L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Segundo Teste de Seleção
04 de abril de 2009

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ **PROBLEMA 1**

Sejam n um inteiro positivo e p um número primo positivo. Prove que, se a, b e c são inteiros (não necessariamente positivos) satisfazendo as condições

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa,$$

então $a = b = c$.

▸ **PROBLEMA 2**

Dado o trapézio $ABCD$ com lados paralelos AB e CD, assuma que existam pontos E sobre a reta BC, externo ao segmento BC, e F interno ao segmento AD tais que $\angle DAE = \angle CBF$. Denote por I o ponto de interseção de CD e EF, e por J o ponto de interseção de AB e EF. Seja K o ponto médio do segmento EF. Assuma que ele não se encontra sobre a reta AB. Prove que I pertence ao circuncírculo de ABK se, e somente se, K pertence ao circuncírculo de CDJ.

▸ **PROBLEMA 3**

Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de números reais. Dizemos que um par (f, g) de funções de S em S é uma *Dupla Espanhola* sobre S se elas satisfazem às seguintes condições:

(i) Ambas as funções são estritamente crescentes, i.e., $f(x) < f(y)$ e $g(x) < g(y)$, para todos $x, y \in S$, com $x < y$;

(ii) A inequação $f(g(g(x))) < g(f(x))$ ocorre para todo $x \in S$.

Determine se existe uma Dupla Espanhola

(a) sobre o conjunto $S = \mathbb{N}$ dos inteiros positivos;

(b) sobre o conjunto $S = \{a - 1/b : a, b \in \mathbb{N}\}$.

▸ **PROBLEMA 4**

Seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+\ell}\}$ um conjunto de números reais com $k + \ell$ elementos, contidos no intervalo $[0, 1]$; k e ℓ são inteiros positivos. Um subconjunto $A \subset S$ com k elementos é chamado *belo* se

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{\ell} \sum_{x_j \in S \setminus A} x_j \right| \leqslant \frac{k + \ell}{2k\ell}.$$

Prove que o número de subconjuntos belos é pelo menos $\dfrac{2}{k+\ell}\dbinom{k+\ell}{k}$.