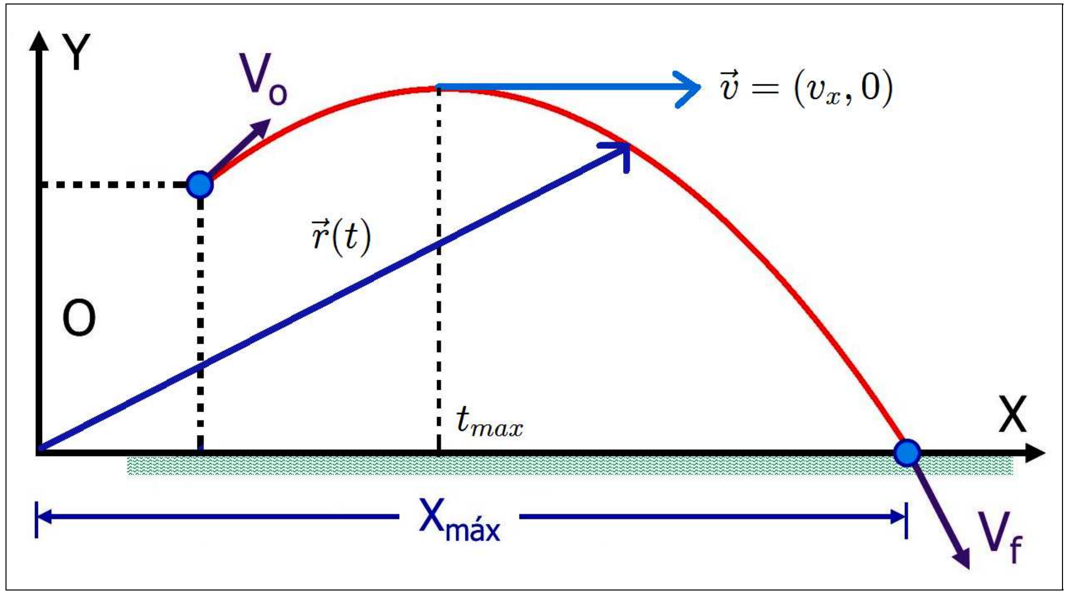
ECUACIONES LANZAMMIENTO DE UN PROYECTIL

$I.-$ IDEAL

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA POSICION

La ecuación de posición del proyectil esta dada por :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$



considerando el sistema de referencia en la mano del lanazador tenemos :

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = (x_0, y_0) & \text{: Vector posición inicial} \\ \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) & \text{: Velocidad inicial} \\ \vec{a} = (0, -g) & \text{: Vector aceleración} \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(x_0 + v_0 cos(\theta_0)t, y_0 + v_0 sen(\theta_0)t - \frac{g}{2}t^2\right)$$

POSICION EN COORDENADAS CARTESIANAS

En un sistema de referencia cartesiano la ecuación esta dada por la función cuadrática :

$$y(x) = y_0 + tg(\theta_0)\left[x - x_0\right] - \frac{g}{2v_0^2}\left[1 + tg^2(\theta_0)\right]\left[x - x_0\right]^2$$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA VELOCIDAD

El vector velocidad en función del parametro t esta dado por :

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) = (v_x(t), v_x(t)) = (v_0 cos(\theta_0), v_0 sen(\theta_0) - gt)$$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA ACELERACION

El vector velocidad en función del parametro t esta dado por :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = (a_x(t), a_x(t)) = (0, -g)}$$

ALCANCE HORIZONTAL

El alcance horizontal esta dado por :

$$\boxed{R = x_0 + \frac{v_0^2 sen(2\theta_0)}{2g} + \frac{v_0 cos(\theta_0)}{g}\sqrt{(v_0 sen\theta_0)^2 + 2y_0 g}}$$

ALTURA MAXIMA

La altura máxima esta dada por :

$$\boxed{y_{max} = y_0 + \frac{(v_0 sen\theta_0)^2}{2g}}$$

CAMINO RECORRIDO

La longitud de arco en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ esta dada por :

$$\boldsymbol{L(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\frac{(v_0cos\theta_0)^2}{2g}\left[Ln\left|\frac{\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t_1\right)^2+\sqrt{1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t_1\right)^2}}{\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t_2\right)^2+\sqrt{1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t_2\right)^2}}\right|+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t_1\right)^2-\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t_2\right)^2\right]}$$

RADIO Y CENTRO DE CURVATURA

La curvatura en función de la posición horizontal y el tiempo estan dadas por :

$\boldsymbol{K(x)=\frac{\left\|-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}\right\|}{\left[1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}(x-x_0)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}}$	$\boldsymbol{K(t)=\frac{\left\|-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}\right\|}{\left[1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}}$

El radio de curvatura en función de la posición horizontal y el tiempo estan dadas por :

$\rho(x) = \dfrac{\left[1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}(x-x_0)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left\lvert-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}\right\rvert}$	$\rho(t) = \dfrac{\left[1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left\lvert-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}\right\rvert}$

El centro de curvatura en función de un punto $P=(x,y)$ esta dado por :

$C=(x_c,y_c)$	$x_c = x - \dfrac{\left[tg\theta_0-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}(x-x_0)\right]\left[1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}(x-x_0)\right)^2\right]}{-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}}$	$y_c = y(x) + \dfrac{1+\left[tg\theta_0-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}(x-x_0)\right]^2}{-\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}}$

El centro de curvatura en función del tiempo t esta dado por :

$C=(x_c(t),y_c(t))$	$x_c(t) = x_0 + v_0cos\theta_0t + \dfrac{\left[1+tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t\right]\left[1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t\right)^2\right]}{\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}}$	$y_c(t) = y_0 + v_0sen\theta_0t - \dfrac{1+\left(tg\theta_0-\frac{g}{v_0cos\theta_0}t\right)^2}{\frac{g}{(v_0cos\theta_0)^2}}$

$ECUACION\ \ DEL\ \ CIRCULO\ \ OSCULADOR$

La ecuación del circulo osculador en coordenadas cartesianas esta dada por :

En función de $P = (x, y)$	En función de $t \geq 0$
$\boldsymbol{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho(x)}$	$\boldsymbol{(x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 = \rho(t)}$

La ecuación paramétrica del circulo osculador centro en (x_0, y_0) esta dada por :

En función de $t \geq 0$
$\boldsymbol{\vec{r}(t) = (\rho(t)cos\alpha + x_c(t), \rho(t)sen\alpha + y_c(t))}$

ACELERACION TANGENCIAL Y NORMAL

La aceleración tangencial esta dada por :

$$\boxed{a_t(t) = -\frac{(v_0 cos\theta_0)^2 + (v_0 sen\theta_0 - gt)^2}{\sqrt{(v_0 cos\theta_0)^2 + (v_0 sen\theta_0 - gt)^2}}\, g}$$

La aceleración normal esta dada por :

$$\boxed{a_n(t) = \frac{v_0 sen\theta_0 - gt}{\frac{\left[1 + \left(tg\theta_0 - \frac{g}{v_0 cos\theta_0}t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{g}{(v_0 cos\theta_0)^2}\right|}}}$$

VECTOR NORMAL

El vector normal en el sistema de coordenadas intrinsecas esta dado por :

$$\boxed{\vec{a}_n(t) = (0, a_n(t)) = \left(0,\ -\frac{\dfrac{v_0 sen\theta_0 - gt}{\left[1+\left(tg\theta_0 - \dfrac{g}{v_0 cos\theta_0}t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}}{\left|-\dfrac{g}{(v_0 cos\theta_0)^2}\right|}\right)}$$

ECUACION DE LA PARABOLA DE SEGURIDAD

La ecuación cartesiana de la parábola de seguridad esta dada por :

$$\boxed{y(x) = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}\left[x - x_0\right]^2}$$

La ecuación paramétrica de la parábola de seguridad esta dada por :

$$\boxed{\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(x_0 + v_0 cos(\theta_0)t, y_0 + \frac{v_0^2}{2g} + cos^2(\theta_0)t^2\right)}$$

TIEMPO DE IMPACTO DEL PROYECTIL

El tiempo de impacto del proyectil esta dado por :

$$\boxed{t_I = \frac{v_0 sen\theta_0}{2g} + \frac{1}{g}\sqrt{(v_0 sen\theta_0)^2 + 2y_0 g}}$$

OBSERVACION **:** Al programar las ecuaciones paramétricas de todas las parabolas se debe utilizar para el parametro t el siguiente intervalo :

$$\boxed{0 \leq t \leq \left[\frac{v_0 sen\theta_0}{2g} + \frac{1}{g}\sqrt{(v_0 sen\theta_0)^2 + 2y_0 g}\right]}$$