Primeira Lista de Preparação para a LII IMO
e XXVI Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

▸ **PROBLEMA 1**

No quadrilátero convexo $ABCD$,

$$\angle ADB + \angle ACB = \angle CAB + \angle DBA = 30^\circ \quad \text{e} \quad AD = BC.$$

Prove que as medidas dos segmentos DB, CA e DC são as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

▸ **PROBLEMA 2**

Sejam a, b, c, d reais positivos tais que

$$a(c^2 - 1) = b(b^2 + c^2) \quad \text{e} \quad d \leqslant 1.$$

Prove que

$$d(a\sqrt{1 - d^2} + b^2\sqrt{1 + d^2}) \leqslant \frac{(a + b)c}{2}.$$

▸ **PROBLEMA 3**

Encontre todos os polinômios de duas variáveis reais $P(x, y)$ tais que, para todos a, b, c reais,

$$P(ab, c^2 + 1) + P(bc, a^2 + 1) + P(ca, b^2 + 1) = 0.$$

▸ **PROBLEMA 4**

Seja f uma função não decrescente dos inteiros positivos nos inteiros positivos e n um número inteiro positivo fixado. Sabe-se que existem números primos $p_1, p_2, \dots, p_n$ e inteiros positivos $s_1, s_2, \dots, s_n$ tais que, para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, o conjunto $\{f(p_i r + s_i) \mid r = 1, 2, \dots\}$ são os elementos de uma progressão aritmética infinita. Prove que existe um inteiro positivo a tal que

$$f(a + 1), f(a + 2), \dots, f(a + n)$$

é uma progressão aritmética.

▸ **PROBLEMA 5**

Considere um poliedro circunscrito a uma esfera. Algumas faces são pintadas de verde, de modo que duas faces que têm uma aresta em comum não sejam ambas pintadas. Prove que a área pintada de verde é menor ou igual à área da superficie do poliedro que não foi pintada.

▸ **PROBLEMA 6**

Seja ω o circuncírculo do triângulo ABC. Seja K um ponto arbitrário sobre a bissetriz de $\angle BAC$ pertencente ao interior do triângulo ABC. A reta CK corta novamente ω em M. O círculo Ω tangencia a reta CM em K e corta o segmento AB em A e P. Seja $Q \neq A$ a interseção de ω e Ω. Prove que os pontos P, Q e M são colineares.

▸ **PROBLEMA 7**

Para quais primos p existe um polinômio cúbico f com coeficientes inteiros tal que p não divide o coeficiente líder de f e $f(1), f(2), \dots, f(p)$ deixam restos distintos na divisão por p?

▸ **PROBLEMA 8**

Esmeralda, ao planejar uma viagem para a *Terra Binarium*, percebeu que:

- a *Terra Binarium* tem 1024 cidades numeradas de 0 a 1023;
- duas cidades da *Terra Binarium* são conectadas diretamente por uma estrada se, e somente se, suas representações binárias, quando escritas com dez dígitos (coloca-se zeros à esquerda se for necessário) diferem em exatamente um dígito;
- durante a visita de Esmeralda oito estradas de *Terra Binarium* estarão interditadas para reforma.

Prove que Esmeralda pode organizar um passeio cíclico em *Terra Binarium*, formado por estradas não interditadas, que passa por cada uma de suas cidades exatamente uma vez.