XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Quarto Teste de Seleção
10 de maio de 2008

▸ **PROBLEMA 1**

Encontre todos os inteiros positivos ímpares n tais que existem n inteiros ímpares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n^4.$$

Solução

Lembrando que o quadrado de todo inteiro ímpar (incluindo n^4) é congruente a 1 módulo 8,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n^4 \iff n \cdot 1 \equiv 1 \pmod{8} \iff n \equiv 1 \pmod{8}$$

Logo $n = 8k+1$, para k inteiro não negativo. $n = 1$ obviamente é um dos possíveis valores, então suponha que k é positivo. Observando que

$$\begin{aligned}(8k+1)^4 - (8k-1)^4 &= \big((8k+1)-(8k-1)\big) \cdot \big((8k+1)+(8k-1)\big) \cdot \big((8k+1)^2 + (8k-1)^2\big) \\ &= 64k(64k^2+1) = k \cdot ((64k)^2 - 2 \cdot 64k + 1 + 128k + 63) \\ &= k \cdot (64k-1)^2 + 128k^2 + 63k = k \cdot (64k-1)^2 + 2 \cdot (64k^2 + 16k + 1) + 31k - 2 \\ &= k \cdot (64k-1)^2 + 2 \cdot (8k+1)^2 + 31k - 2\end{aligned}$$

temos n^4 escrito como soma de $1 + k + 2 = k + 3$ quadrados e uma parcela linear:

$$(8k+1)^4 = \big((8k-1)^2\big)^2 + k \cdot (64k-1)^2 + 2 \cdot (8k+1)^2 + 31k - 2$$

Basta então escrever $31k - 2$ como soma de $8k + 1 - (k+3) = 7k - 2$ quadrados, o que é fácil, considerando que $31 = 5^2 + 6 \cdot ^1$ pode ser escrito como soma de 7 quadrados:

$$(8k+1)^4 = \big((8k-1)^2\big)^2 + k \cdot (64k-1)^2 + 2 \cdot (8k+1)^2 + k \cdot 5^2 + (6k-2) \cdot 1^2$$

Assim, para k inteiro positivo, podemos escrever n^4 como soma de n quadrados: $\big((8k-1)^2\big)^2$, k vezes $(64k-1)^2$, 2 vezes $(8k+1)^2$, k vezes 5^2 e $6k-2$ vezes 1^2.

Logo a resposta consiste nos inteiros da forma $8k+1$, k inteiro não negativo.

Resumindo:

- Como muitos problemas do tipo "para que valores de n existem...", ele é dividido em duas partes: em uma delas, mostramos que alguns valores não são possíveis impondo alguma restrição ou encontrando algum invariante; em outras delas, mostramos que os demais valores são possíveis, exibindo um exemplo ou dando algum argumento existencial, no estilo casa dos pombos.
- A parte de impor a restrição é bem rotineira: basta ver módulo 8, o que é bastante comum em se tratando de quadrados perfeitos.
- A segunda parte, que é exibir um exemplo, é um pouco mais "livre" e, exatamente por isso, pode causar dificuldades; nesse caso, dispomos de vários algoritmos.
- O algoritmo que utilizamos aqui é uma variante do *algoritmo guloso*: tomamos os maiores números possíveis. Na verdade não fizemos exatamente isso: não vale a pena tomar o maior quadrado menor do que polinômios de grau ímpar. Essa escolha facilita a construção, já que no final sobram números menores e podemos escolher muitos deles iguais a 1.
- Outra idéia que pode funcionar bem é primeiro escrever n^4 como soma de n^4 uns e juntar, repetidamente, k^2 uns. Para exercitar essa idéia, pense no problema 6 da IMO 1992:

Para cada inteiro positivo n, $S(n)$ é definido como o maior inteiro tal que, para todo o inteiro k, $1 \leqslant k \leqslant S(n)$, n^2 pode ser escrito como a soma de k quadrados estritamente positivos.

(a) Prove que $S(n) \leqslant n^2 - 14$, para todo $n \geqslant 4$.

(b) Encontre um inteiro n tal que $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Prove que existe uma infinidade de inteiros n tais que $S(n) = n^2 - 14$.

▸ **PROBLEMA 2**

Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes complexos para os quais

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

para todo número complexo x.

Solução

Primeiro, note que se $P(x)$ é constante então $P(x) \equiv 0$ ou $P(x) \equiv 1$. Suponha, a partir de agora, que o grau de P é pelo menos 1. Seja r uma raiz de $P(x)$. Então $P(r^2) = P(r) \cdot P(r+2) = 0$, ou seja, r^2 é raiz de $P(x)$ também. Repetindo o argumento, obtemos que $r^4, r^8, r^{16}, \ldots$ são raízes. Como P não pode ter infinitas raízes, então, para toda raiz r de P existem $k > \ell$ tais que $r^{2^k} = r^{2^\ell}$, o que implica $r = 0$ ou $|r| = 1$.

Agora, note que $P((r-2)^2) = P(r-2) \cdot P(r) = 0$, o que implica que $(r-2)^2$ é raiz. Logo $|r-2| = 0$ ou $|r-2| = 1$.

Pela desigualdade triangular, $|r| + |2-r| \geqslant |r + (2-r)| = 2$. Como $|r| \leqslant 1$ e $|2-r| \leqslant 1$, devemos ter $|r| = 1$ e $|2-r| = 1$. Além disso, como vale a igualdade na desigualdade triangular, devemos ter os vetores r e $2-r$ na mesma direção e sentido do vetor 2, ou seja, r e $2-r$ são ambos reais e iguais a 1. Logo a única raiz que P pode ter é 1.

Deste modo, $P(x) = a(x-1)^n$, $a \neq 0$. Substituindo na equação, obtemos $a(x^2-1)^n = a(x-1)^n \cdot a(x+1)^n \iff a = a^2 \iff a = 1$.

Os possíveis polinômios são, então, 0, 1 e $(x-1)^n$, n inteiro positivo.

Resumindo:

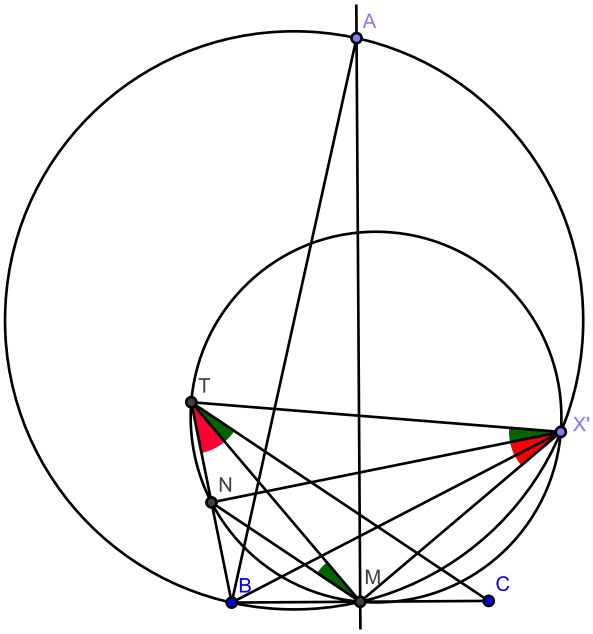
- Problemas de polinômios e equações funcionais não são exatamente a mesma coisa. Por quê?
- A razão é muito simples: polinômios são funções bastante peculiares: elas têm um formato definido (combinação linear de uma quantidade finita de potências de x) e têm uma série de propriedades que a maioria das outras funções não têm: número limitado de raízes; comportam-se como inteiros, etc.
- Nesse problema, a abordagem acaba sendo em torno das raízes do polinômio; mais especificamente, encontramos as possíveis raízes do polinômio. Aqui, essa idéia funciona por um motivo simples: conseguimos gerar raízes a partir de outras. Especificamente, se r é raiz, r^2 e $(r-2)^2$ são raízes.
- Como um polinômio não nulo tem uma quantidade finita de raízes, em algum momento as raízes devem se repetir. Isto quer dizer que se r é raiz, então r deve ter órbita finita não somente para ambas as funções $f(r) = r^2$ e $g(r) = (r-2)^2$, mas para qualquer combinação de composição dessas funções. Isso limita bastante as possibilidades para r; de fato, um rápido argumento com módulos de números complexos mostra que r só pode ser igual a 1.
- Mas o que tornou o argumento realmente rápido foi a desigualdade triangular, que essencialmente é o mesmo que desenhar os complexos no plano. Faça os desenhos e você notará que r só poderia ser 1 quase imediatamente.

▸ **PROBLEMA 3**

É dado o triângulo ABC tal que $AB = AC$. Seja M o ponto médio de BC. O ponto X varia sobre o arco menor MA do circuncírculo do triângulo ABM. Seja T o ponto no interior do ângulo $\angle BMA$ para o qual $\angle TMX = 90^\circ$ e $TX = BX$. Prove que $\angle MTB - \angle CTM$ não depende da posição do ponto X.

Solução

Seja N o ponto médio de TB. Como o triângulo TBX é isósceles com $TX = BX$, temos $\angle XNT = 90^\circ = \angle TMX$. Portanto o quadrilátero $TMNX$ é inscritível. Além disso, como M e N são pontos médios de BC e BT, MN é paralelo a TC.



Considerando os fatos acima, $\angle BTM = \angle NTM = \angle NXM$ e $\angle CTM = \angle TMN = \angle TXN$. Observando que o triângulo TBX é isósceles, $\angle NXB = \angle TXN = \angle CTM$.

Logo $\angle MTB - \angle CTM = \angle NXM - \angle NXB = \angle MXB$. Enfim, considerando o quadrilátero inscritível AXMB, $\angle MXB = \angle MAB$, de modo que $\angle MTB - \angle CTM = \angle MAB$ não depende da posição de X. ∎

Resumindo:

- A solução desse problema é curta, mas poderia não ter sido. A chave para obter essa solução foi marcar o ponto médio de TB e traçar a altura/bissetriz/mediana/mediatriz XN do triângulo isósceles XBT, que é uma reação razoavelmente natural frente a situações desse tipo.
- Feito isso, o resto é só um bom e velho arrastão, sem esquecer que, sendo M e N pontos médios temos uma base média e, portanto, retas paralelas.
- Uma outra solução, bastante elegante, foi obtida por um estudante através da reflexão C' de C em relação a TM. Faça um desenho e note que isso implica em provar que $\angle C'TB$ não depende de X. Além disso, há muito o que se explorar nessa figura. Tente e veja!
- O problema também sai com trigonometria. O que segue é o resumo da solução de um dos estudantes: com dois truques da cotangente e a fórmula da cotangente da soma, encontre a cotangente de $\angle MTB - \angle CTM$ em função de BM, $\angle MBX$ e $\angle BAM$. Outra vez, tente e veja!

▸ **PROBLEMA 4**

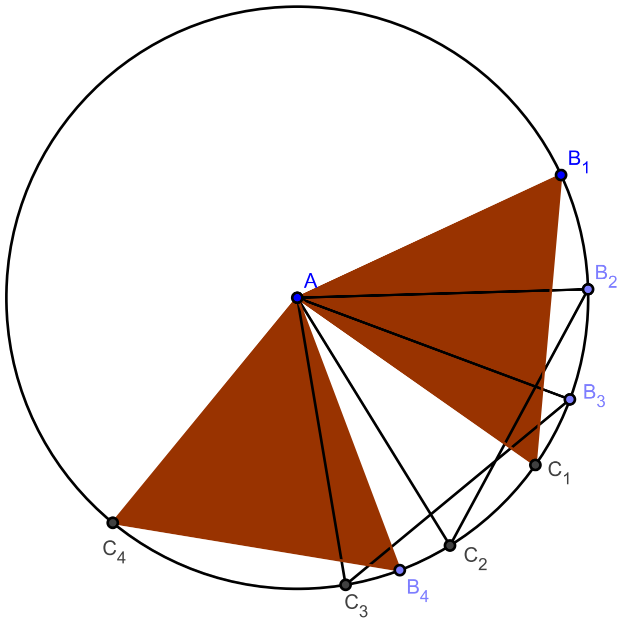
Seja P um polígono convexo de n lados. Para cada três vértices de P, considere o triângulo determinado por eles. Tal triângulo é dito *estiloso* se todos os seus lados têm comprimento 1. Prove que os vértices de P não determinam mais do que $\frac{2n}{3}$ triângulos estilosos.

Solução

A primeira idéia usual é fazer uma contagem dupla, associando os triângulos estilosos com os vértices, ou vice-versa. Sendo mais específico, estamos procurando um conjunto S de pares ordenados (V, T) sendo V um vértice e T um triângulo estiloso tal que $|S| \leqslant 2n$ e $|S| \geqslant t$, sendo t a quantidade de triângulos estilosos. Nada mais natural, então, do que tentar associar no máximo dois pares (V, T) a cada vértice e no mínimo três pares (V, T) a cada triângulo estiloso. A associação usual "$(V, T) \in S \iff$ V é vértice de T" não satisfaz essa condição: apesar de cada triângulo estiloso estar associado a exatamente três pares, um vértice pode participar de muitos triângulos estilosos, estando então associado a mais de dois pares de S.

Vamos então tentar limitar pelos vértices, escolhendo no máximo dois triângulos estilosos por vértice. Sendo A um vértice e AB_1C_1, AB_2C_2, $\ldots$, AB_kC_k os triângulos estilosos com vértice em A, se existirem, note que todos os vértices B_i e C_i estão sobre a circunferência de centro A e raio 1. Sendo o polígono P convexo, escolhemos para se associar a A no conjunto S os triângulos estilosos nos extremos, tanto no sentido horário como no sentido anti-horário.

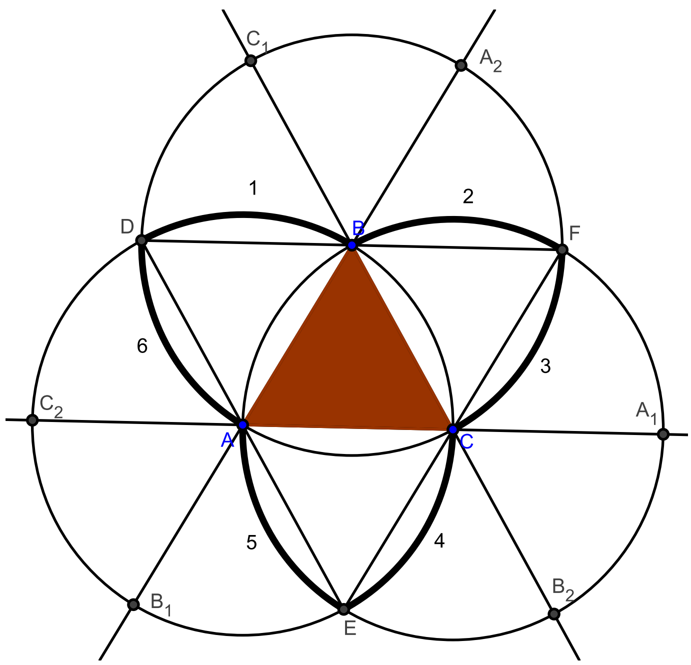
Na figura a seguir, destacamos os dois triângulos estilosos associados a A: (A, AB_1C_1) e (A, AB_4C_4) pertencem a S. Em caso de A ser vértice de somente um triângulo estiloso, contamos o par duas vezes, uma com cada extremo.



Notando ainda que pode ocorrer que A não seja vértice de triângulos estilosos, vemos que $|S| \leqslant 2n$.

Resta-nos provar que $|S| \geqslant 3t$. Para tanto, é suficiente provar que cada triângulo está associado a pelo menos 3 pares de S, ou seja, que cada triângulo estiloso é extremo de pelo menos três vértices. Note que essa contagem de vértices pode ter repetições: o triângulo poderia ser o único de um dos vértices, sendo extremo dele duas vezes.

A partir de agora, vamos nos focar em cada triângulo e em seus vértices:



Na figura anterior, ABC é um triângulo estiloso e traçamos os círculos de raio 1 com centros em seus vértices A, B e C. Considere o círculo de centro A. Suponha que ABC não seja extremo de A. Então existe um triângulo $AB'C'$ com B' e C' mais no sentido horário que B e C, respectivamente. Note que B' pertence ao arco CE ou ao arco BC, pois, sendo o polígono convexo, não pode haver vértices no arco B_1C_2. De qualquer forma, há um vértice no arco CE, pois no segundo caso, C' pertence a CE. Ou seja, para cada extremo diferente de ABC, um dos seis arcos numerados de 1 a 6 tem um vértice de P.

Suponha, então, que ABC é extremo de menos de três dos seis vértices (lembre-se, cada vértice pode ter o mesmo triângulo como os dois extremos). Isso quer dizer que pelo menos quatro dos seis arcos mencionados têm algum vértice do polígono. Com isso, há dois vértices em pelo menos um dos pares $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$. Suponha, sem perdas, que esse par seja $\{1,2\}$. Então existem vértices X em 1 e Y em 2 que estão em semiplanos opostos aos vértices A e C em relação à reta DF, que contém o vértice B. Isso implica B estar no interior do quadrilátero $XYCA$, o que é um absurdo, já que o polígono que tem A, B, C, X, Y como alguns de seus vértices é convexo. Então cada triângulo está associado a pelo menos três pares de S e concluímos que $|S| \geqslant 3t$.

Logo $3t \leqslant |S| \leqslant 2n \Longrightarrow t \leqslant \frac{2n}{3}$. ∎

Resumindo:

- À primeira vista, parece um típico problema de contagem dupla, em que duas contagens resolvem o problema. Isso é verdade, mas a associação que devemos fazer não é tão simples.
- A técnica de contagem dupla pode ser vista com "contar uma mesma coisa de duas maneiras e comparar", mas essa técnica fica mais encorpada (e, portanto, mais poderosa) se essa "coisa" for definida mais formalmente.
- A formulação a seguir costuma ser bastante eficiente: se queremos comparar as quantidades de elementos de dois conjuntos A e B, recorremos a um conjunto $S \subset A \times B$ e contamos a cardinalidade de S sob o ponto de vista de A e de B:

$$|S| = \sum_{a \in A} |\{(a,y) \in S : y \in B\}| = \sum_{b \in B} |\{(x,b) \in S : x \in A\}|$$

- Outra maneira de enxergar é construir um grafo bipartido com classes de vértices A e B. Ligamos um elemento $a \in A$ a $b \in B$ quando $(a,b) \in S$. O que fizemos no problema é "ajeitar" as arestas escolhidas de modo que o grau de cada elemento de A seja menor ou igual do que um certo valor (no nosso caso, 2) e o grau de cada elemento de B seja maior ou igual do que algum outro valor (no nosso caso, 3). Nem sempre isso é possível, mas nesse problema é particular efetivo.
- A geometria entra ao construirmos o conjunto S (ou o grafo bipartido, o que você preferir). O multiplicador/grau 2 já nos dá uma idéia de escolhermos o "primeiro" e o "último" triângulo estiloso (o que só é possível para polígonos convexos – bastante revelador, considerando o quanto é difícil utilizar o fato de que o polígono é convexo).
- O multiplicador/grau 3, que parece ser a quantidade de vértices do triângulo, acaba sendo mais sutil no final e depende fortemente do fato do polígono ser convexo. E nesse caso utilizamos uma técnica bastante importante de geometria combinatória: procurar as possíveis posições de pontos – nesse problema, os vértices.