Primeira Lista de Preparação para a L IMO
e XXIV Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

▸ **PROBLEMA 1**

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_k$ polinômios com coeficientes inteiros. Prove que existe um polinômio redutível Q de coeficientes inteiros tal que $P_i + Q$ é irredutível em $\mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

▸ **PROBLEMA 2**

Considere uma progressão aritmética a cujo primeiro termo é 2 que tem a seguinte propriedade: todo conjunto formado por 2007 termos consecutivos de a contém um elemento que é coprimo com todos os demais 2006 elementos. Prove que todo conjunto formado por 2008 termos consecutivos de a contém um elemento que é coprimo com todos os demais 2007 elementos.

▸ **PROBLEMA 3**

Algumas casinhas de um tabuleiro 2009×2009 são pintadas. Seja (i, j) a casinha que está na linha i e coluna j e $S_{i,j}$ o conjunto de todas as casinhas pintadas (x, y) tais que $x \leqslant i$ e $y \leqslant j$. Inicialmente, escrevemos em cada casinha pintada (i, j) a quantidade de elementos de $S_{i,j}$. A cada passo, escrevemos em cada casinha pintada (i, j) a soma de todos os números escritos nas casinhas de $S_{i,j}$ que foram escritos no passo anterior. Prove que, após uma quantidade finita de passos, todos os números nas casinhas pintadas são ímpares.

▸ **PROBLEMA 4**

Seja $ABCDEF$ um hexágono cíclico. As diagonais BD e CF cortam-se em G, AC e BE cortam-se em H e AD e CE cortam-se em I. Sabe-se que BD é perpendicular a CF e que $AI = CI$. Prove que $CH = AH + DE$ se, e somente se, $GH \cdot BD = BC \cdot DE$.

▸ **PROBLEMA 5**

Seja n um inteiro positivo dado. Encontre todos os inteiros positivos m tais que

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} \geqslant a^m + b^m$$

para todos a, b reais positivos tais que $a + b = 2$.

▸ **PROBLEMA 6**

Seja AD a mediana relativa a A no triângulo ABC. Seja M um ponto variável sobre uma reta dada d perpendicular a AD e denote por E e F respectivamente os pontos médios de MB e MC. A reta que passa por E e é perpendicular a d corta AB em P; a reta que passa por F e é perpendicular a d corta AC em Q. Prove que a reta que passa por M e é perpendicular a PQ passa por um ponto fixado ao variar M.

▸ **PROBLEMA 7**

Há 2008 cartas azuis e 2008 cartas vermelhas. Essas 4016 cartas são embaralhadas e distribuídas entre 2008 pessoas sentadas em círculo, duas cartas para cada pessoa. Cada rodada de um jogo consiste em todos os jogadores, simultaneamente, realizarem a seguinte operação: se o jogador tem pelo menos uma carta vermelha, ele passa uma carta vermelha para o jogador imediatamente à sua direita; caso contrário, ele passa uma carta azul para o jogador imediatamente à sua direita.

Quantas rodadas são necessárias, no máximo, para que todos os jogadores tenham uma carta de cada cor?

Em 2008, não conseguimos resolver o problema 3 da IMO. Você o estudou? (Não, a Esmeralda não errou; é $\sqrt{10n}$ mesmo.)

▸ **PROBLEMA 8**

Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ tem um fator primo maior do que $2n + \sqrt{10n}$.