Approximer la vitesse d'effusion d'un gaz

Supposons qu'on perce un trou d'aire A sur une des faces d'une boîte pleine d'un gaz. On va chercher, étape par étape, à estimer à laquelle vitesse le gaz s'échappe.

Commençons par rappeler que la pression moyenne exercée par une molécule contre une paroi est

$$\bar{P} = -\frac{m}{A}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Sur un modèle où les collisions sont élastiques, on a $\Delta v_x = v_{\text{finale}} - v_{\text{initiale}} = -2v_x$,

$$\bar{P} = -\frac{m}{A}\frac{-2v_x}{\Delta t} = \frac{m}{A}\frac{2v_x}{\Delta t}$$

En imaginant qu'il y ait suffisamment de molécules dans la boîte qui frappent cette paroi, on peut dire que la pression est *continue*, et donc parler de pression plutôt que de *pression moyenne.*

De même, on rappelle que la pression totale est la somme des pressions partielles, exercées par chaque molécule.

$$\text{PA} = \sum_{i=0}^{N} m_i \frac{2v_x}{\Delta t_i}$$

On peut ramener la somme à une multiplication. Si le gaz est *simple*, c'est-à-dire composé d'un seul type de molécules, et en faisant la moyenne de toutes les vitesses, on peut écrire,

$$P = N \cdot \frac{m}{A}\frac{2\bar{v_x}}{\overline{\Delta t}}$$

Ce qui nous permet de trouver une expression pour N, le nombre de molécules dans la boîte.

$$N = \frac{\text{PA}\overline{\Delta t}}{m\,2\bar{v_x}} \tag{1}$$

Puisque ces molécules sont capables de s'échapper, on cherche à compter la différence entre le nombre initiale N de molécules et le nombre de molécules restantes à un temps t donné. On note -ΔN cette différence. En réécrivant (1), on a,

$$-\Delta N = \frac{\text{PA}\overline{\Delta t}}{m\,2\bar{v_x}}$$

On peut faire l'approximation $\bar{v_x} \approx v_{\text{rms}} = (\bar{v_x^2}) = \sqrt{\text{kT}/m}$, d'où,

$$-\Delta N = \frac{\text{PA}\overline{\Delta t}}{2m}\sqrt{\frac{m}{\text{kT}}},$$

$$\begin{aligned}
-\Delta N &= \frac{\text{PA}\overline{\Delta t}}{2m}\sqrt{\frac{m}{\text{kT}}} \\
&= \frac{kTA\,\overline{\Delta t}}{2mV}\sqrt{\frac{m}{\text{kT}}}N = \frac{kT}{\sqrt{\text{kT}}}\frac{\sqrt{m}}{m}\frac{A\overline{\Delta t}}{2V}N \quad \text{(loi des gaz parfaits)} \\
&= \frac{A\,\overline{\Delta t}}{2V}\sqrt{\frac{kT}{m}}N
\end{aligned}$$

On divise par $\overline{\Delta t}$ de chaque côté, et on inverse de signe,

$$\Delta N / \overline{\Delta t} = -\big(A / 2V \cdot \sqrt{k\,T / m}\,\big) \times N$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta N}{\overline{\Delta t}} &= -\left(\frac{A}{2V}\sqrt{\frac{k\,T}{m}}\right)N\\
&= -\frac{1}{\tau}N, \quad \left(\text{avec}\,\tau = \frac{2\,V}{A}\sqrt{\frac{m}{k\,T}}\right)
\end{aligned}$$

En prenant la limite quand $\overline{\Delta t} \to 0$, on a

$$\partial_t N = -\frac{1}{\tau}N,$$

C'est une équation différentielle linéaire, homogène, du premier ordre. Sa solution est

$$N(t) = N(0)\,e^{-t/\tau},$$

Ce qui nous permettra de calculer facilement la vitesse d'effusion du système ($\Delta N / \Delta t$). La constante τ est le temps caractéristique du système.