L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Quarto Teste de Seleção
16 de maio de 2009

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ PROBLEMA 1

Sejam A, B, C, D, E pontos em uma circunferência de raio r, nessa ordem, tais que $AC = BD = CE = r$. Os pontos H_1, H_2, H_3 são os ortocentros dos triângulos ACD, BCD e BCE, respectivamente. Prove que $H_1H_2H_3$ é um triângulo retângulo.

▸ PROBLEMA 2

As cidades da Terra Brasilis são conectadas por algumas estradas. Não há duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada. Sabe-se que, é possível ir de uma cidade para qualquer outra utilizando uma ou mais estradas. Chamamos de *rolê* qualquer rota fechada de estradas (isto é, que começa em uma cidade e termina na mesma cidade) que não passa por uma cidade mais de uma vez. Na Terra Brasilis, todos os rolês passam por quantidades ímpares de cidades.

O governo da Terra Brasilis decidiu fechar alguns rolês para reforma. Ao fechar um rolê, todas as suas estradas são interditadas, de modo que não é permitido o tráfego nessas estradas. Ao fazer isso, a Terra Brasilis ficou dividida em várias regiões de modo que, de qualquer cidade de cada região é possível chegar a qualquer outra da mesma região através de estradas, mas não é possível chegar a cidades de outras regiões.

Prove que o número de regiões é ímpar.

▸ PROBLEMA 3

Seja $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio mônico de grau 4. Sabe-se que todas as raízes de P são reais, distintas e pertencem ao intervalo $[-1, 1]$.

(a) Prove que $P(x) > -4$ para todo x real.

(b) Encontre o maior valor da constante real k tal que $P(x) > k$ para todo real x e todo polinômio $P(x)$ satisfazendo as condições do enunciado.

▸ PROBLEMA 4

Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência de inteiros positivos tal que o máximo divisor comum entre quaisquer dois termos consecutivos é maior que o termo anterior; simbolicamente, $\mathrm{mdc}(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ para todo i inteiro positivo. Prove que $a_n \geqslant 2^n$ para todo $n \geqslant 0$.