LIII Olimpíada Internacional e XXVII Olimpíada Iberoamericana
Segundo Teste de Seleção
24 de março de 2012

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2012! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2011, que deve permanecer secreto até essa data.**

PROBLEMA 1

Para cada inteiro positivo d, seja $f(d)$ o menor inteiro positivo que tem exatamente d divisores positivos (assim, por exemplo, $f(1) = 1$, $f(5) = 16$ e $f(6) = 12$). Prove que, para todo inteiro $k \geq 0$, o número $f(2^k)$ divide o número $f(2^{k+1})$.

PROBLEMA 2

Suponha que 1000 estudantes estão ao redor de um círculo. Prove que existe um inteiro k tal que $100 \leq k \leq 300$ e neste círculo existe um grupo de $2k$ estudantes consecutivos para o qual a primeira metade do grupo possui o mesmo número de garotas que a segunda metade.

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ. Sejam B_0 o ponto médio de AC e C_0 o ponto médio de AB. Sejam D o pé da altura relativa ao vértice A e G o baricentro do triângulo ABC. Considere o círculo γ passando por B_0 e C_0 e tangente a Γ em um ponto $X \neq A$. Prove que os pontos D, G e X são colineares.

PROBLEMA 4

Prove que, para todo inteiro positivo n, o conjunto $\{2, 3, 4, \ldots, 3n + 1\}$ pode ser particionado em n triplas de conjuntos de modo que os números de cada tripla sejam os comprimentos dos lados de algum triângulo obtusângulo.