LI Olimpíada Internacional e XXV Olimpíada Iberoamericana
Segundo Teste de Seleção
10 de abril de 2010

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2010! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2009, que deve permanecer secreto até essa data.**

▸ **PROBLEMA 1**

Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto sobre o lado AB. O circuncírculo do triângulo BCD corta o lado AC novamente em E e o circuncírculo do triângulo ACD corta o lado BC novamente em F. Sendo O o circuncentro do triângulo CEF, prove que OD é perpendicular a AB.

▸ **PROBLEMA 2**

Seja $k > 1$ um inteiro fixado. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que

$$\operatorname{mmc}(n, n+1, n+2, \ldots, n+k) > \operatorname{mmc}(n+1, n+2, n+3, \ldots, n+k+1).$$

▸ **PROBLEMA 3**

Sejam a, b, c reais positivos tais que $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Prove que

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

▸ **PROBLEMA 4**

$6k+2$ pessoas jogam em um campeonato de par ou ímpar. Em cada partida de par ou ímpar participam exatamente duas pessoas. Seis rodadas foram organizadas, de modo que, em cada rodada, há $3k+1$ partidas simultâneas, e nenhum jogador participa de dois jogos da mesma rodada. Sabe-se que duas pessoas não jogam entre si mais de uma vez. Prove que existem $k+1$ pessoas em que quaisquer duas delas não jogaram entre si.