XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Quarto Teste de Seleção
10 de maio de 2008

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ **PROBLEMA 1**

Encontre todos os inteiros positivos ímpares n tais que existem n inteiros ímpares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n^4.$$

▸ **PROBLEMA 2**

Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes complexos para os quais

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

para todo número complexo x.

▸ **PROBLEMA 3**

É dado o triângulo ABC tal que $AB = AC$. Seja M o ponto médio de BC. O ponto X varia sobre o arco menor MA do circuncírculo do triângulo ABM. Seja T o ponto no interior do ângulo $\angle BMA$ para o qual $\angle TMX = 90°$ e $TX = BX$. Prove que $\angle MTB - \angle CTM$ não depende da posição do ponto X.

▸ **PROBLEMA 4**

Seja P um polígono convexo de n lados. Para cada três vértices de P, considere o triângulo determinado por eles. Tal triângulo é dito *estiloso* se todos os seus lados têm comprimento 1. Prove que os vértices de P não determinam mais do que $\frac{2n}{3}$ triângulos estilosos.