XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
23 de fevereiro de 2008

▸ **PROBLEMA 1**

Encontre todos os pares ordenados (k, n) de inteiros positivos tais que $7^k - 3^n$ divide $k^4 + n^2$.

Solução

Primeiro note que 7^k e 3^n são ambos ímpares. Então $7^k - 3^n$ é par e, portanto, $k^4 + n^2$ é par. Isto quer dizer que k e n têm a mesma paridade, o que por sua vez implica que $7^k - 3^n \equiv (-1)^k - (-1)^n \equiv 0 \pmod{4}$. Se k e n são ambos ímpares, $k^4 \equiv n^2 \equiv 1 \pmod{4} \Longrightarrow k^4 + n^2 \equiv 2 \pmod{4}$, o que não é possível. Logo k e n são ambos pares.

Sejam $k = 2a$ e $n = 2b$, então. Assim, $7^k - 3^n = (7^a - 3^b)(7^a + 3^b)$ e, conseqüentemente, $7^a + 3^b \mid 16a^4 + 4b^2 \Longrightarrow 7^a + 3^b \leqslant 16a^4 + 4b^2$. Todavia, para $a \geqslant 6$, $7^a = (6+1)^a > \binom{a}{5}6^5 = a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) \cdot 324/5 > 64a \cdot (2a/3)(2a/3)(a/2)2 > 16a^4$ e, para $b \geqslant 4$, $3^b = (1+2)^b > \binom{b}{3}2^3 + \binom{b}{4}2^4 = b(b-1)(b-2)4/3 + b(b-1)(b-2)(b-3)2/3 > b(b/2)^2 4/3 + b(b/2)^3 2/3 \geqslant 4b^2/3 + 4b^2/3 > 4b^2$. Verifica-se também que $7^5 = 7 \cdot 2401 > 10000 = 16 \cdot 5^4$.

Isto quer dizer que $7^a + 3^b > 16a^4 + 4b^2$ para $a \geqslant 5$ e $b \geqslant 4$. Deste modo, devemos ter $a \leqslant 4$ ou $b \leqslant 3$.

Se $b \leqslant 3 \iff n \leqslant 6$, para $k \geqslant 4$ temos $7^k - 3^n \geqslant 7^k - 3^6 = (1+6)^k - 3^6 > \binom{k}{4}6^4 - 3^6 = k(k-1)(k-2)(k-3)54 - 3^6 > k(k/2)^3 54 > 6k^4 - 729 \geqslant k^4 + 5 \cdot 4^4 - 729 > k^4 + 36 \geqslant k^4 + n^2$. Assim, se $n \leqslant 6$ então $k \leqslant 3$.

Se $a \leqslant 4 \iff k \leqslant 8$, se $n \geqslant 16$ temos $|7^k - 3^n| \geqslant 3^n - 7^8 = 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} - 7^8 > 3^{n-1} + 8^4 = (1+2)^{n-1} + 8^4 > \binom{n-1}{2}2^2 + 8^4 > n^2 + 8^4$. Assim, se $k \leqslant 8$ então $n \leqslant 15$.

Assim, lembrando que k e n são ambos pares, devemos testar somente os pares (k, n) pertencentes ao conjunto $\{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (2,12), (2,14), (4,8), (4,10), (4,12), (4,14), (6,8), (6,10), (6,12), (6,14), (8,2), (8,4), (8,6), (8,8), (8,10), (8,12), (8,14)\}$. Verificando (ou fazendo mais desigualdades), verifica-se que $(2,4)$ é a única solução.

Resumindo:

- A idéia principal nesse problema é observar que exponenciais tendem a ser bem maiores do que polinômios e limitar as variáveis.
- Mas $7^k - 3^n$ pode ter módulo pequeno! Como proceder? Nada que estudar paridade e a boa e velha (e sempre útil) fatoração $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ não resolva.
- Feito isso, é só controlar bem as desigualdades (com o auxílio do binômio de Newton ou indução) e ter paciência para estudar casos que o problema termina.

▸ **PROBLEMA 2**

Encontre todos os inteiros positivos n para os quais é possível que cada um dos números de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ seja colorido de verde-água ou azul-piscina de modo que o conjunto $S \times S \times S$ contém exatamente 2007 triplas ordenadas (x, y, z) com x, y e z da mesma cor e $x + y + z$ múltiplo de n.

Solução

Sejam a e $v = n - a$ as quantidades de números azul-píscina e verde-água, respectivamente. Contemos os números com $x + y + z = n$ com x, y e z **sem serem da mesma cor**. Chamemos tais ternas ordenadas de *playboys*. Para isso, note que, determinados x e y, $z = -x - y \bmod n$ (ou $z = n$, caso $-x - y \equiv 0 \pmod{n}$) está unicamente determinado. Há então $a \cdot v$ ternas playboys (x, y, z) com x azul-piscina e y verde-água. Deste modo, considerando que há $3 \cdot 2 = 6$ escolhas de coordenadas das ternas playboys e que cada terna playboy tem exatamente dois pares de coordenadas com cores diferentes, o total de ternas playboys é $6 \cdot av/2 = 3av$.

Sendo o total de ternas com soma das coordenadas divisível por n igual a n^2 (escolhemos x e y quaisquer e $z = -x - y \bmod n$, com exceção de $z = n$ quando $-x - y \equiv 0 \pmod{n}$), então $2007 = n^2 - 3av$ (contamos o total e perdemos os playboys).

Basta, então, encontrar os valores de a e v tais que $2007 = (a+v)^2 - 3av = a^2 + av + v^2$. Primeiro, note que $a^2 + av + v^2$ é múltiplo de 3. Uma verificação rápida mostra que $a \equiv v \pmod{3}$, de modo que, sendo $a^2 + av + v^2$ múltiplo de 9, tem-se a e v múltiplos de 3. Logo, sendo $a = 3k$ e $b = 3\ell$, $223 = k^2 + k\ell + \ell^2$. Podemos supor sem perda de generalidade que $k \leqslant \ell$, de modo que $223 \geqslant 3\ell^2 \iff \ell \leqslant 8$. Testando os valores, obtemos a solução $k = 11$, $\ell = 6$, de modo que o único valor de n é $3k + 3\ell = 51$.

Resumindo:

- Esse problema tem duas dificuldades: uma é combinatória e outra é de teoria dos números.
- A idéia chave para a dificuldade combinatória é notar que se $x+y+z$ é multiplo de n e x e y são fixados então z está determinado mód n. Como z pertence a S, isso é o mesmo que dizer que z está unicamente determinado. Basta escolher x e y.
- Para separar as cores, usamos a fundamental idéia de pensar em **tudo menos o que não interessa**. Isso é claro, se o que "não interessar" for mais fácil de contar. É o caso aqui: só precisamos escolher x e y; se os escolhermos da mesma cor, corremos o risco de z não ter a mesma cor; então já escolhemos eles de cores diferentes para que eles "não interessem" sempre! No final, um pequeno cuidado com as repetições!
- Com isso, estabelece-se mais uma equação diofantina para se resolver: ela não costuma dar trabalho: basta limitar (novamente) uma das variáveis. Ver mód 3 (ou 4 ou 8...) como em qualquer equação quadrática ajuda também.

▸ PROBLEMA 3

Seja n um inteiro positivo e x e y números reais positivos tais que $x^n + y^n = 1$. Prove que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

Solução

Temos $\frac{1+a^2}{1+a^4} - \frac{1}{a} = \frac{a+a^3-1-a^4}{(1+a^4)a} = \frac{(1-a)(-1+a^3)}{(1+a^4)a} = \frac{-(1-a)^2(1+a+a^2)}{(1+a^4)a} < 0$ para $0 < a < 1$. Assim, como $0 < x^k < 1$ e $0 < y^k < 1$ para todo k inteiro positivo,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y^k} = \frac{1}{x} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n - 1}{\frac{1}{x} - 1} \cdot \frac{1}{y} \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^n - 1}{\frac{1}{y} - 1}$$
$$= \frac{1-x^n}{x^n(1-x)} \cdot \frac{1-y^n}{y^n(1-y)} = \frac{y^n}{x^n(1-x)} \cdot \frac{x^n}{y^n(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

■

Resumindo:

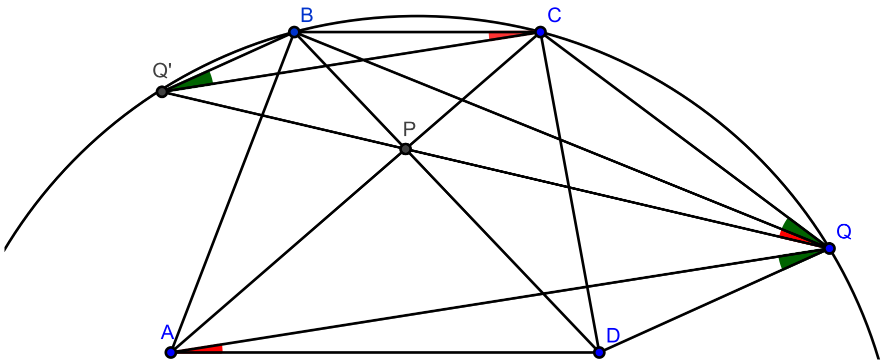
- Um problema em que uma idéia (que não é simples de pensar, por outro lado) só já é suficiente para resolvê-lo: muitas vezes vale a pena estimar termos para comparar a soma deles com uma soma fácil de calcular. Nesse caso, uma soma de PG. Somas telescópicas e somas de PA também são bem-vindas!

▸ PROBLEMA 4

As diagonais do trapézio $ABCD$ cortam-se no ponto P. O ponto Q está na região determinada pelas retas paralelas BC e AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$ e a reta CD corta o segmento PQ. Prove que $\angle BQP = \angle DAQ$.

Solução

Observando que os triângulos ADP e CBP são homotéticos em relação ao ponto P, considere a homotetia f que leva A em C e D em B e seja $Q' = f(Q)$.



Da semelhança entre as figuras $ADPQ$ e $CBPQ'$, $\angle DAQ = \angle BCQ'$ e $\angle BQ'C = \angle DQA = \angle CQB$, o que mostra que $CBQ'Q$ é inscritível. Logo $\angle DAQ = \angle BCQ' = \angle BQQ' = \angle BQP$. ∎

Resumindo:

- Mais um problema de solução curta, mas que depende de uma construção auxiliar; nesse caso, a homotetia entre dois triângulos motivou a construção. Vale a pena lembrar que dois triângulos semelhantes com a mesma orientação geralmente induzem uma roto-homotetia (com suas "semelhanças automáticas") que pode ajudar.
- Incidentalmente, o problema também pode ser resolvido com contas: complexos e trigonometria costumam dar conta do recado também. Em particular, a solução trigonométrica não é complicada: lei dos senos nos triângulos QBC, PBQ, DPQ, ADQ e a semelhança citada acima bastam.