Intégration par substitution

1. Intégrale indéfinie

En utilisant la règle pour dériver des fonctions composées,

$$\partial(g\circ f) = (\partial f)\,(\partial g\circ f)$$

On peut intégrer les fonctions de la forme

$$\int (\partial_x f(x))\,(\partial_x g\circ f)(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

En faisant les substitutions suivantes

$$\begin{aligned} f(x) &= t, \\ \partial_x f(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire (1) :

$$\int g(t)\mathrm{d}t$$

On n'oubliera évidemment pas de substituer à nouveau. *Exemple 1.* Soit l'intégrale indéfinie suivante,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x &= \int t^2\mathrm{d}t && (\text{par substitution}), \\ &= \frac{1}{3}t^3 + c_1 && (\text{avec } c_1, \text{une certaine constante}), \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x + c_1 && (\text{en substituant à nouveau}). \end{aligned}$$

Exemple 2. Voici une seconde intégrale indéfinie,

$$\int (ax+b)^n\mathrm{d}x \tag{2}$$

On peut procéder en faisant les substitutions suivantes

$$\begin{aligned} t &= ax+b, \\ \mathrm{d}t &= a\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow \mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

En reprenant (2) :

$$\begin{aligned} \int (ax+b)^n\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a}t^n\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right] + c_1 && (\text{avec } c_1, \text{une constante}), \\ &= \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c_1 && (\text{en remplaçant}). \end{aligned}$$

2. Intégrale définie

Il suffit de procéder la même manière pour les intégrales définie, en prenant cette fois en compte les bornes, ce qui amène à des changements de variable supplémentaires.

Reprenons l'expression de (1), et intégrons-la entre a et b,

$$\int_a^b \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

On pose à nouveau,

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sin x, \\ \mathrm{d}t & = & \cos x \, \mathrm{d}x, \\ \text{Quand} \quad x = a & \Longleftrightarrow & t = \sin a, \\ \text{Quand} \quad x = b & \Longleftrightarrow & t = \sin b, \end{array}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x &= \int_{\sin a}^{\sin b} t^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}(\sin^3 b - \sin^3 a) \end{aligned}$$