Primeira Lista de Preparação para a XLIX IMO
e XXIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

Seja n a soma dos dígitos de um inteiro positivo A. Dizemos que A é *batuta* quando todos os inteiros 1, 2, 3, ..., n é soma de alguns (possivelmente todos) dígitos de A. Por exemplo, 117 não é batuta pois somente $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $7 = 7$, $8 = 1 + 7$, $9 = 1 + 1 + 7$ podem ser escritos como soma de dígitos de 117, faltando 3, 4, 5 e 6.

(a) Prove que se 1, 2, 3, ..., 8 são somas de dígitos de um inteiro positivo A então A é batuta.

(b) Se 1, 2, 3, ..., 7 são somas de dígitos de um inteiro positivo A, então A é necessariamente batuta?

▸ PROBLEMA 2

Dado um inteiro positivo $n \geqslant 2$, sejam $B_1, B_2, \dots, B_n$ n subconjuntos de dois elementos do conjunto X. Encontre o menor valor de $|X|$ tal que existe um subconjunto Y com n elementos de X tal que $|Y \cap B_i| \leqslant 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

▸ PROBLEMA 3

Uma seqüência limitada $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ satisfaz

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2007} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2008}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prove que $a_n < \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$.

▸ PROBLEMA 4

Um octógono regular é cortado em paralelogramos. Prove que pelo menos um desses paralelogramos é um retângulo.

▸ PROBLEMA 5

Encontre todos os inteiros positivos a, b, c, d tais que

$$2^a = 3^b \cdot 5^c + 7^d.$$

▸ PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo. Seu incírculo toca o lado AB em E e o excírculo relativo a BC toca AB em F. Seja D o ponto sobre o lado BC para o qual os incírculos dos triângulos ABD e ACD têm raios iguais. As retas DE e DB cortam novamente o circuncírculo do triângulo ADF em X e Y. Prove que XY é paralelo a AB se, e somente se, $AB = AC$.

▸ PROBLEMA 7

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geqslant 3$, inteiros positivos cujo mdc é igual a 1 tais que a_i divide $\sum_{j=1}^n a_j$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Prove que $\prod_{j=1}^n a_j$ divide $\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^{n-2}$. Além disso, para cada $n \geqslant 3$ exiba um exemplo que mostre que o expoente $n - 2$ não pode ser diminuído.

▸ PROBLEMA 8

Encontre todas as funções f definidas nos reais positivos e assumindo valores reais tais que

$$f(x) + f(y) \leqslant \frac{f(x+y)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geqslant \frac{f(x+y)}{x+y}$$

para todos reais positivos x, y.