XLVIII Olimpíada Internacional e XXII Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
10 de março de 2007
Soluções

▸ **PROBLEMA 1**

Seja a_0 um número real. Definimos, então, a seqüência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ como

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \{a_i\} \quad \text{para } i \geqslant 0$$

sendo $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Prove que existe um inteiro positivo N tal que $a_i = a_{i+2}$ para todo $i \geqslant N$.

Solução

Primeiro note que se $\lfloor a_N \rfloor = 0$ para algum N então $a_i = 0$ para $i > N$. Além disso, se $\lfloor a_N \rfloor = -1$ para algum N verifica-se que $a_i = a_{i+2}$ para todo $i \geqslant N$.

Se $a_0 > 0$, indutivamente prova-se que $a_i \geqslant 0$ para $i > 0$. Suponha que $\lfloor a_k \rfloor > 0$ para todo k e seja $m = \lfloor a_\ell \rfloor > 0$ o valor mínimo de $\lfloor a_k \rfloor$. Tal valor existe porque o conjunto dos $\lfloor a_k \rfloor$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}_+^*$. Mas $a_{\ell+1} = m \cdot \{a_\ell\} < m \Longrightarrow \lfloor a_{\ell+1} \rfloor < m$, um absurdo.

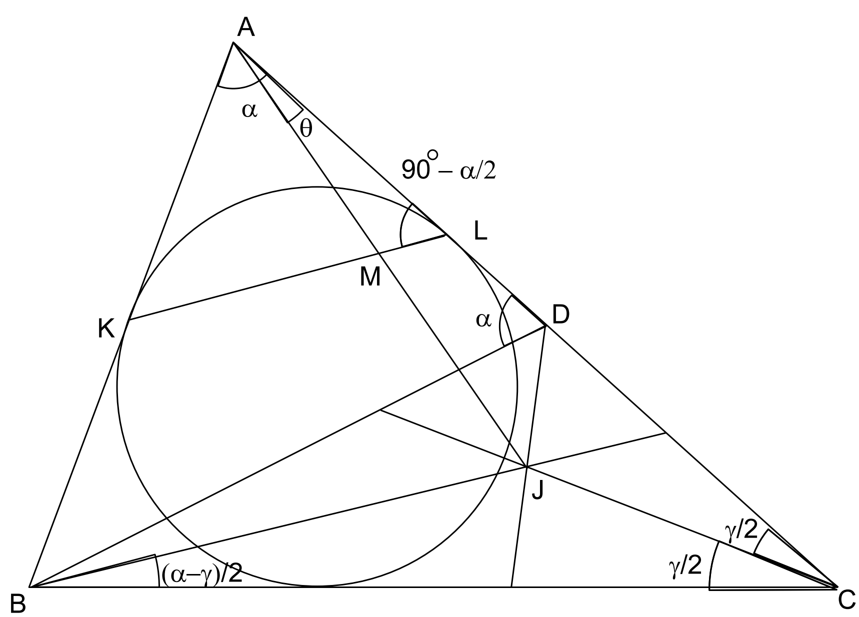
Se $a_0 < 0$, indutivamente prova-se que $a_i \leqslant 0$ para $i > 0$. Suponha que $\lfloor a_k \rfloor < 0$ para todo k e seja $M = \lfloor a_\ell \rfloor < 0$ o valor máximo de $\lfloor a_k \rfloor$. Tal valor existe porque o conjunto dos $\lfloor a_k \rfloor$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}_-^*$. Mas $a_{\ell+1} = m \cdot \{a_\ell\} > M$ e $a_{\ell+1} < \lfloor a_{\ell+1} \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor a_{\ell+1} \rfloor \geqslant M$. Assim, $\lfloor a_i \rfloor = M$ para $i > \ell$. Deste modo, $a_{i+1} = M(a_i - M)$ para $i > \ell$, que é uma recorrência cuja solução é $a_i = c_1 \cdot M^i + c_2$, sendo c_1 e c_2 constantes. Se $c_1 = 0$, a_i é constante. Se $c_1 \neq 0$, se $|M| \neq 1$ então fazendo i suficientemente grande obtemos $|a_i|$ tão grande quanto quisermos, o que contradiz o fato de que $\lfloor a_i \rfloor = M$. Logo $|M| = 1 \iff M = -1 \iff \lfloor a_i \rfloor = -1$ e a seqüência é periódica de período menor ou igual a 2. ∎

▸ **PROBLEMA 2**

Seja ABC um triângulo com $\angle C < \angle A < 90°$. O ponto D está sobre o lado AC e é tal que $BD = DA$. O incírculo de ABC toca o lado AB em K e o lado AC em L. Seja J o incentro do triângulo BCD. Prove que a reta KL passa pelo ponto médio do segmento AJ.

Solução

Infelizmente, o enunciado estava incorreto. O correto é $BD = BA$ no lugar de $BD = DA$. Segue a solução com essa correção.



Considere os ângulos marcados na figura (embora, numa prova, você deva explicar a marcação de ângulos). Suponha, sem perda de generalidade, que o circunraio de ABC é $R = 1/2$. Então, da lei dos senos, $AB = \operatorname{sen}\gamma$, $AC = \operatorname{sen}\beta$ e $BC = \operatorname{sen}\alpha$.

A estratégia é calcular, sempre em função de α, β e γ, AJ e depois AM. Também calculamos $\theta = \angle JAC$. Lei dos senos neles!

Para calcular AJ e θ, usamos o triângulo AJC, em que temos AC, $\angle JCA$ e JC, que pode ser calculado no triângulo JBC, que tem todos os ângulos determinados e BC.

Para calcular AM, usamos o triângulo AML, que tem os ângulos $\angle LAM = \theta$ (que calculamos no passo anterior) e $\angle ALM = 90^\circ - \alpha$ e o lado $AL = s - a = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Pronto, temos uma estratégia para as contas! Agora é só executar.

- Calculando JC: pela lei dos senos no triângulo JBC,

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{JC}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \iff JC = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$$

- Calculando AJ e θ: pela lei dos senos no triângulo AJC,

$$\frac{AJ}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{JC}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}+\theta\right)} \iff \left|\begin{array}{l} AJ = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}+\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \end{array}\right.$$

Antes de continuarmos as contas, calculemos AM.

- Calculando AM: pela lei dos senos no triângulo AML,

$$\frac{AM}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AL}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \theta\right)} \iff AM = \frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}$$

O problema é equivalente a provar que $\frac{AJ}{AM} = 2$. Dividindo os dois resultados, devemos então provar que

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta} = 2 \iff \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \qquad (*)$$

Mas, do truque da co-tangente,

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Então, dividindo $(*)$ por $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$(*) \iff \operatorname{cotg}\theta = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

E, lá da lei dos senos que encontra θ,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{cotg}\theta + \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \iff \operatorname{cotg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} - \operatorname{cotg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Assim, o problema é equivalente a provar a identidade

$$\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} - \operatorname{cotg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Limpando os denominadores, obtemos

$$4\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{sen}\beta - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\iff 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

Sendo $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \iff \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

que é verdade. ∎

▸ **PROBLEMA 3**

Seja S um conjunto finito de pontos no plano. Não há três pontos colineares em S. Para cada polígono convexo P cujos vértices pertencem a S, seja $a(P)$ o número de vértices de P e $b(P)$ o número de pontos de S no exterior de P. Prove que, para todo real x,

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

sendo a soma sobre todos os polígonos convexos com vértices pertencentes a S.

Observação: neste problema, adote, por convenção, que um segmento de reta é um polígono de 2 vértices; um ponto é um polígono de 1 vértice; o conjunto vazio é um polígono de 0 vértice.

Solução

Procediremos por indução sobre a quantidade n de pontos de S. Para $n = 1$ o resultado é imediato. Agora suponha que o resultado valha para valores menores de n e provemos que vale para n.

Seja F o fecho convexo de S, sendo $|F| = k$. Se $k = n$, todo subconjunto de S determina um polígono convexo e a soma é igual a

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

Suponha agora $k < n$. Sendo $\emptyset \neq X \subset F$, seja $P(X)$ o conjunto dos polígonos convexos que não contêm nenhum dos pontos de X, ou seja, o conjunto dos polígonos convexos com vértices em $S \setminus X$. Pela hipótese de indução, considerando ainda que os pontos de X estão no exterior de todo polígono de $P(X)$,

$$\sum_{P(X)} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = (1-x)^{|X|}$$

Assim, aplicando o princípio da inclusão-exclusão sobre todos os subconjuntos de F, incluindo o vazio, cuja parcela é igual a x^k (note que $a(F) = k$ e $b(F) = 0$) obtemos a soma total

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = x^k + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (-1)^{p-1}(1-x)^p = x^k - \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (x-1)^p = x^k - ((x-1+1)^p - 1) = 1$$

■

▸ **PROBLEMA 4**

Prove que a equação

$$\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$$

não tem soluções inteiras.

Solução

Seja p divisor primo de $\frac{x^7-1}{x-1}$. Então p divide $x^7 - 1$, ou seja, $x^7 \equiv 1 \pmod{p}$. Isto quer dizer que, sendo $d = \operatorname{ord}_p x$, $7 \mid d$, ou seja, $d = 1$ ou $d = 7$. Se $d = 1$, obtemos $x \equiv 1 \pmod{p}$ e, portanto, $\frac{x^7-1}{x-1} \equiv 0 \pmod{p} \iff x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod{p}$, ou seja, $p = 7$. Se $d = 7$, então $7 \mid \phi(p)$, isto é, $p = 7k + 1$, k inteiro. Isto quer dizer que todo divisor primo de $\frac{x^7-1}{x-1}$ é 7 ou é congruente a 1 mód 7. Em particular, $\frac{x^7-1}{x-1}$ é congruente a 0 ou 1 mód 7.

Assim, $y^5 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ ou $y^5 - 1 \equiv 1 \pmod{7} \iff y \equiv 1 \pmod{7}$ ou $y \equiv 4 \pmod{7}$.

Mas, como $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1 = (y-1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$, os divisores primos de $y - 1$ e $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ são 7 ou congruentes a 1 mód 7 também. Se $y \equiv 1 \pmod{7}$, $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 5 \pmod{7}$, o que não é possível; e se $y \equiv 4 \pmod{7}$, $y - 1 \equiv 3 \pmod{7}$, o que também não é possível. ■

Observação: um indício de que ver módulo 7 é uma idéia interessante é que

$$\frac{x^7-1}{x-1} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{7} & \text{se } x \equiv 1 \pmod{7} \\ 1 \pmod{7} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para provar isso, basta ver que $x^7 - 1 \equiv x - 1 \pmod{7}$, pelo Pequeno Teorema de Fermat.