LI Olimpíada Internacional e XXV Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
27 de fevereiro de 2010

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 5 horas.
- **Não divulgue o conteúdo dessa prova até julho de 2010! Alguns dos problemas foram retirados do Banco da IMO 2009, que deve permanecer secreto até essa data.**

▸ **PROBLEMA 1**

Considere 2009 cartões, cada um possuindo uma face dourada e a outra face preta, enfileirados em paralelo sobre uma longa mesa. Inicialmente, todos os cartões mostram suas faces douradas. Dois jogadores, posicionados do mesmo lado da longa mesa, jogam um jogo alternando movimentos. Cada movimento consiste em escolher um grupo de 50 cartões consecutivos, dos quais o mais à esquerda mostra a face dourada, e virar todos eles, de forma que os que mostravam a face dourada passam a mostrar a face preta e vice-versa. O último jogador que for capaz de realizar um movimento vence.

(a) Esse jogo necessariamente termina?

(b) Existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador?

▸ **PROBLEMA 2**

Seja f uma função definida no conjunto dos inteiros positivos, tomando valores nesse mesmo conjunto, tal que $a-b$ divide $f(a)-f(b)$ para todos os inteiros positivos distintos a e b. Prove que existem infinitos primos p tais que p divide algum elemento da imagem de f (ou seja, p divide $f(c)$ para algum inteiro positivo c).

▸ **PROBLEMA 3**

As diagonais AC e BD do quadrilátero inscritível $ABCD$ encontram-se em E, e as retas AD e BC encontram-se em F. Os pontos médios de AB e CD são G e H, respectivamente. Prove que a reta EF é tangente em E ao círculo que passa por E, G e H.

▸ **PROBLEMA 4**

Seja f uma função qualquer de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Prove que existem números reais x e y tais que

$$f(x-f(y)) > yf(x)+x.$$