XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
26 de abril de 2008

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ **PROBLEMA 1**

Seja AB uma corda, não um diâmetro, de uma circunferência de centro O. O menor arco AB é dividido em três arcos congruentes AC, CD, DB. A corda AB também é dividida em três segmentos congruentes AC', $C'D'$, $D'B$. Seja P o ponto de interseção entre as retas CC' e DD'. Prove que $\angle APB = \frac{1}{3}\angle AOB$.

▸ **PROBLEMA 2**

Seja n um inteiro positivo. Uma seqüência (a, b, c), com $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ é dita *zoada* se seu menor termo é ímpar e se apenas esse menor termo, ou nenhum termo, se repete. Por exemplo, as seqüências $(4, 5, 3)$ e $(3, 8, 3)$ são zoadas, mas $(3, 2, 7)$ e $(3, 8, 8)$ não o são. Determine o número de seqüências zoadas em função de n.

▸ **PROBLEMA 3**

Se a, b, c e d são números reais positivos tais que $a + b + c + d = 2$, prove que

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{b^2}{(b^2+1)^2} + \frac{c^2}{(c^2+1)^2} + \frac{d^2}{(d^2+1)^2} \leqslant \frac{16}{25}.$$

▸ **PROBLEMA 4**

Ache todos os inteiros ímpares n para os quais

$$\frac{2^{\varphi(n)} - 1}{n}$$

é um quadrado perfeito.

Observação: dado um inteiro positivo n, $\varphi(n)$ denota a quantidade de elementos do conjunto

$$\{a \in Z \mid 1 \leqslant a \leqslant n \;\text{ e }\; \mathrm{mdc}(a, n) = 1\}.$$