L Olimpíada Internacional e XXIV Olimpíada Iberoamericana
Terceiro Teste de Seleção
25 de abril de 2009

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.

▸ PROBLEMA 1

Seja r um número real positivo. Prove que o número de triângulos retângulos com lados inteiros positivos primos entre si que possuem inraio igual a r é zero ou uma potência de 2.

▸ PROBLEMA 2

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 números reais positivos com $x_1x_2x_3x_4x_5 = 1$. Prove que

$$\frac{x_1+x_1x_2x_3}{1+x_1x_2+x_1x_2x_3x_4}+\frac{x_2+x_2x_3x_4}{1+x_2x_3+x_2x_3x_4x_5}+\frac{x_3+x_3x_4x_5}{1+x_3x_4+x_3x_4x_5x_1}+\frac{x_4+x_4x_5x_1}{1+x_4x_5+x_4x_5x_1x_2}+\frac{x_5+x_5x_1x_2}{1+x_5x_1+x_5x_1x_2x_3}\geqslant\frac{10}{3}.$$

▸ PROBLEMA 3

No plano cartesiano R^2, considere o conjunto S de todos os pontos com coordenadas inteiras. Para cada inteiro positivo k, dois pontos distintos $A, B \in S$ serão chamados de k-*amigos* se existir um ponto $C \in S$ para o qual a área do triângulo ABC seja igual a k. Um conjunto $T \subset S$ será chamado de k-*clique* se quaisquer dois pontos distintos de T forem k-amigos. Determine o menor inteiro positivo k para o qual existe um k-clique com mais de 200 elementos.

▸ PROBLEMA 4

É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Prove que existe um ponto P no interior do quadrilátero tal que

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90^\circ$$

se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.