Segunda Lista de Preparação para a XLIX IMO
e XXIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

Seja Γ o circuncírculo do quadrilátero cíclico $ABCD$ com a propriedade de que as semi-retas DA e CB cortam-se em um ponto E para o qual $CD^2 = AD \cdot ED$. Seja $F \neq A$ a interseção de Γ com a reta perpendicular a DE que passa por A. Prove que $AD = CF$ se, e somente se, o circuncírculo do triângulo ABE pertence a DE.

▸ PROBLEMA 2

Sejam $P(x)$ e $R(x)$ polinômios com coeficientes inteiros, sendo $P(x)$ mônico. Prove que existe um polinômio $Q(x)$ com coeficientes inteiros tal que $Q(R(x))$ é múltiplo de $P(x)$.

▸ PROBLEMA 3

Seja O um ponto do interior do triângulo ABC tal que $OA = OB + OC$. Sejam B' e C' os pontos médios dos arcos AOC e AOB, respectivamente. Prove que os circuncírculos dos triângulos COC' e BOB' são tangentes entre si.

▸ PROBLEMA 4

Prove que

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geqslant \frac{1}{ab + bc + ca}$$

▸ PROBLEMA 5

Seja n um inteiro maior do que 1. De quantas maneiras podemos acomodar todos os números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ nas casinhas de um tabuleiro $2 \times n$, um em cada casinha, de modo que quaisquer dois números consecutivos estejam em casinhas que compartilham um lado?

▸ PROBLEMA 6

Seja $k > 1$ um inteiro. Um conjunto de inteiros positivos é *fanfarrão* quando todos os inteiros positivos podem ser pintados de k cores de modo que nenhum elemento de S é a soma de dois números distintos da mesma cor. Encontre o maior inteiro positivo t tal que o conjunto

$$\{a + 1, a + 2, a + 3, \ldots, a + t\}$$

é fanfarrão para todo a inteiro positivo.

▸ PROBLEMA 7

Seja n um inteiro maior do que 1. Prove que se $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ é uma potência de primo para algum inteiro positivo b então n é primo.

▸ PROBLEMA 8

O conjunto M contém todos os inteiros positivos menores do que 2008, e é tal que se $n \in M$ então os elementos da progressão aritmética com primeiro termo n e razão $n + 1$ estão todos contidos em M. Existe necessariamente um inteiro m tal que M contém todos os inteiros maiores do que m?