XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
23 de fevereiro de 2008

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ PROBLEMA 1

Encontre todos os pares ordenados (k, n) de inteiros positivos tais que $7^k - 3^n$ divide $k^4 + n^2$.

▸ PROBLEMA 2

Encontre todos os inteiros positivos n para os quais é possível que cada um dos números de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ seja colorido de verde-água ou azul-piscina de modo que o conjunto $S \times S \times S$ contém exatamente 2007 triplas ordenadas (x, y, z) com x, y e z da mesma cor e $x + y + z$ múltiplo de n.

▸ PROBLEMA 3

Seja n um inteiro positivo e x e y números reais positivos tais que $x^n + y^n = 1$. Prove que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + x^{2k}}{1 + x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + y^{2k}}{1 + y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}$$

▸ PROBLEMA 4

As diagonais do trapézio $ABCD$ cortam-se no ponto P. O ponto Q está na região determinada pelas retas paralelas BC e AD tal que $\angle AQD = \angle CQB$ e a reta CD corta o segmento PQ. Prove que $\angle BQP = \angle DAQ$.