Terceira Lista de Preparação para a L IMO
e XXIV Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

A nossa última lista de 2009 veio reforçada, com mais quatro problemas! Nessa lista, você deve fazer resumos para seis problemas.

Atenção: todas as listas devem chegar às nossas mãos até o dia 16 de maio!
Se for o caso, envie por SEDEX.

▸ PROBLEMA 1

Prove que, para quaisquer quatro reais positivos a, b, c, d,

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}\geqslant 0$$

Descubra todos os casos de igualdade.

▸ PROBLEMA 2

Para cada inteiro m, denote por $t(m)$ o único número em $\{1,2,3\}$ tal que $m+t(m)$ é múltiplo de 3. A função $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfaz $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=-1$ e

$$f(2^n+m)=f(2^n-t(m))-f(m) \quad \text{para todos os inteiros } m,n\geqslant 0 \text{ com } 2^n>m.$$

Prove que $f(3p)\geqslant 0$ para todo inteiro $p\geqslant 0$.

▸ PROBLEMA 3

Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_n$ e $0\leqslant \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\leqslant\pi$ números reais tais que $\left|\sum_{j=1}^n b_j\cos k\alpha_j\right|<\frac{1}{k}$ para todo inteiro positivo k. Prove que $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$.

▸ PROBLEMA 4

Considere paralelepípedos reto-retângulos com arestas paralelas aos eixos coordenados. Dois paralelepípedos intersectam-se se eles têm um ponto em comum nos seus interiores.

Encontre o maior n para o qual existem n paralelepípedos $P_1,\ldots,P_n$ tais que P_i e P_j se intersectam se, e somente se, $i\not\equiv j\pm 1 \pmod{n}$.

▸ PROBLEMA 5

Para $n\geqslant 2$, sejam $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n}$ 2^n subconjuntos de $A=\{1,2,3,\ldots,2^{n+1}\}$ com a seguinte propriedade: não existem índices a e b com $a<b$ e elementos $x,y,z\in A$ com $x<y<z$ tais que $y,z\in S_a$ e $x,z\in S_b$. Prove que pelo menos um dos conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n}$ contém não mais do que $2n+1$ elementos.

▸ PROBLEMA 6

Encontre todos os pares de inteiros (m,n) com $m\geqslant n\geqslant 3$ tais que é possível escrever um inteiro em cada casinha de um tabuleiro $m\times n$ de modo que a soma dos números em qualquer quadrado 2×2 é negativa e a soma dos números em qualquer quadrado 3×3 é positiva.

▸ PROBLEMA 7

Sejam k e n inteiros com $0\leqslant k\leqslant n-2$. Considere um conjunto L de n retas no plano tais que não haja duas delas paralelas nem três delas concorrentes. Seja I o conjunto dos pontos de interseções de retas em L. Seja O um ponto no plano não pertencente a nenhuma reta de L.

Um ponto $X\in I$ é pintado de vermelho se o segmento de reta aberto OX (que não contém O e X) corta no máximo k retas de L. Prove que I contém pelo menos $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ pontos vermelhos.

▸ PROBLEMA 8

Seja P um ponto no interior ou sobre algum dos lados do triângulo ABC. As distâncias de P aos lados BC, CA e AB são d_a, d_b e d_c. Prove que $\max\{AP, BP, CP\}\geqslant\sqrt{d_a^2+d_b^2+d_c^2}$. Quando ocorre a igualdade?

▸ PROBLEMA 9

Sejam AA_1, BB_1, CC_1 as alturas do triângulo acutângulo ABC, com A_1, B_1, C_1 sobre os lados. Denote por A_c a projeção ortogonal de A_1 sobre AB e defina os pontos A_b, B_a, B_c, C_a, C_b de modo análogo. Prove que esses seis pontos estão sobre uma circunferência.

▸ **PROBLEMA 10**

Seja n um inteiro positivo. Prove que os números

$$\binom{2^n-1}{0}, \quad \binom{2^n-1}{1}, \quad \binom{2^n-1}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$$

são congruentes a $1, 3, 5, \ldots, 2^n-1$ módulo 2^n, em alguma ordem.

▸ **PROBLEMA 11**

Seja S o conjunto dos inteiros positivos. Para todo $n \in S$, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n. Encontre todas as funções $f\colon S \to S$ com ambas as seguintes propriedades:

(i) $d(f(x)) = x$ para todo $x \in S$;

(ii) $f(xy)$ divide $(x-1)y^{xy-1}f(x)$ para todos $x, y \in S$.

▸ **PROBLEMA 12**

Sejam $a \geqslant 2$ e $m \geqslant 2$ inteiros primos entre si e seja k a ordem de a módulo m. Seja t um inteiro positivo ímpar cujos divisores primos dividem m mas não dividem $\frac{a^k-1}{m}$. Prove que a ordem de a módulo mt é igual a kt.

A ordem de um número b *módulo* n *é o menor inteiro positivo* d, *se existir, tal que* $b^d \equiv 1 \pmod{n}$.