L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Segundo Teste de Seleção
04 de abril de 2009

▸ PROBLEMA 1

Sejam n um inteiro positivo e p um número primo positivo. Prove que, se a, b e c são inteiros (não necessariamente positivos) satisfazendo as condições

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa,$$

então $a = b = c$.

Solução

Note que se dois dos números a, b, c são iguais, o terceiro vai ser igual também. Então, vamos supor por absurdo que os três números são distintos.

Isolando p em cada par de equações, encontramos

$$p = \frac{a^n - b^n}{c - b} = \frac{b^n - c^n}{a - c} = \frac{c^n - a^n}{b - a}$$

Multiplicando tudo, obtemos

$$p^3 = -\frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a}$$

Podemos estudar casos, já que sabemos a fatoração de p^3. Mas isso dá muitos casos, então vamos pensar um pouco mais. Note que se n for ímpar então $a^n - b^n$ tem o mesmo sinal de $a - b$, e p^3 seria negativo, o que não é possível. Logo n é par e $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}$ tem n parcelas, uma quantidade par. Como entre a, b, c há dois números com a mesma paridade, pelo menos um dos números $\frac{a^n-b^n}{a-b}$, $\frac{b^n-c^n}{b-c}$, $\frac{c^n-a^n}{c-a}$ é par. Deste modo, p^3 é par, de modo que $p = 2$.

Há dois números com o mesmo sinal, digamos a e b. Então, supondo $0 < |a| < |b|$, temos $|a| \geqslant 1$, $|b| \geqslant 2$. Lembrando ainda que n é par,

$$8 \geqslant \left|\frac{a^n - b^n}{a - b}\right| = |a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}| > 2^n - 1 \Longrightarrow n = 2$$

Nesse caso, temos $8 = -(a+b)(b+c)(c+a)$. Como a soma dos três fatores $a+b$, $b+c$, $c+a$ é $2(a+b+c)$, que é par, uma quantidade par dos números $a+b$, $b+c$, $c+a$ é ímpar. Isto que dizer que ou todos são pares (o que é impossível, pois isso implicaria em dois dos números $a+b$, $b+c$, $c+a$ iguais, o que implicaria dois dos números iguais) ou dois são ímpares, um igual a 1 e outro igual a -1. Nesse caso, $a+b = 1$, $b+c = -1$ e $c+a = 8$, o que implica $a = 5$, $b = -4$, $c = 3$. Mas, substituindo na equação original, vemos que isso não é possível.

Resta ainda o caso em que pelo menos um dos números a, b, c é zero. Suponha que $a = 0$. Então $8 = -b^{n-1}c^{n-1}\frac{b^{n-1}-c^{n-1}}{b-c}$. Suponha que $|b| > 1$ ou $|c| > 1$. Então $8 \geqslant (|b||c|)^{n-1} \geqslant 2^{n-1} \Longrightarrow n \leqslant 4$. Já estudamos o caso $n = 2$. No caso $n = 4$, devemos ter $|bc| = 2$, de modo que $\left|\frac{b^4-c^4}{b-c}\right| = 1$, o que não ocorre. Logo $|b| = |c| = 1 \Longrightarrow \{b, c\} = \{-1, 1\}$, que pode ser verificado manualmente.

Como obtivemos absurdo em todos os casos, o resultado segue.

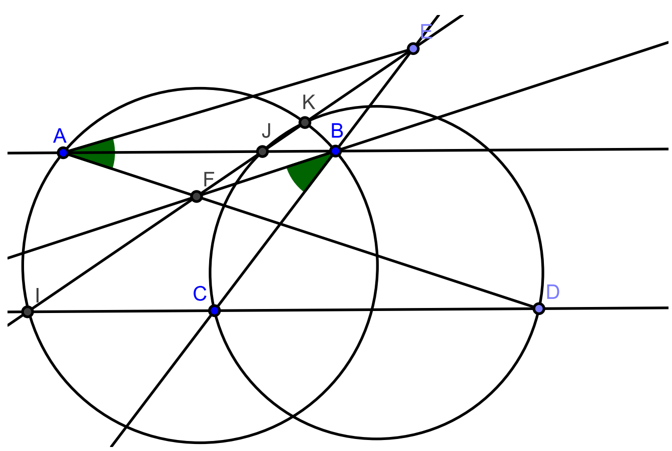
Resumindo:

- Nesse problema temos um sistema de equações diofantinas que fatora até rápido. Afinal, o único fato mais específico é que p é primo positivo, então faz sentido isolar p em cada par de equações.
- Como está na solução, o problema pode ser resumido em estudar um monte de casos. Mas a maior variável aqui é **eficiência** no lugar de **eficácia**.
- Sim, fatorar e estudar todos os casos é eficaz, mas a quantidade de casos pode ser muito grande; devemos procurar meios eficientes de estudar os casos. Considerando que esse é o primeiro problema da prova, é importante terminá-lo logo! Que tal tentarmos eliminar alguns valores para n?
- Nessa hora, a fatoração de $x^n - y^n$ é bastante importante. Essa fatoração, na verdade, é bastante utilizada em teoria dos números, tanto que existem os *polinômios ciclotômicos*, que estudam exatamente a fatoração de $x^n - 1$.
- E note como um argumento de paridade pode diminuir drasticamente um problema: ao provarmos que n é par, chegamos a $p = 2$. Não é incrível como argumentos simples como paridade podem reduzir o problema. Pensar simples muitas vezes é a melhor saída!
- Aí chegamos a uma quantidade de casos um pouco mais razoável de serem estudados, e mesmo esses dão um certo trabalho. Alguém tem alguma ideia de como diminuir mais ainda os casos?

▸ PROBLEMA 2

Dado o trapézio $ABCD$ com lados paralelos AB e CD, assuma que existam pontos E sobre a reta BC, externo ao segmento BC, e F interno ao segmento AD tais que $\angle DAE = \angle CBF$. Denote por I o ponto de interseção de CD e EF, e por J o ponto de interseção de AB e EF. Seja K o ponto médio do segmento EF. Assuma que ele não se encontra sobre a reta AB. Prove que I pertence ao circuncírculo de ABK se, e somente se, K pertence ao circuncírculo de CDJ.

Solução



Primeiro note que, independente de I estar sobre o circuncírculo de ABK ou J estar sobre o circuncírculo de ABK, A, F, B, E são concíclicos. Com isso, por potência de ponto, $JE \cdot JF = JA \cdot JB$.

Note que I está sobre o circuncírculo de ABK se, e somente se, a potência de J "dá certo", ou seja, $JA \cdot JB = JI \cdot JK$. Logo I está sobre o circuncentro de ABK se, e somente se, $JE \cdot JF = JI \cdot JK \iff JE \cdot (JI - FI) = JI \cdot JK \iff JE \cdot IF = IJ \cdot (JE - JK) \iff JE \cdot IF = IJ \cdot KE\ (*)$.

Agora, K está sobre o circuncírculo de CDJ se, e somente se, $IJ \cdot IK = IC \cdot ID$. Considerando os pares de triângulos semelhantes EIC, EJB e FID, FJA, temos $\frac{IC}{JB} = \frac{EI}{EJ} \iff IC = \frac{EI \cdot JB}{EJ}$ e $\frac{ID}{JA} = \frac{FI}{FJ} \iff ID = \frac{JA \cdot IF}{FJ}$. Substituindo, obtemos $IJ \cdot IK = \frac{EI \cdot JB \cdot JA \cdot IF}{JE \cdot JF}$. Lembrando mais uma vez que $JA \cdot JB = JE \cdot JF$, temos $IJ \cdot IK = IE \cdot IF \iff IJ \cdot (IF + KF) = IE \cdot IF \iff IJ \cdot KF = IF \cdot (IE - IJ) \iff IF \cdot JE = IJ \cdot KF\ (**)$.

Como K é ponto médio de EF, $KF = KE$ e $(*) \iff (**)$, como queríamos demonstrar.

Resumindo:

- A parte que toma mais tempo do problema é, na verdade, fazer uma boa figura, porque não sabemos exatamente quando ocorrem as duas condições (só sabemos que elas têm que ocorrer ao mesmo tempo!). Isso acontece; o problema 6 da IMO 2008 também era muito difícil de desenhar.
- Mas, passada essa parte, o que se vê são aplicações extensivas da propriedade **quatro pontos são concíclicos se, e somente se, alguma potência de ponto 'dá certo'**. De fato, os ângulos dessa figura são bem "tortos" (tirando o quadrilátero inscritível $AFBE$), então é um pouco melhor jogar com potência de ponto do que com arrastão. Além disso, é uma alternativa que permite utilizar o paralelismo entre AB e CD para calcular segmentos.
- Por fim, vale a pena destacar que, na hora de fazer as contas com segmentos, tentamos (com sucesso!) jogar todos os segmentos sobre uma reta só (EF). Com isso fica mais fácil manipular as igualdades e obter resultados.

▸ PROBLEMA 3

Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de números reais. Dizemos que um par (f, g) de funções de S em S é uma *Dupla Espanhola* sobre S se elas satisfazem às seguintes condições:

(i) Ambas as funções são estritamente crescentes, i.e., $f(x) < f(y)$ e $g(x) < g(y)$, para todos $x, y \in S$, com $x < y$;

(ii) A inequação $f(g(g(x))) < g(f(x))$ ocorre para todo $x \in S$.

Determine se existe uma Dupla Espanhola

(a) sobre o conjunto $S = \mathbb{N}$ dos inteiros positivos;

(b) sobre o conjunto $S = \{a - 1/b :\ a, b \in \mathbb{N}\}$.

Solução

(a) Primeiro, observemos que, sendo f e g funções estritamente crescentes de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ então $f(x) \geqslant x$ e $g(x) \geqslant x$. De fato, $f(1), f(2), \ldots, f(x)$ são x números inteiros positivos distintos, sendo $f(x)$ o maior deles. Assim, $g(f(x)) > f(g(g(x)) \geqslant g(g(x))$ e, portanto, sendo g crescente, $f(x) > g(x)$. Note também que não é possível termos $g(x) = x$ para todo x: obtemos $f(x) < f(x)$, um absurdo. Deste modo, existe a tal que $g(a) > a \iff g(a) \geqslant a + 1$. Note que, indutivamente, denotando $g^{(m)}(x) = \underbrace{g(g(\ldots g}_{m\ \text{vezes}}(x)\ldots))$, temos $g^{(k)}(a) \geqslant a + k$.

Todavia, substituindo $x \to g(g(x))$ obtemos $g^{(5)}(x) < f(g^{(4)}(x)) < f(g(g(x))) < g(f(x)) \implies g^{(4)}(x) < f(x)$. Substituindo novamente $x \to g(g(x))$ na última equação obtemos $g^{(6)}(x) < f(g(g(x))) < g(f(x)) \implies g^{(5)}(x) < f(x)$. Novamente por indução (substituindo o mesmo de sempre) obtemos $f(x) > g^{(k)}(x)$ para todo k inteiro, $k \geqslant 4$. Mas isso quer dizer que $f(a) > a + k$ para todo k, o que é impossível (considere $k > f(a) - a$, por exemplo).

Logo não existem funções nas condições do enunciado para $S = \mathbb{N}$.

(b) Considere $f(a - 1/b) = 2a + 1 - 1/b$ e $g(a - 1/b) = a - 1/(2^{a-1}b)$. Note que f e g são ambas crescentes e bem definidas. Além disso,

$$\begin{aligned} f(g(g(a - 1/b))) &= f(g(a - 1/(2^{a-1}b))) = f(a - 1/(2^{2a-2}b)) = 2a + 1 - 1/(2^{2a-2}b) \\ g(f(a - 1/b)) &= g(2a + 1 - 1/b) = 2a + 1 - 1/(2^{2a}b) \end{aligned}$$

de modo que $f(g(g(x))) < g(f(x))$.

Resumindo:

- Esse problema ilustra bem a diferença que faz o domínio em funções.
- Para $S = \mathbb{N}$, vale a seguinte propriedade, que costuma ser útil: funções h estritamente crescentes de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ satisfazem $h(x) \geqslant x$. Outra coisa que só os inteiros têm é que se $x > y$ então $x \geqslant y + 1$ (estendendo um pouco mais a ideia: os crescimentos em inteiros são "grandes"). Tenha isso em mente!
- Note que tendo essas ideias (que são características de inteiros mais do que funções em si), o problema não é tão complicado. As substituições são razoavelmente naturais.
- No outro caso, porém, as funções existem (uma espécie de "karma dos itens:" se a resposta de um item é "sim", a do outro é "não"). Além disso, o conjunto S do item b é muito estranho para não ter função.
- Como construir as funções então? Há algumas observações:

(i) O conjunto S essencialmente corresponde a pares (a, b) de inteiros positivos;

(ii) Não vale a pena deixar a e b independentes; isso tornaria as funções muito parecidas com o item a;

(iii) Além disso, no lado menor da desigualdade, aplicamos g duas vezes e f uma vez, e no lado maior f uma vez e g uma vez; isto é, aplicamos g uma vez a mais no lado menor.

- Então não é bom fazer g "muito crescente" nem f e g comutarem $(f(g(x)) = g(f(x)))$. E também precisamos misturar a com b. Todavia, como os números são positivos f e g não podem "diminuí-los muito".
- Uma ideia para que g não "cresça tanto" é usar expoentes com $a - 1$ ou $b - 1$. O -1 garante um crescimento um pouquinho menor (e dá uma "chance" de $g(f(x))$ ser maior) e colocá-los em expoentes evita números não positivos. Com isso, pode-se usar $g(a - 1/b) = a - 1/(2^{a-1}b)$ (e também resolvemos o problema da independência).
- Com isso, calculamos $g(g(a - 1/b)) = a - 1/(2^{2a-2}b)$ e vemos que vale a pena fazer com que f essencialmente dobre a "parte inteira" dos números. Como g não modifica a parte inteira e aplicamos f a mesma quantidade de vezes de cada lado, elas vão se cortar de qualquer jeito. Desta forma, é possível obter f.

▸ PROBLEMA 4

Seja $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+\ell}\}$ um conjunto de números reais com $k + \ell$ elementos, contidos no intervalo $[0, 1]$; k e ℓ são inteiros positivos. Um subconjunto $A \subset S$ com k elementos é chamado *belo* se

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{\ell} \sum_{x_j \in S \setminus A} x_j \right| \leqslant \frac{k+\ell}{2k\ell}.$$

Prove que o número de subconjuntos belos é pelo menos $\dfrac{2}{k+\ell}\dbinom{k+\ell}{k}$.

Solução

Considere todas as $(k + \ell - 1)!$ permutações circulares de $x_1, x_2, \dots, x_{k+\ell}$. Para cada uma delas, considere todas as maneiras de escolher k números consecutivos das permutações circulares (ou seja, sendo $(y_1, y_2, \dots, y_{k+\ell})$ a permutação, consideramos $A_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$; $A_2 = \{y_2, y_3, \dots, y_{k+1}\}$; $\dots$; $A_{k+\ell} = \{y_{k+\ell}, y_1, \dots, y_{k-1}\}$). Para cada escolha de um subconjunto A de k elementos, seja $f(A) = \frac{1}{k}\sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{\ell}\sum_{x_j \in S\setminus A} x_j$. Note que $|f(A_{i+1}) - f(A_i)| = |x_{k+i} - x_i| \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}\right) \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}$.

Vamos provar que cada permutação circular fornece pelo menos dois conjuntos belos. Seja m a média dos elementos de S, que também é a média de todas as médias de subconjuntos de k elementos de S. Então, entre os conjuntos A_i existe um subconjunto A_r com média no máximo m, o que implica $f(A_r) \leqslant 0$, e um subconjunto A_s com média no mínimo m, o que implica $f(A_s) \geqslant 0$.

Se A_r e A_s são ambos belos, não há o que provar (a não ser que $r = s$; nesse caso, porém, não é difícil ver que podemos escolher $r \neq s$). Se A_r e A_s não são belos, $f(A_r) < -\frac{k+\ell}{2k\ell}$ e $f(A_s) > \frac{k+\ell}{2k\ell}$. Como $\left[-\frac{k+\ell}{2k\ell}, \frac{k+\ell}{2k\ell}\right]$ tem comprimento $\frac{k+\ell}{k\ell} = \frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}$ e a diferença entre dois conjuntos consecutivos é no máximo $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}$, por continuidade discreta existem pelo menos dois conjuntos belos entre os $k + \ell$ conjuntos considerados (um para cada um dos dois caminhos no ciclo ligando A_r e A_s).

Se A_r é belo e A_s não, só não temos o resultado se somente A_r é belo. Isso significa que nenhum outro A_i tem $f(A_i)$ negativo. Contudo, a soma de todos os $f(A_i)$'s deve ser zero: cada x_m participa k vezes de algum A_i e ℓ vezes de algum $S \setminus A_i$; como dividimos por k quando está em A_i e por ℓ quando está em $S \setminus A_i$, o coeficiente de x_m é $\frac{k}{k} - \frac{\ell}{\ell} = 0$. Deste modo, como há $k+\ell-1$ positivos e $f(A_r)$, tal soma é maior do que $-\frac{k+\ell}{2k\ell} + (k+\ell-1)\frac{k+\ell}{2k\ell} = \frac{(k+\ell-2)(k+\ell)}{2k\ell} \geqslant 0$, o que é um absurdo. Logo mesmo nesse caso há dois subconjuntos belos. O caso em que A_r não é belo e A_s é belo é análogo.

Assim, como há $(k+\ell-1)!$ permutações circulares, e cada conjunto está sendo contado $k! \cdot \ell!$ vezes (é possível permutar os k elementos de A e os ℓ elementos de $S \setminus A$), há pelo menos $2 \cdot \frac{(k+\ell-1)!}{k!\ell!} = \frac{2}{k+\ell}\binom{k+\ell}{k}$ subconjuntos belos.

Resumindo:

- Esse é um daqueles problemas que **pedem** para serem resolvidos com continuidade discreta: tudo o que você sabe do conjunto e o que está sendo perguntado envolve desigualdades, e a propriedade desejada é que uma diferença entre médias esteja em um intervalo "pequeno"!
- A palavra chave desse problema é **média**. Queremos estimar diferença entre médias, e ao colocarmos os números em ciclo, estamos procurando uma espécie de média de conjuntos belos (que acabam sendo, na verdade, sequências). E como achamos os dois caras de sinais opostos? Médias!
- Aliás, um fato utilizado é realmente muito importante, e resolve muitos problemas de existência em Combinatória (sim, ele ganha sua própria caixinha):

Se a média de uma variável é m, existe um valor dessa variável menor ou igual a m e outro menor ou igual a m.

- O diferente é que a ideia "normal" é normalmente colocar os números em fila, não em círculo. Mas se não colocarmos em círculos estaremos ignorando um monte de subconjuntos de k elementos e, mais ainda, a contagem dupla no final iria dar errado.
- O cuidado que devemos tomar é que há três casos, e um deles poderia fornecer exatamente um subconjunto belo. Novamente, em um dos casos a ideia de média resolve o problema: a média das diferenças é zero (que outro valor poderia ser?). De novo, redução ao absurdo resolve: é muito difícil ter só uma diferença negativa de módulo pequeno, muitas outras diferenças de módulo grande e a soma ainda dar zero!