Primeira Lista de Preparação para a LV IMO
e XXIV Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Nível III

▸ **PROBLEMA 1**
Seja p um primo positivo para o qual existe um inteiro positivo a tal que p divide $2a^2 - 1$. Prove que existem inteiros b e c tais que $p = 2b^2 - c^2$.

▸ **PROBLEMA 2**
Cada uma das circunferências k_1, k_2 e k_3 é tangente externamente às outras duas. Seja T o ponto de tangência entre k_1 e k_2. Uma das tangentes externas comuns de k_1 e k_2 corta k_3 nos pontos P e Q. Prove que a tangente interna comum de k_1 e k_2 corta o arco PQ mais próximo de T no ponto médio desse arco.

▸ **PROBLEMA 3**
Sejam k, m e n inteiros positivos com $m \leq n$. Sejam $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{m+n}$ números reais. Prove que

$$\sqrt[k+1]{\frac{a_1^{k+1} + \cdots + a_m^{k+1}}{m}} \leq \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \cdots + a_{m+n}^k}{m+n}}$$

▸ **PROBLEMA 4**
Prove que para todo grafo simples G com n vértices, existem alguns grafos simples $S_1, S_2, \ldots, S_k$ com as seguintes propriedades:

(a) Todo S_i é um grafo bipartido completo;

(b) Toda aresta de G está contida em um número ímpar de grafos S_i;

(c) Toda aresta do complemento de G está contida em um número par de grafos S_i;

(d) $k \leq \frac{3n}{4}$.

▸ **PROBLEMA 5**
Seja ABC um triângulo não equilátero. Considere os triângulos equiláteros XYZ tais que os vértices X, Y e Z estão sobre as retas BC, CA e AB, respectivamente. Mostre que o lugar geométrico dos centros de tais triângulos XYZ é um par de retas paralelas perpendiculares à reta de Euler do triângulo ABC.

▸ **PROBLEMA 6**
Dado um tabuleiro $(2^n - 1) \times (2^{n+1} - 1)$ no qual cada casa possui um número inteiro. Prove que é possível apagar $2^n - 1$ colunas do tabuleiro de modo que em cada uma das linhas do tabuleiro $(2^n - 1) \times 2^n$ resultante a soma dos inteiros seja par.

▸ **PROBLEMA 7**
Seja $q \geq 1$ um inteiro. Prove que existe um inteiro C_q tal que para todo conjunto finito A de inteiros vale a desigualdade $|A + q \cdot A| \geq (q+1)|A| - C_q$.
($A + q \cdot A$ é o conjunto dos inteiros que podem ser expressos como $a + qa'$ onde a e a' são elementos de A.)

▸ **PROBLEMA 8**
Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que

$$\sqrt[3]{7a^2b+1} + \sqrt[3]{7b^2c+1} + \sqrt[3]{7c^2a+1} \leq \frac{23}{12}(a+b+c) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$