Primeira Lista de Preparação para a LIII IMO
e XXVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

PROBLEMA 1
Determine todas as triplas (a, b, c) de inteiros positivos tais que $abc + 1$ divide $a^2 + b^2$.

PROBLEMA 2
Os lados de um triângulo são a, b e c e as medidas das medianas correspondentes são m_a, m_b e m_c. Prove que

$$\frac{m_a m_b}{a^2+b^2} + \frac{m_b m_c}{b^2+c^2} + \frac{m_c m_a}{c^2+a^2} \geq \frac{9}{8}.$$

PROBLEMA 3
Os reais positivos a, b, c, d são tais que $a + b + c + d = abc + abd + acd + bcd$. Prove que

$$(a + b)(c + d) + (a + d)(b + c) \geq 4\sqrt{(1 + ac)(1 + bd)}.$$

PROBLEMA 4
As arestas de um grafo completo de n vértices são rotuladas com os números de 1 a $\binom{n}{2}$, um número por aresta, cada número utilizado exatamente uma vez. Prove que para todo n suficientemente grande existe um caminho de três arestas ou um ciclo de três arestas cuja soma é no máximo $3n - 1000$.

PROBLEMA 5
As diagonais de um quadrilátero convexo circunscrito $ABCD$ a um círculo se encontram em E. Mostre que os incentros dos triângulos ABE, BCE, CDE e DAE estão sobre um mesmo círculo.

PROBLEMA 6
Encontre todos os primos ímpares p tais que $1 + k(p - 1)$ é primo para todo inteiro k com $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$.

PROBLEMA 7
Os elementos de um conjunto A são sequências finitas cujos termos pertencem todos a $\{1, 2, 3\}$. Suponha que nenhum elemento de A é subsequência de outro elemento de A (ou seja, os mesmos termos aparecem, na mesma ordem, possivelmente com outros termos entre eles). Prove que A é finito.

PROBLEMA 8
Seja A o conjunto dos polinômios $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ com $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Prove que existe uma constante real positiva c tal que, para todo polinômio $P(x)$ de A, se $(x - 1)^k$ divide $P(x)$ então $k < c \cdot (\ln(n + 1))^2$.