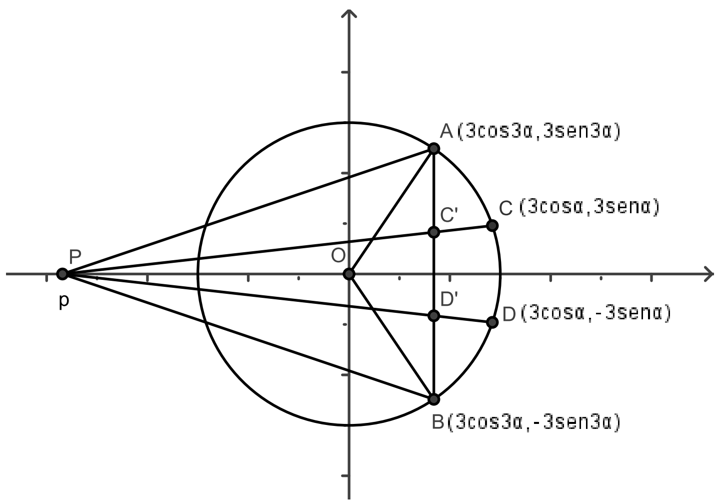
XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
26 de abril de 2008

▸ **PROBLEMA 1**

Seja AB uma corda, não um diâmetro, de uma circunferência de centro O. O menor arco AB é dividido em três arcos congruentes AC, CD, DB. A corda AB também é dividida em três segmentos congruentes AC', $C'D'$, $D'B$. Seja P o ponto de interseção entre as retas CC' e DD'. Prove que $\angle APB = \frac{1}{3}\angle AOB$.

Solução

Este é um trabalho para a Geometria Analítica e Trigonometria! Suponha sem perdas que o raio da circunferência é 3. Considere o sistema de coordenadas em que a origem é O e a corda AB é paralela ao eixo y. Sendo $C = (3\cos\alpha, 3\operatorname{sen}\alpha)$, temos $A = (3\cos 3\alpha, 3\operatorname{sen}3\alpha)$ e $C' = (3\cos 3\alpha, \operatorname{sen}3\alpha)$. Além disso, o eixo x é o eixo de simetria da figura, de modo que $P = (p, 0)$ para algum p real. Note que $\angle AOB = 6\alpha$, de modo que queremos provar que o coeficiente angular de AP é $\angle APB/2 = \alpha$.



Esse cálculo é bem rotineiro: primeiro, determinamos P (ou seja, p) e logo depois calculamos o coeficiente angular de PA, provando que este é igual a $\operatorname{tg}\alpha$.

Vamos começar as contas: o coeficiente angular de CC' é $\frac{3\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}3\alpha}{3\cos\alpha - 3\cos 3\alpha}$. Assim, como P pertence à reta CC',

$$\frac{\operatorname{sen}3\alpha - 0}{3\cos 3\alpha - p} = \frac{3\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}3\alpha}{3\cos\alpha - 3\cos 3\alpha}$$

Além disso, queremos calcular o coeficiente angular de AP, que é

$$m = \frac{3\operatorname{sen}3\alpha - 0}{3\cos 3\alpha - p} = 3\cdot\frac{\operatorname{sen}3\alpha - 0}{3\cos 3\alpha - p} = \frac{9\operatorname{sen}\alpha - 3\operatorname{sen}3\alpha}{3\cos\alpha - 3\cos 3\alpha}$$

Lembrando que $\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha + \operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha(\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$ e $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha = \cos\alpha(\cos 2\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$,

$$m = \frac{\operatorname{sen}\alpha(9 - 12\cos^2\alpha + 3)}{\cos\alpha(3 - 12\cos^2\alpha + 9)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

que é o que queríamos demonstrar. ∎

Resumindo:

- Esse é um problema típico em que fazer contas leva à vitória: temos uma só circunferência; queremos provar uma relação entre ângulos; é tudo fácil de se calcular com geometria analítica. Complexos também caem bem.
- Mesmo assim, é bastante importante planejar o que deve ser feito para resolver o problema. Faça sempre um plano de resolução!
- Até a execução merece atenção: só faça as contas quando for estritamente necessário!
- Na verdade, não é muito difícil notar geometricamente que o coeficiente angular de AP é o triplo do de CC': basta notar que a ordenada de A é igual ao triplo da de C'. Isso facilita muito as contas, então vale a pena observar a figura enquanto se faz as contas também (além de facilitar as contas, ajudar a conferir também).
- Você conhece alguma solução sintética? Em caso positivo, conte-nos!

▸ **PROBLEMA 2**

Seja n um inteiro positivo. Uma seqüência (a, b, c), com $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ é dita *zoada* se seu menor termo é ímpar e se apenas esse menor termo, ou nenhum termo, se repete. Por exemplo, as seqüências $(4, 5, 3)$ e $(3, 8, 3)$ são zoadas, mas $(3, 2, 7)$ e $(3, 8, 8)$ não o são. Determine o número de seqüências zoadas em função de n.

Solução

Contaremos o número de seqüências zoadas cujo menor termo é $2n - 2k + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ e somaremos o total.

Primeiro, há a seqüência zoada $(2n - 2k + 1, 2n - 2k + 1, 2n - 2k + 1)$. As que têm duas ocorrências de $2n - 2k + 1$ são as 3 permutações das seqüências da forma $(2n - 2k + 1, 2n - 2k + 1, a)$, com $2n - 2k + 2 \leqslant a \leqslant 2n$, e são no total de $3 \cdot (2k - 1)$. As que têm somente uma ocorrência de $2n - 2k + 1$ são as $3! = 6$ permutações das seqüências da forma $(2n - 2k + 1, a, b)$ com $2n - 2k + 2 \leqslant a < b \leqslant 2n$, que são $6\binom{2k-1}{2} = 6(2k - 1)(k - 1)$.

Assim, há $1 + 3(2k - 1) + 6(2k - 1)(k - 1) = 3(2k - 1)(1 + 2k - 2) + 1 = 3(2k - 1)^2 + 1 = 12k^2 - 12k + 4 = 4(3k^2 - 3k + 1) = 4(k^3 - (k - 1)^3)$ seqüências zoadas com $2n - 2k + 1$ como menor termo.

Com isso, o total de seqüências zoadas é

$$\sum_{k=1}^{n} 4(k^3 - (k-1)^3) = 4\big((1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + (n^3 - (n-1)^3)\big) = 4n^3$$

Resumindo:

- Um problema de contagem! Para resolvê-lo, nada é mais importante do que organização.
- Contagens podem ser feitas basicamente de quatro maneiras: (a) contando diretamente, (b) utilizando recursões, (c) utilizando funções geratrizes, (d) utilizando bijeções.
- O primeiro modo, que é o mais simples, já dá conta do recado. Muitas vezes caímos em somatórios, e nesses casos, nos resta torcer para que ele seja fácil de calcular.
- Devemos algumas explicações nos nossos procedimentos, mesmo assim. Primeiro: por que o menor termo é $2n - 2k + 1$ e não, $2k - 1$?
- Essa pergunta fica mais fácil de responder se você estudar um caso pequeno, digamos $n = 4$. A tendência que temos quando calculamos somatórios é começarmos do menor termo e aumentarmos aos poucos; e olhando esse caso (e, em retrospecto, pensando na natureza do problema) vemos que há menos seqüências zoadas com menor termo grande do que com menor termo pequeno.
- Outro aspecto peculiar na nossa solução é termos chegado em $3k^2 - 3k + 1 = k^3 - (k - 1)^3$. Há duas observações nesse sentido: a primeira é que poderíamos calcular as somas das quantidades de seqüências de cada tipo (tudo repetido, uma repetição, sem repetição). Optamos por somar por partes para ver se a conta sai mais "bonitinha". E a segunda é ficar atento a possíveis oportunidades de "telescopar" uma soma. Poderíamos muito bem ter utilizado as fórmulas $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, mas somas telescópicas são mais rápidas de calcular.
- Se você tiver uma bijeção que resolva o problema, conte-nos!

▸ **PROBLEMA 3**

Se a, b, c e d são números reais positivos tais que $a+b+c+d=2$, prove que

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2}\leqslant\frac{16}{25}.$$

Solução

Seja $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$. Note que, sendo $f(x)=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2}=f\left(\frac{1}{x}\right)$ e f crescente em $[0,1]$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a,b,c,d\leqslant 1$. De fato, se por exemplo $a>1$ trocamos a por $\frac{1}{a}<a$, e $\frac{1}{a}+b+c+d<2$, de modo que $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=f\left(\frac{1}{a}\right)+f(b)+f(c)+f(d)<f(x)+f(y)+f(z)+f(w)$, em que substituímos a,b,c,d por x,y,z,w tais que $1\geqslant x\geqslant \text{mín}(a,\frac{1}{a})$, $1\geqslant y\geqslant \text{mín}(b,\frac{1}{b})$, $1\geqslant z\geqslant \text{mín}(c,\frac{1}{c})$, $w\geqslant \text{mín}(d,\frac{1}{d})$ e $x+y+z+w=2$.

Para cada x_0 considere a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0,f(x_0))$, ou seja, $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Vejamos quando $f(x)\leqslant g(x)$. Notando que $x=x_0$ é raiz dupla de $f(x)-g(x)$, temos

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x)&=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}-\frac{x_0^2}{(x_0^2+1)^2}-\frac{2x_0(x_0^2+1)-x_0^2\cdot 2\cdot 2x_0}{(x_0^2+1)^3}(x-x_0)\\
&=\frac{(x+x_0)(xx_0+1)(x-x_0)(-xx_0+1)}{(x^2+1)^2(x_0^2+1)^2}-\frac{2x_0-2x_0^3}{(x_0^2+1)^3}(x-x_0)\\
&=\frac{x-x_0}{(x^2+1)^2(x_0^2+1)^3}\left((x+x_0)(xx_0+1)(-xx_0+1)(x_0^2+1)-2x_0(1-x_0^2)(x^2+1)^2\right)\\
&=\frac{(x-x_0)^2}{(x^2+1)^2(x_0^2+1)^3}\left((1-x^2x_0^2)(x_0^2+1)+2x_0(x+x_0)(x_0^2x^2-x^2-2)\right)\\
&=\frac{(x-x_0)^2}{(x^2+1)^2(x_0^2+1)^3}\left(-2x_0(1-x_0^2)x^3-x_0^2(3-x_0^2)x^2-4x_0x+1-3x_0^2\right)
\end{aligned}$$

O sinal de $f(x)-g(x)$ é o mesmo que o sinal de

$$h(x)=-2x_0(1-x_0^2)x^3-x_0^2(3-x_0^2)x^2-4x_0x+1-3x_0^2$$

Como estamos trabalhando somente com $x_0\in(0,1]$, todos os coeficientes de h, com a possível exceção de $1-3x_0^2$, são negativos.

O caso de igualdade no problema é $a=b=c=d=\frac{1}{2}$, então $x_0=\frac{1}{2}$ é uma escolha natural. Nesse caso, $g(x)=\frac{4}{25}+\frac{48}{125}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ e $h(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{11}{16}x^2-2x+\frac{1}{4}$. Note que $h(x)\leqslant 0$ para $x\geqslant\frac{1}{8}$. Então, se $a,b,c,d\geqslant\frac{1}{8}$ então

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\leqslant g(a)+g(b)+g(c)+g(d)=4\cdot\frac{4}{25}+\frac{48}{25}\left(a+b+c+d-4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{25}$$

Resta então os casos em que um ou mais números são menores do que $\frac{1}{8}$. Note que, como $a+b+c+d=2$ e $a,b,c,d\leqslant 1$ então no máximo dois números são menores do que $\frac{1}{8}$.

Se dois números são menores do que $\frac{1}{8}$, como f é crescente então

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\leqslant 2f\left(\frac{1}{8}\right)+2f(1)=2\cdot\frac{64}{65^2}+2\cdot\frac{1}{4}<2\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{2}<\frac{16}{25}$$

Se exatamente um número é menor do que $\frac{1}{8}$, digamos a, então tomamos $x_0=\frac{2}{3}$. Nesse caso, o termo independente de $h(x)$ é $1-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2<0$, o que quer dizer que $h(x)<0$ para todo $x\in[0,1]$. Sendo $g(x)=\frac{36}{169}+\frac{540}{13^3}\left(x-\frac{1}{8}\right)$,

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\leqslant f(a)+3\cdot\frac{36}{169}+\frac{540}{13^3}\left(b+c+d-3\cdot\frac{2}{3}\right)=f(a)+\frac{108}{169}-\frac{540}{13^3}a$$

Sendo $f''(x)=\frac{2(3x^4-8x^2+1)}{(1+x^2)^4}>0$ para $0<x\leqslant\frac{1}{8}$, $f'(x)$ é crescente nesse intervalo, de modo que $f'(a)\leqslant f'\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{8}\left(1-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)^3}=\frac{63\cdot 16\cdot 64}{5^3\cdot 13^3}=\frac{12\cdot 21\cdot 4\cdot 64}{125\cdot 13^3}<\frac{2{,}1\cdot 4\cdot 64}{13^3}=\frac{537{,}6}{13^3}<\frac{540}{13^3}$. Logo o lado direito da última desigualdade é crescente em a, de modo que

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\leqslant f\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{108}{169}-\frac{540}{13^3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{64}{65^2}+\frac{108}{169}-\frac{135}{2\cdot 13^3}<\frac{1}{64}+\frac{108\cdot 26-135}{2\cdot 2197}=\frac{1}{64}+\frac{11\cdot 3^5}{2\cdot 2197}<\frac{16}{25}$$

A última desigualdade pode ser verificada notando que $\frac{16}{25}-\frac{1}{16}=\frac{999}{1600}$ e

$$\frac{11\cdot 3^5}{2\cdot 2197}<\frac{999}{1600}\iff\frac{11\cdot 3^2}{2197}<\frac{37}{800}\iff 99\cdot 800<37\cdot 2197,$$

que é verdadeiro pois $37\cdot 2197=81289>80000>800\cdot 99$.

Resumindo:

- Esse é uma daquelas desigualdades do tipo $\sum f(a)\leqslant c$. Então é natural queremos estudar a função f.
- A primeira reação é tentar utilizar Jensen, mas infelizmente a função f não é côncava, nem mesmo em $[0,1]$. De fato, ela muda de concavidade em $x=\sqrt{\frac{4-\sqrt{13}}{3}}$.
- Embora seja possível trabalhar com concavidade e dividindo em casos, vale a pena procurar ideias alternativas. De fato, tentar estimar f a partir de uma função afim pode dar certo. Infelizmente, não dá diretamente...
- ...então dividimos novamente em casos! Note que os dois primeiros casos foram bem simples: no primeiro, a estimativa linear dá conta do recado; no segundo, só o fato de f ser crescente mata o problema.
- O problema está no terceiro caso; uma opção seria considerar $x_0=\frac{2-a}{3}$; mas isso dá mais conta (ainda), e tende a ser intratável. Mesmo as contas no final não dão muito espaço para "acochambradas": ainda que podemos trocar $\frac{64}{65^2}$ por $\frac{1}{64}$, não dá para melhorar muito as outras.
- Note que só precisamos de duas retas ($x_0=\frac{1}{2}$ e $x_0=\frac{2}{3}$. Talvez a conta ficasse menor se só fizéssemos as derivadas nesses dois pontos; mas ter o resultado geral é bastante reconfortante, no sentido que $h(x)$ é razoavelmente favorável nos nossos cálculos.
- Em outros problemas, você pode tentar usar outras curvas, como parábolas, funções de terceiro grau, funções trigonométricas...Nesse problema, o melhor é usar funções côncavas. Mas um esboço rápido de f e da tangente em $x_0=\frac{1}{2}$ nos mostra que o melhor a fazer é usar a reta mesmo, já que funções côncavas tornariam a diferença $f(x)-g(x)$ menor ainda.

▸ PROBLEMA 4

Ache todos os inteiros ímpares n para os quais

$$\frac{2^{\varphi(n)}-1}{n}$$

é um quadrado perfeito.

Observação: dado um inteiro positivo n, $\varphi(n)$ denota a quantidade de elementos do conjunto

$$\{a\in Z\mid 1\leqslant a\leqslant n\quad\text{e}\quad \mathrm{mdc}(a,n)=1\}.$$

Solução

Primeiro, note que $n=1$ é solução e, sendo $n>1$ ímpar, $\varphi(n)$ é par, pois $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=n\prod_{p|n}\frac{p-1}{p}$. Então, sendo $k=\varphi(n)/2$, a fração em questão é

$$\frac{(2^k-1)(2^k+1)}{n}=m^2$$

Afirmamos que $n\mid 2^k+1$ ou $n\mid 2^k-1$. De fato, note que $\mathrm{mdc}(2^k+1,2^k-1)=1$, pois a diferença entre os dois números, que são ímpares, é 2. Assim, se n é potência de primo, n deve dividir um dos números 2^k+1 e 2^k-1. Se n não é potência de primo, $n=ab$ com a e b inteiros maiores do que 1 e $\mathrm{mdc}(a,b)=1$. Sendo a e b ímpares, $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ são pares, de modo que $k=\varphi(n)/2=\varphi(ab)/2=\varphi(a)\frac{\varphi(b)}{2}=\frac{\varphi(a)}{2}\varphi(b)$. Isto quer dizer que $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ dividem k, e, pelo teorema de Euler-Fermat, $2^k\equiv 1\pmod{a}$ e $2^k\equiv 1\pmod{b}\implies 2^k\equiv 1\pmod{ab}\iff n\mid 2^k-1$.

Deste modo, $\frac{2^k+1}{n}$ ou $\frac{2^k-1}{n}$ é inteiro. Assim,

$$m^2=\frac{2^k-1}{n}\cdot(2^k+1)=\frac{2^k+1}{n}\cdot(2^k-1)$$

e, lembrando que $\text{mdc}(2^k - 1, 2^k + 1) = 1$, concluímos que $2^k + 1$ ou $2^k - 1$ é quadrado perfeito. O segundo caso só pode ocorrer para $k = 1$, pois se $k > 1$ $2^k - 1 \equiv -1 \pmod{4}$ não pode ser quadrado perfeito; assim, $k = 1 \Longrightarrow n \mid 2^1 + 1 \iff n = 1$ ou $n = 3$. Estudemos o primeiro caso: temos $2^k + 1 = t^2 \iff 2^k = (t-1)(t+1)$, o que implica $t - 1$ e $t + 1$ serem ambos potências de 2. Mas a diferença entre os dois números é 2 e as duas únicas potências de 2 cuja diferença é 2 são 2 e 4. Logo $t = 3$ e $2^k + 1 = 3^2 \iff k = 3 \Longrightarrow n \mid 2^3 - 1 \iff n = 1$ ou $n = 7$. Testando os casos $n = 3$ e $n = 7$, vemos que eles satisfazem o enunciado e, portanto, as únicas soluções são 1, 3 e 7.

Resumindo:

- Caso você não conheça o teorema de Euler-Fermat, conheça-o já: se $\text{mdc}(a, m) = 1$, então $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. A fórmula para $\varphi(m)$ está na solução; procure-a!
- As idéias que resolvem o problema se baseiam em algumas das idéias utilizadas para provar o fato já bem conhecido de que **os únicos valores de n que admitem raiz primitiva são 2, 4, p^k e $2p^k$, sendo p primo ímpar**. Caso você não saiba ou não se lembre, *raiz primitiva* de um número inteiro n é um número g tal que o menor expoente positivo t tal que $g^t \equiv 1 \pmod{n}$ é $\varphi(n)$.
- Aqui, essencialmente provamos que números ímpares que não são potências de primos não admitem raízes primitivas. Essa demonstração é bastante clássica e pode ser encontrada em diversos lugares, em particular na Olimpédia: `http://erdos.ime.usp.br/`.
- Note como, ao fatorar, tirar o mdc dos fatores foi novamente decisivo (duas vezes!) na resolução do problema. Veja também o problema 1 do segundo teste.