Terceira Lista de Preparação para a XLVIII IMO
e XXII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

Seja $N > 1$ e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_N$ números reais não negativos cuja soma é no máximo 500. Prove que existe um inteiro $k \geqslant 1$ e inteiros $1 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k = N$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}} < 2007$$

▸ PROBLEMA 2

Esmeralda constrói uma pilha sobrepondo camadas de dimensões 10×11 formadas por 55 dominós, cada um de dimensões 2×1. A pilha é rígida, ou seja, cada ponto da base da pilha está coberto por algum dominó em alguma camada, com exceção dos vértices do quadriculado 10×11. Qual é a menor quantidade de camadas que Esmeralda precisa fazer para construir uma pilha rígida?

▸ PROBLEMA 3

Seja k um inteiro positivo e $n = 4k+1$. Seja A o conjunto dos números da forma $x^2 + ny^2$, sendo x e y inteiros. Prove que existem inteiros x e y tais que $x^n + y^n \in A$ e $x + y \notin A$.

▸ PROBLEMA 4

Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a seqüência definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n}, n \geqslant 1$$

Prove que

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{n} < \frac{1}{8\sqrt{n}} H_n,$$

sendo

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

▸ PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. Seja D a interseção de BC e da altura de ABC relativa a A e Γ o circuncírculo do triângulo ABC. Sejam Γ_1 o círculo tangente aos segmentos AD e BD e a Γ e Γ_2 o círculo tangente aos segmentos AD e CD e a Γ. Seja ℓ a tangente comum interna a Γ_1 e Γ_2 que não é AD.

Prove que ℓ passa pelo ponto médio de BC se, e somente se, $2BC = AB + AC$.

▸ PROBLEMA 6

Dado um inteiro positivo a, seja S_a o conjunto dos primos satisfazendo a seguinte condição: Para qualquer $p \in S_a$, existe um inteiro ímpar b tal que $(2^{2^a})^b - 1$ é divisível por p.

Prove que, para todo inteiro positivo a, existem infinitos primos que não pertencem a S_a.

▸ PROBLEMA 7

No hexágono convexo $ABCDEF$, os três triângulos ABC, CDE e EFA são semelhantes. Isto é:

$$\angle BAC = \angle DCE = \angle FEA \quad \text{e} \quad \angle BCA = \angle DEC = \angle FAE.$$

Encontre condições sobre os três triângulos de tal modo que valha a seguinte equivalência:

$\triangle ACE$ é um triângulo equilátero se, e somente se, $\triangle BDF$ é um triângulo equilátero

▸ PROBLEMA 8

Considere n pontos no plano de modo que não haja três alinhados. Todo subconjunto E destes pontos que forma um polígono convexo sem pontos em seu interior é chamado conjunto *polido*. Denote c_k o número de conjuntos polidos formados por exatamente k pontos. Mostre que a seguinte soma depende de n, mas não depende da configuração dos pontos:

$$\sum_{i=3}^{n} (-1)^i c_i$$