Terceira Lista de Preparação para a XLIX IMO
e XXIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ **PROBLEMA 1**

Seja $\lfloor r \rfloor$ o maior inteiro que não excede o número real r. Para cada real positivo x, definimos o conjunto $A(x)$ por

$$A(x) = \{\lfloor nx \rfloor : n \in \mathbb{Z}_+^*\}$$

Encontre todos os irracionais $\alpha > 1$ que satifazem a seguinte condição: para todo $\beta > 0$ que satisfaz $A(\beta) \subset A(\alpha)$, $\frac{\beta}{\alpha}$ é inteiro.

▸ **PROBLEMA 2**

Encontre todos os pares de funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xg(y+1)) + y = xf(y) + f(x + g(y)) \quad \text{e} \quad f(0) + g(0) = 0$$

▸ **PROBLEMA 3**

Seja A o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que cada elemento de A divide no máximo um outro elemento de A. Prove que

$$\frac{2n}{3} \leqslant |A| \leqslant 3\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

▸ **PROBLEMA 4**

Encontre todas as ternas (x, y, z) de reais distintos tais que $\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}$.

▸ **PROBLEMA 5**

Sejam A_1, B_1 e C_1 os pés das alturas relativas a A, B e C respectivamente do triângulo acutângulo ABC. Sejam O_A, O_B e O_C os incentros dos triângulos AB_1C_1, BC_1A_1 e CA_1B_1, respectivamente. Sejam T_A, T_B e T_C os pontos de tangência do incírculo do triângulo ABC nos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que o hexágono $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ tem todos os seus lados iguais.

▸ **PROBLEMA 6**

Seja p um primo maior do que 3. Prove que existem inteiros $t, a_1, a_2, \ldots, a_t$ tais que

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_t < \frac{p}{2} \quad \text{e} \quad \frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdots \frac{p-a_t}{|a_t|} = 3^m \text{ para algum } m \text{ inteiro positivo.}$$

▸ **PROBLEMA 7**

No triângulo ABC, seja d_A a distância entre os pés das perpendiculares aos lados AB e AC a partir do ponto de interseção de BC e a bissetriz interna de $\angle A$. Definimos d_B e d_C de modo análogo. Sendo P o perímetro do triângulo ABC, prove que

$$\frac{d_A d_B d_C}{P^3} \leqslant \frac{1}{64}$$

▸ **PROBLEMA 8**

Seja (m, n) um par de inteiros positivos.

(a) Prove que o conjunto de todos os inteiros positivos pode ser particionado em quatro conjuntos não vazios e disjuntos tais que nenhum deles contém dois números cuja diferença, em módulo, é igual a m, n ou $m+n$.

(b) Encontre todos os pares (m, n) para os quais o conjunto de todos os inteiros positivos não pode ser particionado em três conjuntos não vazios e disjuntos satisfazendo a condição acima.

Lembrete para recordar o que não deve ser esquecido, para que você não se esqueça: Para cada lista, escreva o resumo da solução para 2 a 4 problemas!

Errata: nossa querida secretária, a Esmeralda, cometeu um pequeno deslize na segunda lista: o enunciado correto do problema 4 é

Prove que

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geqslant \frac{1}{ab + bc + ca}$$

para todos os reais positivos a, b, c cuja soma é 1.

Você pode enviar a solução desse problema (e outros das listas!) junto com as respostas dessa lista.