XLIX Olimpíada Internacional e XXIII Olimpíada Iberoamericana
Segundo Teste de Seleção
29 de março de 2008

▸ **PROBLEMA 1**

Sejam $b, n > 1$ inteiros. Suponha que para cada $k > 1$ exista um inteiro a_k tal que $b - a_k^n$ seja divisível por k. Prove que $b = A^n$, para algum inteiro A.

Solução

Tome $k = b^2$. Então existem a e m inteiros tais que $b - a^n = m \cdot b^2 \iff a^n = b(1 - mb)$. Como $\mathrm{mdc}(b, 1 - mb) = 1$, b é uma potência n-ésima. ∎

Resumindo:

- O resumo provavelmente vai ser maior do que a solução, mas é importante explicar a motivação de termos escolhido $k = b^2$ e o que economizou o que poderia ser um bocado de contas.
- A idéia principal é uma das mais importantes da Teoria dos Números: **se você fatorar, tire o mdc dos termos**. Fazemos sempre isso por causa do seguinte fato: se $x \cdot y = z^n$ e $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$ então x e y são potências n-ésimas (ou opostos). Essa idéia sozinha explica os dois tópicos acima: escolhemos $k = b^2$ para obter um múltiplo de b; e não fizemos congruências (como muitos fizeram corretamente) exatamente para podemos isolar a^n. O expoente 2 foi utilizado para garantir mdc igual a 1. Poderia ser qualquer expoente maior do que 1.
- Alguns alunos assumiram que somente n é maior do que 1; ou seja, que b em princípio poderia ser negativo, o que traria inconvenientes para n par. O problema ainda é verdadeiro nesse caso, mas não exige muito mais trabalho. Tome $k = 4b^2$ nesse caso: obtemos $a'^n = b(1 - 4m'b)$. Como $1 - 4mb$ é ímpar, todos os fatores 2 de a'^n estão em b; cortando todos, obtemos $a''^n = b'(1 - 4m'b)$, com a'' e b' ímpares. Nesse caso, sendo n par, $a''^n \equiv 1 \pmod{4}$ e $1 - 4m'b \equiv 1 \pmod{4}$, o que implica $b' \equiv 1 \pmod{4}$. b' não poderia ser o oposto de uma potência n-ésima, pois seria congruente a -1 mód 4.

▸ **PROBLEMA 2**

Considere todas as funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfazem à seguinte condição:

$$f(m + n) \geqslant f(m) + f(f(n)) - 1,$$

para todos os $m, n \in \mathbb{N}$. Ache os possíveis valores de $f(2008)$.
($\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos.)

Solução

Temos $f(k)$ assume somente valores inteiros positivos, $f(f(n)) \geqslant 1$, o que implica $f(m + n) \geqslant f(m)$ para todos m e n inteiros positivos. Isto quer dizer que f é não-decrescente.

Faça $m \to 1$: obtemos $f(1 + n) \geqslant f(1) + f(f(n)) - 1 \geqslant f(f(n)) \implies 1 + n \geqslant f(n)$. Logo $f(2008) \leqslant 2009$. Podemos obter $f(2008) = k$ para $k = 1, 2, \ldots, 2008$ fazendo

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leqslant 2008 - k \\ n + k - 2008, & \text{se } n > 2008 - k \end{cases}$$

Verifiquemos que essas funções satisfazem a condição do enunciado. Se m e n são ambos menores ou iguais a $2008-k$, a desigualdade equivale a $f(m+n) \leqslant 1$; se $m > 2008-k$ ou $n > 2008-k$, $m+n > 2008-k$ e $f(m+n) = m+n+k-2008$ e $f(m)+f(f(n))-1 \leqslant m+k-2008+f(n+k-2008)-1 \leqslant m+k-2008+n+k-2008+k-2008-1 = m+n+3k-3\cdot 2008-1$, de modo que $f(m + n) - f(m) - f(f(n)) + 1 = 2(2008 - k) + 1 \geqslant 0$.

Enfim, podemos obter $f(2008) = 2009$ fazendo

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Note que $f(f(n)) = n + 1$ para n par e $f(f(n)) = n$ para n ímpar. Assim, se $m + n$ é ímpar, $f(m + n) = m + n$ e $f(m) + f(f(n)) - 1$ é igual a $m + n + 1 - 1 = m + n$ quando m é ímpar e n é par e a $m + 1 + n - 1 = m + n$ quando

m é par e n é ímpar; se $m+n$ é par, $f(m+n) = m+n+1$ e $f(m) + f(f(n)) - 1 \leqslant m+1+n+1-1 = m+n+1$. Assim, essa função também satisfaz a condição do enunciado.

Resumindo:

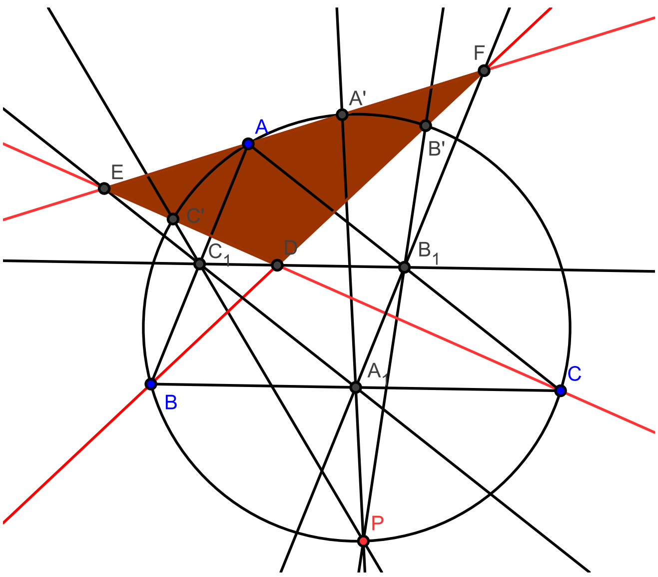
- Considerando que não temos uma equação funcional e sim, uma *inequação* funcional, a primeira idéia é verificar se f é crescente ou não. Vale a pena observar que se f é de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ ou qualquer conjunto de inteiros com um elemento mínimo, não é possível que f seja estritamente decrescente (você consegue ver por quê? Aliás, se for não crescente é constante a partir de um ponto). Considerar o menor elemento da imagem também pode ajudar (veja o problema 6 de uma IMO antiga, o que tem $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $f(f(n)) < n+1$ e que pede para provar que $f(n) = n$).
- Com um pouco mais de trabalho podemos provar que $f(n) \leqslant n+1$.
- Agora, a idéia é tentar construir funções para cada valor. Cada construção vem do fato de que podemos tomar $f(x) \approx x + c$ (de fato, se $f(n)$ fosse linear ela seria assintocamente próxima de n).
- Nos casos "pequenos", o trabalho é mais simples: tomar $f(x) = x - c$, c constante positiva. Para não dar problema com o conjunto de chegada, fazemos $f = 1$ para $x < c+1$.
- O caso limite é um pouco mais complicado: $f(x) = x+1$ não funciona! Então a idéia é fazer ser $x+1$ para uns e x para outros (ela é "quase igual" a $x+1$). Par e ímpar parece ser a divisão mais simples, e acaba funcionando.
- Se no lugar de 2008 fosse um ímpar, o que você faria?

▸ PROBLEMA 3

Sejam A_1, B_1 e C_1, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo ABC e P um ponto variável sobre o seu circuncírculo. As retas PA_1, PB_1 e PC_1 encontram o circuncírculo novamente nos pontos A', B' e C', respectivamente. Suponha que os pontos A, B, C, A', B' e C' sejam distintos e que as retas AA', BB' e CC' formem um triângulo. Mostre que a área deste triângulo não depende da posição do ponto P.

Solução

Seja DEF o triângulo determinado pelas retas AA', BB' e CC'. Primeiro note que, aplicando o teorema de Pascal ao hexágono inscritível $PC'CABB'$ temos que $PC' \cap AB = \{C_1\}$, $C'C \cap BB' = \{D\}$ e $CA \cap B'P = \{B_1\}$ são colineares, isto é, o vértice D de DEF pertence à reta B_1C_1, que por sua vez é paralela a BC. Analogamente, E pertence a A_1C_1, paralela a AC e F pertence a A_1B_1, paralela a AB.



Como D pertence a uma reta paralela a BC, a área de DBC é igual à metade da área de ABC, pois a altura relativa a D é metade da distância de A a BC. Além disso, das semelhanças $\triangle DEC_1 \sim \triangle DCB_1$ e $\triangle DFB_1 \sim \triangle DBC_1$, $\frac{ED}{DC} = \frac{DC_1}{DB_1}$ e $\frac{DF}{DB} = \frac{DB_1}{DC_1}$. Multiplicando essa igualdades e observando que $\angle EDF = \angle BDC$, obtemos $ED \cdot DF = DC \cdot DB \iff \frac{ED \cdot DF \cdot \text{sen}\,\angle EDF}{2} = \frac{DC \cdot DB \cdot \text{sen}\,\angle BDC}{2}$, que é igual à área do triângulo DBC, que é constante e igual à metade da área do triângulo ABC. ∎

Resumindo:

- Um bom desenho (sempre use régua e compasso; faça desenhos grandes, etc) sugere que D, E e F caem nas retas B_1C_1, C_1A_1 e A_1B_1. Observando que não seis, mas **sete** pontos estão na mesma circunferência, parece irresistível aplicar Pascal, não?
- Mas é importante aplicar Pascal sempre com alguma meta na mente; você poderia encontrar outras três ternas de pontos colineares que não ajudam muito! Vale a pena marcar os pontos como interseções de cordas: por exemplo, D é interseção de CC' e BB'; C_1 de PC' e AB; B_1 de PB' e AC. Com isso, conseguimos enxergar qual é o hexágono que devemos considerar para o teorema de Pascal funcionar como queremos.
- O resto do problema pode ser resolvido com contas também, mas vale a pena aproveitar os paralelismos das bases médias (nunca se esqueça delas!) para conseguir uma solução mais curta.
- Na resolução não foi feita qualquer menção em relação à posição dos pontos, e isso na verdade deveria ser feito. Mas não há com o que se preocupar: supondo sem perdas que P pertence ao arco BC (como na nossa figura), é imediato que C' pertence ao arco AB e B' pertence ao arco AC. Isso faz com que D caia sobre o segmento B_1C_1. Como A e A_1 estão em semiplanos opostos em relação a B_1C_1 então o triângulo DEF, determinado por AA', BB' e CC', está no interior do ângulo oposto a $\angle BDC$. Então todas as nossas observações na resolução acima são verdadeiras para todas as posições de P.

▸ **PROBLEMA 4**

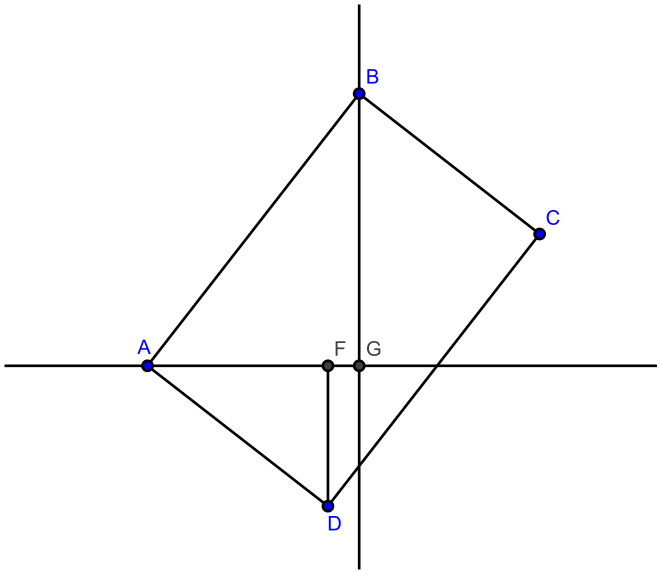
No sistema de coordenadas cartesianas, definimos a faixa $S_n = \{(x, y) \mid n \leqslant x < n+1\}$, para cada inteiro n. Assuma que cada faixa é colorida de azul ou vermelho, e sejam a e b dois inteiros positivos distintos. Prove que existe um retângulo, cujos lados têm comprimentos a e b, tal que seus vértices tenham a mesma cor.

Solução

Se S_{n+a} ou S_{n+b} tiverem a mesma cor que S_n para algum n, então o problema acaba imediatamente: basta colocar o retângulo nos pontos $(n, 0)$, $(n+a, 0)$, (n, b) e $(n+a, b)$ no primeiro caso e trocar a por b no segundo. Então S_n e S_{n+a} têm cores diferentes, assim como S_n e S_{n+b}. Com isso, S_{n+2a} e S_{n+2b} têm a mesma cor que S_n. Na verdade, podemos extrapolar: $S_{n+2ax+2by}$ tem a mesma cor que S_n. Considere então o valor mínimo de $2ax + 2by$ que, pelo teorema de Bézout, é $2d = 2\,\mathrm{mdc}(a, b)$. Deste modo, a pintura é periódica com um de seus períodos igual a $2d$.

Suponha, sem perda de generalidade, $a > b$. Assim, lembrando que a e b são ambos múltiplos de d, $b \geqslant d$ e, sendo $a > b$, $a \geqslant 2d$. Na verdade, podemos supor $a \geqslant 3d$, pois se $a = 2d$ teremos $S_{n+2d} = S_{n+a}$ da mesma cor que S_n.

A idéia é tentarmos encaixar dois vértices nas faixas S_n e S_{n+2d}, que sabemos que têm a mesma cor. Seja $ABCD$ o retângulo, sendo $AB = a$ e $BC = b$ os lados. Coloquemos A em $(n, 0)$ e B em $(n+2d, y)$. Por Pitágoras, $BG = y = \sqrt{a^2 - (2d)^2} = d\sqrt{a_0^2 - 4}$, sendo $a = d \cdot a_0$. Além disso, note que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, de modo que C e D têm a mesma cor (embora não necessariamente igual à cor de A e B). Então basta fazermos com que A e C tenham a mesma cor.



Como os triângulos AFD e BGA são semelhantes de razão $\frac{AD}{BA} = \frac{b}{a}$, $AF = \frac{b \cdot BG}{a} = \frac{bd\sqrt{a_0^2-4}}{a}$.

Agora vem o fato crucial do problema: como $a_0 \geqslant 3$, $\sqrt{a_0^2 - 4}$ é irracional e, portanto, a medida de AF é irracional! De fato, se fosse racional, $a_0^2 - 4 = k^2 \iff a_0^2 - k^2 = 4$, o que é impossível para $a_0 \geqslant 3$, pois $a_0^2 - k^2 \geqslant a_0^2 - (a_0 - 1)^2 = 2a_0 - 1 > 4$. Com isso, se arrastarmos A ao longo de k faixas, D passa ao longo de $k+1$ faixas. Assim, o problema terminou: considere a cor que apareceu mais. Podemos deslocar A ao longo de todas as m faixas dessa cor que as $m+1$ faixas percorridas por D devem ser da outra cor, o que é um absurdo. Assim, A e D em algum momento passam por faixas de mesma cor, e acabou. ∎

Resumindo:

- A primeira idéia é decorrente do conceito de *ideais* em $\mathbb{Z}$: se A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ tal que se $a, b \in A$ então $ka \in A$ para todo k inteiro e $a + b \in A$, então A é o conjunto dos múltiplos de um número. Isso pode ser visto com mais detalhes na aula do professor Eduardo Tengan, *O menor divide*. De modo geral, uma idéia que fica é que se a e b são inteiros fixados e $f(n + a) = f(n)$ e $f(n + b) = f(n)$ para todo n inteiro então f é periódica sendo $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ um dos períodos (isso pode ser mais ou menos generalizado para reais; pense sobre o assunto e entenda o significado do "mais ou menos"!).
- As desigualdades com a e d são mais importantes do que parecem: de fato, o enunciado do problema é **falso** para quadrados ($a = b$)! Fizemos isso para que realmente seja possível colocar dois vértices sobre as faixas de distância $2d$.
- A idéia mais interessante nesse problema é conseguir colocar os pontos A e C na mesma cor. O fato é que ser regular nesse caso atrapalha: poderia ocorrer (no caso do quadrado isso é realmente possível) de A e C serem de cores diferentes literalmente *ad infinitum*. Para isso, nada mais irregular do que... números irracionais! Uma idéia original que deve ser aproveitada!