L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
14 de março de 2009

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ PROBLEMA 1

Determine, em função de n, n inteiro positivo, a quantidade de permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com a seguinte propriedade:

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \quad \text{é divisível por } k \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

▸ PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam BE e CF alturas do triângulo ABC, com E sobre AC e F sobre AB. Dois círculos passam por A e F e tangenciam a reta BC respectivamente nos pontos P e Q, de modo que B está entre C e Q. Prove que as retas PE e QF se cortam em um ponto pertencente ao circuncírculo de AEF.

▸ PROBLEMA 3

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros positivos distintos, $n \geqslant 3$. Prove que existem índices i e j distintos tais que nenhum dos números $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$ é múltiplo de $a_i + a_j$.

▸ PROBLEMA 4

Sejam a, b, c, d reais positivos tais que

$$abcd = 1 \quad \text{e} \quad a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Prove que

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$