Segunda Lista de Preparação para a XLVIII IMO
e XXII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ **PROBLEMA 1**

Seja ABC um triângulo cujo circunraio é igual ao raio de seu círculo ex-inscrito relativo a A. Suponha que este círculo toque o lado BC em M, a reta AC em N e a reta AB em P. Prove que o circuncírculo de ABC é o ortocentro de MNP.

▸ **PROBLEMA 2**

Seja $n > 1$ um inteiro positivo fixado. Existem n números inteiros positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ distintos tais que quaisquer dois são primos entre si e, para $i = 1, 2, \dots, n$, $a_1^i + a_2^i + \cdots + a_n^i$ é múltiplo de $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$?

▸ **PROBLEMA 3**

(a) Existem inteiros positivos a e b tais que $a \cdot 2^n + b \cdot 5^n$ é quadrado perfeito para todo n inteiro positivo?

(b) Existem inteiros positivos a, b e c tais que $a \cdot 2^n + b \cdot 5^n + c$ é quadrado perfeito para todo n inteiro positivo?

▸ **PROBLEMA 4**

Um tabuleiro $m \times n$, com $m \leqslant n$, é preenchido de acordo com as regras do jogo *Campo Minado*: no máximo uma mina é colocada em cada casinha; nas casas sem minas escrevemos o número de casinhas vizinhas, seja por lado ou por vértice, que contêm uma mina.

Determine, em função de m e n, o maior valor possível para a soma de todos os números no tabuleiro.

▸ **PROBLEMA 5**

Seja ABC um triângulo. Os triângulos PAB e QAC são construídos no exterior do triângulo ABC tais que $AP = AB$ e $AQ = AC$ e $\angle BAP = \angle CAQ$. Os segmentos BQ e CP cortam-se em R. Seja O o circuncentro do triângulo BCR. Prove que AO é perpendicular a PQ.

▸ **PROBLEMA 6**

Sejam r e s racionais fixados. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x + r) + y + s$$

para todos x, y racionais.

▸ **PROBLEMA 7**

Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que

$$P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2$$

para todo x real.

▸ **PROBLEMA 8**

O problema das n rainhas consiste em colocar n peças em um tabuleiro $n \times n$ de modo que não haja duas ou mais peças na mesma linha, na mesma coluna ou na mesma diagonal (uma diagonal não precisa necessariamente conter casas dos cantos do tabuleiro). Uma maneira de colocar as peças é uma *solução regular* quando as coordenadas $(x; y)$ das peças no tabuleiro satisfazem $x \equiv a + tb \pmod{n}$, $y \equiv c + td \pmod{n}$, sendo a, b, c, d inteiros fixados e $t = 1, 2, \dots, n$. Por exemplo, para $n = 5$, podemos tomar $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 2$, pois podemos colocar as 5 rainhas nas casas $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$ e $(4, 4)$.

Prove que existe uma solução regular para o problema das n rainhas se, e somente se, $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$.