построенный таким образом, может приводить к плохой аппроксимации при малых деформациях в начале процесса деформирования.

Дополнительное требование, предъявляемое к упругому потенциалу, состоит в том, что при деформации, стремящейся к нулю, определяющее соотношение должно переходить в закон Гука. При стремлении деформаций к нулю, определяющее соотношение нелинейной теории упругости переходит в соотношение

$$dS_{ij} = C_{ijkl}^I dE_{kl}, \quad \text{где} \quad C_{ijkl}^I = C_{ijkl}^E(I) = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}}(I) \quad (2.19)$$

Поэтому, должно выполняться начальное условие уравнение

$$C_{ijkl}^I = C_{ijkl}^{small} \quad (2.20)$$

где C_{ijkl}^{small} являются модулями упругости при малых деформациях, когда определяющим соотношением является линейное соотношение закона Гука.

Рассмотрим уравнение (2.20) в случае потенциала Муни. Вычисление вторых производных при единичном градиенте деформации \tilde{F} приводит к уравнением

$$\begin{aligned} C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{small} &= 4/3C_{10} + 4/3C_{01} + K \\ C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{small} &= -2/3C_{10} - 2/3C_{01} + K \\ C_{\alpha\beta\alpha\beta}^{small} &= C_{10} + C_{01} \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \alpha \neq \beta$. Из уравнений (2.21) следует, что $C_{10} + C_{01} = \mu$, $K - 2/3\mu = \lambda$, $4/3(C_{10} + C_{01}) + K = \lambda + 2\mu$. Таким образом, уравнения (2.21) выполняются, если $C_{10} + C_{01}$ равны начальному модулю сдвига. Начальные условия (2.21) определяют сумму констант $C_{10} + C_{01}$, но не позволяют найти величину их отношения. Последнее вполне естественно, поскольку аппроксимация поведения нелинейного упругого материала не может полностью определяться только его свойствами вначале деформирования.

Также нужно заметить, что использовании более точного потенциала Муни–Ривлина не изменяет уравнения (2.21), поскольку добавочные по сравнению с потенциалом Муни члены равны нулю при нулевой деформации. Применение потенциала типа Муни–Ривлина может существенно улучшить точность аппроксимации при значительных деформациях. Таким образом, применение потенциала типа Муни–Ривлина с удовлетворением уравнений (2.21) позволяет описать поведение нелинейно упругого материала в широком диапазоне деформаций.

2.3. Проверка положительности касательного модуля.

Как уже неоднократно подчеркивалось положительная определенность касательного модуля является существенным свойством большинства материалов и существенно определяет трудоемкость решения результирующей системы алгебраических уравнений, возникающей при применении метода конечных элементов. Однако для многих потенциалов положительная определенность выполняется только в определенном диапазоне деформаций. Ниже описывается проверка выполнения условия положительности касательного модуля (1.74) для некоторых потенциалов W , рассмотренных в предыдущих параграфах.

Приведем результаты проверки положительности для нескольких потенциалов. Потенциалы Муни (2.10) и Муни–Ривлина (2.11), как модифицированные, так и нет оказались положительно-определенными в широком диапазоне деформаций, в котором аппроксимацию можно считать достоверной. Свойством положитель-

ной определенности обладает и потенциал Блатца и Ко (Blatz&Ko)

$$W_{BK} = \frac{1}{2}\mu [I_1 + 1/\alpha (I_3^{-\alpha} - 1) - 3], \quad \alpha = \frac{\nu}{1-2\nu}$$

Однако со стандартным потенциалом (2.8) дело обстоит совсем не так. Вычисления были проведены для деформационного градиента вида

$$F_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \lambda, \quad F_{ij} = 0, \quad i \neq 1, \quad j \neq 1$$

и было обнаружено, что положительность имеет место только при $\lambda > 0.93$. Материальные параметры были выбраны типичными для эластомера : $\nu = 0.49$, что соответствует модулю объемного сжатия $K/\mu = 24.83$ ($\lambda/\mu = 24.5$), а положительность определялась путем вычисления собственных значений симметризированной тангенциальной матрицы (1.74) $C_{sym} = C_{(ij)(kl)}$. Таким образом, стандартный потенциал не положителен при одноосной деформации сжатия, превышающей 7%. Однако это свойство стандартного потенциала не является крупным минусом, поскольку он предназначен, как уже отмечалось, только описания малых деформаций.

Гораздо хуже обстоит дело с объемными потенциалами. Например, потенциалы

$$W_{vol} = \frac{K}{2} (\det F - 1)^2, \quad W_{vol} = \frac{K}{2} \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right)$$

при одноосном деформировании положительны только при $\lambda < 1.02$, т.е. в основном при сжатии. Таким образом, увеличение объема всего на 2% ведет к отсутствию положительной определенности касательной матрицы, что в свою очередь приводит к серьезным трудностям при численном моделировании. Однако объемные потенциалы положительны, если $\det F_{ij} = 1$. Отсутствие положительности объемных потенциалов свидетельствует, что решение краевых задач для малосжимаемой или несжимаемой среды является весьма сложной проблемой.

2.4. Смешанная вариационная постановка

В данном параграфе рассмотрим определяющие соотношения и постановки краевых задач в случае несжимаемого материала. Дело в

том, что наиболее типичные материалы, в которых происходят большие деформации – эластомеры, являются мало сжимаемыми материалами и могут исследоваться двояко. Первый способ состоит в том, что такой материал является сжимаемым и описывается раннее рассмотренными способами, но модуль объемного сжатия K велик. Другой способ заключается в предположении полной несжимаемости, т.е. $K = \infty$. В этом случае среднее гидростатическое давление больше не связано конечным соотношением с изменением объема, а является независимой переменной σ . Такой прием использовался при описании экспериментальной методики определения материальных параметров упругого потенциала. Важно сразу отметить, что второй способ ведет к далеко идущим следствиям и приводит к, так называемым, смешанным постановкам краевых задач, что не может не отразиться на применяемых численных процедурах. Дело в том, что наличие большого коэффициента K в обычной постановке в перемещениях не только снижает точность численного решения, но и создает сложность вообще для его получения. Смешанная постановка нацелена на преодоление этой трудности. С другой стороны, постановка в перемещениях с большим параметром K может рассматриваться как применение метода штрафа к смешанной задаче, т.е. является одним из методов ее решения.

Итак, тензор Коши представляется через девиатор $\tilde{\sigma}$ и шаровую часть σI_{\sim}

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} + \sigma I_{\sim}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \tilde{\sigma} : I_{\sim}$$

Используя формулы связи тензоров напряжений $P = J \tilde{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T}$ и $S = J \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T}$, получим аналогичные представления для тензоров Пиолы и Кирхгофа, определенных в начальной конфигурации

$$\tilde{P} = \tilde{P} + \sigma J \tilde{F}^{-T}, \quad \tilde{S} = \tilde{S} + \sigma J \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{F}^{-T} = \tilde{S} + \sigma J C^{-1} \quad (2.22)$$

В случае несжимаемости третий инвариант меры Коши–Грина C_{\sim} , также как и J , равен 1, а σ является независимой величиной. Следовательно, для изотропного материала упругий потенциал является функцией только двух инвариантов

$$W = W_{sh}(I_1, I_2)$$

Индекс "sh" означает, что потенциал определяется деформацией

сдвига, поскольку объем не меняется. В итоге получаем определяющие соотношения несжимаемого гиперупругого материала

$$\underset{\sim}{S} = 2 \frac{\partial W_{sh}(\underset{\sim}{C})}{\partial \underset{\sim}{C}} + \sigma J \underset{\sim}{C}^{-1}, \quad \underset{\sim}{P} = \frac{\partial W_{sh}(\underset{\sim}{F})}{\partial \underset{\sim}{F}} + \sigma J \underset{\sim}{F}^{-T} \quad (2.23)$$

К этим соотношениям можно прийти иным способом. Действительно, рассмотрим сначала определяющее соотношение сжимаемого материала

$$\underset{\sim}{S} = 2 \frac{\partial W(\underset{\sim}{C})}{\partial \underset{\sim}{C}},$$

причем $W = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U(J)$, где $\bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F}$, $\bar{I}_i = I_i(\bar{C})$, $\bar{F} = J^{-1/3} \underset{\sim}{F}$.

Упругий потенциал теперь становится функцией девиатора меры Коши–Грина \bar{C} плюс потенциал объемной деформации.

Обычно $U(J) = \frac{1}{2}K(J-1)^2$. Следовательно, определяющее соотношение выглядит так

$$\underset{\sim}{S} = 2 \frac{\partial W_{sh}(\bar{C})}{\partial \underset{\sim}{C}} + 2K(J-1) \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{C}}$$

Вычислить $\frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{C}}$ можно, используя следующий прием. Дело в том, дифференцирование достаточно просто осуществить в главных осях, в которых

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \underset{\sim}{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{U}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

Поэтому дифференцирование поясняется ниже следующей цепочкой преобразований

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{C}} &= \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{F}} : \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{C}} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{F}} : \left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{F}} \right)^{-1} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \lambda_i^2} = \frac{\partial J}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_i^2} = \frac{\partial J}{\partial \lambda_i} \frac{1}{\frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \lambda_i}} \\ &= \frac{\partial J}{\partial \lambda_i} \frac{1}{2\lambda_i} = \lambda_j \lambda_k \frac{1}{2\lambda_i} = \frac{J}{2\lambda_i^2} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{C}} = \frac{1}{2} J \underset{\sim}{C}^{-1}, \quad (i \neq j \neq k) \end{aligned}$$

Таким образом, определяющее соотношение записывается в виде

$$S_{\sim} = 2 \frac{\partial W_{sh}(\bar{C})}{\partial C_{\sim}} + K(J-1)J C_{\sim}^{-1}$$

Соотношение для несжимаемого материала можно получить, перейдя в последнем соотношении к пределу $K \rightarrow \infty, J \rightarrow 1, K(J-1) \rightarrow \sigma$. В результате определяющее соотношение несжимаемого материала снова получается в виде первого соотношения (2.23).

Замечание. Девиаторная часть тензора Коши удовлетворяет равенству $\bar{\sigma} : I = 0$. Покажем, что аналогичные соотношения для тензоров Пиолы выглядят следующим образом

$$\bar{P} : F = 0, \quad \bar{S} : C = 0$$

Доказательство первого равенства приведено ниже

$$\bar{P} : F = \left(J \bar{\sigma} \cdot F^{-T} \right) : F = J \bar{\sigma} : F^{-T} \cdot F^T = J \bar{\sigma} : I = 0$$

Далее, умножим первое соотношение (2.22) на F^T , в результате чего получим равенство

$$P : F = \bar{P} : F + J \sigma \left(F^{-T} : F \right) = 3 \sigma J$$

Следовательно, $\sigma = \frac{1}{3} J^{-1} P : F$. Аналогично выглядит доказательство для тензора C

$$\bar{S} : C = \left(J F^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot F^{-T} \right) : F^T \cdot F = J \bar{\sigma} : I = 0$$

Поэтому

$$S : C = \bar{S} : C + 3 \sigma J = 3 \sigma J \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{3} J^{-1} S : C$$

Формулировка вариационного уравнения в случае несжимаемой среды также как и формулировка определяющего соотношения отличается от формулировки для сжимаемой среды. Для сжимаемой среды и мертвой нагрузки, вариационное уравнение в начальной конфигурации определяется формулой (1.69) : $DL(\vec{u})[\vec{w}] = 0$, где

$$L(\vec{u}) = \int_V W(\vec{u}) dV - A^e[\vec{u}]$$

причем $W = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U(J) = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + 1/2(J - 1)^2$. Для несжимаемой среды $J = 1$ и $W = W_{sh}$. Следовательно, вариационная задача состоит в определении стационарной точки функционала $L(\vec{u})$ из уравнения $DL(\vec{u})[\vec{w}] = 0$ при ограничении $J = 1$.

Как известно [43, 52], такая вариационная задача с условием может решаться с помощью метода множителей Лагранжа. Этот подход состоит в замене исходного функционала L на функционал

$$L^s(\vec{u}, \sigma) = \int_{\vec{V}}^0 W_{sh}(\vec{u}) d\vec{V} - A^e(\vec{u}) + \int_{\vec{V}}^0 \sigma(J(\vec{u}) - 1) d\vec{V}$$

и последующем решении задачи на безусловный экстремум по двум независимым переменным \vec{u}, σ

$$DL(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}] = 0, \quad DL(\vec{u}, \sigma)[\tau] = 0$$

Формально такую процедуру с помощью множителей Лагранжа удобно описать следующим образом [?]. Рассмотрим характеристический функционал

$$\delta(\vec{u}) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ \infty, & u \neq 0 \end{cases}$$

С помощью характеристического функционала задачу условной минимизации функционала Лагранжа можно переписать в виде (предполагая W таким, что локальный экстремум есть минимум)

$$\inf_{\vec{u} \in G_u} L(\vec{u}) = \inf_{\vec{u} \in G_u} \left\{ \int_{\vec{V}}^0 W_{sh}(\vec{u}) d\vec{V} - A^e[\vec{u}] + \delta((J(\vec{u}) - 1)) \right\}$$

Далее, очевидно, что

$$\delta((J(\vec{u}) - 1)) = \sup_{\tau \in G_p} \left\{ \int_{\vec{V}}^0 \tau \delta((J(\vec{u}) - 1)) d\vec{V} \right\}$$

поэтому получаем седловую задачу

$$\inf_{\vec{u} \in G_u} \sup_{\sigma \in G_p} L^s(\vec{u}, \sigma)$$

где седловой функционал имеет вид

$$L^s(\vec{u}, \sigma) = \int_{\vec{V}} W_{sh}(\vec{u}) d\vec{V} - A^e(\vec{u}) + \int_{\vec{V}} \sigma(J(\vec{u}) - 1) d\vec{V} \quad (2.24)$$

Поскольку седловой функционал дифференцируем, то в седловой точке дифференциал Гато равен нулю. Вычисляя дифференциалы по направлениям \vec{w} и τ , получим

$$\begin{aligned} DL^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}] &= \int_{\vec{V}} \frac{\partial W_{sh}}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) : DC_{\sim}(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V} - A^e[\vec{w}] \\ &\quad + \int_{\vec{V}} \sigma \frac{\partial J}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) : DC_{\sim}(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V} \\ DL^s(\vec{u}, \sigma)[\tau] &= \int_{\vec{V}} \tau(J(\vec{u}) - 1) d\vec{V} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{\vec{V}} \left(\frac{\partial W_{sh}}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) + \sigma \frac{\partial J}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) \right) : DC_{\sim}(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V} &= A^e[\vec{w}] \\ \int_{\vec{V}} \tau(J(\vec{u}) - 1) d\vec{V} &= 0 \end{aligned}$$

В этих уравнениях пара \vec{u}, σ есть решение, а \vec{w}, τ – пробные функции, причем $\vec{u}, \vec{w} \in G_u$, $\sigma, \tau \in G_p$. Для задачи несжимаемой упругости пространство G_u является подпространством пространства Соболева W_2^1 , а G_p – подпространство L_2 [13, 16].

Займемся преобразование выражения в скобках в первом уравнении, учитывая, что

$$\frac{\partial W_{sh}}{\partial \vec{C}} : DC_{\sim}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{\partial W_{sh}}{\partial \vec{E}} : DE_{\sim}(\vec{u}, \vec{w}), \quad \frac{\partial J}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) = \frac{1}{2} J \vec{C}^{-1}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{sh}}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) + \sigma \frac{\partial J}{\partial \vec{C}}(\vec{u}) &= \left(\frac{\partial W_{sh}}{\partial \vec{E}} + \sigma J \vec{C}^{-1} \right) : DE_{\sim}(\vec{u})[\vec{w}] \\ &= \left(\vec{S}(\vec{u}) + \sigma J \vec{C}^{-1} \right) : DE_{\sim}(\vec{u})[\vec{w}] \end{aligned}$$

В итоге мы пришли к вариационной постановке для несжимаемого гиперупругого материала в начальной конфигурации

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \left(\bar{S}(\vec{u}) + \sigma J \bar{C}^{-1} \right) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{0}{V} &= A^e(\vec{w}) \\ - \int_{\overset{0}{V}} \tau (J(\vec{u}) - 1) d\overset{0}{V} &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

В текущей конфигурации вариационные уравнения (2.25) переписываются стандартным образом при учете формул связи (1.56)–(1.59) между соответствующими тензорами напряжений \bar{S}, σ и деформаций E, d

$$\begin{aligned} \int_V \left(\bar{\sigma}(\vec{u}) + \sigma I \right) : d[\vec{w}] dV &= A^e(\vec{w}) \\ - \int_V \tau (1 - J(\vec{u})^{-1}) dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

В случае геометрически линейной теории упругости постановку можно получить, переходя к пределу при $\bar{F} \rightarrow \bar{I}$ и оставляя только линейные члены. В результате чего, получим

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \left(\bar{\sigma}[\vec{u}] + \sigma I \right) : \varepsilon[\vec{w}] d\overset{0}{V} &= A^e[\vec{w}] \\ \int_{\overset{0}{V}} \tau \operatorname{div} \vec{u} d\overset{0}{V} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon[\vec{w}] = \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla} \vec{w} + (\overset{0}{\nabla} \vec{w})^T)$ – тензор малых деформаций, а дивидатор напряжений $\bar{\sigma}[\vec{u}]$ законом Гука связан с $\bar{\varepsilon}[\vec{u}]$. В таком случае последнюю систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \left(\sigma[\vec{u}] \operatorname{div} \vec{w} + 2\mu \bar{\varepsilon}[\vec{u}] : \varepsilon[\vec{w}] \right) d\overset{0}{V} &= A^e[\vec{w}] \\ \int_{\overset{0}{V}} \tau \operatorname{div} \vec{u} d\overset{0}{V} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

поскольку для несжимаемой упругой среды при малых деформациях $\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon}$.

2.5. Анизотропная упругая среда.

Моделирование упругой анизотропной среды при больших деформациях может быть основано на использовании упругого потенциала, разработанного для соответствующего типа анизотропии. Чаще всего встречаются трансверсально-изотропный или ортотропный материалы. Таким образом, возникают вопросы на числе независимых инвариантов для этих сред и типе инвариантов. Подробные ответы на эти вопросы можно найти в [6, 15]. Кратко пояснить существо вопроса можно следующим образом.

Начнем с хорошо известного случая изотропной среды. В этом случае инварианты являются таковыми по отношению к любому ортогональному преобразованию системы координат. Потребность именно в таких инвариантах может быть объяснена следующим образом. Рассматривая определяющее соотношение

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}}(\mathbf{C})$$

очевидно, можно сделать вывод, что правая часть должна выглядеть одинаково в любой декартовой системе координат вследствие изотропии материала. Различные декартовы системы координат связаны ортогональными преобразованиями, образующими группу преобразований, соответствующих изотропии. Следовательно, правая часть должна зависеть от величин, которые инвариантны при ортогональных преобразованиях. Число алгебраически независимых инвариантов тензора деформаций Коши-Грина, как и любого симметричного тензора второго ранга, равно трем.

Такое же рассуждение справедливо для трансверсально-изотропной среды. Согласно определению трансверсально-изотропная среда имеет ось трансверсальной изотропии. Направление оси трансверсальной изотропии обусловлено внутренней структурой материала. Эту ось можно принять за одну из осей декартовой системы координат. Две другие оси ортогональны между собой и оси трансверсальной изотропии. В линейной теории упругости в системе координат, связанной с этими осями, имеется пять независимых упругих модулей.

Определяющее соотношение должно иметь одинаковый вид в любой системе координат, полученной из системы, связанной с осями трансверсальной изотропии при помощи преобразований, входящих в группу преобразований трансверсальной изотропии. Эти-

ми преобразованиями являются любые повороты относительно оси трансверсальной–изотропии и отражения относительно координатных плоскостей. На примере волокнистого композита, для которого ось трансверсальной изотропии направлена вдоль волокон, легко понять, почему такие преобразования соответствуют трансверсальной изотропии. Очевидно, что системы координат, полученные при помощи преобразований из этой группы, обладают отличительным свойством: структура среды в них выглядит одинаково.

В случае трансверсально–изотропного материала, правая часть в уравнении состояния должна зависеть только от переменных, инвариантных относительно преобразований трансверсальной изотропии. Если правая часть зависит от компонентов меры деформаций Коши–Грина \tilde{C} , то она может зависеть только от инвариантов этого тензора относительно группы преобразований трансверсальной изотропии. В случае группы преобразований трансверсальной изотропии существует пять независимых инвариантов. Множества независимых инвариантов могут быть выбраны по-разному. Все такие наборы независимых инвариантов могут быть получены алгебраически друг от друга. Например, можно выбрать следующий набор независимых инварианты

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{C}) &= C_{11} + C_{33}, \quad I_2(\mathbf{C}) = C_{11}C_{33} - C_{13}^2, \\ I_3(\tilde{C}) &= \left(\det \mathbf{F}|_{C_{22}=1} \right)^2, \\ I_4(\tilde{C}) &= C_{12}^2 + C_{23}^2, \quad I_5(\tilde{C}) = C_{22} \end{aligned}$$

Выбор множества инвариантов – это в определенной степени вопрос удобства. Кажется, удобно выбрать некоторые инварианты такими же, как и в изотропном случае, поскольку группа преобразований трансверсальной изотропии принадлежит к группе преобразований изотропии. Поэтому можно выбрать также следующие инварианты

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{C}) &= C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad I_2(\tilde{C}) = \frac{1}{2} (I_1^2 - I_1(\mathbf{C}^2)), \\ I_3(\tilde{C}) &= J^2, \quad J = \det F \\ I_4(\tilde{C}) &= C_{12}^2 + C_{23}^2, \quad I_5(\tilde{C}) = C_{22} \end{aligned}$$

Первые три инварианты выбраны такими же, как в случае изотропного материала и еще два инварианты добавлены. Эти инва-

рианты действительно имеют одинаковый вид в любой системе координат, полученной с помощью преобразований трансверсальной изотропии. С другой стороны, не любая система координат может быть получена с помощью таких преобразований. Следовательно, целесообразно переписать инварианты в таком виде, что они могли быть вычислены в любой системе координат. Другими словами, нужно записать инварианты $I_4(\underline{C})$, $I_5(\underline{C})$ в виде, инвариантном, относительно любых преобразований, а не только преобразований из группы трансверсальной изотропии.

Например, инвариант $I_5(\underline{C})$ может быть представлен в виде $I_5(\underline{C}) = \vec{e}_{(2)} \cdot \underline{C} \cdot \vec{e}_{(2)}$, где $\vec{e}_{(2)}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси 2. Теперь $I_5(\underline{C})$ может быть вычислен в любой системе координат следующим образом: $I_5(\underline{C}) = e_{(2)}^i \cdot C_{ij} \cdot e_{(2)}^j$. Инвариант $I_4(\underline{C})$ также может быть записан в форме, инвариантной относительно любого преобразования. Именно, последний инвариант может быть задан в виде $I_4(\underline{C}) = I_5(\underline{C}^2) - I_5^2(\underline{C})$.

Возникает вопрос о том, как выбрать форму самого упругого потенциала. Наиболее простым представляется следующая формула для потенциал в случае трансверсальной изотропии

$$W = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{vol}(J) + W_{tr_sh}(I_4) + W_{L_ext}(I_5)$$

где $W_{tr_sh}(I_4) = \frac{1}{2}a_1 I_4$, $W_{L_ext}(I_5) = \frac{1}{4}b_1(I_5 - 1)^2$. Квадратичный потенциал $\frac{1}{4}b_1(I_5 - 1)^2$ может быть использован, поскольку деформация вдоль волокна обычно является малой. Для волокнистого материала, выбранная выше форма потенциала соответствует представлению всей упругой энергии в виде суммы энергии, аккумулированной в матрице, и энергии, запасенной в волокнах.

Аналогичные рассуждения верны для ортотропного материала. Теперь мы должны рассмотреть группу преобразований ортотропии, которыми являются отражения относительно координатных плоскостей и вращения вокруг осей координат на углы, кратные углу в 90 градусов. Пример структурной ячейки периодичности слоя, имеющего после осреднения ортотропные свойства, приведен на рис. 2.5.

Все предыдущие рассуждения о инвариантности остаются справедливыми в этом случае. В случае ортотропии имеется шесть независимых инвариантов симметричного тензора второго ранга. Мно-

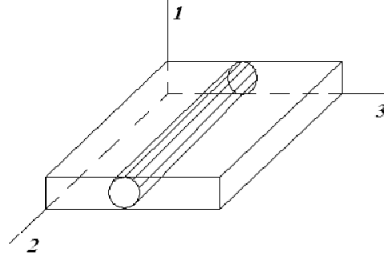


Рис. 2.5 Ячейка периодичности резинокордного слоя, обладающая осредненными ортотропными свойствами.

жество таких инвариантов для меры деформаций Коши–Грина приводится ниже

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{C}) &= C_{12}^2, & I_2(\tilde{C}) &= C_{23}^2, & I_3(\tilde{C}) &= C_{13}^2, \\ I_4(\tilde{C}) &= C_{11}, & I_5(\tilde{C}) &= C_{22}, & I_6(\tilde{C}) &= C_{33} \end{aligned}$$

Эти инварианты выражены через компоненты тензора \tilde{C} в системе координат, связанной с осями ортотропии. Можно выбрать другой набор инвариант для удобства, например

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{C}) &= C_{11} + C_{22} + C_{33}, & I_2(\tilde{C}) &= \frac{1}{2} \left(I_1^2 - I_1(\tilde{C}^2) \right), & I_3(\tilde{C}) &= J^2, \\ I_4(\tilde{C}) &= C_{12}^2 + C_{23}^2, & I_5(\tilde{C}) &= C_{22}, & I_6(\tilde{C}) &= C_{11} \end{aligned}$$

Потенциал для ортотропного материала в наиболее простом виде можно выбрать в следующем виде

$$W = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{vol}(J) + W_{tr_sh}(I_4) + W_{L_tens}(I_5) + W_{tr_comp}(I_6)$$

где

$$W_{tr_sh}(I_4) = \frac{a_1}{2} I_4 + \frac{a_2}{2} C_{12}^2, \quad W_{tr_comp}(I_6) = \frac{1}{4} b_2 (I_6 - 1)^2$$

Конечно, инварианты и не являются независимыми друг от друга. Однако такая форма потенциала является удобной и приводит к уравнению состояния, которое при малых деформациях переходит в

уравнение похожее на стандартное определяющее соотношение линейной теории упругости для ортотропного материала.

Инварианты \bar{I}_1, \bar{I}_2 являются модифицированными первым и вторым инвариантами меры деформаций Коши–Грина \tilde{C} : $\bar{I}_1(\tilde{C}) = I_1(\tilde{C})/I_3^{1/3}(\tilde{C})$, $\bar{I}_2(\tilde{C}) = I_2(\tilde{C})/I_3^{2/3}(\tilde{C})$. Конечно, это то же самое, что первый и второй инварианты, вычисленные от девиатора $\bar{\tilde{C}}$. Во многих случаях "изотропную" часть потенциала можно выбрать, например, в виде потенциала Муни

$$W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3)$$

учитывая, что деформации армированного волокнами резинокорда не являются слишком большими. "Объемная" часть потенциала, например, может выглядеть следующим образом

$$W_{vol} = \frac{K}{2}(J - 1)^2$$

Естественное требование, предъявляемое к упругому потенциалу, состоит в том, что при деформации, стремящейся к нулю, определяющее соотношение должно переходить в закон Гука для соответствующего типа анизотропии. При стремлении деформаций к нулю, определяющее соотношение нелинейной анизотропной теории упругости переходит в соотношение (2.19). Поэтому, должно выполняться уравнение (2.20), где C_{ijkl}^{small} являются теперь модулями упругости анизотропной среды при малых деформациях.

2.6. Соотношения вязко–упругого материала.

построения определяющих соотношений .

Глава 3.

Геометрически нелинейное деформирование с малыми деформациями.

В этой главе рассматривается распространенный случай деформирования, когда повороты материальных частиц большие, но компоненты тензора деформаций малые. В таком случае полярное разложение градиента деформирования [24, 56]

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{U} \quad (3.1)$$

означает, что компоненты тензора поворота $\underset{\sim}{R}$ большие, а компоненты тензора искажений $\underset{\sim}{U}$ – малые. В (3.1) $\underset{\sim}{R}$ – ортогональный тензор, $\underset{\sim}{U}$ – симметричный : $\underset{\sim}{R}^{-1} = \underset{\sim}{R}^T$, $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}^T$

Поскольку тензоры деформаций Кирхгофа и Лагранжа – Грина выражаются через тензор искажений $\underset{\sim}{U}$, то определяющие соотношения можно заимствовать из геометрически линейной теории. Например, в случае упругости между этими тензорами имеет место та же линейная связь с теми же упругими модулями, что и в линейной теории упругости. Однако вследствие больших изменений начальной формы тела необходимо пользоваться геометрически нелинейной теорией деформирования. Таким образом, описываемый тип деформирования является наиболее простым в нелинейной теории, поскольку формулировка определяющего соотношения не вносит дополнительных трудностей по сравнению с геометрически линейной теорией. С другой стороны этот тип деформирования часто реализуется в тонкостенных телах, например, пластинках.

Пример. Как пример, нагрузка может быть сосредоточенной силой. Для гибкой пластины прогибы могут быть значительны и поэтому использовать геометрически линейную теорию не представляется возмож-



Рис. 3.1 Деформирование балки под действием сосредоточенной "мертвой" нагрузки.

ным. Поскольку изменение площадей лицевых поверхностей пластины обычно мало даже при значительных прогибах, то описанная выше модель нагружения вполне подходит для вычисления прогиба пластины. Развивая этот пример, можно указать, что тонкую стальную линейку можно весьма незначительным усилием изогнуть в кольцо. Малость прикладываемых усилий и обратимость деформирования свидетельствуют, что возникающие в линейке деформации малы и существенно меньше предела упругости по деформациям.

Пример. Приведем также пример, показывающий, что тензоры деформаций Лагранжа – Грина и тензор Пиолы – Кирхгофа корректно описывают деформации и напряжения в рассматриваемом случае. Именно, рассмотрим упругий стержень, испытывающий сначала однородную малую деформацию ε вдоль оси X_1 , а затем поворачивающийся на конечный угол φ . На этом примере выясним смысл компонент тензора деформаций Лагранжа – Грина \tilde{E} и введенных в предыдущих параграфах тензоров напряжений. Деформирование задается формулами

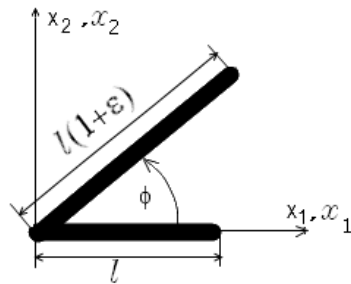


Рис. 3.2 деформирование стержня, испытывающего большой поворот и малое удлинение.

$$x_1 = X_1(1 + \varepsilon) \cos \varphi - X_2 \sin \varphi, \quad x_2 = X_1(1 + \varepsilon) \sin \varphi + X_2 \cos \varphi$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t)$; $\varphi = \varphi(t)$. Прежде всего вычислим декартовы компоненты деформационного градиента \tilde{F} и его скорости $\dot{\tilde{F}}$

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= (1 + \varepsilon) \cos \varphi, & x_{1,2} &= -\sin \varphi, & x_{2,1} &= (1 + \varepsilon) \sin \varphi, \\ x_{2,2} &= \cos \varphi \\ \dot{x}_{1,1} &= \dot{\varepsilon} \cos \varphi - (1 + \varepsilon) \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ \dot{x}_{1,2} &= -\cos \varphi \dot{\varphi}, & \dot{x}_{2,1} &= \dot{\varepsilon} \sin \varphi + (1 + \varepsilon) \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ \dot{x}_{2,2} &= -\sin \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Тогда компоненты тензора деформаций Лагранжа – Грина и их скорости равны

$$E_{ij} = 1/2(x_{m,i}x_{m,j} - \delta_{ij}), \quad \dot{E}_{ij} = 1/2(\dot{x}_{m,i}x_{m,j} + x_{m,i}\dot{x}_{m,j})$$

выражаются следующими формулами при условии, что $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2}[(1 + \varepsilon)^2 - 1] \approx \varepsilon \\ E_{22} &= 0 \\ E_{12} &= 0 \\ \dot{E}_{11} &= \dot{\varepsilon}(1 + \varepsilon) \cos^2 \varphi - (1 + \varepsilon)^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi} + \dot{\varepsilon}(1 + \varepsilon) \sin^2 \varphi + \\ &+ (1 + \varepsilon)^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi} = \dot{\varepsilon}(1 + \varepsilon) \approx \dot{\varepsilon} \\ \dot{E}_{22} &= 0 \\ \dot{E}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, тензор деформаций Лагранжа – Грина не замечает поворота как жесткого целого. Его компоненты и компоненты его скорости такие же, как в состоянии отсутствия поворота, а только растяжения/сжатия вдоль оси X_1 .

Вычислим теперь компоненты тензора напряжений Кирхгофа \tilde{S} . Для этого сначала вычислим компоненты тензора напряжений Коши в повернутой системе координат x'_1, x'_2 . Очевидно, что $\sigma'_{11} = T/A$, а остальные компоненты равны нулю: $\tilde{\sigma} = \sigma'_{11} \tilde{e}_1 \tilde{e}_1$. Здесь T – сила растяжения, а A – площадь поперечного сечения, которая одинакова в начальном и деформированном состояниях в силу малости деформации ε . Учитывая, что компоненты тензора Коши в базисе \tilde{e}_i при малом ε ($J \approx 1$) равны компонентам тензора Пиолы – Кирхгофа в базисе \tilde{E}_i получим, что последний представляется в виде $\tilde{S} = \sigma'_{11} \tilde{k}_1 \tilde{k}_1 = (T/A) \tilde{k}_1 \tilde{k}_1$, где учтено, что $\tilde{E}_i = \tilde{k}_i$. Следовательно, закон Гука, который, очевидно, можно записать в данном примере как $\sigma'_{11} = E\varepsilon$ в терминах тензоров \tilde{E} и \tilde{S} выглядит так $S_{11} = E E_{11}$.

Упражнение. В втором примере сначала происходит поворот, а затем малое удлинение/сжатие вдоль повернутой первой оси

$$\begin{aligned}x_1 &= (X_1 \cos \varphi - X_2 \sin \varphi)(1 + \varepsilon), \\x_2 &= (X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi), \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad \varphi = \varphi(t)\end{aligned}$$

Требуется вычислить компоненты E_{ij} и \dot{E}_{ij} .

Примеры, показывающие смысл компонент тензоров \tilde{S} и \tilde{E} при малых деформациях и больших поворотах, демонстрируют, что эти тензоры подходят для описания указанного типа деформирования. Определяющие соотношения, записываемые с помощью этих тензоров, могут быть разных типов, например: определяющее соотношение упругости

$$\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{E}), \quad (3.2)$$

соотношение гипоупругости

$$\dot{\tilde{S}} = \tilde{C}^E(\tilde{E}) : \dot{\tilde{E}}, \quad (3.3)$$

или соотношение гиперупругости

$$\tilde{S} = \frac{\partial W(\tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \quad (3.4)$$

Формулировка краевой задачи в начальной области с помощью преобразования Пиолы, ровно как и возникшие при этом преобразовании тензор деформаций Лагранжа – Грина и тензор напряжений Кирхгофа оказались весьма удобны для решения задач при деформировании рассматриваемого типа. Конкретные определяющие соотношения могут быть просто перенесены из геометрически линейной теории заменой тензора напряжений и малых деформаций на тензоры \tilde{S} и \tilde{E} . Как обычно, мы требуем, чтобы касательный модуль (тензор модулей упругости), возникающий на основе определяющих соотношений (3.2)–(3.4), удовлетворял условиям (1.75).

3.1. Физически линейная теория упругости

В ряде случаев деформации могут оказаться настолько малыми, что упругий потенциал представляется квадратичной функцией компо-

нент тензора деформаций Лагранжа – Грина. Определяющее соотношение выглядит следующим образом

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{C}^E : \underset{\sim}{E}, \quad \left(W(\vec{u}) = \frac{1}{2} C_{ijkl}^E E_{ij}(\vec{u}) E_{kl}(\vec{u}) \right) \quad (3.5)$$

При этом условия (1.75) приобретают более простой вид

$$c_1 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} \leq \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{C}^E : \underset{\sim}{h} \leq c_2 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h} \quad (3.6)$$

Отношение $\xi_c = c_1/c_2$ равно обратной величине числа обусловленности $Cond(\underset{\sim}{C}^E)$ тензора $\underset{\sim}{C}^E$ и определяет "сложность" решения краевой задачи упругости с тензором $\underset{\sim}{C}^E$. Например, для изотропной теории упругости

$$C_{ijkl}^E = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.7)$$

Нетрудно обнаружить, что $c_1 = 2\mu$ и $c_2 = 3\lambda + 2\mu = 3K$. Следовательно, отношение ξ_c стремится к нулю при приближении свойств материала к несжимаемости, когда $K \rightarrow \infty$. Этот факт объясняет, почему решение задач физически линейной теории упругости усложняется для малосжимаемого материала. Для многих материалов коэффициент Пуассона ν равен $0.2 \div 0.3$, поэтому отношение ξ_c равно $0.33 \div 0.18$.

Линейная теория упругости. В случае, когда материал допустимо считать физически линейным и повороты материальных частиц малы также, как и деформации, применима геометрическая линеаризация. В таком случае имеют место следующие равенства

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\sigma}, \quad \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{\varepsilon}, \quad W(\vec{u}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}, \quad \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{C}^E(0) \quad (3.8)$$

Физически линейная анизотропная среда. Большое значение числа обусловленности $Cond(\underset{\sim}{C}^E)$ возможно также вследствие сильной анизотропии или неоднородности физически линейного упругого материала. Примером служат осредненные материальные свойства резинокорда.

Резинокорд является примером материала, где квадратичный потенциал применим в ряде случаев. Резинокордный материал

представляет собой волокнистый двухкомпонентный композит, причем волокна, которые называются *кордными нитями* или просто *кордами*, располагают так, чтобы их оси лежали в одной плоскости параллельно друг другу. Резинокордные композиты имеют различные технические приложения, но наиболее широко применяются в пневматических шинах. Составными частями резинокорда являются высокоэластическое связующее (резина) и корд. Резину изготавливают на основе различных каучуков, как синтетических (изопреновые, бутадиеновые, бутадиен-стирольные, бутилкаучук), так и натурального. В качестве корда применяют полиэфирный, вискозный, полиамидный корд и металлокорд. Сложные для математического описания свойства резинокорда обусловлены тем, что резинокорд является сильно неоднородным и сильно анизотропным материалом. Хотя он обладает вязкоупругими свойствами, при решении некоторых задач это можно не учитывать и использовать модель гиперупругого материала. Сильная неоднородность означает, что механические свойства корда и резины различаются в сотни и тысячи раз (в зависимости от типа корда). В свою очередь, сильная анизотропия означает, что свойства резинокорда (например, модуль Юнга) по разным направлениям также различаются в сотни раз. Ознакомиться с теорией композитов и резинокордных композитов можно, например, по книгам [36, 25, 42, 55, 12].

Несмотря на то, что отдельные элементы шины испытывают большие деформации, деформации резинокорда являются малыми при многих режимах качения шины. Поэтому определяющее соотношение (3.5) и тем более (3.3) могут быть использованы. Конечно, повороты малыми при этом не являются. Модули упругости C_{ijkl}^E , входящие в определяющее соотношение резинокорда (3.5), являются эффективными модулями C_{ijkl}^{eff} , которые в ряде случаев можно считать независимыми от деформации. Таким случаем является, например, качение по равномерной плоскости. Вычислив C_{ijkl}^{eff} , затем можно определить и отношение $\xi_{c.5}$.

Резинокорд имеет двухуровневую структуру, а именно он может рассматриваться как слоистый композит, в котором слои являются волокнистыми однонаправленными материалами. Это схематично показано на рис. 3.3. Наиболее просто можно вычислить эффективные модули слоя при плоском напряженном состоянии.

Величины, которые характеризуют геометрию слоя резинокорда, изображены на рис.3.4. Система координат LT (она связана с

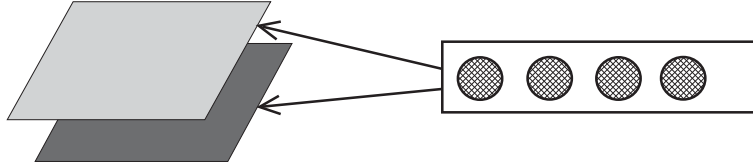


Рис. 3.3 Схематическое изображение двухуровневой структуры резинокорда.

кордом) повернута относительно системы координат XU , связанной с растягивающим усилием, на кордный угол φ . Обычно следующий резинокордный слой ориентирован относительно направления OX под углом $-\varphi$. Объемные концентрации корда и резины определяются по формулам:

$$\gamma_c = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot (p + d) \cdot h}, \quad \gamma_r = 1 - \gamma_c = \frac{4 \cdot (p + d) \cdot h - \pi \cdot d^2}{4 \cdot (p + d) \cdot h}.$$

Продольный модуль Юнга резинокорда E_L можно с хорошей точностью вычислить по правилу смеси с помощью модуля корда E_c и модуля резины E_r

$$E_L = E_c \cdot \gamma_c + E_r \cdot \gamma_r \quad (3.9)$$

Эта формула выводится из предположения об одинаковости дефор-

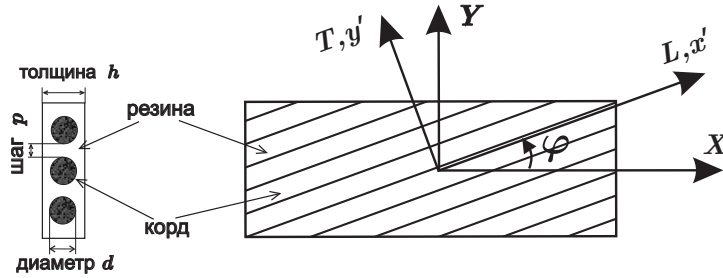


Рис. 3.4 Параметры структуры резинокордного слоя.

маций в обоих компонентах композита. Для вычисления модуля E_T была предложена достаточно точная формула в [11]

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\gamma_c}{E_c} + \frac{\gamma_r}{E_r} - \gamma_c \gamma_r \frac{\left(\frac{\nu_r}{E_r} - \frac{\nu_c}{E_c} \right)^2}{\frac{\gamma_c}{E_r} + \frac{\gamma_r}{E_c}}.$$

Учитывая, что коэффициент Пуассона резины $\nu_r \approx 0.5$ и $E_c \gg E_r$, предыдущая формула упрощается:

$$E_T = \frac{4}{3} \frac{E_r}{\gamma_r} . \quad (3.10)$$

Для плоского напряженного состояния закон Гука для слоя записывается следующим образом в системе координат $Ox'y'$, связанной с кордом:

$$\begin{pmatrix} \langle \varepsilon'_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon'_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon'_{12} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle \sigma'_{11} \rangle \\ \langle \sigma'_{22} \rangle \\ \langle \sigma'_{12} \rangle \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Эффективные модули Юнга E_L и E_T определяются по формулам (3.9) и (3.10). Эффективный коэффициент Пуассона ν_{LT} близок коэффициенту Пуассона резины: $\nu_{LT} \approx \nu_r \approx 0.5$. Для модуля сдвига в плоскости слоя резинокорда хорошую точность обеспечивает формула, аналогичная (3.10) : $G_{LT} = \frac{G_r}{\gamma_r} = \frac{E_r}{2(1+\nu_r)} \cdot \frac{1}{\gamma_r} = \frac{E_r}{3\gamma_r} = \frac{E_T}{4}$. С учётом условия симметрии $\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$ матрица в законе Гука (3.11) принимает следующий вид:

$$[J'^{eff}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{1}{2E_L} & 0 \\ -\frac{1}{2E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{E_T} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Матрица жесткости, обратная матрице податливостей (3.12) равна

$$[C'^{eff}] = \frac{E_L}{E_L - \frac{E_T}{4}} \begin{bmatrix} E_L & \frac{E_T}{2} & 0 \\ \frac{E_T}{2} & E_T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_T}{4} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

При помощи матрицы перехода вычислим матрицу (3.13) в системе координат Oxy . Согласно рис. 3.4 введем обозначения $c = \cos(\varphi)$, $s = \sin(\varphi)$, так что матрица перехода от штрихованной системы координат к нештрихованной описывается следующим образом:

$$\mathbf{T}(\varphi) = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}.$$

Искомая матрица жесткости $[C^{eff}]$ имеет вид: $[C^{eff}] = \mathbf{T}(-\varphi) \cdot [C'^{eff}] \cdot \mathbf{T}^T(-\varphi)$, здесь $[]^T$ — операция транспонирования матрицы. После выполнения всех вычислений при условии $E_L \gg E_T$ получаем

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_k^4 E_L + E_T, & C_{2222} &= s_k^4 E_L + E_T, \\ C_{1122} &= c_k^2 s_k^2 E_L + \frac{E_T}{2}, & C_{1212} &= c_k^2 s_k^2 E_L + \frac{E_T}{4}, \\ C_{1112} &= c_k^3 s_k E_L, & C_{2212} &= c_k s_k^3 E_L. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теперь отношение ξ_c можно найти, определив собственные значения матрицы (3.14) или, что проще, матрицы (3.13), поскольку собственные значения тензора не зависят от представления его компонентами в какой-либо системе координат. Задача на собственные значения для матрицы (3.13) приводит к следующему уравнению, относительно собственных значений $((E_L - c)(E_T - c) - E_T^2/4)(E_T/4 - c) = 0$. Минимальный корень c_1 равен $E_T/4$, максимальный c_2 приближенно равен E_L , поэтому $\xi_c \approx E_T/(4E_L)$. Для резинокорда последнее отношение вполне может достигать значения 0.001, тогда как для таких изотропных материалов, как металлы, природные камни, бетон мы видели, что ξ_c не меньше 0.1. Как уже неоднократно подчеркивалось, величина ξ_c напрямую влияет на сложность решения краевой задачи для материала с тензором модулей упругости \tilde{C}^E .

3.2. Деформационная теория пластичности.

В ряде случаев деформации могут быть малыми, но все же приводить к пластическим деформациям. Примером служат многочисленные практически важные задачи деформирования тонкостенных

тел, например, крэш-тесты легковых автомобилей. В этом случае могут использоваться соотношения типа (3.2), но с разными функциями $\tilde{S}(\tilde{E})$ при нагрузке и разгрузке. Такова деформационная теория пластичности [21], в которой согласно названию в определяющее соотношение входят сами тензоры напряжений и деформаций, а не их скорости. Закон Гука для изотропной среды можно записать отдельно для девиаторов напряжений и деформаций и их шаровых частей

$$\tilde{S} = 2\mu\tilde{E}, \quad \sigma = K\theta,$$

где μ , K – модули сдвига и объемного сжатия, \tilde{S} , \tilde{E} – девиаторы напряжений и деформаций, ε_u – интенсивность деформаций, σ – среднее гидростатическое давление, θ – относительное изменение объема. Определяющие соотношения деформационной теории записываются в виде обобщения предыдущих соотношений

$$\tilde{S} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))\tilde{E}, \quad \sigma = K\theta, \quad (3.15)$$

где ω есть функция, определяющая нелинейность скалярных свойств при пластической деформации. Относительно тензоров – девиаторов напряжений и деформаций первое соотношение (3.15) линейно, но с коэффициентом, который нелинейно зависит от интенсивности деформации ε_u , которая есть инвариант девиатора деформаций. Девиатор напряжений и среднее гидростатическое давление определяются как обычно

$$\tilde{S} = S - \sigma I, \quad \sigma = \frac{I_1(S)}{3}, \quad \left(\tilde{S}_{ij} = S_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{S_{kk}}{3} \right)$$

Определение девиатора деформаций требует пояснений. В параграфе 2.1 уже был определен девиатор градиента деформирования формулой (2.9). Тогда девиатор тензоров \tilde{C} и \tilde{E} определяются в виде

$$\tilde{C} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} = \frac{\tilde{C}}{J^{2/3}}, \quad \tilde{E} = 1/2(\tilde{C} - I).$$

Покажем, что это формула (2.9) в рассматриваемом случае малых деформаций приводит к тому же определению девиатора тензора деформаций Лагранжа–Грина \tilde{E} , которое имеет место в геометрически линейной теории

$$\tilde{E} = E - \frac{\theta}{3}I, \quad \theta = I_1(E) \quad (3.16)$$

Действительно, в случае малых деформаций (но произвольно больших поворотов) тензор \tilde{U} близок к единичному тензору. Поэтому представим $\tilde{U} = \tilde{I} + \delta\tilde{U}$, где $|\delta\tilde{U}| \ll 1$. Тогда справедливы приближенные равенства

$$J = \det \tilde{U} \approx 1 + I_1(\delta\tilde{U}), \quad \tilde{C} \approx \tilde{I} + 2\delta\tilde{U}, \quad \tilde{E} \approx \delta\tilde{U}$$

$$\tilde{\bar{C}} \approx \frac{\tilde{I} + 2\delta\tilde{U}}{\left(1 + \frac{1}{3}I_1(\delta\tilde{U})\right)^2} \approx \tilde{I} + 2\delta\tilde{U} - \frac{2}{3}I_1(\delta\tilde{U})$$

из последней формулы получаем

$$\tilde{\bar{E}} \approx \delta\tilde{U} - \frac{1}{3}I_1(\delta\tilde{U}) \approx \tilde{E} - \frac{1}{3}I_1(\tilde{E})$$

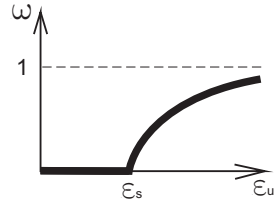


Рис. 3.5 Типичный вид функции ω .

Таким образом, для рассматриваемого типа деформирования можно использовать определение девиатора деформаций (3.16). Интенсивности деформаций и напряжений определяются следующим образом

$$\varepsilon_u = \sqrt{\tilde{\bar{E}} \cdot \tilde{\bar{E}}}, \quad \sigma_u = \sqrt{\tilde{\bar{S}} \cdot \tilde{\bar{S}}}$$

Деформационная теория пластичности была теоретически и экспериментально обоснована для процессов деформирования близким к так называемым простым процессам [21, 22], когда направляющий тензор $\tilde{\bar{E}}/\varepsilon_u$ не изменяется или мало изменяется в процессе деформирования. При этом $\tilde{\bar{S}}/\sigma_u$ также постоянен, причем $\tilde{\bar{E}}/\varepsilon_u = \tilde{\bar{S}}/\sigma_u$. При первоначальном нагружении соотношение упругости имеет место $\tilde{\bar{S}} = 2\mu\tilde{\bar{E}}$ при $\varepsilon_u \leq \varepsilon_s$, т.е. принимается условие начальной текучести Мизеса [21, 5, 33]. Если же интенсивность деформаций ε_u превышает предел упругости ε_s , то выполняется первое соотношение (3.15). Второе соотношение (3.15) выполняется всегда, т.е. принимается, что относительно объемного деформирования материал ведет себя упруго. Обычно в этой связи указывают на опыты Бриджмена [21], которые показали, что для металлов

такое поведение имеет место вплоть до больших давлений. Изменение коэффициента в тензорно-линейном определяющем соотношении (3.15) при переходе из упругости в пластичность регулируется функцией ω , типичный вид которой показан на рис. 3.5. В области упругости функция ω равна нулю.

Из соотношения (3.15) следует связь между интенсивностями напряжений и деформаций

$$\sigma_u = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))\varepsilon_u$$

поэтому соотношение между девиаторами можно записать еще и так

$$\bar{S} \underset{\sim}{=} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \bar{E}$$

Типичный график зависимости $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$ показан на рис. 3.6. Часто обозначают:

$$\Phi'(\varepsilon_u) = \frac{d\Phi}{d\varepsilon_u} = 2\mu_t(\varepsilon_u),$$

где μ_t -касательный модуль сдвига (не следует путать с тензором касательного модуля). Для металлов обычно выполняются условия

$$0 < \mu_t(\varepsilon_u) \leq \mu$$

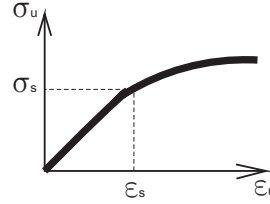


Рис. 3.6 Диаграмма интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

Идеальной пластичностью называется теория, в которой полагается $\sigma'_u = \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} = 0$ в области пластических деформаций на диаграмме $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ (левый рис. 3.7). Ниже будет показано, что в таком случае тензор касательного модуля не положителен и эллиптичность краевой задачи отсутствует. В этом случае развиваемые далее методы численного решения краевых задач не годятся. Другим упрощением диаграммы $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ является диаграмма $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ с линейным упрочнением, показанная на правом рис. 3.7.

Приведенные выше соотношения верны при активном процессе деформирования, т.е. когда $\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} > 0$. В случае разгрузки, когда $\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} < 0$, материал ведет себя упруго и определяющее соотношение

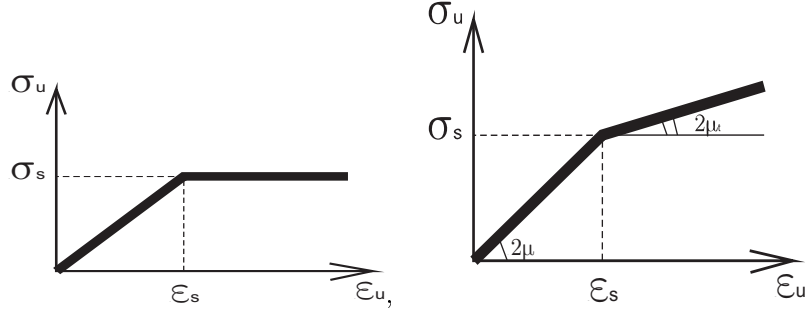


Рис. 3.7 Диаграмма $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ для идеально пластического материала и материала с линейным упрочнением.

для девиаторов имеет вид

$$\bar{\tilde{S}} - \bar{\tilde{S}}^0 = 2\mu \left(\bar{\tilde{E}} - \bar{\tilde{E}}^0 \right)$$

где нулем обозначено состояние в конце нагрузки. Можно также сформулировать определяющие соотношения для многократных смен нагрузок и разгрузок [60].

Удобно ввести следующее обозначение $\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u))$, тогда определяющее соотношение для девиаторов записываются короче

$$\bar{\tilde{S}}_{ij} = 2\mu(\varepsilon_u)\bar{\tilde{E}}_{ij}, \quad \sigma = k\theta$$

Соотношения деформационной теории можно представить в виде, похожем на формулу закона Гука. В декартовых координатах преобразование выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \bar{\tilde{S}}_{ij} + \sigma\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_u)\bar{\tilde{E}}_{ij} + K\theta\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_u)\left(E_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}\right) + K\theta\delta_{ij} = \\ &= 2\mu(\varepsilon_u)E_{ij} + \left[K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)\right]\theta\delta_{ij} = \lambda(\varepsilon_u)\theta\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_u)E_{ij}, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u).$$

Таким образом, соотношения деформационной теории при нагрузке записывается в виде

$$\bar{\tilde{S}} = \lambda(\varepsilon_u)\theta\bar{\tilde{I}} + 2\mu(\varepsilon_u)\bar{\tilde{E}}, \quad \dot{\varepsilon} > 0, \quad (\dot{\varepsilon} \equiv \frac{d\varepsilon_u}{dt})$$

При разгрузке девиаторное определяющее соотношение принимает вид

$$\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0 = \lambda[\theta - \theta^0]\underline{\underline{I}} + 2\mu[\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^0], \quad \dot{\varepsilon} < 0,$$

где НДС в начале разгрузки (конце нагрузки) задается тензорами $\underline{\underline{S}}^0, \underline{\underline{E}}^0$, а $\theta^0 \equiv I_1(\underline{\underline{E}}^0)$.

Вводя тензоры

$$C_{ijkl}^{\text{load}}(\vec{u}) = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ik}\delta_{il} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{ik}),$$

$$C_{ijkl}^{\text{unload}} = \lambda\delta_{ik}\delta_{il} + \mu(\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{ik})$$

определяющее соотношение можно записать короче

$$\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0 = C\{\vec{u}\} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^0),$$

где

$$C\{\vec{u}\} = C^{\text{load}}, \underline{\underline{S}}^0 = \underline{\underline{E}}^0 = 0, \quad \dot{\varepsilon}\{\vec{u}\} > 0, \quad C\{\vec{u}\} = C^{\text{unload}}, \quad \dot{\varepsilon}\{\vec{u}\} < 0$$

Приведем постановку вариационной задачи относительно перемещения при начальном активном нагружении и при мертвой поверхностной нагрузке

$$\int_{\overset{0}{V}} S_{ij}(\vec{u}) DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{0}{V} = A^e[\vec{w}] \quad (3.17)$$

Вариационное уравнение (3.17) обычно записывают короче, вводя функционал

$$\varphi^p(\vec{u})[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} S_{ij}(\vec{u}) DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{0}{V}$$

Функционал φ^p линеен по \vec{w} , но нелинеен по \vec{u} . Конечно, $\varphi^p(\vec{u})[\vec{w}] \neq \varphi^p(\vec{w})[\vec{u}]$. Коротко вариационное уравнение записывается так

$$\varphi^p(\vec{u})[\vec{w}] = A^e[\vec{w}], \quad \vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad \vec{w} = \vec{w}(\vec{x}).$$

Если известно, что происходит процесс первоначальной нагрузки, вариационное уравнение деформационной теории пластичности может быть сформулировано (и решено) для одного отдельно взятого момента t , также как для нелинейной теории упругости. Этот

факт не является удивительным, поскольку в таком случае соотношения деформационной пластичности не отличаются от определяющих уравнений физически нелинейной упругости. Другими словами, вся информация о предшествующем процессе деформирования состоит в сделанном предположении, что происходит первоначальный процесс нагрузки. Кажется, что этот факт позволяет существенно сократить время решения. Однако, как уже отмечалось, при решении задач МДТТ гораздо полезнее (а часто необходимо) проследить весь процесс деформирования от $t = 0$ до момента t . Для этого требуется процесс деформирования дискретизировать, введя $t_n, n = 0, 1, \dots$, и вычислять НДС во все моменты t_n . При решении задач геометрически нелинейной теории такой подход является по существу единственно возможным. Кроме этого, такой подход оказывается более общим, поскольку позволяет прослеживать процесс с произвольной сменой нагрузок и разгрузок.

Теперь можно сформулировать краевую задачу относительно вектора перемещения в случае процесса деформирования со сменой нагрузок и разгрузок [60]. Вариационная задача в момент t_n формулируется следующим образом

$$\varphi^p(\vec{u}^n)[\vec{w}] = A^e[\vec{w}], \quad \varepsilon_u^n > \varepsilon_u^{n-1}, \quad \varphi^e(\vec{u}^n)[\vec{w}] = A^*[\vec{w}], \quad \varepsilon_u^n \leq \varepsilon_u^{n-1}$$

где $\vec{u}^n = \vec{u}(\vec{x}, t^n)$, $\varepsilon_u^n = \varepsilon_u(\vec{u}^n)$ и

$$A^*[\vec{w}] = A^e[\vec{w}] - \int_V (S_{ij}^0(\vec{u}) - C_{ijkl}^{\text{unload}} E_{kl}) DE_{ij}(\vec{u})[\vec{w}] dV^0.$$

Другим вариантом рассматриваемого способа решения служит постановка вариационной задачи в моменты t_n относительно приращений вектора перемещения. В дифференциальной форме задача в каждый момент t формулируется относительно скорости вектора перемещения (или его дифференциала по времени). Формулировка в приращениях является более общей, чем постановка относительно вектора перемещений, и единственно возможной для теорий пластичности и других теорий МДТТ, изначально сформулированных в дифференциальной форме. Примером служит широко используемая теория течения, рассмотренная в следующем параграфе. Деформационную теорию также возможно переформулировать в дифференциальной форме. Для определяющего соотношения при раз-

грузке это сделать совсем просто :

$$\dot{\underset{\sim}{S}} = C^{\text{unload}}_{\sim} \dot{\underset{\sim}{E}},$$

причем $\dot{\underset{\sim}{E}}_{ij} = DE_{ij}(\vec{u})[\vec{v}]$. Касательный модуль $\frac{\partial S}{\partial \underset{\sim}{E}}$ при этом равен просто тензору C^{unload}_{\sim} .

Определяющее соотношение при нагрузке также нужно записать в скоростях

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{ij}} \dot{E}_{ij}.$$

Вычислим касательный модуль при нагрузке, когда определяющее соотношение имеет вид

$$S_{ij} = \lambda(\varepsilon_u) \theta \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_u) E_{ij}$$

где θ есть первый инвариант тензора $\underset{\sim}{E}$ согласно соотношению (3.16). Найдем $\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}}$, учитывая что $\lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)$, $\theta = E_{mn}\delta_{mn}$:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial \lambda(\varepsilon_u)}{\partial \varepsilon_u} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial E_{kl}} \theta \delta_{ij} + \lambda(\varepsilon_u) \frac{\partial \theta}{\partial E_{kl}} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial \mu(\varepsilon_u)}{\partial E_{kl}} E_{ij} + 2\mu(\varepsilon_u) \frac{\partial E_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

Вычислим теперь все слагаемые:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial E_{kl}} &= \frac{\partial E_{mn}}{\partial E_{kl}} \delta_{mn}, & \frac{\partial E_{mn}}{\partial E_{kl}} &= \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{kn}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial E_{kl}} &= \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{kn})\delta_{mn} = \frac{1}{2}(\delta_{kl} + \delta_{kl}) = \delta_{kl} \\ \lambda'(\varepsilon_u) &= \frac{\partial \lambda(\varepsilon_u)}{\partial \varepsilon_u} = -\frac{2}{3} \frac{d\mu(\varepsilon_u)}{d\varepsilon_u} = -\frac{2}{3} \mu'(\varepsilon_u) \\ \frac{\partial \mu(\varepsilon_u)}{\partial E_{kl}} &= \frac{\partial \mu(\varepsilon_u)}{\partial \varepsilon_u} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial E_{kl}} = \mu' \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial E_{kl}} \\ \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial E_{kl}} &= \frac{\partial \sqrt{\bar{E}_{mn}\bar{E}_{mn}}}{\partial E_{kl}} = \frac{1}{2\varepsilon_u} \frac{\partial (\bar{E}_{mn}\bar{E}_{mn})}{\partial E_{kl}} = \frac{\bar{E}_{mn}}{\varepsilon_u} \frac{\partial \bar{E}_{mn}}{\partial E_{kl}} = \\ &= \frac{\bar{E}_{mn}}{\varepsilon_u} \left(\frac{\partial E_{mn}}{\partial E_{kl}} - \frac{\partial \theta}{\partial E_{kl}} \frac{\delta_{mn}}{3} \right) = \\ &= \frac{\bar{E}_{mn}}{\varepsilon_u} \frac{1}{2} (\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk}) - \frac{\bar{E}_{mn}}{\varepsilon_u} \frac{\delta_{kl}\delta_{mn}}{3} = \frac{\bar{E}_{kl}}{\varepsilon_u} \end{aligned}$$

В итоге получаем выражение касательного модуля при нагрузке

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} &= \lambda(\varepsilon_u) \delta_{kl} \delta_{ij} + \mu(\varepsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda' \frac{\bar{E}_{kl}}{\varepsilon_u} \theta \delta_{ij} + 2\mu' \frac{\bar{E}_{kl}}{\varepsilon_u} E_{ij} = \\
&= C_{ijkl}(\varepsilon_u) + 2\mu' \frac{\bar{E}_{kl}}{\varepsilon_u} \left(E_{ij} - \frac{\theta}{3} \delta_{ij} \right) = \\
&= C_{ijkl}(\varepsilon_u) + 2\mu' \frac{\bar{E}_{kl} \bar{E}_{ij}}{\varepsilon_u} \equiv C_{ijkl}^T(\varepsilon_u).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Мы обозначили компоненты касательного модуля как C_{ijkl}^T . Исследуем положительность касательного модуля в случае нагрузки. В случае разгрузки аналогичное исследование уже проделано для физически линейной теории упругости. Рассмотрим квадратичную функцию

$$\varphi^T(\tilde{h}) = C_{ijkl}^T h_{ij} h_{kl} = \lambda(\varepsilon_u) h_{ii} h_{jj} + 2\mu(\varepsilon_u) h_{ij} h_{ij} + 2\mu' \frac{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{kl}}{\varepsilon_u} h_{ij} h_{kl}$$

где учтено (3.18). Представляя тензор \tilde{h} через шаровую и девиаторные части, получим $h_{ij} = \bar{h}_{ij} + \frac{\overset{o}{h}}{3} \delta_{ij}$, $h_{ij} h_{ij} = \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} + \frac{(\overset{o}{h})^2}{3}$; $\overset{o}{h} = h_{kk}$. Тогда

$$\varphi^T = K(\overset{o}{h})^2 + 2\mu(\varepsilon_u) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} + 2\mu' \frac{(\bar{E}_{ij} \bar{h}_{ij})^2}{\varepsilon_u},$$

где учтено, что $\bar{E}_{ij} h_{ij} = \bar{E}_{ij} \bar{h}_{ij}$.

Таким образом, исследование условий, при которых касательный модуль в теории деформационной пластичности положителен, сводится к исследованию положительной определенности функции φ^T . По существу эти условия были впервые сформулированы в [21] и затем с различными обобщениями исследовались многими авторами (см. например [39, 2, 50]. В [21] достаточные условия сформулированы в терминах функции ω . Вспоминая, что $\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u))$, преобразуем выражение φ^T , учитывая, что $\mu'(\varepsilon_u) = -\mu\omega'(\varepsilon_u)$:

$$\varphi^T = K(\overset{o}{h})^2 + 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u)) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} - 2\mu\omega' \frac{(\bar{E}_{ij} \bar{h}_{ij})^2}{\varepsilon_u}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского

$$0 \leq (\bar{E}_{ij} \bar{h}_{ij})^2 \leq (\bar{E}_{ij} \bar{E}_{ij}) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij}, \quad \left(h_u \equiv \sqrt{\bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij}} \right)$$

и учитывая, что обычно $\omega > 0$ и $\omega' > 0$ получаем

$$\varphi^T \geq K(\overset{o}{h})^2 + \underbrace{2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u) - \omega'(\varepsilon_u)\varepsilon_u)}_{2\mu'_t(\varepsilon_u)} h_u^2$$

Поэтому, достаточные условия положительности φ^T состоят в следующем:

$$K > 0, \quad \mu'(\varepsilon_u) \equiv \mu(1 - \omega(\varepsilon_u) - \omega'(\varepsilon_u)\varepsilon_u) > 0$$

В [21] введено условие $1 - \omega(\varepsilon_u) - \omega'(\varepsilon_u)\varepsilon_u > 0$ как достаточное условие сходимости итерационного метода упругих решений. Впоследствии было выяснено, что условие положительности касательного модуля в геометрически линейной теории обеспечивает существование и единственность решения, а также сходимость итерационных процессов, обобщающих метод упругих решений. Эти обобщения также могут названы методами упругих решений [2], хотя в зарубежной литературе на них ссылаются как на модификации методами Ньютона.

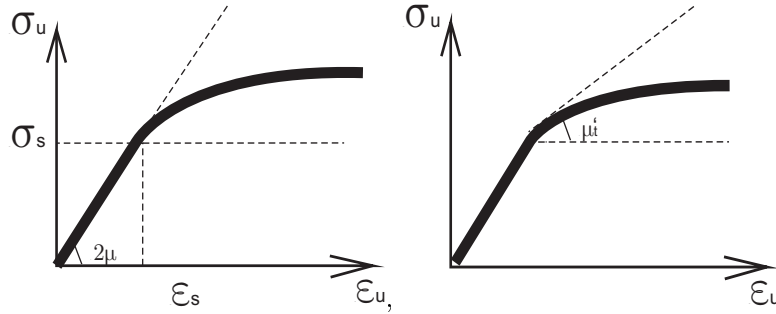


Рис. 3.8

На рис. 3.8 изображен график функции $\sigma_u(\varepsilon_u)$, которая относительно функции ω записывается в виде $\sigma_u(\varepsilon_u) = 2\mu(1 - \omega)\varepsilon_u$. Для упрочняющегося материала тангенс угла наклона касательной к кривой $\sigma_u(\varepsilon_u)$ положителен $\mu^T = \mu'(\varepsilon_u) > 0$ и приведенное выше достаточное условие положительности касательного модуля выполняется. Константа c_1 в неравенствах (1.75) равна $\min(K, \mu^T)$. Для реальных материалов $\min(K, \mu^T) = \mu^T$.

Легко получить и константу c_2 . Действительно, при учете неравенств $\omega > 0$, $\omega' > 0$ получаем, что $\varphi^T \leq K(h^o)^2 + 2\mu h_u^2$. Следовательно, $c_2 = \max(K, \mu)$. Таким образом, для реальных материалов, $c_1 = \mu^T$, $c_2 = K$.

Положительность касательного модуля выполняется для большинства материалов. Однако в экспериментах наблюдаются "падающие" диаграммы, для которых $\mu^{T'} < 0$ (рис. 3.9). В таком случае,

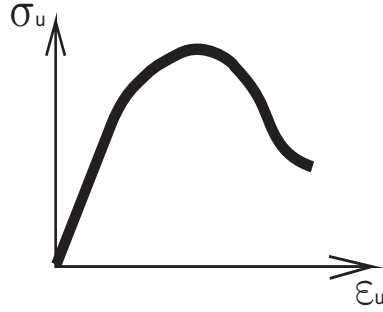


Рис. 3.9 Диаграмма одноосного деформирования с отрицательным касательным модулем сдвига μ^T .

положительности касательного модуля нет, что приводит к отсутствию сильной эллиптичности краевой задачи. Последнее, в свою очередь, вызывает серьезные трудности при численном решении.

В теории пластичности известны постулаты Дракера [19, 5] и Ильюшина [22]. Согласно первому постулату, называемому также постулатом устойчивости материала, отрицательный наклон диаграммы невозможен. Второй постулат допускает наличие отрицательного наклона. "Падающие" диаграммы наблюдаются в экспериментах. Обычно наличие отрицательного наклона объясняется возникновением микро повреждений, которые приводят к уменьшению площади, на которую действует внутренняя сила. В определенном смысле это похоже на уменьшение номинального напряжения при возникновении шейки в опыте на растяжение.

3.3. Теория течения.

Широко применяемой теорией пластичности в настоящее время является теория пластического течения, описанная, например в [5].

В этой теории определяющее соотношения формулируется относительно скоростей деформаций и напряжений. При малых деформациях, но больших искажениях формы тела можно использовать аддитивное разложение для деформаций на упругую и пластическую также, как и в геометрически линейной теории. Далее, согласно (3.16) изменение объема описывается первым инвариантом тензора \tilde{E} . Дифференцируя (3.16) по времени, получим аналогичное равенство, записанное в скоростях

$$\dot{\tilde{E}} = \dot{\tilde{E}} + \frac{\dot{\theta}}{3} \tilde{I}, \quad \dot{\theta} = I_1(\dot{\tilde{E}})$$

В полностью лагранжевом подходе (TL), т.е. при использовании начальной конфигурации в качестве отсчетной, скорость девиатора деформаций $\dot{\tilde{E}}$ предполагается равной сумме скоростей упругой и пластической составляющих: $\dot{\tilde{E}} = \dot{\tilde{E}}^e + \dot{\tilde{E}}^p$, а $\dot{\theta}^p = 0$. Это разложение предполагает, что в процессе деформирования происходит одновременное изменение как упругой (обратимой), так и пластической (необратимой) составляющих деформации. Последнее равенство эквивалентно тому, что $\dot{\theta}^e = \dot{\theta} = I_1(\dot{\tilde{S}})/K$. Дополнительно в теории течения принимаются предположения, сформулированные ниже.

Во-первых, считается, что в любой момент деформирования существует функция нагружения f , задающая поверхность в пространстве напряжений, которая разграничивает область упругих и пластических деформаций. Последнее означает, что f является функцией тензора напряжений \tilde{S} и разграничения задается уравнением $f = 0$. Причем, если $f < 0$, то это соответствует упругости, а при $f > 0$ материальная точка находится в зоне пластических деформаций. В классической теории пластичности для изотропных материалов можно считать, что она зависит только от девиатора тензора напряжений \tilde{S} :

$$f = f(\tilde{S}) \quad (3.19)$$

Поскольку девиатор имеет пять независимых компонент, можно рассматривать поверхность нагружения в пятимерном арифметическом пространстве, используя взаимно-однозначное отображение компонент между девиатором напряжения и вектором напряжения [22].

В теории идеальной пластичности, поверхность нагружения, задаваемая уравнением $f = 0$, не изменяется в процессе деформирования и совпадает с поверхностью, которая имеет место быть в начальный момент деформирования. Чаще всего, уравнение поверхности выбирают согласно критерию возникновения пластических деформаций, предложенному Мизесом

$$\frac{1}{2} \bar{S} : \bar{S} = k_0 \quad (3.20)$$

где k_0 - предел упругости в напряжениях по сдвигу. Поверхность нагружения принято также изображать в пространстве главных напряжений S_1, S_2, S_3 . В этом случае уравнение (3.20) определяет цилиндр с осью, равнонаклоненной ко трем осям главных напряжений (задаваемой уравнением $S_1 = S_2 = S_3$). В

Во-вторых, в ассоциированном варианте теории течения в состоянии активного нагружения ($f = 0, \tilde{S} \cdot \dot{\tilde{E}} > 0$) выполняется закон градиентальности пластического течения, согласно которому скорость пластической составляющей деформации направлена вдоль градиента f

$$\dot{\tilde{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{S}}. \quad (3.21)$$

Ассоциированность означает, что потенциалом для скорости пластической деформации служит та же функция, что задает поверхность текучести.

Упругая часть скорости деформации подчиняется закону Гука, записанному в скоростях

$$\dot{\tilde{E}}^e = \tilde{J} : \dot{\tilde{S}}. \quad (3.22)$$

где тензор податливостей \tilde{J} является обратным, по отношению к тензору модулей упругости \tilde{C} , определяемому компонентами $C_{ijkl} = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

В случае учета упрочнения, функция f зависит еще от некоторых параметров, определяемых процессом деформирования. Поверхность текучести уже не совпадает с начальной, но следует за точкой, изображающей текущее состояние в пространстве напряжений (или девиатора напряжений), таким образом, что эта точка всегда находится на поверхности при активном нагружении. При

разгрузке точка, изображающая напряжение, попадает внутрь поверхности, а при нейтральном нагружении движется по поверхности. Эволюцию поверхности можно задать с помощью параметров в уравнении $f(\tilde{S}) = 0$ в виде комбинации *изотропного* упрочнения с параметром χ и *трансляционного* (или *кинематического*), характеризуемого тензорным параметром α .

В качестве "весового" коэффициента, позволяющего объединить оба эти типа упрочнения, выступает константа β ($0 \leq \beta \leq 1$). Случай $\beta = 0$ соответствует чисто кинематическому упрочнению, а $\beta = 1$ - чисто изотропному упрочнению. При сделанных предположениях функция f имеет вид:

$$f(\tilde{S}, \alpha, \chi) \equiv \frac{1}{2} \xi : \xi - \frac{1}{2} k^2(\chi), \quad \xi = \tilde{S} - \alpha, \quad k(\chi) = k_0 + \chi. \quad (3.23)$$

Уравнение (3.23) задает сферу в пятимерном арифметическом пространстве девятки напряжений, образованном компонентами девятки напряжений (цилиндр в шестимерном пространстве тензора напряжений). При этом кинематическое упрочнение, характеризуемое параметром α , отвечает за перемещение центра поверхности нагружения, а изотропное упрочнение, представляемое параметром χ - за увеличение радиуса k поверхности нагружения. Оба параметра α и k зависят от процесса деформации следующим образом. Предполагается, что они определяются накопленной к данному моменту пластической деформацией. Выберем в качестве меры пластической деформации эквивалентную по Мизесу деформацию E_{eqv}^p :

$$E_{eqv}^p = \int_0^t \sqrt{\dot{E}^p : \dot{E}^p} dt \quad (3.24)$$

Величина E_{eqv}^p является длиной кривой, изображающей процесс пластического деформирования в пятимерном пространстве девятки деформаций.

Функции $\chi(E_{eqv}^p)$ и $\alpha(E_{eqv}^p)$ можно выбрать в виде [69]

$$\chi = \beta \varphi(E_{eqv}^p); \quad \dot{\alpha} = (1 - \beta) \varphi'(E_{eqv}^p) \dot{E}^p \quad (3.25)$$

Сделанные предположения позволяют построить определяющие соотношения модели, записанные в скоростях тензоров напряжений

и деформаций. Дифференцируя f по \bar{S} получим

$$\dot{\bar{E}}^p = \dot{\lambda} \xi, \quad \dot{E}_{eqv}^p = \sqrt{\dot{\bar{E}}^p : \dot{\bar{E}}^p} = \dot{\lambda} \xi_u, \quad \text{где} \quad \xi_u = \sqrt{\xi : \xi} \quad (3.26)$$

Параметр $\dot{\lambda}$ (положительный при нагрузке) можно найти из условия непрерывности поверхности нагружения (непрерывно дифференцируемой зависимости функции f от своих аргументов). При разгрузке $\dot{\lambda} = 0$. Действительно, вычислим производную по времени от выполняющегося в процессе нагружения уравнения $f = 0$:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \bar{S}} : \dot{\bar{S}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} = 0 \quad (3.27)$$

Из определений (3.23) будем иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{S}_{ij}} = \xi_{ij}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = \xi_{kl} \frac{\partial (\bar{S}_{kl} - \alpha_{kl})}{\partial \alpha_{ij}} = -\xi_{ij}, \quad \frac{\partial f}{\partial \chi} = -k$$

В свою очередь, из (3.25) следует, что $\dot{\chi} = \beta \varphi' (E_{eqv}^p) \dot{E}_{eqv}^p$. Подставляя вычисленные частные производные $\dot{\chi}$ и $\dot{\alpha}$ из (3.25) в (3.27) и, учитывая (3.21), получим $\dot{f} = \xi_{ij} \dot{\bar{S}}_{ij} - \dot{\lambda} k^2 \varphi' (E_{eqv}^p)$. Следовательно, уравнение (3.27) приводит выражению параметра $\dot{\lambda}$ в следующем виде

$$\dot{\lambda} = \frac{\xi : \dot{\bar{S}}}{k^2 \varphi' (E_{eqv}^p)}$$

После подстановки последней формулы в (3.21) получаем формулы:

$$\dot{E}_{ij}^p = \frac{\xi_{ij} \xi_{kl}}{k^2 \varphi' (E_{eqv}^p)} \dot{S}_{kl} \quad (3.28)$$

Объединяя выражения (3.22) и (3.28) для тензоров скоростей деформаций в упругой и пластической области, получим определяющие соотношения теории течения для процесса активного нагружения

$$\dot{E}_{ij} = \left(J_{ijkl} + \frac{\xi_{ij} \xi_{kl}}{k^2 \phi' (E_{eqv}^p)} \right) \dot{S}_{kl}, \quad \dot{E}_{ij} = J_{ijkl}^E \dot{S}_{kl} \quad (3.29)$$

$$\dot{S}_{ij} = \left(J_{ijkl} + \frac{\xi_{ij} \xi_{kl}}{k^2 \phi' (E_{eqv}^p)} \right)^{-1} \dot{E}_{kl}, \quad \dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^E \dot{E}_{kl} \quad (3.30)$$

Простое нагружение Аналогично деформационной теории (параграф 3.2) можно рассмотреть простое нагружение, в котором все тензоры, описывающие напряженно-деформированное состояние, изменяются пропорционально одному параметру. Например, $\tilde{S} = g_s(t)\tilde{a}$, где \tilde{a} – постоянный в процессе деформирования тензор. Можно показать, что тогда

$$e_{ij}^p = g_p(t)a_{ij}; \quad \alpha_{ij} = g_\alpha(t)a_{ij}; \quad \xi_{ij} = g_\xi(t)a_{ij}. \quad (3.31)$$

После преобразований формула (3.28) переходит в формулу

$$\dot{E}_{ij}^p = \frac{\dot{S}_{ij}}{\varphi'}, \quad \dot{E}_u^p = \frac{\dot{S}_u}{\varphi'} \quad (3.32)$$

Проинтегрировав второе соотношение (3.32) можно записать

$$S_u = \varphi \left(E_u - \frac{S_u}{2\mu} \right) + k_0 \quad (3.33)$$

Если принять гипотезу линейного закона упрочнения (см. рис. 3.7), то получившееся зависимость $S_u(E_u)$ совпадает с зависимостью из параграфа 3.2:

$$S_u = 2\mu^T E_u + \frac{\mu^T}{\mu^P} k_0 \quad (3.34)$$

Обычно теория течения формулируется в терминах тензоров, определенных в текущей конфигурации. Такую формулировку можно получить, если использовать преобразование определяющего соотношения) к текущей конфигурации. Для гипотезы (3.3) преобразование рассмотрено в следующем параграфе.

3.4. Определяющее соотношение гипотезы упругого материала в текущей конфигурации.

Задача состоит в том, чтобы записать определяющее соотношение (3.3) $\tilde{S} = \tilde{C}^E(\tilde{E}) : \tilde{E}$ в текущей конфигурации. При этом естественно заменить скорость тензора \tilde{E} на тензор скоростей деформаций $\tilde{d} = 1/2(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)$. Такая замена действительно естественна, поскольку оба тензора имеют одинаковые компоненты, но в разных

базисах: начальном и актуальном соответственно. Это следует из формулы, связывающей оба тензора

$$\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{d} \cdot \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\dot{E}} \Rightarrow \underset{\sim}{F}^T \cdot (d_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j) \cdot \underset{\sim}{F} = \dot{E}_{ij} \vec{E}^i \vec{E}^j$$

Последнее соотношение преобразуется к виду $d_{ij} \vec{e}^i \cdot \underset{\sim}{F} \vec{e}^j \cdot \underset{\sim}{F} = \dot{E}_{ij} \vec{E}^i \vec{E}^j$. Если учесть, что $\vec{E}^i = \vec{e}^i \cdot \underset{\sim}{F}$, то $d_{ij} = \dot{E}_{ij}$ и тензоры представляются своими компонентами так

$$\underset{\sim}{d} = d_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = \dot{E}_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$$

$$\underset{\sim}{\dot{E}} = \dot{E}_{ij} \vec{E}^i \vec{E}^j$$

Теперь возникает вопрос, на что заменить скорость тензора $\underset{\sim}{S}$. Ее нельзя заменить просто на скорость тензора Коши. Здесь разумно обратиться к понятию индифферентности тензоров. Чуть позже будет выяснено, что производная тензора Коши не обладает свойством индифферентности и уже поэтому не может входить в определяющее соотношение.

Итак, что такое свойство индифферентности? Под индифферентностью понимается безразличие какой-либо физической тензорной величины по отношению к наложению жесткого движения на процесс деформирования. Наложение состоит в том, что деформируемое тело испытывает дополнительно переносное движение в виде поворота как жесткого целого. Принцип материальной индифферентности [20] состоит в том, что тензоры, входящие в определяющее соотношение не должны меняться при наложении дополнительного вращательного движения или должны поворачиваться вместе с наложенным поворотом. Этот принцип является необходимым условием и выражает, например, тот факт, что определяющее соотношение по-существу не зависит от того, вращается ли система отсчета, относительно которой изучается движение, или нет. Математически принцип выражается так: пусть на деформирование, описываемое тензором $\underset{\sim}{F}$ наложено вращение, выражаемое ортогональным тензором $\underset{\sim}{Q}(t)$, так что сложное движение описывается градиентом деформации $\underset{\sim}{F}^* = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{Q}$, причем $\underset{\sim}{Q}(0) = \underset{\sim}{I}$.

Рассмотрим сначала пример тензора $\underset{\sim}{C}$, который не изменяется вследствие наложения. Действительно, поскольку, $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}$

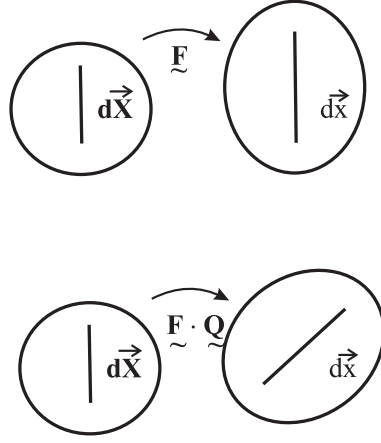


Рис. 3.10 Наложение жесткого поворота.

, то при наложении поворота тензор \tilde{C} преобразуется так $\tilde{C}^* = (\tilde{F}^*)^T \cdot \tilde{F}^* = \tilde{F}^T \cdot (\tilde{Q}^T \cdot \tilde{Q}) \cdot \tilde{F} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} = \tilde{C}$. Таким образом, мера деформаций Коши–Грина является индифферентным тензором. Таким же свойством обладают все рассмотренные ранее тензоры, отнесенные к начальной конфигурации. Иногда, чтобы подчеркнуть неизменность при наложенном вращении, говорят, что тензор является инвариантным [41].

Другие тензоры изменяются при наложении вращения, но тем не менее годятся для использования в определяющих соотношениях. Возникает вопрос, какому условию они должны удовлетворять, чтобы быть пригодными? Рассмотрим, для примера, тензор напряжений Коши $\tilde{\sigma} = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$. Из физических соображений ясно, при наложении поворота, компоненты в повернутом базисе не изменяются $\tilde{\sigma}^* = \sigma^{ij} \vec{e}_i^* \vec{e}_j^*$, $\vec{e}_i^* = \tilde{Q} \cdot \vec{e}_i$ (рис. 3.11).

Неизменность компонент напряжений относительно повернутого базиса обусловлена неизменностью внутренних сил вследствие наложенного вращательного движения, что проиллюстрировано на рис. 3.11, поэтому, если $\vec{n}^* = \tilde{Q} \cdot \vec{n}$, то $\vec{S}_*^n = \tilde{Q} \cdot \vec{S}^n$. Ясно, что компоненты векторов внутренних сил \vec{S}_*^n и \vec{S}^n в соответствующих базисах \vec{e}_i^* и \vec{e}_i одинаковы, поэтому одинаковы и компоненты тензора Коши.

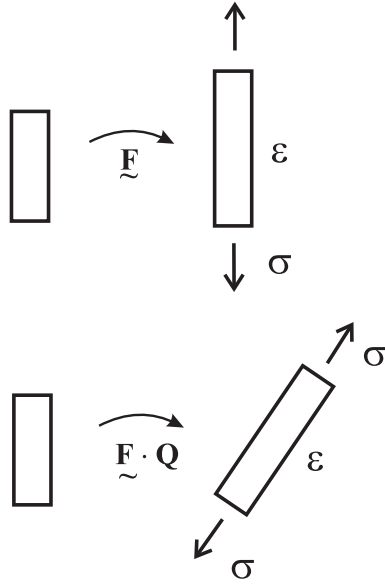


Рис. 3.11 Неизменность напряжений Коши при наложение жесткого поворота.

Следовательно, имеем

$$\underset{\sim}{\sigma}^* = \sigma^{ij} \underset{\sim}{e}_i^* \underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{Q} \cdot \sigma^{ij} \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{Q}^T$$

Последняя формула показывает как меняется тензор Коши, при наложении жесткого поворота. Любой тензор, который изменяется подобным образом называется индифферентным. Как видно, физической основой этого определения, является равенство компонент в исходном и повернутом базисах.

Поскольку из физических соображений компоненты тензора деформаций Коши–Лагранжа не должны меняться при наложении жесткого поворота, то он просто оказывается неизменным. Это верно для любого тензора, который определяется имеющими физический смысл компонентами в базисе начальной конфигурации. Этот базис не изменяется при наложении дополнительного движения, поэтому тензор оказывается независимым от дополнительного жесткого движения.

Инвариантные и индифферентные тензоры называются объек-

тивными. Не все "полезные" векторы и тензоры являются объективными. Объективность есть необходимое условие возможности присутствия того или иного тензора в определяющих соотношениях. Вектор скорости, например, не объективен. Действительно, при наложении вращения радиус-вектор меняется следующим образом $\vec{x}^* = \underline{Q} \cdot \vec{x}$, поэтому $\vec{v}^* = (\vec{x}^*)' = \underline{Q} \cdot \vec{v} + \dot{\underline{Q}} \cdot \vec{x}$ и, следовательно, компоненты вектора скорости в повернутом базисе не равны компонентам в исходном базисе.

Однако тензор скоростей деформаций \underline{d} , который широко используется в определяющих соотношениях, действительно является инвариантным. Этот факт можно продемонстрировать следующими выкладками. Во-первых, $\nabla \vec{v} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}$, поэтому $\nabla^* \vec{v}^* = (\underline{Q} \cdot \underline{F})' \cdot (\underline{Q} \cdot \underline{F})^{-1}$. Используя соотношения $(\underline{Q} \cdot \underline{F})' = \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{F} + \underline{Q} \cdot \dot{\underline{F}}$, $(\underline{Q} \cdot \underline{F})^{-1} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{Q}^{-1} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{Q}^T$, получим $\nabla^* \vec{v}^* = \underline{Q} \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{Q}^T + \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T$. Следовательно, выражение тензора скоростей деформаций имеет вид

$$\underline{d}^* = \frac{1}{2} \left[\underline{Q} \cdot \nabla \vec{v} \cdot \underline{Q}^T + \underline{Q} \cdot (\nabla \vec{v})^T \cdot \underline{Q}^T \right] + \frac{1}{2} \left[\dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T + \underline{Q} \cdot \dot{\underline{Q}}^T \right]$$

Второй член в последнем выражении равен нулю, поскольку из $\underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{I}$ как раз следует, что $\dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T + \underline{Q} \cdot \dot{\underline{Q}}^T = 0$. В итоге получается, что $\underline{d}^* = \underline{Q} \cdot \underline{d} \cdot \underline{Q}^T$, т.е. тензор скоростей деформаций объективен.

Доказательство объективности тензора напряжений Коши также можно осуществить в инвариантном виде, не привлекая компоненты. Действительно, имея равенства $\vec{n}^* = \underline{Q} \cdot \vec{n}$ и $\vec{S}^n_* = \underline{Q} \cdot \vec{S}^n$, получим $\vec{S}^n_* = \underline{\sigma}^* \cdot \vec{n}^* = \underline{Q} \cdot \vec{S}^n = \underline{Q} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{Q}^{-1} \cdot \vec{n}^* = \underline{Q} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{Q}^T \cdot \vec{n}^*$. Следовательно, учитывая произвольность \vec{n}^* , приходим к равенству, которое выражает объективность тензора напряжений Коши $\underline{\sigma}^* = \underline{Q} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{Q}^T$.

Иначе обстоит дело с производной по времени тензора Коши. Из равенства, выражающего собой индифферентность тензора Коши, получаем $\dot{\underline{\sigma}}^* = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} \cdot \underline{Q}^T + \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{Q}^T + \underline{Q} \cdot \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{Q}}^T$. Поэтому скорость тензора Коши не объективна $\dot{\underline{\sigma}}^* \neq \underline{Q} \cdot \dot{\underline{\sigma}} \cdot \underline{Q}^T$.

Конечно, сразу возникает вопрос, как нужно определить ско-

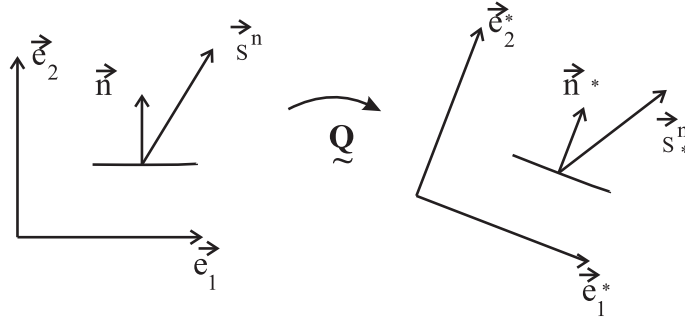


Рис. 3.12 Неизменность компонент вектора внутренних сил и нормали к материальной площадке при наложении жесткого поворота.

рость напряжений, чтобы она была индифферентна. Существует множество вариантов, один из которых состоит в следующем. Тензор Коши выражается через второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа следующим образом $\tilde{\sigma} = J^{-1} \tilde{F} \cdot \tilde{S} \cdot \tilde{F}^T$. Можно формулу для скорости тензора Коши скопировать с этого соотношения

$$\tilde{\sigma}^{TR} = J^{-1} \tilde{F} \cdot \dot{\tilde{S}} \cdot \tilde{F}^T. \quad (3.35)$$

Так определенная производная называется производной Трусдела. Возникает вопрос, почему разумно рассматривать такую производную. Для того, чтобы это понять, представим производную Трусдела через производную компонент тензора Кирхгофа

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{TR} &= J^{-1} \tilde{F} \cdot \left(\dot{\tilde{S}}^{ij} \tilde{E}_i \tilde{E}_j \right) \cdot \tilde{F}^T = J^{-1} \dot{\tilde{S}}^{ij} (\tilde{F} \cdot \tilde{E}_i) (\tilde{E}_j \cdot \tilde{F}^T) = \\ &= J^{-1} \dot{\tilde{S}}^{ij} \tilde{e}_i \tilde{e}_j \end{aligned}$$

Таким образом, производная Трусдела по-существу выражает собой ту же производную компонент, что и производная второго тензора Пиолы–Кирхгофа, но в локальном базисе актуальной конфигурации. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{TR} &= J^{-1} \dot{\tilde{S}}^{ij} \tilde{e}_i \tilde{e}_j \\ \dot{\tilde{S}} &= \dot{\tilde{S}}^{ij} \tilde{E}_i \tilde{E}_j \end{aligned}$$

Последние формулы означают, что одни и те же скорости компонент тензора Кирхгофа приписаны к разным базисам. В случае малых

деформаций, якобиан преобразования Пиолы мало от сличается от единицы и обе производные имеют одинаковые компоненты, но в разных базисах, точно также как сами тензоры.

В общем случае производная Трусдела тензора Коши представляется через его компоненты в актуальном базисе следующим образом

$$\underset{\sim}{\sigma}^{TR} = J^{-1} \frac{d}{dt} (J \sigma^{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (3.36)$$

Вообще говоря, $\underset{\sim}{\sigma}^{TR} \neq (\sigma^{ij}) \cdot \vec{e}_i \vec{e}_j$ но, если деформации малы, а большие только повороты, то $J \approx 1$ и $\dot{J} \approx 0$, тогда $\underset{\sim}{\sigma}^{TR} = (\sigma^{ij}) \cdot \vec{e}_i \vec{e}_j$, т.е. равна производной по времени компонент тензора Коши, но, конечно, не самого тензора. Такое упрощение возможно, в определенной степени, при моделировании резинокордных слоев в шинах.

Определяющее соотношение гипотетического материала, записанное в компонентах относительно локального базиса начальной конфигурации,

$$\dot{S}^{ij} = C_E^{ijkl} \dot{E}_{kl}$$

припишем к актуальному базису

$$\dot{S}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = C_E^{ijkl} \dot{E}_{kl} \vec{e}_i \vec{e}_j \Rightarrow J(\sigma^{TR})^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = C_E^{ijkl} d_{kl} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Теперь лишь осталось записать последнее соотношение в инвариантной форме. Для этого введем тензор материальных констант

$$\underset{\sim}{C}^d = J^{-1} C_E^{ijkl} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l \quad (3.37)$$

С его помощью предыдущее равенство записывается как определяющее уравнение в инвариантном виде

$$\underset{\sim}{\sigma}^{TR} = \underset{\sim}{C}_d : \underset{\sim}{d}$$

Связь между тензорами C^E и C^d проще всего выявить, используя декартову систему координат, учитывая, что $\vec{e}_i = F_{ii'} \vec{k}_{i'}$. Тогда из определения (3.37) следует

$$C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ii'} F_{jj'} F_{kk'} F_{ll'} C_{i'j'k'l'}^E \quad (3.38)$$

Производная Трусдела принадлежит к классу так называемых коротационных производных тензоров, которые получаются, исходя

из дифференцирования по времени компонент тензоров, а не самих тензоров. Подробнее этот вопрос обсуждается в параграфе 4.5 .

Глава 4.

Линеаризированное вариационное уравнение.

Приведенные в главе 3 определяющие соотношения сформулированы либо относительно тензоров напряжений и деформаций, как в деформационной теории пластичности, либо относительно их скоростей, как в теории течения. Определяющее соотношение первого типа может быть приведено к соотношению в скоростях. Однако обратное, вообще говоря, невозможно. Поэтому целесообразно вариационные уравнения также записать в терминах скоростей напряжений и деформаций, что и предстоит проделать в настоящей главе.

4.1. Линеаризация вариационного уравнения по параметру нагружения в начальной конфигурации.

Краевая задача и вариационное уравнение в начальной области имеют вид

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla} \cdot P(\vec{u}) + \rho \vec{f} = 0 \\ P \cdot \vec{N} = \vec{S}(t) \\ \vec{u}|_{\Sigma_1}^0 = 0. \end{cases}, \quad \varphi(\vec{u})[\vec{w}] = A^e[\vec{w}] \quad (4.1)$$

где $\varphi(\vec{u})[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} P(\vec{u}) : \overset{0}{\nabla} w \, dV$. Правая часть A^e при "мертвой"

нагрузке представляет собой такой же линейный функционал, как в геометрически линейной теории упругости. Запись $P(\vec{u})$ означает, что сначала тензор Пиолы выражен через тензор деформаций Лагранжа–Грина \tilde{E} с помощью определяющего соотношения, а затем тензор \tilde{E} выражен через вектор перемещения с помощью соот-

ношения $\tilde{E} = \tilde{I} + \overset{0}{\nabla} \tilde{u} + \overset{0}{\nabla} \tilde{u}^T + \overset{0}{\nabla} \tilde{u}^T \cdot \overset{0}{\nabla} \tilde{u}$.

Наиболее реалистичным методом решения геометрически нелинейных краевых задач является метод линеаризации по параметру нагружения t . Различные варианты реализации такого подхода будут обсуждаться в следующих параграфах и при рассмотрении метода Ньютона. Идея линеаризации состоит в дифференцировании вариационного уравнения по t и получении, тем самым, линейной задачи относительно скорости \vec{v} или дифференциала вектора перемещения \vec{u} . Поскольку при численном решении дифференциал \vec{du} заменяется на приращение $\vec{\Delta}u$, то этот метод часто называют инкрементальным или пошаговым методом. Рассмотрим линеаризацию вариационного уравнений в случае "мертвой" нагрузки. Дифференцируя вариационное уравнение (4.1)

$$\frac{d}{dt} \varphi(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{d}{dt} A^e[\vec{w}]$$

по t , получим

$$\int_{\overset{0}{V}} dP(\vec{u}) : \overset{0}{\nabla} w d\overset{0}{V} = dA^e[\vec{w}], \quad \left(\int_{\overset{0}{V}} dP_{ij} w_{i,j} d\overset{0}{V} = dA^e[\vec{w}] \right)$$

При дифференцировании учитывается, что решение является функцией времени $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$, тогда как пробная функция нет: $\vec{w} = \vec{w}(\vec{X})$.

Для "мертвой" нагрузки дифференциал правой части вариационного уравнения легко вычисляется

$$dA^e[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\rho} d\vec{f}(\vec{X}, t) \cdot \vec{w} d\overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} d\vec{S}^0(\vec{X}, t) \cdot \vec{w} d\overset{0}{\Sigma}$$

Под вектором \vec{S}^0 имеется ввиду преобразование от \vec{S} такое, что $\vec{S}^0 d\overset{0}{\Sigma} = \vec{S} d\Sigma$ или $\vec{S}^0 = \vec{S} J_\Sigma$. Термином "мертвая" нагрузка обозначается поверхностная сила, которая не зависит от деформирования поверхности, т.е. от вектора \vec{u} . Поскольку $J_\Sigma = d\Sigma/d\overset{0}{\Sigma}$ зависит от деформирования поверхности, т.е. от решения краевой задачи, то одновременно "мертвыми" поверхностные силы \vec{S} и \vec{S}^0 быть, вообще говоря, не могут. Это возможно только, если J_Σ не меняется в

процессе деформирования или его изменением можно пренебречь. Рассмотренный в начале главы пример сосредоточенной силы является примером нагрузки, когда последняя может быть "мертвой" одновременно в начальной и текущей конфигурациях, поскольку равенство $\vec{S}^0 = \vec{S}$ выполняется.

Пример. На рис. 4.1 показана снова консольная пластина, нагруженная вертикальной силой $\vec{S}(\vec{x}, t)$. Поскольку для тонкой гибкой пластины изменение площади пропорционально продольной деформации, а прогиб сравним с толщиной, то изменением площадей верхней и нижней поверхностей можно пренебречь. Приближенно выполняется равенство $l = L$ и, следовательно, $\vec{S} \approx \vec{S}^0$.

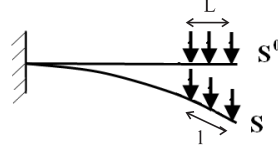


Рис. 4.1 Распределенную нагрузку приближенно можно считать "мертвой" для гибкой пластины.

Сосредоточенная сила \vec{P} (см. рис.3.1) представляет предел, когда $l \rightarrow L$, а $\vec{S}(\vec{x}, t)l = \vec{S}^0(\vec{X}, 0)L = \vec{F}$.

Представим теперь линеаризованное уравнение относительно тензора \vec{S} . Для этого выразим первый тензор Пиолы–Кирхгофа через второй $\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{S}$ и запишем дифференциал $d\vec{P}$, используя правило дифференцирования тензора второго ранга по тензору также второго ранга [24]

$$\begin{aligned} d\vec{P} &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{F}} : d\vec{F} = \frac{\partial (\vec{F} \cdot \vec{S})}{\partial \vec{F}} : d\vec{F} = \left(\vec{I}_4 \cdot \vec{S} + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{F}} \right) : d\vec{F} = \\ &= \left(\vec{I}_4 \cdot \vec{S} + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{E}} : \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{F}} \right) : d\vec{F} \end{aligned}$$

где $\vec{I}_4 = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{F}}$ – тождественный тензор четвертого ранга. В декартовых координатах этот тензор имеет компоненты $(\vec{I}_4)_{ijpq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Тензор $\frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{E}}$ является касательным модулем (см. 1.75 из параграфа 1.5) и обозначается \vec{C}^E . Завершим преобразование, ис-

пользуя декартовы координаты. Во-первых, обозначим компоненты $\left(\tilde{I}_4 \cdot \tilde{S}\right)_{ijkl} = \delta_{ik}S_{jl}$ как C_{ijkl}^G . Поэтому соответствующий член в вариационном уравнении можно записать $C_{ijkl}^G du_{k,l} w_{i,j} = S_{jl} du_{i,l} w_{i,j}$. Во-вторых, вычислим производную, входящую во второй член, учитывая, что $E_{mn} = 1/2(x_{k,m}x_{k,n} - \delta_{mn})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{mn}}{\partial x_{p,q}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial x_{k,m}}{\partial x_{p,q}} x_{k,n} + \frac{1}{2} x_{k,m} \frac{\partial x_{k,n}}{\partial x_{p,q}} = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{kp} \delta_{mq} x_{k,n} + \frac{1}{2} x_{k,m} \delta_{kp} \delta_{nq} = \frac{1}{2} \delta_{kp} (\delta_{mq} x_{k,n} + \delta_{nq} x_{k,m}) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{mq} x_{p,n} + \delta_{nq} x_{p,m}) \end{aligned}$$

Продолжить преобразование можно так

$$\begin{aligned} \left(\tilde{F} \cdot \tilde{C}^E : \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{F}}\right)_{ijpq} &= x_{i,k} C_{kjm n}^E \frac{\partial E_{mn}}{\partial x_{p,q}} = \\ &= \frac{1}{2} C_{kjq n}^E x_{i,k} x_{p,n} + \frac{1}{2} C_{kjm q}^E x_{i,k} x_{p,m} = \\ &= \frac{1}{2} C_{kjq n}^E x_{i,k} x_{p,n} + \frac{1}{2} C_{kjq n}^E x_{i,k} x_{p,n} = \\ &= C_{kjq n}^E x_{i,k} x_{p,n} = C_{ijpq}^{TAN}. \end{aligned}$$

В преобразованиях выше учтена обычная симметрия касательного модуля \tilde{C}^E относительно перестановки индексов.

В итоге вариационное уравнение принимает вид:

$$-\int_{\overset{0}{V}} C_{ijpq}^{TAN} du_{p,q} w_{i,j} dV + \int_{\overset{0}{V}} C_{ijpq}^G du_{p,q} w_{i,j} dV = dA^e[\vec{w}] \quad (4.2)$$

где

$$C_{ijpq}^{TAN} = C_{kjq n}^E x_{i,k} x_{p,n}, \text{ а } C_{ijpq}^G = \delta_{ip} S_{jq} \quad (4.3)$$

Первый член называется касательным поскольку он определяется касательным модулем. Второй член в вариационном уравнении называется геометрическим или начальным. Второе название вызвано тем, что в геометрически линейной теории такого члена нет, если отсутствуют начальные напряжения. Последнее является обычно принимаемым допущением при формулировке большинства

задач механики деформируемого твердого тела. Название геометрический вызвано тем, что этот член появился в линеаризованном вариационном уравнении за счет учета изменения формы тела при деформировании, чего, конечно, нет в геометрически линейной теории.

Вариационное уравнение в инвариантной форме выглядит так

$$\int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN}(\underset{\sim}{F}(\vec{u})) : \overset{0}{\nabla} d\vec{u} d \overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{V}} \underset{\sim}{S} : \left[\overset{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\vec{u} \right] d \overset{0}{V} = d A^e[\vec{w}] \quad (4.4)$$

Тензор $\underset{\sim}{I}_4 = \delta_{ip}\delta_{jq}\vec{k}_i\vec{k}_j\vec{k}_p\vec{k}_q$ есть один из изотропных тензоров четвертого ранга [24] (тензор является изотропным, если его компоненты не изменяются при любом ортогональном преобразовании). Кроме тензора $\underset{\sim}{I}_4$ еще два известных тензора четвертого ранга являются изотропными: $\hat{\underset{\sim}{I}}_4 = \delta_{ij}\delta_{pq}\vec{k}_i\vec{k}_j\vec{k}_p\vec{k}_q$ и $\check{\underset{\sim}{I}}_4 = \delta_{iq}\delta_{jp}\vec{k}_i\vec{k}_j\vec{k}_p\vec{k}_q$. Любая линейная комбинация этих тензоров является изотропным тензором и любой другой изотропный тензор четвертого ранга может быть представлен через эти три тензора [6, 24]. Поэтому общий вид тензорно-линейной связи между тензором напряжением Кирхгофа и тензором деформацией Лагранжа–Грина имеет вид

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{E}, \quad \underset{\sim}{C} = \lambda \hat{\underset{\sim}{I}}_4 + \mu \left(\underset{\sim}{I}_4 + \check{\underset{\sim}{I}}_4 \right), \quad \text{или} \quad (4.5) \\ \underset{\sim}{C}_{ijpq} = \lambda \delta_{ij}\delta_{pq} + \mu (\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

В пространстве симметричных тензоров единичный тензор четвертого ранга есть $\underset{\sim}{I}_4^{sym} = 1/2 \left(\underset{\sim}{I}_4 + \check{\underset{\sim}{I}}_4 \right)$. Он обладает свойством $\underset{\sim}{I}_4^{sym} : \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$ для любого симметричного тензора $\underset{\sim}{A}$.

Дифференцирование вариационного уравнения можно осуществить в инвариантной форме, как это проделано ниже. Для этого будем использовать выражение для $\varphi(\vec{u})[\vec{w}]$, записанное в виде (1.70)

$$\varphi(\vec{u})[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \underset{\sim}{S} : DE(\vec{u})[\vec{w}] d \overset{0}{V}$$

где $DE(\vec{u})[\vec{w}]$ был определен формулой (1.71) $DE(\vec{u})[\vec{w}] = 1/2 \left\{ DF^T[\vec{w}]F(\vec{u}) + F^T(\vec{u})DF[\vec{w}] \right\}$, причем $DF[\vec{w}] = \overset{0}{\nabla} \vec{w}$. Если, в

частности, $\vec{w} = \vec{v}$, то получим полную мощность внутренних сил, которая равна мощности внешних сил

$$N = \int_{\overset{0}{V}} \tilde{S}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{v}] d\overset{0}{V}$$

поскольку $DF[\vec{v}] = \dot{\vec{F}} = \overset{0}{\nabla} \vec{v}$ и $DE(\vec{u})[\vec{v}] = 1/2(\dot{\vec{F}}^T \vec{F} + \vec{F}^T \dot{\vec{F}}) = \dot{\vec{E}}$.

Снова нужно вариационное уравнение, записанное относительно тензоров \tilde{S}, \tilde{E} , продифференцировать по времени. Займемся дифференцированием левой части вариационного уравнения

$$\varphi(\vec{u})[\vec{w}^1] = \int_{\overset{0}{V}} \tilde{S}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}^1] d\overset{0}{V}$$

с помощью дифференциала Гато:

$$\begin{aligned} D\varphi(\vec{u})[\vec{w}^1, \vec{w}^2] &= \frac{d}{d\xi} \int_{\overset{0}{V}} \tilde{S}(\vec{u} + \xi \vec{w}^2) DE(\vec{u} + \xi \vec{w}^2)[\vec{w}^1] \Big|_{\xi=0} d\overset{0}{V} = \\ &= \int_{\overset{0}{V}} \left(DS(\vec{u})[\vec{w}^2] : DE(\vec{u})[\vec{w}^1] + \tilde{S}(\vec{u}) : D^2E(\vec{u})[\vec{w}^1, \vec{w}^2] \right) d\overset{0}{V} \quad (4.6) \end{aligned}$$

Преобразование подынтегрального выражения осуществляется следующим образом. Во-первых, $DS(\vec{u})[\vec{w}^2] = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{E}} : DE(\vec{u})[\vec{w}^2]$, а во-вторых $DE(\vec{u})[\vec{w}^1] = \frac{1}{2} \left((\overset{0}{\nabla} \vec{w}^1)^T \cdot \vec{F}(\vec{u}) + \vec{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{w}^1 \right)$. В третьих, $D^2E(\vec{u})[\vec{w}^1, \vec{w}^2] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} [DF^T(\vec{w}^1) \cdot \vec{F}(\vec{u} + \xi \vec{w}^2) + \vec{F}^T(\vec{u} + \xi \vec{w}^2) \cdot DF(\vec{w}^1)]_{\xi=0} = \frac{1}{2} [DF^T(\vec{w}^1) \cdot DF(\vec{w}^2) + DF^T(\vec{w}^2) \cdot DF(\vec{w}^1)]$.

Подставляя в (4.6), получаем первый член дифференциала Гато

$$\begin{aligned} DS(\vec{u})[\vec{w}^2] : DE(\vec{u})[\vec{w}^1] &= \frac{1}{2} \left((\overset{0}{\nabla} \vec{w}^1)^T \cdot \vec{F} + \vec{F}^T \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{w}^1 \right) : C^E(\vec{u}) \\ &: \left((\overset{0}{\nabla} \vec{w}^2)^T \cdot \vec{F} + \vec{F}^T \cdot \overset{0}{\nabla} \vec{w}^2 \right) = (\overset{0}{\nabla} \vec{w}^1) : C^{TAN} : (\overset{0}{\nabla} \vec{w}^2), \end{aligned}$$

если учесть, что $\frac{\partial S}{\partial \tilde{E}} = \tilde{C}^E(\tilde{u})$.

$$\begin{aligned} \text{Второй член можно преобразовать так } S(\tilde{u}) : D^2 \tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}^1, \tilde{w}^2] = \\ \frac{1}{2} \tilde{S}(\tilde{u}) : \left((\overset{0}{\nabla} \tilde{w}^1)^T \cdot \overset{0}{\nabla} \tilde{w}^2 + (\overset{0}{\nabla} \tilde{w}^2)^T \cdot \overset{0}{\nabla} \tilde{w}^1 \right) = \tilde{S}(\tilde{u}) : \\ \left[(\overset{0}{\nabla} \tilde{w}^1)^T \cdot \overset{0}{\nabla} \tilde{w}^2 \right]. \end{aligned}$$

В итоге получаем выражение дифференциала $D\varphi$

$$\begin{aligned} D\varphi(\tilde{u})[\tilde{w}^1, \tilde{w}^2] = \\ = \int_{\overset{0}{V}} \left[(\overset{0}{\nabla} \tilde{w}^1) : \tilde{C}^{TAN} : \overset{0}{\nabla} \tilde{w}^2 + \tilde{S}(\tilde{u}) : [(\overset{0}{\nabla} \tilde{w}^1)^T \cdot \overset{0}{\nabla} \tilde{w}^2] \right] d \overset{0}{V} \end{aligned}$$

Чтобы перейти от дифференциала Гато к дифференцированию по времени следует положить $\tilde{w}^2 = d\tilde{u}$, $\tilde{w}^1 = \tilde{w}$ и получаем вариационное уравнение

$$\int_{\overset{0}{V}} [(\overset{0}{\nabla} \tilde{w}) : \tilde{C}^{TAN}(\tilde{u}) : \overset{0}{\nabla} d\tilde{u} + \tilde{S}(\tilde{u}) : [(\overset{0}{\nabla} \tilde{w})^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\tilde{u}] d \overset{0}{V} = dA^e[\tilde{w}]$$

Последнее вариационное уравнение удобно для преобразования в уравнение, сформулированное относительно актуальной конфигурации. Отметим, что линеаризованное вариационное уравнение было получено в достаточно общем случае, когда определяющее соотношение имеет вид (типа гипотупругого материала)

$$d\tilde{S} = \tilde{C}^E(\tilde{E}) : d\tilde{E}, \quad \left(\dot{\tilde{S}} = \tilde{C}^E(\tilde{E}) : \dot{\tilde{E}} \right)$$

Гипотупругий материал вовсе не обязан быть чем-то типа упругого материала. Например, теория течения или деформационная теория пластичности при отсутствии смены нагрузки и разгрузки укладываются в такое определяющее уравнение.

Примечательным свойством линеаризованного уравнения является присутствие геометрического члена, которого нет в линейной теории упругости. Приведем простой пример, который демонстрирует роль геометрического члена.

Пример. Рассмотрим равновесие абсолютно гибкой нити длины $2L$, имеющей начальное натяжение T_0 , под действием поперечной силы F ,

приложенной в середине нити (см. рис. 4.2 слева). Пусть u – вертикальное перемещение середины нити, а Δu – приращение. Из правого рисунка 4.2 следуют соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{L}, \quad \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{u + \Delta u}{L}$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) \approx \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta\varphi$, получим связь между

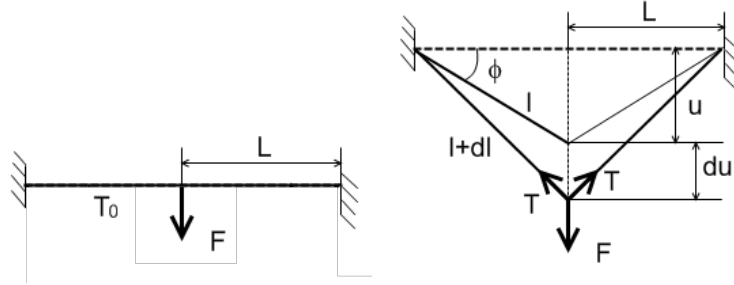


Рис. 4.2 Нить в начальном и деформированном состояниях.

дифференциалами перемещения и угла

$$d\varphi = \cos^2 \varphi \frac{du}{L}$$

Учитывая соотношения, непосредственно вытекающие из правого рисунка 4.2,

$$l \cdot \sin \varphi = u, \quad (l + dl) \sin(\varphi + d\varphi) = u + du$$

получим выражение, связывающее дифференциалы du , dl и $d\varphi$

$$l \cos \varphi d\varphi + dl \sin \varphi = du$$

Исключая $d\varphi$, получаем выражение, связывающее дифференциалы dl и du

$$l \cos^3 \varphi \frac{du}{L} + dl \sin \varphi = du, \quad \Rightarrow \quad dl \sin \varphi = \left(1 - \frac{l}{L} \cos^3 \varphi\right) du$$

Считаем, что при растяжении $T = T(\varepsilon)$, причем $\varepsilon = (l - L)/L$. Отсюда находим т.е. $dT = k \cdot dl/L$, где $k(\varepsilon) = dT/d\varepsilon$ – жесткость на растяжение. Как было выше отмечено, жесткость на изгиб предполагается равной нулю. Из рис. 4.2 также следует, что

$$F = 2T \sin \varphi$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} dF = dT \cdot \sin \varphi + T \cos \varphi d\varphi = \left(k \frac{dl}{L}\right) \sin \varphi + T \cos^3 \varphi \frac{du}{L}$$

В результате находим дифференциал поперечной силы

$$dF = 2k(1 - \frac{l}{L} \cos^3 \varphi) \frac{du}{L} + 2T \cos^3 \varphi \frac{du}{L}$$

Первый член в правой части может быть назван касательным, а второй – геометрическим. Он возникает только, если учитывается изменение геометрии нити, т.е. отклонение угла φ от нуля. Также подходит название начальный, т.к. этот член связан с начальным по отношению к приращению значением силы растяжения нити T . Название касательного члена связано с тем, что он определяется жесткостью нити k , которая называется касательным модулем, поскольку равна тангенсу угла наклона кривой $T = T(\varepsilon)$.

Рассмотрим последнее уравнение в начальном положении, т.е. при $\varphi = 0$. В нем остается только начальный член

$$dF = 2T_0 \frac{du}{L}$$

Если нет начального натяжения T_0 , то $dF = 0$. Это соответствует повседневной практике, из которой хорошо известно, что малое отклонение не натянутой резинки не требует почти никакого усилия. Совсем другое дело, если резинка натянута. Тогда даже малое отклонение потребует усилия. Этот пример показывает, что геометрически член является существенным для тонкостенных тел несмотря на то, что на первый взгляд может показаться обратное поскольку T обычно существенно меньше, чем k .

Вернемся теперь к проблеме линеаризации вариационного уравнения в случае гиперупругости. Наиболее просто линеаризованное уравнение получается при дифференцировании вариационного уравнения, записанного относительно тензора напряжений Пиолы

$$\varphi(\vec{u})[\vec{w}] = A^e[\vec{w}], \quad \vec{u}|_{\Sigma_1^0} = \vec{w}|_{\Sigma_1^0} = 0,$$

где

$$\varphi(\vec{u})[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \frac{\partial W(\vec{u})}{\partial F_{ij}} w_{i,j} dV$$

Дифференцируя предыдущее уравнение по t получим

$$\int_{\overset{0}{V}} \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(\vec{u}) du_{k,l} w_{i,j} dV = dA^e[\vec{w}] \quad (4.7)$$

где

$$dA^e[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \rho \, df_i(t) w_i \, d\overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} dS_i(t) w_i \, d\overset{0}{\Sigma}$$

Если обозначить

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} = C_{ijkl}^F$$

то можно переписать вариационное уравнение в форме, похожей на вариационное уравнение линейной теории упругости

$$\int_{\overset{0}{V}} C_{ijkl}^F du_{k,l} w_{i,j} \, d\overset{0}{V} = dA^e[\vec{w}] \quad (4.8)$$

Вектор $d\vec{u}$ является решением, если (4.8) выполняется для любой пробной функции \vec{w} и для каждого момента t . Отображение на начальную область, как видно, используется в том числе для упрощения дифференцирования по параметру t . Заметим, что дифференцирование вариационного уравнения снова может быть осуществлено с помощью производной Гато, поскольку дифференциал $D\varphi(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}]$ в точности равен левой части уравнения (4.7). Действительно, применив дифференциал к обеим частям уравнения $\varphi(\vec{u}, \vec{w}^1) = A^e[\vec{w}^1]$, получим

$$\begin{aligned} D\varphi(\vec{u})[\vec{w}^1, \vec{w}^2] &= \frac{d}{d\xi} \varphi(\vec{u} + \xi \vec{w}^2, \vec{w}^1)_{\xi=0} = \\ &= \int_{\overset{0}{V}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}(u_{k,l} + \xi \vec{w}_{k,l}^2) \Big|_{\xi=0} w_{k,l}^2 w_{i,j}^1 \, d\overset{0}{V} = \int_{\overset{0}{V}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}(u_{k,l}) w_{k,l}^2 w_{i,j}^1 \, d\overset{0}{V} \end{aligned}$$

Положим $\vec{w}^2 = d\vec{u}$, $\vec{w}^1 = \vec{w}$, получим линеаризованное уравнение (4.8). Поэтому линеаризованное вариационное уравнение можно записать так

$$D\varphi(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] = dA^e[\vec{w}]$$

Линеаризованная краевая задача, соответствующая вариационной (4.8), записывается в виде

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla} \cdot dP + \rho_0 d\vec{f} = 0 \\ dP \cdot \tilde{N}|_{\overset{0}{\Sigma_2}} = d\vec{S}^0 \\ d\vec{u}|_{\overset{0}{\Sigma_1}} = 0. \end{cases}$$

причем $dP = \dot{P}dt$, $d\vec{u} = \vec{v}dt$, $d\vec{f} = \dot{\vec{f}}dt$, $d\vec{S} = \dot{\vec{S}}dt$.

Линеаризованное вариационное уравнение (4.8) или (4.4) (линейное относительно $d\vec{u}$) составляет основу, так называемого, полностью лагранжевого подхода (Total Lagrangian - TL) (см. [43]).

Линеаризованная постановка является основой для различных методов решения, описанных в главе 5. Они получаются заменой дифференциала $d\vec{u}$ на конечное приращение $\delta\vec{u} = \vec{v}\delta t$, $\delta P = \dot{P}\delta t$. В самом простом пошаговом методе (явный метод Эйлера) \tilde{C}^F или \tilde{C}^E берется с предыдущего шага, а приращение перемещения $\delta\vec{u}$ находится из решения линейного вариационного уравнения, после чего перемещение на следующем шаге равно $\vec{u}(t + \delta t) = \vec{u}(t) + \delta\vec{u}$.

4.2. Линеаризация вариационного уравнения в текущей конфигурации. Лагранжев подход с адаптацией.

В предыдущем параграфе линеаризованная вариационная постановка сформулирована в начальной области $\overset{0}{V}$ для любого момента нагружения t , что называется полностью лагранжевым подходом. Неизменность области $\overset{0}{V}$ было использовано при дифференцировании вариационного уравнения по времени. Теперь можно преобразовать линеаризованную постановку к актуальной конфигурации. Преимущество актуальной конфигурации может сказаться при адаптации конечно-элементной сетки. Пока такой метод может рассматриваться просто как другой, причем эквивалентный вариант линеаризованной постановки. Итак, в начальной области (конфигурации) линеаризованная постановка относительно дифференциала перемещения $d\vec{u}$ для случая "мертвой" поверхностной нагрузки имеет вид (4.4) где правая часть имеет вид

$$dA^e[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} d\overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma}} d\vec{S}^0 \cdot \vec{w} d\overset{0}{\Sigma},$$

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t), \vec{w} = \vec{w}(\vec{X}), \quad \vec{f} = \vec{f}(\vec{X}, t), \quad \vec{S}^0 = \vec{S}^0(\vec{X}, t)$$

Такое линеаризованное уравнение имеет место, если определяющее соотношение задается в виде $\dot{\tilde{S}} = \tilde{C}^E(\vec{u}) : \dot{\tilde{E}}$.

Теперь стоит задача сформулировать вариационное уравнение в актуальной конфигурации. Осуществим сначала переход в правой части вариационного уравнения. Преобразование интеграла по области осуществляется с помощью соотношений $\overset{0}{\rho} d\overset{\circ}{V} = \rho dV$ и $d\vec{S} = d\vec{S}^0/J_\Sigma$.

Тогда правую часть линеаризованного вариационного уравнения можно переписать так

$$dA^e = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma$$

Практическим примером "мертвой" нагрузки может служить система сосредоточенных сил $\sum_{i=1}^M \vec{F}_i(\vec{x}, t)$.

Займемся преобразованием левой части вариационного уравнения. Преобразуем первый член, пользуясь декартовой системой координат, при учете (4.3)

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : [\tilde{C}^{TAN}] : \overset{0}{\nabla} d\vec{u} &= \frac{\partial w_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j : [C_{pqrs}^{TAN} \vec{k}_p \vec{k}_q \vec{k}_r \vec{k}_s] : \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \vec{k}_k \vec{k}_l = \\ &= \frac{\partial w_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j : [\frac{\partial x_p}{\partial X_m} C_{mqns}^E \frac{\partial x_r}{\partial X_n} \vec{k}_p \vec{k}_q \vec{k}_r \vec{k}_s] : \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \vec{k}_k \vec{k}_l = \\ &= \frac{\partial w_m}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_p} C_{pqrs}^E \frac{\partial x_n}{\partial X_r} \frac{\partial u_n}{\partial X_s} = \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_p} \frac{\partial x_n}{\partial X_r} \frac{\partial x_l}{\partial X_s} \frac{\partial u_n}{\partial x_l} C_{pqrs}^E = \\ &= \frac{\partial w_m}{\partial x_i} [F_{mp} F_{iq} F_{nr} F_{ls} C_{pqrs}^E] \frac{\partial u_n}{\partial x_l} = \\ &= \frac{\partial w_m}{\partial x_i} [J C_{minl}^d] \frac{\partial u_n}{\partial x_l} = J \nabla \vec{w} : \tilde{C}^d : \nabla d\vec{u} = J d(\vec{w}) : \tilde{C}^d : d(d\vec{u}) \end{aligned}$$

где компоненты тензора \tilde{C}^d в декартовом базисе выражаются через компоненты тензора \tilde{C}^E следующим образом (3.38)

$$C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ii'} F_{jj'} F_{kk'} F_{ll'} C_{i'j'k'l'}^E$$

В итоге первый член в левой части вариационного уравнения переписывается в виде

$$\int_V \nabla \vec{w} : \tilde{C}^d : \nabla d\vec{u}^T dV, \quad (dV = J d\overset{0}{V})$$

Тензор $\underset{\sim}{C}^d$ входит в определяющее соотношение гипотупругости, сформулированное посредством производной Трусдела (3.36)

$$\underset{\sim}{\sigma}^{TR} = \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d}$$

Рассмотрим теперь второй член влевой части вариационного уравнения

$$\int_{\underset{\sim}{V}} \underset{\sim}{S} : [\overset{0}{\nabla} \overset{0}{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\overset{0}{u}] d \overset{0}{V}$$

Используя декартову систему координат, в которой

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nabla} \overset{0}{w}^T &= \frac{\partial w_j}{\partial X_i} \vec{k}_i \vec{k}_j, \quad \overset{0}{\nabla} d\overset{0}{u} = \frac{\partial du_m}{\partial X_n} \vec{k}_m \vec{k}_n, \quad \overset{0}{\nabla} \overset{0}{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\overset{0}{u} \\ &= \frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial du_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j, \quad \underset{\sim}{S} = S_{pq} \vec{k}_p \vec{k}_q \end{aligned}$$

осуществим преобразование

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S} : [\overset{0}{\nabla} \overset{0}{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\overset{0}{u}] &= (S_{pq} \vec{k}_p \vec{k}_q) : \left(\frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial du_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \right) \\ &= S_{ij} \frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial du_m}{\partial X_j} = S_{ij} \frac{\partial w_m}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial du_m}{\partial x_q} \frac{\partial x_q}{\partial X_j} \\ &= S_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_q}{\partial X_j} \frac{\partial w_m}{\partial x_p} \frac{\partial du_m}{\partial x_q} = J \sigma_{pq} \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \frac{\partial du_m}{\partial x_j} = J \underset{\sim}{\sigma} : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla d\vec{u}] \end{aligned}$$

поскольку

$$\underset{\sim}{\sigma} = J^{-1} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{F}^T = J^{-1} F_{pi} F_{qj} S_{ij} \vec{k}_p \vec{k}_q, \quad \sigma_{pq} = J^{-1} F_{pi} F_{qj} S_{ij}$$

Таким образом, преобразование второго члена выглядит так

$$\int_{\underset{\sim}{V}} \underset{\sim}{S} : [\overset{0}{\nabla} \overset{0}{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\overset{0}{u}] d \overset{0}{V} = \int_V \underset{\sim}{\sigma} : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla d\vec{u}] dV$$

В итоге получаем полное вариационное уравнение в текущей (актуальной) конфигурации

$$\int_V \underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) dV + \int_V \underset{\sim}{\sigma} : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla d\vec{u}] dV = A^e[\vec{w}] \quad (4.9)$$

Естественно предполагается, что $du|_{\Sigma_1} = 0$, $w|_{\Sigma_1} = 0$. Полученная формулировка составляет основу, так называемого, лагранжевого подхода с адаптацией (Updated Lagrangian – UL).

Таким образом, вариационные уравнения эквивалентны друг другу для полностью лагранжевого подхода и метода с адаптацией. Но в целом полностью лагранжев в подход и подход с адаптацией не совсем одинаковы в смысле вариационных постановок даже в случае "мертвой" нагрузки. Как уже отмечалось, нагрузка быть "мертвой" одновременно в начальной и текущей конфигурациях, вообще говоря, не может. Еще большее различие наблюдается в случае следящей нагрузки. Метод с адаптацией гораздо удобнее в этом случае, например при нагрузке в виде давления. Сравнение этих подходов в аспекте конечно-элементной дискретизации будет рассмотрено позднее.

В линеаризованных постановках используются определяющие соотношения гипопругости в двух эквивалентных формах

$$\underset{\sim}{\dot{S}} = \underset{\sim}{C}^E : \underset{\sim}{\dot{E}} \quad \text{или} \quad \underset{\sim}{\sigma}^{TR} = \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d}$$

Тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{d}$ часто обозначается как $\underset{\sim}{v}$ и в декартовых координатах выражается известной из курса МСС формулой $\underset{\sim}{v} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\vec{k}_i\vec{k}_j$.

Определяющие соотношения такого типа гипопругости имеют место, конечно, в случае гиперупругого материала

$$\underset{\sim}{S} = \frac{\partial W}{\partial E} \Rightarrow \underset{\sim}{\dot{S}} = \frac{\partial^2 W}{\partial E^2} : \underset{\sim}{\dot{E}} \Rightarrow \underset{\sim}{C}^E = \frac{\partial^2 W}{\partial E^2}(\underset{\sim}{E})$$

Частным случаем может быть квадратичный потенциал с постоянным тензором $\underset{\sim}{C}^E$, тогда $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{C}^E : \underset{\sim}{E}$. Таким образом, определяющие соотношение гипопругого материала является достаточно общим. К нему приводят определяющее соотношение как резины при больших деформациях, так резинокорда при малых. Конечно, к соотношениями гипопругого типа описываются теории пластичности, рассмотренные в параграфах 3.2, 3.3.

-

4.3. Существование и единственность решения линеаризованной задачи теории упругости.

Существование и единственность решения линеаризованного вариационного уравнения могут быть исследованы, используя методы функционального анализа.

Теорема Лакса–Мильграма. Рассматриваем гильбертово пространство G с элементами \vec{w} , такими, что $\vec{w} \in W_2^1$, $\vec{w}|_{\Sigma_1} = 0$. Норма определена соотношением $\|\vec{w}\|_G = \int_V (w_i w_i + w_{i,j} w_{i,j}) dV$. Линеаризованное вариационное уравнение () или () можно переписать в виде

$$a(\vec{u}, \vec{w}) = l(\vec{w}) \quad (4.10)$$

где левая и правая части уравнения (4.10) равны соответствующим частям уравнения (4.17), а элемент $\vec{u} \in G$ есть просто переобозначение дифференциала перемещения $d\vec{u}$.

Теорема Лакса–Мильграма, которая показывает существование и единственность задачи (4.10), формулируется ниже. Изложение следует [13].

Теорема. Пусть выполнены следующие три условия:

1. Билинейный функционал a коэрцитивен (положительно определен)

$$a(\vec{w}, \vec{w}) \geq \delta \|\vec{w}\|_G^2, \quad \delta > 0, \quad \forall \vec{w} \in G \quad (4.11)$$

2. Билинейный функционал a ограничен

$$a(\vec{u}, \vec{w}) \leq M \|\vec{u}\|_G \|\vec{w}\|_G, \quad \forall \vec{u}, \vec{w} \in G \quad (4.12)$$

3. Линейный функционал l представляется в виде скалярного произведения в G

$$l(\vec{w}) = (\vec{F}, \vec{w})_G, \quad \forall \vec{w} \in G \quad (4.13)$$

Тогда решение задачи (4.10) существует и единственно.

Далее для сокращения письма будем опускать индекс G у обозначения нормы или скалярного произведения. Предварительно рассмотрим несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего,

покажем, что вариационное уравнение (4.10) записывается в виде операторного уравнения в G . Действительно, зафиксируем \vec{u} , тогда $a(\vec{u}, \vec{w})$ представляет собой линейный ограниченный функционал относительно \vec{w} в G . Поэтому он представляется в виде $a(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}^*, \vec{w})$ для каждого $\vec{w} \in G$. Очевидно, что $\vec{u}^* = L(\vec{u})$. Оператор L линейен. Действительно, пусть $a(\vec{u}_1, \vec{w}) = (L(\vec{u}_1), \vec{w})$ и $a(\vec{u}_2, \vec{w}) = (L(\vec{u}_2), \vec{w})$. Складывая с коэффициентами α и β , получаем $a(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{w}) = (\alpha L(\vec{u}_1) + \beta L(\vec{u}_2), \vec{w})$ в силу билинейности a и линейности скалярного произведения. Но по определению L имеем $a(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{w}) = (L(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2), \vec{w})$. Следовательно $L(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha L(\vec{u}_1) + \beta L(\vec{u}_2)$.

Итак, для каждого $\vec{w} \in G$ имеем $a(\vec{u}, \vec{w}) = (L(\vec{u}), \vec{w})$. Учитывая, что \vec{w} произвольный элемент в G и третье условие в формулировке теоремы, получаем операторное уравнение

$$L\vec{u} = \vec{F} \quad (4.14)$$

Утверждение. Норма оператора L ограничена константой M из второго условия теоремы.

Доказательство. Действительно, $\|L\vec{w}\|^2 = (L\vec{w}, L\vec{w}) = a(\vec{w}, L\vec{w}) \leq M \|\vec{w}\| \|L\vec{w}\|$. Следовательно, $\|L\vec{w}\| \leq M \|\vec{w}\|$ для каждого $\vec{w} \in G$. Последнее означает, что $\|L\| \leq M$.

Утверждение. Если билинейная форма a симметрична, т.е. $a(\vec{u}, \vec{w}) = a(\vec{w}, \vec{u})$, то $L = L^*$ и $\delta E \leq L \leq ME$. Здесь E тождественный в G оператор, а последнее неравенство расшифровывается в виде

$$\delta(\vec{w}, \vec{w}) \leq (L\vec{w}, \vec{w}) \leq M(\vec{w}, \vec{w})$$

Его принято называть неравенством энергетической эквивалентности оператора L и тождественного оператора, поскольку скалярное произведение $(L\vec{w}, \vec{w})$ называется энергией оператора L . Такое определение вполне понятно, поскольку $(L\vec{w}, \vec{w}) = a(\vec{w}, \vec{w})$ часто представляет некоторую физическую энергию. Например, если a соответствует вариационной задаче теории упругости, то $(L\vec{w}, \vec{w})$ представляет собой энергию упругой деформации.

Доказательство. Симметричность L очевидна. Неравенство эквивалентности также почти очевидно, поскольку из первых двух условий теоремы следует

$$a(\vec{w}, \vec{w}) \geq \delta(\vec{w}, \vec{w})$$

$$a(\vec{w}, \vec{w}) \leq M(\vec{w}, \vec{w})$$

Доказательство теоремы. Для решения уравнения (4.14) применим итерационный процесс

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} - L\vec{u}^n - \vec{F} = 0 \quad (4.15)$$

Имея в виду под \vec{u} решение уравнения (4.14), из (4.15) получаем два равенства

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+1} &= \vec{u}^n - \tau (L\vec{u}^n - \vec{F}) \\ \vec{u} &= \vec{u} - \tau (L\vec{u} - \vec{F}) \end{aligned}$$

Если обозначить

$$S(\vec{w}) = \vec{w} - \tau(L\vec{w} - \vec{F})$$

то последние равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+1} &= S(\vec{u}^n) \\ \vec{u} &= S(\vec{u}) \end{aligned}$$

Ясно, что решение \vec{u} является неподвижной точкой оператора S . Как известно, она существует и единственна, если оператор S является оператором сжатия. Итерационные приближения \vec{u}^n в итерационном процессе сходятся при этом к решению \vec{u} . Покажем теперь, что существуют τ , что оператор S является оператором сжатия.

Доказательство. Оператор S является оператором сжатия, если для любых $\vec{u}, \vec{v} \in G$ выполняется неравенство

$$\|S(\vec{u}) - S(\vec{v})\| \leq \rho \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad (4.16)$$

Вычислим квадрат левой части (4.16), используя вектор $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

$$\begin{aligned} \|S(\vec{u}) - S(\vec{v})\|^2 &= (\vec{w} - \tau L\vec{w}, \vec{w} - \tau L\vec{w}) = \|\vec{w}\|^2 - 2\tau (L\vec{w}, \vec{w}) + \tau^2 \|L\vec{w}\|^2 \\ &\leq (1 - 2\tau\delta + \tau^2 M^2) \|\vec{w}\|^2 = \rho^2 \|\vec{w}\|^2 \end{aligned}$$

Здесь использованы первые два условия теоремы и тот факт, что $\|L\| \leq M$. Таким образом, $\rho^2 = 1 - 2\tau\delta + \tau^2 M^2$. Минимум ρ^2 достигается при $\tau = \delta/M^2$. При таком τ величина ρ^2 равна $1 - \tau^2/M^2$ и, очевидно, меньше единицы. Следовательно, оператор S действительно является оператором сжатия. Следовательно, существует единственное решение уравнения $\vec{u} = S\vec{u}$ или эквивалентного уравнения (4.14).

Следовательно, существует обратный оператор L^{-1} , такой что $\vec{u} = L^{-1}\vec{F}$. Оценим его норму, воспользовавшись неравенством

$$(L\vec{w}, \vec{w})^2 \leq (L\vec{w}, L\vec{w})(\vec{w}, \vec{w})$$

откуда следует, что

$$\|L\vec{w}\| \geq \frac{(L\vec{w}, \vec{w})}{\|\vec{w}\|} = \frac{a(\vec{w}, \vec{w})}{\|\vec{w}\|} \geq \delta \|\vec{w}\|$$

Окончательно, из определения нормы обратного оператора получаем

$$\|L^{-1}\| = \sup_{\vec{F} \neq 0} \frac{\|L^{-1}\vec{F}\|}{\|\vec{F}\|} = \sup_{\vec{w} \neq 0} \frac{\|\vec{w}\|}{\|L\vec{w}\|} \leq \frac{1}{\delta}$$

Таким образом, оценка нормы обратного оператора дается неравенством

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$$

Применение к линейной теории упругости. Вариационное уравнение геометрически линейной теории упругости получается из уравнения (4.4) при стремлении \tilde{F} к единичному тензору, а \tilde{S} к нулю. В итоге, уравнение имеет вид

$$\int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \overset{0}{C} : \overset{0}{\nabla} d\vec{u} d\overset{0}{V} = dA^e[\vec{w}] \quad (4.17)$$

где $\overset{0}{C} = \overset{0}{C}^{TAN}(0)$. Левая часть уравнения (4.17) является билинейным функционалом от $d\vec{u}$ и \vec{w} , а правая часть – линейным функционалом от \vec{w} . Предположим, что речь идет о смешанной краевой задаче, поэтому $d\vec{u} = \vec{w} = 0$ на части границы Σ_1 . В случае линейной теории упругости билинейный функционал $a(\vec{u}, \vec{w})$ согласно (3.8), (4.17) имеет вид

$$a(\vec{u}, \vec{w}) = \int_{\overset{0}{V}} C_{ijkl} \varepsilon_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{k,l}(\vec{w}) d\overset{0}{V} \quad (4.18)$$

Выясним выполнение условий теоремы Лакса–Мильграма для билинейного функционала (4.18). Проверим сначала выполнение первого

условия. Для этого используем первое неравенство (3.6), из которого можно

$$\int_{\overset{0}{V}} C_{ijkl} \varepsilon_{i,j}(\vec{w}) \varepsilon_{k,l}(\vec{w}) dV \geq c_1 \int_{\overset{0}{V}} \varepsilon_{i,j}(\vec{w}) \varepsilon_{i,j}(\vec{w}) dV$$

Упражнение. Показать, что в случае изотропной упругости из (3.7) вытекает, что $c_1 = 2\mu$.

Для дальнейшей оценки следует применить неравенство Корна [], для смешанной краевой задачи записываемое в виде

$$\int_{\overset{0}{V}} \varepsilon_{i,j}(\vec{w}) \varepsilon_{i,j}(\vec{w}) dV \geq c_K \int_{\overset{0}{V}} w_{i,j} w_{i,j} dV$$

Таким образом, мы получаем, что константа δ из первого условия теоремы Лакса–Мильграма равна произведению $c_1 c_K$.

Для проверки второго условия теоремы Лакса–Мильграма используем второе неравенство (3.6).

Существование и единственность решения краевой задачи теории течения.

4.4. Существование и единственность решения краевой задачи деформационной теории пластичности при малых деформациях.

4.5. Коротационные производные.

В параграфе 3.4 производная Трусдела возникла при переносе определяющего соотношения гипотезы упругости в актуальную конфигурацию. В этом параграфе будут описаны некоторые другие коротационные производные по времени. Смысл производной Трусдела тензора напряжений $\tilde{\sigma}$, определенную формулой (3.36), можно понять,

если учесть, что физический смысл имеют скорости изменения компонент тензора напряжений, ровно как сами компоненты. Производная по времени всего тензора напряжений Коши лишена физического смысла, поскольку включает производные векторов базиса, не имеющих физического значения: $\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\sigma}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j + \sigma^{ij} \dot{\vec{e}}_i \vec{e}_j + \sigma^{ij} \vec{e}_i \dot{\vec{e}}_j$.

Однако, производная Трусдела может быть записана и в инвариантной форме, не включающей компонент. Для того, чтобы перейти к инвариантной форме используем следующее выражение для компонент тензора напряжений $\sigma^{ij} = \vec{e}^i \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{e}^j$, которая получается умножением соотношения $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma^{kl} \vec{e}_k \vec{e}_l$ слева и справа на вектора локального базиса \vec{e}_i и \vec{e}_j соответственно. Следовательно, производная Трусдела может быть записана так

$$\underset{\sim}{\sigma}^{TR} = J^{-1} (J \vec{e}^i \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{e}^j) \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Именно пользуясь последним выражением, перейдем к инвариантной записи производной Трусдела. Действительно, дифференцируя последнее выражение производной, получим $\underset{\sim}{\sigma}^{TR} = J^{-1} \left[J \dot{\vec{e}}^i \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{e}^j + J \vec{e}^i \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \dot{\vec{e}}^j + J \vec{e}^i \cdot \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \cdot \vec{e}^j + J \vec{e}^i \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \dot{\vec{e}}^j \right] \vec{e}_i \vec{e}_j$. Далее используем связь векторов базиса в начальной и актуальной конфигурациях $\vec{e}_i = \underset{\sim}{F} \cdot \vec{E}_i$, с помощью которой выразим производные ковариантных векторов базиса в том же базисе $(\vec{e}_j) = \dot{\underset{\sim}{F}} \vec{E}_j = \dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \vec{e}_j$. Произведение $\dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1}$ можно представить в актуальной конфигурации. Для этого, как обычно, применим декартову систему координат

$$\dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \cdot \frac{\partial X_m}{\partial x_n} \vec{k}_m \vec{k}_n = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_n} \vec{k}_i \vec{k}_n = \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \vec{k}_i \vec{k}_n = \nabla \vec{v}$$

Последнее выражение дает представление произведения $\dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1}$ в актуальной конфигурации

$$\dot{\underset{\sim}{F}} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} = \nabla \vec{v} \quad (4.19)$$

Итак, $\dot{\vec{e}}_j = \nabla \vec{v} \cdot \vec{e}_j$. Теперь используем очевидное равенство $\dot{\vec{e}}^i \cdot \vec{e}_j + \vec{e}^i \cdot \dot{\vec{e}}_j = 0$, получающееся дифференцированием соотношения $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i$. Тогда $\dot{\vec{e}}^i \cdot \vec{e}_j = -\vec{e}^i \cdot \nabla \vec{v} \cdot \vec{e}_j$ и, следовательно $\dot{\vec{e}}^i = -\vec{e}^i \cdot \nabla \vec{v}$. Таким

образом, получаем, что

$$\left[\dot{\vec{e}}^i \cdot \underline{\sigma} \cdot \vec{e}^j \right] \vec{e}_i \vec{e}_j = - \left[\vec{e}^i \cdot (\nabla \vec{v} \cdot \underline{\sigma}) \cdot \vec{e}^j \right] \vec{e}_i \vec{e}_j = - \nabla \vec{v} \cdot \underline{\sigma}$$

Аналогично выясняется, что $\left[\vec{e}^i \cdot \underline{\sigma} \cdot \dot{\vec{e}}^j \right] \vec{e}_i \vec{e}_j = - \underline{\sigma} \cdot \nabla \vec{v}^T$.

Осталось преобразовать производную якобиана $J = \frac{dV}{dV} = \frac{\dot{V}}{\dot{V}}$.

Поэтому, $\dot{J} = \frac{0}{\rho} \left(- \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \right) = - J \frac{\dot{\rho}}{\rho} = J \nabla \cdot \vec{v}$. Последнее равенство следует из уравнения неразрывности $\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$. В итоге, производная Трусделла приобретает инвариантную форму записи

$$\underline{\sigma}^{TR} = \dot{\underline{\sigma}} - \nabla \vec{v} \cdot \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \cdot \nabla \vec{v}^T - \underline{\sigma} (\nabla \cdot \vec{v})$$

Производная Трусделла была определена в параграфе 3.4 эквивалентными соотношениями $\sigma^{TR} = J^{-1} \underline{F} \cdot \frac{d}{dt} (J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}) \cdot \underline{F}^T = J^{-1} \underline{F} \cdot \dot{\underline{S}} \cdot \underline{F}^T = J^{-1} \dot{S}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$, где учтено что $J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} = \underline{S}$. Производная Олдройда может быть определена очень похожей цепочкой соотношений

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^{OL} &= \underline{F} \cdot \frac{d}{dt} (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}) \cdot \underline{F}^T \\ &= \underline{F} \cdot \frac{d}{dt} (J^{-1} \underline{S}) \cdot \underline{F}^T = \underline{F} \cdot \frac{d}{dt} (J^{-1} S^{ij} \vec{E}_i \vec{E}_j) \cdot \underline{F}^T \\ &= \frac{d}{dt} (J^{-1} S^{ij}) \underline{F} \cdot \vec{E}_i (\underline{F} \cdot \vec{E}_j) = \frac{d}{dt} (J^{-1} S^{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j \end{aligned}$$

Поскольку компоненты S^{ij} в начальном базисе \vec{E}_i равны компонентам $J \sigma^{ij}$ в текущем базисе, то получаем весьма ясное определение производной Олдройда

$$\underline{\sigma}^{OL} = \dot{S}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (4.20)$$

которое полезно сравнить с определением производной Трусделла (3.36). При малых деформациях ($|U| \ll 1$) изменением объема и скоростью изменения объема можно пренебречь, поэтому оба определения совпадают.

Конечно, производную Олдройда (Oldroyd) можно определить для любого тензора, а не только тензора напряжений

$$\underset{\sim}{a}^{OL} = \dot{a}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Таким образом, производная Олдройда есть производная от контравариантных компонент тензора в текущем лагранжевом базисе. Можно также показать, что

$$\underset{\sim}{a}^{OL} = \dot{\underset{\sim}{a}} - \nabla \vec{v} \cdot \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a} \nabla \cdot \vec{v}^T$$

Производная Коттера - Ривлина (Cotter - Rivlin) определяется на-против как производная от ковариантных компонент

$$\underset{\sim}{a}^{CR} = \dot{a}_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$$

В инвариантной форме производная выглядит так

$$\underset{\sim}{a}^{CR} = \dot{\underset{\sim}{a}} + \nabla \vec{v} \cdot \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a} \cdot \nabla \vec{v}^T$$

Приведем пример дифференцирования по времени тензора деформаций Альманси $\underset{\sim}{A}$. Последний можно определить компонентами $\frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})$ в подвижном базисе \vec{e}^i в отличие от тензора Грина - Лагранжа $\frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})$, задаваемого теми же компонентами, но в неподвижном начальном а базисе \vec{E}^i . То, что тензор Грина - Лагранжа имеет именно такие компоненты следует из определения (1.18). Действительно, $E_{ij} = \vec{E}_i \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \vec{E}_j = \frac{1}{2} \vec{E}_i \cdot \left[(\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{I}) \right] \cdot \vec{E}_j = \frac{1}{2} [\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j - \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j] = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})$, где учтено, что $\vec{e}_i = \underset{\sim}{F} \cdot \vec{E}_i$.

Вернемся к производной Коттера - Ривлина тензора Альманси. Вычисление выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A}^{CR} &= \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = \frac{1}{2} (\dot{\vec{e}}_i \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{e}}_j) \vec{e}^i \vec{e}^j = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \cdot \nabla \vec{v}^T) \vec{e}^i \vec{e}^j = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) = \underset{\sim}{d} \end{aligned}$$

Таким образом, тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{d}$ оказался производной Коттера - Ривлина тензора деформаций Альманси.

Среди коротационных производных есть еще одна знаменитая производная, носящая имя Яуманна (Jaumann). Для того, чтобы понять, каким образом возникает эта производная рассмотрим снова

тот случай деформирования, когда деформации малы, но повороты произвольны. В данном контексте удобно применить теорему о полярном разложении (3.1), утверждающую, что $F = R \cdot U$.

Итак, пусть $U = I + \Delta U$, $|\Delta U| \ll 1$ и $F = \tilde{R} \cdot (\tilde{I} + \tilde{\Delta U})$. Тогда производная Олдройда приближенно может быть вычислена так

$$\tilde{a}^{OL} \approx \tilde{R} \cdot \frac{d}{dt} (\tilde{R}^T \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{R}) \cdot \tilde{R}^T = \dot{\tilde{a}} + \tilde{a} \cdot \dot{\tilde{R}} \cdot \tilde{R}^T + \tilde{R} \cdot \dot{\tilde{R}}^T \cdot \tilde{a}$$

Выясним, что такое есть произведение $\dot{\tilde{R}} \cdot \tilde{R}^T$ в предположении малости ΔU и $\Delta \dot{U}$. В силу (4.19)

$$\dot{\tilde{R}} \cdot \tilde{R}^T \approx \dot{\tilde{F}} \cdot \tilde{F}^T = \nabla v = \tilde{d} + \tilde{w} \approx \tilde{w}$$

где учтено, что, если мал $\Delta \dot{U}$, то мал и \tilde{d} . Следовательно,

$$\tilde{a}^{OL} \approx \dot{\tilde{a}} + \tilde{a} \cdot \tilde{w} + \tilde{w}^T \cdot \tilde{a} = \dot{\tilde{a}} + \tilde{a} \cdot \tilde{w} - \tilde{w} \cdot \tilde{a} = \tilde{a}^J$$

Таким образом, производная Яуманна, определяемая соотношением

$$\tilde{a}^J = \dot{\tilde{a}} + \tilde{a} \cdot \tilde{w} - \tilde{w} \cdot \tilde{a} \quad (4.21)$$

может в случае малых деформаций и их скоростей заменить производные Олдройда и Трусделла в вариационном уравнении.

Пример. Продолжим рассмотрение примера из параграфа 1.4, описывающего меры напряжений и деформаций при одноосном напряженном состоянии. Деформирование стержня (например, вытянутого прямоугольного параллелепипеда, см. рисунок 1.4) задается соотношениями (1.60), которые, если положить $\alpha = 1 + \varepsilon$, $\beta = 1 - \delta$, приобретают вид

$$\begin{aligned} x_1(X_1, X_2, X_3, t) &= (1 + \varepsilon(t))X_1, \\ x_2(X_1, X_2, X_3, t) &= (1 - \delta(t))X_2, \\ x_3(X_1, X_2, X_3, t) &= (1 - \delta(t))X_3. \end{aligned}$$

Градиент деформирования \tilde{F} и тензор деформации Лагранжа–Грина выглядят следующим образом

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta + \frac{1}{2}\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta + \frac{1}{2}\delta^2 \end{bmatrix}$$

а $J = (1 + \varepsilon)(1 - \delta)^2$.

Вначале будем использовать определяющее соотношение в виде линейной связи между тензором напряжений Кирхгофа и Лагранжа Грина

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{E}$$

которое эквивалентно соотношениям, сформулированным относительно скоростей напряжений и деформаций

$$\dot{\underset{\sim}{S}} = \underset{\sim}{C}^E : \dot{\underset{\sim}{E}} \quad \text{или} \quad \underset{\sim}{\sigma}^{TR} = \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d},$$

где $\underset{\sim}{C}^E = \underset{\sim}{C}$, а $\underset{\sim}{C}^d$ выражается через $\underset{\sim}{C}$ согласно (3.38).

В декартовой системе координат в случае изотропной среды определяющее соотношение приобретает вид

$$\begin{aligned} S_{11} &= (\lambda + 2\mu)\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) - 2\lambda\left(\delta - \frac{1}{2}\delta^2\right) \\ S_{22} &= S_{33} = \lambda\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) - 2(\lambda + \mu)\left(\delta - \frac{1}{2}\delta^2\right) \end{aligned}$$

Если ввести обозначения $a = \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2$, $d = \delta - \frac{1}{2}\delta^2$, упрощающие запись, то

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{d}{a} = \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{1 - \frac{\delta}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \quad (4.22)$$

и

$$S_{11} = a \frac{3\mu}{\lambda + \mu} \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) = Ea$$

Из (4.22) следует связь между ε и δ :

$$\delta\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = \nu\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \gamma = 1 - \delta \Rightarrow \gamma^2 = 1 - 2\nu\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Теперь, используя соотношение $\underset{\sim}{\sigma} = J^{-1} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{F}^T$, получим, что $\sigma_{11} =$

$\frac{1}{(1 + \varepsilon)(1 - \delta)^2} (1 + \varepsilon)^2 s_{11} = \frac{(Ea)(1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)^2}$. Окончательно выражение для σ_{11} выглядит следующим образом

$$\sigma_{11} = E \frac{\varepsilon(1 + \frac{\varepsilon}{2})(1 + \varepsilon)}{(1 - 2\nu\varepsilon(1 + \frac{\varepsilon}{2}))} \quad (4.23)$$

Рассмотрим теперь решение той же задачи при определяющем соотношении следующего вида

$$\underset{\sim}{\sigma}^J = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{d}$$

и увидим, что получим совершенно иное решение. Действительно, во-первых, для рассматриваемого деформирования из (4.21) следует, что $\tilde{\sigma}^J = \dot{\tilde{\sigma}}$. Тензор скоростей деформации имеет вид

$$\tilde{d} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\delta}}{1-\delta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\delta}}{1-\delta} \end{pmatrix}$$

Для изотропной среды $\tilde{C} = \lambda \tilde{I} \otimes \tilde{I} + 2\mu \tilde{I}_4$. След тензора \tilde{d} имеет вид $\tilde{I} : \tilde{d} = \frac{(1-\delta)\dot{\varepsilon} - 2\delta(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\delta)}$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} S_{11} &= \lambda \frac{(1-\delta)\dot{\varepsilon} - 2\delta(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\delta)} + 2\mu \frac{\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} \\ S_{22} &= S_{33} = \lambda \frac{(1-\delta)\dot{\varepsilon} - 2\delta(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\delta)} - 2\mu \frac{\dot{\delta}}{1-\delta} \end{aligned}$$

Из последнего уравнения получается дифференциальное соотношение $(1+\varepsilon)\dot{\alpha} = \nu(1-\delta)\dot{\varepsilon}$ или $\frac{d}{dt} \ln(1-\delta) = -\nu \frac{d}{dt} \ln(1+\varepsilon)$. Воспользовавшись начальным условием $\varepsilon(0) = 0$, $\delta(0) = 0$, получим

$$\delta(t) = 1 - (1+\varepsilon)^{-\nu}$$

Подставляя $\delta(t)$ в первое уравнение, получим

$$\dot{\sigma}_{11} = E \frac{\dot{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)}$$

Окончательно, из последнего уравнения и начального условия $\sigma(0) = 0$ следует

$$\sigma_{11} = E \ln(1+\varepsilon)$$

Сравним решения задачи об одноосном растяжении при двух различных определяющих соотношениях. На рис. 4.3 приведено сравнение напряжения σ_{11} в декартовом базисе в зависимости от величины растяжения, измеряемой с помощью инженерной меры деформации $\varepsilon = (l - L)/L$. Как видно, напряжения существенно различаются уже при деформации растяжения около 10%, что типично для случая больших деформаций. Объяснение этого состоит в том, что оба линейных определяющих соотношения, заданных с

помощью производных Трусдела и Яуманна, физически неверны для больших деформаций. При больших деформациях упругого тела следует использовать определяющие соотношения гиперупругого материала, изложенные в главе 2. Линейные соотношения с ротационными производными подходят для описания нелинейного деформирования, сопровождающегося большими поворотами (компонентами тензора поворота \tilde{R}), но малыми компонентами тензора деформаций (Лагранжа–Грина \tilde{E} или любого другого). Такой тип деформирования рассмотрен в главе 3. Ясно, что одноосное растяжение не принадлежит к такому типу деформирования. В литературе и конечно-элементных программах он часто именуется как "Large Displacements". Это название подчеркивает отличие от случая собственно больших деформаций "Large Strains".

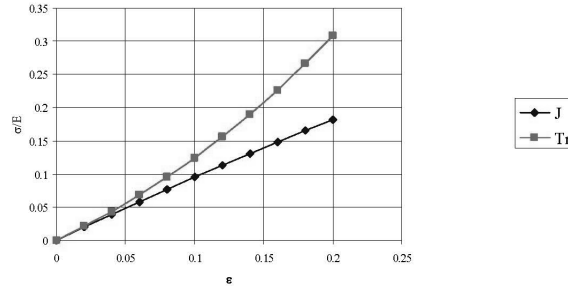


Рис. 4.3 Сравнение одноосного напряжения при использовании производных Трусдела и Яуманна.

4.6. Линеаризация смешанной постановки.

Как уже отмечалось, в случае слабо сжимаемого материала может оказаться целесообразным использование смешанной постановки, описанной в параграфе 2.4. В начальной конфигурации смешанная постановка выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}^0} \left(\tilde{S}(\tilde{u}) + \sigma(J\tilde{C}^{-1})(\tilde{u}) \right) : DE(\tilde{u})[\tilde{w}] d\tilde{V} &= A^e[\tilde{w}], \quad \forall \tilde{w} \\ - \int_{\tilde{V}^0} \tau (J(\tilde{u}) - 1) d\tilde{V} &= 0, \quad \forall \tau \end{aligned} \quad (4.24)$$

где \vec{u}, σ – независимые неизвестные функции, \vec{w}, τ – пробные функции, причем $\vec{u}, \vec{w} \in G_u, \sigma, \tau \in G_p$. В текущей конфигурации та же задача формулируется так

$$\begin{aligned} \int_V \left(\bar{\sigma}(\vec{u}) + \sigma I \right) : d[\vec{w}] dV &= A^e[\vec{w}] \\ - \int_V \tau (1 - J(\vec{u})^{-1}) dV &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Седловой (saddle) функционал записывается согласно (2.24)

$$L^s(\vec{u}, \sigma) = \int_V W_{sh}(\vec{u}) dV - A^e[\vec{u}] + \int_V \sigma (J(\vec{u}) - 1) dV$$

где $L(\vec{u}) = \int_V W_{sh}(\vec{u}) dV - A^e[\vec{u}]$ – функционал Лагранжа, σ – множитель Лагранжа. Вариационные уравнения (4.24) получаются дифференцированием седлового функционала (вычислением дифференциала Гато) и приравниванием производных к нулю

$$\begin{aligned} DL^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}] &= DL(\vec{u})[\vec{w}] + \int_V \sigma D(J(\vec{u})[\vec{w}]) dV = 0, \quad \forall \vec{w} \\ DL^s(\vec{u}, \sigma)[\tau] &= \int_V \tau (J(\vec{u}) - 1) dV = 0, \quad \forall \tau \end{aligned} \quad (4.26)$$

Учитывая, что $\frac{\partial J}{\partial \vec{C}} = \frac{1}{2} J \vec{C}^{-1}$, получим $D(J(\vec{u})[\vec{w}]) = \sigma J \vec{C}^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} DL^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}] &= \int_V \left(\bar{S}(\vec{u}) \right) : DE(\vec{u})[\vec{w}] dV - A^e(\vec{w}) + \\ &+ \int_V \sigma J \vec{C}^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] dV = 0, \quad \forall \vec{w} \\ DL^s(\vec{u}, \sigma)[\tau] &= \int_V \tau (J(\vec{u}) - 1) dV = 0, \quad \forall \tau \end{aligned} \quad (4.27)$$

или

$$\begin{aligned}
DL^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}] &= \int_{\vec{V}} \left(\bar{S}(\vec{u}) \right) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V} - A^e(\vec{w}) + \\
&+ \int_V \sigma \operatorname{div} \vec{w} dV = 0, \\
DL^s(\vec{u}, \sigma)[\tau] &= \int_V \tau (1 - J^{-1}(\vec{u})) dV = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Преобразуя первый интеграл в первом уравнении (4.28), смешанную вариационную систему можно записать в виде (4.25).

Для численного решения задач в смешанной постановке требуется линейаризация системы вариационных уравнений (4.26) или (4.24). Заметим, что обе постановки эквивалентны друг другу в том смысле, что каждый интеграл в одной постановке равен соответствующему интегралу другой постановки. Однако линейаризацию удобнее осуществить для системы (4.24), дифференцирую оба уравнения по параметру t

$$\begin{aligned}
D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, d\vec{u}] + D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, d\sigma] &= 0 \\
D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, d\vec{u}] + D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, d\sigma] &= 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Эту систему дифференциальных уравнений можно решать непосредственно, используя методы, разработанные для систем дифференциальных уравнений (см.). Система (4.29) также полезна для формулировки метода Ньютона в виде ()

$$\begin{aligned}
D^2 L^s(\vec{u}^n, \sigma^n)[\vec{w}, \Delta \vec{u}^{n+1}] + D^2 L^s(\vec{u}^n, \sigma^n)[\vec{w}, \Delta \sigma^{n+1}] + DL^s(\vec{u}^n, \sigma^n)[\vec{w}] &= 0 \\
D^2 L^s(\vec{u}^n, \sigma^n)[\tau, \Delta \vec{u}^{n+1}] + D^2 L^s(\vec{u}^n, \sigma^n)[\tau, \Delta \sigma^{n+1}] + DL^s(\vec{u}^n, \sigma^n)[\tau] &= 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

При этом следующее приближение метода Ньютона находится как

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \Delta \vec{u}^{n+1}, \quad \sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^{n+1}$$

Таким образом, для линейаризации смешанной вариационной задачи нужно вычислить вторые производные Гато от седлового

функционала. Например, $DL^s(\vec{u}, \sigma)[\tau] = \int_V \tau(J(\vec{u}) - 1) d\vec{V}$, тогда

$$D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, \vec{w}] = \int_V \tau D(J(\vec{u}))[\vec{w}] d\vec{V} = \int_V \tau JC^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V} \quad (4.31)$$

В текущей конфигурации последнее интеграл выглядит так

$$D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, \vec{w}] = \int_V \tau \operatorname{div} \vec{w} d\vec{V} = 0$$

Вычислим вторую производную в другом порядке, используя первое уравнение (4.27):

$$D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \tau] = \int_V \tau JC^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V}$$

В текущей конфигурации вторая производная выглядит так

$$D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \tau] = \int_V \tau \operatorname{div} \vec{w} d\vec{V}$$

Можно заметить, что $D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \tau] = D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \tau]$. Очевидно, что вторая производная от L^S по τ равна

$$D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, \tau_1] = \int_V \tau_1 (J(\vec{u}) - 1) d\vec{V}$$

Очевидно, что дифференциал $D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, \tau_1]$ равен нулю, если $J(\vec{u}) = 1$.

Осталось вычислить производную $D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \vec{w}_1]$. Подобное вычисление подробно описано в параграфе (4.1). Согласно уравнению (4.4) результат вычисления в начальной конфигурации выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} D^2L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \vec{w}_1] &= \int_V \vec{w} : C(F(\vec{u})) : \vec{w}_1 d\vec{V} + \\ &+ \int_V S(\vec{u}) : \left[\vec{w}^T \cdot \vec{w}_1 \right] d\vec{V} - dA^e[\vec{w}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= 2 \frac{\partial}{\partial} (\tilde{S} + \sigma J \tilde{C}^{-1}) = 2 \tilde{C}^E + 2 \tilde{C}_\sigma^E, \\ \tilde{C}^E &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{C}}, \quad \tilde{C}_\sigma^E = \sigma J (\tilde{C}^{-1} \tilde{C}^{-1} - 2 \frac{\partial \tilde{C}^{-1}}{\partial \tilde{C}}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

В текущей конфигурации та же самая вторая производная записывается согласно (4.9) так

$$\begin{aligned} D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, \vec{w}_1] &= \int_V \tilde{d}(\vec{w}) : \tilde{C}^d : \tilde{d}(\vec{w}_1) dV + \\ &+ \int_V \tilde{\sigma} : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla \vec{w}_1] dV - A^e[\vec{w}] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Чтобы получить линейризованные вариационные уравнения смешанной постановки, достаточно теперь заменить произвольные функции на дифференциалы решения $\vec{w}_1 = d\vec{u}$, $\tau_1 = d\sigma$ и составить уравнения (4.29), что дает

$$D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, d\vec{u}] + D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\vec{w}, d\sigma] = 0$$

$$D^2 L^s(\vec{u}, \sigma)[\tau, d\vec{u}] = 0$$

Учитывая отмеченную выше симметрию смешанных вторых производных, получаем, что седловая матрица является симметричной.

В итоге искомая линейризованная вариационная седловая задача относительно дифференциалов $d\vec{u}$, $d\sigma$ в начальной конфигурации имеет вид

$$\begin{aligned} \int_V \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \tilde{C}(\tilde{F}(\vec{u})) : \overset{0}{\nabla} d\vec{u} d \overset{0}{V} &+ \int_V \tilde{S}(\vec{u}) : \left[\overset{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\vec{u} \right] d \overset{0}{V} + \\ &+ \int_V d\sigma J \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] d \overset{0}{V} = d A^e[\vec{w}] \\ \int_V \tau J \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : D\tilde{E}(\vec{u})[d\vec{u}] d \overset{0}{V} &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Однако, эта система справедлива, если $J(\vec{u}) = 1$. В силу наличия ошибок округления, последнее условие может выполняться приближенно, поэтому может понадобиться система вида

$$\begin{aligned}
& \int_{\vec{V}} \frac{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}(\underset{\sim}{F}(\vec{u})) : \frac{0}{\nabla} d\vec{u} d\vec{V} + \int_{\vec{V}} \underset{\sim}{S}(\vec{u}) : \left[\frac{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \frac{0}{\nabla} d\vec{u} \right] d\vec{V} + \\
& \quad + \int_{\vec{V}} d\sigma J \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\vec{V} = dA^e[\vec{w}] \\
& \quad \int_{\vec{V}} \tau J \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] d\vec{V} + \int_{\vec{V}} d\sigma (J(\vec{u}) - 1) d\vec{V} = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

4.7. Постановки линейной теории упругости.

4.8. Случай следящей нагрузки.

В вариационных уравнениях, рассматриваемые до сих пор, в правой части стояла только "мертвая" нагрузка. Однако весьма распространенной является следящая нагрузка в виде давления. В этом параграфе линейризованное уравнение будет получено именно для нагрузки в виде давления.

Поверхностная нагрузка равна $\vec{S}^n = -p(t)\vec{n}(\vec{x}, t)$ и вариационное уравнение теперь записывается в виде

$$\int_V \sigma_{\sim}(\vec{u}) : d(\vec{w}) dV = A^e(\vec{u}, t)[\vec{w}]$$

где

$$A^e(\vec{u}, t)[\vec{w}] = \int_{\Sigma_2} p(t)\vec{n}(\vec{u}) \cdot \vec{w}(\vec{x}) d\Sigma$$

Производную по времени от левой части этого уравнения получили в параграфе 4.2. Теперь стоит задача получить производную правой части вариационного уравнения. Для того, чтобы область, по которой вычисляется поверхностный интеграл, была постоянной, снова воспользуемся отображением. Схема отображения

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi_1, \xi_2, t)$$

части поверхности на постоянную во времени область показана на рисунке 4.4. Вопрос о том, как конструктивно задать такое отображение, достаточно просто решается на конечно-элементном уровне. Поскольку отображению подлжит одна из граней конечного элемента, т.е. малая область, то не сложно записать функции, задающие отображение.

Используя касательные векторы $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ элемент поверхности и единичный вектор нормали можно представить следующим образом

$$d\Sigma = |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2}{|\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|}, \quad \vec{\tau}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i}$$

Поэтому правая часть вариационного уравнения записывается в виде

$$A^p = - \int_{\Sigma_2^\xi} p(t) (\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2) \cdot \vec{w} d\Sigma_\xi$$

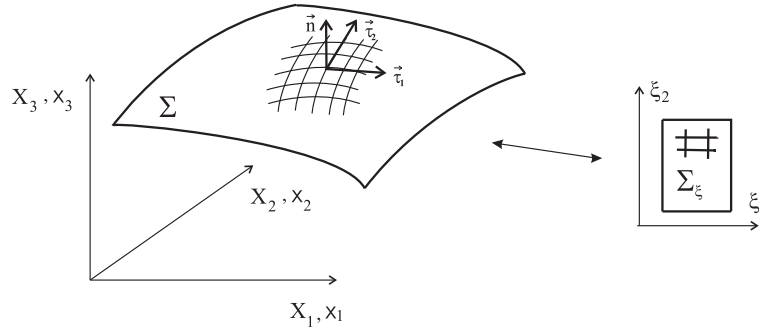


Рис. 4.4 Отображение поверхности на неподвижную область.

Поскольку область Σ_ξ не зависит от времени, то последнее выражение работы вполне удобно для дифференцирования

$$\dot{A}^p = - \int_{\Sigma_2^\xi} \dot{p}(t) (\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2) \cdot \vec{w} d\Sigma_\xi - \int_{\Sigma_2^\xi} p(t) (\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2)' \cdot \vec{w} d\Sigma_\xi = \dot{A}_1^p + \dot{A}_2^p$$

Дифференцирование векторного произведения $(\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2)' = (\vec{\tau}_1)' \times \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_1 \times (\vec{\tau}_2)'$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} (\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2)' \cdot \vec{w} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \vec{w} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} \cdot \vec{w} \\ &= - \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} \times \vec{w} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} \times \vec{w} \end{aligned}$$

Следовательно, второе слагаемое производной работы внешних сил получилась в виде

$$\dot{A}_2^p(t)[\vec{v}, \vec{w}] = - \int_{\Sigma_2^\xi} p(t) \left[- \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} \times \vec{w} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} \times \vec{w} \right] d\Sigma^\xi \quad (4.37)$$

Левая часть линеаризованного вариационного уравнения является симметричной относительно $d\vec{u} = \vec{v}dt$ и \vec{w} . Важно выяснить, обладает ли аналогичным свойством билинейный функционал \dot{A}_2^p . К сожалению, оказывается, что нет. Действительно, поменяв местами \vec{v} и \vec{w} в (4.37) получим

$$\dot{A}_2^p(t)[\vec{w}, \vec{v}] = - \int_{\Sigma_2^\xi} p(t) \left[- \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi_1} \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi_2} \times \vec{v} \right] d\Sigma^\xi \quad (4.38)$$

что, вообще говоря, не совпадает с (4.37). Отмеченная несимметричность при использовании МКЭ приводит к несимметричной матрице результирующей системы, с вытекающими отсюда трудностями при ее решении.

Положительно то, что симметричность присутствует в двух практически важных случаях, когда на границе Γ_2 области Σ_2 выполнено одно из условий: 1) $p|_{\Gamma_2} = 0$ или 2) $\vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{w}|_{\Gamma_2} = 0$.

Для доказательства займемся преобразованием разности выражений (4.37) и (4.38):

$$\begin{aligned}
\dot{A}_2^p(t)[\vec{v}, \vec{w}] - \dot{A}_2^p(t)[\vec{w}, \vec{v}] &= \\
&= \int_{\Sigma_2^\xi} p(t) \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi_1} \times \vec{v} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} \times \vec{w} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi_2} \times \vec{v} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} \times \vec{w} \right) \right] d\Sigma^\xi = \\
&= \int_{\Sigma_2^\xi} p(t) \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\vec{w} \times \vec{v}) - \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\vec{w} \times \vec{v}) \right] d\Sigma^\xi = \\
&= \int_{\Gamma_2^\xi} p(t) \left[n_1^\xi \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) - n_2^\xi \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) \right] d\Gamma^\xi = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, действительно, если на Γ_2^ξ равно нулю давление p или перемещение \vec{u} , то функционал $\dot{A}_2^p(t)[\vec{v}, \vec{w}]$ является симметричным.

Линеаризованное вариационное уравнение для нагрузки в виде давления можно сформулировать в двух эквивалентных формах. Первая является постановкой полностью в текущей конфигурации

$$\int_V \tilde{d}(\vec{w}) : \tilde{C}^d : \tilde{d}(d\vec{u}) dV + \int_V \tilde{\sigma} : [\nabla \vec{w} \cdot \nabla d\vec{u}^T] dV = dA^p(t)[\vec{u}, \vec{w}] \quad (4.39)$$

Вторая использует комбинацию, в которой левая часть представлена в начальной конфигурации, а правая – в текущей

$$\int_{\overset{0}{V}} \{ \overset{0}{\nabla} \vec{w}^T : \overset{0}{C}^{TAN} : \overset{0}{\nabla} d\vec{u} + \overset{0}{S}(\vec{u}) : [\overset{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\vec{u}] \} dV = dA^p(t)[\vec{u}, \vec{w}] \quad (4.40)$$

Глава 5.

Итерационные методы решения нелинейных задач.

5.1. Одномерное деформирование

Решение найдено частично, поскольку желательно иметь зависимость угла от силы, а не наоборот. Но более важно то, что на этом примере удобно ознакомиться с простейшими численными методами интегрирования нелинейных систем, поскольку в реальных задачах аналитическое решение найти невозможно. Одним из методов решения нелинейной системы служит метод линеаризация по параметру прослеживания процесса деформирования. Линеаризованную относительно скоростей $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\Theta}$ систему при любом угле Θ не следует путать с линеаризацией при $\Theta \rightarrow 0$. Линеаризованную систему получим, дифференцируя (1.1) по времени

$$\begin{aligned}\tilde{F}\dot{\varepsilon} - (1/\cos \Theta + \Theta \sin \Theta / \cos^2 \Theta)\dot{\Theta} &= -(1 + \varepsilon)\dot{\tilde{F}} \\ -\tilde{E}\dot{\varepsilon} + (\tilde{F} \cos \Theta)\dot{\Theta} &= -\sin \Theta \dot{\tilde{F}}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Поскольку рассматривается квазистатическое деформирование, в котором силы инерции не участвуют, то время служит просто параметром, позволяющим проследивать процесс деформирования. В качестве параметра прослеживания может быть выбран какой-нибудь другой параметр, взаимно-однозначно связанный со временем. Например, сама внешняя сила F , если она монотонно изменяется во времени. Систему (5.1) можно переписать относительно дифференциалов

$$\begin{aligned}\tilde{F}d\varepsilon - (1/\cos \Theta + \Theta \sin \Theta / \cos^2 \Theta)d\Theta &= -(1 + \varepsilon)d\tilde{F} \\ -\tilde{E}d\varepsilon + (\tilde{F} \cos \Theta)d\Theta &= -\sin \Theta d\tilde{F}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Простейшим способом решения системы (5.2) является явный метод Эйлера. Для этого нужно дискретизировать область изменения силы \tilde{F} , например с постоянным приращением $\delta\tilde{F}$: $F^m = m\delta\tilde{F}$, $m =$

$0, 1, \dots$. Тогда явный метод Эйлера записывается в виде

$$\begin{aligned} & \tilde{F}^m \delta \varepsilon^{m+1} - \\ & - (1/\cos \Theta^m + \Theta^m \sin \Theta^m / (\cos \Theta^m)^2) \delta \Theta^{m+1} = \\ & = -(1 + \varepsilon^m) \delta \tilde{F} \\ & - \tilde{E} \delta \varepsilon^{m+1} + (\tilde{F}^m \cos \Theta^m) \delta \Theta^{m+1} = -\sin \Theta^m \delta \tilde{F} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Термин явный следует понимать так, что система (5.3) является линейной относительно приращений неизвестных $\delta \varepsilon^{m+1} = \varepsilon^{m+1} - \varepsilon^m$ и $\delta \Theta^{m+1} = \Theta^{m+1} - \Theta^m$. Более эффективным является неявный метод Эйлера

$$\begin{aligned} & \tilde{F}^{m+1} \delta \varepsilon^{m+1} - (1/\cos \Theta^{m+1} + \\ & + \Theta^{m+1} \sin \Theta^{m+1} / (\cos \Theta^{m+1})^2) \delta \Theta^{m+1} = \\ & = -(1 + \varepsilon^{m+1}) \delta \tilde{F} \\ & - \tilde{E} \delta \varepsilon^{m+1} + (\tilde{F}^{m+1} \cos \Theta^{m+1}) \delta \Theta^{m+1} = -\sin \Theta^{m+1} \delta \tilde{F} \end{aligned} \quad (5.4)$$

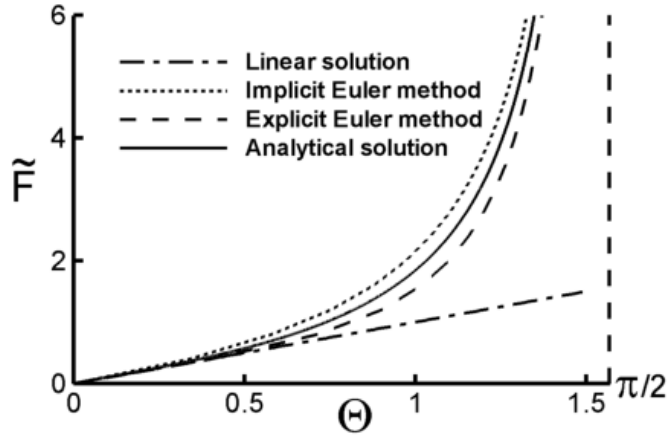


Рис. 5.1 Зависимость силы от угла поворота в задаче о консоли. Шаг дискретизации h_F равен 0.4

Метод (5.4) разумно называть неявным, поскольку для вычисления приращений неизвестных на шаге m требуется решить нелинейную систему уравнений. Для этой цели может применяться ите-

рациональный метод следующего вида

$$\begin{aligned}
 & \tilde{F}^{m+1} \delta \varepsilon^{m+1,s+1} - (1/\cos \Theta^{m+1,s} + \Theta^{m+1,s} \sin \Theta^{m+1,s} / \\
 & / (\cos \Theta^{m+1,s})^2) \delta \Theta^{m+1,s+1} = -(1 + \varepsilon^{m+1,s}) \delta \tilde{F} \\
 & - \tilde{E} \delta \varepsilon^{m+1,s+1} + (\tilde{F}^{m+1} \cos \Theta^{m+1,s}) \delta \Theta^{m+1,s+1} = \\
 & = -\sin \Theta^{m+1,s} \delta \tilde{F}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $\delta \varepsilon^{m+1,s} = \varepsilon^{m+1,s} - \varepsilon^m$ и $\delta \Theta^{m+1,s} = \Theta^{m+1,s} - \Theta^m$, а s – номер итерации $s = 0, 1, \dots$. При этом начальные приближения берутся с предыдущего шага по нагрузке: $\varepsilon^{m+1,0} = \varepsilon^m$ и $\Theta^{m+1,s} = \Theta^m$. Поскольку итерации проводятся при каждом приращении нагрузки (для каждого m), то они часто называются внутренними итерациями.

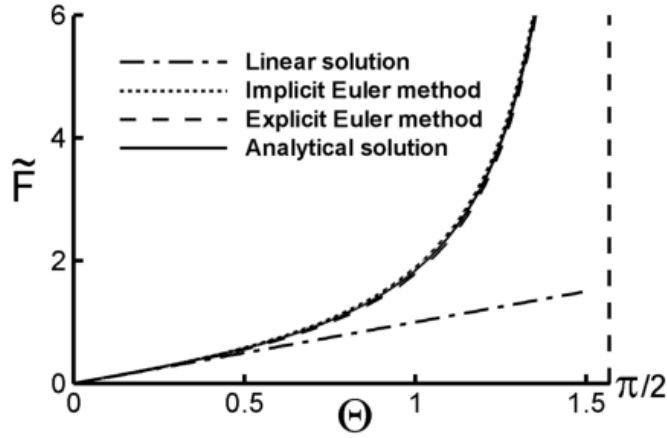


Рис. 5.2 Зависимость силы от угла поворота в задаче о консоли. Шаг дискретизации h_F равен 0.07.

Решением задачи о деформировании конструкции, показанной на рис. 1.1 естественно считать координаты x и y правого конца консоли (или длины стержня и угла Θ) как функции внешней силы \tilde{F} . График Θ от силы \tilde{F} , вычисленный по формуле (1.4), изображен на рис. 5.1 – 5.4. Очевидна значительная разница между решениями нелинейной и линеаризованной задач. При достаточно большой жесткости стержня линейная связь между продольной силой и де-

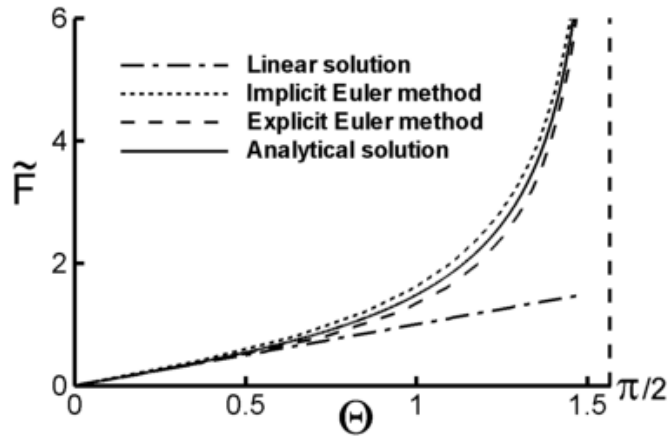


Рис. 5.3 Зависимость силы от угла поворота в задаче о консоли для $\tilde{E} = 5$. Шаг дискретизации h_F равен 0.4.

формацией стержня вполне оправдана. Это означает, что задача является физически линейной, оставаясь геометрически существенно нелинейной.

На рис. 5.1 и 5.2 задаваемым параметром являлась безразмерная сила \tilde{F} . Графики на рис. 5.1 построены для $\tilde{E} = 350$ и шага дискретизации силы $h_F = 0.4$. На рис. 5.2 решение получено шагом $h_F = 0.07$ и оба приближенных решения почти сливаются с точным решением. На рис. 5.3 изображены точное и приближенные решения нелинейной задачи, полученные для $\tilde{E} = 5$ и $h_F = 0.4$. Качественно графики не изменились. Наконец, на рис. 5.4 показана зависимость силы от угла, когда в решении задаваемой величиной являлся угол поворота консоли. Заметно, что различие приближенных и точного решений увеличивается с ростом угла, чего не было на предыдущих графиках.

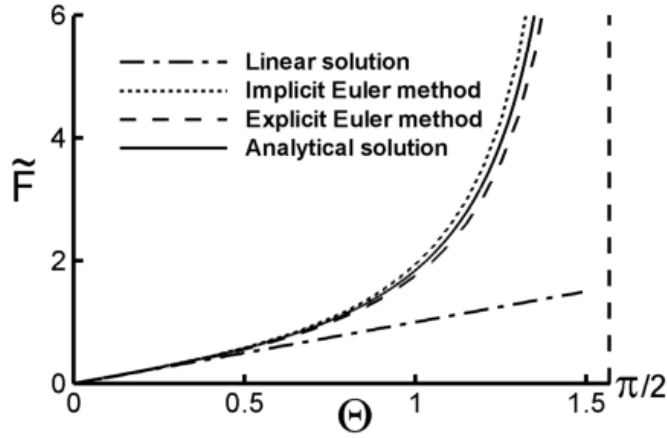


Рис. 5.4 Зависимость силы от угла поворота в задаче о консоли для $\tilde{E} = 350$. Шаг дискретизации h_Θ равен 0.05.

5.2. Неединственность решений нелинейных задач

Как известно решения краевых геометрически линейных задач единственны. Решение геометрически нелинейной задачи может быть неединственным. Рассмотрим еще один модельный пример, взятый из [56], показывающий разницу между решениями линейной и нелинейной задач. Речь идет о твердом стрержне, сжимаемом вертикальной нагрузкой (см. рис. 5.5).

Уравнение равновесия моментов согласно правому рис. 5.5 выглядит следующим образом

$$k\Theta = PL \sin \Theta$$

или в безразмерном виде

$$\tilde{P} \sin \Theta = \Theta \quad (5.6)$$

где

$$\tilde{P} = \frac{PL}{k}$$

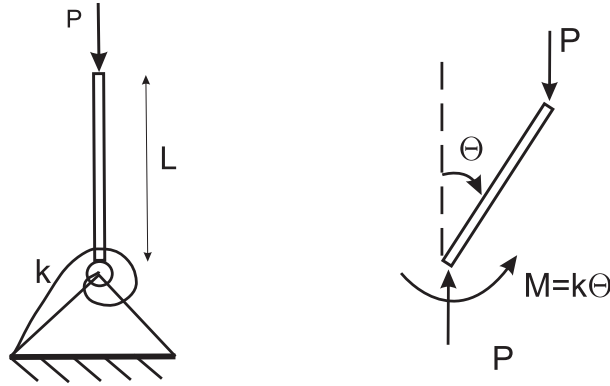


Рис. 5.5 Система из стержня и спиральной пружины. Стержень сжимается вертикально приложенной силой.

Линейное приближение получим, если $\Theta \rightarrow 0$. Тогда $\sin \Theta \rightarrow \Theta$ и уравнение равновесия принимает вид

$$(\tilde{P} - 1)\Theta = 0 \quad (5.7)$$

Согласно этому уравнению при увеличении силы от нуля и стремлении к 1 решение единственно и имеет вид $\Theta = 0$. Стержень сохраняет вертикальное положение. Однако при $\tilde{P} = 1$ решений для Θ становится бесконечно много, так как любой угол Θ удовлетворяет уравнению равновесия. Явное противоречие с условиями равновесия разрешается тем, что само линеаризованное уравнение имеет смысл лишь при малых углах. То же, конечно, касается и его решений. При $\tilde{P} = 1$ возможны наклонные конфигурации стержня. Соответствующая сила называется критической ($\tilde{P}_c = 1$). Схематично зависимость угла Θ от силы показана на рис. 5.6.

Задача (5.7) представляет собой простейшую задачу на собственные значения. В ней \tilde{P}_c есть собственное значение, а Θ собственный вектор или функция (в данном примере это просто скаляр). Построим график нелинейного решения, исходя из (5.6). Если $\tilde{P} < 1$, то левая часть меньше или равна правой, причем равенство достигается только при $\Theta = 0$. Следовательно, при $\tilde{P} < \tilde{P}_c$ решение для Θ единственно и оно равно нулю. При $\tilde{P} = \tilde{P}_c$ в отличие от линеаризованной задачи решение также единственно и равно нулю. Однако при $\tilde{P} > \tilde{P}_c$ уже существует два решения: нулевое и ненулевое решение, определяемое уравнением (5.6). График зависимости угла Θ от

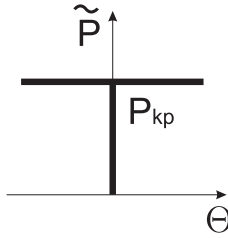


Рис. 5.6 Зависимость угла отклонения от безразмерной сжимающей силы в линеаризованной задаче.

безразмерной силы в нелинейной задаче показан на рис. 5.7 Таким образом, в нелинейной постановке существует два решения, если не учитывать различие в знаке угла отклонения. В линеаризованной постановке, решение одно $\Theta = 0$ за исключением критической силы, при которой решений бесконечно много. Попытаемся проанализировать, как задача на собственные значения может быть получена из полной нелинейной задачи. Дифференцируя уравнение (5.6) по времени, получим уравнение для скорости угла отклонения, если считать, что скорость внешней силы задана

$$(1 - \tilde{P}(t) \cos \Theta) \dot{\Theta} = \dot{\tilde{P}} \sin \Theta$$

Критическая точка (точка бифуркации) характеризуется тем, что в ней решение для скорости угла не единственно. Это значит, что равен нулю коэффициент при $\dot{\Theta}$: $1 - \tilde{P}(t) \cos \Theta = 0$. Поскольку до точки бифуркации угол Θ равен нулю, то получаем, что в точке бифуркации сила равна 1. Поэтому, критическая сила, теперь определяемая бифуркацией скорости, равна снова единице, как и при анализе линеаризованной задачи. Однако само нелинейное решение существенно отличается от решения, получаемого в линеаризованной постановке.

Из рассмотрения этой модельной задачи можно предположить, что и для практически интересных задач существуют два метода анализа:

1. Линеаризация и решение задачи на собственные значения для определения значения критической силы;
2. Решение полной нелинейной задачи, включая определение точек ветвления решения (точек бифуркации) и закритического поведения.

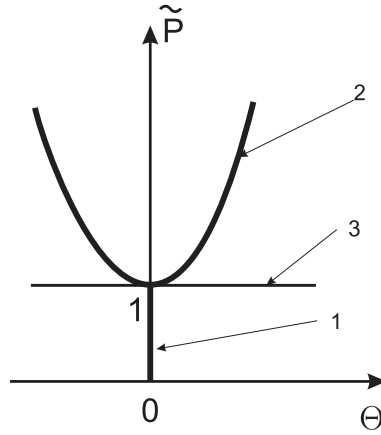


Рис. 5.7 Зависимость угла отклонения от безразмерной сжимающей силы в нелинейной задаче. Цифрой 1 обозначено решение нелинейной и линеаризованной задач до достижения силой \tilde{P} критического значения; 2 - решение нелинейной задачи; 3 - решение линеаризованной задачи.

В рассмотренном примере решение можно получить снова методом Эйлера. Явный метод Эйлера выглядит так:

$$(1 - \tilde{P}(t)^m \cos \Theta^m) \delta \Theta^{m+1} = \delta \tilde{P}^{m+1} \sin \Theta^m, \quad \Theta^0 = 0$$

а неявный с внутренними итерациями задается уравнением

$$(1 - \tilde{P}(t)^{m+1,s} \cos \Theta^{m+1,s}) \delta \Theta^{m+1,s+1} = \delta \tilde{P}^{m+1} \sin \Theta^{m+1,s}, \quad \Theta^0 = 0$$

где

$$\delta \Theta^{m+1} = \Theta^{m+1} - \Theta^m, \quad \delta \tilde{P}^{m+1} = \tilde{P}^{m+1} - \tilde{P}^m$$

Точное и приближенные решения показаны на рис. 5.8. Вычисления проведены шагом $h_F = 0.004$. При численном анализе важным является выбор начального приближения. Например, если выбрать $\Theta^0 = 0$, $\tilde{P}^0 = 0$, то приближенное решение будет совпадать с тривиальным точным решением $\Theta(\tilde{P}) = 0$ и не проявит наличие точки бифуркации. Поэтому приближенные решения, изображенные на рис. 5.8 получены для начальных значений $\Theta^0 = 0.02$, $\tilde{P}^0 = 0.88$. Если

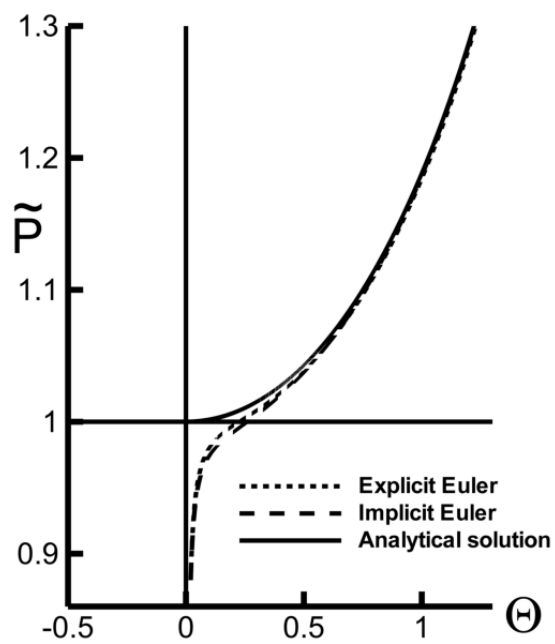


Рис. 5.8 Поведение приближенных решений в задаче, в которой существует два точных решения.

шаг дискретизации силы выбрать еще меньше, то приближенное решение ближе подойдет к точке ветвления решений и точнее покажет эту точку и критическую силу.

Можно проследить зависимость приближенных решений от шага дискретизации. При большем шаге $h_F = 0.01$ разница между решениями, полученными явным и неявным методами Эйлера, увеличивается, как следует из верхнего рис. 5.9. При меньшем шаге $h_F = 0.002$ оба метода дают почти одно и то же решение, что следует из нижнего рис. 5.9.

5.3. Модельная задача о прощелкивании

На рис. 5.10 изображена модельная задача о прощелкивании цилиндрической панели. Модель состоит из двух упругих стержней, соединенных между собой и с опорами с помощью шарниров. Повороты вокруг этих стержней осуществляются без трения. Задача о прищелкивании интересна тем, что зависимость угла поворота Θ от внешней силы не только не монотонна, но и неоднозначна. Это приводит к расходимости методов Эйлера, примененных в предыдущих параграфах для решения задач, в которых зависимость решения от внешней силы монотонна. Проведем анализ задачи о прощелкивании.

Начальная длина стержней равна L и они наклонены по отношению к горизонтали на угол Θ^0 . Внешняя сила F увеличиваясь с нуля приводит к сжатию стержней и уменьшению угла Θ . Уравнение равновесия выводятся следующим образом. Согласно рис. 5.11 выполняются геометрические соотношения

$$\frac{l}{L} = \frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta} \quad u = L \sin \Theta^0 - l \sin \Theta$$

Равновесие сил описывается уравнением

$$F = 2S \sin \Theta$$

а закон упругости для стержней в предположении малости продольной деформации имеет вид

$$S = k\varepsilon = k \frac{l - L}{L}, \quad \Rightarrow S = k \left(\frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta} - 1 \right)$$

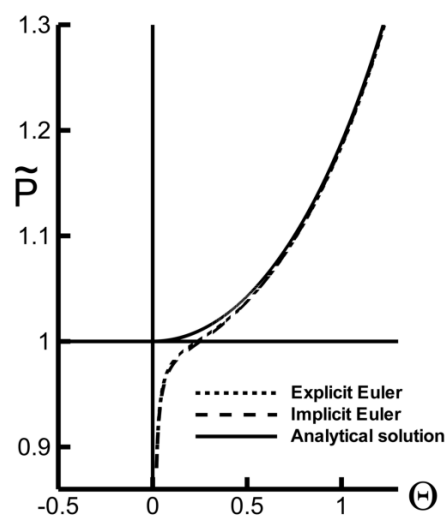
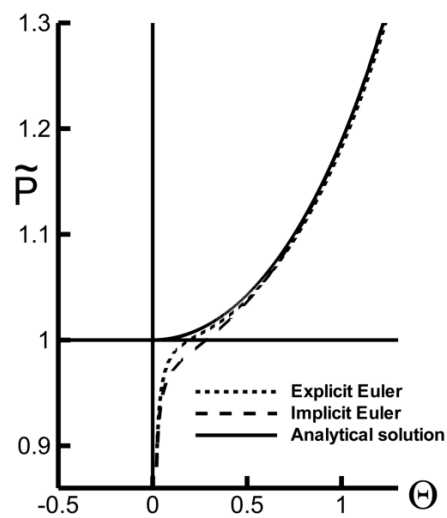


Рис. 5.9 Зависимость приближенных решений от шага дискретизации: $h_F = 0.01$ для верхнего рисунка и $h_F = 0.002$ для нижнего.

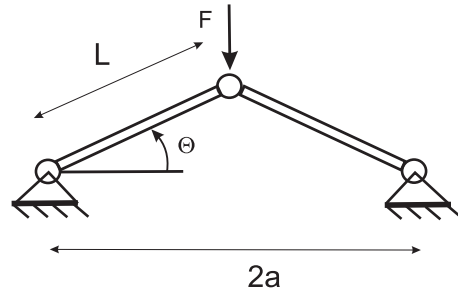


Рис. 5.10 Модельная задача, имитирующая прощелкивание полой оболочкой.

Таким образом, угол отклонения Θ находится из нелинейного уравнения

$$2k \left(\frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta} - 1 \right) \sin \Theta = F \quad (5.8)$$

Для его решения сначала применим явный и неявный методы Эйлера, позволившие успешно справиться с задачами, рассмотренными в предыдущих параграфах.

Линеаризованное относительно дифференциалов dF и $d\Theta$ уравнение равновесия имеет вид

$$dF = 2k (\cos \Theta^0 (\tan^2 \Theta + 1) - \cos \Theta) d\Theta \quad (5.9)$$

В рассматриваемой задаче оказывается существенным, какой параметр задан как параметр прослеживания процесса деформирования. Если таким параметром является угол, то оба метода Эйлера

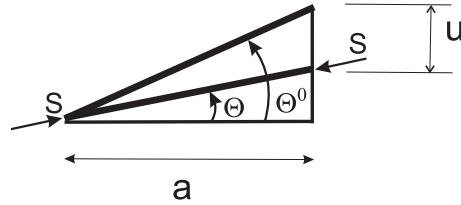


Рис. 5.11 Схематическое изображение левого стержня в начальном и деформированном состояниях.

очень просты в реализации. Исходя из (5.9) явный метод Эйлера можно записать в виде

$$\delta F^{m+1} = 2k (\cos \Theta^0 (\tan^2 \Theta^m + 1) - \cos \Theta^m) \delta \Theta^{m+1}$$

тогда как неявный метод ничуть не сложнее

$$\delta F^{m+1} = 2k (\cos \Theta^0 (\tan^2 \Theta^{m+1} + 1) - \cos \Theta^{m+1}) \delta \Theta^{m+1}$$

Результаты вычисления по вышеприведенным формулам изображены на рис. 5.12

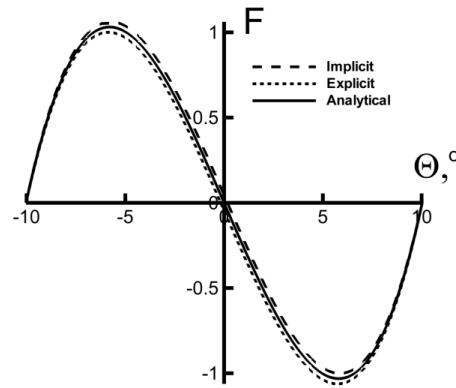


Рис. 5.12 Зависимость силы F от угла Θ в модельной задаче прощелкивания.

Совсем другая картина наблюдается в случае, когда требуется определить угол поворота стержня Θ при заданной силе F . Теперь зависимость угла от силы становится неоднозначной и оба метода Эйлера теряют сходимость. Явный метод Эйлера записывается в виде уравнения

$$2k (\cos \Theta^0 (\tan^2 \Theta^m + 1) - \cos \Theta^m) \delta \Theta^{m+1} = \delta F^{m+1}$$

а неявный метод выглядит следующим образом

$$2k (\cos \Theta^0 (\tan^2 \Theta^{m+1} + 1) - \cos \Theta^{m+1}) \delta \Theta^{m+1} = \delta F^{m+1}$$

Для его реализации последнего требуются внутренние итерации как следует из приведенного ниже алгоритма

$$2k (\cos \Theta^0 (\tan^2 \Theta^{m+1,s} + 1) - \cos \Theta^{m+1,s}) \delta \Theta^{m+1,s+1} = \delta F^{m+1}$$

причем $\delta \Theta^{m+1,0} = \delta \Theta^m$, $\Theta^{m+1,s} = \Theta^m + \delta \Theta^{m+1,s}$. Оба метода позволяют вычислять приближенное решение задачи о прощелкивании только на участках монотонности функции $\Theta(F)$. Результат применения обоих методов показан на рис. 5.13 Как видно из приведен-

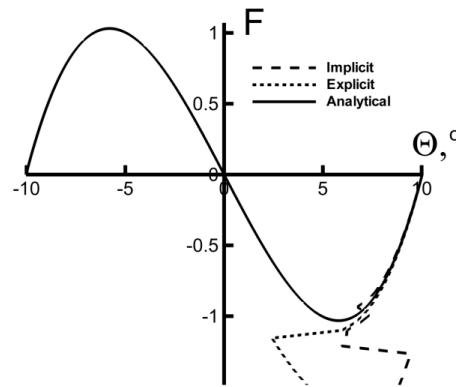


Рис. 5.13 Расходимость методов Эйлера в модельной задаче о прощелкивании панели.

ных графиков, оба метода перестают работать, когда производная $d\Theta/dF$ приближается к бесконечности.

Для решения задач такого класса был предложен специальный метод, называемый методом дуг (в оригинале arc-length method). Этот метод является развитием итерационного метода Ньютона решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона является альтернативой методам Эйлера и в данном случае может применяться для решения уравнения $f(\Theta) = 0$, где

$$f(\Theta) = 2k \left(1 - \frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta} \right) \sin \theta + F$$

на участках монотонности $f(\Theta)$. Метод записывается уравнением

$$\frac{df}{d\Theta^s}(\Theta^{s+1} - \Theta^s) + f(\Theta^s) = 0 \quad (5.10)$$

Метод чувствителен по отношению к начальному приближению Θ^0 . Поэтому он часто применяется одновременно с дискретизацией по параметру прослеживания процесса m . Этот прием позволяет использовать решение, полученное на предыдущем шаге, в качестве нулевого приближения на текущем шаге. Пусть на m -м шаге решение Θ^m известно, тогда решение на $m+1$ -м шаге ищется из уравнения вида (5.10)

$$\frac{df}{d\Theta}(\Theta^{m+1,s})(\Theta^{m+1,s+1} - \Theta^{m+1,s}) + f(\Theta^{m+1,s}) = 0$$

при начальном приближении $\Theta^{m+1,0} = \Theta^m$. Обычно, метод записывают в приращениях

$$\frac{df}{d\Theta}(\Theta^{m+1,s})(\delta\Theta^{m+1,s+1} - \delta\Theta^{m+1,s}) + f(\Theta^{m+1,s}) = 0$$

где, как раньше, приращение угла определяется $\delta\Theta^{m+1} = \Theta^{m+1} - \Theta^m$, а $\delta\Theta^{m+1,s} = \Theta^{m+1,s} - \Theta^m$.

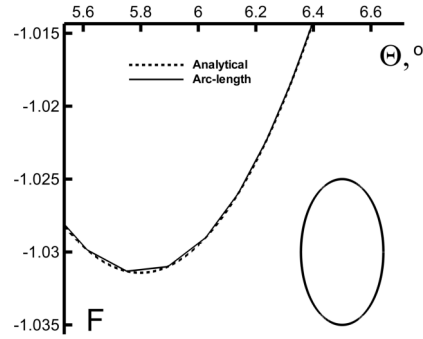


Рис. 5.14 Поведение приближенного решения в методе дуг.

Последнее уравнение можно окончательно перепесить в приращениях при $m + 1$ -м значении параметра t .

$$\frac{df}{d\Theta}(\Theta^m + \delta\Theta^{m+1,s})(\delta\Theta^{m+1,s+1} - \delta\Theta^{m+1,s}) + f(\Theta^m + \delta\Theta^{m+1,s}) = 0$$

поскольку угол Θ^m в $m + 1$ -м узле сетки по t известен.

Как показано на рис. 5.13 оба метода Эйлера не работают в задаче о прощелкивании. Проблема расходимости касается и метода Ньютона. Однако метод дуг позволяет надежно решать задачу о прощелкивании, как видно из рис. 5.14. Метод дуг строится следующим образом. Запишем уравнение $f(\Theta) = 0$ в виде

$$\Phi(\Theta, F) = 0, \quad \Phi(\Theta, F) = 2k \left(1 - \frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta} \right) \sin \theta + F$$

где явно обозначено, что Θ и F являются независимыми аргументами функции Φ .

Для решения последнего уравнения можно также применить метод Ньютона, что приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{d\Phi}{d\Theta}(\Theta^{m+1,s})(\delta\Theta^{m+1,s+1} - \delta\Theta^{m+1,s}) + \\ & + \frac{d\Phi}{dF}(F^{m+1,s})(\delta F^{m+1,s+1} - \delta F^{m+1,s}) \\ & + \Phi(\Theta^{m+1,s}, F^{m+1,s}) = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Рассмотрение Θ и F как независимых переменных позволяет избавиться от неоднозначности функции $\Theta(F)$. Однако, чтобы вычислить траекторию $\Theta(F)$ на плоскости Θ и F с постоянным вдоль нее шагом, удобно связать переменные $\delta\Theta$ и δF , например, следующим образом

$$\chi^2(\delta\Theta^{m+1,s+1})^2 + (\delta F^{m+1,s+1})^2 = \delta l^2 \quad (5.12)$$

где χ – параметр метода, а δl задает шаг продвижения вдоль кривой $\Theta(F)$. Таким образом, идея метода дуг состоит в совместном решении уравнений (5.11) и (5.12).

Реализуется эта идея следующим образом. Прежде всего упростим обозначения:

$$\begin{aligned} \delta\Theta^{m+1,s+1} &\rightarrow \delta\Theta^{s+1}, & \delta\Theta^{m+1,s} &\rightarrow \delta\Theta^s, \\ \delta F^{m+1,s+1} &\rightarrow \delta F^{s+1}, & \delta F^{m+1,s} &\rightarrow \delta F^s \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\Theta^{s+1} &= \Theta^m + \delta\Theta^{s+1}, & \Theta^s &= \Theta^m + \delta\Theta^s, \\ F^{s+1} &= F^m + \delta F^{s+1}, & F^s &= F^m + \delta F^s\end{aligned}$$

Теперь введем приращения переменных между итерациями

$$\Delta\Theta = \delta\Theta^{s+1} - \delta\Theta^s = \Theta^{s+1} - \Theta^s, \quad \Delta F = \delta F^{s+1} - \delta F^s = F^{s+1} - F^s$$

С помощью введенных обозначений метод Ньютона (5.11) и уравнение связи (5.12) записываются в виде

$$\begin{aligned}2k(\cos \Theta^s - \cos \Theta^0(\tan^2 \Theta^s + 1))\Delta\Theta + \Delta F + \\ + 2k\left(1 - \frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta^s}\right)\sin \theta^s + F^s = 0, \\ \chi^2(\delta\Theta^s + \Delta\Theta)^2 + (\delta F^s + \Delta F)^2 = \delta l^2\end{aligned}\tag{5.13}$$

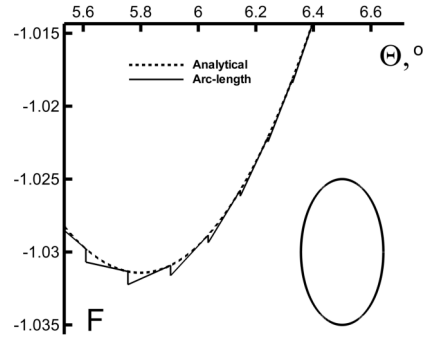


Рис. 5.15 Поведение приближенного решения в методе дуг.

Запишем первое из уравнений (5.13) в виде

$$\begin{aligned}\Delta F &= a\Delta\Theta + b, \\ a &= -2k(\cos \Theta^s - \cos \Theta^0(\tan^2 \Theta^s + 1)), \\ b &= -2k\left(1 - \frac{\cos \Theta^0}{\cos \Theta^s}\right)\sin \theta^s - F^s = 0\end{aligned}\tag{5.14}$$

Теперь можно выразить $\Delta\Theta$ или ΔF из уравнения (5.14) и подставить во второе уравнение (5.13). В результате получится квадратное уравнение относительно оставшейся переменной. Выражая ΔF , запишем это уравнение относительно $\Delta\Theta$

$$(\chi^2 + a^2)\Delta\Theta^2 + 2(\chi^2\delta\Theta^s + a(b + \delta F^s))\Delta\Theta + \chi^2(\delta\Theta^s)^2 + (\delta F^s + b)^2 - \delta l^2 = 0$$

Квадратное уравнение относительно $\Delta\Theta$ имеет два корня

$$\Delta\Theta_{1,2} = \frac{-(\chi^2\delta\Theta^s + a(b + \delta F^s)) \pm \sqrt{D}}{a^2 + \chi^2},$$

где

$$D = (\chi^2\delta\Theta^s + a(b + \delta F^s))^2 - (\chi^2 + a^2) [(\delta\Theta^s)^2\chi^2 + (b + \delta F^s)^2 - \delta l^2]$$

Приращение силы находится по формуле $\delta F_{1,2} = a\Delta\Theta_{1,2} + b$. Выбрать один из двух корней можно из условия минимума угла между векторами, изображающими последовательные итерации на плоскости Θ и F , т.е. между векторами

$$Y^s = \begin{pmatrix} \delta\Theta^s \\ \delta F^s \end{pmatrix} \text{ и } Y^{s+1} = \begin{pmatrix} \delta\Theta^{s+1} \\ \delta F^{s+1} \end{pmatrix}$$

Итерации следует остановить, если выполняется условие

$$\|Y^s - Y^{s+1}\| < \varepsilon$$

где ε – выбранная точность, т.е. еще один параметр метода. Теоретически можно сделать только общие заключения как следует выбирать параметры, входящие в алгоритм метода. При решении задач, особенно сложных, эти параметры приходится подбирать, исходя из численных экспериментов.

На рисунках 5.14, 5.15 демонстрируется сходимость метода дуг. Расчеты проведены при $\delta l = 0.005$ и $\chi = 2.0$. На рисунках показан эллипс, который задает связь между приращениями силы и угла. Значение k равно 500. Расчет проводится справа налево. На рис. 5.14 показана ломаная траектория, получаемая методом дуг, которая довольно хорошо приближает точное решение даже при значительном размере эллипса. Изломы траектории соответствует последовательным значениям параметра m . На рис. 5.15 показана также

сходимость внутренних итераций по параметру s . При этом первая итерация выглядит в виде характерного "зуба", а вторая уже почти сливается с точным решением.

Таким образом, можно сделать вывод, что в модельном примере метод дуг зарекомендовал себя как надежный алгоритм решения задач, для которых типична немонотонная и неоднозначная зависимость решения от внешней силы.

5.4. Методы дискретизации по времени

Для численного решения вариационных уравнений, обсуждаемых в предыдущих параграфах, требуется дискретизация как по времени, так и по пространственным координатам. Метод конечных элементов является способом пространственной дискретизации. Обе дискретизации могут осуществляться независимо друг от друга. В данном параграфе рассматриваются методы дискретизации вариационного уравнения по времени.

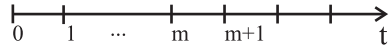


Рис. 5.16 Одномерная сетка вдоль оси t .

Рассмотрим сначала дискретизацию линейаризованного уравнения (??), сформулированного в начальной конфигурации. Для этого введем неравномерную одномерную сетку вдоль параметра t (рисунок 5.16). Самый простой метод дискретизации (явный метод Эйлера) выглядит следующим образом

$$\int_{\vec{V}^0} \vec{\nabla} \vec{w} : \tilde{C}^F(\vec{u}^m) : \vec{\nabla} \delta \vec{u}^{m+1} d\vec{V} = (\delta A^e)^m[\vec{w}] \quad (5.15)$$

где

$$\delta \vec{u}^{m+1} = \vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m, \quad \tilde{C}^F(\vec{u}^m) = \tilde{C}^F(\tilde{F}(\vec{u}^m)) = \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{F}^2}(\vec{u}^m)$$

В вариационном уравнении (5.15) \vec{w} – пробная функция, от времени независимая, а $\delta \vec{u}^{m+1}$ – конечное приращение решения, аппроксимирующее дифференциал решения, входящий в точное вариационное

уравнение (??). Правая часть в случае "мертвой" нагрузки равна

$$(\delta A^e)^m[\vec{w}] = \int_{\vec{V}}^0 \delta \vec{f}^m \cdot \vec{w} d\vec{V} + \int_{\Sigma_2}^0 (\delta \vec{S}^0)^m \cdot \vec{w} d\Sigma$$

где

$$\delta \vec{f}^m = \delta t_m \dot{\vec{f}}(t^m), \quad (\delta \vec{S}^0)^m = \delta t_m \dot{\vec{S}}^0(t^m)$$

а через δt_m обозначен текущий шаг $\delta t_m = t_{m+1} - t_m$. Обозначения выбраны так, чтобы все величины с индексом m в вариационном уравнении являются заданными или уже вычисленными для момента t_m , а с индексом $m+1$ являются неизвестными. В скалярной форме (в декартовой системе координат, которая собственно и используется для применения МКЭ), дискретизированное уравнение выглядит немного более громоздко

$$\int_{\vec{V}}^0 C_{ijkl}(\vec{u}^m) \delta u_{k,l}^{m+1} w_{i,j} d\vec{V} = \int_{\vec{V}}^0 \delta \vec{f}^m \cdot \vec{w} d\vec{V} + \int_{\Sigma_2}^0 (\delta \vec{S}^0)^m \cdot \vec{w} d\Sigma \quad (5.16)$$

Метод (5.15) будем называть явным методом Эйлера по аналогии с методом, применяемым для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, хотя фактически он явным не является, поскольку для определения вектора приращения перемещения $\delta \vec{u}^{m+1}$ требуется решить вариационное уравнение, или краевую задачу

$$\begin{cases} \left(C_{ijkl}(\vec{u}^m) \delta u_{k,l}^{m+1} \right)_{,j} + \rho_0 \delta f_i^m = 0 \\ \delta u_i^m|_{\Sigma_1} = 0 \\ C_{ijkl}(\vec{u}^m) \delta u_{k,l}^{m+1} u_j = (\delta S_i^0)^m \end{cases}$$

Для каждого момента t_m такая краевая задача является смешанной задачей неоднородной анизотропной теории упругости. Для ее решения как раз применяется МКЭ, являющийся только методом пространственной дискретизации. Дискретизация по времени осуществляется независимо, например, как описано выше.

Явный метод Эйлера является самым простым способом дискретизации по времени. Как показывает вычислительная практика, этот метод мало пригоден для решения сильно нелинейных задач при значительных деформациях или существенном искажении начальной формы тела. Существенно лучшим оказывается неявный

метод Эйлера, записываемый для вариационного уравнения (??), в следующем виде

$$\int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^{m+1}) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}^{m+1} d \overset{0}{V} = (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^{m+1}) &= \underset{\sim}{C}^F(F(\vec{u}^{m+1})) = \frac{\partial^2 W}{\partial \vec{F}^2}(\vec{u}^{m+1}), \\ (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] &= \int_{\overset{0}{V}} \delta \vec{f}^{m+1} \cdot \vec{w} d \overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} (\delta \vec{S}^0)^{m+1} \cdot \vec{w} d \overset{0}{\Sigma}, \\ \delta \vec{f}^{m+1} &= \dot{\vec{f}}(t^{m+1}) \delta t_m, \quad (\delta \vec{S}^0)^{m+1} = \dot{\vec{S}}^0(t^{m+1}) \delta t_m \end{aligned}$$

Для неявного метода требуется дополнительная процедура реализации, поскольку теперь вариационное уравнение является нелинейным относительно искомого вектора \vec{u}^{m+1} . Первый вариант реализации – это так называемая схема предиктор–корректор (метод прогноза и коррекции). Идея заключается в том, что сначала находится прогнозируемое приращение перемещения \vec{u}_P^{m+1} по явному методу Эйлера (5.15). Затем это предварительное решение \vec{u}_P^{m+1} подставляется в во все члены неявного вариационного уравнения (в данном случае это (5.17)), нелинейно зависящие от приращения перемещения для вычисления скорректированного решения \vec{u}_C^{m+1} . В результате получается вторая часть метода прогноза и коррекции

$$\int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}_P^{m+1}) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}_C^{m+1} d \overset{0}{V} = (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.18)$$

Идея метода прогноза и коррекции имеет естественное развитие. Именно, можно устроить итерации для дальнейшего уточнения приращения решения на шаге. Итерационная схема выглядит следующим образом

$$\int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}^{m+1,s+1} d \overset{0}{V} = (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.19)$$

где s – номер итерации. Очевидно, что нулевое приближение $\vec{u}^{m+1,0}$ берется с предыдущего шага по t : $\vec{u}^{m+1,0} = \vec{u}^m$. Затем проводятся итерации $\vec{u}^{m+1,s} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}^{m+1,s}$ и $\vec{u}^{m+1,S}$ берется в качестве \vec{u}^{m+1} . Первый шаг (5.19) при $s = 0$ соответствует явному методу Эйлера, а шаг при $s = 1$ является коррекцией в схеме предиктор – корректор. Итерационный процесс по параметру s называется внутренним по отношению к внешнему процессу интегрирования вариационного уравнения вдоль параметра t . Можно показать, что при достаточно малом шаге δt_m итерации сходятся. Строго говоря, для каждой задачи необходимый шаг δt_m можно установить только в результате численных экспериментов. Также экспериментально можно установить сколько внутренних итераций необходимо. Однако из теоретических оценок и вычислительной практики хорошо известно, что оптимальное число внутренних итераций невелико и обычно равно двум или трем. Другими словами, метод прогноза и коррекции обычно достаточен.

Повышение точности интегрирования вариационного уравнения может быть достигнуто способами, используемыми при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дело в том, что оба метода Эйлера имеют первый порядок точности относительно шага δt . Следующим по точности идет метод средней точки, который в применении к вариационному уравнению (??) выглядит следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\vec{V}}^0 \vec{\nabla} \vec{w} : C^F(\vec{u}^m) : \vec{\nabla} \delta \vec{u}_P^{m+1/2} d \vec{V} = (\delta A^e)^m[\vec{w}] \\ \int_{\vec{V}}^0 \vec{\nabla} \vec{w} : C^F(\vec{u}^{m+1/2}) : \vec{\nabla} \delta \vec{u}_C^{m+1} d \vec{V} = (\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}] \end{array} \right. \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} (\delta A^e)^m[\vec{w}] &= \delta t_m / 2 \int_{\vec{V}}^0 \dot{\vec{f}}(t_m) \cdot \vec{w} d \vec{V} + \int_{\Sigma_2}^0 \dot{\vec{S}}^0(t_m) \cdot \vec{w} d \Sigma \\ (\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}] &= \delta t_m \int_{\vec{V}}^0 \dot{\vec{f}}(t_m + \delta t_m / 2) \cdot \vec{w} d \vec{V} + \int_{\Sigma_2}^0 \dot{\vec{S}}^0(t_m + \delta t_m / 2) \cdot \vec{w} d \Sigma \end{aligned} \quad (5.21)$$

а $\vec{u}^{m+1/2} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}_P^{m+1/2}$. Схема с внутренними итерациями выглядит соответственно следующим образом

$$\int_{\vec{V}}^0 \vec{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^{m+1/2,s}) : \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \delta \vec{u}^{m+1,s+1} d \vec{V} = (\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}] \quad (5.22)$$

где права часть $(\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}]$ такая же, как в (5.21), а $\vec{u}^{m+1/2,s} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}^{m+1,s}/2$.

Такую же точность имеет метод трапеций, который в варианте предиктор - корректор записывается следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\vec{V}}^0 \vec{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^m) : \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \delta \vec{u}_P^{m+1} d \vec{V} = (\delta A^e)^m[\vec{w}] \\ \int_{\vec{V}}^0 \vec{\nabla} \vec{w} : \frac{1}{2}(\underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^m) + \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}_P^{m+1})) : \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \delta \vec{u}_C^{m+1} d \vec{V} = \\ = (\delta A_{ever}^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{array} \right. \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} (\delta A_{ever}^e)^m[\vec{w}] &= \delta t_m/2 \int_{\vec{V}}^0 (\dot{\vec{f}}(t_m) + \dot{\vec{f}}(t_m + \delta t_m/2)) \cdot \vec{w} d \vec{V} + \\ &+ \delta t_m/2 \int_{\Sigma_2}^0 (\dot{\vec{S}}^0(t_m) + \dot{\vec{S}}^0(t_m + \delta t_m/2)) \cdot \vec{w} d \Sigma \end{aligned} \quad (5.24)$$

а $\vec{u}_P^{m+1} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}_P^{m+1}$. Схема с внутренними итерациями выглядит соответственно

$$\int_{\vec{V}}^0 \vec{\nabla} \vec{w} : \frac{1}{2}(\underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^m) + \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^{m+1,s})) : \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \delta \vec{u}^{m+1,s+1} d \vec{V} = (\delta A_{ever}^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.25)$$

Методы средней точки и трапеций обладают вторым порядком точности $O(\delta t_m)$ относительно шага дискретизации δt_m . Поэтому кажется весьма заманчивым использование метода, аналогичного методу Рунге – Кутта. В применении к вариационному уравнению (??) аналог метода Рунге – Кутта может быть предложен в следу-

ющем виде

$$\begin{aligned}
\delta \vec{u}^{m+1} &= h/6(\delta \vec{u}_1^{m+1} + \delta \vec{u}_2^{m+1} + \delta \vec{u}_3^{m+1} + \delta \vec{u}_4^{m+1}) \\
\int \overset{0}{\nabla} \vec{w} : C^F(\vec{u}^m) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}_1^{m+1} d \overset{0}{V} &= (\delta A^e)^m[\vec{w}] \\
\int \overset{0}{\nabla} \vec{w} : C^F(\frac{1}{2}(\vec{u}^m + \vec{u}_1^{m+1})) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}_2^{m+1} d \overset{0}{V} &= (\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}] \\
\int \overset{0}{\nabla} \vec{w} : C^F(\frac{1}{2}(\vec{u}^m + \vec{u}_2^{m+1})) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}_3^{m+1} d \overset{0}{V} &= (\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}] \\
\int \overset{0}{\nabla} \vec{w} : C^F(\vec{u}_3^{m+1}) : \overset{0}{\nabla} \delta \vec{u}_1^{m+1} d \overset{0}{V} &= (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

причем

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1^{m+1} &= \vec{u}^m + \delta \vec{u}_1^{m+1}, \quad \vec{u}_2^{m+1} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}_2^{m+1} \\
\vec{u}_3^{m+1} &= \vec{u}^m + \delta \vec{u}_3^{m+1}, \quad \vec{u}_4^{m+1} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}_4^{m+1} \\
(\delta A^e)^m[\vec{w}] &= \delta t_m \int \overset{0}{\nabla} \dot{\vec{f}}(t_m) \cdot \vec{w} d \overset{0}{V} + \int \overset{0}{\Sigma_2} \dot{\vec{S}}^0(t_m) \cdot \vec{w} d \overset{0}{\Sigma} \\
(\delta A^e)^{m+1/2}[\vec{w}] &= \delta t_m \int \overset{0}{\nabla} \dot{\vec{f}}(t_m + \delta t_m/2) \cdot \vec{w} d \overset{0}{V} + \int \overset{0}{\Sigma_2} \dot{\vec{S}}^0(t_m + \delta t_m/2) \cdot \vec{w} d \overset{0}{\Sigma} \\
(\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] &= \delta t_m \int \overset{0}{\nabla} \dot{\vec{f}}(t_m + \delta t_m) \cdot \vec{w} d \overset{0}{V} + \int \overset{0}{\Sigma_2} \dot{\vec{S}}^0(t_m + \delta t_m) \cdot \vec{w} d \overset{0}{\Sigma}
\end{aligned}$$

Метод Рунге–Кутта обладает точностью $O(\delta t_m^4)$, что в четыре раза больше, чем метод неявный Эйлера и при этом требует в два раза больших вычислений.

Для вариационной задачи, сформулированной в в виде (4.4), неявный метод Эйлера с внутренними итерациями записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
\int \overset{0}{\nabla} \vec{w} : C^{TAN}(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} d \vec{u}^{m+1,s+1} + \\
+ S(\vec{u}^{m+1,s}) : [\overset{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d \vec{u}^{m+1,s}] d \overset{0}{V} &= (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}]
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Аналогично, можно выписать все остальные методы интегрирования, рассмотренные выше. Как уже отмечалось, рассмотренный способ дискретизации по времени основан на полностью Лагранжевом (TL) подходе. В случае лагранжева подхода с адаптацией (UL) подхода неявный метод Эйлера выглядит так

$$\int_{V^m} \{ \tilde{d}(\vec{w}) : (C^d)^{m+1,s} : \tilde{d}(\delta u^{m+1,s+1}) + \tilde{\sigma}^{m+1,s} : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla (d\vec{u})^{m+1,s+1}] \} dV = (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.28)$$

где

$$(\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}] = \delta t_m \int_{V^m} \dot{\vec{f}}(t_m + h) \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2^m} \dot{\vec{S}}^0(t_m + \delta t_m) \cdot \vec{w} d\Sigma$$

Таким образом, существенным отличием вариационного уравнения в UL подходе является зависимость области V^m от номера шага m . Это обстоятельство не приводит к каким-либо трудностям, но может эффективно использоваться для перестроения пространственной сетки, что бывает весьма необходимо. В удобстве перестроения пространственной сетки состоит основное преимущество подхода с адаптацией.

5.5. Методы упругих решений

В предыдущем параграфе описаны способы дискретизации по времени линейризованных вариационных уравнений. Ошибка приближенного решения зависит от порядка точности метода, шага дискретизации δt и того, насколько сильна нелинейность. Чтобы увеличить точность приближенного решения можно уменьшить шаг δt или использовать более точный метод. Другой более радикальный путь состоит в том, что можно использовать исходное вариационное уравнение, записанное относительно самого вектора перемещения, а не его приращения. Конечно, это возможно не всегда. Например, в случае теории течения уже само определяющее соотношение сформулировано относительно скоростей напряжений и деформаций, поэтому линейризованное вариационное уравнение есть единственный способ решения краевой задачи. Однако для теории упру-

гости вполне целесообразно использовать исходное, не линеаризованное уравнение (1.68)

$$\int_{\overset{0}{V}} P(\vec{u}^{m+1}) : \overset{0}{\nabla} \vec{w} d \overset{0}{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.29)$$

или в форме

$$\int_{\overset{0}{V}} S(\vec{u}^{m+1}) : \overset{0}{E}(\vec{w}) d \overset{0}{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.30)$$

В обоих уравнениях правая часть равна

$$(A^e)^m[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \rho \vec{f}(t_m) \cdot \vec{w} d \overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} \vec{S}^0(t_m) \cdot \vec{w} d \overset{0}{\Sigma}$$

Наконец, можно использовать вариационное уравнение в текущей конфигурации

$$\int_{V^m} \sigma(\vec{u}^{m+1}) : \overset{0}{d}(\vec{w}) dV = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \quad (5.31)$$

$$(A^e)^m[\vec{w}] = \int_{V^m} \rho \vec{f}(t_m) \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} \vec{S}(t_m) \cdot \vec{w} d\Sigma$$

Метод типа метода Ньютона, примененный к (5.29), выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \overset{0}{C}^F(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} (\vec{u}^{m+1,s+1} - \vec{u}^{m+1,s}) d \overset{0}{V} - \\ - \int_{\overset{0}{V}} P(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} \vec{w} d \overset{0}{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Номер s означает номер итерации, начальная итерация берется с предыдущего шага $\vec{u}^{m+1,0} = \vec{u}^m$. Как известно, метод (5.32) имеет сверхлинейную скорость сходимости [7, 60] (в [7] метод такого

типа назван быстро сходящимся). Однако сходимость зависит от выбора нулевого приближения. Поскольку в сочетании с процессом прослеживания решения по параметру t итерационный метод является внутренним, как это следует из (5.32), то использование нулевого приближения в виде решения с предыдущего шага полностью решает проблему выбора начального приближения. Конечно, в отличие от методов предыдущего параграфа метод (5.32) требует большего числа итераций для достижения приближения к решению вариационного уравнения с выбранной точностью ε . Ясно, что это свойство позволяет использовать метод (5.32) в сочетании с методами предыдущего параграфа. Именно, после определенного числа шагов по параметру t можно осуществлять уточнение решения с помощью процесса (5.32).

Сходимость метода (5.32) может нарушаться для сложных задач. В этом случае можно использовать модификацию метода, состоящую в ослаблении скорости сходимости с помощью параметра $\beta \geq 1$. Кроме этого, обычно записывают в левой части разность приращений перемещений, а не самих перемещений. В результате метод выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} \frac{\delta \vec{u}^{m+1,s+1} - \delta \vec{u}^{m+1,s}}{\beta} d \overset{0}{V} - \\ - \int_{\overset{0}{V}} \underset{\sim}{P}(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} \vec{w} d \overset{0}{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Метод (5.33) обладает более медленной, но зато более надежной сходимостью. Другой модификацией, направленной на повышение надежности сходимости, является следующий метод

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^F(0) : \overset{0}{\nabla} \frac{\delta \vec{u}^{m+1,s+1} - \delta \vec{u}^{m+1,s}}{\beta} d \overset{0}{V} - \\ - \int_{\overset{0}{V}} \underset{\sim}{P}(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} \vec{w} d \overset{0}{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.34)$$

В этом методе компоненты тензора $\underset{\sim}{C}^F$ вычисляются для недеформированного состояния и, следовательно, равны модулям линейной

теории упругости, которая аппроксимирует поведение материала когда $\tilde{F} = \tilde{I}$. Метод такого типа для деформационной теории пластичности был предложен в [21]. С тех пор его, и его обобщения, включая метод Ньютона, в отечественной литературе называют методами типа метода упругих решений. В англоязычной литературе все эти методы называются либо модифицированными методами Ньютона, либо методами типа метода Ньютона. В настоящее время, когда мощность компьютеров не сдерживает возможности вычислительных алгоритмов, такой метод представляется некоторой крайностью. Однако метод, в котором адаптация \tilde{C}^F происходит не каждый раз, а на каждой k -й итерации, вполне может иметь область применения. Например, можно использовать тензор \tilde{C}^F с предыдущего шага

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}} \tilde{\nabla} \vec{w} : \tilde{C}^F(\vec{u}^m) : \tilde{\nabla} \frac{\delta \vec{u}^{m+1,s+1} - \delta \vec{u}^{m+1,s}}{\beta} d\tilde{V} - \\ - \int_{\tilde{V}} \tilde{P}(\vec{u}^{m+1,s}) : \tilde{\nabla} \vec{w} d\tilde{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Такой вариант может применяться, если сходимость у "чистого" метода Ньютона отсутствует.

Метод Ньютона может быть применен и для вариационного уравнения в форме (5.30)

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}} \tilde{\nabla} \vec{w}^T : \tilde{C}^t(\vec{u}^{m+1,s}) : \tilde{\nabla} \frac{\delta \vec{u}^{m+1,s+1} - \delta \vec{u}^{m+1,s}}{\beta} + \\ + \tilde{S}(\vec{u}^{m+1,s}) : \left[\tilde{\nabla} \vec{w}^T : \tilde{\nabla} \frac{\delta \vec{u}^{m+1,s+1} - \delta \vec{u}^{m+1,s}}{\beta} \right] d\tilde{V} + \\ + \int_{\tilde{V}} \tilde{S}(\vec{u}^{m+1,s}) : \tilde{E}(\vec{w}) d\tilde{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Упрощенным вариантом (отступлением от "чистого" метода Ньюто-

на) служит метод

$$\begin{aligned} \int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w}^T : \underset{\sim}{C}^t(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} \frac{\delta \vec{u}^{m+1,s+1} - \delta \vec{u}^{m+1,s}}{\beta} + \\ + \int_{\overset{0}{V}} \underset{\sim}{S}(\vec{u}^{m+1,s}) : \underset{\sim}{E}(\vec{w}) d\overset{0}{V} = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Наконец, метод Ньютона, примененный к задаче в текущей конфигурации, записывается так

$$\begin{aligned} \int_{V^m} \{ \underset{\sim}{d}(\vec{w}) : (\underset{\sim}{C}^d)^{m+1,s} : \frac{d(\delta \vec{u}^{m+1,s+1}) - d(\delta \vec{u}^{m+1,s})}{\beta} + \\ + \underset{\sim}{\sigma}^{m+1,s} : [\nabla \vec{w} \cdot \nabla \frac{(\delta \vec{u}^T)^{m+1,s+1} - (\delta \vec{u}^T)^{m+1,s}}{\beta}] dV + \\ + \int_{V^m} \underset{\sim}{\sigma}(\vec{u}^{m+1,s}) : \underset{\sim}{d}(\vec{w}) dV = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.38)$$

или в упрощенной версии

$$\begin{aligned} \int_{V^m} \{ \underset{\sim}{d}(\vec{w}) : (\underset{\sim}{C}^d)^{m+1,s} : \frac{d(\delta \vec{u}^{m+1,s+1}) - d(\delta \vec{u}^{m+1,s})}{\beta} + \\ + \int_{V^m} \underset{\sim}{\sigma}(\vec{u}^{m+1,s}) : \underset{\sim}{d}(\vec{w}) dV = (A^e)^{m+1}[\vec{w}] \end{aligned} \quad (5.39)$$

Методы, описанные в текущем и предыдущем параграфах, показывают, что линеаризованные вариационные уравнения необходимо используются для решения геометрически нелинейных задач. Методы решения бесконечномерных вариационных уравнений имеют не только теоретический интерес, но и служат отправной точкой для осуществления дискретизации по пространственным координатам, что будет сделано в главе 6.

5.6. Итерационный метод СН-ЭВМ.

Часть II

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Глава 6.

Пространственная дискретизация методом конечных элементов.

В параграфах 5.4, 5.5 описаны способы дискретизации вариационного уравнения по времени. Настоящая глава посвящена изложению пространственной дискретизации методом конечных элементов (МКЭ).

МКЭ ознаменовал появление универсального и эффективного метода решения краевых задач. Долгое время методы решения двух- и трехмерных краевых задач были малоэффективны. Часто изобретались весьма сложные методы, которые позволяли находить решения какого-нибудь узкого класса задач. В то время ситуация с двух- и трехмерными задачами была совершенно отличной от одномерных задач, изучаемых в сопромате. С развитием компьютеров и МКЭ решение линейных краевых задач стало такой же рутинной практикой, как расчет стержней и балок, конечно, если в постановке задачи нет каких-нибудь малых или больших параметров. Изучаемы в книге нелинейные задачи также представляют интерес для вычислительной науки.

6.1. Введение в МКЭ

В данном параграфе излагается общая процедура МКЭ на примере задачи (4.8). На самом деле для дискретизации используется не краевая задача, а вариационная. Саму процедуру МКЭ можно изложить коротко. Именно, линеаризованное вариационное уравнение, соответствующее задаче (4.8) имеет вид уравнения (5.16), в котором опустим индекс m :

$$\varphi[\delta\vec{u}, \vec{w}] = \delta A^e[\vec{w}] \quad \delta\vec{u}, \vec{w} \in G \quad (6.1)$$

где

$$\varphi[\delta\vec{u}, \vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} C_{ijkl}^F(\vec{u}) \delta u_{k,l} w_{i,j} d\overset{0}{V}$$

$$\delta A^e[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \delta \vec{f} \cdot \vec{w} d\overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} (\delta \vec{S}^0) \cdot \vec{w} d\overset{0}{\Sigma_2}$$

Как видно $\varphi(\delta\vec{u}, \vec{w})$ представляет собой симметричный билинейный функционал относительно $\delta\vec{u}$ и \vec{w} , поэтому решение вариационного уравнения (6.1) эквивалентно задаче нахождения экстремума квадратичного функционала

$$L(\delta\vec{u}) = \frac{1}{2} \varphi[\delta\vec{u}, \delta\vec{u}] - \delta A^e[\delta\vec{u}]$$

среди всех функций из G [13]. Действительно, точка экстремума функционала L удовлетворяет уравнению $DL(\delta\vec{u})[\vec{w}] = 0$, которое совпадает с (6.1). В точке экстремума достигается минимум, если вторая производная L положительно определена. Поскольку $D^2L(\delta\vec{u})[\vec{w}_1, \vec{w}_2] = \varphi[\vec{w}_1, \vec{w}_2]$, то наличие минимума обеспечивается, если тензор упругости $\underset{\sim}{C}^F$ положительно определен согласно

$$\underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{C}^F \underset{\sim}{h} \geq c_1 \underset{\sim}{h} : \underset{\sim}{h}, \quad (C_{ijkl}^F h_{ij} h_{kl} > c_1 h_{ij} h_{ij}),$$

для любого, вообще говоря, несимметричного тензора $\underset{\sim}{h}$. Положительности в смысле неравенства (1.74) недостаточно для того, чтобы точка экстремума была бы обязательно точкой минимума.

Если решается задача отыскания точки экстремума функционала, то говорят о методе Ритца. В случае применения вариационного уравнения подход называется методом Галеркина. Обе вариационные постановки совершенно эквивалентны друг другу в симметричном случае. Совсем не так дело обстоит с дифференциальной постановкой, поскольку она требует большей гладкости от решения, чем вариационная. Связь решений дифференциальной краевой задачи и вариационной задачи состоит в следующем. Любое решение дифференциальной задачи является решением вариационной. Однако, решение вариационной задачи удовлетворяет дифференциальной постановке только, если является достаточно гладким.

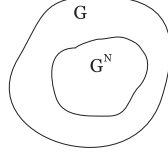


Рис. 6.1 Конечномерное подпространство G^N бесконечномерного пространства G .

Оба метода Рунта и Галеркина состоят в том, что приближенное решение ищется из конечномерного подпространства G^N пространства G , которые схематично показаны на рисунке 6.1. Конечномерное подпространство зависит от параметра N и при $N \rightarrow \infty$ должно аппроксимировать исходное пространство G . Последовательность подпространств G^N может быть выбрана различными способами. Метод конечных элементов характеризуется специальным выбором этих пространств. Во-первых, пространство G^N определяется посредством задания базисных функций $\psi(\vec{X})$ так, что любая функция из G^N , например w_i представляется линейной комбинацией базисных функций.

$$w_i^N = \sum_{n=1}^N a_{ni} \psi_n(\vec{X})$$

Во-вторых, базисные функции задаются с помощью сетки конечных элементов, на которые разбивается область V . Во многих случаях область V приближенно равна сумме областей конечных элементов $V \approx \bigcup_q V_q$. Внутри каждого элемента базисная функция ψ_e является полиномом, а вне его – нулем. Поэтому пространство G^N есть пространство кусочно-полиномиальных функций. В самом распространенном лагранжевом варианте метода конечных элементов аппроксимация функции внутри каждого элемента определяется через ее узловые значения. Предыдущее разложение по базисным функциям, записанное отдельно для каждого элемента, выглядит следующим образом

$$w_i^N = \sum_{p=1}^N N_p(\vec{X}) \hat{w}_i^p$$

где \hat{w}_i^p – узловые значения функции w_i . Малый фрагмент сетки, окружающий i -й узел показан на левом рисунке 6.2.

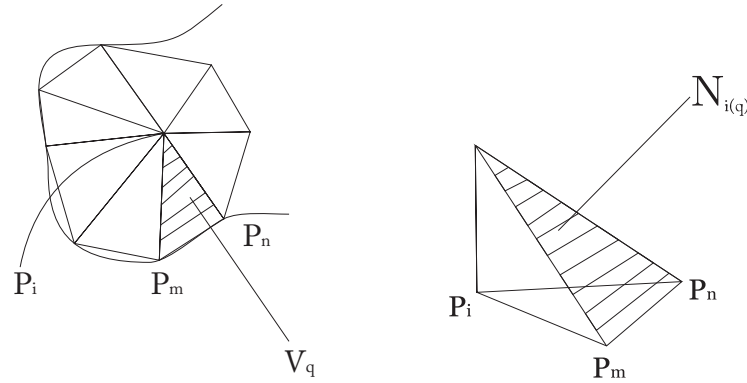


Рис. 6.2 Элементы расположенные вокруг узла сетки P_i и базисная функция для одного из элементов.

В методе конечных элементов номер базисной функции связан с номером узла. Используются локальная нумерация узлов внутри каждого элемента и глобальная на всей сетке. Функции N_p – локальные базисные функции, обычно называемые функциями формы [57, 17]. В узле с локальным номером равным номеру узла функция формы равна 1, в остальных она равна нулю. Глобальная базисная функция ψ_i выбирается как объединение локальных функций формы в элементах, окружающих узел с глобальным номером i . Она отлична от нуля только в области элементов, примыкающих к узлу с номером i , причем $\psi_i = 1$ в узле P_i и $\psi_i = 0$ в остальных узлах.

Таким образом МКЭ представляет собой частный случай метода Ритца или Галеркина при специальном выборе базисных функций. Предполагается, что при $N \rightarrow \infty$ максимальный размер h любого конечного элемента стремится к нулю. Способ выбора базисных функций в МКЭ обладает тем достоинством, что, как будет видно далее, матрица результирующей линейной системы уравнений является разреженной. Другими словами, при $N \rightarrow \infty$ число ненулевых элементов на каждой строке матрицы остается постоянным. Разреженность матрицы существенно способствует тому, что оказывается возможным решать весьма большие линейные системы на современных компьютерах.

Пример. Исторически первыми были треугольные элемен-

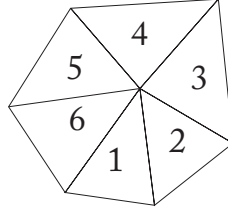


Рис. 6.3 Шесть элементов, примыкающих к узлу i .

ты, показанные на рисунке 6.2. Для треугольных элементов самыми простыми базисными функциями являются кусочно-линейные функции. Т.е. функция ψ_i является кусочно-линейной в области V^0_N и линейной в области одного q -го элемента V_q^0 . В области V_q^0 линейная базисная функция задается формулой

$$N_I(X_1, X_2) = \frac{1 - \frac{y - y_m}{y_n y_m} - \frac{x - x_n}{x_m x_n}}{1 - \frac{y_i - y_m}{y_n - y_m} - \frac{x_i - x_n}{x_m - x_n}} \quad (6.2)$$

Такая функция удовлетворяет условиям

$$N_I(P_I) = 1 \quad N_I(P_M) = 0 \quad N_I(P_N) = 0$$

а в остальной области доопределяется нулем. Функция $\psi_{I(q)}$ представляет собой только часть базисной функции ψ_I . Целиком базисная функция ψ_I получается как комбинация функций $N_{I(q)}$ и отлична от нуля только в области элементов, примыкающих к узлу P_I . Например, функция ψ_I для случая, показанного на рисунке 6.3, равна $\psi_I(X_1, X_2) = \sum_{q=1}^6 N_{I(q)}$. Эта базисная функция является кусочно-линейной функцией и отлична от нуля только в области элементов, изображенных на рисунке 6.3. Такие базисные функции принадлежат пространству G , которое для вариационных задач, включающих только производные первого порядка, обычно выбирается как подпространство пространства W_2^1 . Пространство G^N образуется как линейная оболочка функций ψ_I .

В масштабе всей сетки имеют место представления

$$\begin{aligned}\delta u_i(\vec{X}) &= \sum_{I=1}^N \psi_I(\vec{X}) \delta \hat{u}_i^I, & u_i(\vec{X}) &= \sum_{I=1}^N \psi_I(\vec{X}) \hat{u}_i^I, \\ w_i(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{I=1}^N \psi_I(\vec{X}) \hat{w}_i^I\end{aligned}\quad (6.3)$$

Следовательно,

$$\varphi(\delta \vec{u}, \vec{w}) = \sum_{I,K=1}^N \delta \hat{u}_i^I \hat{w}_k^K \int_{\overset{0}{V}} C_{ijkl}^F \left(\sum_{M=1}^N \psi_M(\vec{X}) \hat{u}^M \right) \psi_{I,j} \psi_{K,l} d \overset{0}{V}$$

поскольку

$$\delta u_{i,j}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{I=1}^N \psi_{I,j}(\vec{X}) \delta \hat{u}_i^I, \quad w_{k,l}(\vec{X}) = \sum_{I=1}^N \psi_{K,l}(\vec{X}) \hat{w}_i^K$$

В дальнейшем обозначение зависимости тензора C^F от решения будем записать короче $\tilde{C}^F(\hat{u})$ ($\tilde{C}^F(\hat{u}) = \tilde{C}^F(\vec{u}^N)$), $\vec{u}^N = \sum_{M=1}^N \psi_M(\vec{X}) \hat{u}^M$.

Линейный функционал в правой части вариационного уравнения посредством базисных функций представляется следующим образом

$$\delta A^e[\vec{w}] = \sum_{J=1}^N \hat{w}_k^J \int_{\overset{0}{V}} \rho \delta f_k \psi_J dV + \sum_{J=1}^N \hat{w}_k^J \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} \delta S_k^0 \psi_J d \overset{0}{\Sigma}$$

Таким образом, получаем конечномерную аппроксимацию вариационного уравнения

$$\varphi(\delta \vec{u}, \vec{w}) = \sum_{I,K=1}^N K_{IJ}^{ik} \delta \hat{u}_i^I \hat{w}_k^K, \quad \delta A^e[\vec{w}] = \sum_{J=1}^N F_J^k \hat{w}_k^J$$

где

$$K_{IJ}^{ik} = \int_{\overset{0}{V}} C_F^{ijkl}(\hat{u}) \psi_{I,j} \psi_{K,l} d \overset{0}{V}$$

$$F_J^k = \int_V \overset{0}{\rho} \delta f^k \psi_J dV + \int_{\Sigma_2} S_k^{(0)} \psi_J d\overset{0}{\Sigma}$$

В итоге, вариационное уравнение превращается в следующее равенство

$$\sum_{I,J=1}^N \sum_{i,k=1}^p K_{IJ}^{ik} \delta \hat{u}_i^I \hat{w}_k^J = \sum_{J=1}^N \sum_{k=1}^p F_J^k \hat{w}_k^J$$

Учитывая произвольность пробной функции \hat{w} , получаем систему линейных уравнений относительно $\delta \hat{u}^I$

$$\sum_{I=1}^N \sum_{i=1}^p K_{IJ}^{ik} \delta \hat{u}_i^I = F_J^k, \quad I = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, p \quad (6.4)$$

Сумма вычисляется по всем узлам сетки. Для сокращения записи в дальнейшем знак суммы по повторяющимся индексам будем опускать.

В итоге получили линейную систему уравнений с матрицей \mathbf{K} , $K_{IJ}^{ik} = K_{IJ}^{ik}(\{\hat{u}\})$, называемой глобальной матрицей жесткости. Собственно в получении системы (6.4) и состоит задача пространственной дискретизации, решаемая МКЭ. В литературе по МКЭ часто записывают эту систему в матрично-векторном виде. Для этого введем вектора глобальные относительно всей сетки вектора неизвестных. Во-первых, это вектора приращений перемещений и перемещений на m -м шаге (для упрощения формул индекс m опущен):

$$\delta \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}}^1 \\ \vdots \\ \delta \hat{\mathbf{u}}^N \end{Bmatrix}, \quad \delta \hat{\mathbf{u}}^I = \begin{Bmatrix} \delta \hat{u}_1^I \\ \vdots \\ \delta \hat{u}_p^I \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}^N \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}^I = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^I \\ \vdots \\ \hat{u}_p^I \end{Bmatrix},$$

где $p=1,2,3$ обозначает размерность пространства. Конечно, интерес вызывают двух- ($p=2$) и трехмерные ($p=3$) задачи. Также нужно записать вектор правой части

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}^N \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}^I = \begin{Bmatrix} F_1^I \\ \vdots \\ F_p^I \end{Bmatrix}.$$

Глобальная матрица жесткости имеет блочную структуру

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N1} & \dots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \begin{bmatrix} K_{IJ}^{11} & \dots & K_{IJ}^{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{IJ}^{p1} & \dots & K_{IJ}^{pp} \end{bmatrix}$$

Теперь уравнение (6.4) можно записать в матрично–векторной форме

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \delta \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6.5)$$

где \mathbf{K} –глобальная матрица жесткости, которая связывает узловые перемещения и силы.

Для решения системы (6.5) относительно $\delta \mathbf{U}$ применяются прямые и итерационные методы. В последнее время принято называть методы решения решателями, что соответствует английскому solver. В случае, если система не очень большая (в настоящее время это может быть около 500 тыс. уравнений), то с успехом можно применять прямые методы, являющиеся теми или иными вариантами методов Гаусса и Холецкого. Эти процедуры также известны как \mathbf{LU} и \mathbf{LL}^T факторизации. Если матрица \mathbf{K} является симметричной, то целесообразно применение метода Холецкого, явно использующего симметрию матрицы. Также эффективно могут применяться итерационные методы, если система слишком большая, среди которых отметим варианты метода сопряженных градиентов с предобуславливателем, соответствующим неполному разложению Холецкого. Заметим, что матрица \mathbf{K} , соответствующая всем рассмотренным ранее вариационным уравнениям, является симметричной.

Уже отмечалось, что достоинством базисных функций ψ_I является тот факт, что каждая такая функция и ее частные производные отличны от нуля только в области элементов, примыкающих к узлу I . В результате матрица системы (6.5) оказывается разреженной так, что в каждой строке матрицы находится только конечное число ненулевых элементов при $N \rightarrow \infty$. Число ненулевых элементов равно числу узлов, принадлежащих элементам, примыкающим к I - му узлу умноженному на размерность задачи p .

В МКЭ, однако, принята другая техника вычисления глобальной матрицы, которая удобна при программировании. Именно, на первом этапе строятся локальные системы с локальными матрицами жесткости для каждого элемента, которая имеет точно такой же вид, как и (6.4) или (6.5). Разница только в том, что сумма вычисляться по узлам только данного q -го элемента

$$\sum_{J=1}^{N_u} \sum_{i=1}^p K_{IJ}^{ik} \delta \hat{u}_i^I = F_J^k, \quad I = 1, \dots, N_u, \quad k = 1, \dots, p, \quad (6.6)$$

$$\text{или} \quad \mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \delta \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

где N_u – число узлов элемента, в которых заданы значения перемещений. На втором этапе локальные систему уравнений (6.6), т.е. матрицы и правые части ассемблируются в глобальную систему (6.5). Следующий пример показывает процедуру построения локального уравнения равновесия для треугольного элемента.

Пример. Рассматриваем двумерное пространство $p = 2$, где

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{u}(\vec{X}) \equiv \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \delta \vec{u}(\vec{X}) \equiv \delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}$$

Аппроксимация перемещений внутри элемента задается теперь в виде (вместо (6.3))

$$\mathbf{u}^N = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}, \quad \delta \mathbf{u}^N = \mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}$$

Обозначение в виде буквы N для функций формы (в оригинале – shape-functions) является традиционным для литературы по МКЭ. Диагональная матрица \mathbf{N} функций формы N_I задает аппроксимацию внутри элемента и имеет вид

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3], \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i(\vec{X}) & 0 \\ 0 & N_i(\vec{X}) \end{bmatrix}$$

Функция N_i для линейных треугольных элементов выражается формулой (6.2). При работе с одним элементом удобно использовать локальные номера узлов элемента, например 0, 1, 2 для треугольного элемента, тогда как глобальные номера равны, например как показано на рисунке 6.4 – i, m, n . В памяти компьютера должна храниться таблица соответствия локальных и глобальных номеров. Эта таблица позволяет по номеру локального узла и номеру самого элемента установить глобальный номер того же узла.

Развивая этот пример, приведем полный вывод элементного уравнения (6.6), используя часто применяемый матрично-векторный способ

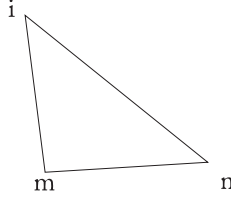


Рис. 6.4 Треугольный элемент.

описания. Далее для получения (6.6) нужно использовать связь между д градиентами перемещений и перемещениями (аналог соотношений Коши):

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{D}\mathbf{w}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,2} \\ w_{1,2} \\ w_{2,1} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

, которое позволяет выразить градиенты через узловые перемещения

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\delta\hat{\mathbf{u}}, \quad (\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N})$$

Теперь пришла очередь записать определяющее соотношение для двумерной задачи в матрично-векторной форме

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} C_{1111}^F & C_{1122}^F & C_{1112}^F & C_{1121}^F \\ C_{2211}^F & C_{2222}^F & C_{2212}^F & C_{2221}^F \\ C_{1211}^F & C_{1222}^F & C_{1212}^F & C_{1221}^F \\ C_{2111}^F & C_{2122}^F & C_{2112}^F & C_{2121}^F \end{bmatrix}$$

причем каждый элемент матрицы зависит от узловых перемещений на m -м шаге

$$C_{ijkl}^F = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} (\mathbf{u}(\hat{\mathbf{u}}^m)), \quad \mathbf{u}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}$$

Следовательно, левую часть вариационного уравнения (6.1) можно выразить в следующем виде

$$\varphi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \left(\int_{V_q^0} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV^0 \right) \delta\hat{\mathbf{u}}$$

Правая часть представляется так

$$A^e[\mathbf{w}] = \mathbf{w}^T \left(\int_{V_q^0} \mathbf{N}^T (\rho^0 \mathbf{f}) dV^0 + \int_{\Sigma_q^0} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^0 d\Sigma^0 \right)$$

В результате снова получаем уравнение (6.6), в котором $\mathbf{F} = \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^\Sigma$ и

$$\mathbf{K} = \int_{V_q} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{F}^V = \int_{V_q} \mathbf{N}^T (\rho \mathbf{f}) dV, \quad \mathbf{F}^\Sigma = \int_{\Sigma_q} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^0 d\Sigma$$

Итак, локальное уравнение (6.6) выражает собой равновесие q -го элемента под действием массовых и поверхностных сил, выраженных в этом уравнении посредством узловых сил \mathbf{F}^V и \mathbf{F}^Σ . Если какая-либо сторона элемента выходит на границу области, то поверхностные силы, конечно, заданы. Однако на внутренней части границы элемента они неизвестны и представляют воздействие окружающей среды на данный q -й элемент, вырезанный из всей области V . Конечно, локальное уравнение равновесия для каждого элемента недоопределено, однако неопределенность исчезает при ассемблировании всех локальных уравнений в одно глобальное уравнение сформулированное для всей области V . Процесс ассемблирования (сборки) уравнений состоит в исключении лишних неизвестных из локальных уравнений равновесия продемонстрирован ниже на примере двух треугольных элементов.

Пример. Осуществим процесс ассимилирования для двух треугольных элементов показанных на рисунке 6.5 Пусть глобальные номера узлов

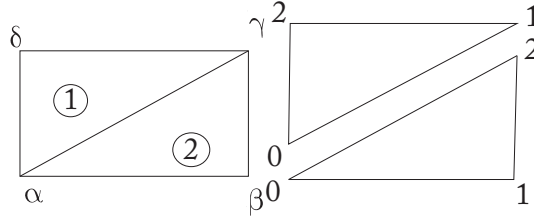


Рис. 6.5 Прямоугольная область состоящая всего из двух элементов.

имеют номера P, Q, R, S , а локальные 0, 1, 2 для каждого треугольного элемента. Цифра сверху означает принадлежность к первому элементу, цифра 2 – ко второму. Имеем два локальных уравнения равновесия

$$\mathbf{K}_{IJ}^{(1)} \hat{\mathbf{u}}^J = \mathbf{F}_I^V + \mathbf{F}_I^\Sigma, \quad I, J = 0, 1, 2.$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{(2)} \hat{\mathbf{u}}^J = \mathbf{F}_I^V + \mathbf{F}_I^\Sigma, \quad I, J = 0, 1, 2.$$

которые с использованием глобальной нумерации записываются для узла I следующим образом

$$\overset{(1)}{\mathbf{K}}_{II} \overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^I + 0 + \overset{(1)}{\mathbf{K}}_{IN} \overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^N + \overset{(1)}{\mathbf{K}}_{IM} \overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^M = \overset{(1)}{\mathbf{F}}_I^V + \overset{(1)}{\mathbf{F}}_I^\Sigma \quad I, J = 0, 1, 2.$$

$$\overset{(21)}{\mathbf{K}}_{II} \overset{(2)}{\hat{\mathbf{u}}}^I + 0 + \overset{(2)}{\mathbf{K}}_{IJ} \overset{(2)}{\hat{\mathbf{u}}}^J + \overset{(2)}{\mathbf{K}}_{IN} \overset{(2)}{\hat{\mathbf{u}}}^N = \overset{(2)}{\mathbf{F}}_I^V + \overset{(2)}{\mathbf{F}}_I^\Sigma \quad I, J = 0, 1, 2.$$

Теперь запишем для первого элемента более подробно вклад поверхностных сил в узловую силу для узла I

$$\overset{(1)}{\mathbf{F}}_I^\Sigma = \overset{(1)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (ext)}}^\Sigma + \overset{(1 \leftarrow 2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (int)}}^\Sigma$$

где $\overset{(1)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (ext)}}^\Sigma$ означает вклад от внешних (заданных) поверхностных сил, действующих вдоль стороны $I - M$, а $\overset{(1 \leftarrow 2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (int)}}^\Sigma$ представляет вклад от внутренних поверхностных сил, действующих вдоль стороны $I - N$ на первый элемент со стороны второго. Аналогично можно расписать узловую поверхностную силу для второго элемента

$$\overset{(2)}{\mathbf{F}}_I^\Sigma = \overset{(2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (ext)}}^\Sigma + \overset{(1 \rightarrow 2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (int)}}^\Sigma$$

В последнем уравнении $\overset{(2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (ext)}}^\Sigma$ есть вклад от внешней поверхностной силы, действующей вдоль стороны $I - J$, а $\overset{(1 \rightarrow 2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (int)}}^\Sigma$ – вклад от внутренней силы, действующей по стороне $I - N$ со стороны первого элемента на второй.

Теперь нужно сложить уравнения, учитывая, что перемещения в общих узлах одинаковы: $\overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^i = \overset{(2)}{\hat{\mathbf{u}}}^i, i = I, N$. Кроме этого, при сложении уравнений сократятся вклады от внутренних сил вследствие третьего закона Ньютона: $\overset{(2 \rightarrow 1)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (int)}}^\Sigma + \overset{(1 \rightarrow 2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (int)}}^\Sigma = 0$.

Итоговое уравнение в узле I выглядит так

$$\begin{aligned} & (\overset{(1)}{\mathbf{K}}_{II} + \overset{(2)}{\mathbf{K}}_{II}) \overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^I + \overset{(2)}{\mathbf{K}}_{IJ} \overset{(2)}{\hat{\mathbf{u}}}^J + (\overset{(1)}{\mathbf{K}}_{IN} + \overset{(2)}{\mathbf{K}}_{IN}) \overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^N + \overset{(1)}{\mathbf{K}}_{IM} \overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^M = \\ & = \overset{(1)}{\mathbf{F}}_I^V + \overset{(2)}{\mathbf{F}}_I^V + \overset{(1)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (ext)}}^\Sigma + \overset{(2)}{\mathbf{F}}_{I \text{ (ext)}}^\Sigma \end{aligned}$$

Аналогично нужно сложить уравнения для всех остальных узлов, в результате чего получится глобальная система, состоящая из четырех векторных (восьми скалярных) уравнений с четырьмя неизвестными $\overset{(1)}{\hat{\mathbf{u}}}^i, i =$

I, J, M, N или восемью скалярными неизвестными $\hat{u}_k^i, i = I, J, M, N, k = 1, 2$.

Таким образом, ассемблирование локальных уравнений в узле I состоит в накоплении локальных матриц жесткости и вкладов в правую часть в соответствии с глобальными номерами. Эта методика продемонстрирована ниже на примере элементов, изображенных на рисунке (6.6). Будем считать, что эти элементы расположены внутри конечно элементной сетки и вкладов от поверхностных сил просто нет. Тогда в I -й векторной строке глобальной системы будут следующие ненулевые подматрицы

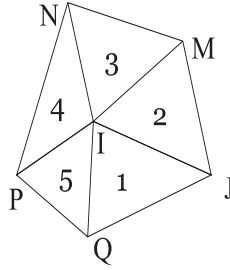


Рис. 6.6 Элементы, дающие вклад в уравнение в узле I .

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{II} &= \mathbf{K}_{II}^{(1)} + \mathbf{K}_{II}^{(2)} + \mathbf{K}_{II}^{(3)} + \mathbf{K}_{II}^{(4)} + \mathbf{K}_{II}^{(5)} \\ \mathbf{K}_{IJ} &= \mathbf{K}_{IJ}^{(1)} + \mathbf{K}_{IJ}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{IM} &= \mathbf{K}_{IM}^{(2)} + \mathbf{K}_{IM}^{(3)} \\ \mathbf{K}_{IN} &= \mathbf{K}_{IN}^{(3)} + \mathbf{K}_{IN}^{(4)} \\ \mathbf{K}_{IP} &= \mathbf{K}_{IP}^{(4)} + \mathbf{K}_{IP}^{(5)} \\ \mathbf{K}_{IQ} &= \mathbf{K}_{IQ}^{(5)} + \mathbf{K}_{IQ}^{(1)} \end{aligned}$$

а все уравнение выглядит так

$$\sum_{i=I,J,M,N,P,Q} \mathbf{K}_{Ii} \delta \hat{\mathbf{u}}^i = \sum_{i=1}^5 \mathbf{F}_I^{(i)V}$$

Следовательно, независимо от общего числа неизвестных в задаче и ширины ленты, на I -й векторной строчке будет находится

только шесть ненулевых подматриц. Остальные элементы не вносят никакого вклада в это уравнение. Таким образом, глобальная матрица жесткости является сильно разреженной, что существенно облегчает решение линейной системы с этой матрицей. Легко заметить, что число ненулевых подматриц в I -й строке определяется числом элементов, окружающих I -й узел. В трехмерном случае оно обычно больше, чем в двумерном. При этом ширина ленты матрицы определяется максимальной разностью номеров узлов, принадлежащих элементам, окружающим I -й узел.

В примере, приводимом ниже, дается более подробное описание локальной матрицы жесткости и правой части для треугольного элемента при малых деформациях.

Пример. В случае треугольного элемента при малых деформациях возможно упрощения элементного уравнения (6.6) поскольку можно считать, что $\mathbf{K}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}(0) = \text{const}$ и можно использовать вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ вместо вектора производных $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{w}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,2} \\ w_{1,2} + w_{2,1} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\hat{\mathbf{u}}, \quad (\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N})$$

Поэтому вариационное уравнение для q -го элемента имеет вид

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

где матрица жесткости и правая часть $\mathbf{F} = \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^\Sigma$ конкретизируются ниже. Локальная матрица жесткости треугольного элемента имеет следующую блочную структуру (номер элемента q опускаем)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} & \mathbf{K}_{02} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{20} & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{IJ} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{IJ}^{11} & \mathbf{K}_{IJ}^{12} \\ \mathbf{K}_{IJ}^{21} & \mathbf{K}_{IJ}^{22} \end{bmatrix}, \quad I, J = 0, 1, 2$$

причем

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{V_q} \mathbf{B}_I^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J dV, \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{D}\mathbf{N}_I$$

$$\mathbf{N}_I = \begin{bmatrix} N_I(\vec{X}) & 0 \\ 0 & N_I(\vec{X}) \end{bmatrix}$$

где

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N_I(\vec{X})] & 0 \\ 0 & [N_I(\vec{X})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_I}{\partial X_2} & \frac{\partial N_I}{\partial X_1} \end{bmatrix}$$

Для дальнейшей конкретизации следует просто использовать явный вид функций N_I треугольного элемента, задаваемый (6.2), поскольку $N_I = \psi_{I(q)}$. Однако мы в качестве упражнения выведем эту формулу.

В этом выводе исходим из того, что перемещения треугольного элемента аппроксимируются линейными функциями координат X_1, X_2

$$\delta u_k(\vec{X}) = \alpha_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} X_1 + \alpha_k^{(2)} X_2$$

Поскольку обе компоненты вектора приращения перемещения интерполируются внутри элемента одинаково, то временно номер компоненты k будем опускать. Вышеприведенное соотношение нужно использовать для того, чтобы выразить коэффициенты $\alpha^{(i)}$ через узловые значения интерполируемой функции, что поясняется ниже

$$\begin{aligned} \text{узел } 0: \quad \delta u^0 &= \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} X_1^0 + \alpha^{(2)} X_2^0 \\ \text{узел } 1: \quad \delta u^1 &= \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} X_1^1 + \alpha^{(2)} X_2^1 \\ \text{узел } 2: \quad \delta u^2 &= \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} X_1^2 + \alpha^{(2)} X_2^2 \end{aligned}$$

Теперь нужно решить эту систему уравнений, чтобы выразить коэффициенты $\alpha^{(i)}, i = 0, 1, 2$ через узловые значения $\delta u^I, I = 0, 1, 2$. Матрица системы равна

$$\begin{bmatrix} 1 & x^0 & y^0 \\ 1 & x^1 & y^1 \\ 1 & x^2 & y^2 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x^0 & y^0 \\ 1 & x^1 & y^1 \\ 1 & x^2 & y^2 \end{bmatrix}$$

где Δ есть удвоенная площадь треугольного элемента. В матрично-векторном виде система выглядит так

$$\begin{bmatrix} 1 & x^0 & y^0 \\ 1 & x^1 & y^1 \\ 1 & x^2 & y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta u^0 \\ \delta u^1 \\ \delta u^2 \end{Bmatrix}$$

Ее решение находится методом Крамера

$$\alpha^I = \frac{\Delta_I}{\Delta}, \quad I = 0, 1, 2.$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \delta u^0 & x^0 & y^0 \\ \delta u^1 & x^1 & y^1 \\ \delta u^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x^0 & y^0 \\ 1 & x^1 & y^1 \\ 1 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & x^0 & y^0 \\ 2 & x^1 & y^1 \\ 2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta_0 = \sum_{I,J,L=0}^2 \epsilon_{IJL} \delta u^I x^J y^L, \quad \Delta_1 = \sum_{I,J,L=0}^2 \epsilon_{IJL} \delta u^I y^L,$$

$$\Delta_2 = \sum_{I,J,L=0}^2 \epsilon_{IJL} x^J \delta u^L, \quad I, J, L = 0, 1, 2$$

где ϵ_{IJL} есть символы Леви-Чевиты. Переаисывая определители более коротко

$$\Delta_0 = \sum_{I=0}^2 a_I \delta^I, \quad a_I = \sum_{J,L=0}^2 \epsilon_{IJL} x^J y^L$$

$$\Delta_1 = \sum_{I=0}^2 b_I \delta^I, \quad b_J = \sum_{I,L=0}^2 \epsilon_{IJL} y^L$$

$$\Delta_2 = \sum_{I=0}^2 c_I \delta^I, \quad c_L = \sum_{I,J=0}^2 \epsilon_{IJL} x^J$$

получим аппроксимацию поля перемещения внутри элемента, выраженную через узловые значения перемещения

$$\delta u = \alpha^0 + \alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2 = \sum_{I=0}^2 \frac{1}{\Delta} \{a_I \delta u^I + b_I \delta u^I X_1 + c_I \delta u^I X_2\} =$$

$$= \sum_{I=0}^2 \frac{1}{\Delta} \{a_I + b_I X_1 + c_I X_2\} \delta u^I$$

Вспоминаем про индекс k , окончательно запишем аппроксимацию компонент вектора перемещений

$$\delta u_k = \sum_{I=0}^2 \frac{1}{\Delta} \{a_I + b_I X_1 + c_I X_2\} \delta u_k^I, \quad \delta u_k^I \equiv \delta u_k(\vec{X}^I), \quad I = 0, 1, 2, \quad k = 1, 2.$$

Эту же аппроксимацию можно записать в матрично-векторной форме

$$\begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \sum_{I=0}^2 \begin{bmatrix} N_I(\vec{X}) & 0 \\ 0 & N_I(\vec{X}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1^I \\ \delta u_2^I \end{Bmatrix}$$

где $N_i(X_1, X_2) = \frac{1}{\Delta} \{a_I + b_I X_1 + c_I X_2\}$ -функции формы треугольного элемента. Поэтому

$$[B_I] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_I & 0 \\ 0 & c_I \\ c_I & b_I \end{bmatrix}$$

При малых деформациях в начале процесса деформирования модули упругости определяются соотношением

$$C_{ijkl}^F = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(0),$$

и, следовательно, являются постоянными. Матрица модулей упругости имеет вид в общем случае изотропного материала

$$[E] = \begin{bmatrix} C_{1111}^F & C_{1122}^F & 0 \\ C_{1122}^F & C_{2222}^F & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{1212}^F \end{bmatrix}$$

Следовательно, локальная матрица жесткости \mathbf{K} q-ого элемента равна

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{V_q^0} \mathbf{B}_I^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J dV_q^0 = \frac{1}{\Delta_q} \mathbf{B}_I^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J$$

где

$$\mathbf{B}_I^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J = \frac{1}{\Delta_q} \begin{bmatrix} C_{1111}^F b_I b_J + C_{1212}^F c_I c_J & C_{1122}^F b_I c_J + C_{1212}^F c_I b_J \\ C_{1122}^F c_I b_J + C_{1212}^F b_I c_J & C_{2222}^F c_I c_J + C_{1212}^F b_I b_J \end{bmatrix}$$

Как видно, в случае линейного треугольного элемента интегрирование не требуется, поскольку подинтегральное выражение не зависит от координат.

Займемся теперь детализацией правой части локального уравнения равновесия. Рассмотрим сначала вклад в правую часть от массовых сил. Соответствующий вектор имеет вид

$$\mathbf{F}^V = \int_{V_q^0} \rho^0 \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV_q^0 = \int_{V_q^0} \rho^0 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \mathbf{f} dV_q^0, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}^V = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0^V \\ \mathbf{F}_1^V \\ \mathbf{F}_2^V \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_I^V = \int_{V_q^0} \rho^0 \mathbf{N}_I \mathbf{f} dV_q^0 = \int_{V_q^0} \rho^0 \begin{Bmatrix} N_I f_1 \\ N_I f_2 \end{Bmatrix} dV_q^0,$$

Если подставить выражение функции-формы N_I , то получим, что требуется интегрировать по области элемента следующее выражение

$$\int_{V_q}^0 \rho N_I f_k dV = \rho \frac{f_k}{\Delta} \int_{V_q}^0 (a_I + b_I X_1 + c_I X_2) dV, \quad I = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2.$$

(объемная нагрузка аппроксимируется постоянной в области элемента: $\rho f_k = const$). Интеграл в правой части последнего выражения не зависит от выбора декартовой системы координат, поэтому при интегрировании поместим ее начало в центре тяжести треугольника (рисунок 6.1). Тогда интегралы от второго и третьего членов равны нулю. Займемся вычислением интеграла от a_I . Поскольку a_I есть константа, то интеграл просто равен $a_I \Delta/2$. Поэтому требуется вычислить только сами константы a_I . Вычислим, например a_0 .

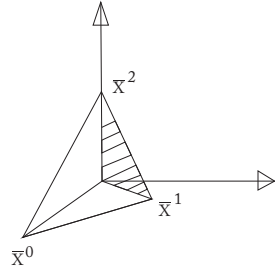


Рис. 6.7 Заштрихованная площадь равна трети площади треугольника

Согласно определению $a_0 = X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1$. Поскольку система координат взята в центре треугольника, то последнее выражение равно удвоенной заштрихованной площади на рисунке 6.1. Так как Δ есть удвоенная площадь всего треугольника, то $a_0 = \Delta/3$. Здесь учтено три треугольника, показанные на рисунке 6.1 имеют равную площадь, равную трети площади треугольника. Также можно выяснить, что $a_1 = \Delta/3$, $a_2 = \Delta/3$. Таким образом, получаем, что

$$\int_{V_q}^0 a_I dV = \frac{\Delta}{3} \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta^2}{6} \Rightarrow \int_{V_q}^0 N_I dV = \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{6} = \frac{\Delta}{6}$$

Поэтому окончательно получаем, что

$$\mathbf{F}_I^V = \frac{\Delta}{6} \rho \mathbf{f}$$

Полученное выражение означает, что вклады объемной силы в узловые нагрузки одинаковы для всех узлов элемента и равны одной трети результирующей по элементу силы.

Теперь осталось вычислить вклады в узловые силы от поверхностной нагрузки. Конечно, для того, чтобы вклад был, нужно, чтобы хотя бы одна сторона элемента выходила на границу области, где заданы поверхностные силы. Например, на рисунке 6.1 такая сторона обозначена как Σ_1 и находится между узлами с локальными номерами 0 и 2.

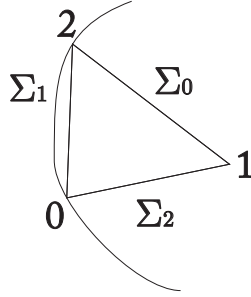


Рис. 6.8

Итак, вклад поверхностной силы в правую часть элементарного уравнения равновесия определяется выражением

$$\mathbf{F}^\Sigma = \int_{\Sigma_q} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^q dV^0$$

или более подробно

$$\mathbf{F}^\Sigma = \int_{\Sigma_q} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \mathbf{S} d\Sigma^0$$

Следовательно, аппроксимируя поверхностную нагрузку постоянным значением в пределах стороны элемента (сторона Σ_1 между узлами 0 и 2), получим

$$\mathbf{F}^\Sigma = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0^\Sigma \\ \mathbf{F}_1^\Sigma \\ \mathbf{F}_2^\Sigma \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_I^\Sigma = \mathbf{S} \int_{\Sigma_q} \mathbf{N}_I d\Sigma^0$$

Интегрирование линейной функции вдоль стороны Σ_1 приводит к тому, что вклад поверхностной силы распределяется равномерно между узлами 0 и 2

$$\mathbf{F}_0^\Sigma = \frac{\{S^{\Sigma_1}\}}{2} L \quad \mathbf{F}_2^\Sigma = \frac{\{S^{\Sigma_1}\}}{2} L$$

где L -длина стороны Σ_1 .

Таким образом, элементарное уравнение равновесия для треугольного конечного элемента полностью при малых деформациях, т.е. для начала деформирования, сформировано

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^\Sigma$$

Рассмотренный пример треугольного элемента показывает процедуру формирования конечно-элементарной аппроксимации вариационного уравнения. Хотя матрично-векторная форма записи соотношений широко используется в литературе по МКЭ, она громоздка

и далее будет применяться тензорно-индексная форма записи. Однако главным усовершенствованием будет применение изопараметрического преобразования очень похожее на использованное ранее преобразование Пиолы. Это позволит рассмотреть все варианты вариационного уравнения с единых позиций.

6.2. Изопараметрическое преобразование

Итак, вариационное уравнение (6.1), записанное для одного элемента имеет вид

$$\varphi_q[\delta\vec{u}, \vec{w}] = \delta A^e[\vec{w}] \quad \delta\vec{u}, \vec{w} \in G^N \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi[\vec{u}, \vec{v}] &= \int_{V_q} C_F^{ijkl}(\vec{u}) \delta u_{k,l} w_{i,j} dV, \\ \delta A^e &= \delta A^e[\vec{w}] = \int_{\overset{0}{V}} \delta \vec{f} \cdot \vec{w} d\overset{0}{V} + \int_{\overset{0}{\Sigma_2}} \delta \vec{S}^0 \cdot \vec{w} d\overset{0}{\Sigma} \end{aligned}$$

Аппроксимация в пространстве G^N записывается с использованием узловых значений перемещений

$$\delta u_k = N_q(\vec{x}) \delta \hat{u}_k^q \quad u_k = N_q(\vec{X}) \hat{u}_k^q \quad w_i = N_q(\vec{X}) \hat{w}_i^q$$

Знак суммы по узлам q элемента опущен. Суммирование ведется по $q = 1, \dots, M_{el}$, где M_{el} есть число узлов элемента. Процедура МКЭ описывается следующими формулами

$$\varphi[\delta\vec{u}, \vec{w}] = \underbrace{\left(\int_{\overset{0}{V_{el}}} C_F^{ijkl} N_{p,i} N_{q,l} d\overset{0}{V} \right)}_{K_{pq}^{ik}} \hat{w}_i^p \delta \hat{u}_k^q, \quad K_{pq}^{ik} = \int_{\overset{0}{V_{el}}} C^{ijkl} N_{p,i} N_{q,l} d\overset{0}{V}$$

$$\delta A^e = \delta A^V + \delta A^\Sigma, \quad \delta A^V = \int_{\overset{0}{V_{el}}} \delta f^i w_i d\overset{0}{V} = \underbrace{\int_{\overset{0}{V_{el}}} \delta f^i N_p d\overset{0}{V}}_{F_p^{(V)i}} w_i^{(N)p}$$

$$F_p^{(V)i} = \int_{\overset{0}{V_{el}}} \delta f^i N_p dV, \quad \delta A^\Sigma = \int_{\overset{0}{\Sigma_{(2)el}}} \delta S^i w_i d\overset{0}{\Sigma} = \underbrace{\int_{\overset{0}{\Sigma_{(2)el}}} \delta S^i N_p d\overset{0}{\Sigma}}_{S_p^i} \hat{w}_i^p$$

$$F_p^i = F_p^{(V)i} + F_p^{(\Sigma)i}, \quad K_{pq}^{ik} \hat{u}_k^q = F_p^i$$

При решении задачи в области сложной формы конечные элементы могут быть произвольными треугольниками, четырехугольниками, тетраэдрами, параллелепипедами. Определенное неудобство состоит в том, что для каждого элемента нужно выводить все формулы. Например, нужно получить функции формы $N_i(X_k)$, формулы интегрирования. Удобнее, если область элемента была бы всегда одна и та же. Поэтому на определенном этапе развития МКЭ возникла идея использовать отображение области элемента V_{el}^0 на стандартную область и получить все необходимые формулы для этой стандартной области один раз и навсегда. Можно заметить, что при выводе квадратурных формул также используется отображение на стандартный отрезок.

Элементы, полученные с помощью отображения, называются параметрическими. Для этих элементов нужно задать функции $X_i = X_i(\beta^1, \dots, \beta^p)$ отображения области элемента на стандартную область (или стандартный элемент), которая была выбрана в виде квадрата или куба: $-1 \leq \beta^i \leq 1, i = 1, \dots, p$. Схематично отображение показано на рисунке 6.2. Преобразование вариационного уравнения при этом преобразовании выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_{V_{el}^\beta} J^\beta C_F^{ijkl}(\vec{u}) \overset{0}{B}_j^m \overset{0}{B}_l^n \delta u_{i,m} w_{k,n} dV^\beta \\ &= \int_{V_{el}^\beta} (J^\beta \overset{0}{\rho}) \delta f_i w_i dV^\beta + \int_{\Sigma_{(2)el}^\beta} J_\Sigma^\beta S_i(\vec{u}) w_i d\Sigma^\xi \end{aligned}$$

где

$$J_\beta = \frac{1}{\det \overset{0}{B}} = \det \overset{0}{A}, \quad \overset{0}{A}_j^i = \frac{\partial X_i}{\partial \beta_j}$$

Сравнивая последнее уравнение с вариационным уравнением (1.76), получаемым при преобразовании Пиолы, нетрудно видеть сходство. По существу, параметрическое преобразование отличается от преобразования Пиолы тем, что применяется к одному элементу, а не всей области. Отметим, что использование преобразования вариационно-разностных уравнений с помощью отображения было предложено в [60].

Для стандартного элемента функции формы N_i являются полиномами переменных β^k . Особым типом отображения является изопараметрическое отображение, когда функции, задающие отображение выбираются полиномами от β^k той же степени, что и функции формы N_i . Конкретнее, эти функции даже совпадают с функциями формы, поскольку отображение задается в виде

$$X_k = X_k^I N_I(\vec{\beta}) \quad (6.8)$$

Ясно, что это отображение задается с помощью полиномов той же степени, что и интерполяция перемещений внутри стандартного элемента. Кроме того, легко видеть, что отображение переводит узлы элемента \hat{X}^I , заданные в координатах $X_i, i = 1, \dots, p$ в узлы стандартного элемента в координатах $\beta^i, i = 1, \dots, p$.

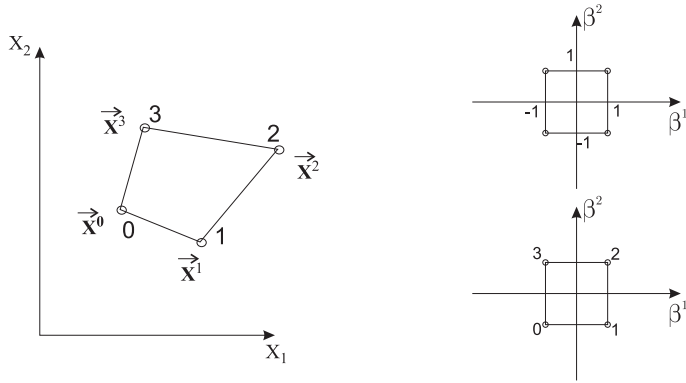


Рис. 6.9 Параметрическое отображение в начальной конфигурации.

Дальнейшая процедура выглядит следующим образом

$$\delta u_{k,X_l} = \frac{\partial N_q}{\partial \beta^m} \frac{\partial \beta^m}{\partial X^l} \hat{u}_k^q = \underbrace{N_{q,m} B_l^m}_{N_{q,l} \equiv N_{q,X_l}} \delta \hat{u}_k^q, \quad (N_{q,X_l} = N_{q,\beta_m} B_l^m = N_{q,m} B_l^m)$$

$$w_{i,X_j} = \frac{\partial N_q}{\partial \beta^m} \frac{\partial \beta^m}{\partial X^j} \hat{w}_i^q = \underbrace{N_{q,m} B_j^m}_{N_{q,j} \equiv N_{q,X_j}} \hat{w}_i^q$$

Следовательно, снова получаем уравнение $K_{pq}^{ik}(\hat{u})\delta\hat{u}_k^q = F_p^i$, где

$$K_{pq}^{ik}(\hat{u}) = \int_{V_{el\beta}} J^\beta C_F^{ijkl}(\bar{u}^N) \overset{0}{B}_l^m \overset{0}{B}_j^n N_{q,m} N_{p,n} dV_\beta$$

$$F_p^{(V)i} = \int_{V_{el}} J^\beta \delta f^i N_p dV, \quad F_p^{(\Sigma)i} = \int_{\Sigma_{(2)el}} J_\Sigma^\beta \delta S^i N_p d\Sigma$$

где $u_k^N = N_I(\beta)\hat{u}_k^I$. Тогда локальное конечно–элементное уравнение выглядит следующим образом

$$\left[(K)_{pq}^{ik}(\hat{u}) \right] (\delta\hat{u}_k^q) = (F_p^i) \quad (6.9)$$

Пример. Рассмотрим стандартный элемент в виде куба с трилинейными функциями формы (см. рис. 6.2). Принятое название таких элементов – Brick. При описании таких элементов удобно наряду с одно индексной нумерацией использовать трех индексную.

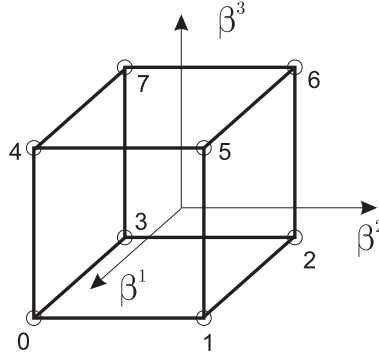


Рис. 6.10 Стандартный элемент типа Brick.

Одноиндексная нумерация объяснена на рис. 6.2, индекс I принимает значения $0, 1, \dots, 7$. Пусть β_I^α есть α -я координата узла I . Стандартный элемент выбирается так, что $\beta_I^\alpha = \pm 1$. С помощью трехиндексной нумерации узлы стандартного элемента нумеруются тройкой чисел $(i_1 i_2 i_3)$, причем $i_\alpha = 0$, если $\beta_I^\alpha = -1$ и $i_\alpha = 1$, если $\beta_I^\alpha = 1$. Тогда функцию формы, ассоциированную с I -м узлом, можно записать в виде

$$N_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{8} (1 + \beta_I^1 \beta^1) (1 + \beta_I^2 \beta^2) (1 + \beta_I^3 \beta^3)$$

Она является линейной относительно каждой координаты β^α , а в целом трехлинейной. Например, узел с номером $I = 1$ может быть записан тройкой индексов (211), поскольку для первого узла

$$\beta_1^1 = 1, \quad \beta_1^2 = -1, \quad \beta_1^3 = -1$$

т.е.

$$N_1 \equiv N_{211} = \frac{1}{8}(1 + \beta^1)(1 - \beta^2)(1 - \beta^3)$$

В "своем" первом узле эта функция равна единице, в остальных нулю.

Аналогично легко записать функции формы элементов лагранжевого типа высших порядков.

Пример. Рассмотрим еще один стандартный элемент клиновидной формы, называемый Wedge.

Теперь получим конечно-элементные дискретизации остальных вариационных уравнений, рассмотренный в предыдущих главах. Начнем с линеаризованного вариационного уравнения, записанного в начальной конфигурации с использованием второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа

$$\int_{\overset{0}{V}} \overset{0}{\nabla} \vec{w}^T : \overset{0}{C}^t(\vec{u}) : \overset{0}{\nabla} d\vec{u} + \\ + \overset{0}{S}(\vec{u}) : [\overset{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\vec{u}] d\overset{0}{V} = \delta A^e[\vec{w}]$$

которое при конечно-элементной дискретизации превращается в алгебраическое уравнение

$$\left[(K^t)_{pq}^{ik}(\hat{u}) + (K^g)_{pq}^{ik}(\hat{u}) \right] (\delta \hat{u}_k^q) = (F_p^i) \quad (6.10)$$

где

$$(K^t)_{pq}^{ik}(\hat{u}) = \int_{V_{el\beta}} J_\beta (C^t)^{ijkl}(\vec{u}^N) \overset{0}{B}_l^m \overset{0}{B}_j^n N_{q,m} N_{p,n} dV_\beta \\ (K^g)_{pq}^{ik}(\hat{u}) = \int_{V_{el\beta}} J_\beta S^{ij}(\vec{u}^N) \overset{0}{B}_i^m \overset{0}{B}_j^n N_{p,m} N_{q,n} dV_\beta$$

В результате получаем конечномерную аппроксимацию итерационного процесса (5.27)

$$\left[(K^t)_{pq}^{ik}(\hat{u}^{m+1,s}) + (K^g)_{pq}^{ik}(\hat{u}^{m+1,s}) \right] (\delta \hat{u}_k^q)^{m+1,s+1} = (F_p^i)^{m+1}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V \overset{0}{\nabla} \vec{w}^T : \underset{\sim}{C}^t(\vec{u}^{m+1,s}) : \overset{0}{\nabla} d\vec{u}^{m+1,s+1} + \\
& + \underset{\sim}{S}(\vec{u}^{m+1,s}) : [\overset{0}{\nabla} \vec{w}^T \cdot \overset{0}{\nabla} d\vec{u}^{m+1,s}] \} dV = (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Теперь можно также получить дискретизацию линеаризованного вариационного уравнения (4.9), записанного в актуальной конфигурации.

$$\begin{aligned}
& \int_V \nabla \vec{w}^T : \underset{\sim}{C}^d(\vec{u}^{m+1,s}) : \nabla d\vec{u}^{m+1,s+1} + \\
& + \underset{\sim}{\sigma}(\vec{u}^{m+1,s}) : [\nabla \vec{w}^T \cdot \nabla d\vec{u}^{m+1,s}] \} dV = (\delta A^e)^{m+1}[\vec{w}]
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Для применения конечно-элементной дискретизации используем изопараметрическое отображение аналогичное отображению (6.8)

$$x_k = x_k^I N_I(\vec{\beta}) \tag{6.13}$$

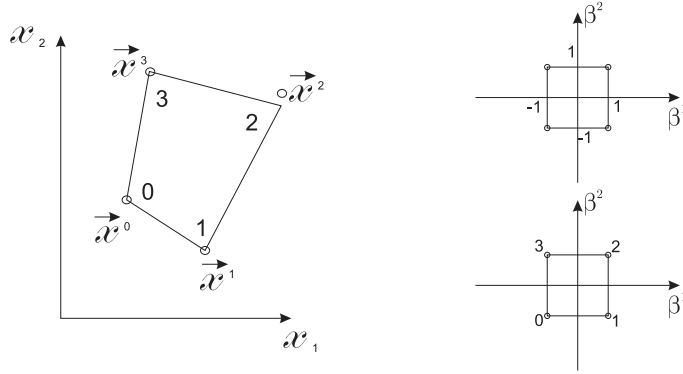


Рис. 6.11 Параметрическое отображение в текущей конфигурации.

Следовательно, используемые ранее формулы преобразования теперь имеют вид

$$\delta u_{k,x_l} = \frac{\partial N_q}{\partial \beta^m} \frac{\partial \beta^m}{\partial x^l} \hat{u}_k^q = \underbrace{N_{q,m} B_l^m}_{N_{q,l} \equiv N_{q,x_l}} \delta \hat{u}_k^q, \quad (N_{q,x_l} = N_{q,\beta_m} B_l^m = N_{q,m} B_l^m)$$

$$w_{i,x_j} = \frac{\partial N_q}{\partial \beta^m} \frac{\partial \beta^m}{\partial x^j} \hat{w}_i^q = \underbrace{N_{q,m} B_j^m}_{N_{q,j} \equiv N_{q,x_j}} \hat{w}_i^q$$

В результате снова получим конечномерное уравнение

$$\left[(K^t)_{pq}^{ik}(\hat{u}) + (K^g)_{pq}^{ik}(\hat{u}) \right] (\delta \hat{u}_k^q) = (F_p^i) \quad (6.14)$$

где матрицы теперь вычисляются по следующим формулам

$$(K^t)_{pq}^{ik}(\hat{u}) = \int_{V_{el\beta}} J_\beta (C^d)^{ijkl}(\vec{u}^N) B_l^m B_j^n N_{q,m} N_{p,n} dV_\beta$$

$$(K^g)_{pq}^{ik}(\hat{u}) = \int_{V_{el\beta}} J_\beta \sigma^{ij}(\vec{u}^N) B_i^m B_j^n N_{p,m} N_{q,n} dV_\beta$$

За исключением члена в правой части, который отвечает за поверхностную нагрузку, уравнения (6.9), (6.10) и (6.14) эквивалентны и отличаются только способом вычисления локальных матриц жесткости и правых частей.

Осталось описать аппроксимацию члена вариационного уравнения \dot{A}^p , отвечающего за работу поверхностной нагрузки в виде давления. Этот член был представлен в виде суммы $\dot{A}^p = \dot{A}_1^p + \dot{A}_2^p$. Простейшая аппроксимация по t состоит в замене производной конечным приращением $\delta A^p = \delta A_1^p + \delta A_2^p$. Первый член $\delta A_1^p = - \int_{\Sigma_2} \delta p \vec{n}(\vec{u}) \cdot \vec{w} d\Sigma$ представляет собой линейный функционал относительно \vec{w} и поэтому дает вклад в правую часть конечно-элементного уравнения в виде $F_p^{(p)i}$, определяемый следующим соотношением

$$\delta A_{1(el)}^p = - \left(\int_{\Sigma_{2(el)}} J_\Sigma^\beta(\delta p) n_i N_p d\Sigma^\beta \right) \hat{w}_i^p = F_p^{(p)i} \hat{w}_i^p$$

Якобиан J_Σ^β для конечного элемента можно вычислить следующим образом. Рассмотрим грань элемента, на которую действует

внешнее давление. Пусть $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ касательные к этой грани $\vec{\tau}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^1}$, $\vec{\tau}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^2}$ в текущей конфигурации, тогда $\vec{n} d\Sigma = (\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2) d\Sigma^\beta$. Таким образом, произведение $J_\Sigma^\beta n_i$ может быть вычислено как

$$J_\Sigma^\beta n_i = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^2} \right)_i$$

а производные равны $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^1} = \vec{x}^p \frac{\partial N_p}{\partial \beta^1}$, $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta^2} = \vec{x}^p \frac{\partial N_p}{\partial \beta^2}$.

Второй член δA_2^p для одного элемента согласно (4.37) представляется так

$$\begin{aligned} \delta A_2^p(\delta \vec{u}, \vec{w}) &= -p(t) \int_{\Sigma_2^\xi} \left[-\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} \times \vec{w} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} \times \vec{w} \right] d\Sigma^\beta = \\ &= p(t) \epsilon_{ijk} \int_{\Sigma_2^\xi} \left[-\frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} \frac{\partial \delta u_j}{\partial \beta_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} \frac{\partial \delta u_j}{\partial \beta_2} \right] w_k d\Sigma^\beta = \\ &= p(t) \epsilon_{ijk} x_i^r \int_{\Sigma_2^\xi} \left[-\frac{\partial N_r}{\partial \beta_2} \frac{\partial N_q}{\partial \beta_1} N_p + \frac{\partial N_r}{\partial \beta_1} \frac{\partial N_q}{\partial \beta_2} N_p \right] d\Sigma^\beta \delta \hat{u}_j^q \hat{w}_i^p = \\ &= -K_{pq}^{(p)ij} \delta \hat{u}_j^q \hat{w}_i^p = -K_{pq}^{(p)ij} \delta \hat{u}_i^p \hat{w}_j^q \end{aligned}$$

В итоге, вариационное уравнение, записанное для одного элемента, в случае, когда внешняя нагрузка определяется внешним давлением, записывается в виде

$$\left[(K^t)_{pq}^{ij}(\hat{u}) + (K^g)_{pq}^{ij}(\hat{u}) + K_{pq}^{(p)ij} \right] (\delta \hat{u}_k^q) \hat{w}_i^p = \left[F_p^{(p)i} + F_p^{(V)i} + F_p^{(\Sigma)i} \right] \hat{w}_i^p$$

Поскольку \hat{w}_i^p произвольны, то конечно-элементное уравнение имеет вид

$$\left[(K^t)_{pq}^{ij}(\hat{u}) + (K^g)_{pq}^{ij}(\hat{u}) + K_{pq}^{(p)ij} \right] (\delta \hat{u}_k^q) = \left[F_p^{(p)i} + F_p^{(V)i} + F_p^{(\Sigma)i} \right] \quad (6.15)$$

В последнем уравнении $F_p^{(\Sigma)i}$ есть вклад в правую часть от внутренних сил, действующих со стороны окружающих элементов. Все эти вклады сокращаются в процессе ассемблирования.

6.3. Численное интегрирование.

Во всех уравнениях (6.9), (6.10), (6.14), (6.15) для вычисления локальных матриц и правых частей при использовании изопараметрических элементов требуется вычислять интегралы в области стандартного конечного элемента. В случае элементов типа Brick (кирпич) стандартным элементом служит куб $-1 \leq \beta_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$ или по его поверхностям. Поскольку функции формы являются полиномами, то в случае постоянных модулей упругости возможно точное вычисление этих интегралов. Однако в МКЭ принято использовать квадратурные формулы Гаусса. Если формулы интегрирования выбраны такого порядка точности, чтобы обеспечить точное вычисление интеграла, то это называется полное интегрирование. Если используемые квадратурные формулы не дают точное значение интеграла, то процедура называется сокращенным интегрированием. Применение сокращенного интегрирования бывает необходимо использовать в случае мало сжимаемого материала.

Глава 7.

Методы решения.

7.1. Метод интегрирования по параметру нагружения

В данном параграфе рассмотрим метод интегрирования дискретного аналога линеаризованного вариационного уравнения. Сначала осуществив ассемблирование локальных уравнений (6.9), (6.10) или (6.14), получим глобальное уравнение

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \delta \mathbf{U} + \delta \mathbf{F} = 0$$

где в векторы \mathbf{U} , $\delta \mathbf{U}$ и \mathbf{F} собраны все узловые перемещения, приращения перемещений и силы. Глобальная матрица жесткости может быть представлена как сумма тангенциальной и геометрической частей $\mathbf{K}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}^T(\mathbf{U}) + \mathbf{K}^G(\mathbf{U})$. Поскольку дискретизация по времени и пространственным координатам перестановочны, то можно записать систему дифференциальных уравнений, получаемую после

дискретизации по пространственным координатам

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{F}} = 0, \quad \text{или} \quad \left(\mathbf{K}^T(\mathbf{U}) + \mathbf{K}^G(\mathbf{U}) \right) \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (7.1)$$

Тогда все рассмотренные выше способы дискретизации по времени следует трактовать как методы решения систем дифференциальных уравнений (7.1). Например, неявный метод Эйлера с внутренними итерациями записывается так

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^{m+1,s}) \delta \mathbf{U}^{m+1,s+1} = \delta \mathbf{F}^{m+1}$$

Это матрично-векторное уравнение можно, конечно, записать в форме с индексами, подчеркнув блочную структуру глобальной матрицы жесткости и векторов $\delta \mathbf{U}$ и $\delta \mathbf{F}$

$$K_{pq}^{ik}(\mathbf{U}^{m+1,s})(\delta U_k^q)^{m+1,s+1} = (\delta F_p^i)^{m+1}, \quad \delta U^{m+1,0} = \delta U^m$$

Можно также записать нелинейную алгебраическую систему, получаемую после пространственной дискретизации исходного (не линеаризованного) вариационного уравнения (), () или ()

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}) + \mathbf{F} = 0. \quad (7.2)$$

Поэтому дифференциальная система (7.1) может быть записана также в виде

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}) \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (7.3)$$

Ее можно переписать в явном виде

$$\dot{\mathbf{U}} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}) \cdot \dot{\mathbf{F}}(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{U}) \quad (7.4)$$

и применять методы, разработанные для решения нелинейных систем дифференциальных уравнений. Одно существенное отличие состоит в том, что даже явные методы для системы (7.4) оказываются неявными для системы (7.1). Однако мы будем сохранять названия, заимствованные из теории методов, предназначенных для систем дифференциальных уравнений, разрешенных явно относительно $\dot{\mathbf{U}}$. Поэтому следующий метод мы называем явным методом Эйлера метод $\mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{U}^m + \delta t \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}^m)$ а метод $\mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{U}^m + \delta t \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}^{m+1})$ – неявным. После очевидных преобразований оба метода приводятся к форме, которая использовалась

ранее

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{m+1} - \mathbf{U}^m &= -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^m) \cdot \delta t \dot{\mathbf{F}}(t_m), \\ \mathbf{U}^{m+1} - \mathbf{U}^m &= -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^{m+1}) \cdot \delta t \dot{\mathbf{F}}(t_{m+1}) \end{aligned}$$

или

$$\delta \mathbf{U}^{m+1} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^m) \cdot \delta \mathbf{F}^m, \quad \delta \mathbf{U}^{m+1} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^{m+1}) \cdot \delta \mathbf{F}^{m+1}$$

Приведенные в 5.4 схемы дискретизации по времени, конечно, представляют собой алгоритмы, заимствованные из методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Интерес представляют методы высокого порядка аппроксимации. Для второго порядка аппроксимации хорошо известны два метода: трапеций и средней точки. На языке уравнения () метод трапеций а виде схемы предиктор–корректор выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}^{P,m+1} &= -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^m) \cdot \delta \mathbf{F}^m, \\ \delta \mathbf{U}^{C,m+1} &= -\frac{1}{2} \left[\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^{P,m+1}) \cdot \delta \mathbf{F}^{m+1} + \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^m) \cdot \delta \mathbf{F}^m \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Метод средней точки выглядит так

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}^{P,m+1/2} &= -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^m) \cdot \delta \mathbf{F}^m, \\ \delta \mathbf{U}^{C,m+1} &= -\left[\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}^{P,m+1/2}) \cdot \delta \mathbf{F}^{m+1/2} \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

Используя разложения в ряд Тейлора, несложно убедиться, последние два метода имеют второй порядок аппроксимации относительно шага δt . Вопрос устойчивости и сходимости рассматривается ниже. Начнем с явного метода Эйлера

$$\mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{U}^m + \delta t \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}^m)$$

примененного к системе дифференциальных уравнений

$$\mathbf{U}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{U}), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0$$

Погрешность приближенного решения $\Delta \mathbf{U}^m = \mathbf{U}^m - \mathbf{U}(t_m)$ можно оценить из следующего соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{U}^{m+1} - \Delta \mathbf{U}^m}{\delta t} &= \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}^m) - \frac{\mathbf{U}(t_{m+1}) - \mathbf{U}(t_m)}{\delta t} \\ &= \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}(t_m) + \Delta \mathbf{U}^m) - \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}(t_m)) + \mathbf{r}(\delta t) \end{aligned}$$

При преобразовании использовалось нижеприведенное соотношение, выражающее собой аппроксимацию

$$\frac{\mathbf{U}(t_{m+1}) - \mathbf{U}(t_m)}{\delta t} - \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}(t_m)) = \mathbf{r}_m(\delta t)$$

Для метода Эйлера $\mathbf{r}_m = O(\delta t)$. Следовательно, используя неравенство Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{U}^{m+1}\| &\leq \|\mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}(t_m, \mathbf{U}^*)\| \|\Delta \mathbf{U}^m\| + \|\mathbf{r}_m\| \delta t, \\ \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}(t_m) + \xi \Delta \mathbf{U}^m, \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

Последнее неравенство обосновывается достаточно просто. Действительно, погрешность приближенного решения преобразуется при переходе к следующему шагу согласно уравнению

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{m+1} &= \Delta \mathbf{U}^m + \delta t [\mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}^m) - \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}(t_m))] + \mathbf{r}_m \delta t = \\ &= \mathbf{U}^m + \delta t \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}^m) - [\mathbf{U}(t_m) + \delta t \mathbf{f}(t_m, \mathbf{U}(t_m))] + \mathbf{r}_m \delta t = \\ &= \phi(\mathbf{U}^m) - \phi(\mathbf{U}(t_m)) + \mathbf{r}_m \delta t \end{aligned}$$

где $\phi(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + \delta t \mathbf{f}(t_m, \mathbf{Y})$. Неравенство Лагранжа для функции ϕ выглядит следующим образом

$$\|\phi(\mathbf{U}^m) - \phi(\mathbf{U}(t_m))\| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{U}}(t_m, \mathbf{U}_\xi) \right\| \|\Delta \mathbf{U}^m\|$$

где $\mathbf{U}_\xi = \mathbf{U}(t_m) + \xi \Delta \mathbf{U}^m$, а частная производная равна $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}(t_m, \mathbf{U}_\xi)$.

Термин устойчивость употребляется весьма часто и в разных смыслах. Здесь, следуя [47], мы будем называть метод абсолютно устойчивым, если погрешность решения $\Delta \mathbf{U}^m$ остается ограниченной при $t_M \rightarrow \infty$. Из предыдущего видно, что для абсолютной устойчивости достаточно потребовать, что погрешность не накапливается на каждом шаге, т.е.

$$\rho = \|\mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}\| \leq 1$$

В таком случае, $\|\Delta \mathbf{U}^{m+1}\| \leq \|\Delta \mathbf{U}^m\| + \|\mathbf{r}_m\| \delta t$ и, следовательно, учитывая, что $t_M = M \delta t$, получим

$$\|\Delta \mathbf{U}^M\| \leq \|\Delta \mathbf{U}^0\| + r M \delta t = \|\Delta \mathbf{U}^0\| + t_M r, \quad r = \max_i \|\mathbf{r}_i\|$$

где первый член есть ошибка начального приближения, а второй представляет собой аппроксимационную ошибку. Предположим, что все собственные значения λ_i (вообще говоря, комплексные) якиби-евой матрицы $\frac{\partial f}{\partial U}$ различны. Поскольку норма равна максимальному по модулю собственному значению, то $\rho = \max_{\lambda_i} |1 + \delta t \lambda_i|$. Таким образом, значения δt , достаточные для абсолютной устойчивости, удовлетворяют неравенству $|1 + \delta t \lambda_i| \leq 1$. В терминах произведения $\delta t \lambda$, множество, соответствующее абсолютной устойчивости есть круг единичного радиуса с центром в точке -1 . Если все собственные значения λ_i имеют отрицательные действительные части, то можно добиться выполнения условия абсолютной устойчивости за счет достаточно малого шага δt . В противном случае абсолютной устойчивости добиться невозможно, но можно получить устойчивость на конечном отрезке интегрирования $[0, t_M]$. В этом случае оценка погрешности при переходе к следующему шагу получается следующей: $\rho \leq 1 + \delta t \Lambda$, где $\Lambda = \max_{\lambda_i} |\lambda_i|$. Оценка погрешности в момент t_M (на шаге M) получается существенно хуже

$$\begin{aligned} \|\Delta U^M\| &\leq (1 + \delta t \Lambda) \|\Delta U^{M-1}\| + O(\delta t^2) \leq \dots \leq (1 + \delta t \Lambda)^M \|\Delta U^0\| + O(\delta t^2) [(1 + \delta t \Lambda)^{M-1} + (1 + \delta t \Lambda)^{M-2} + \dots + 1] = \\ &= (1 + \delta t \Lambda)^M \|\Delta U^0\| + O(\delta t^2) \frac{(1 + \delta t \Lambda)^M - 1}{\delta t \Lambda} = \\ &= (1 + \delta t \Lambda)^M \|\Delta U^0\| + [(1 + \delta t \Lambda)^M - 1] O(\delta t) \end{aligned}$$

Поскольку при большом M (малом $\delta t = t_M/M$) выражение $(1 + \delta t \Lambda)^M$ приближенно равно $e^{\Lambda t_M}$, то

$$\|\Delta U^M\| \leq e^{\Lambda t_M} \|\Delta U^0\| + (e^{\Lambda t_M} - 1) r$$

Таким образом, справедливо следующее неравенство

$$\|\Delta U^M\| \leq C_1 \|\Delta U^0\| + C_2 \delta t$$

с константами C_1, C_2 , не зависящими от шага интегрирования δt . Поэтому можно сказать, что метод устойчив, однако ясно, что константы C_1, C_2 сильно зависят от t_M и, следовательно, для интегрирования на значительном интервале может потребоваться слишком малый шаг.

Таким образом, явный метод Эйлера требует, скорее всего, слишком мелкого шага интегрирования. Это подтверждается при попытке использовать этот метод для решения геометрически нелинейных задач. С точки зрения теории, неявный метод представляется более предпочтительным. Рассмотрим неявный метод Эйлера, являющийся самым простым из неявных методов.

Неявный метод Эйлера выглядит следующим образом

$$\frac{\mathbf{U}^{m+1} - \mathbf{U}^m}{\tau} = \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}^{m+1})$$

Для этого метода оценка аппроксимации выглядит практически также, как и для явного метода Эйлера

$$\frac{\mathbf{U}(t_{m+1}) - \mathbf{U}(t_m)}{\delta t} - \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}(t_{m+1})) = \mathbf{r}_{m+1}(\delta t)$$

где $\mathbf{r}_{m+1} = O(\delta t)$. Поэтому для погрешности приближенного решения $\Delta \mathbf{U}$ получаем выражение

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{m+1} - \Delta \mathbf{U}^m}{\delta t} = \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}_{m+1}) - \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}(t_{m+1})) + \mathbf{r}_{m+1}$$

или

$$\Delta \mathbf{U}^{m+1} = \Delta \mathbf{U}^m + \delta t [\mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}_{m+1}) - \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}(t_{m+1}))] + \mathbf{r}_{m+1} \delta t$$

Выясним характер накопления погрешности $\Delta \mathbf{U}^m$, используя последнее рекуррентное соотношение. Для этого умножим его на произвольный вектор \mathbf{Y}^T

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \cdot \Delta \mathbf{U}^{m+1} &= (\Delta \mathbf{U}^m)^T \cdot \mathbf{Y} + \\ &+ \delta t (\mathbf{Y}^T \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{U}_{m+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_{m+1}))]) + \delta t \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{r}_{m+1} \end{aligned}$$

Используя прежние обозначения: $\mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{U}(t_m) + \Delta \mathbf{U}_m$, $\mathbf{U}_\xi = \mathbf{U}(t_m) + \xi \Delta \mathbf{U}_m$, введем скалярную функцию

$$\psi(\xi) = \mathbf{Y}^T \cdot [\mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}(\xi)) - \mathbf{f}(t_{m+1}, \mathbf{U}(t_{m+1}))]$$

обладающую свойствами: $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = \mathbf{Y}^T \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{U}_{m+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_m))]$. Используя очевидное равенство $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi)(1 - 0) = \psi'(\xi)$ и выражение для производной

$$\psi'(\xi) = \frac{d\psi}{d\xi} = \mathbf{Y}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}(t_{m+1}, \mathbf{U}_\xi) \cdot \Delta \mathbf{U}_m$$

будем иметь $\mathbf{Y}^T \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{U}_{m+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_{m+1}))] = \mathbf{Y}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_\xi) \cdot \Delta \mathbf{U}^{m+1}$

Обозначим $\mathbf{B} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \mathbf{U}}(t_{n+1}, \mathbf{U}_\xi)$, тогда

$$\mathbf{Y}^T \cdot (\mathbf{I} - \delta t \mathbf{B}) \cdot \Delta \mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{Y}^T \cdot ((\Delta \mathbf{U}^m) + \delta t \mathbf{r}_{m+1})$$

Полагая $\mathbf{Y} = \Delta \mathbf{U}^{m+1}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{m+1} \cdot ((\Delta \mathbf{U}^m) + \delta t \mathbf{r}_{m+1}) &= \Delta \mathbf{U}^{m+1} \cdot (\mathbf{I} - \delta t \mathbf{B}) \cdot \Delta \mathbf{U}^{m+1} \geq \\ &\geq \min_i |1 - \delta t \lambda_i| \|\Delta \mathbf{U}^{m+1}\|^2 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Delta \mathbf{U}^{m+1}\| \leq \frac{1}{\min_i |1 - \delta t \lambda_i|} \|(\Delta \mathbf{U}^m) + \delta t \mathbf{r}_{m+1}\|$$

Достаточным условием абсолютной устойчивости является следующее неравенство $\min_i |1 - \delta t \lambda_i| \geq 1$. В терминах $\delta t \lambda_i$ множество, удовлетворяющее последнему неравенству, представляет собой внешность единичного круга с центром в точке 1, т.е. множество, существенно большее, чем для явного метода. Например, в это множество безусловно попадают все точки с отрицательной действительной частью. Другими словами, если все собственные значения якобиевой матрицы имеют отрицательную действительную часть, то неявный метод является безусловно устойчивым. Такой случай соответствует устойчивому решению дифференциального уравнения.

Таким образом, как и следовало ожидать, мы получили, что для устойчивых решений явный метод Эйлера условно абсолютно устойчив, а неявный метод безусловно абсолютно устойчив. Сходимость более точных методов может быть исследована, используя аналогичную технику.

7.2. Метод Ньютона

Снова возвращаемся к обсуждению методов решения уравнения (7.2)

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}) + \mathbf{F} = 0.$$

В параграфе 7.1 был описан метод сведения к векторному дифференциальному уравнению. В данном параграфе рассмотрим метод Ньютона решения непосредственно уравнения (7.2)

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^s) \frac{\mathbf{U}^{s+1} - \mathbf{U}^s}{\beta} \mathbf{N}(\mathbf{U}^s) + \mathbf{F} = 0$$

Здесь s – номер итераций, а β – итерационный параметр. Данный метод представляет собой модифицированный метод Ньютона, поскольку в "чистом" методе Ньютона $\beta = 1$. При таком подходе решение уравнения ищется для $\mathbf{F}(t_M)$, не используя дискретизацию по параметру t . Теоретически такой метод возможен, но почти не применяется. Причины для этого следующие. Во-первых, сходимость зависит от нулевого приближения \mathbf{U}^0 , и его трудно подобрать. Во-вторых, почти всегда требуется проследивать весь процесс деформирования. Потому метод Ньютона применяется в сочетании с дискретизацией по параметру нагружения (или времени) t

Другими словами, метод Ньютона применяется для решения уравнение $\mathbf{N}(\mathbf{U}^{m+1}) + \mathbf{F}(t_{m+1}) = 0$ на шаге t_{m+1} с учетом того, что решение \mathbf{U}^m на шаге t_m уже вычислено

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^{m+1,s}) \frac{\mathbf{U}^{m+1,s+1} - \mathbf{U}^{m+1,s}}{\beta} \mathbf{N}(\mathbf{U}^{m+1,s}) + \mathbf{F}^{m+1} = 0$$

где $\mathbf{U}^{m+1,0} = \mathbf{U}^m$. Последний метод обычно записывается в слегка преобразованном виде, учитывающем, что

$$\mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^{m+1}, \quad \mathbf{U}^{m+1,s} = \mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^{m+1,s}$$

Тогда метод Ньютона принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^{m+1,s}) \frac{\delta \mathbf{U}^{m+1,s+1} - \delta \mathbf{U}^{m+1,s}}{\beta} \\ + \mathbf{N}(\mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^{m+1,s}) + \mathbf{F}^{m+1} = 0 \end{aligned}$$

Начальное приближение $\mathbf{U}^{m+1,0}$ для берется с предыдущего шага. Тогда $\delta \mathbf{U}^{m+1,0} = 0$. Другой вариант заключается в том, что $\delta \mathbf{U}^{m+1,0} = \delta \mathbf{U}^m$. Первый способ выбора начального приближения эквивалентен тому, что $\mathbf{U}^{m+1,0} = \mathbf{U}^m$, второй означает, что $\mathbf{U}^{m+1,0} = \mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^m$. Можно использовать линейную комбинацию $\mathbf{U}^{m+1,0} = \mathbf{U}^m + c \delta \mathbf{U}^m$, $c \in [0, 1]$.

Для ряда моделей механики деформируемого тела уравнение типа (7.2) , сформулированное относительно вектора перемещения, не может быть получено, поскольку определяющее соотношение такой модели записано относительно скоростей (дифференциалов по параметру нагружения) напряжений и деформаций. В этом случае конечно-элементное уравнение равновесия изначально формулируется в виде уравнения типа (7.3). Если $\mathbf{N}(\mathbf{U})$ не может быть вычислено, то метод Ньютона сводится к неявному методу Эйлера. Действительно, в таком случае $\mathbf{N}(\mathbf{U}^{m+1,s}) \approx \mathbf{N}(\mathbf{U}^m) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^{m+1,s})\delta \mathbf{U}^{m+1,s} = -\mathbf{F}^m + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^{m+1,s})\delta \mathbf{U}^{m+1,s}$. После подстановки в метод Ньютона получается неявный метод Эйлера с внутренними итерациями ($\beta = 1$)

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^{m+1,s}) \cdot \delta \mathbf{U}^{m+1,s} + \delta \mathbf{F}^{m+1} = 0$$

В отличие от метода Ньютона, точность приближенного решения обеспечивается не числом итераций по параметру s , малостью шага интегрирования δt . Поэтому число внутренних итераций обычно невелико, например 2 или 3 . При двух итерациях метод называется предиктор-корректор

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^m)\delta \mathbf{U}_P^{m+1} + \delta \mathbf{F}^{m+1} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_P^{m+1})\delta \mathbf{U}_C^{m+1} + \delta \mathbf{F}^{m+1} = 0 \end{cases}$$

Если правая часть зависит не только от параметра t , но и решения \mathbf{U} , то в первом уравнении $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t_{m+1}, \mathbf{U}^m)$, а во втором $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t_{m+1}, \mathbf{U}_P^{m+1})$.

7.3. Усовершенствование метода Ньютона

Сходимость метода Ньютона при $\beta = 1$ ухудшается или теряется в случае, если матрица $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}}$ плохо обусловлена. Самое простое усовершенствование состоит в использовании $\beta < 1$. Часто это обеспечивает сходимость, хотя и делает ее более медленной. Однако существует более эффективный метод [] , который улучшает сходимость . Идея состоит в том, что направление, вдоль которого минимизируется невязка приближенного решения , ищется методом Ньютона,

но длина шага вдоль выбранного направления определяется специальным алгоритмом одномерной оптимизации, называемым методом поиска вдоль линии (Line Search Method). Для пояснения сути этого приема сначала рассмотрим одномерное уравнение []

$$N(U) + F = 0 \quad (7.7)$$

Тогда s - я итерация метода Ньютона выглядит следующим образом

$$K(U^s)(U_*^{s+1} - U^s) + R(U^s) = 0$$

где $R(U^s) = N(U^s) + F$ - невязка s -го приближения, а U_*^{s+1} - следующее, $s + 1$ -е приближение стандартного метода Ньютона. Образзуем разность $\Delta U_*^{s+1} = U_*^{s+1} - U^s$ и будем искать следующее приближение в модифицированном методе в виде

$$U^{s+1} = U^s + \eta \Delta U_*^{s+1}$$

где η числовой параметр, который следует выбрать так, чтобы U^{s+1} было ближе к решению U уравнения (7.7), чем U_*^{s+1} .

Введем функцию $r(\eta) = R(U^s + \eta \Delta U_*^{s+1})$. Ясно, что наилучшим выбором для η служит корень уравнения $r(\eta) = 0$, что будет означать $R(U^s + \eta \Delta U_*^{s+1}) = 0$, т.е. решением уравнения $R(U) = 0$ будет $U^{s+1} = U^s + \eta \Delta U_*^{s+1}$. Конечно, найти этот корень невозможно, но его можно приблизить, если использовать квадратичную аппроксимацию для функции r . Квадратичную аппроксимацию строится при использовании информации о функции r , которую можно вычислить в процессе итераций. Действительно, значение $r(0) = R(U^s)$ известно еще до итерации метода Ньютона, а $r(1) = R(U^s + \Delta U_*^{s+1}) = R(U_*^{s+1})$ - известна после нее. Кроме этого, может быть вычислена производная в нуле

$$r'(0) = \frac{dr}{d\eta}(0) = \frac{\partial R}{\partial U}(U^s) \Delta U_*^{s+1} = K(U^s) \Delta U_*^{s+1} = -R(U^s) = -r(0)$$

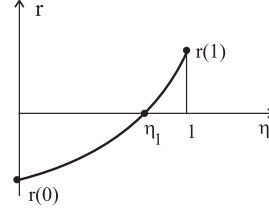


Рис. 7.1 Случай действительного корня функции $r(\eta)$.

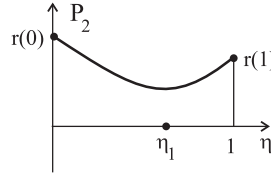


Рис. 7.2 Случай отсутствия действительных корней функции $r(\eta)$.

Таким образом, у функции r известны $r(0), r'(0), r(1)$. Этих данных достаточно, чтобы построить квадратичную аппроксимацию r в виде

$$P_2(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c$$

используя $P_2(0) = r(0), P_2(1) = r(1), P_2'(0) = r'(0)$. Тогда получаем равенства: $P_2(0) = c = r(0), P_2'(0) = b = -r(0), P_2(1) = a + b + c = r(1)$. Следовательно $P_2(\eta) = r(1)\eta^2 - r(0)\eta + r(0) = r(1)\eta^2 + r(0)(1 - \eta)$. Если ввести $\frac{r(0)}{r(1)} = k$, и приведенный полином

$$\tilde{P}_2(\eta) = \frac{P_2(\eta)}{r(1)} = \eta^2 + \left(\frac{r(0)}{r(1)}\right)(1 - \eta) = \eta^2 + k(1 - \eta)$$

то задача определения оптимального значения η сводится к решению квадратного уравнения $\tilde{P}_2(\eta) = 0$. Корни имеют вид $\eta_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k}$. Если $k < 0$, тогда корни точно действительные и функция $r(\eta)$ имеет, например, вид, показанный на рис. 7.3. В этом случае подходит корень $\eta_1 = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k}$ потому, что $\eta_2 = \frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k} < 0$. Первый корень удовлетворяет условиям: $\eta_1 > 0$ и $\eta_1 < 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k} < 1 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k} \leq \frac{|k|}{2} + 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \leq \left(\frac{k}{2}\right)^2 + |k| + 1 \end{aligned}$$

что верно. Если $k > 0$, тогда действительного корня нет и η находится из условия $P_2'(\eta) = 0$ (рис. 7.3). Другими словами, ищется η_1 , для которого либо $\min \tilde{P}_2(\eta) = \tilde{P}_2(\eta_1)$, либо $\max \tilde{P}_2(\eta) = \tilde{P}_2(\eta_1)$. Следовательно, η_1 определяется из уравнения

$$\tilde{P}_2' = 2\eta - k = 0$$

В обоих случаях, следующее приближение определяется по формуле $U^{s+1} = U^s + \eta_1 \Delta U_*^{s+1}$.

В многомерном случае на шаге $s + 1$ процедура Line Search выглядит так:

$$U^{m+1,0} = U^m, \quad K(U^{m,s})(U_*^{m+1,s+1} - U^{m+1,s}) + R(U^{m+1,s}) = 0$$

где

$$\Delta U_*^{m+1,s+1} = U_*^{m+1,s+1} - U^{m+1,s}$$

а $U_*^{m+1,s+1}$ есть промежуточное приближение к $U^{m+1,s+1}$ которое ищем в виде $U^{m+1,s+1} = U^{m+1,s} + \eta \Delta U_*^{m+1,s+1}$. По сравнению с одномерным случаем изменяется только способ определения функции $r(\eta)$

$$\begin{aligned} r(\eta) &= \Delta U_*^{m+1,s+1} \cdot R(U^{m+1,s+1}) \\ &= \Delta U_*^{m+1,s+1} \cdot R(U^{m+1,s} + \eta \Delta U_*^{m+1,s+1}) \end{aligned}$$

Другими словами, r есть проекция невязки R на направление $\Delta U_*^{m+1,s+1}$. Величина $r(0) = \Delta U_*^{m+1,s+1} \cdot R(U^{m+1,s})$ — вычислима, также как и $r(1) = \Delta U_*^{m+1,s+1} \cdot R(U^{m+1,s+1})$. Производная в нуле также может быть вычислена

$$r'(0) = (\delta U_*^{m+1,s+1})^T \cdot \frac{\partial R}{\partial U}(U^{m+1,s}) \cdot \delta U_*^{m+1,s+1}$$

Квадратичная аппроксимация вводится аналогично одномерному случаю $P_2(\eta) = r(1)\eta^2 + r(0)(1 - \eta)$ поскольку $r'(0) = -\Delta U_*^{m+1,s+1} \cdot R(U^{m+1,s}) = -r(0)$. Таким образом, по определенным $r(0), r'(0), r(1)$ вычисляется η_1 . Далее можно перейти к следующей итерации Ньютона. Но также можно продолжить поиск более удачного значения η . Именно, можно проверять условие $r(\eta_1) \leq \delta r(0)$, где, например, $\delta \simeq 0.5$. Если последнее условие выполнено, то вычисляется следующая итерация по методу Ньютона. Если не выполняется, то можно построить более точную квадратичную аппроксимацию, используя значение $r(0), r'(0), r(\eta_1)$ и найти $\eta_1^{(2)}$; ($\eta_1 = \eta_1^{(1)}$) и т.д. Уточнение останавливается, если $r(\eta_1^{(k)}) \leq \delta r(0)$ и осуществляется переход к следующей итерации Ньютона.

7.4. Прослеживание процесса деформирования в закритическом состоянии.

Решение задачи механики деформируемого тела и, в частности, теории упругости, вообще говоря, не является единственным при гео-

метрически нелинейном анализе. При достижении нагрузкой критического значения происходит потеря устойчивости. Получение решения после достижения нагрузкой критического значения представляет собой достаточно сложную задачу. Проблема может быть пояснена на задаче прощелкивания пологой панели, показанной на рис. 7.4.

Типичная зависимость максимального прогиба от силы показана на рис. 7.4. При достижении силой F значения, соответствующего точке A , происходит прощелкивание панели. Сила сначала падает, а затем снова начинает расти. Для некоторого диапазона значений силы существует два значения прогиба.

При применении метода Ньютона решение из точки A может перепрыгнуть в точку A' . Задача же состоит в прослеживании всего пути деформирования $u = u(F)$. Для получения решения в закритическом состоянии разработан метод \square , называемый методом длин дуг (arc-length method). Снова рассматриваем нелинейное уравнение на шаге $m + 1$ по нагрузке

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}^{m+1}) + \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{U}^{m+1}) = 0$$

Предполагаем, что нагрузка изменяется пропорционально одному параметру $\mathbf{F}(t) = \lambda(t)\mathbf{F}_0$. Это серьезное ограничение, но все же оно оставляет широкое применение для рассматриваемого метода. Таким образом, $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{N}(\mathbf{U}) + \lambda\mathbf{F}_0$. Рассматриваем приращение

$$\delta\lambda^{m+1} = \lambda^{m+1} - \lambda^m, \quad \delta\mathbf{F}^{m+1} = \delta\lambda^{m+1}\mathbf{F}_0$$

Для сокращения записи будем также писать $\lambda = \lambda^{m+1}$, $\delta\lambda = \delta\lambda^{m+1}$, $\delta\mathbf{F} = \delta\mathbf{F}^{m+1}$. Аналогично, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{m+1}$, $\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{U}^{m+1} - \mathbf{U}^m$.

Идея метода состоит в том, что решение уравнения $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$ заменяется решением уравнения $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0$ в более широком пространстве \mathbf{U} и λ или уравнения

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^m + \delta\mathbf{U}, \lambda^m + \delta\lambda) = 0$$

где неизвестными являются приращения $\delta\mathbf{U}$ и $\delta\lambda$. Здесь $\delta\mathbf{U}$ — многомерный вектор, $\delta\lambda$ — скаляр, т.е. размерность пространства увеличивается на единицу.

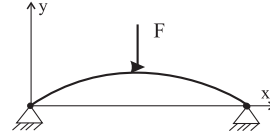


Рис. 7.3 Задача прощелкивания пологой панели.

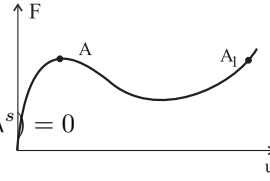
Ясно, что нужно добавить некоторую связь между δU и $\delta \lambda$. В излагаемом методе эта связь выбирается в виде

$$\|\delta \mathbf{U}\|^2 + \varkappa^2 (\delta \lambda)^2 \|\mathbf{F}_0\|^2 = l^2$$

где \varkappa^2 – параметр метода, l – радиус сферы, а $\|\mathbf{f}\|^2 = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}$. В качестве нулевого приближения в методе Ньютона на шаге $m+1$ выбирается решение с предыдущего шага m по параметру нагружения $\mathbf{U}^{m+1,0} = \mathbf{U}^m$. Снова для упрощения записи s -ю итерацию метода Ньютона $\mathbf{U}^{m+1,s}$ будем записывать как \mathbf{U}^s .

Тогда метод Ньютона, применяемый для решения уравнения $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0$, имеет вид

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^s)(\mathbf{U}^{s+1} - \mathbf{U}^s) + \mathbf{F}_0(\lambda^{s+1} - \lambda^s) + \mathbf{R}(\mathbf{U}^s, \lambda^s) = 0$$



Удобно ввести приращения стандартным образом

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^s &= \mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^s, & \lambda^s &= \lambda^m + \delta \lambda^s, \\ \mathbf{U}^{s+1} &= \mathbf{U}^m + \delta \mathbf{U}^{s+1}, & \lambda^{s+1} &= \lambda^m + \delta \lambda^{s+1} \end{aligned}$$

Рис. 7.4 Типичная зависимость силы от времени в задаче прощелкивания полой панели.

При этом верны соотношения

$$\mathbf{U}^{s+1} - \mathbf{U}^s = \delta \mathbf{U}^{s+1} - \delta \mathbf{U}^s = \Delta \mathbf{U}, \quad \lambda^{s+1} - \lambda^s = \delta \lambda^{s+1} - \delta \lambda^s = \Delta \lambda$$

Поэтому метод Ньютона приобретает вид

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^s) \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}_0 \Delta \lambda + \mathbf{R}(\mathbf{U}^s, \lambda^s) = 0$$

Следовательно $\Delta \mathbf{U} = -(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_0) \Delta \lambda - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^s$ или

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta \lambda \mathbf{U}_\lambda + \mathbf{U}_R, \quad -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_0 = \mathbf{U}_\lambda, \quad -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^s = \mathbf{U}_R$$

Последнее соотношение подставляем в уравнение связи

$$\|\delta \mathbf{U}^{s+1}\|^2 + \varkappa^2 (\delta \lambda^{s+1})^2 \|\mathbf{F}_0\|^2 = l^2$$

которое при учете следующих равенств

$$\delta \mathbf{U}^{s+1} = \delta \mathbf{U}^s + \Delta \mathbf{U}, \quad \delta \lambda^{s+1} = \delta \lambda^s + \Delta \lambda$$

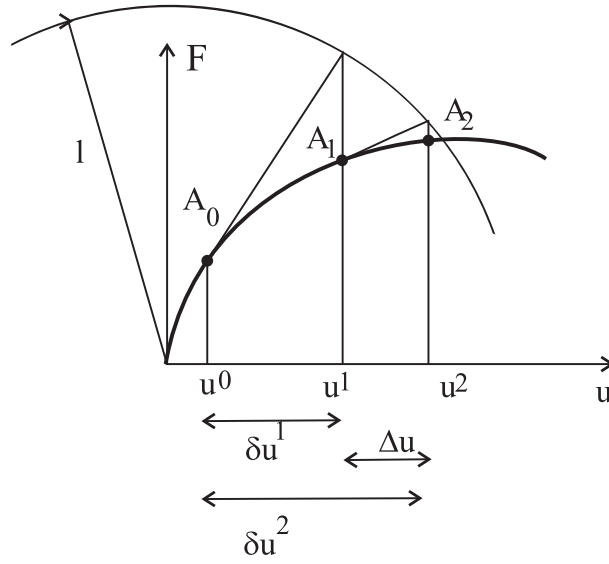


Рис. 7.5 Пояснение сходимости метода.

приобретает вид

$$\|\delta \mathbf{U}^s + \Delta \mathbf{U}\|^2 + \kappa^2 \|\mathbf{F}_0\|^2 (\delta \lambda^s + \Delta \lambda)^2 = l^2$$

Поскольку $\Delta \mathbf{U} = \Delta \lambda \mathbf{U}_\lambda + \mathbf{U}_R$, получаем

$$\|\delta \mathbf{U}^s + \mathbf{U}_R + \Delta \lambda \mathbf{U}_\lambda\|^2 + k^2 (\delta \lambda^s + \Delta \lambda)^2 = l^2, \quad k = \kappa \|\mathbf{F}_0\|$$

Последнее есть квадратное уравнение относительно $\Delta \lambda$. Его преобразование дает

$$\begin{aligned} & \|\delta \mathbf{U}^s \\ & + \mathbf{U}_R\|^2 + (\Delta \lambda)^2 \|\mathbf{U}_\lambda\|^2 + 2\mathbf{U}_\lambda^T \Delta \lambda \cdot (\delta \mathbf{U}^s + \mathbf{U}_R) + k^2 [(\delta \lambda^s)^2 + (2\delta \lambda^s) \Delta \lambda + \Delta \lambda^2] = l^2 \end{aligned}$$

или

$$a \Delta \lambda^2 + b \Delta \lambda + c = 0$$

где

$$\begin{aligned} a &= \|\mathbf{U}_\lambda\|^2 + k^2, \quad b = 2\mathbf{U}_\lambda^T \cdot (\delta \mathbf{U}^s + \mathbf{U}_R) + 2\delta \lambda^s \cdot k^2 \\ c &= \|\delta \mathbf{U}^s + \mathbf{U}_R\|^2 + k^2 (\delta \lambda^s)^2 - l^2 \end{aligned}$$

Поскольку $||\delta \mathbf{U}^s + \mathbf{U}_R||^2 = ||\delta \mathbf{U}^s||^2 + ||\mathbf{U}_R||^2 + 2\mathbf{U}_R^T \cdot \delta \mathbf{U}^s$, то $||\delta \mathbf{U}^s||^2 + k^2(\delta \lambda^s)^2 - l^2 = 0$. Следовательно, $c = ||\mathbf{U}_R||^2 + 2\mathbf{U}_R^T \cdot \delta \mathbf{U}^s$.

Квадратное уравнение имеет, вообще говоря, два корня $\Delta \lambda_1$ и $\Delta \lambda_2$, при этом выбирается корень, который минимизирует угол между векторами \mathbf{Y}^s и \mathbf{Y}^{s+1} , где

$$\mathbf{Y}^s = \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{U}^s \\ \varkappa \delta \lambda^s \mathbf{F}_0 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{Y}^{s+1} = \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{U}^{s+1} \\ \varkappa \delta \lambda^{s+1} \mathbf{F}_0 \end{array} \right\}$$

Глава 8.

Моделирование пневматических шин.

Глава 9.

Осреднение периодических в плане пластин

Глава 10.

Динамическое нагружение железобетонных конструкций

Глава 11.

Моделирование фильтрации в деформируемой среде

11.1. Геометрически и физически нелинейная модель фильтрации

Среднее напряжение в пористой среде. Пористая среда имеет, по крайней мере, два геометрических масштаба. Один масштаб (условно называемый микроскопическим) определяется размерами трещин или пор, второй (макроскопический) связан с размерами области, в которой происходит фильтрация. Если характерные размеры трещин и пор существенно различаются, то следует рассматривать три характерных геометрических размера (три масштаба).

В ближайших параграфах ограничимся двумя масштабами.

В данном параграфе для вывода уравнений модели Био используем феноменологический подход на макроскопическом уровне. В текущей конфигурации среднее напряжение в представительном объеме (RVE) определяется как

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \int_{V_s} \sigma dV + \frac{1}{V} \int_{V_f} \sigma dV.$$

где $V = V_s + V_f$ суть представительный элемент ($V = V_{RVE}$), V_s - объем деформируемого каркаса, V_f - объем жидкости. Пусть также $V_f = nV$, $V_s = (1-n)V$, где $n = n(x, t)$ есть пористость среды в данной точке пространства x в момент t . Можно осуществить следующее преобразование предыдущей формулы

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1-n}{V_s} \int_{V_s} \sigma dV + \frac{n}{V_f} \int_{V_f} \sigma dV = (1-n) \langle \sigma \rangle^s + n \langle \sigma \rangle^f - (1-n) \langle \sigma \rangle^f + (1-n) \langle \sigma \rangle^f = \\ &= (1-n) \left[\langle \sigma \rangle^s - \langle \sigma \rangle^f \right] + \langle \sigma \rangle^f = \sigma_{eff} - pI \end{aligned}$$

учитывая, что $\langle \sigma \rangle^s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \sigma dV$, $\langle \sigma \rangle^f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \sigma dV$.

При этом предполагается, что среднее напряжение в жидкости представляется шаровым тензором $\langle \sigma \rangle^f := -pI$, где $p(x, t)$ - среднее давление. Насколько это верно будет выяснено позже, исходя из асимптотического анализа пористой среды.

Если давление p отсутствует, то $\sigma_{eff} = (1-n) \langle \sigma \rangle^s = \frac{1-n}{V_s} \int_{V_s} \sigma dV = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \langle \sigma \rangle$. Таким образом, эффективное напряжение есть среднее напряжение в RVE при нулевом давлении в жидкости. Этим определяется физический смысл эффективного напряжения σ_{eff} .

Средний тензор напряжений Кирхгофа в пористой среде в начальной конфигурации определяется формулой

$$\langle S \rangle = F^{-1} \cdot \left(J \langle \sigma \rangle \right) \cdot F^{-T} - p C^{-1} = S_{eff} - p C^{-1}, \quad \left(S_{eff} = F^{-1} \cdot \left(J \langle \sigma \rangle \right) \cdot F^{-T} \right)$$

Если предположить, что каркас является гиперупругим, то

$$\underset{\sim}{S}^{eff} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{E}}$$

причем тензор деформаций $\underset{\sim}{E}$ выражается через осредненный вектор перемещения каркаса \vec{u} стандартным образом $\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I})$, $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}$, $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I} + \overset{0}{\nabla} \vec{u}$.

В случае геометрически линейной теории деформирования каркаса, разница между тензорами напряжений Коши и Кирхгофа пропадает и имеет место определяющее соотношение

$$\underset{\sim}{\sigma}^{eff} = \underset{\sim}{\bar{\sigma}}^{eff}(\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$$

Если каркас подчиняется физически линейному определяющему соотношению, то имеет место закон Гука

$$\underset{\sim}{\sigma}^{eff} = \underset{\sim}{C}^{eff} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

а $\underset{\sim}{C}^{eff}$ – эффективный тензор модулей упругости пористой среды. Тогда в декартовых координатах $\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} u_{k,l} - p \delta_{ij}$ (Здесь и далее индекс *eff* опущен для упрощения записи).

Средний тензор напряжений Пиолы в начальной конфигурации определяется формулой

$$\langle \underset{\sim}{P} \rangle = \left(J \langle \underset{\sim}{\sigma} \rangle \right) \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} - p \underset{\sim}{F}^{-T} = \underset{\sim}{P}^{eff} - p \underset{\sim}{F}^{-1}, \quad \left(\underset{\sim}{F}^{eff} = \left(J \langle \underset{\sim}{\sigma} \rangle \right) \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \right)$$

В следующем параграфе уравнения равновесия будут сформулированы в текущей и начальной конфигурациях с использованием рассмотренных эффективных тензоров напряжений.

Уравнения равновесия пористой среды текущей конфигурации и начальной конфигурациях. Уравнения равновесия для среднего напряжения выглядят следующим образом

$$\nabla \cdot \langle \underset{\sim}{\sigma} \rangle + \langle \rho \rangle \vec{f} = 0$$

или

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\sigma}^{eff} + \langle \rho \rangle \vec{f} = \nabla p, \quad \vec{x} \in V \quad (11.1)$$

где $\langle \rho \rangle = (1 - n) \rho^s + n \rho^f$ - средняя плотность. Предполагается, что внешняя массовая сила f одинакова для каркаса и жидкости. В случае линейной теории упругости последнее уравнение в декартовых координатах записывается так

$$(C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \langle \rho \rangle f_i = p_{,i}$$

Перейдем к формулировке уравнений равновесия в начальной конфигурации, используя преобразование Пиолы также как в разделе (1.3). Относительно тензора Пиолы уравнение выглядит следующим образом

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \overset{0}{P} + \overset{0}{\rho} \vec{f} = \overset{0}{\nabla} \cdot (p J \underset{\sim}{F}^{-T}), \quad \vec{X} \in \overset{0}{V} \quad (11.2)$$

Граничные условия относительно вектора перемещения обычно бывают следующих типов.

Части границы Σ области V , на которых будем задавать краевые условия в перемещениях и напряжениях для каркаса, обозначим как и раньше Σ_1 и Σ_2 соответственно. Пусть \vec{n} - вектор единичной нормали к Σ . На элементе Σ_1 зададим поверхностную нагрузку \vec{S}_0 :

$$\underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{n} = (\underset{\sim}{\sigma}^{eff} - p I) \cdot \vec{n} = \vec{S}^0(\vec{u}),$$

воспринимаемую как скелетом, так и жидкостью. В правой части уравнения подчеркнуто, что поверхностная сила в нелинейной теории, вообще говоря, зависит от перемещения (не "мертвая" нагрузка). Наиболее простой вид правая часть принимает в случае свободной границы $\vec{S}^0 = 0$.

В линейной теории предыдущее граничное условие в декартовых координатах выглядит следующим образом

$$(C_{ijkl}^{eff} u_{k,l} - p \delta_{ij}) n_j = S_i^0$$

На элементе Σ_1 зададим перемещение каркаса \vec{U}^0 :

$$\vec{u} = \vec{U}^0$$

Снова последнее условие упрощается, если граница фиксирована $\vec{U}^0 = 0$.

Первое вариационное уравнения модели Био. В этом параграфе запишем сначала вариационное уравнения равновесия в актуальной конфигурации

$$\int_V \left(\tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \nabla \vec{w} - p \operatorname{div} \vec{w} \right) dV = A^e(\vec{u})[\vec{w}] \quad (11.3)$$

где работа внешних сил равна

$$A^e(\vec{u})[\vec{w}] = \int_V \langle \rho \rangle \vec{f} \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} \vec{S}^0(\vec{u}) \vec{w} d\Sigma$$

Пара функций $\vec{u} \in G_u$, $p \in G_p$ есть решение, а $\vec{w} \in G_u$ – пробная функция. Для задачи фильтрации оба пространства G_u и G_p являются подпространствами пространства Соболева W_2^1 [13, 16].

Как уже отмечалось в () задание поверхностной силы в зависимости от перемещения в случае не "мертвой" нагрузки зависит от способа приложения силы и, конечно, требует в каждом конкретном случае отдельного исследования. В общем случае эту зависимость описать более подробно невозможно. Для нагрузки в виде давления эта зависимость конкретизирована в (). Кроме "мертвой" нагрузки и давления распространенным случаем является поверхностная сила просто равная нулю. Чтобы упростить изложение и не отступить от главной темы данной секции, будем считать, что $\vec{S}^0 = 0$. Тогда

$$A^e[\vec{w}] = \int_V \langle \rho \rangle \vec{f} \cdot \vec{w} dV$$

В начальной конфигурации вариационное уравнение (11.3) выглядит немного более громоздко

$$\int_V \left(\tilde{S}(\vec{u}) - p J C^{-1} \right) : D \tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] dV = A^e(\vec{w}) \quad (11.4)$$

Поскольку вариационное уравнение равновесия содержит две неизвестные функции, то дальнейшей целью является задача получить второе уравнение, относительно этих функций. Этом можно сделать, используя уравнение неразрывности и закон фильтрации Дарси.

Закон Дарси. Линейный закон фильтрации был экспериментально обнаружен французским инженером А. Дарси в 1856 году. Опишем схему опыта (см. рис. 11.1), позволяющий экспериментально установить этот закон.

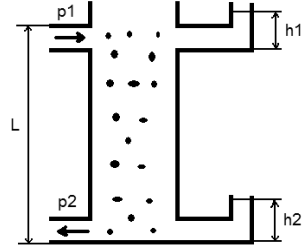


Рис. 11.1 Схема опыта Дарси.

Если пропускать воду через трубу с пористым материалом под действием разности давлений $p_1 - p_2$ и измерить расход жидкости Q , то есть ее количество, протекающее через единицу времени, то оказывается, что расход пропорционален приведенной разности давлений и площади сечения трубки и обратно пропорционален ее длине L .

Опишем это подробнее. Пусть h_1, h_2 равны уровням жидкости (см. рис. 11.1). Если жидкость в испытательной колонне покоится, то давление $p(z)$ распределено линейно по z так, что $p_1 = \rho g h_1 = 0$, $p_2 = \rho g h_2 = \rho g L$. Если жидкость движется, то возникает отклонение от статического давления $p^*(z)$, такое, что $p_1 = \rho g h_1 = p_1^*$, $p_2 = \rho g h_2 = p_2^* + \rho g L$. При макроскопическом подходе действие пористой среды на движение жидкости можно трактовать в виде трения. Поэтому происходит понижение давления в сторону движения жидкости, т.е. обязательно $p_1^* > p_2^*$. Для любой точки в колонне имеет место соотношение $p(z) = \rho g h(z) = p^*(z) + \rho g (L - z)$. Второе слагаемое представляет собой гидростатическое давление.

Пусть A - площадь сечения колонны, L ее длина, $\Delta p^* = p_1^* - p_2^*$, $\Delta p = p_1 - p_2$, $\Delta h = h_1 - h_2$. Закон Дарси формулируется следующим соотношением

$$Q = -k_{filt} \frac{A \Delta p^*}{L \rho g}$$

где k_{filt} – коэффициент фильтрации. Последний зависит как от свойств жидкости (вязкости и плотности), так и свойств пористой среды. Поэтому его можно представить в виде $k_{filt} = \frac{k}{\eta} \rho g$. Теперь k коэффициент проницаемости, зависящий только от пористой среды, η – вязкость жидкости. Поэтому закон фильтрации можно записать еще так

$$Q = \frac{k}{\eta} \frac{A}{L} \Delta p^*$$

Конечно, при всем этом предполагается, что поры связаны между собой и давление в жидкости передается на всю длину колонны. Используя соотношение $\Delta p^* = \Delta p + \rho g L$, закон фильтрации можно переписать в виде

$$Q = \frac{k}{\eta} \frac{A}{L} (\Delta p + \rho g L)$$

Заменяя длину L на Δz и учитывая, что величина скорости жидкости равна $v_z = -\frac{Q}{nA}$, получим

$$nv_z = -\frac{k}{\eta} \left[\frac{\Delta p}{\Delta z} + \rho g \right] =$$

Или в пределе при $z \rightarrow 0$

$$nv_z = -\frac{k}{\eta} \left[\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right]$$

В трехмерном окончательном варианте закон фильтрации выглядит следующим образом

$$n\vec{v}_f = -\frac{k}{\eta} \left[\text{grad } p + \rho g \vec{k}_3 \right]$$

Величина $n\vec{v}_f$ называется часто фильтрационной скоростью Дарси. Если же каркас пористой среды движется, то скорость жидкости в предыдущем соотношении должна быть заменена скоростью движения жидкости относительно скорости каркаса \vec{v}_s и закон фильтрации приобретает вид

$$n(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k}{\eta} \left[\text{grad } p + \rho g \vec{k}_3 \right] \quad (11.5)$$

Закон фильтрации был описан для случая изотропной сред. Не сложно видеть, что в случае анизотропии закон Дарси приобретает следующий вид

$$n(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k}{\eta} [\text{grad } p + \rho g \vec{k}_3] \quad (11.6)$$

Уравнения сохранения массы. Уравнения баланса массы для жидкости и твердой фазы (каркаса) записываются соотношениями

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho_f dV_f = \int_{V_f} (\rho_f \gamma_f) dV_f, \quad \frac{d}{dt} \int_{V_s} \rho_s dV_s = 0$$

причем интегралы взяты по любой области, состоящей из одних и тех же материальных точек в процессе деформирования. Величина γ_f представляет скорость распределенных массовых источников/стоков массы жидкости. При макроскопическом подходе жидкость и твердое тело “размазываются” по всему объему так, что в каждой точке сосуществуют одновременно обе фазы (два континуума), движущиеся со скоростями v_f и v_s соответственно. Следовательно, $\int_{V_f} \rho_f dV_f = \int_V n \rho_f dV$, $\int_{V_s} \rho_s dV_s = \int_V n \rho_s dV$. Для дифференцирования, например, первого интеграла удобно применить преобразование Пиолы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V n \rho_f dV &= \frac{d}{dt} \int_V J n \rho_f d\overset{0}{V} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (J n \rho_f) d\overset{0}{V} = \\ &= \int_V J^{-1} \left[(n \rho_f) \frac{dJ}{dt} + J \frac{d(n \rho_f)}{dt} \right] dV = \int_V \left[(n \rho_f) \text{div } \vec{v}_f + \frac{d(n \rho_f)}{dt} \right] dV \end{aligned}$$

где J – якобиан отображения Пиолы текущей области в начальную, причем $\frac{\partial J}{\partial t} = J \text{div } v^f$ для жидкой фазы ($\frac{\partial J}{\partial t} = J \text{div } v^s$ для твердой). Для твердой фазы уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V (1-n) \rho_s dV = \int_V \left[((1-n) \rho_s) \text{div } \vec{v}_s + \frac{d((1-n) \rho_s)}{dt} \right] dV$$

Таким образом, приходим к уравнениям неразрывности (непрерывности) обоих континуумов, записанных в актуальной конфигурации с точки зрения пространственного описания

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(n\rho_f) + n\rho_f \operatorname{div} \vec{v}_f = n\rho_f\gamma \\ \frac{d}{dt}((1-n)\rho_s) + (1-n)\rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения следует

$$-\frac{dn}{dt}\rho_s + (1-n)\frac{d\rho_s}{dt} + (1-n)\rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s = 0$$

Если сжимаемость твердой породы мала, тогда можно в последнем уравнении пренебречь величиной $\frac{d\rho_s}{dt}$ и, следовательно, получается уравнение, определяющее изменение пористости

$$\frac{dn}{dt} = (1-n) \operatorname{div} \vec{v}_s$$

С его помощью уравнение баланса массы жидкости переписывается следующим образом

$$(1-n)\rho_f \operatorname{div} \vec{v}_s + n\frac{d\rho_f}{dt} + n\rho_f \operatorname{div} \vec{v}_f = n\rho_f\gamma$$

Дальнейшее сокращение неизвестных функций возможно, если принять во внимание уравнение состояния жидкости. Например, если принять ее баротропной

$$\frac{\rho_f}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^\beta \quad (11.7)$$

В уравнении (11.7) β есть сжимаемость жидкости. Из (11.7) следует, что $d\rho_f = \beta\rho_f \frac{dp}{p}$ и уравнение неразрывности жидкости приобретает вид

$$n\rho_f \operatorname{div} (\vec{v}_f - \vec{v}_s) + \rho_f \operatorname{div} \vec{v}_s + n\beta\rho_f \frac{dp}{dt} \frac{1}{p} = n\rho_f\gamma$$

Теперь остается использовать закон Дарси (11.5), что дает второе уравнение модели Био в окончательном виде

$$-n \operatorname{div} \left(\frac{k}{n\eta} \operatorname{grad} p \right) + \operatorname{div} \vec{v}_s + \frac{n\beta}{p} \frac{dp}{dt} = n\gamma \quad (11.8)$$

Если считать, что жидкость несжимаемая $\beta = 0$, тогда

$$n \operatorname{div} \left(\frac{k}{n\eta} \operatorname{grad} p \right) + n\gamma = \operatorname{div} v_s.$$

Следует отметить, что уравнения (11.1), (11.2) получены с использованием лагранжевого подхода, а уравнение (11.8) в рамках эйлерова.

11.2. Линейная модель нестационарной фильтрации.

Дифференциальная постановка нестационарной однофазной фильтрации в деформируемом каркасе. В случае возможности применения линеаризации относительно статического состояния каркаса и жидкости в порах разница между подходами пропадает. Такая линеаризация возможна, если при фильтрации возникают незначительные отклонения всех механических величин по сравнению с их значениями в статическом состоянии до начала фильтрационного процесса.

При этом пористость в уравнении равна начальной пористости $n \rightarrow \overset{0}{n}$. При малом изменении p , если также можно пренебречь конвективным членом и заменить $\frac{dp}{dt} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t}$, то получается система уравнений Био в геометрически и физически линейной постановке

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left(\overset{0}{C} : \overset{0}{\nabla} u \right) + \langle \rho \rangle f = \overset{0}{\operatorname{grad}} p \quad (11.9)$$

$$- \overset{0}{\operatorname{div}} \left(\frac{k}{\eta} \overset{0}{\operatorname{grad}} p \right) + \overset{0}{\operatorname{div}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\overset{0}{n} \overset{0}{\beta}) \frac{\partial p}{\partial t} = \overset{0}{n} \gamma \quad (11.10)$$

где заменено $\overset{0}{\beta} \rightarrow \frac{n\beta}{p}$. Последнее эквивалентно принятию уравнения

состояния жидкости в виде дифференциальной зависимости $d\rho/\rho = \overset{0}{\beta} dp$.

Граничными условиями для системы (11.9), (11.10) могут являться следующие условия

$$\vec{u} = \vec{u}^0, \quad \vec{X} \in \Sigma_1^u \quad (11.11)$$

$$\overset{0}{n} \cdot \left(\overset{0}{C} : grad \vec{u} - p \overset{0}{I} \right) = \vec{S}^0, \quad \vec{X} \in \Sigma_2^u \quad (11.12)$$

$$p = p^0, \quad \vec{X} \in \Sigma_1^p \quad (11.13)$$

$$- \left(\overset{0}{k} : grad p \right) \cdot \overset{0}{n} = q^0, \quad \vec{X} \in \Sigma_2^p \quad (11.14)$$

Вариационные уравнения модели Био в линейной постановке. Мы получили дифференциальные уравнения, теперь получим вариационные. Интегрировать по частям первое уравнение, предварительно умножив на пробную функцию w

$$\int_V (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} w_i dV = \int_V p_{,i} w_i dV$$

или

$$\int_{\Sigma} C_{ijkl} u_{k,l} n_j w_i d\Sigma - \underbrace{\int_V C_{ijkl} u_{k,l} w_{i,j} dV}_{\phi_u(u,w)} = \int_V p_{,i} w_i dV$$

Учитывая граничное условие $C_{ijkl} u_{k,l} n_j = S_i$ на Σ_2^u , получим первое вариационное уравнение модели Био в линеаризованной постановке

$$\phi_u(\vec{u}, \vec{w}) + \int_V grad p \cdot \vec{w} dV = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma$$

Аналогичные преобразования со вторым уравнением выглядят следующим образом

$$\int_V (k_{ij} p_{,j})_{,i} q dV + \int_V \gamma q dV = \int_V \dot{u}_{i,i} q dV$$

$$\underbrace{\int_{\Sigma} k_{ij} p_{,j} n_i q d\Sigma}_0 + \underbrace{\int_{\Sigma} k_{ij} p_{,j} q_{,i} d\Sigma}_{\varphi_p(p,q)} + \int_V \gamma q dV = \int_V \dot{u}_{i,i} q dV$$

Примем, что на Σ_1^p давление также не меняется, т.е. $p = q = 0$ (функция p представляет собой отклонение давления от статического значения до начала процесса фильтрации). Также считаем, что на Σ_2^p скорость фильтрации равна нулю, т.е. $k_{ij}p_{,j}n_i = 0$.

В итоге второе вариационное уравнение выглядит так

$$\varphi_p(p, q) + \int_V \operatorname{div} \dot{u} q \, dV = \int_V n\gamma q \, dV$$

Таким образом, мы пришли к системе двух вариационных уравнений линеаризованной модели Био нестационарной фильтрации

$$\begin{cases} \varphi_u(\vec{u}, w) + \int_V \operatorname{grad} p \cdot \vec{w} \, dV = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{w} \, d\Sigma \\ \varphi_p(p, q) + \int_V \operatorname{div} \dot{u} q \, dV = \int_V n\gamma q \, dV. \end{cases}$$

11.3. Применение метода осреднения к пористой среде.

Безразмерные уравнения движения жидкости. Закон Дарси был обнаружен экспериментально. Но можно вывести этот закон методом осреднения, используя идею двух масштабов, присущих пористой среде. При выводе будем считать, что каркас неподвижен.

Допустим, что жидкость, заполняющая пористую среду, несжимаемая, ньютонова (линейно-вязкая), с постоянным коэффициентом вязкости. Под действием градиента окружающего давления скорость установившегося течения жидкости \vec{v} и давление p в пористой среде описываются уравнением несжимаемости и стационарными уравнениями Навье-Стокса, записанными, например, в декартовой системе координат

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (11.15)$$

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i \quad (11.16)$$

На смоченной границе Σ (см. рис. 11.3) твердого каркаса скорость жидкости нулевая (условие прилипания):

$$\vec{v} = 0, \quad \vec{x} \in \Sigma$$

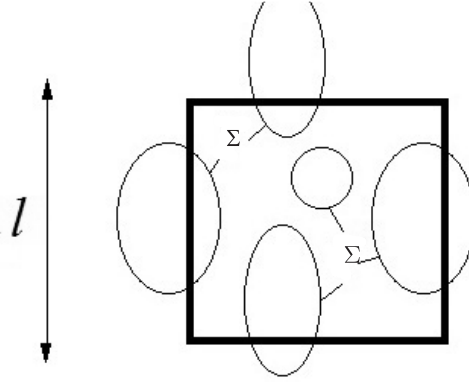


Рис. 11.2 Схематичное изображение представительной области в пористой среде.

Пусть l характерный размер представительной области пористой среды (порядка нескольких размеров зерен), а L , характерный глобальный размер всей пористой среды. Предполагается, что $\frac{l}{L} \ll 1$. Введем безразмерные переменные, которые отметим штрихом:

$$x_i = l\tilde{\xi}_i, \quad p = P\tilde{p}, \quad v_i = V\tilde{v}_i \quad (11.17)$$

где $\varepsilon = \frac{l}{L}$.

В безразмерных переменных уравнение (11.16) можно записать в виде:

$$Re \varepsilon \tilde{v}_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{\xi}_i} = - \left(\frac{l^2 P}{\mu V L} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\xi}_i} + \varepsilon \tilde{\Delta} \tilde{v}_i \quad (11.18)$$

где геометрический малый параметр ε введен естественным образом $\varepsilon = \frac{l}{L}$, а число Рейнольдса Re определяется микромасштабом l : $Re = \frac{l\rho V}{\mu}$. Выберем теперь характерную скорость движения жидкости V так, чтобы коэффициент при безразмерном градиенте давления равнялся бы единице

$$V = \frac{l^2 P}{\mu L} = \frac{l P}{\mu} \varepsilon$$

Последнее равенство означает, что макроскопический градиент давления и сила вязкого трения имеют один и тот же порядок

$$\left(\frac{P}{L}\right) = \left(\frac{\mu V}{l^2}\right)$$

Рассматриваем фильтрационные течения, для которых число Рейнольдса имеет порядок $O(\varepsilon)$

$$Re = \frac{\rho l^2 P}{\mu^2} \varepsilon = Re' \varepsilon = O(\varepsilon)$$

, т.е. полагаем, что Re' не зависит от ε .

Как обычно, введем быстрые координаты $\xi_i = x_i/\varepsilon$ и безразмерные быстрые координаты ξ_i/L . Сравнивая последние с координатами $\tilde{\xi}$ обнаруживаем их идентичность. Следовательно, $\tilde{\xi}$ суть быстрые безразмерные координаты. Медленные безразмерные координаты \tilde{x}_i естественно ввести равенством $x_i = L\tilde{x}_i$. При этом между безразмерными быстрыми и медленными координатами сохраняется равенство $\tilde{\xi}_i = \tilde{x}_i/\varepsilon$ такое же, что и для соответствующих медленных координат.

Уравнение (11.18) в быстрых безразмерных координатах записывается следующим образом

$$\varepsilon^2 Re' \tilde{v}_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{\xi}_i} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\xi}_i} + \varepsilon \tilde{\Delta}^2 \tilde{v}_i \quad (11.19)$$

В дальнейшем для упрощения записи знак тильды будем опускать, имея ввиду, что ξ_i , x_i и остальные переменные являются безразмерными.

Итак, для реализации методики осреднения мы предположили следующие условия:

- жидкость несжимаемая, линейно-вязкая с постоянным коэффициентом вязкости,
- течение стационарное,
- отношение размера представительной ячейки RVE l к размеру области, в которой рассматривается фильтрация L мало,
- число Рейнольдса имеет порядок ε ,
- массовые силы отсутствуют.

Асимптотическое разложение. Считая, что v_i и p есть функции ξ_i , x_i , разложим v_i и p в асимптотические ряды

$$v_i = v_i^{(0)} + \varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)} + \dots$$

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots$$

где $p^{(m)}$, $v_i^{(m)}$ суть функции от ξ_i (зависимость внутри представительной области RVE) и x_i (зависимость на макроуровне). Подставим эти ряды в уравнение (11.28), пользуясь формулами

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \varepsilon \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi_j} + \dots$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_j} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_j} + \varepsilon \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi_j} + \dots$$

Подставляя последние формулы в уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} = 0$$

и приравнявая члены при одинаковых степенях ε , получим цепочку уравнений

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (11.20)$$

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad (11.21)$$

$$\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0$$

...

Также из уравнения (11.28) следует

$$0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} \quad (11.22)$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} + \Delta v_i^{(0)} \quad (11.23)$$

$$v_j^{(0)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_j} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi_i} + \Delta v_i^{(1)} \\ \dots$$

На границах твердых включений Σ скорость жидкости нулевая. Это значит, что $v_i^{(0)} = v_i^{(1)} = \dots = 0$, $\xi_i \in \Sigma$. Следовательно, из (11.20) следует, что $v_i^{(0)}$ не зависит от быстрых координат ξ_i . Аналогично, из (11.22) видно, что $p^{(0)} = p^{(0)}(x_i)$ — не зависит от быстрых переменных. Из линейности (11.23) можем искать $v_i^{(0)}$ и $p^{(1)}$ в виде:

$$v_i^{(0)} = -k_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \quad p^{(1)} = -A_j \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + \bar{p}^{(1)} \quad (11.24)$$

где $k_{ij} = k_{ij}(\xi_i)$, $A_j = A_j(\xi_i)$ не зависят от медленных переменных, $\bar{p}^{(1)}(x_i)$, а не зависит от ξ_i . Из уравнений (11.21), (11.23) следует, что

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial \xi_i} = 0 \\ \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i} + \mu \nabla^2 k_{ij} = -\delta_{ij}$$

где $k_{ij} = 0$ на Γ , и k_{ij} и A_j периодичны по быстрым переменным. Таким образом, для k_{ij} и A_j имеем линейные краевые задачи, определенные на представительной области, которые можно решать для любой конкретной микроструктуры.

Вывод осредненного стационарного уравнения фильтрации. Операция осреднения по представительной области, как обычно, определяется в виде

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{V_f^\xi} \int_{V_f^\xi} f(x, \xi) dV^\xi$$

где V_f — объем, занимаемый жидкостью в ячейке. Из (11.24) следуют соотношения

$$\langle v_i^{(0)} \rangle = -\langle k_{ij} \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \quad (11.25)$$

$$\langle p^{(1)} \rangle = -\langle A_j \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} + n\bar{p}^{(1)}$$

Из (11.21) следует равенство

$$\frac{\partial \langle v_i^{(0)} \rangle}{\partial \xi_i} + \frac{1}{V_f^\xi} \int_{V_f^\xi} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_i} dV^\xi = 0$$

Учитывая условие прилипания $v_i^{(1)}|_{\Sigma} = 0$ и то, что на границе RVE $v_i^{(1)} = 0$, получаем соотношение

$$\int_{V_f^\xi} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_i} dV = \int_{\Sigma^\xi} v_i^{(1)} n_i d\Sigma^\xi = 0$$

означающее несжимаемость жидкости в среднем

$$\frac{\partial \langle v_i^{(0)} \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (11.26)$$

Последнее свойство вполне закономерно поскольку жидкость рассматривается несжимаемой, а каркас недеформируемым. Подставляя выражение (11.25) в (11.26), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle k_{ij} \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (11.27)$$

Уравнения (11.25), (11.26) и (11.27) являются осредненными уравнениями для течения жидкостей пористой среде. Уравнение (11.25) есть классический закон Дарси, где $\langle k_{ij} \rangle$ есть тензор коэффициентов фильтрации.

Таким образом, закон Дарси можно получить теоретически, применив метод осреднения при условии. При выводе было важно, что число Рейнольдса предполагалось порядка ε . Если бы число Рейнольдса имело порядок единицы, в соотношениях (11.23) остались бы конвективные члены и линейный закон Дарси был бы неверен.

Вывод осредненного уравнения равновесия. В данном параграфе методом осреднения будет произведен вывод уравнения равновесия каркаса, входящего в линейную модель Био. Сначала предположим, что давление жидкости равно нулю. Для пористой

упругой среды линеаризованное относительно недеформированного состояния уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(\vec{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \overset{0}{\rho} f(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in V_s \quad (11.28)$$

Здесь уместно заметить, что вследствие линейности обезразмеривание уравнения (11.28) не приносит каких-либо существенных упрощений и сокращения числа материальных коэффициентов. Поэтому будем дальше использовать исходное уравнение (11.28), записанное в размерных переменных. Его решение ищем в виде

$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + \varepsilon^2 u_i^{(2)} + \dots$$

где $u_i^{(m)} = u_i^{(m)}(\vec{x}, \vec{\xi})$. Дифференцирование осуществляется по правилу

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \xi_j} + \dots$$

Однако в силу линейности асимптотическое разложение по ε решения уравнения (11.28) можно записать сразу в виде, в котором каждый член ряда представлен произведением функции от \vec{x} на локальную функцию от $\vec{\xi}$.

$$u_i(\vec{x}, \vec{\xi}) = w_i(\vec{x}) + \varepsilon N_{ijq_1}^{(1)}(\vec{\xi}) w_{j,q_1}(\vec{x}) + \varepsilon^2 N_{ijq_1k_2}^{(2)}(\vec{\xi}) w_{j,q_1q_2}(\vec{x}) + \dots$$

т.е. $u_i^{(m)} = N_{ijq_1 \dots q_m}^{(m)}(\vec{\xi}) w_{j,q_1 \dots q_m}(\vec{x})$.

Продифференцировав предыдущее соотношение по x , получим выражение градиента вектора перемещений

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \sum_{m=0} \varepsilon^m \left[N_{kjq_1 \dots q_{m+1},l}^{(m+1)}(\vec{\xi}) w_{j,q_1 \dots q_{m+1}}(\vec{x}) + N_{kjq_1 \dots q_m}^{(m)}(\vec{\xi}) w_{j,q_1 \dots q_m,l}(\vec{x}) \right]$$

Здесь в правой части равенства запятой обозначена производная как по x , так и по ξ в зависимости от того, функция какого аргумента дифференцируется.

Теперь, вычислив напряжения, получим

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=0} \varepsilon^m P_{ijpq_1 \dots q_{m+1}} w_{p,q_1 \dots q_{m+1}} + \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} C_{ijkl} N_{kq_1 \dots q_{m+1},l} w_{p,q_1 \dots q_{m+1}}$$

где $P_{ijpq_1 \dots q_{m+1}} = C_{ijkl} N_{kq_1 \dots q_{m+1},l} + C_{ijkq_{m+1}} N_{kq_1 \dots q_m}$.

После

Поскольку после осреднения уравнения (3.8) имеем:

$$\langle \vec{u} \rangle = \vec{w}(\vec{x}) .$$

Теперь подставим уравнения (3.8) , (3.9) , (3.10) в уравнение равновесия. В первом приближении имеем:

$$u_i = w_i + N_{ipq} w_{p,q} + O(\varepsilon) ,$$

$$\sigma_{ij} = P_{ijpq} w_{p,q} + O(\varepsilon) , \quad (3.11')$$

где $P_{ijpq} = C_{ijpq} + C_{ijkl} N_{kpq,l}$.

Теперь подставим уравнения (3.11') в уравнения равновесия. Тогда

$$\frac{1}{\varepsilon} P_{ijpq,j} w_{p,q} + P_{ijpq} w_{p,qj} + O(\varepsilon) = 0 . \quad (3.12)$$

3.4. Введение эффективных тензоров модулей упругости.

Чтобы свести задачу (3.7) к задаче однородной теории упругости, потребуем, чтобы член при $\frac{1}{\varepsilon}$ равнялся нулю:

$$P_{ijpq,j} = 0 , \quad (3.13)$$

и осредним уравнения (3.12):

$$\langle P_{ijpq} \rangle w_{p,qj} + f_i = 0 .$$

Эффективным тензором модулей упругости "сухого" каркаса является тензор

$$\underline{C}^{eff} = \langle \underline{P} \rangle .$$

Осредненное уравнение равновесия "сухого" грунта записывается в виде:

$$C_{ijkl}^{eff} w_{k,lj} + \langle \rho \rangle f_i = 0 . \quad (3.14)$$

Осредненные напряжения выражаются в виде:

$$\langle \sigma_{ij}^{eff} \rangle = C_{ijkl}^{eff} w_{k,l} . \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \left[C_{ijml} N_{mnk,l}^{(1)} + C_{ijnk} \right]_{,j} &= 0 , \\ \langle C_{ijml} N_{mnk,l}^{(1)} + C_{ijnk} \rangle &= \underline{\underline{C}}^{eff} . \end{aligned} \quad (3.15')$$

Таким образом, эффективные модули "сухого" грунта можно найти из решения локальных задач (3.15'). Однако практически в этом нет большого интереса, поскольку структура грунта не является периодической и неизвестна.

Однако рассмотренная методика осреднения годится не только для периодической среды, но и для любой среды, имеющей постоянные осредненные модули. Здесь осреднение уже следует понимать как осреднение по представительному объему. Поэтому, если структуру среды моделировать случайным образом, то можно вычислить средние модули не только по координатам, но и по реализациям.

Следующее замечание касается термина "сухой" грунт. Слово "сухой" взято в кавычки, поскольку в данном подходе неважно, сухой грунт или нет. Важно только, что давление жидкости равно нулю.

3.5. Вывод осредненного уравнения для грунта, насыщенного жидкостью.

Таким образом, предполагая, что для скелета выполнены соотношения линейной упругости и давление жидкости равно нулю, получим:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle^{eff} = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{nk} \rangle^{eff} , \quad (3.16)$$

для связи деформаций $\langle \varepsilon_{nk} \rangle^{eff}$ с осредненными перемещениями твердой фазы имеем:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle^{eff} = \frac{1}{2} (\langle w_{i,j} \rangle + \langle w_{j,i} \rangle) . \quad (3.17)$$

Теперь учтем наличие давлений жидкости. Рассмотренное ранее асимптотическое решение обозначим u^1 .

$$[C_{ijkl}u_{k,l}]_{,j} = 0, \quad u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad C_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2} = -pn_i, \quad (3.18)$$

где $p = p^{(0)}$ из уравнения (2.11).

Положим

$$u_i = u_i^1 + u_i^2,$$

так что u_i^1 связаны с деформацией скелета, а u_i^2 — с давлением в порах. Представим их асимптотическими разложениями:

$$u_i^1 = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q N_{ijk_1 \dots k_q}^{(q)}(\vec{\xi}) w_{j,k_1 \dots k_q}(\vec{x}); \quad N^{(q)} = 0, \quad q < 0; \quad \langle N^{(q)} \rangle = 0, \quad q > 0; \quad N_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}; \quad (3.19)$$

$$u_i^2 = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{q+1} M_{ijk_1 \dots k_q}^{(q)}(\vec{\xi}) p_{j,k_1 \dots k_q}(\vec{x}); \quad M^{(q)} = 0, \quad q < 0; \quad (3.20)$$

Рассмотрим отдельно задачи для u^1 и u^2 .

1. Для u^1 имеем согласно предыдущему. В первом приближении имеем задачу на ячейке:

$$[C_{ijkl} + C_{ijpq}N_{pkl,q}^{(1)}]_{,j} = 0. \quad (3.21)$$

С граничным условием на границе с жидкостью:

$$C_{ijkl} [\delta_{kp}\delta_{ql} + N_{kpq,l}^{(1)}] w_{p,q} n_j = 0; \quad (C_{ijpq} + C_{ijkl}N_{kpq,l}^{(1)}) n_j|_{\Sigma_2} = 0. \quad (3.22)$$

Условие периодичности:

$$N_{kpq}^{(1)}|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} = N_{kpq}^{(1)}|_{\xi_\alpha = +\frac{l_\alpha}{2}}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Уравнения (3.21), (3.22), (3.23) образуют постановку локальной задачи (3.18):

$$[C_{ijkl} + C_{ijpq}N_{pkl,q}^{(1)}]_{,j} = 0, \quad (C_{ijkl} + C_{ijpq}N_{pkl,q}^{(1)}) n_j|_{\Sigma_2} = 0, \quad N_{kpq}^{(1)}|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} = N_{kpq}^{(1)}|_{\xi_\alpha = +\frac{l_\alpha}{2}}. \quad (3.24)$$

2. Градиент вектора перемещений для второй его составляющей будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} u_{k,l}^2 &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{q+1} \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{kk_1 \dots k_q, l}^{(q)} p_{, k_1 \dots k_q} + M_{kk_1 \dots k_q}^{(q)} p_{, k_1 \dots k_q l} \right] = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left[M_{kk_1 \dots k_q, l}^{(q)} p_{, k_1 \dots k_q} + M_{kk_1 \dots k_{q-1}}^{(q-1)} p_{, k_1 \dots k_{q-1} l} \right] . \end{aligned} \quad (3.25)$$

В нулевом приближении ($q = 0$) получим:

$$u_{k,l}^2 = M_{k,l}^{(0)} p . \quad (3.26)$$

Подставляя это выражение в задачу (3.18), получим уравнение равновесия локальной задачи:

$$\left[C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} p \right]_{,j} = 0 ,$$

или:

$$\left[C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} \right]_{,j} = 0 \quad (3.27)$$

Граничные условия:

$$C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} p n_j |_{\Sigma_2} = -p n_j ,$$

то есть

$$C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} n_j |_{\Sigma_2} = -n_j . \quad (3.28)$$

Условие периодичности:

$$P_{ijpq} n_j |_{\xi_\alpha = -\frac{\iota_\alpha}{2}} = P_{ijpq} n_j |_{\xi_\alpha = +\frac{\iota_\alpha}{2}} , \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.29)$$

Осредненное напряжение

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle = \langle C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} \rangle .$$

Поэтому полное напряжение равно:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle^\Pi = C_{ijkl}^{\text{eff}} \varepsilon_{kl}^{\text{eff}} - \langle p \rangle \langle C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} \rangle . \quad (3.30)$$

Формула (3.30) совпадает с (3.4), если

$$\langle C_{ijkl} M_{k,l}^{(0)} \rangle = \delta_{ij} .$$

Для выяснения этого вопроса локальная задача (3.27), (3.28), (3.29) была решена с помощью коммерческого программного комплекса.

§4. Численное решение задачи на ячейке.

Имеем:

$$\begin{aligned}(C_{ijkl}M_{k,l})_{,j} &= 0, \quad \vec{x} \in V; \\ C_{ijkl}M_{k,l}n_j &= -n_i, \quad \vec{x} \in \Sigma_1; \\ u_k &= 0, \quad \sigma_T = 0, \quad \vec{x} \in \Sigma_2.\end{aligned}$$

Необходимо вычислить $\sigma_{ij}^{(2)}$.

$$\int_V \underline{\sigma} dV = \int_{V_s} \underline{\sigma} dV + \int_{V_f} \underline{\sigma} dV.$$

Рассмотрим $\int_{V_s} \sigma_{ij} dV$.

$$(\sigma_{ij}\xi_k)_{,j} = \sigma_{ij,j}\xi_k + \sigma_{ij}\xi_{k,j} = |\sigma_{ij,j} = 0, \quad \xi_{k,j} = \delta_{kj}| = \sigma_{ik},$$

тогда

$$\int_{V_s} \sigma_{ik} dV = \int_{V_s} (\sigma_{ij}\xi_k)_{,j} dV = \int_{\Sigma_s} (\sigma_{ij}n_j)\xi_k d\Sigma = \int_{\Sigma_s} S_i\xi_k d\Sigma.$$

$$\Sigma_s = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Посчитаем интегралы по Σ_1 и Σ_2 отдельно:

1) по Σ_1 .

$$S_i = -pn_i, \quad n_i = -\frac{\xi_i}{r}.$$

$$\int_{\Sigma_1} p \frac{\xi_i}{r} \xi_k d\Sigma = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ p \int_{\Sigma_1} \frac{\xi_i^2}{r} d\Sigma, & i = k. \end{cases}$$

Будем рассматривать двумерный случай.

$$\xi_1^2 = \frac{1}{2}r^2 ,$$

тогда при $i = k = 1$

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\xi_i^2}{r} d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} r d\Sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r \underbrace{r d\phi}_{d\Sigma} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\phi = \pi r^2 .$$

То есть:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma_1} S_\alpha \xi_\alpha d\Sigma = \pi r^2 , \quad i = k ; \\ \int_{\Sigma_1} S_\alpha \xi_\beta d\Sigma = 0 , \quad \alpha \neq \beta , \quad i \neq k . \end{array} \right.$$

2) по Σ_2 .

$$\Sigma_2 = \Sigma_{2a} + \Sigma_{2b} .$$

По Σ_{2b} :

$$S_1 = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_{2b}} S_1 \xi_2 d\Sigma = 0 .$$

По Σ_{2a} S_1 -четная, ξ_2 -нечетная, поэтому

$$\int_{\Sigma_{2a}} S_1 \xi_2 d\Sigma = 0 .$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma_2} S_1 \xi_2 d\Sigma = 0 .$$

Теперь рассмотрим интеграл $\int_{\Sigma_2} S_1 \xi_1 d\Sigma = 0$.

По Σ_{2b} :

$$S_1 = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_{2b}} S_1 \xi_1 d\Sigma = 0 .$$

По Σ_{2a} :

$$\int_{\Sigma_{2a}} S_1 \xi_1 d\Sigma = \left(\frac{l_1^\xi}{2} \int_{\Sigma_{2a}^{(*)}} S_1 d\Sigma \right) * 2 .$$

Значение $\int_{\Sigma_{2a}^{(*)}} S_1 d\Sigma$ получено из программно-вычислительного комплекса ANSYS.

Таким образом, тензор

$$\langle \sigma_{ij}^{(2)} \rangle = \langle C_{ijkl} M_{k,l} \rangle$$

является шаровым для симметричной ячейки. Вопрос только в том, является ли он единичным. Для выяснения этого осталось вычислить

$$\langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle = \frac{\int_{\Sigma_{2a}} S_1 \xi_1 d\Sigma + \pi r^2 - \pi r^2}{l_1^\xi l_2^\xi} * p .$$

Если ячейка имеет следующий вид:

то при $\vec{x} \in V_s$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \Rightarrow \sigma_{ij} n_j = -p n_i;$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{k} \Rightarrow u_i = -\frac{p}{k} \xi_i ,$$

то есть граничные условия удовлетворяются.

Вычисление в ANSYS:

$$l_1^\xi = 1,5 , \quad l_2^\xi = 1 , \quad p = 1;$$

$$\int_{\Sigma_{2a}^{(*)}} S_1 d\Sigma = -0,7 \equiv I .$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma_{2a}} S_1 \xi_1 d\Sigma = l_1^\xi ,$$

а это значит, что

$$\langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle = \frac{1}{l_2^\xi} Ip = Ip = -0,7 .$$

Заключение.

В результате проделанной работы были выведены оба уравнения модели Био асимптотическим методом. Результаты вычислений, полученных при помощи программно-вычислительного комплекса ANSYS, показывают, что для поры с твердой частицей, окруженной жидкостью, условие

$$\langle C_{ijkl} M_{k,l} \rangle = \delta_{ij}$$

выполняется. Однако для твердого скелета с порой для жидкости внутри это не всегда так. Необходим коэффициент α : $0 \leq \alpha \leq 1$, отвечающий за насыщенность поры жидкостью:

$$\langle C_{ijkl} M_{k,l} \rangle = \alpha \delta_{ij} ,$$

то есть:

$$\langle \underline{\sigma} \rangle^{\Pi} = \langle \underline{\sigma} \rangle^{eff} - \alpha \langle p \rangle \underline{I} .$$

Здесь, как и в случае полного насыщения, $\underline{\sigma}^{eff}$ представляет полное напряжение в каркасе под действием совокупной внешней нагрузки при условии, что давление p равно нулю в той части объема пор, которая заполнена жидкостью. Коэффициент α выражает отношение объема вытекшей жидкости к изменению объема пор скелета в случае, когда жидкость может беспрепятственно вытекать через поверхность тела. Таким образом, состоянию полного насыщения соответствует значение $\alpha = 1$, отсутствию жидкости в порах $\alpha = 0$.

Этот факт также подтвержден многими научными трудами, в которых данный коэффициент используется.

Список литературы.

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. "Осреднение процессов в периодических средах".
2. Лекция в МИТ профессора Мэя "Микромасштабный базис потоков в пористых средах. Теория осреднения."
3. Победря Б.Е. "Механика композиционных материалов" 1984 г.
4. Диссертация Киселёва Ф.Б., гл. 1, "Постановка задачи фильтрации по модели Био".
5. Чарный И.А. "Подземная гидродинамика" 1948 г.
6. Статья Ентова В.М. "Теория фильтрации" в Соросовский образовательный журнал, 1998 г.

Литература

1. Победря Б. Е. Принципы вычислительной механики композитов. *Механика композитных материалов*, 32(6):41–63, 1996.
2. Победря Б. Е. and Шешенин С.В. О методах упругих решений. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, (5):–, 1987.
3. Прагер В. *Введение в механику сплошных сред*. Изд-во иностр. литературы, Москва, 1963.
4. Стренг Г. and Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов*. Мир, М., 1977.
5. Ключников В.Д. *Математическая теория пластичности*. Изд-во Моск. ун-та, М., 1979.
6. Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу*. Изд-во МГУ, Москва, третье издание edition, 1986.
7. Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. Изд-во МГУ, Москва, 2 edition, 1999.
8. Новожилов В.В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах. *ПММ*, 27(5):794 – 812, 1963.

9. Н. С. Бахвалов and Г. П. Панасенко. *Осреднение процессов в периодических средах*. Наука, М., 1984.
10. Султанов Л.У. Голованов А.И. *Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. Изд-во Казанского гос. университета, Казань, 2008.
11. T. Akasaka. Structural mechanics of radial tires. *Rubber chemistry and technology*, 54:461–492, 1979.
12. Б. Л. Бухин. *Введение в механику пневматических шин*. Химия, Москва, 1988.
13. Е. Г. Дьяконов. *Минимизация вычислительной работы*. Наука, М., 1989.
14. Адкинс Дж.Е. Грин А.Е. *Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды*. Мир, Москва, 1965.
15. К. Ф. Черных. *Нелинейная теория упругости*. Машиностроение, Л., 1986.
16. S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Texts in Applied Mathematics*, volume 15. Springer-Verlag, New York, 3th edition, 2008.
17. Zienkiewicz O. C and Cheung Y K. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, 1967.
18. P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*, volume 1. North-Holland, 1988.
19. D. C. Drucker. О postulate of stability in mechanics of continua. *J. de mecanique*, 3:235 – 249, 1964.
20. Трусдел К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. Мир, М., 1975.
21. А. А. Ильюшин. *Пластичность*. Гос. изд.техн.-теор. лит-ры, М.-Л., 1948.
22. А. А. Ильюшин. *Пластичность*. АН СССР, М., 1963.
23. С. Н. Коробейников. *Нелинейное деформирование твердых тел*. Изд-во сибирского отделения РАН, Новосибирск, 2000.
24. А. И. Лурье. *Нелинейная теория упругости*. Наука, М., 1980.
25. Р. Кристенсен. *Введение в механику композитов: Пер. с англ.* Мир, Москва, 1982.
26. Strang G. and Fix G. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall, New Jersey, 1973.
27. W. Gehler. Die würfelfestigkeit und die säulenfestigkeit als grundlange der betonprüfung und die sicherheit von beton und

- eisenbetonbauten. *Der Bauingenieur*, Heft 2:S. 21 –27, 1928.
28. W. Gehler. Die würfelfestigkeit und die säulenfestigkeit als grundlange der betonprüfung und die sicherheit von beton und eisenbetonbauten. *Der Bauingenieur*, Heft 3:S. 40 –43, 1928.
 29. W. Gehler. Die würfelfestigkeit und die säulenfestigkeit als grundlange der betonprüfung und die sicherheit von beton und eisenbetonbauten. *Der Bauingenieur*, Heft 4:S. 63 –68, 1928.
 30. Argyris J. H. Energy theorems and structural analysis. part i. *Aircraft Engineering*, 26, 1954.
 31. Argyris J. H. and Kelsey S. Energy theorems and structural analysis. part ii. *Aircraft Engineering*, 27, 1955.
 32. MacNeal R. H. An asymmetrical finite difference network. *Quart. Appl. Math.*, 11(3):295–310, 1953.
 33. R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
 34. Babuska I. and Aziz A. K. Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method. In *The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, pages 5–359. Amer. Academic Press, 1972.
 35. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Мир, М., 1975.
 36. Б. Е. Победря. *Механика композиционных материалов*. МГУ, Москва, 1984.
 37. Б. Е. Победря and Шешенин С.В. Некоторые приложения вычислительной механики композитов. In *Современные проблемы математики и механики*, volume 2, pages 6–16, М., 2009. Изд-во Моск. ун-та.
 38. Б. Е. Победря. О вычислительной механике деформируемого твердого тела. In *Математические методы механики деформируемого твердого тела*, pages 124–129, М., 1986. Наука.
 39. Б. Е. Победря. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. МГУ, М., 1995.
 40. Няшин Ю.И. Поздеев А.А., Трусов П.В. *Большие упруго-пластические деформации*. Наука, Москва, 1986.
 41. Няшин Ю.И. Поздеев А.А., Трусов П.В. *Большие упругопластические деформации*. Наук, М., 1986.
 42. R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor&Francis,

- Philadelphia, 2nd edition, 1999.
43. Bathe K.-J. *Finite Element Procedures*. PRENTICE HALL, New Jersey, 1996. 1050 p.
 44. А. А. Самарский. *Теория разностных уравнений*. Наука, М., 1977.
 45. Карчевский М.М. Волошанская С.Н. Об аппроксимации тензора деформаций в криволинейных координатах. разностная схема для задачи о равновесии упругого цилиндра. *Известия Вузов, математика*, (10):701–80, 1977.
 46. Сьярле Ф. *Математическая теория упругости*. Мир, Москва, 1992.
 47. Дж. Хол Дж. Уатт. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*. Мир, Москва, 1979.
 48. Р. Хилл. Об определяющих неравенствах для простых материалов. In *Механика*, volume 116, pages 94 – 118. 1969.
 49. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач*. 1981.
 50. Б. Е. Победря С.В. Шешенин Т. Холматов. *Задача в напряжениях*. Фан, Ташкент, 1988.
 51. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49:1–23, 1943.
 52. J. C. Simo and T. A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42(1):97–116, 1992.
 53. Kwork S.K. On improved curvilinear finite difference method for arbitrary mesh system. *Computers and Structures*, 18(4):719 – 731, 1984.
 54. Girault V. Theory of finite difference method on irregular networks. *SIAM J. of Numerical Analysis*, 11(2):260 – 282, 1974.
 55. Vasiliev V.V. and Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials*. Elsevier, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK, 2 edition, 2009.
 56. J. Bonet R. D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
 57. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5th edition, 2000.
 58. Сьярле Р. *Метод конечных элементов для эллиптических за-*

- дач. Мир, М., 1980.
59. С. В. Шешенин, И. С. Кузь, and И. А. Савельева. О методе пошаговой линеаризации в задачах нелинейной теории упругости. In *Упругость и неупругость. Ч.1*, pages 88–94, М., 1993. МГУ.
60. С. В. Шешенин. *Численный анализ квазистатических краевых задач МДТТ*. Дис. . . д-ра физ.-мат. наук : 01.02.04, МГУ, М., 1990.

Шешенин Сергей Владимирович

Метод конечных элементов в нелинейной МДТТ.

М., механико-математический факультет МГУ, 170 стр.

*Оригинал макет изготовлен издательской группой
механико-математического факультета МГУ*

Подписано в печать 04.01.2001 г.

Формат 60×90 1/16. Объем 7,5 п.л.

Заказ 2 Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете
МГУ

г. Москва, Воробьевы горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета