L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana

Quarto Teste de Seleção

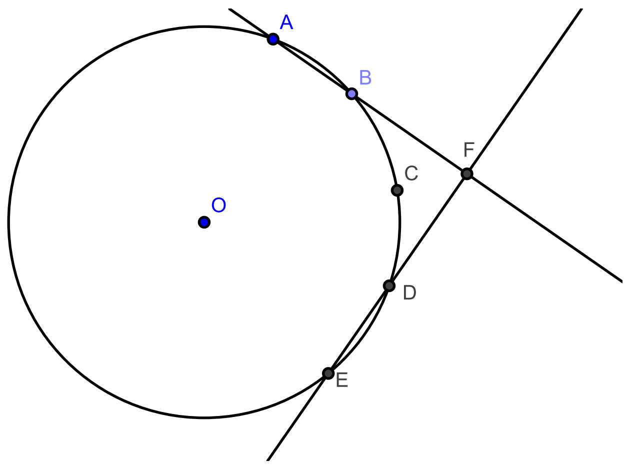
16 de maio de 2009

▸ **PROBLEMA 1**

Sejam A, B, C, D, E pontos em uma circunferência de raio r, nessa ordem, tais que $AC = BD = CE = r$. Os pontos H_1, H_2, H_3 são os ortocentros dos triângulos ACD, BCD e BCE, respectivamente. Prove que $H_1H_2H_3$ é um triângulo retângulo.

Solução

Sendo O o circuncentro do triângulo XYZ, pode-se provar que o ortocentro H de XYZ pode ser dado por $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$. Assim, sendo O o centro do círculo, que é o circuncírculo de ACD, BCD e BCE, e denotando $\overrightarrow{OP} = P$, obtemos $H_1 = A + C + D$, $H_2 = B + C + D$ e $H_3 = B + C + E$. Assim, $\overrightarrow{H_2H_1} = H_1 - H_2 = A - B = \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{H_2H_3} = H_3 - H_2 = E - D = \overrightarrow{DE}$.



Mas o ângulo entre AB e DE é a metade da diferença entre o arco maior AE e o arco menor BD, ou seja, $\frac{(360^\circ - 120^\circ) - 60^\circ}{2} = 90^\circ$. Logo $AB \perp DE \iff H_1H_2 \perp H_2H_3$ e o triângulo $H_1H_2H_3$ é retângulo em H_2.

Resumindo:

- Vetores podem facilitar bastante o trabalho ao resolver certos problemas de geometria, especialmente aqueles envolvendo o ortocentro e outros pontos clássicos. Além disso, vale destacar as fórmulas para o baricentro G e o incentro I:

$$G = \frac{A + B + C}{3} \quad \text{e} \quad I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

  Essas fórmulas não dependem do centro escolhido. Em compensação, a do ortocentro só funciona quando a origem é o circuncentro.
- Note que o problema continua verdadeiro se movermos C. Ou seja, só era necessário que $\angle AOE = 120^\circ$ e $\angle BOD = 60^\circ$. Pode-se até generalizar um pouquinho mais: basta $\angle AOE + \angle BOD = 180^\circ$.

▸ **PROBLEMA 2**

As cidades da Terra Brasilis são conectadas por algumas estradas. Não há duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada. Sabe-se que, é possível ir de uma cidade para qualquer outra utilizando uma ou mais estradas. Chamamos de *rolê* qualquer rota fechada de estradas (isto é, que começa em uma cidade e termina na mesma cidade) que não passa por uma cidade mais de uma vez. Na Terra Brasilis, todos os rolês passam por quantidades ímpares de cidades.

O governo da Terra Brasilis decidiu fechar alguns rolês para reforma. Ao fechar um rolê, todas as suas estradas são interditadas, de modo que não é permitido o tráfego nessas estradas. Ao fazer isso, a Terra Brasilis ficou dividida em várias regiões de modo que, de qualquer cidade de cada região é possível chegar a qualquer outra da mesma região através de estradas, mas não é possível chegar a cidades de outras regiões.

Prove que o número de regiões é ímpar.

Solução

Para começar, considere o grafo G cujos vértices são as cidades e cujas arestas são as estradas da Terra Brasilis. Então um rolê é um ciclo e todos os ciclos têm tamanho ímpar. Fechar um rolê nesse caso significar escolher um ciclo remover todas as suas arestas e região é uma componente conexa do grafo. Queremos provar que a quantidade de componentes conexas do grafo após remover as arestas de alguns ciclos é ímpar. A partir desse ponto, somente utilizaremos a nomenclatura de teoria dos grafos.

Lema. *Dados dois vértices* u *e* v*, há no máximo dois caminhos ligando* u *e* v*.*

Suponha que haja três caminhos A, B e C ligando u e v. Seja w o vértice comum a A e B mais próximo de u (possivelmente $w = v$). Então a união dos dois caminhos contidos em A e B que ligam u e w formam um ciclo X e tem, portanto, uma quantidade ímpar de arestas. Seja t o vértice comum a C e $A \cup B$ mais próximo de u (possivelmente $t = v$ ou $t = w$). Suponha, sem perda de generalidade, que t é um vértice de B. Então a união dos dois caminhos contidos em B e C que ligam u a t é também um ciclo Y e também tem uma quantidade ímpar de arestas.

Note que esses dois ciclos têm em comum o caminho que liga u a um dos vértices t, w (o que estiver mais próximo de u) em B. Ao retiramos as arestas essa interseção e os vértices intermediários desse caminho, obtemos outro ciclo Z que é a união de três caminhos, um contido em A, outro contido em C e, possivelmente o caminho ligando t e w contido em B. A quantidade de arestas de Z é a soma das quantidades de arestas de X e Y menos o dobro da quantidade de arestas do caminho interseção de X e Y, que é par. Absurdo, então o lema está provado.

O lema tem as seguintes consequências imediatas:

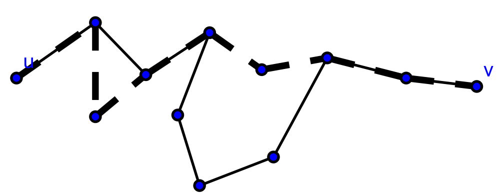
(i) dois ciclos têm no máximo um vértice em comum;

(ii) se dois vértices estão em um mesmo ciclo então não existe caminho ligando tais vértices que não está contido no ciclo.

Agora, considere a retirada de arestas de um ciclo. Por (i), nenhum outro ciclo é destruído pela retirada; por (ii), quaiquer dois vértices do ciclo ficam em componentes conexas diferentes após a retirada do ciclo. Com isso, a retirada de arestas do ciclo transforma uma componente conexa em uma quantidade ímpar de quantidade conexas, cada uma satisfazendo as mesmas condições do enunciado. A paridade da quantidade de componentes conexas mantém-se sempre a mesma, de modo que o resultado segue.

Resumindo:

- Um problema da teoria dos grafos! O que fizemos no final do problema foi, na verdade, uma indução disfarçada. De fato, muitos problemas de grafos são feitos por indução.
- Por que indução? É porque grafos não costumam ter muita estrutura, e a indução é a maneira mais rápida de achar estrutura em elementos tão pouco estruturados como grafos.
- E exatamente por ter pouca estrutura deve-se ter muito cuidado com problemas de grafos. Primeiro, na hora de fazer a indução **retire** arestas ou vértices. **Colocar** arestas ou vértices costuma estar fadado ao fracasso, pois além de fazer a indução você deve **provar** que colocar arestas ou vértices **geram** todos os grafos possíveis. Isso pode ser razoavelmente difícil; em compensação, retirar arestas ou vértices e depois colocá-los de volta não costuma dar tanto trabalho.
- Há mais cuidados que devem ser tomados na demonstração do lema. Primeiro, insistimos muito na **primeira** interseção entre caminhos, pois a simples união dos caminhos de u a v pode ser bem estranho (pode ser a união de vários ciclos e caminhos):



- Então você deve imaginar que as coisas podem ficar bem mais estranhas quando consideramos três caminhos. Por isso, consideramos só um pequeno ciclo primeiro e depois adicionamos o terceiro caminho. **Ordenar** é extremamente importante em grafos e em Combinatória em geral!

▸ **PROBLEMA 3**

Seja $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio mônico de grau 4. Sabe-se que todas as raízes de P são reais, distintas e pertencem ao intervalo $[-1, 1]$.

(a) Prove que $P(x) > -4$ para todo x real.

(b) Encontre o maior valor da constante real k tal que $P(x) > k$ para todo real x e todo polinômio $P(x)$ satisfazendo as condições do enunciado.

Solução

Note que resolver o item b implica diretamente o item a, de modo que somente resolveremos o item b.

Como as raízes de P são reais, distintas e pertencem ao intervalo $[-1, 1]$,

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d), \quad -1 \leqslant a < b < c < d \leqslant 1$$

Note que $P(x) < 0 \iff a < b$ ou $c < d$, de modo que, por simetria, só nos preocuparemos com o intervalo $]a, b[$. Note que, como $-1 \leqslant a \iff -a \leqslant 1$ e $b < c < d \leqslant 1$,

$$|P(x)| = (x - a)(b - x)(c - x)(d - x) < (x + 1)(1 - x)^3$$

Todavia, pela desigualdade das médias, sendo $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\sqrt[4]{(x+1)\left(\frac{1-x}{3}\right)^3} \leqslant \frac{x + 1 + 3\left(\frac{1-x}{3}\right)}{4} = \frac{1}{2} \iff (x+1)(1-x)^3 \leqslant \frac{27}{16}$$

com igualdade se, e somente se, $x + 1 = \frac{1-x}{3} \iff x = -\frac{1}{2}$.

Assim, $P(x) > -\frac{27}{16}$ para todo polinômio P nas condições do enunciado e todo $x \in [-1, 1]$. Note que $P_{b,c}(x) = (x + 1)(x - b)(x - c)(x - 1)$, em que fazemos b, c arbitrariamente próximos de 1 nos dá polinômios com valores mínimos arbitrariamente próximos de $-\frac{27}{16}$, já que $\lim_{(b,c)\to(1,1)} P_{b,c}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^3 = -\frac{27}{16}$.

Resumindo:

- Esse é um problema típico de Análise, mais do que Polinômios.
- O que usamos de Polinômios? Simplesmente a fatoração $P(x) = \prod(x - \text{raiz})$ que, apesar de simples, é muito importante.
- Feito isso, basta utilizar a desigualdade das médias para achar uma boa estimativa para o mínimo de P. Note o cuidado que tomamos para fazer x "cortar" no final. Alternativamente, pode-se derivar, mas nem sempre os resultados vão ser bonitos.
- Note que o caso de igualdade na desigualdade das médias e as aproximações $a \to -1$, $b, c, d \to 1$ nos dão os casos de "quase-igualdade" (falando mais precisamente, os casos limite).

▸ **PROBLEMA 4**

Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência de inteiros positivos tal que o máximo divisor comum entre quaisquer dois termos consecutivos é maior que o termo anterior; simbolicamente, $\text{mdc}(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ para todo i inteiro positivo. Prove que $a_n \geqslant 2^n$ para todo $n \geqslant 0$.

Solução

Primeiro, note que $a_n \geqslant \text{mdc}(a_n, a_{n+1}) > a_{n-1}$, de modo que a sequência é crescente.

Vamos provar o resultado por indução. Para $n = 0$ o problema é verdadeiro. Se $a_1 = 1$ então $a_2 = 1$, absurdo, logo $a_1 \geqslant 2$. Além disso, se $a_2 < 4$ então $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $\text{mdc}(a_1, a_2) = 1$, absurdo. Se $a_3 < 8$ então note primeiro que $a_3 \neq 7$ pois senão $\text{mdc}(a_2, a_3) = 1$. Então $a_3 \leqslant 6$, Observando que $a_2 \geqslant 4$, $a_3 = 5$ ou $a_3 = 6$. Se $a_3 = 5$ então $\text{mdc}(a_2, a_3) = 1$, absurdo; se $a_3 = 6$ então $a_2 = 5$ e $\text{mdc}(a_2, a_3) = 1$ ou $a_2 = 4$ e $\text{mdc}(a_2, a_3) = 2 \leqslant a_1$, outro absurdo. Então $a_3 \geqslant 8$.

Agora suponha que $n \geqslant 4$ e que $a_k \geqslant 2^k$ para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Se $a_n \geqslant 2a_{n-1}$ o problema acabou, então suponha que $a_n < 2a_{n-1}$. Note que $a_{n-1} < a_n < 2a_{n-1}$, de modo que a_{n-1} não divide a_n. Portanto $\text{mdc}(a_{n-1}, a_n) = a_{n-1}/d_{n-1}$, para algum d_{n-1} inteiro maior que 1. Mas $a_{n-2} < \text{mdc}(a_{n-1}, a_n) \iff a_{n-1} > d_{n-1}a_{n-2}$. Se $d_{n-1} \geqslant 4$ então, lembrando que a sequência é crescente, $a_n > a_{n-1} > 4a_{n-2} \geqslant 2^n$. Restanos os casos em que $d_{n-1} = 2$ ou $d_{n-1} = 3$. No último caso, como $a_n > a_{n-1}$ e $a_{n-1}/3$ divide a_n,

$a_n \geqslant 4a_{n-1}/3 > 4 \cdot 3a_{n-2}/3 = 4a_{n-2} \geqslant 2^n$. No primeiro caso, temos $a_n = 3a_{n-1}/2 > 3a_{n-2}$, que ainda não é o suficiente.

Vejamos então agora a_{n-3} para estimar a_n em função de a_{n-2}. Lembremos que $a_{n-1} > 2a_{n-2}$. Seja, então, $\mathrm{mdc}(a_{n-1}, a_{n-2}) = a_{n-2}/d_{n-2}$, sendo d_{n-2} inteiro positivo. Lembrando que já temos $a_n > 3a_{n-2}$, e $a_{n-3} < a_{n-2}/d_{n-2} \implies a_{n-2} > d_{n-2}2^{n-3}$ o problema acaba se $3d_{n-2} \geqslant 8 \iff d_{n-2} \geqslant 3$. Então nos resta os casos $d_{n-2} = 1$ e $d_{n-2} = 2$. No primeiro caso, $a_{n-1} \geqslant 3a_{n-2}$, de modo que $a_n = 3a_{n-1}/2 \geqslant 9a_{n-2}/2 > 4a_{n-2} \geqslant 2^n$. No segundo caso, $a_{n-1} = (2k+1)a_{n-2}/2$, k inteiro maior ou igual a 2 e o problema acaba quando $a_n = 3a_{n-1}/2 = 3(2k+1)a_{n-2}/4 \geqslant 4a_{n-2} \implies k \geqslant 3$. Então sobra o caso em que $k = 2$, ou seja, $a_{n-1} = 5a_{n-2}/2$.

Então vamos ver a_{n-4} (por isso a base de indução precisa ir até $n = 3$!). Até agora, temos $a_n = 3a_{n-1}/2$, $a_{n-1} = 5a_{n-2}/2$ e $a_{n-2} > 2a_{n-3}$. Mais uma vez, seja $\mathrm{mdc}(a_{n-2}, a_{n-3}) = a_{n-3}/d_{n-3}$. Como esse mdc é maior do que $a_{n-4} \geqslant 2^{n-4}$, temos $a_n > (3/2) \cdot (5/2) \cdot 2 \cdot d_{n-3}2^{n-4} = 15d_{n-3}2^{n-5}$ e o problema novamente acaba se $d_{n-3} \geqslant 3$. Estudemos os casos $d_{n-3} = 1$ e $d_{n-3} = 2$. No primeiro caso, a_{n-3} divide a_{n-2} e $a_{n-2} \geqslant 3a_{n-3}$, de modo que $a_n \geqslant (3/2) \cdot (5/2) \cdot 3 \cdot 2^{n-3} > 2^n$; no segundo caso, $a_{n-2} \geqslant 5a_{n-3}/2$ e $a_n \geqslant (3/2) \cdot (5/2) \cdot (5/2) \cdot 2^{n-3} > 2^n$. Finalmente terminamos todos os casos.

Resumindo:

- Esse é um problema que *pede* para ser feito com indução. Não há muitas informações; a própria desigualdade dada é recursiva.
- Nesse aspecto, o problema não admite muita variedade de ideias. Nesse caso, só a insistência vence o problema!
- Aqui, a estratégia vencedora é pensar que só ser maior em inteiros não basta; vale a pena estimar o **quanto** maior é.
- Deve-se tomar cuidado com o quanto a sequência "volta", pois isso influi na base de indução. Como voltamos quatro passos (até a_{n-4}), nossa base de indução deve ter quatro elementos.