LII Olimpíada Internacional e XXVI Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
30 de abril de 2011

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo desta prova até julho de 2011! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2010, que deve permanecer secreto até essa data.**

▸ **PROBLEMA 1**

Seja ABC um triângulo acutângulo e D, E e F os pés das alturas relativas a BC, CA e AB, respectivamente. Um dos pontos de interseção da reta EF com o circuncírculo de ABC é P. As retas BP e DF encontram-se em Q. Prove que $AP = AQ$.

▸ **PROBLEMA 2**

Seja $n \geqslant 3$ um inteiro tal que para cada fator primo q de $n-1$ existe um inteiro $a > 1$ tal que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ e $a^{\frac{n-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{n}$. Prove que n é primo.

▸ **PROBLEMA 3**

Em um certo planeta, existem 2^N países ($N \geqslant 4$). Cada país possui uma bandeira de tamanho $N \times 1$, composta por N quadrados 1×1, cada quadrado sendo de cor azul ou amarela. Não há dois países com a mesma bandeira. Dizemos que um conjunto de N bandeiras é *diverso* se estas bandeiras podem ser dispostas em um quadrado $N \times N$ tal que todos os quadrados da diagonal principal tenham a mesma cor. Determine o menor inteiro positivo M tal que entre quaisquer M bandeiras distintas, existem N bandeiras formando um conjunto diverso.

▸ **PROBLEMA 4**

Denote por Q^+ o conjunto dos números racionais positivos. Determine todas as funções $f\colon Q^+ \mapsto Q^+$ satisfazendo a seguinte equação para todos $x, y \in Q^+$:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$