Mécanique : des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ...

On travaille classiquement en mécanique classique avec des repères cartésiens : on y repère des points ou des vecteurs grâce à deux *composantes* qui indiquent là où se situe l'objet (ou la pointe de la flèche dans le cadre d'un vecteur) dans le *plan*.

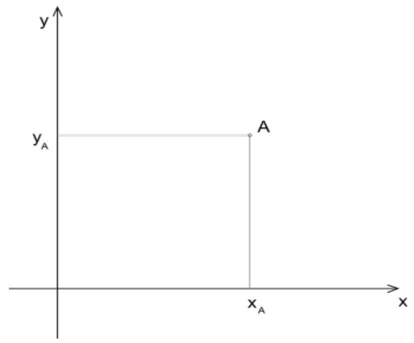

Figure 1. Ici, le point A est de composantes (x_A, y_A)

Il existe une foultitude de manière d'écrire mathématiquement ces objets dans un repère cartésien, et sans être exhaustif, on peut citer une manière très « algèbre linéaire » en décomposant l'objet dans une base au préalable définie (dans la figure (1), si on admet deux vecteurs unitaires $\hat{x}, \hat{y}$, on écrirait $A = x_A\hat{x} + y_A\hat{y}$), ou une autre qui fait appel aux matrices (toujours dans la figure (1), $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$).

Le souci, c'est que l'utilisation d'un repère cartésien est relativement peu aisée lorsque l'on souhaite travailler sur certains problèmes, exemple donné par les mouvements de type circulaires, qui sont bien plus faciles à décrire en coordonnées dites « polaires ».

Pour décrire la position d'un point grâce aux coordonnées polaires, on a besoin de deux composantes : la distance entre l'origine du plan et l'objet, qu'on note habituellement r (pour rayon) et de l'angle formé entre l'axe des abscisses et le « vecteur rayon/position » qui relie l'origine au point A, noté φ ou θ.

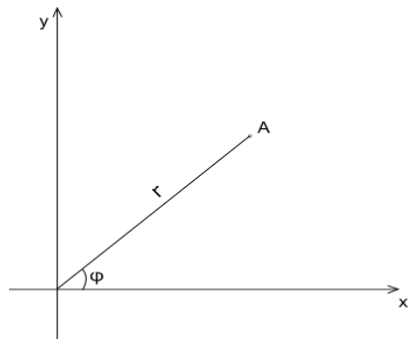

Figure 2. Le même point A, représenté grâce aux coordonnées polaires

A priori, rien de bien compliqué. On cherche cependant dans un premier temps à pouvoir passer de l'un à l'autre : on introduit alors les formules de conversion suivantes,

$$r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \text{ et } \varphi = \operatorname{atan2}(y_A, x_A)$$

$$x_A = r\cos\varphi \text{ et } y_A = r\sin\varphi$$

À y regarder de plus près, on peut définir une nouvelle base qui nous permet de travailler avec des quantités vectorielles.

On définit un premier vecteur unitaire, de même direction et sens que le « vecteur position » - qui, lui, est de même direction que le rayon r et de sens de l'origine au point A. Commençons par projeter ce vecteur position dans le plan cartésien :

$$r = |\vec{r}|$$

$$\vec{r} = r \cos\varphi \, \hat{x} + r \sin\varphi \, \hat{y}$$

Ainsi, le vecteur position unitaire est défini comme

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi \, \hat{x} + \sin\varphi \, \hat{y}$$

On définit un autre vecteur, le vecteur $\hat{\varphi}$, qui doit être orthogonal au vecteur $\hat{r}$. Cela impose que $\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$. Pour ça, pas besoin d'aller chercher bien loin, on ressort nos formules de trigonométrie :

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \text{ et } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$

On aurait pu tout aussi bien choisir d'inverser les signes : ce choix est arbitraire pour peu que vous précisiez ce que vous utilisez. Alors, le vecteur $\hat{\varphi}$ s'écrit

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi \, \hat{x} + \cos\varphi \, \hat{y}$$

Avec notre choix de signes, le vecteur $\hat{\varphi}$ pointe dans la direction anti-horaire.

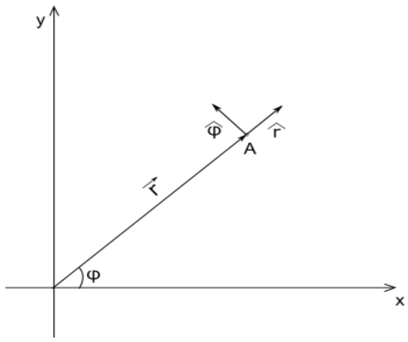

Figure 3. Les nouveaux vecteurs $\hat{\varphi}, \hat{r}$

Puisque les vecteurs $\hat{r}$ et $\hat{\varphi}$ sont perpendiculaires, ils forment une nouvelle base du plan dans laquelle on peut décomposer tout autre vecteur. Exemple pour une force,

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\varphi \hat{\varphi}$$

Imaginons que le point A se déplace à vitesse non nulle, on peut vouloir décrire le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans cette nouvelle base. On rappelle que $\vec{v} = \partial_t \vec{r} = \partial_t [r \hat{r}]$. Puisque r est fonction du temps, en appliquant la formule de la dérivée d'un produit de fonctions, on a

$$\partial_t \vec{r} = \dot{r} \hat{r} + r \partial_t \hat{r}$$

Que peut-être $\partial_t \hat{r}$? On a l'expression suivante :

$$\partial_t \hat{r} = \partial_t [\cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}]$$

Mais puisque φ est une fonction du temps, on applique les règles pour dériver des fonctions composées:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{r} &= -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{x} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{y} \\ &= \dot{\varphi}\hat{\varphi} \end{aligned}$$

Donc,

$$\vec{v} = \partial_t \vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

On recommence l'opération pour trouver l'expression de l'accélération dans cette base, ce qui nous permettra d'exprimer la seconde loi de Newton dans cette base :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \partial_t^2 \vec{r} &= \partial_t[\dot{r}\hat{r}] + \partial_t[r\dot{\varphi}\hat{\varphi}] \\ &= \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - r\dot{\varphi}^2\hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi} \end{aligned}$$

Si bien que la seconde loi de Newton s'écrit, dans cette base :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi}]$$

Et voilà !