Segunda Lista de Preparação para a LII IMO
e XXVI Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

Prove que existe um real $c > 0$ com a seguinte propriedade: entre quaisquer n números inteiros positivos distintos, $n \geqslant 3$, existem três cujo mmc é maior ou igual a $c \cdot n^{2,99}$.

▸ PROBLEMA 2

São dados um círculo ω, uma corda AB de ω e quatro pontos C, D, E e F no interior da corda AB. As cordas X_1X_2 passando por C, Y_1Y_2 passando por D, Z_1Z_2 passando por E e W_1W_2 passando por F são tais que X_1, Y_1, Z_1 e W_1 estão do mesmo lado de AB e satisfazem

$$\frac{AX_1 \cdot BX_2}{X_1X_2} = \frac{AY_2 \cdot BY_1}{Y_1Y_2} = \frac{AZ_1 \cdot BZ_2}{Z_1Z_2} = \frac{AW_2 \cdot BW_1}{W_1W_2}$$

Sejam U a interseção das retas X_1X_2 e Y_1Y_2 e V a interseção das retas Z_1Z_2 e W_1W_2. Prove que todas as retas UV obtidas variando as cordas X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 e W_1W_2 têm um ponto comum ou são todas paralelas entre si.

▸ PROBLEMA 3

Sejam a, b e n inteiros positivos e C um conjunto finito de inteiros. Suponha que todo inteiro positivo pode ser representado na forma $ax^n + by^n + c$ para alguns x, y inteiros positivos e $c \in C$. Encontre todos os possíveis valores de n.

▸ PROBLEMA 4

No plano cartesiano, definimos *faixa* como a região compreendida entre duas retas paralelas, incluindo as retas. A *largura* da faixa é o (único) tamanho do lado do quadrado que tem lados paralelos aos eixos coordenados e pelo menos um vértice sobre cada uma das retas que definem a faixa. Prove que se a união de uma quantidade finita de faixas cobre o quadrado $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ então a soma das suas larguras é maior ou igual a 1.

▸ PROBLEMA 5

Prove que o polinômio

$$f(x) = \frac{x^m + x^n - 2}{x^{\operatorname{mdc}(m,n)} - 1}$$

é irredutível em $\mathbb{Q}$.

▸ PROBLEMA 6

Os círculos $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ são tangentes externamente ao círculo ω_0, nessa ordem (ou seja, sendo C_i o centro do círculo i, os segmentos C_0C_1, C_0C_2, …, C_0C_6 aparecem no sentido anti-horário, considerando C_0 como referência). Além disso, os círculos ω_i e ω_{i+1} são tangentes externamente para $i = 1, 2, 3, \ldots, 6$, sendo $\omega_7 = \omega_1$. Sendo r_i o raio do círculo ω_i, temos $r_1r_4 = r_2r_5 = r_3r_6 = 1$. Prove que $r_0 \leqslant 1$.

▸ PROBLEMA 7

Considere uma sequência infinita de 1s e 2s com as seguintes propriedades:

(i) O primeiro número na sequência é 1;

(ii) Não há três 1s consecutivos nem dois 2s consecutivos;

(iii) Se trocarmos pares de 1s consecutivos por um 2, deixarmos os 1s isolados e retirarmos os 2s originais, obtemos a mesma sequência.

Determine, em função de n, a quantidade de 2 entre os n primeiros elementos da sequência.

▸ PROBLEMA 8

Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos reais não negativos. Encontre todas as funções não decrescentes $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f\left(\frac{x + f(x)}{2} + y\right) = 2x - f(x) + f(f(y))$$

Obs: f *é não decrescente quando* $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ *para todos* x, y *em seu domínio.*