Quarta Lista de Preparação para a XLVIII IMO
e XXII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ **PROBLEMA 1**

Mostre que todo polígono, convexo ou não, possui uma diagonal que está contida em seu interior e divide o polígono em duas partes, ambas com pelo menos um terço dos seus vértices.

▸ **PROBLEMA 2**

Considere um conjunto S formado por 2006 números naturais distintos. Um subconjunto T de S é chamado *obstinado* se para quaisquer u, v (não necessariamente distintos) em T, o número $u+v$ não pertence a T. Demonstre as duas afirmações a seguir:

i) Se $S = \{1, 2, \ldots, 2006\}$, então o número de elementos de todo subconjunto obstinado T de S é menor ou igual a 1003.

ii) Todo S possui um subconjunto obstinado com pelo menos 669 elementos.

▸ **PROBLEMA 3**

O ponto P pertence ao interior do triângulo $\triangle ABC$ e $\angle BPC - \angle BAC = \angle CPA - \angle CBA = \angle APB - \angle ACB$. Prove que $PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$.

▸ **PROBLEMA 4**

Sejam $a > b > 1$ números primos entre si. Dizemos que o *peso* de um inteiro c, denotado $w(c)$, é o menor valor possível de $|x| + |y|$, em que o par (x, y) de inteiros é tal que $ax + by = c$.

Um inteiro c é chamado *campeão local* se $w(c) \geqslant w(c \pm a)$ e $w(c) \geqslant w(c \pm b)$.

Encontre todos os campeões locais e determine a sua quantidade.

▸ **PROBLEMA 5**

Prove que

$$\frac{a^3 - 2a + 2}{b + c} + \frac{b^3 - 2b + 2}{c + a} + \frac{c^3 - 2c + 2}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}$$

para quaisquer reais positivos a, b, c.

▸ **PROBLEMA 6**

É dado um quadrilátero $ABCD$ com $\angle ABC = \angle ADC$. Seja BM uma altura do triângulo ABC, com M pertencente a AC. O ponto M' é marcado sobre a diagonal AC de modo que

$$\frac{AM \cdot CM'}{AM' \cdot CM} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$$

Prove que o ponto de intesecção entre DM' e BM é o ortocentro do triângulo ABC.

Atenção:

As soluções desta lista e de todas as anteriores deve chegar em nossas mãos até o dia 21 de maio. Listas que chegarem após tal data não serão consideradas e virarão rascunho!