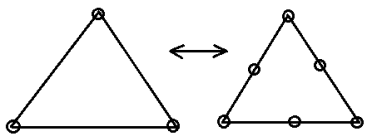


16) Треугольные элементы высшего порядка. Координаты площади. (Л19)

Треугольные элементы высшего порядка.

Теперь будем использовать для аппроксимации искомой функции полиномы **высшего порядка**, т.е. более высокого, чем первый. Возьмем еще узлы на середине сторон. В Help ANSYS нет элементов сложнее, чем такие элементы.



Функции формы будем строить с помощью **фундаментальных одномерных полиномов Лагранжа**. Возникает вопрос: в каких координатах строить функции формы, чтобы использовать эти одномерные полиномы. Глобальные координаты (x, y) для треугольников плохи тем, что стороны – три, а координаты – две, получается несимметрия, потому что надо использовать одномерные полиномы. Тогда возникла идея использовать три координаты, т.е. построить взаимно-однозначное соответствие между координатами (x, y) и тремя координатами (L_1, L_2, L_3) .

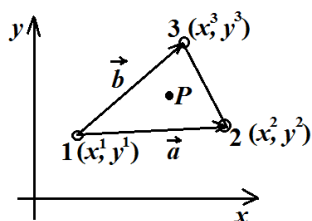
$$(x, y) \leftrightarrow (L_1, L_2, L_3)$$

Независимых координат в двухмерном пространстве может быть только две, поэтому если мы хотим 3 координаты использовать для симметрии задания этих функций формы, то они будут зависимыми. Поэтому ставится такое условие:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

Такие 3 координаты, которые используются, называются **координатами площади**.

Координаты площади.



Будем рассматривать двухмерный случай. Координаты площади задаются следующим соответствием между x и y :

$$x = \hat{x}^1 \cdot L_1 + \hat{x}^2 \cdot L_2 + \hat{x}^3 \cdot L_3$$

$$y = \hat{y}^1 \cdot L_1 + \hat{y}^2 \cdot L_2 + \hat{y}^3 \cdot L_3$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

Пара чисел (\hat{x}^i, \hat{y}^i) – это координаты вершин ($i = 1, 2, 3$).

Получилась система уравнений, которая связывает 2 координаты x, y и три координаты L_i . Теперь нужно выразить L_i через x, y . Для этого мы должны решить эту линейную систему уравнений.

Запишем систему уравнений в матрично-векторной форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & \hat{x}^3 \\ \hat{y}^1 & \hat{y}^2 & \hat{y}^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Систему 3x3 проще всего решать по формулам Крамера:

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Δ – определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & \hat{x}^3 \\ \hat{y}^1 & \hat{y}^2 & \hat{y}^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 - \hat{x}^1 & \hat{x}^3 - \hat{x}^1 \\ \hat{y}^1 & \hat{y}^2 - \hat{y}^1 & \hat{y}^3 - \hat{y}^1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2S$$

Вычли 1-й столбец из 2-го и 3-го столбцов. Δ равен скалярному произведению двух векторов, т.е. удвоенной площади элемента.

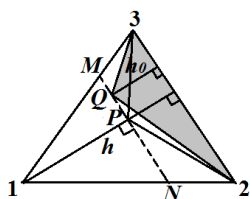
Чтобы найти определитель Δ_1 , надо правый столбец подставить на место 1-го столбца матрицы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & \hat{x}^2 & \hat{x}^3 \\ y & \hat{y}^2 & \hat{y}^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \hat{x}^1 & x & \hat{x}^3 \\ \hat{y}^1 & y & \hat{y}^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & x \\ \hat{y}^1 & \hat{y}^2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2S$$

Геометрический смысл координат L_i .

Теперь мы хотим понять, как эти координаты устроены.



Δ_1 – это удвоенная площадь серого треугольника. Отсюда мы понимаем, что координата L_1 – это отношение площади серого треугольника к площади всего треугольника, поэтому эти координаты называются координатами площади.

Теперь легко понять **геометрический смысл этой координаты L_1** , т.е. как она меняется при изменении x, y .

$$L_1 = \frac{h_0}{h}$$

Таким образом, координата L_1 не меняется вдоль направления, перпендикулярного высоте, а меняется вдоль высоты.

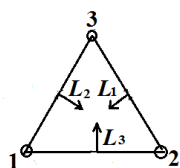
L_1 меняется от 0 до 1: $L_1 \in [0, 1]$

$L_1 = 1$, если (x, y) совпадает с точкой 1;

$L_1 = 0$, если (x, y) лежит на стороне [2, 3], на прямой (2, 3).

Отсюда мы получаем четкий геометрический смысл этой координаты L_1 . L_1 – это относительное расстояние от точки (x, y) до основания [2, 3]. Абсолютно аналогичный смысл играют все остальные координаты L_2 и L_3 .

На рисунке показаны направления, куда меняются координаты.



Алгебраический смысл координат L_i .

Заметим, что определители $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – это ровно те же определители, которые возникали при нахождении функции формы N_i **линейного треугольного элемента**. Разница только в том, что сами матрицы были транспонированные, но определители от этого не меняются. Поэтому мы можем сделать важный вывод, что **координаты L_i – это то же самое, что функции формы N_i для линейного треугольного элемента** (которые мы изучали раньше). Но N_i мы рассматривали как функции формы с целью аппроксимировать перемещения. А L_i – это координаты, у них цель – описание точек. Но так получается, что они выражаются одинаковыми формулам через x, y :

$$L_i = N_i = \frac{1}{\Delta}(a_i + b_i x + c_i y)$$

А для a_i, b_i, c_i мы формулы уже получали.

1) L_i используются в качестве координат.

2) L_i используются для построения функций формы элемента более высокого порядка, чем первый.

Для элементов первого порядка – самый простой элемент:

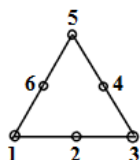
$$N_i = L_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{для линейного случая}$$

Теперь напишем функции формы для квадратичного, кубического и т.д. элементов:

$$N_i = N_i(L_1, L_2, L_3) \quad \text{общая формула}$$

3-х-индексная нумерация узлов треугольного квадратичного элемента.

Рассмотрим **квадратичный элемент**:



$$(x, y) \leftrightarrow (L_1, L_2, L_3)$$

Функции формы будем строить от аргументов L_1, L_2, L_3 .

$$p \leftrightarrow (I, J, K)$$

Номеру p будем ставить в соответствие тройную нумерацию I, J, K . Эти три индекса I, J, K аналогичны координатам L_1, L_2, L_3 , только это целочисленные номера узлов. Разница состоит в том, что координаты I, J, K обладают таким свойством:

$$I + J + K = n$$

n – степень полинома, который аппроксимирует искомое поле перемещений внутри элемента, (если нумеровать с нуля) или число узлов (если нумеровать с 1)

В нашем примере $n = 2$ (степень полинома).

Пронумеруем узлы в треугольнике, используя 3-х-индексную нумерацию.

Стрелками показано, в какой направлении меняются координаты L_i .

I, J, K меняются вдоль соответствующих им координат:

I меняется вдоль координаты L_1

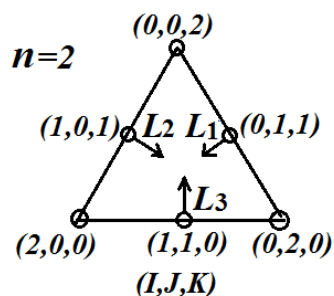
J меняется вдоль координаты L_2

K меняется вдоль координаты L_3

$$I, J, K = 0, 1, 2$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$I + J + K = n$$



Итак, мы провели предварительную деятельность. Ввели координаты L_i и ввели целочисленную трехиндексную нумерацию. Теперь используя и то, и другое, запишем функции формы.

Функции формы.

Порядок n . Функции формы для узла p :

$$N_p = N_{IJK} = l_I^I(L_0)l_J^J(L_1)l_K^K(L_2)$$

l_I^I – фундаментальный полином Лагранжа степени I , который равен 1 в своем узле и 0 во всех остальных узлах.

Следовательно, N_p – это произведение одномерных функций – полиномов степени I, J, K соответственно. (Получилось похоже на то, что было с 4-х-угольными элементами.)
 $I + J + K = n$

Поскольку $I + J + K = n$, то **старший член** полинома $N_i(L_1, L_2, L_3)$ будет $L_1^I L_2^J L_3^K$.

Мы можем сказать, что $N_i(L_1, L_2, L_3)$ – это полином трех переменных (координат)

n -ой степени. Другими словами, такая интерполяция позволяет построить функцию формы N_i в виде полинома n -ой степени.

По каждому направлению L у нас 3 узла. Значит, мы аппроксимируем функцию N_i полиномом как функцией трех координат L_1, L_2, L_3 **2-ой степени** (потому что в нашем примере $p = 2$).

$$l_I^n(\xi) = \prod_{\substack{L=1 \\ L \neq I}}^n \frac{(\xi - \xi_L)}{(\xi_I - \xi_L)}$$

$$l_J^n(\eta_k) = \delta_{Jk}$$

В чем здесь достигается цель? То, что требовалось, достигнуто, причем простыми средствами.

1) Написанная функция N_p есть полином степени n от x, y . Мы хотим, чтобы функция формы была более высокого порядка от x, y , чем в линейном треугольнике, т.е. чем линейная функция от x, y . Мы достигаем цели. У нас получается полином степени n от x, y , который удовлетворяет свойству:

$$N_p(\hat{x}^q) = \delta_p^q$$

2) Это построение достаточно простое, потому что этот полином N_p строится как произведение одномерных функций.

Перенесем это все на **треугольный элемент**.

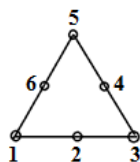
$$N_i(L_1, L_2, L_3) = l_i^I(L_1)l_j^J(L_2)l_K^K(L_3)$$

$$I + J + K = p$$

Это тоже произведение одномерных полиномов степени I, J, K соответственно.

$l_i^I(L_1)$ – полином степени I

Треугольник второго порядка:



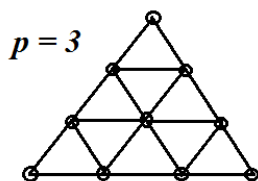
Для угловых узлов:

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$$

Для узлов на сторонах:

$$N_2 = 4L_1L_2$$

Треугольник третьего порядка:



Для угловых узлов:

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1$$

Для узлов на сторонах:

$$N_2 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$$

17) Бесконечные конечные элементы. (Л9)

Идея построения базовых элементов и описания с их помощью различных задач захватила инженеров. Можно теперь рассмотреть **бесконечные конечные элементы**. Здесь речь идет о МКЭ, в котором элементы могут быть бесконечными.

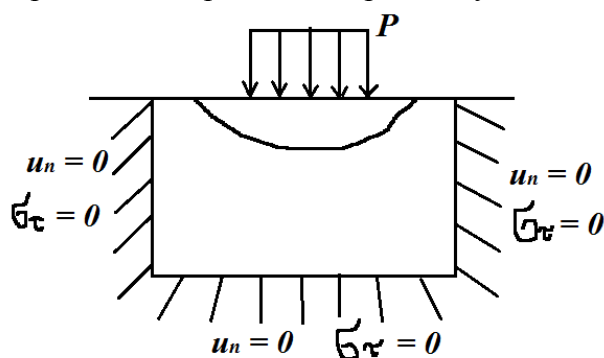
Это связано с отображением. Мы используем стандартный элемент. Тогда **можно на стандартный элемент отобразить бесконечную область**. Бесконечность нас не должна пугать. Мы не будем ничего делать в реальной бесконечной области. Бесконечную область мы отобразим на конечный стандартный элемент, и в нем строятся функции формы. Поэтому никаких сложностей бесконечный элемент не вызывает.

А зачем нужны бесконечные элементы? Есть такой класс задач, где они могут быть осмысленно полезными, во всяком случае, как один из вариантов решения. Например, это задачи, связанные с землей, с геотехническими сооружениями.

Рассмотрим такую задачу. Есть земная поверхность, на нее давит фундамент с силой P . Фундамент заменен более мягкой нагрузкой – силой. Обычно в задаче с фундаментом задаются перемещения. На самом деле фундамент – это жесткая плита, и там надо перемещения задавать и суммарную силу.

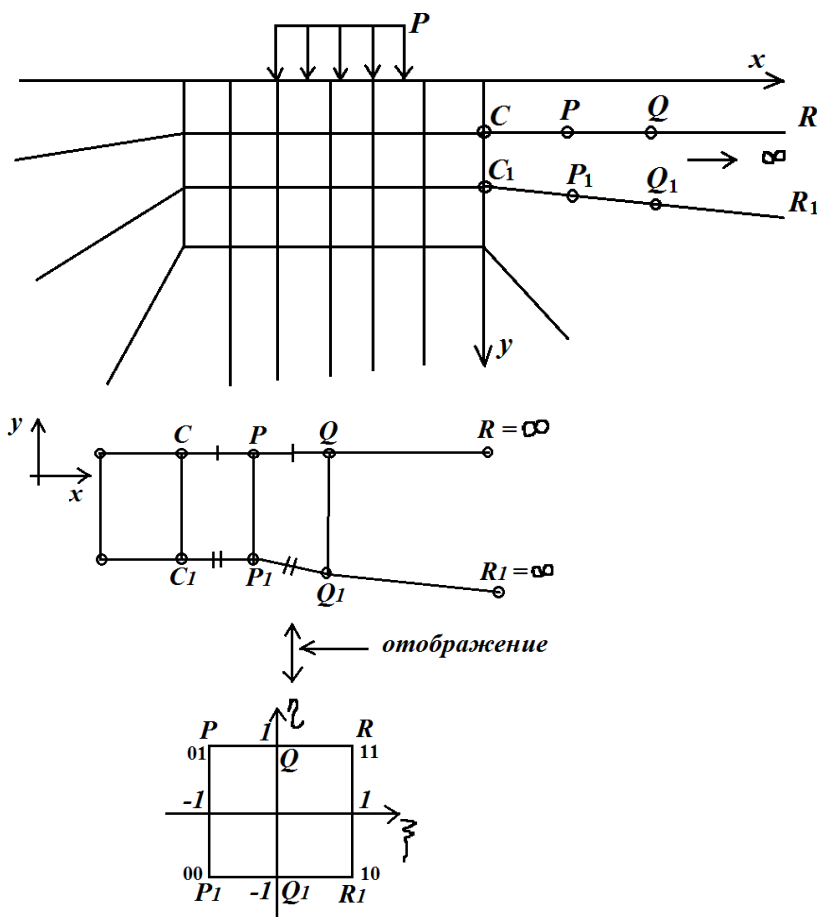
Как решать такую задачу? Область на самом деле ведь бесконечная. Земля бесконечная по сравнению с самим зданием.

1-й метод состоит в том, чтобы не использовать никаких бесконечных элементов, а пользоваться инженерной интуицией, – вырезать конечный объем грунта достаточно большого размера по сравнению с той областью, где действует нагрузка, и ввести искусственную границу. Далее решают задачу в очерченной области, а на ее границе ставят какие-то перемещения. Считается, что на нижней границе действие фундамента уже не ощущается. Обычно на границах области (нижней и боковых) ставятся ГУ: нормальные перемещения равны нулю и касательные напряжения равны нулю.



Можно область взять большой, можно решать для разного числа областей и проанализировать, насколько решение вблизи фундамента зависит от того, насколько большой кусок вырезали.

2-й метод. Но более красиво с точки зрения МКЭ решать так, чтобы не вырезать конечный объем, а решать в бесконечной области, в полупространстве. 2-й вариант решения заключается в том, что мы строим сетку там, где есть эти бесконечные элементы.



$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta)$$

Элемент отображаем взаимно-однозначно на стандартный элемент.

Бесконечный элемент похож на обычный элемент, у него есть узлы. Почему он бесконечный? Если написать узлы $C_1 - C, P_1 - P, Q_1 - Q$, а еще 2 узла $R_1 - R$ равны бесконечности. Не обязательно он один вводится. Рядом с ним могут находиться обычные четырехугольные элементы. Важно то, что удаление в бесконечность моделируется таким элементом, у которого 2 узла находятся в бесконечности. Возникает вопрос: как с ним работать? **Бесконечный элемент рассматривается в смысле параметрического элемента, т.е. мы рассматриваем элемент, когда используется отображение. Бесконечный элемент отображается на стандартный четырехугольный элемент. Бесконечная область отображается на конечную. В стандартной области можно использовать функции формы, соответствующие обычным билинейным элементам.**

Нужно задать отображение. Поскольку в направлении η конечные отрезки друг на друга отображаются, то можно использовать те же самые билинейные функции. А какое отображение использовать по ξ ? Оно было придумано таким:

$$x = N_1(\eta) \left[x_c \left(\frac{-\xi}{1-\xi} \right) + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) x_Q \right] + N_0(\eta) \left[x_{C_1} \left(\frac{-\xi}{1-\xi} \right) + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) x_{Q_1} \right]$$

$$N_0(\eta) = \frac{1-\eta}{2}; \quad N_1(\eta) = \frac{1+\eta}{2}$$

$N_0(\eta), N_1(\eta)$ – функции формы по вертикали (выбираются линейными)

Мы не функции формы строим, а задаем отображение. (По у формула записывается аналогично.) Проанализируем эту формулу, что куда отображается.

Проверим:

$$\xi = -1 \quad \eta = 1$$

$$x = x_C \frac{1}{2} + x_Q \frac{1}{2}$$

$$x_P = \frac{x_C + x_Q}{2}$$

$$\xi = -1 \quad \eta = -1$$

$$x = x_{C_1} \frac{1}{2} + x_{Q_1} \frac{1}{2} = x_{P_1}$$

$$x_{P_1} = \frac{x_{C_1} + x_{Q_1}}{2}$$

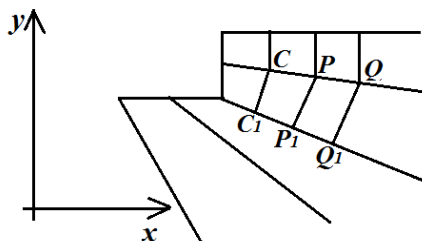
$$\xi = 0 \quad \eta = 1 \quad x = x_Q$$

$$\xi = 0 \quad \eta = -1 \quad x = x_{Q_1}$$

$$\xi = 1 \quad \eta = 1 \quad x \rightarrow +\infty = x_R$$

$$\xi = 1 \quad \eta = -1 \quad x \rightarrow +\infty = x_{R_1}$$

$$y = N_1(\eta) \left[y_C \left(\frac{-\xi}{1-\xi} \right) + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) y_Q \right] + N_0(\eta) \left[y_{C_1} \left(\frac{-\xi}{1-\xi} \right) + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) y_{Q_1} \right]$$



Разницу составляет лишь верхний элемент. У него у не должен отображаться в бесконечность, у него всегда $y = 0$. Когда мы находимся на верхней стороне, то $y = 0$. Если $y_Q = 0$, то ноль и будет, бесконечности не получится. Когда координаты $y = 0$, то верхняя сторона не уходит в бесконечность, она так и останется равна 0 по у.

Вывод: Идея использования отображения может быть обнаружена в разных проявлениях. В данном случае есть отображение, но **это отображение не изопараметрическое**. Потому что после того, как мы построили отображение в стандартной области, то в стандартной области используются функции N_{ij} :

$$N_{ij} = N_i(\xi)N_j(\eta)$$

$$N_{00} = N_0(\xi) \cdot N_0(\eta) \quad N_{11} = N_1(\xi) \cdot N_1(\eta)$$

$$N_{01} = N_0(\xi) \cdot N_1(\eta) \quad N_{10} = N_1(\xi) \cdot N_0(\eta)$$

Есть 4 функции N_{ij} , и они билинейны. Они есть произведение одномерных линейных функций N_i . Здесь используется, что номера ij взаимно-однозначно отображаются на глобальный номер I .

$$N_{ij} = N_i(\xi)N_j(\eta)$$

$$ij \leftrightarrow I \quad i, j = 0, 1 \quad I = 0, 1, 2, 3$$

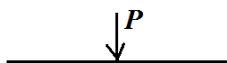
I – глобальный

Отсюда ясно, что сами функции формы для этой области, куда мы отобразили, это билинейные стандартные функции. А отображение задается с помощью функций, которые не есть билинейные. Они тоже являются произведением одномерных функций. Но для того чтобы получалась бесконечность, функция не есть билинейная, она дробно-рациональная. Это пример того, что **сами элементы в стандартной области строятся с помощью билинейных функций, а отображение создается с помощью дробно-рациональных функций**. Поэтому такие элементы называются **параметрическими** (а не изопараметрическими). Отображение может задаваться не теми функциями, которые используются для построения функций формы N .

Замечание.

90% задач решаются с помощью изопараметрических элементов.

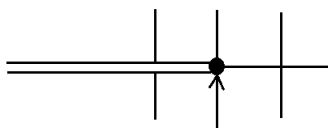
В книге Зенкевича решается задача Буссинеска (действие единичной силы на полупространство). В особой точке, где действует сосредоточенная сила, решение стремится к бесконечности.



Там показано, что такие элементы дают лучшую точность, чем использование обычных элементов. Это пример использования параметрического отображения.

Замечание.

Существует еще много вариантов МКЭ, чтобы достичь лучшей точности. Например, задачи, в которых известна асимптотика решения. Если у нас есть трещина. Известна асимптотика решения, как решение себя ведет на конце трещины. Коэффициент этой асимптотики (коэффициент интенсивности) есть в теории прочности.



Например, мы хотим решать задачу МКЭ. Мы строим сетку и решаем. Конечно, точность будет низкая МКЭ, если использовать стандартные функции, потому что они конечные и не могут описать стремление к бесконечности, только очень сильным измельчением сетки. Поэтому в задачах, в которых известно асимптотическое поведение решения, в функции формы добавляют функцию, которая описывает главные члены асимптотического поведения решения.

18)Существование и единственность решения вариационного уравнения. Теорема Лакса-Мильграма. (Л10)

Вопрос о существовании и единственности решения решается **теоремой Лакса-Мильграма**.

Напишем вариационное уравнение:

$$a(u, v) = l(v), \quad u, v \in H$$

Решение:

$$u: \forall v \ a(u, v) = l(v)$$

a – билинейный функционал, l – линейный функционал, H – гильбертово пространство
 $a(u, v)$ – симметричный функционал: $a(u, v) = a(v, u)$

Теорема Лакса-Мильграма. Условия теоремы:

1)Коэрцитивность (эллиптичность, сильная эллиптичность, положительная определенность квадратичного функционала $a(v, v)$).

$$\exists \delta > 0: \forall v: a(v, v) \geq \delta \|v\|_H^2$$

$\|v\|_H$ – норма функции v в пространстве H , $H = W_2^1$

δ – константа

$a(v, v)$ всегда положительна, причем отделена от нуля. Это сильная эллиптичность.

2)Ограниченность.

$$a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$$

M – константа

Билинейный функционал $a(u, v)$ ограничен по каждому из аргументов.

3) Условие ограниченности $l(v)$.

$$l: l(v) = (F, v)_H$$

По теореме Рисса любой линейный ограниченный функционал может быть представлен в виде скалярного произведения в H . Для большинства задач механики условие 3 выполняется.

Формулировка теоремы Лакса-Мильграма.

Если условия 1,2,3 верны, то решение вариационного уравнения \exists и !

Доказательство теоремы Лакса-Мильграма:

1 шаг. Переформулируем вариационное уравнение в виде операторного уравнения в пространстве H .

$$a(u, v) = l(v) \rightarrow Lu = F$$

$$a(u, v)$$

u – фикс

$\Rightarrow a(u, v)$ – линейный ограниченный функционал (огранич. в силу усл. 2)

\Rightarrow по теореме Рисса $a(u, v) = (u^*, v)_H$

Каждому u соответствует u^* .

\Rightarrow определен оператор $u^* = L(u)$

$\Rightarrow a(u, v) = (L(u), v)_H$

Это основополагающее равенство, которое связывает a и L .

Оператор L – линейный. Докажем это. Рассмотрим:

$$u_1: a(u_1, v) = (L(u_1), v)_H \quad * \alpha$$

$$u_2: a(u_2, v) = (L(u_2), v)_H \quad * \beta$$

Левая часть:

$$\alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) = a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = (L(u), v)_H = (L(\alpha u_1 + \beta u_2), v)_H \quad \forall v$$

обозн $\alpha u_1 + \beta u_2 = u$

Правая часть:

$$\alpha (L(u_1), v)_H + \beta (L(u_2), v)_H = (\alpha L(u_1) + \beta L(u_2), v)_H \quad \forall v$$

(Скалярное произведение линейно.)

Так как функция v – любая, то отсюда получаем:

$$\Rightarrow L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2) \quad \forall \alpha, \beta$$

Мы доказали линейность оператора L .

Теперь мы хотим получить **операторное уравнение**. Мы знаем:

$$l(v) = (F, v)_H \quad \text{условие 3}$$

$$a(u, v) = (L(u), v)_H \quad \text{уже вывели}$$

$$\Rightarrow \forall v: (L(u) - F, v)_H = 0$$

$$\Rightarrow L(u) = F \in H$$

Следовательно, вариационное уравнение эквивалентно операторному уравнению в пространстве H :

$$a(u, v) = l(v) \Leftrightarrow L(u) = F$$

Замечание.

Если H – бесконечномерное пространство, то вариационное уравнение эквивалентно операторному уравнению. А если у нас H^N – конечномерное подпространство, то тогда $L(u) = F$ – это не просто какое-то абстрактное операторное уравнение, а это та линейная система, которая получается МКЭ. **МКЭ позволяет в явном виде вычислять L и F .** Все, что мы доказали для H , верно и для H^N .

2 шаг. Докажем \exists и ! операторного уравнения $Lu = F$, используя теорему о неподвижной точке сжимающего отображения.

Замечание (идея доказательства).

$$a(u, v) = l(v) \Leftrightarrow Lu = F$$

Поскольку операторное уравнение эквивалентно исходному вариационному уравнению, то доказательство \exists решения вариационного уравнения основывается на доказательстве существования операторного уравнения.

Существование доказывается с помощью теоремы из функционального анализа о сжатом изображении, о неподвижной точке при сжатом отображении.

Условия 1,2 по существу приводят к тому, что здесь возникает оператор сжатия, для которого существует неподвижная точка. Отсюда следует \exists и ! операторного уравнения, а, следовательно, и вариационного.

Итак, далее нужно доказать, что L обладает хорошими свойствами, что для него можно построить некий оператор сжатия, и затем использовать факт \exists и ! неподвижной точки.

Докажем \exists и ! операторного уравнения, используя теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Будем использовать условия 1 и 2.

Сначала перепишем условия 1 и 2 в терминах L .

1) $a(u, u) \geq \delta \|u\|_H^2$ Надо это условие переписать в терминах L .

$a(u, v) = (L(u), v)_H$ — вспомнили, что мы вывели ранее

$$\Rightarrow (L(u), u)_H \geq \delta \|u\|_H^2$$

$$(L(u), u)_H \geq \delta (u, u)_H$$

Такой оператор L — **строго положительно определенный**.

2) $a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$ Перепишем условие 2 в терминах L .

Вычислим норму:

$$\|Lu\|_H^2 = (L(u), L(u))_H = a(u, L(u)) \leq M \|u\|_H \|L(u)\|_H$$

(Применили равенство $a(u, v) = (L(u), v)_H$, когда $v = L(u)$.)

Предполагаем:

$$\|u\|_H \neq 0$$

Тогда мы можем левую и правую часть сократить на норму $\|L(u)\|_H$. Получаем:

$$\|L(u)\|_H \leq M \|u\|_H$$

Мы получили, что L — **ограниченный оператор**. (Вывели, что L — ограниченный оператор из ограниченности a . Мы просто переписали условие 2 в терминах L .)

А если $\|u\|_H = 0$, то неравенство тоже верно.

Мы получили такие условия:

1) $(L(u), u)_H \geq \delta \|u\|_H^2$ — **коэрцитивность, строгая положительная определенность, сильная эллиптичность**

2) $\|Lu\|_H \leq M \|u\|_H$ — **ограниченность**

Эти условия эквивалентны сформулированным условиям 1,2 теоремы.

Перед тем, как мы начнем доказывать теорему о неподвижной точке, перепишем условие 2 теоремы по-другому:

$$2) a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$$

$$(L(u), v)_H \leq M \|u\|_H \|v\|_H$$

Положим $v = u$

$$(L(u), u)_H \leq M \|u\|_H^2 = M (u, u)_H$$

$$\Rightarrow \delta (u, u)_H \leq (L(u), u)_H \leq M (u, u)_H - \text{следствие}$$

Можно его переписать так:

$$\delta (u, u)_H \leq a(u, u) \leq M (u, u)_H$$

Если $a(u, u)$ тоже считать некой нормой, то тогда можно говорить, что норма $\|a\|$ эквивалентна исходной норме $\|a\|_H$.

Замечание.

Должно быть $\delta > 0$

Если $\delta = 0$, то теряется строгая эллиптичность, следовательно, уже не работает теорема о \exists и !, нет вообще факта существования решения, задача не называется эллиптической. Решение задачи может не существовать.

Неравенства энергетической эквивалентности:

$$\delta(u, u)_H \leq (L(u), u)_H \leq M(u, u)_H$$

$$\delta(u, u)_H \leq a(u, u) \leq M(u, u)_H$$

Можно вставить единичный оператор:

$$\delta(Eu, u)_H \leq (L(u), u)_H \leq M(Eu, u)_H$$

Коротко в литературе еще пишут так:

$$0 < \delta E \leq L \leq ME$$

Таким образом, из неравенств 1,2 следует, что оператор L в пространстве H и единичный оператор E в пространстве H эквивалентны друг другу с константами δ и M . Это просто сокращенная запись написанных выше неравенств.

3 шаг. Теперь докажем теорему о неподвижной точке.

Теорема о неподвижной точке.

$$Lu - F = 0$$

L – хороший положительно определенный оператор

Будем решать это уравнение с помощью итерационного процесса (метод простой итерации):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (Lu^n - F) = 0 \quad (1)$$

Далее пишем такое тождество:

$$\frac{u - u^n}{\tau} + (Lu - F) = 0 \quad (2)$$

u – решение этого уравнения

Из (1) получаем:

$$u^{n+1} = u^n - \tau(Lu^n - F) \quad (3)$$

Из (2) получаем:

$$u = u^n - \tau(Lu - F) \quad (4)$$

Определим такой оператор:

$$S(u) = u - \tau(Lu - F) \quad (5)$$

Тогда мы получаем, что u – это решение такого уравнения:

$$u = S(u) \Leftrightarrow Lu = F$$

Из (3) и (5) получаем:

$$\Rightarrow u^{n+1} = S(u^n)$$

Нам надо доказать, что $S(u)$ – это сжатый оператор. Докажем, что этот итерационный процесс сходится. Тогда он обязательно будет сходиться к решению

уравнения. Потому что если есть сходимость $u^n \rightarrow u$, то тогда u удовлетворяет такому уравнению $u = S(u)$.

$u^n \rightarrow u$: $u = S(u)$ Из (5) следует: $u = S(u) \Leftrightarrow Lu = F$

Докажем, что этот итерационный процесс сходится. Для этого вычтем (4) из (3):

$$u^{n+1} = u^n - \tau(Lu^n - F) \quad (3)$$

$$u = u - \tau(Lu - F) \quad (4)$$

Получим:

$$u^{n+1} - u = u^n - u - \tau Lu^n + \tau Lu$$

$$u^{n+1} - u = u^n - u - \tau L(u^n - u) \quad (6)$$

Введем обозначение:

$$v^n = u^n - u$$

Под u мы понимаем решение, к которому если процесс сходится, то он обязательно сходится. Получаем (см. (6)):

$$v^{n+1} = v^n - \tau L v^n$$

Доказательство, что $u^n \rightarrow u$, эквивалентно тому, что $v^n \rightarrow 0$.

$$u^n \rightarrow u \Leftrightarrow v^n \rightarrow 0$$

Вычислим норму:

$$\|v^{n+1}\|_H^2 = (v^n - \tau L(v^n), v^n - \tau L(v^n))_H = \|v^n\|_H^2 - 2\tau(L(v^n), v^n) + \tau^2(L(v^n), L(v^n))$$

Теперь, пользуясь неравенствами 1,2 (для L), мы можем оценить правую часть:

$$\|v^{n+1}\|_H^2 \leq \|v^n\|_H^2 - 2\tau\delta\|v^n\|_H^2 + \tau^2 M^2 \|v^n\|_H^2$$

$$1) (L(u), u)_H \geq \delta\|u\|_H^2$$

$$2) \|Lu\|_H \leq M\|u\|_H$$

$$\|v^{n+1}\|_H^2 \leq (1 - 2\tau\delta + \tau^2 M^2) \|v^n\|_H^2$$

Обозначим:

$$\rho^2 = 1 - 2\tau\delta + \tau^2 M^2$$

$$\|v^{n+1}\|_H \leq \rho \|v^n\|_H$$

Сходимость есть (последовательность будет сходиться), если $\exists \tau: \rho < 1$.

Докажем, что $\exists \tau: \rho < 1$

$$\rho^2 = 1 - 2\delta\tau + M^2\tau^2 < 1$$

$$2\delta\tau - M^2\tau^2 > 0$$

$$\tau \left(1 - \frac{M^2}{2\delta} \tau \right) > 0$$

$$\tau > 0$$

$$\tau < \frac{2\delta}{M^2}$$

$$0 < \tau < \frac{2\delta}{M^2} \Leftrightarrow \rho < 1$$

Следовательно, в этом диапазоне τ итерационный процесс сходится. И если он сходится, то к решению u :

$$u = S(u) \Leftrightarrow L(u) = F$$

Следовательно, решение уравнения существует.

Доказательство единственности решения.

Пусть $\exists u_1, u_2: L(u_1) = F, L(u_2) = F$

Так как оператор L – линейный:

$$L(u_1) - L(u_2) = L(u_1 - u_2) = L(v) = 0$$

Вводим функцию:

$$v = u_1 - u_2$$

$$L(v) = 0$$

Теперь надо доказать, что это уравнение имеет только нулевое решение. Умножаем на v скалярно:

$$0 = (L(v), v)_H \geq \delta \|v\|_H^2$$

Здесь мы воспользовались неравенством 1 для L . Получаем:

$$\|v\|_H^2 \leq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Мы доказали, что решение единственно.

Замечание.

Далее возникает вопрос: как доказать существование и единственность задач теории упругости? Ничего доказывать не надо, надо просто проверить, выполняются ли для теории упругости условия 1,2. Доказательство использует элементы функционального анализа (в основном, теорему Рисса – представление этого a в виде скалярного произведения).

Если мы докажем, что условия 1,2 верны в H , то они будут верны и в H^N . **МКЭ – это метод внутренней аппроксимации, так как $H^N \subset H$.** Метод разностных схем называют методом внешней аппроксимации, потому что конечно-элементное пространство, в котором строится решение в методе разностных схем, не лежит внутри бесконечномерного пространства. Оно и вне его не лежит. Пространство сеточных функций вообще довольно трудно сравнить с бесконечномерным пространством.

19) Patch-тесты как проверка сходимости приближенного решения вариационной задачи к точному. (Л11)

Возникает вопрос: как связано решение u^N и u ? Нам хочется, чтобы было:
 $u^N \rightarrow u$ при $N \rightarrow \infty$

(Т.е. когда размерность конечномерного пространства растет, то и приближенное решение приближается к точному.)

Тогда начинается исследование **сходимости приближенного решения к точному**.

Рассмотрим, как доказывается сходимость приближенного решения к точному в инженерно-технических книжках Зенкевича. Это все называется Patch test.

Patch-test (по книжке Зенкевича).

Patch test рассматривается как инструмент для исследования сходимости.

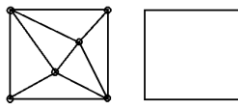
- 1) Это необходимое условие достижения сходимости любой КЭ аппроксимации.
- 2) Это есть достаточное условие для сходимости.
- 3) Это проверка для КЭ программы, правильно она написана или нет.

Согласиться можно только с 3-м пунктом, что это проверка программы. Все остальные пункты звучат смешно по сравнению с серьезными исследованиями сходимости. Тем не менее, рассмотрим этот способ, потому что книжки Зенкевича весьма популярны. Patch test включает 3 теста.

Patch означает шаблон, некое количество элементов, находящихся внутри сетки.

Test A (необходимое условие сходимости).

$$K\hat{u} = \hat{f}$$



Это нарисован набор конечных элементов, а в нем узлы, КЭ ассемблированы.

Сначала рассматривается **необходимое условие правильности аппроксимации**. Нужно взять линейное решение задачи теории упругости – такое поле перемещений u , что выполняется:

$$\left. \begin{array}{l} u - \text{линейно} \\ \sigma(u) = \text{const} \\ \varepsilon(u) = \text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{находятся} \\ \text{узловые} \\ \text{перемещения} \end{array} \hat{u} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{делается} \\ \text{проверка} \end{array} \begin{array}{l} K\hat{u} = 0 \\ \hat{f} = 0 \end{array}$$

Конечные элементы должны быть построены так, чтобы линейное однородное состояние воспроизводилось точно.

Пояснение (в чем состоит смысл проверки).

Для этого блока элементов можно сформировать такое уравнение: $K\hat{u} = \hat{f}$.

У нас есть реальное уравнение теории упругости. Перемещения линейно зависят от координат. Деформации и напряжения считаются по закону Гука. Линейному полю перемещений соответствует постоянное поле напряжений и деформаций (в смысле однородные деформации) – однородное напряженное состояние. КЭ уравнения должны быть сделаны так, что однородное напряженное состояние они должны воспроизводить точно.

У нас есть точное решение однородной задачи. Мы проектируем это решение, заданное везде на всей этой области, на сетку узлов, берем значения в узлах, подставляем в уравнение $K\hat{u} = \hat{f}$, и мы должны получить справа ноль: $K\hat{u} = 0$. Потому что эти уравнения аппроксимируют уравнения 2-го порядка, а линейная функция, дважды продифференцированная, дает ноль. Если у нас поле перемещений – линейное, то никаких массовых сил быть не может. Массовые силы могут быть, если поле перемещений будет нелинейным.

В этом и состоит тест, что КЭ и теоретически, и практически должны быть построены так, что они это однородное состояние они воспроизводят точно. Это условие – необходимое для сходимости, потому что если оно не выполняется, то ни о какой сходимости речь идти не может. Но считать это условие достаточным для сходимости приближенного решения к точному нельзя.

Кажется, что это очевидное условие. В теоретическом смысле от него нет никакой пользы. А в практическом смысле – это проверка того, что программа написана правильно. **Это начальный тест, который проверяет, что программа точно воспроизводит очень простое линейное состояние перемещений.**

Но даже это бывает не всегда верно. Потому что если строить КЭ для **тонкостенных тел (оболочек)**, которые могут быть физически нелинейны, да еще при конечных деформациях, геометрически нелинейных, то запросто можно придумать такие КЭ, которые не только однородное напряженное состояние неправильно воспроизводят, а даже неправильно воспроизводят движение тела как жесткого целого. Может быть такая ситуация, что при перемещении этой оболочки как жесткого целого в ней возникают напряжения и деформации, но, возможно, маленькие. Поэтому этот тест – не такая уж банальная вещь.

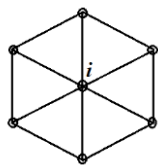
Если у нас линейная теория упругости, то в декартовых координатах это уравнение будет выполняться для любого размера элемента, шаг h не обязан никуда стремиться. Если будет **задача с переменными коэффициентами в криволинейных координатах**, то все становится совсем не очевидным, поэтому в книге Зенкевича это **условие ослабляется и требуется, чтобы это выполнялось не при любом размере КЭ, а при $h \rightarrow 0$** . Т.е. для конечного размера элемента это неверно, а для $h \rightarrow 0$ должно быть верно. $h \rightarrow 0$ ослабленный вариант теста

Но из ослабленного варианта теста не следует доказательства сходимости приближенного решения к точному.

Test B (проверка аппроксимации).

Test B мало отличается от Test A. Он формулируется так.

Есть какой-то шаблон, состоящий из КЭ, которые окружают какой-то узел i .



Краткое описание.

Для множества этих элементов шаблона можно написать КЭ уравнение:

$$K\hat{u} = \hat{f}$$

У нас есть какая-то правая часть f в уравнении теории упругости:

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i = 0$$

1) u берем (u можно брать сложную, нелинейную) \Rightarrow считаем f , чтобы это уравнение выполнялось. Тогда u становится решением этого уравнения с этой f .

Чем сложнее взять функцию u , тем будет более строгий тест.

2) f проектируем на сетку: $\hat{f} = (f)^h$. Получаем значение \hat{f} в узлах сетки.

Мы там вычисляем интеграл, как в МКЭ. Не просто берем значения в узлах. Можно интегралы посчитать, как все делается в вариационном уравнении.

3) Разбиваем конечно-разностное уравнение: $K\hat{u} = \hat{f}$ на части (одна с диагональной подматрицей, соответствующая i -му перемещению в середине шаблона; другая часть – все остальные члены):

$$K_{ii}\hat{u}_i + \sum_{j \neq i} K_{ij}\hat{u}_j = \hat{f}_i \quad ??? \quad \left(K_{ij}\hat{u}_i + \sum_{j \neq i} K_{ij}\hat{u}_j = \hat{f}_i \right)$$

$$\hat{u}_i = K_{ii}^{-1} \left(\hat{f}_i - \sum_{j \neq i} K_{ij}\hat{u}_j \right)$$

\uparrow неизвестно

\uparrow известно

Подставляем в это уравнение (систему) правую часть \hat{f}_i и значения \hat{u}_j в несредних узлах шаблона (полученные проектированием этого заданного u_i на сетку), а значение \hat{u}_i в среднем узле находим из решения этой системы.

Проверяется совпадение \hat{u}_i и u_i в середине шаблона при $h \rightarrow 0$.

$\hat{u}_i \rightarrow (u_i)^h$ при $h \rightarrow 0$ – так должно быть

Это проверка аппроксимации. Матрица $[K_{ii}]$ должна обращаться, она должна быть невырожденной.

Test B – это более сильная проверка по сравнению с Test A. **В этом тесте уже есть сходимость приближенного решения к точному. Главная сила этого теста в том, что эту проверку можно осуществить практически.**

Согласно тому, что изложено в Зенкевиче, считается, что Test B – более сложный. С помощью него не просто проверяется выполнение уравнения, а проверяется совпадение \hat{u}_i и u_i в середине. В чем разница по сравнению с тем, что мы во все члены этого уравнения поставили бы \hat{u}_i , взятое проектированием этого заданного u_i на сетку? В чем разница, что мы стали находить \hat{u}_i в середине? На самом деле разница есть. Одно дело подставить в уравнение и проверить, что оно выполняется. Опять же оно должно выполняться при $h \rightarrow 0$. Найденное таким образом \hat{u}_i при $h \rightarrow 0$ должно стремиться к проекции на сетку u_i , заданного вначале. Это **проверка аппроксимации**.

В том, что мы находим K_{ii}^{-1} , а не просто подставляем в то уравнение, все-таки есть некий смысл. **Матрица $[K_{ii}]$ должна обращаться, она должна оказаться невырожденной.** А во всяких ухищренных процедурах МКЭ она может быть и

вырожденная. Она не всегда такая хорошая. Поэтому, действительно, то, что мы находим решение, а не просто подставляем, это есть **более сильная проверка**.

Отсюда мы видим, что если требовать выполнения этого совпадения при $h \rightarrow 0$, то эта проверка аналогична проверке аппроксимации в теории разностных схем.

Но мы не можем сказать, с каким порядком h $|\hat{u}_i - (u_i)^h| \rightarrow 0$.

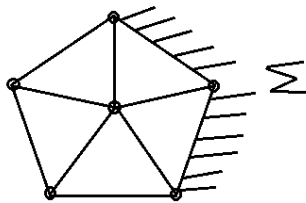
В книжке Зенкевича об этом речь не идет. То, что $h \rightarrow 0$, это проверка аппроксимации, но тут не выясняется порядок этой аппроксимации, с какой скоростью приближенное решение сходится к точному.

В этом тесте уже есть сходимости приближенного решения к точному. Главная сила этого теста в том, что это все можно осуществить практически. Если программа написана, то эти тесты – это одни из необходимых проверок того, что программа написана правильно и сами КЭ построены правильно.

Test C (проверка с учетом ГУ).

Проверяются граничные условия. В предыдущих тестах речь шла только об уравнениях, ГУ никак не были задействованы. Чтобы проводить Test C, надо взять шаблон из конечных элементов, чтобы они включали границу (граничные элементы).

Σ – реальная граница



$u: u|_{\Sigma} = 0$

Итак, формулируются не уравнения равновесия и движения, а ГУ. Сочиняется такая функция u , что $u|_{\Sigma} = 0$. В остальной области выполняется уравнение равновесия:

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i = 0$$

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{u} & & \hat{f} \end{array}$$

Дальше делается все то же самое. Берется функция u , считается правая часть f (чтобы это уравнение $(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i = 0$ выполнялось), потом проектированием на сетку строится \hat{u}_i и \hat{f}_i . Там, где ГУ, подставляются заданные граничные значения этой функции u ; там, где условия внутренние, подставляется то, что получено проекцией решения. Опять проверяется выполнение уравнения:

$$K\hat{u} = \hat{f} \text{ при } h \rightarrow 0$$

Опять проверяется аппроксимация, но только с учетом ГУ:

$$K\hat{u} \rightarrow \hat{f} \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ – так должно быть}$$

Это все похоже на исследование аппроксимации в разностных схемах.

Рассуждения обо всех этих Patch-тестах.

Если есть теория, которая доказывает наличие аппроксимации, то все эти тесты являются **достаточными условиями** тоже, только в том смысле, что теоретически ничего не доказывается. Эти тесты разумно проверять практически, насколько КЭ им удовлетворяют. Но все равно какая-нибудь теория должна быть, потому что сами тесты ничего не доказывают.

Основная идея этих тестов состоит в том, чтобы проверять наличие аппроксимации практически или теоретически. Можно это все делать на бумаге, а можно посчитать в реальной программе. Удобство тестов заключается в том, что можно практически посчитать.

Идея состоит в том, что **мы оперируем только с узлами сетки, фактически с конечно-разностными уравнениями**. Полученные уравнения мы трактуем исключительно, как в теории разностных схем. Есть узлы, есть правая часть в этих узлах, есть решение в этих узлах, и мы выясняем, имеет место быть или не быть аппроксимация. Недостаток в том, что более **глубоко здесь сходимость никак не исследуется**.

По существу речь идет о следующем. В этих тестах аппроксимация трактуется точно так же, как в теории разностных схем. **Эти тесты – это практическое и теоретическое исследование аппроксимации, но на языке разностных схем**. Здесь осуществляется уход от всей методологии МКЭ как вариационных задач и осуществляется возвращение к идеологии разностных схем.

Вспомним, что такое теория разностных схем, как там формулируется понятие аппроксимации. Потому что позже мы будем говорить, как математически, по-настоящему исследуется сходимость приближенного решения к точному в рамках вариационных задач Галеркина и Рунге. Там совершенно другая идеология и методология. Подумаем, почему здесь такая же методология исследования аппроксимации, которая имеет место в теории разностных схем.

20) Аналогия с исследованием аппроксимации разностных схем. (Л11)

Основная идея **Patch-тестов** состоит в том, чтобы проверять наличие аппроксимации практически или теоретически. Удобство тестов заключается в том, что можно практически посчитать.

Идея состоит в том, что мы оперируем только с узлами сетки, фактически с конечно-разностными уравнениями. Полученные уравнения мы трактуем исключительно, как в теории разностных схем. Есть узлы, есть правая часть в этих узлах, есть решение в этих узлах, и мы выясняем, имеет место быть или не быть аппроксимация. Недостаток в том, что более глубоко здесь сходимость никак не исследуется.

Эти тесты – это практическое и теоретическое исследование аппроксимации, но на языке разностных схем. Здесь осуществляется уход от всей методологии МКЭ как вариационных задач и осуществляется возвращение к идеологии разностных схем.

Вспомним, как формулируется понятие аппроксимации в теории разностных схем.

Аналогия с исследованием аппроксимации разностных схем.

Старое (традиционное) определение аппроксимации:

$$Au = f \rightarrow A^h u^h = f^h \quad (K\hat{u} = \hat{f})$$

$$A^h(u)^h - (Au)^h = r^h$$

Если $r^h = O(h^k)$, где $k > 1$, то это аппроксимация.

k зависит от гладкости u .

Пояснение. У нас есть уравнение: $Au = f$. И каким-то образом мы поставили ему в соответствие уравнение: $A^h u^h = f^h$. Оно является полным аналогом уравнения: $K\hat{u} = \hat{f}$. Это просто разные обозначения.

Что называется тогда **аппроксимацией** с точки зрения **теории разностных схем**?
Надо вычислить такую разность:

$$A^h(u)^h - (Au)^h = r^h$$

r^h – это функция, она вычисляется в узлах. (Обратим внимание на то, что в тестах шла речь только о вычислениях в узлах.) Получается, что **аппроксимация есть, если эта функция есть $r^h = O(h^k)$, где $k > 1$.** Вот что такое аппроксимация.

Здесь **k зависит от гладкости функции u .** Если сюда поставить негладкую функцию, то k будет не больше 1, и аппроксимации не будет. Поэтому если мы говорим про аппроксимацию, то мы должны говорить про гладкость этой функции u .

Вспомним, как практически используется аппроксимация базовых схем. Как она исследовалась?

Пример.

A – это одномерный оператор Лапласа

$$Au = \Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$A^h = \Delta^h = \partial_i^+ \partial_i^- \quad (\text{разностный оператор в узле } i)$$

Разностный оператор A^h от проекции на сетку какой-то гладкой функции $(u)^h$:

$$A^h(u)^h = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$r^h = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - u''(x_i) \quad (&)$$

Эта величина r^h должна быть порядка h^k ($r^h = O(h^k)$).

Для **гладкой функции**:

$k = 2$ (аппроксимация 2-го порядка).

Как показать, что $r^h = O(h^2)$? Мы предполагаем, что u – достаточно гладкая функция, и раскладываем ее в **ряд Тейлора**:

$$u(x_{i\pm 1}) = u(x_i) \pm hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) \pm \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{IV}(x_i) + \dots$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{IV}(x_i) + \dots$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{IV}(x_i) + \dots$$

Подставим это разложение в (&):

$$\begin{aligned} r^h &= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - u''(x_i) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{12}u^{IV}(x_i) + \dots - 2u(x_i) \right) - u''(x_i) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i) = O(h^2) \end{aligned}$$

В разностных схемах мы исследовали аппроксимацию разложением в ряд Тейлора. По существу, это действие можно совершенно эквивалентно переформулировать так.

Мы подставляли функцию u в следующем виде:

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)u'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{6}u'''(x_i) + \frac{(x - x_i)^4}{24}u^{IV}(x_i) + \dots$$

Т.е. то, что мы там писали, – **это эквивалентно тому, что мы функцию u брали в виде такого многочлена, который взят из четырех членов ряда Тейлора**. Т.е. мы исследовали аппроксимацию с помощью многочленов, которые получаются из некоторого числа первых членов ряда Тейлора. Последний член как раз приводит к функции r^h (к ошибке аппроксимации):

$$r^h = \frac{(x - x_i)^4}{12}u^{IV}(x_i)$$

А если подставлять первые четыре члена (многочлены 0-й, 1-й, 2-й, 3-й степени), то это равенство выполняется точно:

$$A^h(u)^h - (Au)^h = 0 \quad (*)$$

Первые четыре члена просто удовлетворяют этому уравнению, а 5-й дает r^h . Тогда мы можем прийти к **новому определению аппроксимации**, из которого наше традиционное определение аппроксимации будет следствием.

Новое определение аппроксимации:

Для какого-то начального числа полиномов \mathbf{m} равенство $A^h(u)^h - (Au)^h = 0 \quad (*)$ выполняется точно (т.е. разностный оператор от проекции функции на сетку и проекция на сетку дифференциального оператора от этой функции дают одно и то же для начального числа \mathbf{m} полиномов).

Так вот **аппроксимацией можно называть тот факт, что до какой-то степени \mathbf{m} эти равенства получаются точные** (не только при $h \rightarrow 0$).

Теперь возникает вопрос: как это m связано с порядком аппроксимации? Давайте покажем, что из нового определения аппроксимации старое просто следует.

Пример $m = 3$.

В примере, который мы рассматривали $m = 3$. До полиномов 3-й степени это равенство (*) будет выполняться точно (т.е. оно будет выполняться точно 4 раза).

Будем считать, что это **новое определение** верно: «Для какого-то начального числа полиномов равенство $A^h(u)^h - (Au)^h = 0$ выполняется точно». (В **Patch-тестах**: для линейных полиномов это равенство должно было выполняться точно. Понятно, что это условие не является достаточным.) Теперь из этого определения выведем традиционное.

Как его можно получить? Берем решение u в виде этого ряда.

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)u'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2}u''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{6}u'''(x_i) + \\ + \frac{(x - x_i)^4}{24}u^{IV}(x_i) + \dots = \underbrace{P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_{m-1}(x)}_{u_{m-1}} + R_m(x)$$

Обозначили:

$$u_{m-1} = P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_{m-1}(x)$$

$R_m(x)$ – полином m -й степени от x .

Что тогда такое определение нам говорит?

$$A^h(u)^h = \underbrace{A^h(P_0)^h}_{(AP_0)^h} + \underbrace{A^h(P_1)^h}_{(AP_1)^h} + \dots + \underbrace{A^h(P_{m-1})^h}_{(AP_{m-1})^h} + A^h(R_m)^h = (Au_{m-1})^h + A^h(R_m)^h \quad (**)$$

$A^h(P_0)^h$ – разностный оператор A^h , вычисленный от проекции на сетку полинома 0-ой степени P_0 и т.д. Все эти члены есть в точности то же самое, что и $(AP_0)^h$, т.е. A от P_0 в проекции на сетку.

Здесь мы пользуемся тем, что для начальных полиномов верно это равенство.

Саму функцию u можно представить как сумму u_{m-1} и ошибки R_m :

$$u = u_{m-1} + R_m$$

$$Au = Au_{m-1} + AR_m$$

Потом все это можно спроектировать на сетку.

$$(Au)^h = (Au_{m-1})^h + (AR_m)^h \quad (***)$$

Подставим (***) в (**), получим:

$$A^h(u)^h = (Au)^h - (AR_m)^h + A^h(R_m)^h$$

$$A^h(u)^h - (Au)^h = \underbrace{A^h(R_m)^h - (AR_m)^h}_{r^h = O(h^k)}$$

Старое определение аппроксимации состояло в том, что эта разность должна быть:

$$\underbrace{A^h(R_m)^h - (AR_m)^h}_{r^h} = r^h = O(h^k)$$

Это означает, что если новое определение принять за определение аппроксимации, то отсюда возникает связь с традиционным определением аппроксимации.

В **Patch-тестах** пишут про 1-ю степень. Но можно и для большей степени потребовать, что дифференциальный оператор и разностный оператор дают одно и то же.

Степень m – это та степень полинома, для которого нет равенства. Т.е. начиная с полиномов степени m есть разница в следующих действиях:

- 1) полином сначала спроектировать на сетку и от него вычислить разностный оператор,
- 2) сначала вычислить дифференциальный оператор, а потом спроектировать на сетку.

Для нашего одномерного примера $m = 4$. Здесь $(R_m)^h$ – полином 4-й степени (в него входят члены порядка h^4), а A^h – это оператор, где есть деление на h^2 . Поэтому мы получаем $k = 2$. (Если у нас дифференциальный оператор степени: $l = 2$, то вторая разностная производная получается делением на h^2 .)

Получили формулу: $k = m - l$

m – степень полинома, начиная с которой не выполняется равенство $A^h(u)^h - (Au)^h = 0$
 l – порядок дифференциального оператора, k – порядок аппроксимации

Эта формула показывает, как связаны m , которая определяет аппроксимацию в новом определении, и k , которая определяет аппроксимацию в традиционном определении.

Этими рассуждениями мы хотим показать, что в Patch-тесте есть такие теоретические основы (в тесте проверяются линейные функции). Эти основы в том и состоят, что если мы покажем, что эта разность равна точно нулю для полиномов первых 4-х степеней, то тогда $m = 4$, и тогда отсюда следует старое определение. Тогда строго математически (а не просто в виде проверки уже готовых программ) мы получаем, что аппроксимация действительно будет 2-го порядка. Это уже есть **математическое исследование**.

Но Зенкевич пишет в своей книжке не для полиномов 3-й степени, а для линейных полиномов (константы и 1-й степени). А чтобы получить аппроксимацию 2-го порядка, нужны еще полиномы 2-го и 3-го порядка. Поэтому отсюда следует, что **то, что написано в книге Зенкевича, никак не может служить достаточным условием аппроксимации, а является только необходимым**. А чтобы оно достаточным было, надо проверять до четырех полиномов.

Это есть некая теория, которая стоит за **Patch-тестами**.

Отсюда дальше следует: если аппроксимация есть, она исследуется точно в духе теории разностных схем. Здесь нет ничего от пространства функций. Здесь есть только пространство сеточных функций. И вся теория полностью построена на идеологии разностных схем.

Можно так делать, но здесь выплескивается все, что свойственно именно МКЭ и чего нет в теории разностных схем. В следующий раз мы будем рассматривать совершенно другую идеологию, другую методологию, как надо доказывать сходимость приближенного решения к точному уже не через узлы сетки и не через разложение в ряд Тейлора. В следующий раз мы будем доказывать сходимость приближенного решения к точному так, как это делается, согласно методологии МКЭ.

Идеология, которая используется в МКЭ, совершенно не такая, как в теории разностных схем. Но эта идеология работает не всегда. В тонкостенных телах в виде пластин и оболочек не работает классическая идеология и методология МКЭ. И тогда переходят обратно на идеологию теории разностных схем. КЭ для пластин и оболочек строятся таким образом, что часть энергии упругой деформации аппроксимируется согласно идеологии МКЭ, а другая часть аппроксимируется по методике разностных схем. Но мы пока будем изучать классический МКЭ, где все будет строго и очень красиво.

21) Сходимость приближенного решения к точному для метода Галеркина (теорема Сеа). (Л12)

Докажем, что если выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма (которые обеспечивают существование и единственность решения), то приближенное решение сходится к точному.

Есть вариационная задача, которая существует в двух видах:

1) $a(u, v) = l(v)$ вариационное уравнение (Метод Галеркина)

2) $L(v) = \frac{1}{2} \underbrace{a(v, v)}_{a(v)} - l(v)$ функционал Лагранжа (Метод Ритца)

$(u = \arg \min_{v \in H} L(v); \quad L(u) \leq L(v) \quad \forall v \in H)$

1) \Leftrightarrow 2) $\Leftarrow a(u, v) = a(v, u)$

Задача 2 существует только в том случае, если функционал $a(u, v)$ – симметричен.

Мы рассматриваем симметричный случай, потому что в МДТТ большинство задач удовлетворяет этому случаю. Теория упругости – это самый простой случай, когда $a(u, v)$ – симметричный функционал.

Эти задачи имеют решение и притом оно единственное при следующих условиях.

Условия теоремы Лакса-Мильграма:

а) $a(v) \geq \delta \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$, где $\delta > 0$

Коэрцитивность, положительная определенность, сильная эллиптичность.

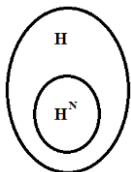
б) $a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$

Ограниченность, непрерывность.

Эти условия не только обеспечивают существование и единственность решения, а они еще обеспечивают сходимость приближенного решения к точному.

1) Метод Галеркина.

Мы будем решать приближенно методом КЭ (методом Галеркина) задачу 1. Метод состоит в том, что мы находим такое пространство H^N , которое точно находится в пространстве H , и ищем приближенное решение – функцию u^N такую, что она удовлетворяет уравнению $a(u^N, v^N) = l(v^N) \quad \forall v^N \in H^N$.



$H^N \subset H$

$u^N: a(u^N, v^N) = l(v^N) \quad \forall v^N \in H^N$

Приближенным решением u^N (приближением u) задачи 1 является функция u^N , которая является решением того же вариационного уравнения, но в меньшем пространстве. И в этом состоит метод Галеркина. А МКЭ – это частный случай метода Галеркина, в котором пространство H^N строится специальным образом.

Нужно доказать, что $u^N \rightarrow u$ при $N \rightarrow \infty$

Доказывать мы будем так. Пусть выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма а) и б). Тогда при $N \rightarrow \infty$ $u^N \rightarrow u$.

Теорема Сеа.

Если выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма а) и б), верно неравенство:

$$\|u - u^N\|_H \leq \frac{M}{\delta} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

Доказательство:

Рассмотрим исходную задачу:

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H$$

Возьмем $v = v^N \quad \forall v^N \in H^N$. (Мы вправе взять любую функцию из внутреннего пространства.)

$$\Rightarrow a(u, v^N) = l(v^N)$$

$$\text{Кроме того, } a(u^N, v^N) = l(v^N) \quad \forall v^N \in H^N$$

Т.е. если мы берем пробную функцию из H^N , то у нас имеются два таких равенства. Вычтем эти равенства (второе из первого), получим:

$$a(u - u^N, v^N) = 0$$

Если a понимать как некое скалярное произведение, то это условие интерпретируется так: **$(u - u^N)$ ортогональна любой функции v^N из пространства H^N .** Эту ортогональность мы будем использовать при доказательстве теоремы.

$$\Rightarrow u - u^N \text{ ортогональна } v^N \quad \forall v^N \in H^N$$

$$\begin{aligned} \|u - u^N\|_H^2 &\leq \frac{1}{\delta} a(u - u^N, u - u^N) = \frac{1}{\delta} \left[a(u - u^N, u - v^N) + \underbrace{a(u - u^N, v^N - u^N)}_{=0, \text{ т.к. } v^N - u^N \in H^N} \right] = \\ &= \frac{1}{\delta} a(u - u^N, u - v^N) \leq \frac{M}{\delta} \|u - u^N\|_H \|u - v^N\|_H \end{aligned}$$

Здесь мы использовали условие а) коэрцитивности (1-е \leq), линейность функционала a по каждому из аргументов (2-е $=$), ортогональность $\forall v^N \in H^N$ разности $(u - u^N)$ (3-е $=$), условие б) ограниченности (4-е \leq).

Норма из гильбертова пространства H , в котором сформулирована задача.

Итак, мы получили:

$$\|u - u^N\|_H^2 \leq \frac{M}{\delta} \|u - u^N\|_H \|u - v^N\|_H$$

Какие теперь варианты возможны?

Либо $u = u^N$, и тогда сходимость доказана, либо мы можем сократить на $\|u - u^N\|_H$:

$$\|u - u^N\|_H \leq \frac{M}{\delta} \|u - v^N\|_H \quad \forall v^N \in H^N$$

Теперь этому неравенству надо придать правильный и очень глубокий смысл. Если это неравенство верно для $\forall v^N \in H^N$, то мы можем написать $\leq \inf$. И дальше, поскольку H – гильбертово, следовательно, оно полное по определению, то $\inf = \min$.

$$\Rightarrow \|u - u^N\|_H \leq \frac{M}{\delta} \inf_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H = \frac{M}{\delta} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

Мы доказали теорему Сеа.

Напоминание.

Опр. Нормированное линейное пространство называется **полным**, если любая последовательность Коши $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Опр. Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **последовательностью Коши** (или **фундаментальной посл-тью**), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Опр. Последовательность точек x_n **сходится** к точке x :

$$x_n \rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

если $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow \|x - x_n\| < \varepsilon$.

Рассуждения, зачем нужно это неравенство.

Мы вправе сказать, что никакой сходимости мы еще не доказали. Мы не доказали, что $v^N \rightarrow u$. Но мы доказали очень важную вещь. Мы доказали, что разность между приближенным решением и точным не хуже, чем минимум разности точного решения и любой функции из конечномерного пространства. Т.е. **это неравенство дает инструмент, как можно доказывать сходимость приближенного решения к точному**. v^N – любая функция. Нам надо подобрать такую функцию v^N , чтобы она была достаточно близка к u . И если мы подберем такую функцию, то тем самым мы докажем сходимость, потому что эта разность, которая нужна для сходимости, будет еще меньше (в силу теоремы Сеа).

Следовательно, сходимость сведена к вопросу аппроксимации функций из H функциями из H^N . Правая часть $(\frac{M}{\delta} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H)$ неравенства отвечает на вопрос, насколько любая функция u из H может быть хорошо аппроксимирована функциями v^N из H^N . Т.е. насколько малое конечномерное пространство, которое находится внутри H , хорошо аппроксимирует большое исходное бесконечномерное пространство.

Согласно теореме Сеа, сходимость автоматически следует из аппроксимации. А аппроксимация здесь понимается не как в теории разностных схем, это не аппроксимация в узлах сетки. Раньше мы рассуждали о том, насколько разностные уравнения, получаемые МКЭ, хорошо или плохо аппроксимируют в узлах исходные уравнения. А здесь про узлы речь вообще не идет. Речь идет об аппроксимации пространства H конечномерным подпространством H^N . Здесь используется совершенно другая математика.

Позже рассмотрим, насколько пространство кусочно-линейных функций (в случае самых простых треугольных КЭ) хорошо аппроксимирует исходное пространство H .

Замечание.

Мы получили неравенство, пользуясь исключительно постановкой Галеркина. Обратим внимание, что здесь возник такой коэффициент $\frac{M}{\delta}$.

Это неравенство из теоремы Сеа верно для несимметричного функционала $a(u, v)$. Мы здесь не ставили условие: $a(u, v) = a(v, u)$.

Дальше мы проведем аналогичное доказательство в том случае, если у нас используется метод Рунге.

22) Сходимость приближенного решения к точному для метода Ритца. (Л12)

Докажем, что если выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма (которые обеспечивают существование и единственность решения), то приближенное решение сходится к точному.

Есть вариационная задача, которая существует в двух видах:

1) $a(u, v) = l(v)$ вариационное уравнение (Метод Галеркина)

2) $L(v) = \frac{1}{2} \underbrace{a(v, v)}_{a(v)} - l(v)$ функционал Лагранжа (Метод Ритца)

$(u = \arg \min_{v \in H} L(v); \quad L(u) \leq L(v) \quad \forall v \in H)$

1) \Leftrightarrow 2) $\Leftrightarrow a(u, v) = a(v, u)$

Задача 2 существует только в том случае, если функционал $a(u, v)$ – симметричен.

Мы рассматриваем симметричный случай, потому что в МДТТ большинство задач удовлетворяет этому случаю. Теория упругости – это самый простой случай, когда $a(u, v)$ – симметричный функционал.

Эти задачи имеют решение и притом оно единственное при следующих условиях.

Условия теоремы Лакса-Мильграма:

а) $a(v) \geq \delta \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$, где $\delta > 0$

Коэрцитивность, положительная определенность, сильная эллиптичность.

б) $a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$

Ограниченность, непрерывность.

Эти условия не только обеспечивают существование и единственность решения, а они еще обеспечивают сходимость приближенного решения к точному.

Мы уже доказали теорему Сеа для случая постановки задачи в форме метода Галеркина (вопрос 21), когда $a(u, v)$ может быть несимметричным функционалом, т.е. когда $a(u, v) \neq a(v, u)$. В этом случае теорема Сеа формулировалась следующим образом.

Теорема Сеа (для постановки вариационной задачи в форме метода Галеркина).

Если выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма а) и б), верно неравенство:

$$\|u - u^N\|_H \leq \frac{M}{\delta} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

Теперь мы проведем аналогичное доказательство в том случае, если у нас используется метод Ритца.

Метод Ритца.

Пусть $a(u, v) = a(v, u)$.

$\Rightarrow \exists$ функционал Лагранжа $L(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v)$

Пусть выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма а) и б).

Тогда верно неравенство:

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

Доказательство:

$$\|u - u^N\|_H^2 \leq \frac{1}{\delta} a(u - u^N, u - u^N)$$

Здесь мы использовали условие а) коэрцитивности.

Будем использовать при док-ве факт \exists функционала Лагранжа (3-е =), билинейность и симметричность функционала a (1-е =).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(u - u^N, u - u^N) &= \frac{1}{2} a(u, u) - a(u, u^N) + \frac{1}{2} a(u^N, u^N) = \\ &= \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} a(u^N, u^N) - l(u^N) = \frac{1}{2} a(u, u) + L(u^N) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} a(u, u) + L(v^N) = \frac{1}{2} a(u - v^N, u - v^N) \end{aligned}$$

$$\forall v^N \in H^N$$

$$u - \text{решение} \Rightarrow a(u, u^N) = l(u^N) \quad (2\text{-е} =)$$

$$L(u^N) = \frac{1}{2} a(u^N, u^N) - l(u^N) \quad (3\text{-е} =)$$

Мы знаем про u^N , что это приближенное решение в конечномерном пространстве H^N . Следовательно, оно минимизирует функционал Лагранжа. $\Rightarrow L(u^N) \leq L(v^N) \quad \forall v^N \in H^N$ (4-е \leq).

Если теперь проделать все аналогичные выкладки в обратную сторону, то получим последний член (5-е =).

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a(u - u^N, u - u^N) \leq \frac{1}{2} a(u - v^N, u - v^N) \quad \forall v^N \in H^N$$

Другая запись ($a(v, v) = a(v)$):

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a(u - u^N) \leq \frac{1}{2} a(u - v^N) \quad \forall v^N \in H^N$$

Это неравенство перепишем таким образом.

Введем в пространстве H энергетическую норму:

$$\|v\|_E^2 = a(v) = a(v, v)$$

Квадратичный функционал от v можно принять за норму, когда выполнены условия коэрцитивности и ограниченности. Можно ввести новое энергетическое пространство: H_E – то же самое множество функций, которое было раньше в пространстве H , но с этим новым скалярным произведением: $(u, v)_E = a(u, v)$

Тогда множество функций $u, v \in H$ с этим новым скалярным произведением образует новое пространство H_E , которое называется **энергетическим пространством**.

Поэтому очень часто в литературе по математической физике этот квадратичный функционал называется **энергией**. Энергия – это чисто физическая величина. Если это вариационная задача а), построенная из теории упругости, то это **упругая энергия**. Если это вариационная задача а), построенная исходя из уравнения Лапласа, то это может быть, например, энергия натянутой мембраны. А математически так определяется энергетическое пространство. Математически это обобщение реальных физических энергий.

Можем теперь полученное неравенство переписать по-другому:

$$a(u - u^N) \leq a(u - v^N) \Rightarrow \|u - u^N\|_E^2 \leq \|u - v^N\|_E^2$$

А в этой норме можем переписать так:

$$\Rightarrow \|u - u^N\|_E \leq \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_E$$

Получили аналогичное неравенство, которое было в методе Галеркина, но здесь оно написано в какой-то новой норме. А не можем ли мы перейти в старую норму? Естественно, можем. Но для этого надо использовать неравенства а) и б) – коэрцитивность и ограниченность.

Итак, перейдем в старую норму, используя условия теоремы Лакса-Мильграма а) и б).

$$\|u - u^N\|_H^2 \leq \frac{1}{\delta} a(u - u^N, u - u^N) \leq \frac{1}{\delta} \min_{v^N \in H^N} a(u - v^N, u - v^N) \leq \frac{M}{\delta} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H^2$$

Здесь мы использовали условие а) коэрцитивности (1-е \leq), **только что доказанное неравенство** (2-е \leq), условие б) ограниченности (3-е \leq). Мы вернулись к исходной норме в пространстве H .

Теперь мы можем извлечь квадрат.

$$\Rightarrow \|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

В симметричной задаче $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ (метод Ритца), а в несимметричных $\frac{M}{\delta}$ (метод Галеркина). Следовательно, в симметричных задачах точность выше.

В неравенствах коэрцитивности и ограниченности считают, что M – это большая величина, а δ – это малая величина. Если мы докажем, что можно подобрать такую v^N , что она близка к u , то решение, приближенное к точному, будет хуже, потому что оно умножается на этот множитель $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$. И если этот множитель большой, то оценка ухудшается для точности решения. Этот множитель заведомо больше, чем 1.

От чего зависят M и δ ? Они зависят от других констант. И чем хуже задача упругости (например, анизотропная или если коэффициент Пуассона к $\frac{1}{2}$ приближается, когда эллиптичность теряется), тем больше будет этот множитель. В случае приближения к нижней границе, этот множитель вообще уходит в бесконечность. Поэтому этот множитель играет роль для точности реальных численных решений, получаемых МКЭ. Эта оценка говорит, что чем задача теории упругости хуже (хуже ее упругие свойства), тем точность решения будет ниже. Поэтому тот факт, что здесь имеется корень $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ – это лучше. Если число большое, то корень из этого числа – это лучше, чем само число.

Другими словами, мы получили такой результат, что в симметричных задачах точность выше, чем в несимметричных задачах. Даже здесь проглядывает такая мысль, что симметричные задачи лучше, легче для решения.

Мы доказали теорему Сеа в случае метода Ритца.

Дальше мы оценим $\|u - v^N\|_H$ для простого одномерного случая.

23) Доказательство сходимости приближенного решения вариационной задачи к точному в одномерном случае. (Л12)

Оценим $\|u - v^N\|_H$ для простого одномерного случая.

Мы доказали **теорему Сеа**:

Пусть выполняются условия теоремы Лакса-Мильграма а) и б):

а) $a(v) \geq \delta \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$, где $\delta > 0$

Коэрцитивность, положительная определенность, сильная эллиптичность.

б) $a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$

Ограниченность, непрерывность.

Тогда верно неравенство:

1) в случае метода Галеркина:

$$\|u - u^N\|_H \leq \frac{M}{\delta} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

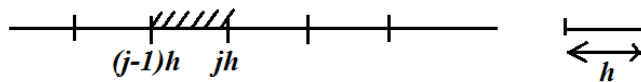
2) в случае метода Рунта

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

Теперь задача состоит в том, чтобы подобрать такую хорошую функцию v^N , чтобы она хорошо приближала u . Если мы это сумеем сделать, тогда мы получим оценку и на левую часть. Будем рассматривать одномерный пример для простоты.

Пример 1D

У нас есть сетка:

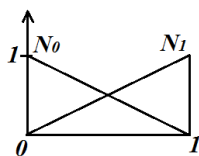


Рассматриваем КЭ, находящийся между узлами $(j-1)h$ и jh .

h – длина одномерного КЭ

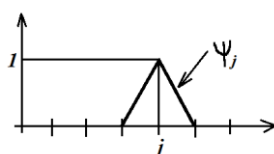
Мы рассматриваем самую простую аппроксимацию – кусочно-линейными функциями. На этом КЭ – узлы 0 и 1, и будут такие базисные функции – N_0 и N_1 . Они равны 1 в своих узлах.

Так выглядят **базисные функции** этого пространства H^N :



↑ конечный элемент

А на всем отрезке:



Базисная функция $\psi_j = 1$ в своем узле j и $\psi_j = 0$ во всех остальных узлах.

С помощью таких функций строится пространство H^N .

$$x_j = jh$$

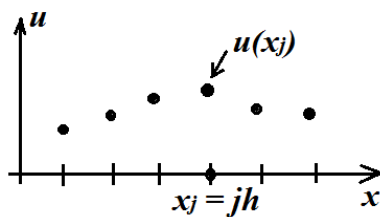
Любая функция v^N , принадлежащая H^N , раскладывается по базисным функциям:

$$\forall v^N \in H^N \quad v^N(x) = \sum_j C_j \psi_j(x), \quad C_j = v^N(x_j)$$

Причем C_j – это в точности значение функции v^N в узле x_j .

Это одномерная кусочно-линейная аппроксимация. И для нее мы хотим получить оценку правой части неравенства из теоремы Сеа. Таким образом, нам надо оценить норму $\|u - v^N\|_H$. Надо выбрать v^N такую, чтобы она хорошо приближала u и была из пространства кусочно-линейных функций.

Итак, пусть у нас есть функция u – решение исходной задачи. Мы знаем значения функции u в узлах сетки: $u(x_j)$. Будем предполагать, что функция u обладает нужной гладкостью.



Выберем в качестве функции v^N функцию – линейный интерполянт u_I функции u (это линейная интерполяция по значениям функции u в узлах x_j):

$$v^N = u_I, \text{ где}$$

$$u_I = \sum_j u(x_j) \psi_j$$

(кусочно-линейная интерполяция)

Замечание.

$u_I \neq u^N$, несмотря на то, что $u^N, u_I \in H^N$.

Отметим, что линейный интерполянт u_I , которым можно интерполировать функцию u (точное решение задачи), ни в коем случае не есть u^N . У нас имеет место тот факт, что $u^N, u_I \in H^N$ – принадлежат пространству кусочно-линейных функций. Но, несмотря на это, они – разные функции. **Приближенное решение задачи u^N вовсе не обязано совпадать в узлах с точным решением u .** Поэтому этот линейный интерполянт u_I и приближенное решение u^N – это разные функции, хотя они обе из одного и того же пространства H^N .

Дальше предлагается использовать эту функцию u_I (линейный интерполянт) в качестве функции v^N , оценить такую норму: $\|u - u_I\|_H$ и показать, что она достаточно мала. И тогда получится оценка и для разности $\|u - u^N\|_H$. Т.е. оценим норму $\|u - u_I\|_H$, а потом воспользуемся уже доказанным неравенством из теоремы Сеа:

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - u_I\|_H$$

Нам надо, чтобы $\|u - u_I\|_H \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. И надо оценить, с каким порядком относительно h .

Сначала оценим норму $\|u - u_I\|_H$ в более сильном предположении, чем требует вариационная постановка задачи.

Введем функцию $\Delta = u - u_I$ и будем оценивать эту разность в предположении, что $\max_{x \in [x_{j-h}, x_j]} |u''|$ – ограничен.

Мы будем считать, что вторая производная существует, непрерывна и ограничена. Это не соответствует вариационной постановке, потому что в вариационной постановке все нормы интегральные, а тут мы считаем, что $\max_{x \in [x_{j-h}, x_j]} |u''|$ ограничен. Это более сильное предположение относительно решения u . Но на самом деле все решения, которые практически ищутся, имеют непрерывные и ограниченные вторые производные, кроме каких-то отдельных линий, точек или поверхностей, где происходят разрывы модуля упругости. В обычных точках они такие и есть при тех нагрузках, которые реально в механике существуют. Может быть, это математически слишком сильное требование, а механически это вполне естественно. Позже мы докажем и при более слабых ограничениях.

У нас есть отрезок $[x_j - h, x_j]$. Эта функция $\Delta = u - u_I$ обладает таким свойством: $\Delta = 0$ на концах отрезка (в узлах).

$$\begin{array}{c} \Delta = 0 \qquad \qquad \qquad \Delta = 0 \\ | \qquad \qquad \qquad \bullet \qquad \qquad \qquad | \\ x_{j-1} \qquad \qquad \qquad x_* \qquad \qquad \qquad x_j \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists x_* : \Delta'(x_*) = 0$$

На отрезке $[x_j - h, x_j]$ функция Δ дифференцируема. Если она равна нулю на краях, значит, внутри отрезка есть точка, в которой производная равна нулю (теорема Ролля).

$$\Delta'(x) = \int_{x_*}^x \Delta''(x) dx = \int_{x_*}^x u''(x) dx \quad (*)$$

Потому что $\Delta'(x_*) = 0$. И тут в рамках того предположения, что функция u – дважды непрерывно дифференцируема, происходит некий важный момент.

$$\Delta = u - u_I$$

u_I – линейный интерполант, это линейная функция на этом отрезке. Следовательно, ее вторая производная равна нулю.

$$\Rightarrow u_I'' = 0, \quad x \in [x_j - h, x_j] \Rightarrow \Delta'' = u'' - u_I'' = u''$$

Делая это сильное предположение относительно u'' (ограниченность $\max_{x \in [x_{j-h}, x_j]} |u''|$), мы можем получить такое сильное неравенство:

$$\Rightarrow \forall x \quad |u'(x) - u_I'(x)| \leq h \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |u''|$$

Поскольку $|x - x_*| < h$. Это оценка интеграла (*).

А поскольку здесь написано для $\forall x$, то мы можем написать и так.

$$\Rightarrow \max_{[x_{j-1}, x_j]} |u' - u_I'| \leq h \max_{[x_{j-1}, x_j]} |u''| \quad (**)$$

$$\text{Здесь } \Delta' = u' - u_I'.$$

Выводы:

- 1) Мы получили оценку при достаточно сильном предположении, что $\max_{x \in [x_{j-h}, x_j]} |u''|$ ограничен (хотя во всех нормальных задачах механики это условие выполняется, за исключением каких-то отдельных точек, линий или поверхностей).
- 2) Мы оценили в сильной норме – поточечно. Норма \max – это значит в каждой точке, для каждого x – поточечная оценка.
- 3) Это неравенство (**) оценивает разность функции и интерполанта этой функции для производных. Это хорошая оценка, потому что **неравенство для производных** в механике даже более важно, чем неравенство для самих функций, потому что производные – это деформации и напряжения, а сами функции – это перемещения, которые часто играют гораздо меньшую роль, чем напряжения и деформации. И видно, что это неравенство (**) имеет первый порядок относительно h . Т.е. **относительно производных точность будет первого порядка**.

Теперь нужно получить оценку для самой функции $|u - u_I|$. Для этого будем рассуждать так. У нас где-то есть середина отрезка. Пусть x_* находится правее середины отрезка.

Разложим в ряд Тейлора:

$$\underbrace{\Delta(x_j)}_{=0} = \underbrace{\Delta(x_*)}_{=0} + \frac{(x_j - x_*)^2}{2} \Delta''(x_*) + \bar{o}(x_j - x_*)^2 \quad (***)$$

$(\bar{o}(h^2))$

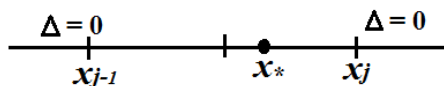
$$\Delta(x_j) = 0 \text{ – в узлах } \Delta = 0$$

$$\Delta'(x_*) = 0 \text{ – так выбиралось } x_*$$

$$\max_{[x_{j-1}, x_j]} |\Delta| = |\Delta(x_*)| \quad (****)$$

Максимум модуля функции Δ достигается там, где производная равна нулю, т.е. в x_* . Следовательно, мы имеем полное право оценивать этот максимум $\max_{[x_{j-1}, x_j]} |\Delta|$ в точке x_* . А у нас в (***) $\Delta(x_*)$ выражено через вторую производную. Из (***) следует:

$$|\Delta(x_*)| \leq \frac{1}{2} (x_j - x_*)^2 \max_{[x_{j-1}, x_j]} |\Delta''|$$



Если x_* находится в правой половине отрезка (это наблюдение позволяет получить более точную оценку), то получим:

$$\Rightarrow |x_j - x_*| \leq \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow |\Delta(x_*)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{[x_{j-1}, x_j]} |u''|$$

Окончательно получаем оценку для разности $|u - u_I|$ функции u и ее интерполанта u_I в сильной норме, комбинируя неравенство с равенством (****):

$$\max_{[x_{j-1}, x_j]} |u - u_I| \leq \frac{h^2}{8} \max_{[x_{j-1}, x_j]} |u''|$$

$$\max_{[x_{j-1}, x_j]} |u' - u'_I| \leq h \max_{[x_{j-1}, x_j]} |u''|$$

Мы получили, что разность производных и разность самих функций ведут себя по-разному относительно h , но они $\rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Близость самих функций лучше, так как она порядка h^2 , а близость производных порядка h . Так бывает всегда, для всех конечно-разностных или конечно-элементных аппроксимаций.

Что нетипично по сравнению с теорией разностных схем? Прошлый раз мы проделали анализ аппроксимаций с точки зрения разложения в ряды Тейлора, и там стояла четвертая производная. А здесь вторая. Даже хотя мы еще не дошли до конца всей этой теории, но уже получается такой результат, который дает более сильные оценки. **В теории разностных схем, чтобы получить второй порядок аппроксимации ($\sim h^2$), требовалось предположение об ограниченности и непрерывности четвертой производной, а здесь второй.** Т.е. требование на гладкость функции для получения одного и того же неравенства здесь существенно ниже. В следующий раз будет еще ниже.

Теперь оценим $\|u - u^N\|_H$. У нас было неравенство (теорема Сеа):

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \|u - u_I\|_H, \quad H = W_2^1$$

$$u_I \leftrightarrow v^N$$

Норма в пространстве H для задач теории упругости – это пространство Соболева (пространство функций, интегрируемых с квадратом производной). Поскольку и для самой функции, и для производной у нас оценки есть, то норма $\|u - u_I\|_H^2$ будет:

$$\|u - u_I\|_H^2 = \int_a^b [(u - u_I)^2 + (u' - u'_I)^2] dx \leq C_1 [\max |u - u_I|^2 + \max |u' - u'_I|^2]$$

Оцениваем интеграл через максимум. Интегральная норма – более слабая, чем норма, связанная с максимумом, поэтому там \leq . А максимумы у нас оценены. Поэтому получаем:

$$\Rightarrow \|u - u_I\|_H \leq Ch \max |u''|$$

Здесь **первая степень h** , потому что один максимум берется порядка h , а другой – порядка h^2 , а $h > h^2$. Завершается все рассмотрение таким результатом:

$$\|u - u^N\|_H \leq C \sqrt{\frac{M}{\delta}} h \max |u''|$$

Следовательно, мы доказали сходимость приближенного решения к точному в норме H , которая включает и саму функцию, и производную, первого порядка относительно h . Это окончательная оценка. Эта процедура, которую мы делали сегодня, описывает технику, как доказывается сходимость приближенного решения к точному в рамках математической теории, которая развита для МКЭ.

24) Оценки сходимости метода конечных элементов. (Л13, 14)

Будем получать более слабые оценки: не в норме \max (поточечная оценка), а в интегральной норме.

Краткое резюме этого билета.

В этом билете мы будем получать оценки в интегральных нормах. В зависимости от того, какая будет норма, такая будет оценка.

Распишем, как обозначаются разные нормы:

$$\|v\|^2 = \|v\|_0^2 = (\|v\|_0)^2 = (\|v\|_{L_2})^2 = \int_0^l v^2 dx$$

$$\|v\|_1^2 = (\|v\|_1)^2 = \int_0^l (v')^2 dx$$

$$\|v\|_2^2 = (\|v\|_2)^2 = \int_0^l (v'')^2 dx$$

$$\|v\|_{W_2^1}^2 = (\|v\|_{W_2^1})^2 = \int_0^l (v^2 + (v')^2) dx$$

$$\|v\|_{W_2^2}^2 = \int_0^l [(v)^2 + (v')^2 + (v'')^2] dx$$

Мы докажем первую оценку и вторую оценку.

$$1) \|u - u_I\|_1 \leq C_1 h \|u\|_{W_2^2}$$

$$2) \|u - u_I\| \leq C_0 h^2 \|u\|_{W_2^2}$$

Если доказано, что можно подобрать такую функцию u_I в бесконечномерном пространстве, которая аппроксимирует решение с какой-то точностью, то точно такую же точность и будет иметь приближенное решение u^N . Отсюда следует:

$$2) \|u - u^N\| = O(h^2)$$

$$1) \|u - u^N\|_1 = O(h)$$

Перейдем к доказательству.

Оценки сходимости метода конечных элементов.

$$\Delta = u - u_I$$

u_I – линейный интерполянт функции u (линейная интерполяция по значениям функции u в узлах x_j).

Для более слабой оценки нужно раскладывать функцию в ряд Фурье: (когда функция не имеет 2-ую производную)

$$\begin{array}{c} \text{---|---|---} \\ \text{0} \qquad \qquad h \end{array}$$

$$\Delta(0) = 0$$

$$\Delta(h) = 0$$

$$\Delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{h}$$

$$\int_0^h \Delta^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad - \text{ равенство Парсеваля}$$

$$\Delta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{h} \right) \cos \frac{\pi n x}{h}$$

$$\Delta''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \left(-\sin \frac{\pi n x}{h} \right)$$

Вычисления:

$$1) \int_0^h (\Delta')^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \int_0^h \cos^2 \frac{\pi n x}{h} dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + 1)$$

$$\int_0^h \cos^2 \frac{\pi n x}{h} dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^h \cos \frac{2\pi n x}{h} dx}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^h dx}_{=\frac{h}{2}} = \frac{h}{2}$$

$$\int_0^h \cos \frac{2\pi n x}{h} dx = \frac{h}{2\pi n} \int_0^h \cos \frac{2\pi n x}{h} d\left(\frac{2\pi n x}{h}\right) = \frac{h}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{h} \Big|_0^h = \frac{h}{2\pi n} (\sin 2\pi n - \sin 0) = 0$$

$$2) \int_0^h (\Delta'')^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^4 \int_0^h \left(\sin^2 \frac{\pi n x}{h} \right) dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^4$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\int_0^h \cos \frac{2\pi n x}{h} dx = 0, \quad \frac{1}{2} \int_0^h dx = \frac{h}{2}$$

Итак, мы получили:

$$\int_0^h (\Delta')^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2$$

$$\int_0^h (\Delta'')^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h} \right)^4$$

Сравним эти интегралы:

$$n \geq 1 \Rightarrow n^2 \leq n^4$$

$$\left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \leq \left(\frac{\pi n}{h} \right)^4 \cdot \left(\frac{h}{\pi} \right)^2$$

$$\int_0^h (\Delta')^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h (\Delta'')^2 dx$$

$\Delta'' = u''$ (м.к. $\Delta = u - u_I$, $u_I'' = 0$, u_I — линейный интерполант)

$$\int_0^h (\Delta')^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h (u'')^2 dx$$

$$\sqrt{\int_0^h (u' - u_I')^2 dx} \leq \frac{h}{\pi} \sqrt{\int_0^h (u'')^2 dx}$$

Получили неравенство для Δ' в норме 1:

$$\|u - u_I\|_1 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\right) h}_{O(h)} \|u''\|, \quad \text{где } \|u''\|^2 = \int_0^h (u'')^2 dx$$

Или, что то же самое:

$$\|u' - u_I'\| \leq \frac{1}{\pi} h \|u''\|$$

Постановка $a(u, v) = l(v)$ не требует существования u'' , но чтобы получить оценку, это нужно потребовать.

Получим оценку для Δ .

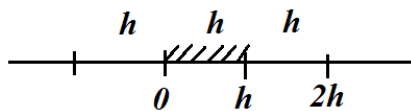
$$\int_0^h \Delta^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{— равенство Парсеваля}$$

$$\int_0^h (\Delta'')^2 dx = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^4$$

$$(n \geq 1) \Rightarrow a_n^2 \leq a_n^2 \left(\frac{\pi n}{h}\right)^4 \cdot \left(\frac{h}{\pi}\right)^4$$

$$\int_0^h \Delta^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \int_0^h (\Delta'')^2 dx$$

$$\int_0^h \Delta^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \int_0^h (u'')^2 dx$$



$$\|u - u_I\|_0 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\pi^2}\right) h^2}_{O(h^2)} \|u''\|$$

Мы получили:

$$1) \int_0^h (\Delta')^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^h (u'')^2 dx$$

$$2) \int_0^h \Delta^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \int_0^h (u'')^2 dx$$

Это все для одного конечного элемента. Для всей области нужно просуммировать:

$$\int_0^l = \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i}$$

Мы так можем делать, так как функции Δ и Δ' в узлах ведут себя прилично.

$$\int_0^l (\Delta')^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \int_0^l (u'')^2 dx$$

$$\int_0^l \Delta^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \int_0^l (u'')^2 dx$$

Сложим:

$$\int_0^l (\Delta^2 + (\Delta')^2) dx \leq \left[\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \right] \int_0^l (u'')^2 dx$$

Получили **оценку для $\|u - u_I\|_H$ в норме W_2^1** :

$$\|u - u_I\|_H^2 \leq c^2 h^2 \|u''\|^2, \quad h \rightarrow 0$$

$$\|u - u_I\|_H \leq ch \|u''\|$$

$$H = W_2^1$$

Следовательно, можно подобрать $v^N = u_I$, для которой выполняется эта оценка.

Теперь воспользуемся **теоремой Сеа**:

$$\|u - u^N\|_H \leq D \|u - v^N\| \quad \forall v^N$$

$$D = \sqrt{\frac{M}{\delta}} - \text{метод Рунца}$$

$$D = \frac{M}{\delta} - \text{метод Галеркина}$$

$$\Rightarrow \|u - u^N\|_H \leq D \|u - u_I\| \leq Dch \|u''\|$$

$$\|u - u^N\|_H \leq Ch \|u''\|, \quad Dc = C$$

$$\|u''\| \leq \|u\|_{W_2^2}$$

$$\|u - u^N\|_{W_2^1} \leq Ch \|u\|_{W_2^2}$$

$$\|u\|_{W_2^2}^2 = \int_0^l [(u)^2 + (u')^2 + (u'')^2] dx$$

В двух- или трехмерном случае получается такая же оценка (для линейных и билинейных элементов).

Итак, мы получили:

$$\|u - u_I\|_1 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\right) h \|u''\|}_{O(h)} \Rightarrow \|u - u_I\|_1 \leq C_1 h \|u\|_{W_2^2}$$

$$\|u - u_I\|_0 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\pi^2}\right) h^2 \|u''\|}_{O(h^2)} \Rightarrow \|u - u_I\| \leq C_0 h^2 \|u\|_{W_2^2}$$

КЭ были равномерные и одномерные. Мы выясняли, какую имеет аппроксимацию линейные КЭ. Если доказано, что можно подобрать такую функцию u_I в бесконечномерном пространстве, которая аппроксимирует решение с такой точностью, то такую точность и имеет приближенное решение u^N . Отсюда следует из всего того, что мы рассматривали:

$$\|u - u^N\|_1 = O(h)$$

$$\|u - u^N\| = O(h^2)$$

$$\|u - u^N\|_{W_2^2} = O(h)$$

25) Константы α и M для изотропной теории упругости. Их механический смысл.
(Л14)

Рассмотрим общий случай (трехмерный).

Теорема Лакса-Мильграма:

$$a) a(u, v) \geq \delta \|v\|_H^2 \quad (\delta > 0)$$

Коэрцитивность, положительная определенность, сильная эллиптичность.

$$b) a(u, v) \leq M \|u\|_H \|v\|_H$$

Ограниченность, непрерывность.

Выясним, чему равны константы δ и M в теории упругости. Для этого надо использовать немного механики и математической физики.

Вычислим константу δ :

Норма:

$$\|v\|_H = \|v\|_{W_2^1}, \quad H = W_2^1 \text{ пространство Соболева (теория упругости)}$$

Распишем нормы для двух- или трехмерного случая:

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1}^2 = \int_V \left(v_i v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_V [(\vec{v})^2 + (\vec{v}')^2] dV$$

$$a(v, v) = \int_V C_{ijkl}(\vec{x}) v_{i,j} v_{k,l} dV$$

Считается, что $C_{ijkl}(\vec{x})$ удовлетворяет такому условию (это тоже неравенство коэрцитивности, сильной эллиптичности, положительной определенности):

$$\forall \vec{x} \quad C_{ijkl}(\vec{x}) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq C_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Пример (изотропная упругость).

В случае изотропной упругости:

$$C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Мы сразу видим, что достаточно взять: $C_0 = 2\mu$

(А в анизотропной C_0 зависит от C_{ijkl} . C_0 находится либо аналитически, либо численно.)

Это еще не окончательный результат. Отсюда мы только можем написать:

$$a(v, v) \geq C_0 \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV$$

Мы получили норму в терминах деформаций. А нам нужно получить другую норму. Дальше просто используется **неравенство из уравнений математической физики**:

$$\int_V \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV \geq m \int_V v_{i,j} v_{i,j} dV = m \|\vec{v}\|_1^2$$

Тогда получим:

$$a(v, v) \geq C_0 \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV \geq C_0 m \|\vec{v}\|_1^2 \quad \Rightarrow \quad a(v, v) \geq C_0 m \|\vec{v}\|_1^2$$

Константа m зависит только от области. Она в большинстве случаев не известна. Только для простых областей m вычисляется в общем виде.

Чтобы завершить доказательство и оценку, надо брать норму $\|v\|$. Воспользуемся другим неравенством из математической физики – **неравенством Фридрихса**:

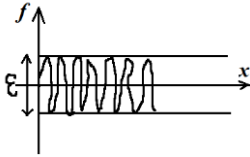
$$\|\vec{v}\| \leq M_\Phi \|\vec{v}\|_1$$

M_Φ – константа Фридрихса (**константа M_Φ зависит от вида области**)

Это неравенство означает, что сама функция ограничена производными.

Замечание.

Обратно быть не может. **Производная через функцию ограничена быть не может.** На этом рисунке функция мала, а производные большие.



Используя эти два неравенства $a(v, v) \geq C_0 m \|\vec{v}\|_1^2$, $\|\vec{v}\| \leq M_\Phi \|\vec{v}\|_1$, мы можем завершить все доказательство. Запишем нормы:

$$\|\vec{v}\|_1^2 = \int_V v_{i,j} v_{i,j} dV = \int_V (\vec{v}')^2 dx$$

Это **энергетическая норма для оператора Лапласа.**

$$\|\vec{v}\|^2 = \int_V v_i v_i dV = \int_V (\vec{v})^2 dV$$

По определению:

$$\|\vec{v}\|_{W_2^1}^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\|_1^2 = \int_V (\vec{v})^2 dV + \int_V (\vec{v}')^2 dx \Rightarrow \|\vec{v}\|_1 \leq \|\vec{v}\|_{W_2^1}$$

$$\|\vec{v}\|_1 \geq \frac{1}{M_\Phi} \|\vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{v}\|_1^2 \geq \frac{1}{M_\Phi^2} \|\vec{v}\|^2$$

$$\Rightarrow 2\|\vec{v}\|_1^2 \geq \frac{1}{M_\Phi^2} \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\|_1^2 \geq \min \left\{ \frac{1}{M_\Phi^2}, 1 \right\} (\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\|_1^2) = \min \left\{ \frac{1}{M_\Phi^2}, 1 \right\} \|\vec{v}\|_{W_2^1}^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\|_1^2 \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{M_\Phi^2}, 1 \right\} \|\vec{v}\|_{W_2^1}^2$$

Константа Фридрихса M_Φ должна быть большой, поэтому \min будет член $\frac{1}{M_\Phi^2}$.

Тогда обозначим:

$$\frac{1}{\tilde{M}_\Phi^2} = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{M_\Phi^2}, 1 \right\}$$

\tilde{M}_Φ с точностью до $\frac{1}{2}$ будет равна константе Фридрихса.

$$\|\vec{v}\|_1^2 \geq \frac{1}{\tilde{M}_\Phi^2} \|\vec{v}\|_{W_2^1}^2$$

$$\Rightarrow a(v, v) \geq C_0 m \|\vec{v}\|_1^2 \geq \frac{C_0 m}{\tilde{M}_\phi^2} \|\vec{v}\|_{W_2^1}^2$$

m – означает, что константа малая.

Получили:

$$a(v, v) \geq \frac{C_0 m}{\tilde{M}_\phi^2} \|\vec{v}\|_{W_2^1}^2$$

Так как $H = W_2^1$, то мы доказали неравенство коэрцитивности: $(a(v, v) \geq \delta \|v\|_H^2)$ и доказали, что:

$$\delta = \frac{C_0 m}{\tilde{M}_\phi^2}$$

Мы доказали, что для теории упругости такая константа δ существует. Но ее вычислить почти никогда нельзя. Можно вычислить только C_0 , которая связана с модулями упругости. Нельзя вычислить константу m , которая зависит от вида области, ее аналитические формулы известны только для очень простых областей. Константу Фридрихса \tilde{M}_ϕ тоже нельзя вычислить.

Замечание:

У нас была такая оценка (теорема Сеа для функционала Лагранжа):

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \min_{v^N \in H} \|u - v^N\|_H, \quad H^N \in H$$

Если константа δ – маленькая, то это плохо. Чем $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ больше, тем точность приближенного решения меньше.

Когда δ станет малой? Когда константа Фридрихса – большая, а константы C_0, m – малые. Это зависит от области. В геометрически сложных областях МКЭ дает худшую точность, чем в простой области. Отношение $\frac{M}{C_0}$ зависит исключительно от модуля упругости.

Ясно, что **точность МКЭ портится:**

- 1) из-за геометрических причин (потому что константы m и \tilde{M}_ϕ зависят от геометрии области), для плохих областей точность метода будет хуже;
- 2) от упругих свойств.

Чтобы разобраться с упругими свойствами, надо вычислить константу M , и тогда станет очевидно, как от модуля упругости может улучшаться точность метода и когда она станет наилучшей.

Вычислим константу M .

$$a(\vec{u}, \vec{v}) \leq M \|\vec{u}\|_H \|\vec{v}\|_H \quad (*)$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV$$

Предполагается, что:

$$C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) \leq C_1 \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \quad (**)$$

C_1 – это вторая константа, которая входит в неравенства, которые записываются для модуля упругости. Сверху эта квадратичная форма тоже должна быть ограничена.

Как нам связать эти два неравенства (*) и (**)?

$$\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) dV = \|\vec{v}\|_E^2 \leftarrow \text{энергетическая норма}$$

Раз существует энергетическая норма, то можно ввести скалярное произведение. Норма – это следствие этого скалярного произведения.

$$\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) dV = (\vec{u}, \vec{v})_E$$

И при этих условиях на C_{ijkl} (**) можно доказать, что скалярное произведение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, а норма удовлетворяет аксиомам норм:

$$(\vec{u}, \vec{v})_E \leq \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E \quad \text{неравенство Коши-Буняковского}$$

Тогда получается:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{v})_E = \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV \leq \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E = \\ &= \sqrt{\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{u}) dV} \sqrt{\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) dV} \end{aligned}$$

$$C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \leq C_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{от любого аргумента})$$

Подставляем это неравенство в каждый из интегралов и получаем:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(\vec{u}, \vec{v}) &\leq C_1 \left(\int_V \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{u}) dV \right)^{1/2} \left(\int_V \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV \right)^{1/2} \leq C_1 \|\vec{u}\|_1 \|\vec{v}\|_1 \leq \\ &\leq C_1 \|\vec{u}\|_{W_2^1} \|\vec{v}\|_{W_2^1} \end{aligned}$$

Последнее неравенство доказано раньше.

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \leq u_{i,j} u_{i,j} \quad (\text{можно вычислить, расписав левую и правую части})$$

Получили:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) \leq C_1 \|\vec{u}\|_{W_2^1} \|\vec{v}\|_{W_2^1}$$

Это норма того пространства, в котором сформулирована вариационная задача: $H = W_2^1$.

Таким образом, мы доказали, что в неравенстве ограниченности:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) \leq M \|\vec{u}\|_H \|\vec{v}\|_H \quad \text{константа } M \text{ просто есть } C_1:$$

$$M = C_1$$

C_1 – это константа, которая входит в неравенства теории упругости:

$$C_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \leq C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \leq C_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Эти неравенства теории упругости являются достаточными для доказательства существования констант δ и M .

$\Rightarrow \exists$ константы δ и M , которые входят в неравенства коэрцитивности и ограниченности (из которых следует доказательство существования и единственности решения задачи, которое мы делали ранее).

Множитель $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ определяет, насколько точность МКЭ может быть хуже из-за материальных и геометрических свойств области, т.е. насколько решение точное.

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H$$

Этот \min (правая часть) говорит о том, насколько хорошо мы функцию u можем приблизить функцией v^N из конечномерного пространства. А левая часть – это насколько приближенное решение u^N отличается от точного решения u . Может быть, мы и хорошо можем приблизить u функцией из конечномерного пространства, но если этот множитель

$\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ – большой, то тогда точность решения будет хуже. Чем этот коэффициент $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ меньше,

тем точность лучше. Если $\sqrt{\frac{M}{\delta}} = 1$, то тогда точность приближенного решения в этой норме H настолько хороша, насколько хорошо вообще мы можем приблизить u функциями из конечномерного пространства. Вспомним, что мы доказывали такое равенство в энергетической норме:

$$\|u - u^N\|_E = \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_E$$

Точность приближенного решения (насколько оно близко к точному) всегда равна тому, как можно из этого конечномерного пространства приблизить это точное решение, но только в энергетической норме.

А в норме W_2^1 , где есть обычные производные, там появляется неравенство и этот множитель $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$.

Энергетическая норма:

$$\|v\|_E^2 = a(v, v)$$

Этот множитель $\sqrt{\frac{M}{\delta}}$ мы сейчас сможем окончательно оценить:

$$\sqrt{\frac{M}{\delta}} = \sqrt{\left(\frac{C_1}{C_0}\right) \frac{\tilde{M}_\Phi^2}{m}}$$

C_1, C_0 – зависят только от упругих свойств материала (модулей упругости)

$$C_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \leq C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \leq C_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Дробь $\frac{C_1}{C_0}$ определяет разброс упругих свойств за счет анизотропии. И даже для изотропного материала $\frac{C_1}{C_0}$ определяет, насколько упругая среда простая или сложная.

$\frac{\tilde{M}_\Phi^2}{m}$ – определяется геометрией области

Пример (изотропный случай):

Мы уже вычислили константу C_0 : $C_0 = 2\mu$

А чему равна C_1 в изотропном случае?

$$C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq C_1\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = K\theta^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij}$$

e_{ij} – девиатор

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}$$

В изотропном случае энергию упругости можно представить как энергию объемного деформирования и энергию сдвига. Сдвиг определяется девиатором деформаций.

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \left(e_{ij} + \frac{\theta}{3}\delta_{ij}\right)\left(e_{ij} + \frac{\theta}{3}\delta_{ij}\right) = e_{ij}e_{ij} + \frac{\theta^2}{3}$$

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

$$\Rightarrow C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq C_1\left(\frac{\theta^2}{3} + e_{ij}e_{ij}\right)$$

$$C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = K\theta^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij} \leq C_1\left(\frac{\theta^2}{3} + e_{ij}e_{ij}\right)$$

Нам надо определить константу C_1 . Можно сказать, что для обычных нормальных материалов:

$$C_1 = \max\{3K, 2\mu\}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow 3K = 3\lambda + 2\mu$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

$$\Rightarrow \nu \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Если } \nu \geq 0, \text{ то } 3K \geq 2\mu$$

Т.е. все это вычисление показывает, что:

$$\Rightarrow C_1 = 3K$$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{3K}{2\mu} = \frac{1+\nu}{1-2\nu}$$

так как

$$3K = \frac{6\mu\nu}{1-2\nu} + 2\mu = \frac{6\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu}{1-2\nu} = \frac{2\mu\nu + 2\mu}{1-2\nu} = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}$$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1+\nu}{1-2\nu}$$

$$\text{Если } \nu \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ то } \frac{C_1}{C_0} \rightarrow \infty$$

Если материал стремится к несжимаемому, то точность решения будет ухудшаться. (Чем ближе к резине, тем хуже.)

$$\text{А когда } \nu = \frac{1}{2}, \text{ то } \frac{C_1}{C_0} = \infty, M = C_1 = \infty \Rightarrow$$

1) Теоретически вообще не гарантируется сходимость приближенного решения, получаемого МКЭ, к точному решению.

2) Нарушаются условия теоремы, при которых доказывается существование и единственность решения.

3) Постановка задачи теории упругости в перемещениях для несжимаемого материала должна быть другая. **Вводится функция давление как новая независимая переменная.** В трехмерной задаче теории упругости 4 неизвестных – 3 компоненты скорости и давление.

4) Ухудшаются точность МКЭ и сама процедура нахождения решения. Если итерационное решение, то число итераций растет, если задача решается методом Гаусса, то обусловленность матрицы плохая, метод Гаусса дает ошибки при решении.

В реальной жизни не бывает $\nu = \frac{1}{2}$. Таких материалов точно нет, но математически такая теория есть – постановка задачи теории упругости для несжимаемого материала ($\nu = \frac{1}{2}$). Аналогично есть постановка задачи для несжимаемой жидкости. Уравнение Навье-Стокса – постановка задачи движения жидкости для несжимаемой жидкости – не совсем такая, как для сжимаемой.

Лучше материал, который близок к несжимаемому, моделировать как несжимаемый. Т.е. математическую постановку взять несжимаемого материала.

Т.е. эта несжимаемость – это плохо в любом случае. Если использовать задачу в перемещениях, то это плохо тем, что точность будет низкая. Если использовать постановку несжимаемой среды, то там появляются сложные элементы и масса всяких нюансов. Поэтому несжимаемый случай – это плохо. Это гораздо хуже, чем коэффициент Пуассона, который находится от 0 до 0,45. В этом случае еще все нормально. А если $\nu = 0,49$, то там уже все неизвестно.

26) Неравенства Фридрикса и Корна. Условие однородности. Примеры. Лагранжевы и эрмитовы элементы. (Л15)

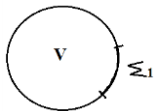
Неравенство Фридрикса.

$$\|u\| \leq M_\Phi \|u\|_1, \quad (*)$$

Для векторной функции \vec{u} :

$$\|u\|^2 = \int_V u_i u_i dV = \int_V (\vec{u})^T : \vec{u} dV$$

$$\|u\|_1^2 = \int_V u_{i,j} u_{i,j} dV = \int_V (\nabla \vec{u})^T : \nabla \vec{u} dV$$



$$\Sigma_1: \vec{u}|_{\Sigma_1} = 0 \quad \exists \text{ такая } \Sigma_1$$

Неравенство Фридрикса **верно при условии**, что на части области Σ_1 функция \vec{u} равна нулю: $\vec{u}|_{\Sigma_1} = 0$ (хотя бы в одной точке).

Это условие исключает смещение как жесткого тела, т.е. в левой части перемещения должны быть вызваны только градиентом деформации. В противном случае производные могут равняться нулю (которые входят в правую часть (*)), а функция не равна нулю, а это смещение как жесткого тела. Тогда норма левой части будет большая, а норма правой части равна нулю.

Неравенство Корна.

Оно было доказано Корном в 1908 году.

Первое неравенство Корна:

$$\int_V \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV \geq m_k \int_V v_{i,j} v_{i,j} dV$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

m_k – константа Корна

Деформации снизу оцениваются через градиенты перемещений.

Эти два неравенства нужны, чтобы все доказывать в теории упругости.

Второе неравенство Корна (в левую и правую части еще добавлены квадраты перемещений):

$$\int_V [\varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) + v_i v_i] dV \geq m_k \int_V [v_{i,j} v_{i,j} + v_i v_i] dV \quad (**)$$

Теперь займемся математикой, связанной с МКЭ, а именно, более общим исследованием того, **какие должны быть условия, чтобы выполнялась аппроксимация конечных элементов.**

Вспомним, что была такая важная **теорема Сеа**, что приближенное решение отличается от точного не хуже, чем \min (умноженный на некоторую константу) разности

точного решения и того, как решение может быть аппроксимировано в конечномерном пространстве:

$$\|u - u^N\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\delta}} \min_{v^N \in H^N} \|u - v^N\|_H, \quad H^N \in H$$

Мы будем рассматривать **вопрос аппроксимации**, т.е. насколько функции из конечномерного пространства могут хорошо аппроксимировать решение. Рассмотрим начальные результаты этой теории из книги **Стренга**, чтобы понимать, как можно доказывать, что аппроксимации какого-то порядка имеют место быть.

В исходном пространстве H находится конечномерное пространство H^N .
 $H \supset H^N$ степени k

У Стренга конечномерное пространство называется: **H^N степени k (точнее $k-1$)**. Это означает, что $\forall P_{k-1}$ – **полином степени $(k-1)$ точно представляется в H^N** .

Поскольку пространство H^N во всей области состоит из кусочных полиномов, а в каждом элементе – просто полиномов, то базисные функции должны быть такими, чтобы полином степени $(k-1)$ точно представлялся.

Примеры:

1) **Линейные элементы, $k = 2$.**

$k-1$ – полином 1-й степени – т.е. линейная функция точно представляется в пространстве конечных элементов, где базисные функции – тоже линейные функции.

Это линейные треугольники. Или линейные тетраэдры – это тетраэдры, в которых функции формы (базисные функции) – это линейные функции.

2) **Билинейные элементы, $k = 2$.**

\forall полином 1-й степени (функции x, y в 2D или x, y, z в 3D) точно представляется в H^N . Это пространство билинейной аппроксимации.

А почему здесь нельзя квадратичную аппроксимацию написать ($k = 3$)? Потому что билинейный элемент – это произведение линейных функций.

Например, рассмотрим **в двухмерном случае: 2D**. В двухмерном случае базисные функции содержат: $\delta + \alpha x + \beta y + \gamma xy$. Здесь нет членов x^2 и y^2 . Не все квадратичные члены присутствуют, а только γxy . Здесь есть линейная часть и γxy . Поэтому для этой аппроксимации тоже $k = 2$. Нельзя сказать $k = 3$, потому что квадратичные полиномы здесь не представляются.

В этом смысле видно, что линейные и билинейные элементы близки друг другу.

$$H^N: v_i = \sum_j \alpha_i^{(j)} \psi_j(\vec{x})$$

Пространство H^N – такое, что каждая функция v_i представляется как линейная комбинация базисных функций $\psi_j(\vec{x})$. Причем это так представляется и во всей области, и в одном отдельно взятом элементе. Эти функции ψ_j в каждом элементе должны удовлетворять некоторым **условию однородности**.

Условие однородности.

ψ_j удовлетворяет **условию однородности**:

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha \psi_j(\vec{x})| \leq C_S h_i^{|D_j|-S} \quad (***)$$

ψ_j – базисная функция

$h_i = \text{diam}(e_i)$ – диаметр элемента e_i

$h = \max_i h_i$

e_i – отдельно взятый i -ый элемент

C_S – константа, зависящая от S

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

D^α – производная (частные производные)

n – размерность физического пространства, $n = 1, 2$ или 3

$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – мульти индекс, вектор

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

ψ_j – это j -ая базисная функция. От нее берется какая-то производная порядка $|\alpha| = S$.

$S = 0, 1, 2, \dots, q$

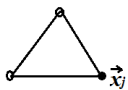
(Чему равно q , мы обсудим позже.)

Производная может быть нулевого порядка, если здесь сами функции ψ_j .

C_S – константа, не зависящая от шага h (max размер элемента) и составляющая суть этого неравенства (***)

Что такое $|D_j|$? Эта вещь требует максимального объяснения.

Для примера рассмотрим треугольный элемент:



В каждом узле \vec{x}_j задаются степени свободы, которые потом составляют неизвестные в системе уравнений и по которым производится аппроксимация внутри элемента. Если это задача теории упругости, то узловыми неизвестными являются перемещения в узле.

1) Если в узле являются узловыми неизвестными **только искомые функции** (например, перемещения), то $|D_j| = 0$. Такие элементы называются элементами **лагранжевого типа** (строятся с помощью полиномов Лагранжа).

2) Если в узлах задаются **еще и первые производные**, то такие элементы называются элементами **эрмитового типа** (строятся с помощью полиномов Эрмита). Для них $|D_j| = 1$. Они не используются почти никогда и нигде. Но теоретически они построены.

Поскольку рассматривается **общая теория**, то считается, что в каждом узле задается значение самой функции и значения первых, вторых производных вплоть до $|D_j|$ – тах порядок производных, которые являются узловыми неизвестными.

$|D_j|$ – тах порядок производных, которые являются узловыми неизвестными

Для лагранжевых элементов – 0-й порядок: $|D_j| = 0$

Для эрмитовых элементов – 1-й порядок: $|D_j| = 1$

По существу, для **всех элементов**, с которыми люди имеют дело и которые мы рассматриваем, $|D_j| = 0$ – в узлах задается только сама функция (производные нулевой степени).

А что такое S? В левой части должны стоять производные вплоть до q . А чему равно q ? q должно быть такое, что H^N должно принадлежать пространству H^q .

$$q: H^N \subset H^q$$

$$W_2^1 = H^1 \Rightarrow q = 1$$

q зависит от того, где формулируется задача. Если задача формулируется в пространстве W_2^1 (его часто пишут H^1), то отсюда следует, что **$q = 1$** .

Это q , которое нам требуется, можно еще так пояснить:

Если дифференциальные уравнения порядка $2m$, то должно быть $q \geq m$. Для дифференциальных уравнений 2-го порядка $m = 1$ и $q = 1$. Вариационная постановка, что $H^q = H^1 = W_2^1$ (пространство Соболева – функции, интегрируемые с квадратом первой производной).

$$m = 1 \Rightarrow q = 1 \quad (H^q = H^1 = W_2^1)$$

$2m$ – степень (порядок) дифференциального уравнения

m – тах степень производных, которые входят в вариационное уравнение

Например, дифференциальное уравнение пластинок и оболочек – 4-го порядка, там $m = 2$, там все сложнее.

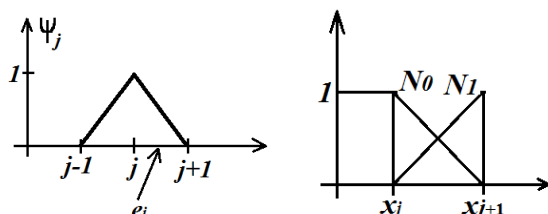
Как будет видно дальше, это условие ограниченности (*) является достаточным условием для того, чтобы имела место аппроксимация.**

Рассмотрим примеры выполнения этого условия. Найдем для каких-то простых элементов константы C_S .

Примеры.

Найдем для простых элементов константы C_S .

Пример 1: (1D) Нарисуем базисные функции.



Пусть $S = 0$.

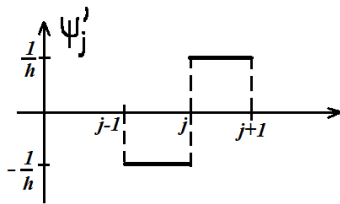
$$\max_{\substack{x \in e_i \\ |\alpha|=0}} |\psi_j| \leq C_0 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C_0 = 1$$

Пояснение. Максимум от функции ψ_j по элементу e_i меньше или равен 1 (max можно даже брать не по элементу, а по всей области, по всему отрезку). $|D_j| = 0$, $S = 0$, H^0 . Мы получаем, что константа $C_0 = 1$. Условие однородности (***) выполняется с константой $C_0 = 1$. Линейные одномерные элементы удовлетворяют этому пространству при $C_0 = 1$.

Но мы же должны S менять до q , а $q = 1$. Нужно проверить еще первые производные, т.е. для $S = 1$.

Пусть $S = 1$.

Первые производные от функции ψ_j выглядят так (такая ступенчатая функция):



Проверим, выполняется ли для нее условие:

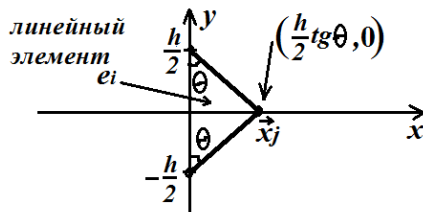
$$\max_{\substack{x \in e_i \\ |\alpha|=1}} |\psi_j'(x)| \leq C_1 \cdot h^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

Пояснение. Максимум от первой производной ψ_j' по x – по всей области (не обязательно по элементу e_i) $\leq 1 \cdot h^{-1}$. Получается снова, что $C_1 = 1$.

Вывод. Простейшие одномерные элементы удовлетворяют этому условию с константами, равными 1. А поскольку это условие – фактически достаточное для аппроксимации, то это хорошо. Это значит, что эти элементы подходят.

Пример 2: (2D)

Рассмотрим немного более сложный двумерный элемент.



Рассматриваем ось x , ось y и берем такой элемент с вершинами $(0; \frac{h}{2})$, $(0; -\frac{h}{2})$, $\vec{x}_j = (\frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta; 0)$.

Как пример, рассмотрим функцию: $\psi_j(\vec{x})$

$$\psi_j(\vec{x}_j) = 1 \text{ (в своем узле } \vec{x}_j)$$

$$\psi_j(\vec{x}_l) = 0, \quad l \neq j \text{ (в двух других узлах)}$$

1) $S = 0$

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=0}} |\psi_j(\vec{x})| \leq C_0 \cdot h^0 \quad \Rightarrow \quad C_0 = 1$$

Пояснение. Это так, потому что функция $|\psi_j| \leq 1$, функция ψ_j – линейная, потому что мы рассматриваем линейный треугольник. Поэтому неравенство выполняется при $C_0 = 1$.

Проверим с производными.

2) $S = 1$

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=1}} |\psi_j'(\vec{x})| \leq C_1 \cdot h^{-1}$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \frac{1 - 0}{\frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta - 0} = \frac{2}{h} (\operatorname{tg} \theta)^{-1} \Rightarrow C_1 \geq \frac{2}{\operatorname{tg} \theta}$$

Пояснение. Константа C_1 должна входить в это неравенство и не зависеть от h . Так как ψ_j – линейная функция, то ее можно вычислить как разностную производную. В узле \vec{x}_j $\psi_j(\vec{x}_j) = 1$, в других узлах $\psi_j(0; \frac{h}{2}) = 0$ и $\psi_j(0; -\frac{h}{2}) = 0$. Так как ψ_j – линейная функция, то раз она равна нулю в двух узлах, то она равна нулю на отрезке $[(0; -h/2); (0; h/2)]$. Функция ψ_j меняется от 1 до 0. Значит, мы эту производную можем вычислять, как $(1-0)$ делить на разность координат x точки \vec{x}_j и любой из двух других точек: $(\frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta - 0)$.

Получаем: $\frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \frac{2}{h} (\operatorname{tg} \theta)^{-1}$. Тогда должно быть: $C_1 \geq \frac{2}{\operatorname{tg} \theta}$. Это оценка этой константы. И тут, как мы видим, роль малых углов. Так бывает, что для плохой сетки ANSYS пишет, что проведена проверка (check) всех элементов и столько-то элементов обнаружили плохую геометрию. Например, проверяется, чтобы не было малых углов. Потому что из таких оценок видно, что если угол θ – малый, то величина $\operatorname{tg} \theta$ – малая и константа C_1 будет большой.

Как мы увидим дальше из теоремы: чем больше константа C_S , тем аппроксимация будет хуже. Малые углы могут приводить к большим ошибкам.

Мы рассмотрели примеры простых элементов, чтобы пояснить смысл этих неравенств и показать, что для обычных хороших простых элементов эти условия однородности выполняются для базисных функций.

27) Теорема об основных оценках точности метода конечных элементов. Примеры интегральных оценок. (Л15, 16)

Повторение. Условие однородности:

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha \psi_j(\vec{x})| \leq C_S h_i^{|D_j|-S} \quad (*)$$

ψ_j – базисная функция, e_i – отдельно взятый i -ый элемент

$h_i = \text{diam}(e_i)$ – диаметр элемента e_i , $h = \max_i h_i$

C_S – константа, зависящая от S

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

D^α – производная (частные производные)

n – размерность физического пространства, $n = 1, 2, 3$

$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – мульти индекс, вектор, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

ψ_j – это j -ая базисная функция. От нее берется какая-то производная порядка $|\alpha| = S$.

$S = 0, 1, 2, \dots, q$

Теорема об основных оценках точности метода конечных элементов.

1) H^N имеет степень $k - 1$

P_{k-1} точно представляется в H^N (с помощью базисных функций).

2) Выполнено условие однородности.

Тогда:

$$\max_{\substack{e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha(u - u_I)| \leq \tilde{C}_S h_i^{k-S} \cdot \max_{\substack{e_i \\ |\beta|=k}} |D^\beta u|$$

u_I – интерполант (функция, интерполирующая функцию u)

D^α – частная производная, D^β – частная производная, \tilde{C}_S – константа

Сначала рассмотрим примеры.

Примеры ($k = 2$):

$$1) S = 0 \quad \max_{\substack{e_i \\ |\alpha|=0}} |u - u_I| \leq \tilde{C}_0 h^2 \cdot \max_{\substack{e_i \\ |\beta|=2}} |D^2 u|$$

$k = 2$ Полином 1-й степени точно представляется. Теорема означает, что аппроксимация самих перемещений – интерполирующих функций по элементу (а если максимум по элементу, то это верно для всей области) имеет 2-й порядок точности (h^2) относительно h , и в оценку входят вторые производные. Важное требование – \exists непрерывные 2-ые производные по перемещению u .

$$2) S = 1 \quad \max_{\substack{e_i \\ |\alpha|=1}} |D(u - u_I)| \leq \tilde{C}_1 h \cdot \max_{\substack{e_i \\ |\beta|=2}} |D^2 u|$$

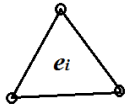
Первые производные перемещений аппроксимируются хуже (чем сами перемещения), с первым порядком относительно h . Для механики это означает, что сами функции (перемещения) имеют точность в МКЭ 2-го порядка, а производные (т.е.

напряжения и деформации) имеют точность 1-го порядка. Это типичная оценка. Надо всегда помнить, что если вычислить перемещения, а потом напряжения и деформации, то точность напряжений и деформаций будет на порядок хуже.

Разберем ход доказательства.

Доказательство:

Элемент e_i – линейный треугольник:



Рассмотрим \vec{x} , принадлежащий элементу e_i .

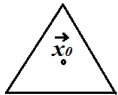
$$\vec{x} \in e_i$$

Тогда перемещения можно представить в виде суммы полинома и ошибки:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{P}_{k-1}(\vec{x}) + \vec{R}(\vec{x})$$

\vec{P}_{k-1} – полином степени $(k-1)$ (первые члены разложения в ряд Тейлора)

\vec{R} – ошибка



Мы берем внутри треугольного элемента любую точку \vec{x}_0 и раскладываем в ряд Тейлора (общий вид):

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}_0) + \sum_{\substack{S=1 \\ |\alpha|=S}}^{\infty} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} \cdot \frac{1}{|\alpha|!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} \vec{u}(\vec{x}_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + \dots$$

Если взять только линейные члены, что соответствует всем нашим элементам, то мы получим:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}_0) + \underbrace{\sum_i (x_i - x_i^0) \frac{\partial \vec{u}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}}_{P_1(\vec{x})} + \vec{R}(\vec{x})$$

При $h \rightarrow 0$ получаются асимптотические оценки.

Важна оценка этого остаточного члена $\vec{R}(\vec{x})$. Вот такая оценка получается:

$$\max_{\substack{e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha R(\vec{x})| \leq \tilde{C}_S h^{k-S} \cdot \max_{\substack{e_i \\ |\beta|=k}} |D^\beta u| \quad (**)$$

C – константа, зависящая от S

Производная члена $\vec{R}(\vec{x})$, который мы отбрасываем, имеет такую оценку. Сначала проверим, что эта оценка верна.

Проверка. Возьмем пока самый простой случай:

$$S = 0: \max_{\substack{e_i \\ |\alpha|=0}} |R(x)| \leq \tilde{C}_0 h^2 \max_{\substack{e_i \\ |\beta|=2}} |D^2 u|$$

Так и должно быть. Линейный член. (Мы используем, что $k = 2$. Тогда $k - 1 = 1$.) А этот остаточный член (в одномерном случае): 1) содержит 2-ые производные по x , поэтому здесь стоит \max вторых производных, 2) h^2 , потому что разность $|\vec{x} - \vec{x}_0| \leq h$, а в

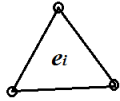
этом члене $R(x)$ стоит произведение $x_1 \cdot x_2$ (эти разности), т.е. будет $\leq h^2$. Т.е. видно из разложения, что оценка справедлива.

Теперь **следующий шаг рассуждения** для доказательства этой теоремы.

У нас было представление:

$$u = P_{k-1} + R$$

P_{k-1} – полином степени $(k - 1)$, индекс опущен



Мы хотим интерполировать функцию u в этом КЭ e_i с помощью базисных функций из этого пространства H^N . Мы интерполируем – пишем интерполянт u_I .

u_I – интерполирующая функция, которая построена с помощью полиномов из пространства H^N , т.е. с помощью полиномов, которые имеют степень $(k - 1)$.

Когда мы строим интерполирующий полином, то верно **свойство линейности**: интерполирующий полином от суммы двух функций равен сумме интерполирующих полиномов от каждой функции. Тогда получается:

$$u_I = P_I + R_I$$

R_I – интерполирующий полином R

Далее надо сделать **важное наблюдение**.

Полином P_I – это интерполирующий полином, который интерполирует функцию P , которая сама является полиномом. Степень полинома P была $(k - 1)$. Если мы интерполируем с помощью базисных функций, которые есть полином степени $(k - 1)$, то это значит, что интерполирующий полином тоже имеет степень $(k - 1)$. Следовательно, интерполирующий полином должен точно интерполировать полином той же самой степени. Значит, $P = P_I$.

P_I имеет степень $(k - 1)$, P_I – интерполянт P

$$\Rightarrow P = P_I$$

$$\Rightarrow u - u_I = R - R_I$$

Теперь **последний шаг рассуждения**.

$R_I(x)$ – это функция, которая интерполирует функцию R . Поэтому $R_I(x)$ – это полином степени $(k - 1)$. R_I строится так. Это есть сумма (по всем степеням свободы N_e) значений функции R (а в случае эрмитовых элементов и производных от функции R) в узлах, умноженных на базисные функции ψ_j .

$$R_I(x) = \sum_{j=1}^{N_e} D_j R(x_j) \psi_j(x) \quad (***)$$

Сумма по узлам элемента.

$D_j R(x_j)$ – узловые степени свободы (числа). Если у нас лагранжевы элементы, то это будут сами значения функции $R(x_j)$. Если эрмитовы элементы, то еще первые производные будут.

Теперь вычислим от этого равенства (***) производную D^α . $D_j R(x_j)$ – это **числа**. Это либо заданные значения функции $R(x_j)$ в узлах, либо еще производные. Поэтому производная D^α порядка α будет применяться только к базисным функциям $\psi_j(x)$.

$$D^\alpha R_I(x) = \sum_{j=1}^{N_e} D_j R(x_j) D^\alpha \psi_j(x) \quad (****)$$

N_e – число степеней свободы элемента

Замечание. Здесь (****) берется сумма по всем узлам и еще по всем производным D_j (нулевым, первым и т.д. – $D_j = 0, D_j = 1$). Поэтому под N_e надо иметь в виду не число узлов, а число степеней свободы элемента. N_e – это число узлов только для лагранжевых элементов.

Теперь оценим $\max_{e_i} |D^\alpha R_I(x)|$. Для производных $|D_j R(x_j)|$ (справа) мы как раз можем применить оценку (**). S здесь равен максимальной производной – $|D_j|$ ($S = |D_j|$). Т.е. производные, которые стоят в узлах – там они равны $|\alpha| = S$, а здесь они равны $|D_j|$.

$$D^\alpha R_I(x) = \sum_{j=1}^{N_e} D_j R(x_j) D^\alpha \psi_j(x) \quad (****)$$

$$\max_{\substack{e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha R(\vec{x})| \leq \tilde{C}_S h^{k-S} \cdot \max_{\substack{e_i \\ |\beta|=k}} |D^\beta u| \quad (**)$$

Получаем:

$$\max_{|D_j|=S} |D_j R(x_j)| \leq \tilde{C}_S h^{k-|D_j|} \cdot \max_{|\beta|=k} |D^\beta u|$$

Чтобы оценить член $|D^\alpha \psi_j(x)|$, воспользуемся **условием однородности**:

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha \psi_j(\vec{x})| \leq C_S h_i^{|D_j|-S} \quad (*)$$

Таким образом, из условия однородности (*), которое налагалось на базисные функции, и условия (**), которое получено как оценка остаточного члена при разложении в ряд Тейлора, следует:

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha R_I(x)| \leq N_e \left[\tilde{C}_S h^{k-|D_j|} \max_{|\beta|=k} |D^\beta u| \right] \cdot [C_S h^{|D_j|-S}] \quad (@)$$

После сокращения $|D_j|$ получаем:

$$\Rightarrow \max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha R_I(x)| \leq C_1 h^{k-S} \max_{|\beta|=k} |D^\beta u| \quad (@@)$$

$$C_1 = N_e \cdot \tilde{C}_S \cdot C_S$$

$D^\alpha R_I(x)$ – частная производная порядка S

$R_I(x)$ – интерполянт ошибки R

Что теперь надо увидеть в неравенстве (@@)?

Сравним (**) и (@@).

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha R(\vec{x})| \leq \tilde{C}_S h^{k-S} \cdot \max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\beta|=k}} |D^\beta u| \quad (**)$$

Первое неравенство (**) – это оценка максимума производной порядка $|\alpha| = S$ от $R(x)$, а второе (@@) – то же самое, но от ее интерполянта $R_I(x)$. Мы видим, что оценки одинаковые. Они отличаются только константами \tilde{C}_S и C_1 .

Теперь возьмем разность неравенств (**) и (@@):

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha (R - R_I)| \leq (\tilde{C}_S + C_1) h^{k-S} \max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\beta|=k}} |D^\beta u|$$

Здесь мы применили правило, что модуль разности \leq сумме модулей:

$$|A - B| \leq |A| + |B|$$

Воспользовавшись равенством $(u - u_I = R - R_I)$, получим оценку для разности самих перемещений $(u - u_I)$:

$$\max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\alpha|=S}} |D^\alpha (u - u_I)| \leq (\tilde{C}_S + C_1) h^{k-S} \max_{\substack{\vec{x} \in e_i \\ |\beta|=k}} |D^\beta u|$$

Теорема доказана.

Получили, что ошибка интерполяции функции u интерполянтом u_I оценивается через размер максимального элемента h . Функция u должна быть достаточно гладкая, у нее должны быть вторые производные непрерывные. Из вариационной постановки это не следует, там требуется существование непрерывной первой производной. Оценка верна для более гладких решений, чем требует вариационная постановка.

Другими словами, мы доказали, что **приближенное решение приближает точное решение (если оно обладает такой гладкостью), причем по перемещениям точность имеет 2-й порядок, а по производным – 1-й порядок**. Эта оценка считается очень слабой оценкой, потому что для ее доказательства использовалось разложение в ряд Тейлора. И в результате этого требуется, чтобы вторая производная (при $k = 2$) от точного решения должна быть непрерывна. А если речь идет об обобщенном решении, то там это необязательно. Поэтому это не самая настоящая оценка.

Примеры интегральных оценок.

В прошлый раз получили такие оценки:

$$\max_{\vec{x} \in V} |u - u_I| \leq C_0 h^2 \max_{\vec{x} \in V} |D^2 u| \quad (\#)$$

$$\max_{\vec{x} \in V} |D(u - u_I)| \leq C_1 h \max_{\vec{x} \in V} |D^2 u| \quad (\#\#)$$

V – область элемента

Для механики важны именно эти две оценки, потому что первая оценка оценивает близость интерполирующей функции к самой функции (перемещений), а вторая оценка описывает близость производной, другими словами, напряжений и деформаций, если

говорить в терминах механики. У первой производной точность хуже – 1-й порядок, у самой функции – 2-й порядок.

Отсюда можно получить **интегральные нормы** (слева):

$$\int_V (u - u_I)^2 dV \leq \text{mes}V \max_{\vec{x} \in V} |u - u_I|^2$$

$\text{mes}V$ – мера области V (т.е. площадь или объем)

Извлечем корень из обеих частей:

$$\|u - u_I\| \leq (\text{mes}V)^{1/2} \max_{\vec{x} \in V} |u - u_I| \quad (\#\#\#)$$

($\|u - u_I\|$ – интегральная норма)

То же самое можно написать для производных:

$$\|D(u - u_I)\| \leq (\text{mes}V)^{1/2} \max_{\vec{x} \in V} |D(u - u_I)|$$

Теперь объединим неравенства $(\#\#\#)$ и $(\#)$:

$$\|u - u_I\| \leq (\text{mes}V)^{1/2} \max_{\vec{x} \in V} |u - u_I| \leq (\text{mes}V)^{1/2} C_0 h^2 \max_{\vec{x} \in V} |D^2 u|$$

Аналогично напишем для производных:

$$\|D(u - u_I)\| \leq (\text{mes}V)^{1/2} \max_{\vec{x} \in V} |D(u - u_I)| \leq (\text{mes}V)^{1/2} C_1 h \max_{\vec{x} \in V} |D^2 u|$$

В итоге получаем **интегральные нормы для самих функций и для производных**:

$$\|u - u_I\| \leq \left[C_0 (\text{mes}V)^{1/2} \right] h^2 \max_{\vec{x} \in V} |D^2 u| \quad (\#\#\#\#)$$

$$\|D(u - u_I)\| \leq \left[C_1 (\text{mes}V)^{1/2} \right] h \max_{\vec{x} \in V} |D^2 u| \quad (\#\#\#\#\#)$$

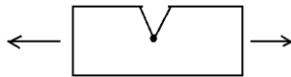
Мы получили оценки, которые используются в МКЭ, но они немного несимметричные.

Возникает вопрос: чем хороши или плохи оценки $(\#)$ и $(\#\#)$, где стоят максимумы слева и справа? Они замечательные, потому что \max – это самая сильная норма, которая существует. Это поточечная норма. Если верно для \max , то верно и для любых других.

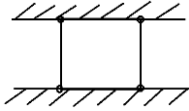
Проблема состоит в том, что \max стоит не только слева, но и справа. Вторые производные оцениваются по максимуму. А как мы знаем, если функция u является вариационным решением вариационной задачи, то вторые производные могут и не существовать. Это хорошая оценка, но у нее очень сильные требования. Она верна в том случае, если **\max вторых производных существует**. \max вторых производных может равняться ∞ , потому что обобщенные решения есть такие, что хотя интеграл от упругой энергии – конечный, но максимум вторых производных по модулю может быть равен $+\infty$.

Это такие задачи, в которых решение в каких-то особых точках стремится к бесконечности.

Это, например, **пластинка с вырезом**, ее растягивают. Там обобщенное решение существует, но сами напряжения и деформации в этой особой точке стремятся к бесконечности. Поэтому максимум вторых производных по модулю стремится к бесконечности.



Более простая задача: **бетонный кубик сжимается двумя жесткими плитами** – стандартный опыт на определение прочности. Тогда в углах образуются особые точки, где напряжение $\rightarrow \infty$. Поэтому формально такие оценки к таким решениям применить нельзя.



Поэтому эти оценки замечательны для достаточно гладких решений, но для всяких решений из класса обобщенных решений (из решений вариационных уравнений) их может и не быть – максимум вторых производных может быть равен бесконечности. Это случаи, когда есть особые точки, и при стремлении \vec{x} к этим точкам решение $\rightarrow \infty$.

Оценки в интегральных нормах.

$$\|u - u_I\| \leq \tilde{C}_0 h^2 \|D^2 u\| \quad (\&)$$

↑ норма L_2 :

$$\|v\|^2 = \int_V v^2 dV$$

$$\|D(u - u_I)\| \leq \tilde{C}_1 h \|D^2 u\| \quad (\&\&)$$

Константы \tilde{C}_0, \tilde{C}_1 уже другие.

Норма $\|D^2 u\|$ должна существовать – требование такой гладкости:

$$\|D^2 u\| < \infty$$

Такие оценки являются основным результатом, касающимся оценки точности классического метода конечных элементов. Это основные неравенства, которые являются результатом теории аппроксимации, которая позволяет оценить точность приближенного решения. Тут нормы интегральные, т.е. более слабые, они существуют в более широком классе задач, например, когда есть особенности – задачи с особыми точками, которые мы только что рассматривали.

Вообще результат получен такой: точность функции – порядка h^2 , точность производной от функции – первого порядка по h в случае, **если существует норма от вторых производных от решения задачи теории упругости**. Т.е. вторые производные должны существовать в обобщенном смысле, как они существуют в пространстве Соболева: $\|D^2 u\| < \infty$

Но это требование **большой** гладкости, чем требуется самой постановкой вариационной задачи. В вариационной задаче требуется: $\|Du\| < \infty$.

А в **теории разностных схем** в аналогичной теории сходимости приближенного решения к точному (теории аппроксимации) для уравнений второго порядка (Лапласа) аппроксимация самой функции перемещения имеет второй порядок (локально), а для исследования аппроксимации требуется наличие ограниченных и непрерывных 4-х производных (надо раскладывать в ряд Тейлора).

28) Вариационная постановка нелинейных задач МДТТ (на примере деформационной теории пластичности). Постановки в перемещениях и в скоростях. (Л16)

Физически нелинейные задачи:

Пример 1. Деформационная теория пластичности.

Пример 2. Теория течения.

Пример 1.

Деформационная теория пластичности.

1) Постановка в перемещениях.

На кафедре теории упругости эту теорию называют **теорией малых упруго-пластических деформаций**. Мы будем рассматривать для изотропного материала – классический вариант. Эта теория минимально отличается от теории упругости. (В теории упругости было бы так: $S_{ij} = 2\mu e_{ij}$.)

$$\begin{cases} S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} \\ \sigma = K\theta \end{cases} (*)$$

S_{ij} – девиатор напряжений

$\omega(\varepsilon_u)$ – функция (Ильюшина) от интенсивности деформаций

K – модуль объемного расширения (сжатия)

Шаровые части обычно в этой теории линейны (линейная связь между σ и θ). Для шаровых частей применяется закон Гука ($\sigma = K\theta$). А связь девиаторов – нелинейная ($S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij}$). Эту теорию ввел Генки, а Ильюшин ее применил и исследовал.

$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}$ девиатор деформаций

$\theta = \varepsilon_{kk}$ шаровые деформации

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ девиатор напряжений:

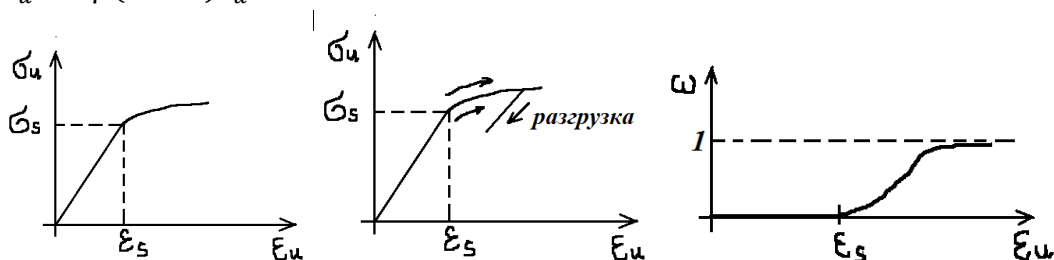
$\sigma = \frac{\sigma_{kk}}{3}$ шаровые напряжения

$\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ интенсивность деформаций (второй инвариант тензора деформаций)

$\sigma_u = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$ интенсивность напряжений (второй инвариант тензора напряжений)

В некоторой литературе (и в ANSYS) под корнем еще стоят числовые коэффициенты, которые позволяют сделать нормировку. Они вводятся, чтобы интенсивность напряжения равнялась самому напряжению.

$$\sigma_u = 2\mu(1 - \omega)\varepsilon_u$$



Для всех нормальных материалов до предела текучести $(\sigma_s, \varepsilon_s)$ интенсивности σ_u и ε_u ведут себя упруго, а потом кривая отклоняется вниз.

Функция $\omega(\varepsilon_u)$ ведет себя так: до ε_s $\omega = 0$ (закон Гука), а потом она стремится к 1. Для какого случая $\omega \rightarrow 1$?

$$S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij}$$

$$\omega \rightarrow 1, \quad 1 - \omega(\varepsilon_u) \rightarrow 0, \quad e_{ij} \rightarrow \infty \Rightarrow S_{ij} \rightarrow \text{const}$$

Функцию Ильюшина ввел Ильюшин и определил: $\omega < 1$. Поэтому он ее рассматривал как малый параметр, раскладывал решение в ряд Тейлора и решал задачу. Она была введена, чтобы разработать и обосновать сходимость **метода упругих решений**.

Иногда обходятся без ω и пишут:

$$2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u)) = \Phi(\varepsilon_u), \quad S_{ij} = \Phi(\varepsilon_u)e_{ij}, \quad \sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)\varepsilon_u$$

В формуле (*) определяющие соотношения разбиты отдельно на шаровые и девиаторные части. Чтобы их подставить в уравнение равновесия, их надо объединить в одну формулу: σ_{ij} выразить через ε_{kl} .

Следствием этих двух формул (*) является связь напряжений и деформаций, записанных так:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_u)\varepsilon_{kl} \quad (**)$$

где

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u))$$

$$\lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)$$

Вычисления.

$$\begin{cases} S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} \\ \sigma = K\theta \end{cases} \quad \begin{cases} S_{ij} = 2\mu(\varepsilon_u)e_{ij} \\ \sigma = K\theta \end{cases} \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij} \quad \theta = \varepsilon_{kk} = \delta_{kl}\varepsilon_{kl}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= S_{ij} + \sigma\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_u)\underbrace{\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}\right)}_{e_{ij}} + K\theta\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_u)\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)\theta\delta_{ij} + K\theta\delta_{ij} = \\ &= \left(K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)\right)\theta\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_u)\varepsilon_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)\right)\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

Следовательно, если ввести такие обозначения, то связь в этой теории деформационной пластичности записывается почти так же, как в теории упругости. Но есть отличие. В теории упругости: $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, где C_{ijkl} – константы. А здесь $C_{ijkl}(\varepsilon_u)$ зависит от интенсивности деформаций.

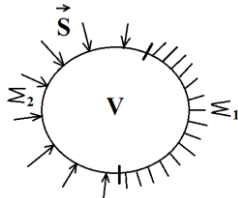
Запишем **вариационное уравнение**. У нас есть уравнение равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad | \cdot v_i \int_V$$

v_i – из пространства функций, где ищется решение

$$\int_{\Sigma_1} S_i \underbrace{v_i}_{=0} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma - \int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int_V f_i v_i dV = 0$$

$$\int_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} S_i v_i d\Sigma \quad (***)$$



Область V – это область тела. На границе Σ_1 заданы нулевые перемещения (она зафиксирована), на границе Σ_2 действуют заданные поверхностные силы \vec{S} .

Можно так написать:

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\vec{v})$$

$$\text{где } \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

Мы писали такое уравнение:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_u) \varepsilon_{kl} \quad (**)$$

$$\text{подставим } \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Мы задачу собираемся формулировать и решать в перемещениях, поэтому мы в это уравнение (**) подставляем ε_{ij} , выраженное через поле перемещений. В итоге получаем:

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = C_{ijkl}(\varepsilon_u(\vec{u})) \varepsilon_{kl}(\vec{u}) = C_{ijkl}(\vec{u}) u_{k,l}$$

Подставляем $\sigma_{ij}(\vec{u})$ в вариационное уравнение (***) и получаем **вариационное уравнение уже для нелинейной задачи**:

$$\int_V C_{ijkl}(\vec{u}) u_{k,l} v_{i,j} dV = A^e(\vec{v}) \quad (****)$$

\vec{u} – решение, если уравнение (****) выполняется для $\forall \vec{v} \in H$

H – пространство, в котором ищется решение, оно то же самое, что и для теории упругости

$A^e(\vec{v})$ – работа внешних сил от поля перемещений \vec{u}

Видно, чем это уравнение отличается от аналогичного уравнения в теории упругости только тем, что $C_{ijkl}(\varepsilon_u)$ зависит от интенсивности деформаций ε_u . Первая теория – линейная, а вторая – нелинейная.

Уравнение (****) линейно относительно производных с коэффициентами, которые зависят от решения. Такие уравнения называются **квазилинейными**. По-другому связь между напряжениями и деформациями называется **тензорно-линейной**, потому что тензоры между собой связаны линейно, но с коэффициентами, которые зависят от решения (скалярным образом). Такая связь между σ_{ij} и ε_{kl} характерна для теории малых упруго-пластических деформаций.

Задача сформулирована относительно самой функции \vec{u} – вектора перемещений. Сформулируем задачу относительно скоростей перемещений.

Деформационная теория пластичности.

2) Постановка в скоростях.

У нас было такое уравнение:

$$S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij}$$

Можно написать и так:

Девииатор напряжений S_{ij} есть функция от девиатора деформаций e_{ij} (потому что ε_u выражается через e_{ij}):

$$S_{ij} = S_{ij}(e_{ij}) \Rightarrow \dot{S}_{ij} = \frac{dS_{ij}}{dt} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \dot{e}_{kl}$$

$$\dot{S}_{ij} = \frac{dS_{ij}}{dt}, \quad \dot{e}_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt}$$

t – может быть и время, и параметр, который позволяет проследить процесс нагружения (**параметр нагружения**), т.е. отделяет одно состояние от другого. В квазистатических задачах обычно t – это не время, а параметр нагружения. Квазистатический процесс – это набор состояний равновесия, и для того чтобы эти состояния отделять друг от друга, проследить переход от одного состояния к другому, должен быть какой-то параметр, который называется **параметром нагружения**. Это может быть величина внешней растягивающей силы, может быть время, в течение которого образец растягивается. Его можно обозначать t (как время).

Получаются такие **определяющие соотношения**:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \dot{e}_{kl} \\ \dot{\sigma} = K \dot{\theta} \end{cases}$$

Во втором уравнении – линейная связь, поэтому модуль K никак не влияет.

Мы опять получили определяющие соотношения в виде двух формул в дифференцированном виде по параметру нагружения.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

Эта формула – такая же, как для деформаций. Здесь рассматриваются малые геометрические элементы, поэтому это есть тензор скоростей деформаций.

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\dot{\theta}}{3} \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\varepsilon_u) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\varepsilon_u(\vec{u})) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\vec{u})$$

Эта производная $\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\varepsilon_u)$ выражается через ε_u следующим образом:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\varepsilon_u) = \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}(\varepsilon_u) \frac{e_{ij}e_{kl}}{\varepsilon_u}$$

↑ здесь от аргумента ε_u , ↑ здесь просто константа – без аргумента
где $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$

Вычисления:

$$S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij} = \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl}$$

$$\frac{\partial S_{ij}(\varepsilon_u)}{\partial e_{kl}} = \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega(\varepsilon_u)}{d\varepsilon_u} \frac{d\varepsilon_u}{de_{kl}}, \quad \varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}, \quad \frac{d\varepsilon_u}{de_{kl}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e_{kl}}{\varepsilon_u} = \frac{e_{kl}}{\varepsilon_u}$$

Теперь надо объединить шаровые и девиаторные части, чтобы получить $\dot{\sigma}_{ij}$:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{S}_{ij} + \dot{\sigma}\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^T(\varepsilon_u)\dot{\varepsilon}_{kl} \quad (\#)$$

$$\text{где } C_{ijkl}^T(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}(\varepsilon_u) \frac{e_{ij}e_{kl}}{\varepsilon_u}$$

Индекс Т сверху означает, что тензор модулей упругости $C_{ijkl}^T(\varepsilon_u)$ – (касательный) тангенциальный модуль (тензор).

Вычисления.

$$\begin{cases} \dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\varepsilon_u)\dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \dot{S}_{ij} + \dot{\sigma}\delta_{ij} = \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\dot{\varepsilon}_{kl} - 2\mu \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}(\varepsilon_u) \frac{e_{ij}e_{kl}}{\varepsilon_u} \dot{\varepsilon}_{kl} + K\dot{\theta}\delta_{ij} = \\ &= \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\dot{\theta}}{3}\delta_{kl} \right) - 2\mu \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}(\varepsilon_u) \frac{e_{ij}e_{kl}}{\varepsilon_u} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\dot{\theta}}{3}\delta_{kl} \right) + K\dot{\theta}\delta_{ij} = \\ &= \left[\mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}(\varepsilon_u) \frac{e_{ij}e_{kl}}{\varepsilon_u} \right] \dot{\varepsilon}_{kl} + \left(K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u) \right) \delta_{ij}\delta_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= e_{ij} + \frac{\dot{\theta}}{3}\delta_{ij}, \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u) \end{aligned}$$

Теперь мы вправе записать вариационное уравнение скоростного типа (или в скоростях).

Если исходить из уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

то при малых деформациях получается все просто:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0 \quad | \cdot v_i \int_V$$

v_i – просто произвольная функция

Интегрируем по частям, применяем теорему Гаусса-Остроградского, получаем:

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}v_{i,j}dV = \dot{A}^e(\vec{v}) \quad (\#\#)$$

где $\dot{A}^e(\vec{v})$ – это такое обозначение (работа внешних сил с точкой):

$$\dot{A}^e(\vec{v}) = \int_V \dot{f}_i v_i dV + \int_{\Sigma_2} \dot{S}_i v_i d\Sigma$$

Подставим $(\#)$ в $(\#\#)$, получим:

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) \dot{u}_{k,l} v_{i,j} dV = \dot{A}^e(\vec{v}) \quad (###)$$

Тангенциальный тензор $C_{ijkl}^T(\vec{u})$ зависит от поля перемещений \vec{u} , потому что:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_u(\vec{u})$$

(###) – это вариационное уравнение для теории малых упруго-пластических деформаций, но оно продифференцировано по параметру нагружения.

Мы получили вариационную постановку для теории малых упруго-пластических деформаций в двух видах: продифференцированную по t и неprodифференцированную. Запишем две постановки и сравним их между собой.

Итак, мы получили две **вариационные постановки нелинейных задач МДТТ**:

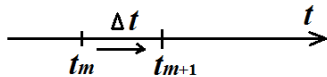
1) в перемещениях:

2) в скоростях:

$$\int_V C_{ijkl}(\vec{u}) u_{k,l} v_{i,j} dV = A^e(\vec{v}) \quad \int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) \dot{u}_{k,l} v_{i,j} dV = \dot{A}^e(\vec{v})$$

В **первой постановке** \vec{u} , которая является искомой функцией, и \vec{u} , от которой зависит $C_{ijkl}(\vec{u})$, одна и та же функция перемещения.

А во **второй постановке** искомой функцией является скорость $\dot{\vec{u}}$, а $C_{ijkl}^T(\vec{u})$ зависит от перемещения \vec{u} . Вообще говоря, если в момент времени t нам надо найти $\dot{\vec{u}}$, то \vec{u} в этот момент t уже известно. Поэтому формально можно подумать, что тут проще, что задача линейная относительно $\dot{\vec{u}}$.



Пояснение. Метод решения задачи в скоростях такой: есть ось t , есть момент t_m , есть момент t_{m+1} . Если мы дискретизируем, то будет шаг Δt . Мы должны перейти от одного момента к другому. Если мы не дискретизируем (не решаем, а рассуждаем теоретически), то получается, что здесь либо $\dot{\vec{u}}$, либо Δu . \vec{u} уже в момент времени t_m известно, поэтому относительно $\dot{\vec{u}}$ и Δu задача линейная. Кажется, что задачу проще решать.

На самом деле это кажущееся преимущество. Это метод реализации этого вариационного уравнения, называемый **явным методом Эйлера**. Если считать, что \vec{u} в момент времени t_m известно, а мы находим $\dot{\vec{u}}$, которое в дискретном варианте превращается в Δu , то мы можем перейти на следующий шаг. Но метод Эйлера совершенно не эффективный, им пользоваться не рекомендуется.

Надо применять **неявный метод Эйлера**. И тогда все становится не так просто. Трудность состоит в том, так как найти \vec{u} , если коэффициент $C_{ijkl}(\vec{u})$ тоже зависит от \vec{u} .

И в первом, и во втором случае решение становится более трудным, чем в теории упругости, потому что это нелинейная задача.

Следующий шаг: мы должны это все методом конечных элементов дискретизировать по пространственным координатам. От этих вариационных уравнений надо перейти к дискретной системе алгебраических уравнений. В результате дискретизации по МКЭ получится **нелинейная система алгебраических уравнений**.

29) Пространственная дискретизация нелинейных вариационных постановок методом конечных элементов. (Л17)

Было две нелинейные вариационные постановки:

1) в перемещениях:

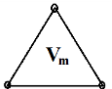
$$\int_V C_{ijkl}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = A^e(\vec{v}), \quad A^e(\vec{v}) - \text{работа внешних сил от } \vec{v}$$

2) в скоростях:

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) \dot{\varepsilon}_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = \dot{A}^e(\vec{v}), \quad \dot{A}^e(\vec{v}) - \text{работа внешних сил с точкой от } \vec{v}$$

1) Проведем дискретизацию первой формулировки методом конечных элементов. Это мало отличается от того, как это делается в линейной задаче. Методику МКЭ можно коротко сформулировать, если не писать матрицы и т.д.

Разобьем весь объем на конечные элементы:

$$\int_V = \sum_{m=1}^M \int_{V_m}$$


Тогда записываем уравнение так:

$$\sum_m \left[\int_{V_m} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dV - \int_{V_m} f_i v_i dV - \int_{\tilde{\Sigma}_m} S_i v_i d\Sigma \right] = 0 \quad (*)$$

$\tilde{\Sigma}_m$ – внешняя граница элемента V_m (если Э)

Последний интеграл надо применять только в том случае, если у элемента какая-то одна из граней выходит на реальную внешнюю границу всей глобальной области.

Поскольку теперь речь идет об отдельных элементах, то мы вправе поле перемещений \vec{u} и пробные функции \vec{v} интерполировать внутри элемента с помощью функций формы $N_p(\vec{x})$.

$$u_k = \sum_{p=1}^{n_m} N_p(\vec{x}) \hat{u}_k^p, \quad u_{k,l} = \sum_{p=1}^{n_m} N_{p,l}(\vec{x}) \hat{u}_k^p$$

n_m – число узлов m-го элемента

\hat{u}_k^p – узловые значения перемещений

$$v_i = \sum_{q=1}^{n_m} N_q(\vec{x}) \hat{v}_i^q = \sum_q N_q(\vec{x}) \hat{v}_i^q, \quad v_{i,j} = \sum_q N_{q,j}(\vec{x}) \hat{v}_i^q$$

Подставляем в уравнение (*), получаем:

$$\sum_m \left[\left(\int_{V_m} C_{ijkl} N_{p,l} N_{q,j} dV \right) \hat{u}_k^p \hat{v}_i^q - \left(\int_{V_m} f_i N_q dV \right) \hat{v}_i^q - \left(\int_{\tilde{\Sigma}_m} S_i N_q d\Sigma \right) \hat{v}_i^q \right] = 0$$

$C_{ijkl} = C_{ijkl}(\vec{u})$ сложно зависит от \vec{u} . C_{ijkl} зависит от интенсивности деформаций ε_u , а ε_u зависит от самих деформаций, там возникают корни, функция омега, но, в

конечном счете, все зависит нелинейным образом от узловых перемещений \vec{u}^r . Т.е. C_{ijkl} является функцией координат, поскольку \vec{u} зависит от координат.

$$C_{ijkl} = C_{ijkl} \left(\underbrace{\sum_r N_r \vec{u}^r}_{\vec{u}} \right)$$

\vec{u}^r – узловые перемещения

Но \hat{v}_i^q у нас произвольные, это пробные функции, они могут быть любыми узловыми значениями, поэтому должно равняться нулю то, что написано при каждом \hat{v}_i^q .

Отсюда мы получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно \hat{u}_k^p (согласно методу Галеркина):

$$\Rightarrow \sum_m \left[\underbrace{\left(\int_{V_m} C_{ijkl}(\vec{u}^r) N_{p,l} N_{q,j} dV \right)}_{K_{pq}^{(m)ki}(\vec{u}^{(m)r})} \hat{u}_k^p - \underbrace{\left(\int_{V_m} f_i N_q dV \right)}_{F_q^{(m)i}} - \underbrace{\left(\int_{\Sigma_m} S_i N_q d\Sigma \right)}_{F_q^{(m)i}} \right] = 0$$

(относительно \hat{u}_k^p)

Перепишем в удобном виде (пока в локальных номерах):

$$\sum_m [K_{pq}^{(m)ki}(\vec{u}^{(m)r}) \hat{u}_k^p - F_q^{(m)i}] = 0$$

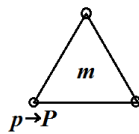
m – номер элемента

p – локальный номер узла (тогда надо говорить, для какого это элемента)

P – глобальный номер узла (может принадлежать нескольким элементам)

$K_{pq}^{(m)ki}$ – компоненты блочной матрицы, не числа

Это система уравнений записана в локальных номерах узлов. Для того чтобы ее записать в окончательном виде, надо ее переписать в глобальных номерах узлов. Это процесс ассемблирования. Надо просуммировать локальные матрицы $K^{(m)}$, чтобы получить глобальную матрицу.



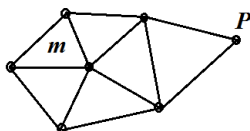
В памяти компьютера хранится таблица, которая по номеру элемента m и локальному номеру узла p определяет глобальный номер узла P . Функция $P = P(m, p)$ определена всегда.

$m, p \rightarrow P, P = P(m, p)$

А в обратную сторону, если у нас есть элемент m и глобальный номер P , то соответствующий им локальный номер p существует не всегда, а только если узел P принадлежит элементу m .

Пример, когда узел P не принадлежит элементу m :

$m, P \rightarrow p$



Можно определить такую процедуру:

Если $\exists p$, то есть функция $p = p(m, P)$

Если $\nexists p$, то $K_{p(m,P)q}^{(m)ik} = 0$

Тогда можно ввести такую **глобальную матрицу**:

$$K_{PQ}^{ik} = \sum_m K_{p(m,P)q(m,Q)}^{(m)ik}$$

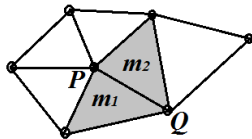
K_{PQ}^{ik} – глобальная матрица, не зависит от m

Так можно формально записать процесс ассемблирования. Он следует из вариационного уравнения. Компьютерная программа не так считает, она накапливает матрицу жесткости. Если существуют оба p, q ($p(m, P), q(m, Q)$), то такая локальная матрица жесткости от m -го элемента входит в эту сумму, а если не существует хотя бы одного p или q , то такая матрица равна нулю и она просто не суммируется. Суммирование ведется по элементам, которые содержат оба узла p и q .

Аналогично:

$$F_Q^i = \sum_m F_q^{(m)i}(m, Q)$$

1) Если $P \neq Q$, то суммирование проводится по всем элементам, содержащим узлы P и Q , т.е. по элементам m_1 и m_2 .

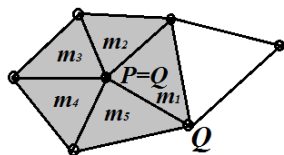


K_{PQ}^{ik}

P, Q – глобальные номера узлов

p, q – номера узлов в локальной нумерации

2) Если $P = Q$, то суммирование проводится по всем элементам, содержащим узел P . Это тот случай, если мы считаем диагональную часть матрицы. У нас блочная матрица, т.е. мы считаем блок, стоящий на диагонали.



K_{PP}^{ik}

Надо просуммировать вклады от всех элементов, содержащих соответствующий узел P .

ik – номера, связанные с направлением перемещений (номер оси в декартовой системе координат)

У нас задача векторная. Вектор перемещений имеет 1, 2 или компоненты.

Если вектор перемещений писать общий, то физические перемещения в одинаковых узлах не могут быть локальными или глобальными, перемещения обязаны

быть одинаковыми у всех элементов в силу того, что это общая величина. Поэтому в результате мы получаем **окончательную запись системы уравнений**:

$$K_{PQ}^{ki}(\vec{u}^R)\hat{u}_k^P = F_Q^i$$

$\hat{u} = \{\hat{u}_k^P\}$ Вводим такой вектор \hat{u} , состоящий из компонент \hat{u}_k^P .

$$\hat{F} = \{F_Q^i\}$$

$\Rightarrow N(\hat{u}) = \hat{F}$ Тогда эту систему нелинейных уравнений можно написать так.

Возникает вопрос (который формально не входит в сферу МКЭ), связанный с решением нелинейной системы уравнений.

Вариационное уравнение:

$$K_{PQ}^{ki}(\vec{u}^R)\hat{u}_k^P\hat{v}_i^Q = \int_V C_{ijkl}(\vec{u})\varepsilon_{kl}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = A^e(\vec{v}) \quad (**)$$

↑ энергия деформации $A^e(\vec{v})$

$$\vec{u}, \vec{v} \in H^N$$

Мы это получили из энергии деформаций. МКЭ, как и все вариационно-разностные методы, позволяет в точности выполнять это равенство. Только надо понимать, что оно выполняется не для любых функций \vec{u}, \vec{v} , а только для $\vec{u}, \vec{v} \in H^N$ (из конечно-элементного подпространства). $H = W_2^1$ – исходное пространство, где мы решали задачу

Мы обсуждали, что именно для пространства W_2^1 доказываются все теоремы существования и единственности решения задач методом Галеркина и методом Ритца. Метод конечной аппроксимации доказывается во всяких таких пространствах.

H^N – подпространство, в котором задаются КЭ. Здесь надо писать так:

$$\vec{u} \equiv \vec{u}^N, \quad \vec{v} \equiv \vec{v}^N$$

Мы будем писать без индексов, так как здесь и так много индексов, просто будем иметь в виду: $\vec{u}, \vec{v} \in H^N$.

$\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ от \vec{u} зависит уже нелинейно. φ линейно по \vec{v} , а по \vec{u} – нелинейно. Поэтому здесь нет симметрии:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) \neq \varphi(\vec{v}, \vec{u})$$

Важность равенства (**) для любых функций из конечномерного подпространства состоит в том, что для конечномерного подпространства энергия, записанная на языке матрицы жесткости, в точности равна той энергии, из которой мы исходили, когда строилась вся эта конечно-элементная система уравнений.

30) Итерационные методы решения нелинейных задач, сформулированных в перемещениях. (Л17, 18)

Окончательная система нелинейных алгебраических уравнений, которую надлежит решать:

$$K_{PQ}^{ki}(\vec{u}^R) \hat{u}_k^P = F_Q^i$$

$$\hat{u} = \{\hat{u}_k^P\} \quad \hat{F} = \{F_Q^i\}$$

$\Rightarrow N(\hat{u}) = \hat{F}$ (Эту систему нелинейных уравнений можно написать так.)

Скалярно умножим $\hat{N}(\hat{u}) = \hat{F}$ на функцию \hat{v} , получим:

$$\hat{N}(\hat{u}) \cdot \hat{v} = K_{PQ}^{ki}(\hat{u}) \hat{u}_k^P \hat{v}_i^Q = \int_V C_{ijkl}(\vec{u}^N) u_{k,l}^N v_{i,j}^N dV = \varphi(\vec{u}^N, \vec{v}^N)$$

$\vec{u}^N, \vec{v}^N \in H^N$ (Все это верно для функций из конечномерного подпространства.)

$K_{PQ}^{ki}(\hat{u})$ – матрица жесткости, зависящая от \hat{u}

Введем такое обозначение:

$$\hat{N}(\hat{u}) = \underline{A}(\hat{u}) \cdot \hat{u}$$

Это **скалярное произведение**. $\hat{N}(\hat{u})$ зависит от \hat{u} нелинейным образом, есть зависимость нелинейная, а есть еще и линейная, тут скалярно умножается на \hat{u} .

Далее интересно обсудить всякие **методы решения этой нелинейной системы**:

$N(\hat{u}) = \hat{F}$. Этот вопрос формально не входит в сферу МКЭ.

Будем решать нелинейное уравнение с помощью итерационного процесса:

$$B_n \cdot \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau} + \underline{A}(\hat{u}^n) \cdot \hat{u}^n = \hat{F}$$

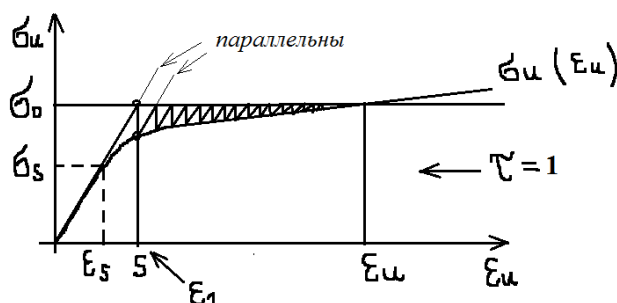
B_n – некая линейная матрица, она не зависит от перемещения \hat{u}^{n+1} . **Идея итерационного процесса состоит в том, чтобы на каждой итерации сводить решение нелинейной задачи к решению линейной задачи**

Методы решения нелинейного уравнения.

1) Метод упругих решений (МУР).

$\underline{B}_n = \underline{B} = \underline{A}(0)$ ($\tau = 1$) ← у Ильюшина было. Напишем для одномерной задачи.

$\sigma_u(\varepsilon_u) = \sigma_0$, $\varepsilon_u = ?$ (надо найти). Метод ведет себя так:

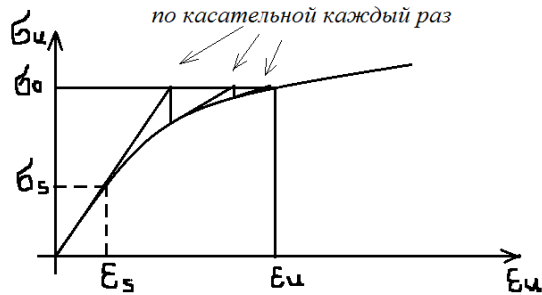


σ_s, ε_s – предел текучести, σ_0 – задано, ε_1 – первое приближение, ε_u – решение

2) Метод Ньютона (МН).

$$B_n = \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}^n) \text{ Возьмем } \tau = 1$$

$$\sigma_u(\varepsilon_u) = \sigma_0, \quad \varepsilon_u = ?$$

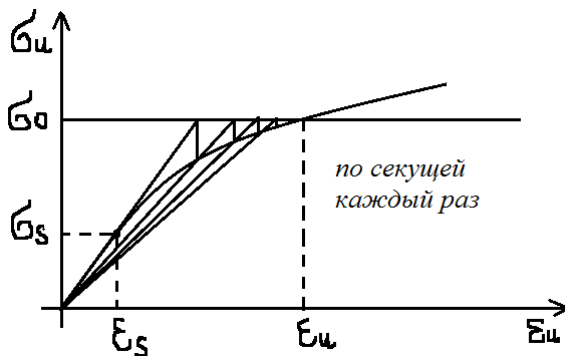


В одномерном случае это будет соответствовать тому, что мы движемся к решению по касательной.

3) Метод переменных параметров упругости (МППУ) (метод секущих).

$B_n = \underline{A}(\hat{u}^n)$ (B_n равно $\underline{A}(\hat{u}^n)$, но с предыдущей итерации.)

Эти идеи годятся не только для деформационной теории пластичности. Если этот метод применяется к задаче деформационной теории пластичности, тогда он называется – метод переменных параметров упругости.



Первый раз находится упругое решение, потом опускаемся вниз, а следующее приближение находится по секущей, и так каждый раз. Этот метод можно еще назвать методом секущих.

Итак, угол линий, по которым мы движемся к решению:

- 1) в методе упругих решений – постоянный, как для упругого участка,
- 2) в методе Ньютона – самый гибкий – по касательной (быстрее некуда),
- 3) в методе переменных параметров упругости – по секущей – среднее между этими двумя.

Запишем эти методы в виде вариационных уравнений.

1) Метод упругих решений (МУР).

Рассмотрим метод упругих решений:

$$\underline{A}(0) \cdot \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau} + \underline{A}(\hat{u}^n) \cdot \hat{u}^n = \hat{F}$$

$\underline{A}(0)$ – начальный модуль упругости

$$\begin{aligned} \hat{v}^T \cdot \underline{A}(\hat{u}^n) \cdot \hat{u}^n &= \hat{v}^T \cdot \hat{N}(\hat{u}^n) = \int_V c_{ijkl}(\vec{u}^n) u_{k,l}^n v_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}^n) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = \\ &= \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}^n) v_{i,j} dV \end{aligned}$$

Мы написали большое количество способов написания одного и того же.

Обозначили (написали короче):

$$(\vec{u}^N)^n \rightarrow \vec{u}^n \in H^N$$

$$\vec{v}^N \rightarrow \vec{v} \in H^N$$

Индекс N означает принадлежность к конечномерному пространству, индекс n – номер итерации.

$$C_{ijkl}(\vec{u}^n) = C_{ijkl}(\varepsilon_u(\vec{u}^n)) \quad \text{сложная зависимость}$$

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)) \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u)$$

$$(\underline{A}(0) \cdot \hat{w} \leftarrow \underline{A}(0), \text{ примененное к функции } \hat{w})$$

$$\hat{v}^T \cdot \underline{A}(0) \cdot \hat{w} = \int_V C_{ijkl}(0) w_{k,l} v_{i,j} dV$$

$$\vec{w} \in H^N \quad \text{поле перемещений}$$

$$C_{ijkl}(0) = C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Итерационный процесс можно записать так:

$$\int_V C_{ijkl} \frac{u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l}^n}{\tau} v_{i,j} dV + \int_V C_{ijkl}(\vec{u}^n) u_{k,l}^n v_{i,j} dV = A^e(\vec{v})$$

τ – величина, которая может быть использована для увеличения скорости сходимости (она может быть 1 или не 1)

Это означает, что если \vec{u}^n – задано приближение, то чтобы найти \vec{u}^{n+1} , то все члены, где есть индекс n, надо перенести в правую часть, то тогда относительно \vec{u}^{n+1} будет обычная задача классической линейной теории упругости.

Метод упругих решений состоит в том, что на каждом шаге надо решать задачу изотропной однородной теории упругости с модулями λ и μ , которые соответствуют началу деформирования, когда материал еще ведет себя упруго. Этот метод – самый простой, и его сходимость исследовать проще всего.

Теперь таким же образом запишем метод Ньютона.

2) Метод Ньютона (МН).

Рассмотрим метод Ньютона.

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}^n) \cdot \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau} + \underline{A}(\hat{u}^n) \cdot \hat{u}^n = \hat{F} \quad (*)$$

Для того чтобы переписать этот метод в виде вариационного уравнения, надо понять, что такое производная $\frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}$, записанная в классических терминах (не в виде конечно-элементных матриц). Как их вычислить?

$\frac{\partial \hat{N}(\hat{u}^n)}{\partial \hat{u}}$ **Можно вычислить частные производные как разностные производные.**

Производная должна вычисляться от \hat{u}^n . Если у нас известно предыдущее приближение – вектор \hat{u}^n , то мы можем с помощью компьютерной программы вычислять $\hat{N}(\hat{u}^n)$, потом можно вектору \hat{u}^n добавить приращение и вычислять частные производные в виде разностных производных.

Но можно более четко понять, что это за производные, какие аналитические формулы и выражения стоят за этими производными. Рассмотрим дифференциал Гато, зависящий от двух аргументов, причем от \hat{w} – линейным образом.

$$D\hat{N}(\hat{u}, \hat{w}) = \left. \frac{d}{d\xi} \hat{N}(\hat{u} + \xi \hat{w}) \right|_{\xi=0} = \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}) \cdot \hat{w} \text{ (скалярное произведение)}$$

Здесь написано, что мы \hat{N} дифференцируем по ξ как сложную функцию: сначала дифференцируем \hat{N} по своему аргументу $(\hat{u} + \xi \hat{w})$, а потом этот аргумент по ξ , а потом берем $\xi = 0$. Мы имеем право использовать эту формулу, чтобы вычислить эту производную. Вспоминаем:

$$\hat{v}^T \cdot \hat{N}(\hat{u} + \xi \hat{w}) = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u} + \xi \vec{w}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV \quad \left. \frac{d}{d\xi} \right|_{\xi=0}$$

Теперь правило для вычисления дифференциалов мы можем применить к левой и правой части. Так как \vec{v} и сама область не зависят от ξ , то они не дифференцируются.

Дифференцируем по ξ :

$$\hat{v}^T \cdot \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}) \cdot \hat{w} = \int_V \left. \frac{d}{d\xi} \sigma_{ij}(\vec{u} + \xi \vec{w}) \right|_{\xi=0} \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV$$

Напряжения σ_{ij} не непосредственно зависят от перемещения, они зависят сначала от деформаций, а потом уже от перемещений: $\sigma_{ij}(\underline{\varepsilon}(\vec{u} + \xi \vec{w}))$

$$\left. \frac{d}{d\xi} \sigma_{ij}(\vec{u} + \xi \vec{w}) \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u} + \xi \vec{w}) \right|_{\xi=0} \cdot \left. \frac{d}{d\xi} \varepsilon_{kl}(\vec{u} + \xi \vec{w}) \right|_{\xi=0}$$

$$\left. \frac{d}{d\xi} \sigma_{ij}(\vec{u} + \xi \vec{w}) \right|_{\xi=0} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}) \cdot \varepsilon_{kl}(\vec{w})$$

$$\varepsilon_{kl}(\vec{u} + \xi \vec{w}) = \varepsilon_{kl}(\vec{u}) + \xi \varepsilon_{kl}(\vec{w})$$

Рассматриваем малые деформации, поэтому линейные (формула Коши).

Соберем все вместе.

$$\hat{v}^T \cdot D\hat{N}(\hat{u}, \hat{w}) = \hat{v}^T \cdot \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}) \cdot \hat{w} = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{w}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV$$

В конечно-элементном виде метод Ньютона записывается так:

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}^n) \cdot \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau} + \hat{N}(\hat{u}^n) = \hat{F}$$

Скалярно умножаем на \hat{v}^T . Учтем, что

$$\hat{w} = \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau}$$

$$\hat{v}^T \cdot \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{u}}(\hat{u}^n) \cdot \underbrace{\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau}}_{\hat{w}} + \hat{v}^T \cdot \hat{N}(\hat{u}^n) = \hat{v}^T \cdot \hat{F}$$

Теперь перепишем метод Ньютона, записанный в терминах конечных элементов, в метод Ньютона, записанный в виде вариационного уравнения:

\vec{u}^n – n-е приближение

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}^n) \frac{u_{kl}^{n+1} - u_{kl}^n}{\tau} v_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}^n) v_{i,j} dV = A^e(\vec{v})$$

Аналогично распишем второй член:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}^n) &= C_{ijkl}^T(\vec{u}^n) = \\ &= \lambda(\varepsilon_u(\vec{u}^n))\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u(\vec{u}^n))(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu\omega' \frac{e_{ij}(\vec{u}^n)e_{kl}(\vec{u}^n)}{\varepsilon_u(\vec{u}^n)} \end{aligned}$$

вносят изотропную неоднородность

вносит анизотропию и неоднородность

 e_{ij} – девиатор деформаций

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3} \delta_{ij}$$

 C_{ijkl}^T – тангенциальный модуль

$$\omega(\varepsilon_u) \quad \omega' = \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}$$

Метод Ньютона сходится быстро, он имеет квадратичную скорость сходимости, но было сложно его реализовывать, потому что требовалось много памяти компьютера для хранения массы данных.

Теперь метод Ньютона полностью сформулирован. Для этой деформационной теории можно не вычислять частные производные от уравнений по узловым перемещениям, потому что известны модули упругости. Можно для этих модулей упругости записывать конечно-элементную схему, и эти производные вычислять через эти модули.

МППУ, записанный в виде конечной элементности:

$$\underline{A}(\hat{u}^n) \cdot \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\tau} + \underline{A}(\hat{u}^n) \cdot \hat{u}^n = \hat{F}$$

$A(\hat{u}^n)$ – матрица от предыдущего приближения

МППУ, записанный в виде вариационного уравнения:

$$\int_V C_{ijkl}(\vec{u}^n) \frac{u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l}^n}{\tau} v_{i,j} dV + \int_V C_{ijkl}(\vec{u}^n) u_{k,l}^n v_{i,j} dV = A^e(\vec{v})$$

где

$$C_{ijkl}(\vec{u}^n) = \lambda(\varepsilon_u(\vec{u}^n))\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u(\vec{u}^n))(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Для деформационной теории МППУ предлагался и исследовался, потому что он проще, чем метод Ньютона, никакой анизотропии у него нет, просто есть неоднородная упругость. МППУ замечательно выглядит при $\tau = 1$.

Если положить $\tau = 1$, то МППУ переписывается так:

$$\int_V C_{ijkl}(\vec{u}^n) u_{k,l}^{n+1} v_{i,j} dV = A^e(\vec{v})$$

Получился простой метод. В C_{ijkl} подставляется предыдущее решение, а $u_{k,l}^{n+1}$ берется в следующем приближении.

МППУ может применяться для решения целого ряда других задач, не только для решения задач деформационной пластичности. Идея таких итераций может использоваться широко.

Замечание. Метод СН-ЭВМ, тоже придуманный Ильюшиным, есть обобщение этого МППУ.

Механическая интерпретация этих методов:

Метод Ильюшина соответствует тому, что мы на каждой итерации решаем задачу изотропной однородной теории упругости с начальными модулями λ и μ .

Метод Ньютона соответствует тому, что на каждой итерации тоже решается задача линейной теории упругости, но для некой фиктивной среды, которая является анизотропной и неоднородной.

31) Исследование сходимости метода упругих решений.

(Л18)

Докажем сходимость метода упругих решений.

Мы начали с конечно-элементного уравнения, а потом пришли к вариационному уравнению:

$$\int_V C_{ijkl} \frac{u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l}^n}{\tau} v_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}^n) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = A^e(\vec{v})$$

Мы получили это уравнение, если:

$$\vec{u}^n, \vec{v} \in H^N$$

Возникает вопрос: теперь мы можем взять и более общо рассматривать.

Теперь мы вместо этого условия: $\vec{u}^n, \vec{v} \in H^N$ можно взять:

$$\vec{u}^n, \vec{v} \in H.$$

H^N – конечномерное пространство

H – исходное пространство

Что означает это изменение? Сначала мы переписывали итерационный процесс от чисто алгебраической задачи в виде вариационного уравнения. Сейчас это полезно для информативности. А теперь давайте рассмотрим этот итерационный процесс в исходном бесконечномерном пространстве H . Оказывается, что сходимость этого процесса возможно доказать в бесконечномерном пространстве. Практически итерационный процесс применяется к конечномерному пространству, так как мы задачу решаем в конечномерном пространстве методом конечных элементов или методом конечных разностей. Но доказывать и исследовать саму сходимость этого процесса возможно в бесконечномерном пространстве.

В следующий раз мы будем доказывать сходимость метода упругих решений даже в более общем виде, чем требуется для конечно-элементной задачи. А в конечномерной задаче это будет просто следствие. Если верно во внешнем пространстве, то во внутреннем тем более верно.

Докажем сходимость этого процесса в бесконечномерном пространстве H . Рассмотрим итерационный процесс в бесконечномерном пространстве H .

(Л19)

Конечно-элементное уравнение:

$$\underline{A}(0) \cdot \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \underline{A}(u^n) \cdot u^n = F; \quad u^n, u^{n+1} \in \mathbb{R}^N$$

\Downarrow

в H^N

Вариационное уравнение:

$$\int_V C_{ijkl}(0) \frac{\vec{u}_{k,l}^{n+1} - \vec{u}_{k,l}^n}{\tau} v_{i,j} dV + \int_V C_{ijkl}(\vec{u}^n) u_{k,l} v_{i,j} dV = A^e(\vec{v})$$

$$\varphi_0\left(\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau}, \vec{v}\right) + \varphi(\vec{u}^n, \vec{v}) = A^e(\vec{v})$$

$$\varphi_0(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V C_{ijkl}(0) u_{k,l} v_{i,j} dV = (\vec{u}, \vec{v})_E$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in H^N$$

$$C_{ijkl}(0) > 0$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V C_{ijkl}(\vec{u}) u_{k,l} v_{i,j} dV$$

(по \vec{u} – нелинейна, по \vec{v} – линейна)

Докажем сходимость в бесконечномерном пространстве. Тогда сходимость в конечномерном пространстве будет следствием.

Рассмотрим множество функций:

$\vec{u}, \vec{v} \in H$ и энергетическое пространство:

$$H_E: (\vec{u}, \vec{v})_E = \varphi_0(\vec{u}, \vec{v})$$

Для конечномерного случая это означает:

$$H^N \subset H$$

$$\forall \vec{u}^N, \vec{v}^N \in H^N: (\vec{u}^N, \vec{v}^N)_E = \varphi_0(\vec{u}^N, \vec{v}^N)$$

$$H^N \rightarrow H_E^N, \quad H_E^N \subset H_E$$

Рассмотрим φ : \vec{u} – фиксируем.

По теореме Рисса:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}^*, \vec{v})_E$$

($\exists \vec{u}^* \in H_E$, что это верно)

$\Rightarrow \vec{u}^*$ есть оператор: $\vec{u}^* = N(\vec{u})$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (N(\vec{u}), \vec{v})_E$$

$$A^e(\vec{v}) = (F, \vec{v})_E$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = A^e(\vec{v})$$

\Downarrow

$$(N(\vec{u}) - F, \vec{v})_E = 0$$

$$\Rightarrow \text{в } H_E: N(\vec{u}) = F$$

Аналогично, в конечномерном случае:

$$\text{в } H_E^N: \hat{N}(\hat{u}) = \hat{F}$$

Вариационное уравнение $\varphi_0(\vec{u}, \vec{v}) = A^e(\vec{v})$

в энергетическом пространстве записывается так:

$$\varphi_0(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})_E = (E\vec{u}, \vec{v})_E$$

$$\text{в } H_E: N(0) = E$$

Итерационный процесс:

$$\varphi_0\left(\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau}, \vec{v}\right) + \varphi(\vec{u}^n, \vec{v}) = A^e(\vec{v})$$

$$E \cdot \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + N(u^n) = F$$

E – единичный оператор, можно стереть

$$u^{n+1} = u^n - \tau N(u^n) + \tau F$$

$$u = u - \tau N(u) + \tau F$$

$$E \cdot \frac{u - u}{\tau} + N(u) = F$$

$$N(u) = F$$

Обозначим:

$$S(u) = E \cdot u - \tau N(u)$$

Метод упругих решений – это метод простой итерации, примененный к нелинейному уравнению.

$$u^{n+1} - u = S(u^n) - S(u)$$

Неравенство Лагранжа:

$$\|u^{n+1} - u\|_E \leq \|S'(u_\xi)\|_E \cdot \|u^n - u\|_E$$

Дифференциал Гато:

$$DS(u, w) = S'(u) \cdot w$$

$$DS(u, w) = \left. \frac{d}{d\xi} S(u + \xi w) \right|_{\xi=0}$$

↑ Используют так: если эта производная существует, и она линейна по w , то говорят, что существует дифференциал Гато, и он представляется так, как написано выше.

$$u^n \leftrightarrow u$$

$$u_\xi = u + \xi(u^n - u), \quad \xi \in [0, 1]$$

Правая часть исчезла \Rightarrow Сходимость будем при любой правой части.

Достаточное условие сходимости:

$$\|S'(u_\xi)\|_E \leq \rho < 1$$

$$v^n = u^n - u$$

$$\|v^{n+1}\|_E \leq \rho \|v^n\|_E$$

$$\|v^n\|_E \leq \rho^n \|v^0\|_E$$

$$\frac{\|v^n\|_E}{\|v^0\|_E} \leq \varepsilon, \quad \rho^n \leq \varepsilon, \quad n \geq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\rho}}$$

$$S(u) = E \cdot u - \tau N(u)$$

$$S'(u_\xi) = ?$$

$$DS(u, w) = \left. \frac{d}{d\xi} S(u + \xi w) \right|_{\xi=0} = S'(u) \cdot w$$

$$S'(u) = E - \tau N'(u)$$

$$\left. \frac{d}{d\xi} S(u + \xi w) \right|_{\xi=0} = \left. \frac{d}{d\xi} [E \cdot (u + \xi w) - \tau N(u + \xi w)] \right|_{\xi=0} = Ew - \tau N'(u)w$$

$$DS(u, w) = Ew - \tau N'(u)w = [E - \tau N'(u)]w = S'(u)w$$

$$u_\xi = u + \xi(u^n - u)$$

$$\forall u: \|S'(u)\|_E \leq \rho$$

$$S'(u)w = [E - \tau N'(u)]w$$

$$\|S'(u)\|_E \leq \rho < 1$$

$$\|E - \tau N'(u)\|_E \leq \rho$$

Пусть N' удовлетворяет неравенствам:

$$\gamma_1 E \leq N'(u) \leq \gamma_2 E \quad \text{условная запись неравенства}$$

$$\gamma_1(Ew, w)_E \leq (N'(u)w, w)_E \leq \gamma_2(Ew, w)_E$$

$$\|E - \tau N'(u)\|_E = \max_{\gamma_1 \leq \lambda \leq \gamma_2} |1 - \tau \lambda| \Rightarrow$$

$$N'(u)w = \lambda w$$

$$\gamma_1 \leq \lambda \leq \gamma_2$$

$$\rho = \min_{\tau} \max_{\gamma_1 \leq \lambda \leq \gamma_2} |1 - \tau \lambda|$$

$$\tau^* = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

$$\rho(\tau^*) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \text{где } \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\rho}} \approx \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2\xi}$$

В этой теории все определяется γ_1 и γ_2 . Вычислим их.

$$\gamma_1(w, w)_E \leq (N'(u)w, w)_E \leq \gamma_2(w, w)_E$$

$$(w, w)_E = \int_V C_{ijkl}(0) w_{k,l} w_{i,j} dV$$

$$(N'(u)w, w)_E = \int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) w_{k,l} w_{i,j} dV$$

так как

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) w_{k,l} w_{i,j} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}) w_{k,l} w_{i,j} dV$$

$$(N(u), v)_E = \int_V C_{ijkl}(\vec{u}) u_{k,l} v_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}) v_{i,j} dV$$

$$(N(u + \xi w), v)_E = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u} + \xi \vec{w}) v_{i,j} dV$$

Продифференцируем по $\frac{d}{d\xi}$ и положим $\xi = 0$:

$$(N'(u)w, v)_E = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{w}) v_{i,j} dV$$

$$\uparrow = \varepsilon_{ij}(\vec{v})$$

$$v = w$$

$$\gamma_1 E \leq N'(u) \leq \gamma_2 E$$

\Updownarrow

$$\gamma_1 \int_V C_{ijkl}(0) w_{i,j} w_{k,l} dV \leq \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}) w_{i,j} w_{k,l} dV \leq \gamma_2 \int_V C_{ijkl}(0) w_{i,j} w_{k,l} dV$$

Еще более достаточные условия:

$$\gamma_1 C_{ijkl}(0) h_{ij} h_{kl} \leq \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\vec{u}) h_{ij} h_{kl} \leq \gamma_2 C_{ijkl}(0) h_{ij} h_{kl} \quad (\forall \vec{u}) \quad (*)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_u) \varepsilon_{kl}$$

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$C_{ijkl}(0) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Неравенства (*) распадаются:

$$\begin{cases} \gamma_1 (2\mu) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \leq \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\vec{u}) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \leq \gamma_2 (2\mu) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \\ \gamma_1 K(h^0)^2 \leq K(h^0)^2 \leq \gamma_2 K(h^0)^2 \end{cases}$$

$\bar{h}_{ij}, \bar{h}_{kl}$ – девиаторы

Найдем $\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}$:

$$S_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u)) e_{ij}$$

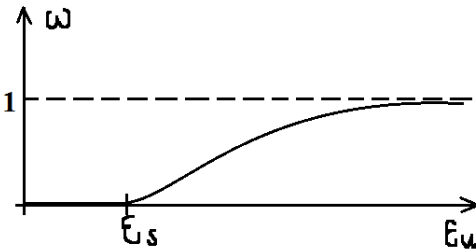
$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}}(\vec{u}) &= \mu(1 - \omega(\varepsilon_u))(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu\omega' \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial e_{kl}} e_{ij} = \\ &= \mu(1 - \omega(\varepsilon_u))(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2\mu\omega' \cdot \frac{e_{kl}e_{ij}}{\varepsilon_u}(\vec{u})\end{aligned}$$

$$\omega' = \frac{d\omega}{d\varepsilon_u}$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{e_{mn}e_{mn}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial e_{kl}} = \frac{1}{2\sqrt{e_{mn}e_{mn}}} \cdot 2e_{kl} = \frac{e_{kl}}{\varepsilon_u}$$

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u(\vec{u}))) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} - 2\mu\omega' \cdot \frac{e_{ij}e_{kl} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl}}{\varepsilon_u} \quad (**)$$



$$\omega > 0, \quad \omega' > 0$$

$$e_{ij}e_{kl} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} = (e_{ij} \bar{h}_{ij})^2 > 0$$

Получим:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \leq 2\mu \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} \quad (***)$$

$$\Rightarrow \gamma_2 = 1$$

$$(**): 0 < (1 - \omega(\varepsilon_u(\vec{u}))) < 1 \quad \text{и еще отнимается положительный член } 2\mu\omega' \cdot \frac{(e_{ij} \bar{h}_{ij})^2}{\varepsilon_u}$$

Применим неравенство:

$$(e_{ij} \bar{h}_{ij})^2 \leq (e_{ij}e_{ij})(\bar{h}_{kl}\bar{h}_{kl}) = \varepsilon_u^2(\bar{h}_{kl}\bar{h}_{kl})$$

$$e_{ij}e_{ij} = \varepsilon_u^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} &= 2\mu(1 - \omega) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} - 2\mu\omega' \cdot \frac{(e_{ij} \bar{h}_{ij})^2}{\varepsilon_u} \geq 2\mu(1 - \omega) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} - 2\mu\omega' \frac{\varepsilon_u^2(\bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij})}{\varepsilon_u} = \\ &= 2\mu(1 - \omega) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} - 2\mu\omega' \varepsilon_u (\bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij}) = 2\mu(1 - \omega - \omega' \varepsilon_u) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij}\end{aligned}$$

(Больше, потому что отняли меньшее.)

Получим:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \geq 2\mu(1 - \omega - \omega' \varepsilon_u) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} \quad (****)$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \min_{\varepsilon_u(\vec{u})} (1 - \omega - \omega' \varepsilon_u)$$

Итак, получили:

$$\min_{\varepsilon_u(\vec{u})} (1 - \omega - \omega' \varepsilon_u) (2\mu) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij} \leq \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \leq (2\mu) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{ij}$$

$$\gamma_1 (2\mu) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \leq \frac{\partial S_{ij}}{\partial e_{kl}} (\vec{u}) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \leq \gamma_2 (2\mu) \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl}$$

$$\gamma_1 = \min_{\varepsilon_u(\vec{u})} (1 - \omega - \omega' \varepsilon_u)$$

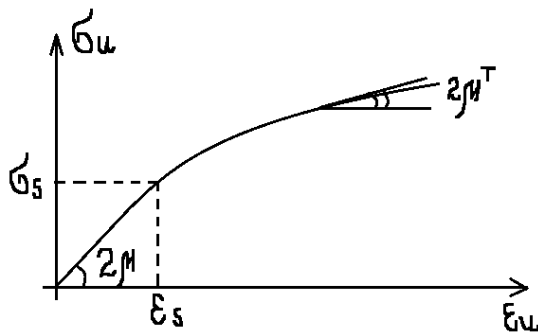
$$\gamma_2 = 1$$

Смысл γ_1 :

$$\sigma_u = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))\varepsilon_u$$

$$\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} = 2\mu(1 - \omega) - 2\mu\omega'\varepsilon_u = 2\mu(1 - \omega - \omega'\varepsilon_u)$$

$$\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} = 2\mu(1 - \omega - \omega'\varepsilon_u)$$



$$2\mu^T = \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u}$$

$$\mu^T = \mu(1 - \omega - \omega'\varepsilon_u)$$

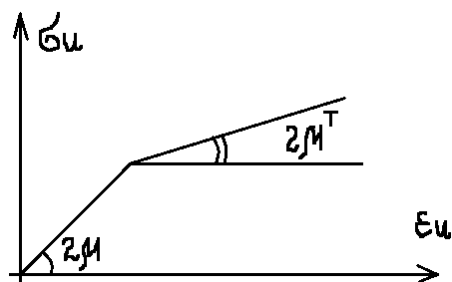
$$\frac{\mu^T}{\mu} = 1 - \omega - \omega'\varepsilon_u$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \min_{\varepsilon_u(\vec{u})} \frac{\mu^T}{\mu}$$

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \min_{\varepsilon_u(\vec{u})} \frac{\mu^T}{\mu}$$

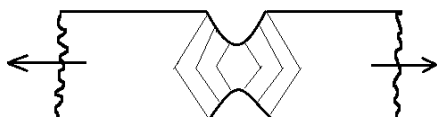
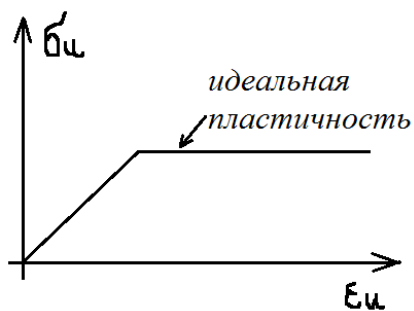
$$\gamma_2 = 1$$

\Rightarrow Чем больше в задаче возрастает интенсивность, тем больше ухудшается сходимость.



$$\frac{\mu^T}{\mu} = \text{const}$$

Если идеальная пластичность, то не сходимости вообще.



$\frac{\mu^T}{\mu}$	МУР		МППУ		МН	
	$n_{\text{итер}}$	$t, \text{сек}$	$n_{\text{итер}}$	$t, \text{сек}$	$n_{\text{итер}}$	$t, \text{сек}$
0,1	23	1108	7	327	4	178
0,02	117	5618	11	525	5	227

32) Методы решения нелинейных задач, сформулированных в скоростях.

(Л20)

Было 2 вида вариационных задач:

$$1) \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = A^e(\vec{v})$$

$$N(\hat{u}) = \hat{F}$$

$$K(\hat{u}) \cdot \hat{u} = \hat{F}$$

$$A^e(\vec{v}) = \int_V \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\Sigma_2} \vec{S} \cdot \vec{v} d\Sigma$$

$$2) \int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\dot{\vec{u}}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV = \dot{A}^e(\vec{v})$$

$$\dot{A}^e(\vec{v}) = \int_V \dot{\vec{f}} \cdot \vec{v} dV + \int_{\Sigma_2} \dot{\vec{S}} \cdot \vec{v} d\Sigma$$

Методы решения задачи 2.

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}) \dot{u}_{k,l} v_{i,j} dV = \dot{A}^e(\vec{v})$$

$$C_{ijkl}^T(\vec{u}) = \lambda(\vec{u}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\vec{u}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 2\mu\omega' \frac{e_{ij}(\vec{u}) e_{kl}(\vec{u})}{\varepsilon_u(\vec{u})}$$

Производная означает производную по параметру нагружения.

$\forall t: \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^T(\vec{u}) \dot{\varepsilon}_{kl}(\vec{u})$ – определяющие соотношения для скоростей

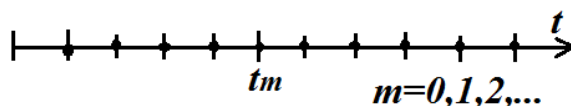
Это естественная постановка для теории течения. (Деформационную постановку можно продифференцировать и получить этот вид.)

Нужно уметь это решать.

После КЭ-дискретизации можно написать:

$$K^T(\hat{u}) \cdot d\hat{u} = d\hat{F}$$

Параметр нагружения:



Задачу, сформулированную в скоростях, нужно решать для каждого шага нагружения.

Это универсальная постановка.

Явный метод Эйлера.

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}^m) \delta u_{k,l}^{m+1} v_{i,j} dV = \delta A^{m+1}(\vec{v})$$

где

$$\delta \vec{u}^{m+1} = \vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m$$

$$\delta A^{m+1}(\vec{v}) = \int_V \underbrace{(\vec{f}^{m+1} - \vec{f}^m)}_{\delta \vec{f}^{m+1}} \cdot \vec{v} dV + \int_{\Sigma_2} \underbrace{(\vec{S}^{m+1} - \vec{S}^m)}_{\delta \vec{S}^{m+1}} \cdot \vec{v} d\Sigma$$

Это линейное уравнение относительно $\delta \vec{u}^{m+1}$.

$$K^T(\hat{u}^m) \cdot \delta \hat{u}^{m+1} = \delta \hat{F}^{m+1}$$

↑ Линейная система.

Неявный метод Эйлера.

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}^{m+1}) \delta u_{k,l}^{m+1} v_{i,j} dV = \delta A^{m+1}(\vec{v})$$

$$K^T(\hat{u}^{m+1}) \cdot \delta \hat{u}^{m+1} = \delta \hat{F}^{m+1}$$

↑ Нелинейная система.

Используется следующая схема:

Предиктор:

$$1) \int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}^m) \delta u_{k,l}^{(p)m+1} v_{i,j} dV = \delta A^{m+1}(\vec{v})$$

Корректор:

$$2) \int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}^{(p)m+1}) \delta u_{k,l}^{(c)m+1} v_{i,j} dV = \delta A^{m+1}(\vec{v})$$

Аналогично:

$$K^T(\hat{u}^m) \cdot \delta \hat{u}^{(p)m+1} = \delta \hat{F}^{m+1}$$

$$K^T(\hat{u}^{(p)m+1}) \cdot \delta \hat{u}^{(c)m+1} = \delta \hat{F}^{m+1}$$

На шаге m : $\vec{u}^m \rightarrow \vec{u}^{m+1}$

Можно провести несколько внутренних итераций.

Схема с внутренними итерациями.

$$\int_V C_{ijkl}^T(\vec{u}^{m+1,s}) \delta u_{k,l}^{m+1,s+1} v_{i,j} dV = \delta A^{m+1}(\vec{v})$$

$$\vec{u}^{m+1,s} = \vec{u}^m + \delta \vec{u}^{m+1,s}$$

$$s = 0, 1, 2, \dots$$

$\vec{u}^{m+1,0} = \vec{u}^m$ – с прошлой итерации

Это обобщение схемы «предиктор-корректор».

Обычно делают 2-3 внутренние итерации, так как нулевое приближение близко к решению.

Аналогично:

$$K^T(\hat{u}^{m+1,s}) \cdot \delta \hat{u}^{m+1,s+1} = \delta \hat{F}^{m+1}$$

Эти все методы обеспечивают первый порядок точности относительно

$$\delta t = t_{m+1} - t_m \quad (O(\delta t))$$

Метод трапеций ($O(\delta t^2)$).

$K^T(\hat{u})d\hat{u} = d\hat{F}$ – есть система

$$\frac{1}{2} [K^T(\hat{u}^m) + K^T(\hat{u}^{m+1,s})] \delta \hat{u}^{m+1,s+1} = \delta \hat{F}^{m+1}$$

$$\hat{u}^{m+1,0} = \hat{u}^m$$

Можно написать по-другому:

$$d\hat{u} = (K^T)^{-1} d\hat{F}$$

↓

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{f}(t, \hat{u}), \quad \text{где } \hat{f}(t, \hat{u}) = (K^T)^{-1}(\hat{u}) \frac{d\hat{F}(t)}{dt}$$

(Система ОДУ.)

К этой системе можно применить метод трапеций:

$$\frac{\hat{u}^{m+1,s+1} - \hat{u}^m}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\hat{f}(t_m, \hat{u}^m) + \hat{f}(t_{m+1}, \hat{u}^{m+1,s})]$$

Более детально:

$$\frac{\hat{u}^{m+1,s+1} - \hat{u}^m}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[(K^T)^{-1}(\hat{u}^m) \frac{d\hat{F}}{dt}(t_m) + (K^T)^{-1}(\hat{u}^{m+1,s}) \frac{d\hat{F}}{dt}(t_{m+1}) \right]$$

Можно писать другие методы.

Устойчивость методов Эйлера.

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{f}(t, \hat{u})$$

Если $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{u}} < 0$, то явный метод является устойчивым.

Пример:

$\sigma_u(t)$ – известно

↑ аналог $\hat{F}(t)$

Найти $\varepsilon_u(t)$

↑ аналог \hat{u}

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$$

$$\frac{d\sigma_u}{dt} = \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} \cdot \frac{d\varepsilon_u}{dt}$$

$$\frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u} = K^T(\varepsilon_u)$$

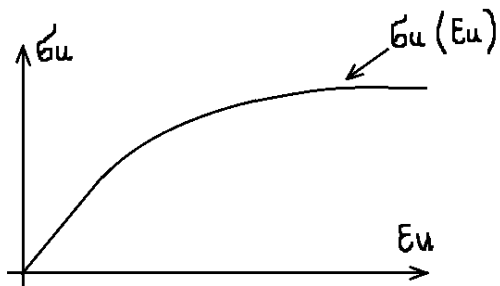
$$d\sigma_u = K^T(\varepsilon_u)d\varepsilon_u$$

$$\frac{d\varepsilon_u}{dt} = \underbrace{(K^T)^{-1}(\varepsilon_u) \frac{d\sigma_u(t)}{dt}}_{f(t, \varepsilon_u)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u} - ?$$

$$f(t, \varepsilon_u) = (K^T)^{-1}(\varepsilon_u) \dot{\sigma}_u(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u} = \frac{d(K^T)^{-1}}{d\varepsilon_u} \cdot \dot{\sigma}_u(t)$$



$$K^T = \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u}$$

$$\frac{dK^T}{d\varepsilon_u} = \frac{d^2\sigma_u}{d\varepsilon_u^2} < 0 \quad - \text{видно из графика}$$

$$K^T \cdot (K^T)^{-1} = 1$$

Дифференцируем по ε_u :

$$K^T \frac{d(K^T)^{-1}}{d\varepsilon_u} + \frac{dK^T}{d\varepsilon_u} (K^T)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(K^T)^{-1}}{d\varepsilon_u} = - \underbrace{(K^T)^{-1} \frac{dK^T}{d\varepsilon_u} (K^T)^{-1}}_{>0}$$

\Rightarrow Явный метод не является устойчивым.

$$|\delta \varepsilon_u^{m+1}| \leq \underbrace{\max_{\varepsilon_u} \left| 1 + \delta t \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u} \right|}_{>1} \cdot |\delta \varepsilon_u^{m+1}|$$

Для неявного метода:

$$|\delta \varepsilon_u^{m+1}| \leq \frac{1}{\max_{\varepsilon_u} \left| 1 - \delta t \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_u} \right|} \cdot |\delta \varepsilon_u^{m+1}|$$

Тоже неустойчивость... (Нужно проверить и разобраться!)