L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
14 de março de 2009

▸ PROBLEMA 1

Determine, em função de n, n inteiro positivo, a quantidade de permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com a seguinte propriedade:

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \quad \text{é divisível por } k \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Solução

Comecemos com os casos pequenos. Para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ todas as permutações servem (de fato, a divisibilidade ocorre para $k = 1$, $k = 2$ e $k = n$). O caso $n = 4$ é mais interessante: precisamos verificar os possíveis valores de a_3. Para isso, basta ver quando 3 divide $2(a_1 + a_2 + a_3)$. Sendo 3 ímpar e $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 + 4 - a_4 = 10 - a_4$, isso ocorre quando 3 divide $1 - a_4$, ou seja, $a_4 = 1$ ou $a_4 = 4$. Podemos permutar o resto de 3! maneiras, obtendo 12 maneiras.

Parece que estudar o penúltimo termo das permutações é uma boa ideia. Vejamos como isso funciona no caso geral. Quando $n - 1$ divide $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = n(n + 1) - 2a_n$? Vendo mód $n - 1$ obtemos $2 \equiv 2a_n$ (mód. $n - 1$). Se $n - 1$ é ímpar, obtemos $a_n \equiv 1 \pmod{n-1}$ e, considerando que $1 \leqslant a_n \leqslant n$, $a_n = 1$ ou $a_n = n$. Se $n - 1$ é par, obtemos $a_n \equiv 1 \pmod{\frac{n-1}{2}}$, ou seja, $a_n = 1$ ou $a_n = \frac{n+1}{2}$ ou $a_n = n$. Se $a_n = \frac{n+1}{2}$ então vemos $k = n - 2$. Então $n - 2$ divide $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2})$, ou melhor, sendo $n - 3$ ímpar, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} = \frac{n(n+1)}{2} - a_{n-2} - a_{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{2} - a_{n-2}$. Então $a_{n-2} \equiv \frac{1 \cdot 3}{2} \pmod{n-2} \iff a_{n-2} \equiv \frac{n+1}{2} \pmod{n-2}$. Como $n - 2 + \frac{n+1}{2} > n$ para $n > 3$, $a_{n-2} = \frac{n+1}{2}$, o que não é possível. Então, em qualquer caso, $a_n = 1$ ou $a_n = n$.

Precisamos agora nos preocupar com os demais a_k's, e parece que uma indução deve bastar. Seja então $f(n)$ o número de permutações que satisfazem as condições do enunciado. Suponha $n > 3$. Há $f(n-1)$ permutações com $a_n = n$. E se $a_n = 1$? Nesse caso, troque $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ por $(n - a_1, n - a_2, \ldots, n - a_{n-1})$. Obtemos uma nova permutação de $(1, 2, \ldots, n-1)$ e $k \mid (n-a_1) + (n-a_2) + \cdots (n-a_k) \iff k \mid kn - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \iff k \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Essa troca é uma bijeção, de modo que há mais $f(n-1)$ permutações nesse caso. Logo $f(n) = 2f(n-1)$ para $n > 3$, de modo que $f(n) = 2^{n-3} f(3) = 3 \cdot 2^{n-2}$ para $n > 3$. Assim,

$$f(n) = \begin{cases} n!, & \text{se } n \leqslant 3 \\ 3 \cdot 2^{n-2}, & \text{se } n > 3 \end{cases}$$

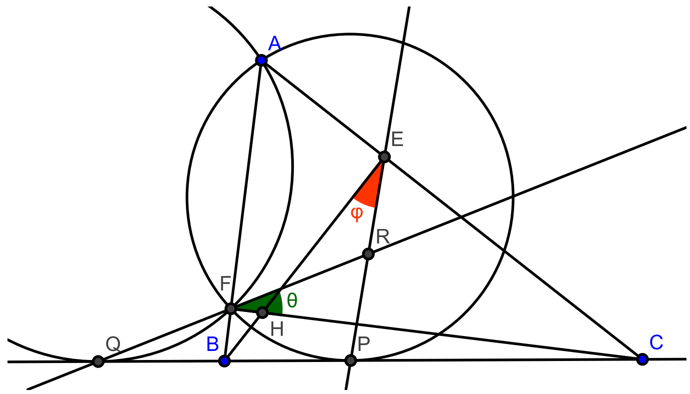
Resumindo:

- Em todo problema de contagem, vale a pena gastar um pouco de tempo estudando casos pequenos até aparecer alguma ideia. Nesse problema, o primeiro caso interessante é $n = 4$. Sempre tenha em mente que você quer generalizar alguma ideia, então mantenha a cabeça aberta para ideias ao estudar casos pequenos!
- Aqui, ver o penúltimo termo da permutação é o mais interessante, como o caso $n = 4$ sugere. Mesmo porque temos mais controle: mexemos com a soma menos o último termo, e assim achamos o último termo. Isso não era tão óbvio antes de estudarmos os casos pequenos, certo?
- Então, no caso geral, montamos uma recursão.
- Há várias técnicas para contagem, então é bom listarmos algumas delas: além de recursões, vale muito a pena saber os bons e velhos paradigmas de contagem (permutações, combinações, etc), bijeções e funções geratrizes, além de fazer combinações dessas técnicas.
- Outra coisa que vale a pena fazer é estudar casos **grandes**, para entender o comportamento assintótico da quantidade. Se ocorrer algo absurdo (como, nesse caso, obter um resultado maior do que $n!$ ou que não dá certo para algum caso pequeno), sua contagem está errada!

▸ PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam BE e CF alturas do triângulo ABC, com E sobre AC e F sobre AB. Dois círculos passam por A e F e tangenciam a reta BC respectivamente nos pontos P e Q, de modo que B está entre C e Q. Prove que as retas PE e QF se cortam em um ponto pertencente ao circuncírculo de AEF.

Solução



Nada que a boa e velha lei dos senos não consiga resolver. Seja R a interseção de PE e QF. Queremos provar, digamos, que $\angle FRP = \angle BAC$. Note que o ortocentro H também pertence ao circuncírculo de AEF, pode ser mais interessante explorar o quadrilátero FHRE. Mas algo que vale a pena ser melhor explorado é o fato de que, por potência de ponto, $BP^2 = BF \cdot BA = BQ^2$. Em particular, $BP = BQ$. Adicionando-se o fato de que os triângulos FBQ e EBP também têm os segmentos BF e BE, que são fáceis de serem calculados e envolvem ângulos que nos interessam, o problema parece estar praticamente resolvido. No final das contas, vamos provar na verdade que $\angle RFH = \angle REH$. Vamos então às contas!

Como usual, sejam $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ e $\gamma = \angle BCA$. Além disso, sejam $\theta = \angle RFH$ e $\varphi = \angle REH$. Queremos provar que $\theta = \varphi$. Fazendo um arrastãozinho, encontramos $\angle QFB = 180° - \theta - 90° = 90° - \theta$, $\angle FQB = \angle FBC - \angle QFB = \beta - (90° - \theta) = \beta + \theta - 90°$ e $\angle EPB = 180° - \angle EBP - \angle BEP = 180° - (90° - \gamma) - \varphi = 90° + \gamma - \varphi$. Pela lei dos senos nos triângulos mencionados FBQ e EBP,

$$\frac{QB}{\cos\theta} = \frac{FB}{-\cos(\beta+\theta)} \iff \frac{\cos(\beta+\theta)}{\cos\theta} = -\frac{BC\cos\beta}{QB} \iff \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\theta = \frac{BC}{QB} + 1 \iff \operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg}\beta\left(\frac{BC}{QB}+1\right)$$

$$\frac{PB}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{EB}{\cos(\gamma-\varphi)} \iff \frac{\cos(\gamma-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{BC\operatorname{sen}\gamma}{PB} \iff \operatorname{cotg}\gamma\operatorname{cotg}\varphi = \frac{BC}{PB} - 1 \iff \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\gamma\left(\frac{BC}{PB}-1\right)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta\operatorname{cotg}\varphi &= \operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{BC^2}{PB^2}-1\right) = \operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{BC^2}{BF\cdot BA}-1\right) = \operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{BC^2}{BA\cdot BC\cos\beta}-1\right)\\ &= \operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma\cos\beta}-1\right) = \operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)-\operatorname{sen}\gamma\cos\beta}{\operatorname{sen}\gamma\cos\beta}\right) = \operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma\cos\beta}\right) = 1\end{aligned}$$

e, finalmente, $\operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg}\varphi \iff \theta = \varphi$, como queríamos demonstrar.

Resumindo:

- Esse é um daqueles "problemas de triângulo". Está tudo determinado a partir do triângulo. Nesses casos, arrastão e lei dos senos costumam ser eficientes...
- ...o que **não** quer dizer que saber um pouco mais de geometria sintética não ajuda. Note o quanto a potência de ponto foi decisiva na nossa conta.
- O bom de ter tudo determinado é que o arrastão determina todos os ângulos, pelo menos em função dos ângulos que queremos calcular. Então é só uma questão de escolher triângulos "legais" para fazer as contas. Os triângulos não necessariamente devem ter **exatamente** os ângulos que queremos, mas uma função deles.
- No nosso problema, escolhemos FBQ e EBP. Mas os "complementares" FCQ e ECP também funcionam bem (na verdade, as contas são praticamente as mesmas).
- As contas se baseam no truque da cotangente, que pode ser encontrada na Eureka! 17. Mas vale como lembrete que frações do tipo $\frac{f(x+y)}{g(x)h(y)}$, sendo cada uma das funções f, g, h seno ou co-seno, pode ser escrita em função das tangentes e cotangentes de x e y, separando as variáveis. Por exemplo:

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y} = 1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

▸ **PROBLEMA 3**

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros positivos distintos, $n \geqslant 3$. Prove que existem índices i e j distintos tais que nenhum dos números $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$ é múltiplo de $a_i + a_j$.

Solução

Suponha por absurdo que tais índices não existam e, sem perda de generalidade, que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ e $\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ (caso o mdc seja $d > 1$, divida todos os termos por d). Para cada i, $1 \leqslant i < n$, algum dos números $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$ é múltiplo de $a_i + a_n$. Como $a_i + a_n > a_n \geqslant a_k$ para todo k, não é possível que $a_i + a_n$ seja múltiplo de algum a_k, de modo que 3 divide $a_i + a_n$. Isso quer dizer que $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_{n-1} \equiv -a_n \equiv r \not\equiv 0$ (mód. 3).

Assim, $a_{n-2} + a_{n-1} \equiv 2r \not\equiv 0 \pmod{3}$, de modo que $a_{n-2} + a_{n-1}$ deve ser divisor de algum a_k. Como $a_{n-2} + a_{n-1} > a_{n-1}$, a_n é esse múltiplo, de modo que $a_{n-2} + a_{n-1} \mid a_n$. Em particular, isso implica $a_n \geqslant a_{n-1} + a_{n-2} \iff a_{n-1} + a_n \geqslant 2a_{n-1} + a_{n-2} > 3a_{n-2}$. Deste modo, $a_{n-1} + a_n$ é divisor de $3a_{n-1}$ ou $3a_n$. No primeiro caso, considerando ainda que $a_{n-1} + a_n > 2a_{n-1} > \frac{3a_{n-1}}{2}$, $a_{n-1} + a_n = 3a_{n-1} \iff a_n = 2a_{n-1}$; no segundo caso, de $a_n < a_{n-1} + a_n < 2a_n$ conclui-se que $a_{n-1} + a_n = \frac{3a_n}{2} \iff a_n = 2a_{n-1}$. De qualquer forma, $a_n = 2a_{n-1}$.

Agora estudamos novamente $a_{n-2} + a_{n-1}$, que divide $a_n = 2a_{n-1}$. Mas $a_{n-1} < a_{n-1} + a_{n-2} < 2a_{n-1}$, o que é absurdo porque $2a_{n-1}$ não tem divisores no intervalo $]a_{n-1}, 2a_{n-1}[$. Chagamos a um absurdo, e o problema está resolvido.

Resumindo:

- A negação do problema parece muito forte para ser verdade, considerando que $a_i + a_j$ não é tão menor do que $3a_k$, então a ideia é supor por absurdo e chegar a uma contradição ("é muito difícil acontecer! Só se...").
- Antes de mais nada, vale a pena "limpar" os fatores comuns, para facilitar o nosso trabalho. Problemas com sequências de inteiros geralmente permitem cortar esses fatores comuns, o que costuma poupar um bom tempo na hora de escrever a solução. Aliás, isso pode valer pontos (ainda que seja um só – mas pode ser aquele ponto necessário para o ouro!).
- E já que $a_i + a_j$ "não é tão pequeno", por que não considerar os caras maiores? Só que os $3a_k$'s podem ser maiores ainda, então talvez valha a pena se livrar do 3, olhando módulo 3. E nessa hora ter os termos primos entre si acabou sendo particularmente útil.
- Feito isso, realmente fica fácil: basta manter o controle das contas e lembrar que o maior divisor próprio possível de um número m é $m/2$. Em termos de desigualdades, isso pode ser decisivo: o segundo maior divisor é no máximo metade do maior! Equivalentemente, o segundo menor múltiplo de um número é pelo menos o dobro dele.

▸ **PROBLEMA 4**

Sejam a, b, c, d reais positivos tais que

$$abcd = 1 \quad \text{e} \quad a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Prove que

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Solução

Pela desigualdade das médias,

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{d} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

Analogamente, provamos o mesmo para b, c e d (ciclicamente falando). Desta forma, somando as desigualdades obtemos

$$a + b + c + d \leqslant 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right) + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$$

Como

$$a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a},$$

o resultado segue.

Resumindo:

Como todo problema de desigualdades, há várias pequenas ideias que costumam ser muito úteis.

- A primeira impressão é a de que o problema parece estar "ao contrário"; ou seja, queremos provar que a soma $a + b + c + d$ é **menor**. Mas do outro há outra soma, então na verdade uma boa ideia é transformar cada termo dessa soma em um **produto**, que sabemos ser **menor** pela desigualdade das médias.
- Como fazer isso? Além disso, $a + b + c + d$ tem grau 1 e o outro lado, grau 0. Matamos dois coelhos de uma cajadada só **homogenizando** a desigualdade, deixando tudo com grau 0 **e** transformando cada termo de $a + b + c + d$ em um produto.
- Depois disso, como acertar as parcelas nas médias? Basta ter em mente que, por exemplo, as frações com a que interessam são $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{d}$ e seus inversos. Ou seja, colocando os números a, b, c, d em roda, cada número só está na mesma fração que seus vizinhos.
- A última ideia, que é a que termina o problema, é observar que se provarmos que $a + b + c + d$ é menor do que a **média** das duas somas de frações, o problema acaba.