Quand la montagne se joue de la musique

Ou comment trouver un prétexte pour faire de la thermodynamique...

Les raisons qui motivent cet écrit me viennent d'un exercice du livre *Introduction to Thermal Physics*, de D. Schroeder et d'une question en particulier,

> *When Scotland's Battlefield Band played in Utah, one musician remarked that the high altitude threw their bagpipes out of tune. Would you expect altitude to affect the speed of sound (and hence, the frequences of the standing waves in the pipes)? If so, in which direction? If not, why not?*

Commençons par rappeler que la vitesse du son s'écrit

$$c_s = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{1}$$

Où ρ est la masse volumique du gaz (ici l'air), et B le *module d'élasticité isostatique,* une sorte de mesure de la « rigidité » d'un matériau, défini comme le rapport

$$B = \frac{\Delta P}{-\Delta V / V} (= -V \partial_V P \,\text{quand}\, \Delta V \longrightarrow 0) \tag{2}$$

Admettons que l'air se comporte comme un gaz parfait aux conditions normales de température et de pression. Puisque le son va à une vitesse bien plus élevée que la chaleur ne se diffuse, on approxime la pression en utilisant l'équation de compression adiabatique,

$$P = c_1 / V^\gamma \text{ (avec } c_1 \text{une constante)},$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\partial_V P &= c_1 \partial_V V^{-\gamma} \\
&= -\gamma \frac{c_1}{V^{(\gamma+1)}} = -\gamma \frac{c_1}{V^\gamma} \frac{1}{V} \\
&= -\gamma \frac{P}{V}
\end{aligned}$$

Alors,

$$B_{\text{adiabatique}} = -V \partial_V P = \gamma P, \tag{3}$$

Revenons à (1). Le masse volumique est le rapport entre la masse du gaz, divisée par le volume qu'il occupe. On pose m la masse d'une molécule d'air, on a alors,

$$\rho = Nm / V,$$

Or, d'après la loi des gaz parfaits, $V = NkT/P$, donc,

$$\rho = \frac{Nm}{NkT/P} = \frac{Pm}{\mathrm{kT}} \tag{4}$$

Avec (3) et (4), on peut réécrire la vitesse du son c_s

$$\begin{aligned}
c_s &= \sqrt{\frac{B_{\text{adiabatique}}}{\rho}} = \left(\frac{\gamma P}{Pm/(kT)} \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{\gamma k T}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Avec M la masse molaire de l'air. Cette expression n'est pas sans nous rappeler celle de la vitesse quadratique moyenne des molécules. En fait, la vitesse du son dans l'air est plus lente d'un facteur $\sqrt{3/\gamma}$.

Toujours est-il que l'expression (5) nous permet de conclure sur la question posée : la vitesse du son ne dépend pas de la pression, mais de la *température*, si bien que si les cornemuses avaient l'air d'être désaccordées, cela ne pouvait être dû qu'aux conditions de température dans lesquelles le concert était joué. Et voilà !