LI Olimpíada Internacional e XXV Olimpíada Iberoamericana
Segundo Teste de Seleção
20 de março de 2010

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2010! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2009, que deve permanecer secreto até essa data.**

▸ **PROBLEMA 1**

Para cada inteiro $n \geqslant 2$, seja $N(n)$ o número máximo de triplas de números (a_i, b_i, c_i), $i = 1, \ldots, N(n)$, consistindo de inteiros não negativos a_i, b_i e c_i, tais que as duas seguintes condições são satisfeitas:

(1) $a_i + b_i + c_i = n$, para todo $i = 1, \ldots, N(n)$;

(2) Se $i \neq j$, então $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ e $c_i \neq c_j$.

Determine $N(n)$, para cada $n \geqslant 2$.

▸ **PROBLEMA 2**

Um inteiro positivo N é chamado *balanceado* se $N = 1$ ou se N pode ser escrito como o produto de um número par de números primos, não necessariamente distintos. Dados inteiros positivos a e b, considere o polinômio P definido por $P(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Prove que existem inteiros positivos distintos a e b tais que todos os números $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sejam balanceados.

(b) Prove que se $P(n)$ é balanceado para todo inteiro positivo n, então $a = b$.

▸ **PROBLEMA 3**

Seja ABC um triângulo. O círculo inscrito de ABC tangencia os lados AB e AC nos pontos Z e Y, respectivamente. Seja G o ponto onde as retas BY e CZ se encontram, e sejam R e S pontos tais que os dois quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ sejam paralelogramos.

Prove que $GR = GS$.

▸ **PROBLEMA 4**

Ache todas as funções f do conjunto dos números reais no conjunto dos números reais que satisfazem, para todos os reais x, y, a identidade

$$f(x \cdot f(x + y)) = f(y \cdot f(x)) + x^2.$$