Segunda Lista de Preparação para a L IMO
e XXIV Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

PROBLEMA 1

Encontre todas as funções f dos reais positivos nos reais que satisfazem, para quaisquer reais positivos x e y,

(i) $f(1) = 2008$

(ii) $|f(x)| \leqslant x^2 + 1004^2$

(iii) $f\left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) + f\left(y + \frac{1}{y}\right)$

PROBLEMA 2

Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 3$. Prove que:

$$\frac{a^2 + 3b^2}{ab^2(4 - ab)} + \frac{b^2 + 3c^2}{bc^2(4 - bc)} + \frac{c^2 + 3a^2}{ca^2(4 - ca)} \geqslant 4$$

PROBLEMA 3

Num tabuleiro $n \times n$, cada uma das casas apresenta um número de 0 a k, para algum inteiro positivo k. Cada linha e cada coluna do tabuleiro possui um botão e cada vez que um botão é pressionado, os números nas n casas da linha ou coluna correspondente são somados de 1, exceto os que são k, que são trocados por 0.

No começo, todas as casas do tabuleiro apresentam o número 0; alguns botões são pressionados um certo número de vezes, alterando alguns números. Mostre que todas as casas podem voltar a apresentar 0 após apertar botões no máximo kn vezes.

PROBLEMA 4

Num certo país, uma estrada liga duas cidades e duas cidades só podem ser conectadas por no máximo uma estrada. Sempre há um caminho (possivelmente com mais de uma estrada) entre duas cidades quaisquer, mesmo se uma das estradas do país for interditada. Dizemos que uma cidade A é k-direcionalmente conectada a uma cidade B se após orientar até k estradas, para qualquer orientação das estradas restantes e para qualquer estrada ℓ, existe um caminho de A a B passando por ℓ e de acordo com a orientação das estradas. Sabendo que neste país há n cidades e que quaisquer duas cidades são k-direcionalmente conectadas, qual o valor mínimo de k, em função de n?

PROBLEMA 5

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível numa circunferência de centro O, com $\angle ABC$ e $\angle BCD$ obtusos. Sejam também E a intersecção das retas AB e CD, P e R os pés das perpendiculares por E às retas BC e AD, respectivamente, Q a intersecção das retas EP e AD; S a intersecção das retas ER e BC e M ponto médio do segmento QS.

Prove que os pontos E, M, O são colineares.

PROBLEMA 6

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e sejam P e Q pontos no interior de $ABCD$ tais que $PQDA$ e $QPBC$ são quadriláteros cíclicos. Existe um ponto E sobre o segmento PQ tal que $\angle PAE = \angle QDE$ e $\angle PBE = \angle QCE$. Prove que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico.

PROBLEMA 7

Encontre todas as ternas (p, q, n) tais que p e q são primos ímpares, n é inteiro maior do que 1 e

$$q^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{p^n} \quad \text{e} \quad p^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{q^n}$$

PROBLEMA 8

Encontre o menor valor possível da expressão $|5^{4m+3} - n^2|$, sendo m, n inteiros não negativos.