Primeira Lista de Preparação para a XLVIII IMO
e XXII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ PROBLEMA 1

Seja $p \geqslant 5$ um número primo. Encontre a quantidade de polinômios irredutíveis em $\mathbb{Z}$ da forma

$$x^p + px^k + px^\ell + 1, \quad k > \ell,\ k, \ell \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\}.$$

▸ PROBLEMA 2

O círculo de centro I está inscrito em um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam M e N pontos sobre os segmentos AI e CI, respectivamente, tais que $\angle MBN = \angle ABC/2$. Prove que $\angle MDN = \angle ADC/2$.

▸ PROBLEMA 3

Encontre todos os inteiros positivos m, n, a, b tais que

$$a^m b^n = (a+b)^2 + 1$$

▸ PROBLEMA 4

Sejam p e q inteiros com $q \geqslant p \geqslant 0$. Seja $n \geqslant 2$ um inteiro e sejam $a_0 = 0$, $a_1 \geqslant 0$, a_2, $\dots$, a_{n-1}, $a_n = 1$ reais tais que

$$a_k \leqslant \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Prove que

$$(p+1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k^p \geqslant (q+1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k^q$$

▸ PROBLEMA 5

Dados n pontos P_1, P_2, $\dots$, P_n no plano de modo que quaisquer três deles não são colineares, considere a linha fechada $P_1P_2\dots P_nP_1$, de segmentos P_iP_{i+1}. Seja $A(n)$ a quantidade máxima de interseções de dois segmentos não consecutivos. Prove que:

(a) $A(n) = n(n-3)/2$, para n ímpar,

(b) $A(n) = n(n-4)/2 + 1$, para n par.

▸ PROBLEMA 6

Seja G um grafo completo e orientado com cada uma de suas arestas pintada de vermelho ou azul. Prove que existe um vértice v de G tal que, para qualquer outro vértice u, existe um caminho monocromático direcionado de v para u.

▸ PROBLEMA 7

Seja ABC um triângulo equilátero, e D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB respectivamente. Se $\angle BAD + \angle CBE + \angle ACF \geqslant 120°$, prove que todo ponto P no interior do triângulo ABC também estará no interior ou na borda de pelo menos um dentre os triângulos BAD, CBE e ACF.

▸ PROBLEMA 8

Um inteiro positivo N é denominado n-*supimpa* se satisfaz ambas as propriedades a seguir:

- N é divisível por pelo menos n primos distintos.
- Existem inteiros positivos distintos $1, x_2, x_3, \dots, x_n$ que dividem N e tais que

$$1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = N$$

Mostre que existe um número n-supimpa para cada $n \geqslant 6$.

▸ PROBLEMA 9

(*Esse é para ver se você estudou o material:*) Encontre todos os primos que podem ser escritos na forma $x^2 + 3y^2$, x, y inteiros.