Terceira Lista de Preparação para a LI IMO
e XXV Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios não constantes com coeficientes inteiros. Sabe-se que o polinômio $P(x) \cdot Q(x) - 2009$ tem pelo menos 25 raízes inteiras distintas.

Prove que os graus de ambos $P(x)$ e $Q(x)$ são maiores do que 2.

▸ PROBLEMA 2

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos cuja soma é 1. Prove que

$$a_1 \cdot a_2^{2/3} + a_2 \cdot a_3^{2/3} + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n^{2/3} < \frac{3}{7}$$

▸ PROBLEMA 3

Em cada vértice A_k de um n-ágono regular $A_1A_2\ldots A_n$ são colocadas k moedas. O movimento permitido é escolher duas moedas de um vértice, tirá-las e colocar uma em cada um dos vértices vizinhos.

Para que valores de k é possível, após uma quantidade finita de movimentos permitidos, deixar cada vértice A_k com $n+1-k$ moedas, $k = 1, 2, \ldots, n$?

▸ PROBLEMA 4

Seja $P(x)$ um polinômio não constante de coeficientes inteiros que não tem raízes múltiplas. Para cada inteiro positivo k, seja A_k o conjunto dos primos p para os quais existe x inteiro cujo menor expoente t tal que $(P(x))^t \equiv 1 \pmod{p}$ é k. Prove que A_k é infinito para todo k inteiro positivo.

▸ PROBLEMA 5

Mostre que não existem x, y inteiros tais que

$$x^3 = y^{16} + y^{15} + \cdots + y + 9.$$

▸ PROBLEMA 6

Seja Q um ponto no interior do polígono convexo $P_1P_2\ldots P_n$. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} (\text{cotg}\, \angle QP_{k-1}P_k + \text{cotg}\, \angle QP_{k+1}P_k) \cdot \overrightarrow{QP_k} = \vec{0}$$

Os índices são tomados módulo n, ou seja, $P_0 = P_n$ e $P_{n+1} = P_1$.

▸ PROBLEMA 7

Dado um conjunto A, definimos $A + A = \{a + b, a, b \in A\}$ e $A - A = \{a - b, a, b \in A\}$. Prove que existem constantes n_0 e c tais que para todo conjunto finito A, com $|A| = n \geqslant n_0$,

$$|A - A| - |A + A| \leqslant n^2 - c \cdot n^{8/5}$$

▸ PROBLEMA 8

Considere dois triângulos, um deles de lados a, b, c e área t, e o outro de lados A, B, C e área T. Prove que

$$-a^2A^2 + a^2B^2 + a^2C^2 + b^2A^2 - b^2B^2 + b^2C^2 + c^2A^2 + c^2B^2 - c^2C^2 \geqslant 16tT$$