LIII Olimpíada Internacional e XXVII Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
14 de abril de 2012

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2012! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2011, que deve permanecer secreto até essa data.**

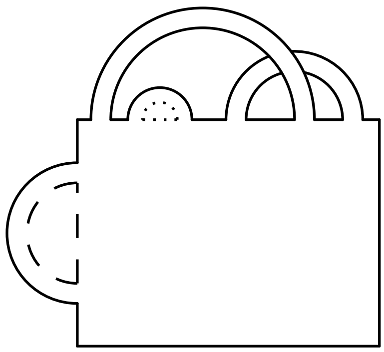
PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo acutângulo e seja w um círculo tangente aos lados AB e CA em B' e C', respectivamente, e cujo centro L encontra-se sobre o lado BC. Suponha que o circuncentro O do triângulo ABC pertença ao menor arco $B'C'$ de w. Prove que w corta o circuncírculo de ABC em dois pontos.

PROBLEMA 2

A uma folha de papel, colamos 2011 "alças" que não se intersectam, ou seja, tiras de papel coladas à folha em suas extremidades. Nenhuma alça pode ser torcida. Prove que a fronteira da superfície assim formada possui pelo menos dois ciclos (curvas fechadas). Ou seja, uma formiga que caminha apenas pela borda do papel nunca percorre toda a fronteira da superfície.

Por exemplo, a configuração representada na figura possui três ciclos: um em linhas tracejadas, outro em linhas pontilhadas e outro em linha contínua (esse ciclo passa por baixo de uma aba duas vezes).



PROBLEMA 3

Determine todas as sequências $(x_1, x_2, \dots, x_{2011})$ de inteiros positivos tais que para todo inteiro positivo n existe um inteiro a tal que

$$x_1^n + 2x_2^n + \cdots + 2011x_{2011}^n = a^{n+1} + 1.$$

PROBLEMA 4

Seja p um primo maior que 2. Prove que existe um primo $q < p$ tal que $q^{p-1} - 1$ NÃO é divisível por p^2.