L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
25 de abril de 2009

▸ **PROBLEMA 1**

Seja r um número real positivo. Prove que o número de triângulos retângulos com lados inteiros positivos primos entre si que possuem inraio igual a r é zero ou uma potência de 2.

Solução

Sejam a, b, c os lados do triângulo, $a \leqslant b \leqslant c$. Primeiro observe que $c^2 = a^2 + b^2$ e $S = pr \iff \frac{ab}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} \iff \frac{(a+b)^2 - c^2}{2} = (a+b+c)r \iff \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2} = (a+b+c)r \iff r = \frac{a+b-c}{2}$. Então se $2r$ não é inteiro o número de soluções é zero. Caso contrário, temos

$$\left|\begin{array}{l} r = \dfrac{a+b-c}{2} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} c = a+b-2r \\ c^2 = a^2+b^2 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{c} c = a+b-2r \\ (a+b-2r)^2 = a^2+b^2 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{c} c = a+b-2r \\ (a-2r)(b-2r) = 2r^2 \end{array}\right.$$

Se $r = k/2$, k ímpar então $2r^2 = k^2/2$ que não inteiro. Logo r é inteiro. Note que dados a e b é possível encontrar c. Além disso, $c > b \implies a > 2r$ e, analogamente, $b > 2r$. Seja p um divisor primo de $2r$. Então se p divide $a - 2r$, p divide a, de modo que p não divide b e portanto p não divide $b - 2r$. Isto quer dizer que $a - 2r$ e $b - 2r$ são primos entre si, e que todos os fatores p vão ou para $a - 2r$ ou para $b - 2r$ (mas não ambos). Deste modo, se $2r^2$ tem m fatores primos então há 2^m triângulos.

Resumindo:

- Um dos primeiros passos, que é um pouco delicado, é provar que se há alguma solução então r é inteiro.
- A fórmula $r = \frac{a+b-c}{2}$ para triângulos retângulos é na verdade bem conhecida. Guarde-a!
- Depois, o problema fica mais tranquilo, pois obtemos uma equação de segundo grau com duas variáveis. Toda equação desse tipo costuma ser resolvida facilmente (exceto talvez quando obtivermos números muito grandes). De fato, sendo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ a equação:

(i) se $A \neq 0$ e $B \neq 0$ completamos quadrados para obter algo da forma $ax'^2 + by'^2 = c$. Se $a, b > 0$ quantidade de soluções é finita; se $ab < 0$ temos uma equação de Pell, cuja resolução é conhecida.

(ii) se $A = 0$ e $B \neq 0$, temos uma equação do primeiro grau em x; isolamos x e usamos divisibilidade.

(iii) se $A = B = 0$ e $C \neq 0$ é fácil fatorar a equação na forma $(Cx + m)(Cy + n) = k$ e usamos os divisores de k.

(iv) enfim, se $A = B = C = 0$ temos uma equação diofantina linear, que pode ser resolvida com o algoritmo de Euclides ou congruência.

- Enfim, lembre-se: ao fatorar, tire o mdc dos fatores!

▸ **PROBLEMA 2**

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 números reais positivos com $x_1x_2x_3x_4x_5 = 1$. Prove que

$$\frac{x_1+x_1x_2x_3}{1+x_1x_2+x_1x_2x_3x_4} + \frac{x_2+x_2x_3x_4}{1+x_2x_3+x_2x_3x_4x_5} + \frac{x_3+x_3x_4x_5}{1+x_3x_4+x_3x_4x_5x_1} + \frac{x_4+x_4x_5x_1}{1+x_4x_5+x_4x_5x_1x_2} + \frac{x_5+x_5x_1x_2}{1+x_5x_1+x_5x_1x_2x_3} \geqslant \frac{10}{3}.$$

Solução

Sejam $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$, $x_2 = \frac{a_3}{a_2}$, $x_3 = \frac{a_4}{a_3}$, $x_4 = \frac{a_5}{a_4}$ e $x_5 = \frac{a_1}{a_5}$, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$. Então

$$\frac{x_1 + x_1x_2x_3}{1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3x_4} = \frac{\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}}{1 + \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}} = \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3 + a_5}$$

e a desigualdade é equivalente a

$$\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3+a_5} + \frac{a_3+a_5}{a_2+a_4+a_1} + \frac{a_4+a_1}{a_3+a_5+a_2} + \frac{a_5+a_2}{a_4+a_1+a_3} + \frac{a_1+a_3}{a_5+a_2+a_4} \geqslant \frac{10}{3}$$

Somando 1 em cada fração obtemos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ em cada denominador, e obtemos

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)\left(\frac{1}{a_1 + a_3 + a_5} + \frac{1}{a_2 + a_4 + a_1} + \frac{1}{a_3 + a_5 + a_2} + \frac{1}{a_4 + a_1 + a_3} + \frac{1}{a_5 + a_2 + a_4}\right) \geqslant 25$$

que corresponde à desigualdade de Cauchy-Schwartz aplicada a $(a_1 + a_3 + a_5, a_2 + a_4 + a_1, a_3 + a_5 + a_2, a_4 + a_1 + a_3, a_5 + a_2 + a_4)$ e $\left(\frac{1}{a_1+a_3+a_5}, \frac{1}{a_2+a_4+a_1}, \frac{1}{a_3+a_5+a_2}, \frac{1}{a_4+a_1+a_3}, \frac{1}{a_5+a_2+a_4}\right)$.

Resumindo:

- Em desigualdades cíclicas com produto das variáveis igual a 1, substituições como a feita na resolução costumam facilitar o trabalho.
- Todavia, a substituição $x_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $x_2 = \frac{a_2}{a_3}$, $x_3 = \frac{a_3}{a_4}$, $x_4 = \frac{a_4}{a_5}$ e $x_5 = \frac{a_5}{a_1}$ não deixa a expressão "bonitinha" de imediato. Então, se você não conseguir em um sentido, tente no outro: as duas substituições **não** são equivalentes!
- Procure o problema 4 da IMO 2000 e teste essa substituição! O problema não sai imediatamente mas a desigualdade cíclica fica simétrica, o que permite utilizar Muirhead e Schur! Na verdade, após expandir obtém-se exatamente Schur. Só por completude, enunciamos ambas as desigualdades:

  Muirhead: para desigualdades simétricas e homogêneas, se $a_i \geqslant b_i$ então

  $$\sum_{sim} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geqslant \sum_{sim} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

  Schur:

  $$\sum_{cic} a^r(a-b)(a-c) \geqslant 0; \quad \text{em particular, para } r = 1,\ \sum_{sim} a^3 + abc \geqslant \sum_{sim} 2a^2b$$

- A parte final do problema (em que aplicamos Cauchy-Schwarz) pode ser terminada com Jensen: de fato, supondo $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, considere a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Daí, você continua!

▸ PROBLEMA 3

No plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto S de todos os pontos com coordenadas inteiras. Para cada inteiro positivo k, dois pontos distintos $A, B \in S$ serão chamados de k-*amigos* se existir um ponto $C \in S$ para o qual a área do triângulo ABC seja igual a k. Um conjunto $T \subset S$ será chamado de k-*clique* se quaisquer dois pontos distintos de T forem k-amigos. Determine o menor inteiro positivo k para o qual existe um k-clique com mais de 200 elementos.

Solução

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos de S. Então P e Q são k-amigos se, e somente se, existe (x, y) tal que $|D|/2 = k$, em que

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-c & y-d \\ a-c & b-d \end{vmatrix},$$

ou seja, $|(x-c)(b-d)-(y-d)(a-c)| = 2k$. Pelo teorema de Bézout, isso ocorre se, e somente se, $\mathrm{mdc}(b-d, a-c)$ divide $2k$.

Seja n um inteiro que não divide $2k$. Provaremos que um k-clique não pode ter mais do que n^2 elementos. Suponha o contrário. Então, observando que há n^2 pares (x, y) em que x e y são classes de congruência mód n, há dois pontos do clique, digamos (a, b) e (c, d) tais que n divide ambos $a-c$ e $b-d$. Nesse caso, n divide $\mathrm{mdc}(a-c, b-d)$ e, como n não divide $2k$, $\mathrm{mdc}(a-c, b-d)$ também não divide $2k$, o que é um absurdo.

Logo, considerando que $14^2 < 200 < 15^2$, $2k$ deve ter um monte de divisores, na verdade todos os números de 1 a 14. Em particular, k deve ser múltiplo de 4 (pois 8 deve dividir $2k$), 9, 5, 7, 11 e 13, ou seja, de $4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 180180$.

Considerando que um quadrado 15×15 tem essas características, o menor valor possível de k é 180180.

Resumindo:

- O primeiro passo é tentar entender o que significa ser k-amigo. Utilizando a fórmula da área de triângulos no plano cartesiano, chegamos a uma condição envolvendo mdc e divisibilidade em geral (leia-se: teorema de Bézout).
- Isso na verdade é esperado: pontos com coordenadas inteiras e cálculo de áreas ou colinearidades (que é o mesmo que área zero) geralmente "cheiram" a mdc. Há alguns problemas sobre o mesmo tema que, invariavelmente, caem em algo com mdc.
- Como controlar o tamanho de um conjunto? Muitas vezes, quando queremos estabelecer um limite superior no tamanho de um conjunto, casa dos pombos cai bem. E é exatamente o que acontece: considerando que os mdc's devem dividir 2k um conjunto de muitos pontos deve fazer com que k tenha muitos divisores.
- Feito isso, estamos com o completo controle da situação, tanto para achar k como para achar o exemplo que funciona. De fato, o problema termina três linhas após a constatação anterior.

▸ PROBLEMA 4

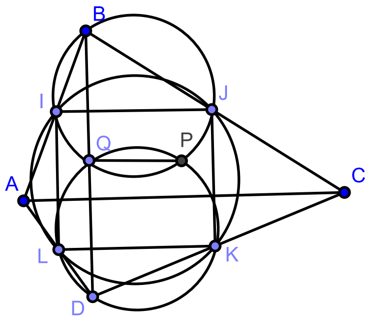
É dado um quadrilátero convexo ABCD. Prove que existe um ponto P no interior do quadrilátero tal que

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90^\circ$$

se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Solução

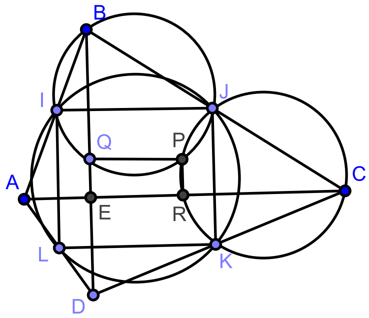
Primeiro, suponha que existe o ponto P. Provemos que $AC \perp BD$.



Sejam I, J, K, L as projeções de P sobre os lados AB, BC, CD, DA respectivamente. Obtemos assim os quadriláteros cíclicos PLAI, PIBJ, PJCK e PKDL, de modo que $\angle PAB = \angle PLI$ e $\angle PDC = \angle PLK$. Assim, $\angle ILK = \angle PLI + \angle PLK = \angle PAB + \angle PDC = 90^\circ$. Analogamente, os outros ângulos do quadrilátero de IJKL são retos, de modo que IJKL é, na verdade, um retângulo.

Seja agora Q um ponto de BD tal que $PQ \perp BD$. Note que, sendo $\angle PQB = \angle PQD = 90^\circ$, Q é a interseção dos círculos de diâmetros PB e PD. Além disso, sendo IJKL um retângulo, ele é inscritível em um círculo ω. Note que IJ é o eixo radical de ω e do círculo de diâmetro PB, KL é o eixo radical de ω e do círculo de diâmetro PD e PQ é o eixo radical dos círculos de diâmetros PB e PC. Assim, observando que IJ e KL são paralelos, temos que PQ é paralelo a ambos IJ e KL. Como PQ é perpendicular a BD, IJ e KL são também perpendiculares a BD. Analogamente, considerando a projeção de P sobre AC, provamos que IL e JK são perpendiculares a AC. Como IL e IJ são perpendiculares, $AC \perp BD$.

Agora, provemos que tal ponto P existe quando $AC \perp BD$. Note que basta provar que existe um ponto P cujas projeções sobre os lados de ABCD determinam um retângulo. Seja E a interseção das diagonais AC e BD. Caso ABCD seja um losango, escolha $P = E$. Caso contrário, $AE \neq EC$ ou $BE \neq ED$. Suponha, sem perda de generalidade, que $AE < EC$. Seja P um ponto no interior do quadrilátero ABCD tal que $\angle PBC = \angle DBA$ e $\angle PCB = \angle DCA$. Note que P pertence ao interior do triângulo BCD (de fato, comparando tangentes temos $\angle EBC > \angle EBA$ e $\angle BCP > \angle BCD$). Sejam Q e R as projeções ortogonais de P sobre BD e AC, respectivamente. Enfim, considere as projeções I, J e K de P sobre os lados AB, BC e CD, respectivamente.



Temos que I, J e J, K são as interseções dos círculos de diâmetros PB e PC com os lados AB, BC e BC, CD respectivamente. Observe também que Q pertence ao primeiro círculo e R pertence ao segundo círculo. Das igualdades $\angle PBC = \angle DBA$ e $\angle PCB = \angle DCA$ obtemos que os arcos QI e JP do primeiro círculo são iguais, assim como os arcos JP e RK do segundo círculo. Com isso, os quadriláteros $PQIJ$ e $PRKJ$ são trapézios, de modo que IJ é paralelo a PQ, que é paralelo a AC e, da mesma forma, JK é paralelo a BD. Com isso, IJ e JK são perpendiculares.

Seja L tal que $IJKL$ é um retângulo. Por simetria, $PRLI$ é um trapézio isósceles, de modo que é inscritível. Como $PRIA$ também é inscritível (pois $\angle AIP$ e $\angle ARP$ são retos), os pontos P, R, L, I, A estão no círculo de diâmetro AP. Analogamente, os pontos P, Q, L, D, K estão no círculo de diâmetro DP. Deste modo, $\angle PLA$ e $\angle PLD$ são retos, o que quer dizer que L pertence ao lado AD e é a projeção de P sobre esse lado, completando a demonstração.

Resumindo:

- Problemas do tipo "se, e somente se" de Geometria acabam sendo dois problemas em um. Geralmente um é mais fácil do que o outro, mas não parece ser o caso aqui.
- Esse é o típico problema em que considerar as projeções de P sobre os lados ajuda. De fato, ele faz aparecer um retângulo de lados paralelos às diagonais!
- Na primeira parte, em que provamos que $AC \perp BD$ quando P existe, devemos essencialmente provar que o retângulo tem seus lados paralelos às diagonais. Com a quantidade de projeções e, consequentemente, ângulos retos que aparecem, pensar em círculos e diâmetros parece ser uma boa ideia. Lembre-se: ângulos retos quase sempre geram inúmeros quadriláteros inscritíveis (se não, geometria analítica pode ser uma boa ideia).
- Com isso, devemos provar o paralelismo de três retas. A tática utilizada foi considerar eixos radicais. A chave da solução é o fato de que eixos radicais de pares de três circunferências devem ser concorrentes (nesse caso, em um ponto do infinito!). Outra estratégia é tentar alguma ideia projetiva (aliás, se você conseguir alguma demonstração desse tipo, conte-nos!).
- A segunda parte consiste em provar a existência do retângulo. Observando um pouco melhor a figura da primeira parte, o paralelismo entre PQ e IJ mostra que BP e BE são isogonais no triângulo ABC e isso deve, é claro, se generalizar para os demais triângulos. Então a escolha do ponto P na solução da segunda parte não tem nada de arbitrária! Note como boa parte da primeira solução se reverteu na segunda, com $\angle IJK$ sendo reto quase imediatamente.
- Nesse caso, em vez de provar que $IJKL$ é um retângulo (o que rendeu algumas tentativas frustradas ao autor), **construímos** o retângulo $IJKL$ e depois provamos que L é a projeção de P sobre o lado que falta.
- Essa ideia é bastante utilizada em geometria: se um ponto tem três ou mais propriedades, escolha uma ou duas das propriedades que o ponto tem (o suficiente para determiná-lo) e prove que ele tem as demais – note que você pode escolher a(s) propriedade(s) que tornem as restantes mais fáceis de provar.