LIII Olimpíada Internacional e XXVII Olimpíada Iberoamericana
Quarto Teste de Seleção
28 de abril de 2012

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2012! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2011, que deve permanecer secreto até essa data.**

PROBLEMA 1

Seja $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Prove que um inteiro positivo aparece na lista

$$\lfloor \phi \rfloor, \lfloor 2\phi \rfloor, \lfloor 3\phi \rfloor, \ldots, \lfloor n\phi \rfloor, \ldots$$

se, e somente se, aparece exatamente duas vezes na lista

$$\lfloor 1/\phi \rfloor, \lfloor 2/\phi \rfloor, \lfloor 3/\phi \rfloor, \ldots, \lfloor n/\phi \rfloor, \ldots$$

PROBLEMA 2

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros positivos e a um inteiro positivo maior do que 1 que é múltiplo do produto $a_1 a_2 \ldots a_n$. Prove que $a^{n+1} + a - 1$ **não** é divisível por $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \cdots (a + a_n - 1)$.

PROBLEMA 3

Em xadrez, um rei ameaça outro rei se, e somente se, estão em casas vizinhas, seja na horizontal, vertical ou diagonal. Encontre a maior quantidade de reis que podem ser colocados em um tabuleiro 12×12 tal que cada rei ameaça exatamente um outro rei. Aqui, não estamos considerando cores de peças, ou seja, considere que os rei são todos, digamos, brancos, e que reis de mesma cor podem se ameaçar.

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Suponha que os círculos de diâmetro AB e CD se cortam em dois pontos E e F no interior de $ABCD$. Sejam P, Q, R as projeções de E sobre os lados AB, BC, CD e X, Y, Z as projeções de F sobre os lados AB, BC, CD. Suponha que os circuncírculos de PQR e XYZ se cortam em dois pontos K e L. Prove que a reta KL passa pelo ponto médio de EF.