

31 Als de straal van een bolvormig voorwerp gelijk is aan zijn Schwarzschildstraal, dan is het voorwerp nét een zwart gat. De dichtheid van zo'n zwart gat bereken je met:

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi \cdot G^3 \cdot M^2}.$$

- a Leid deze formule af.
- b Bereken de minimale dichtheid van een zwart gat met een Schwarzschildstraal van 1,0 cm.

Opgave 31

a Voor de straal van een bol geldt $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Voor de dichtheid geldt $\rho = \frac{m}{V}$

Voor de massa M van de ster geldt dus $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

De straal r is gelijk aan de Schwarzschildstraal R_s .

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_s^3 \text{ met } R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$$

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{2G \cdot M}{c^2} \right)^3$$

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{8G^3 \cdot M^3}{c^6}$$

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi \cdot G^3 \cdot M^2}$$

b De minimale dichtheid bereken je met de gegeven formule.
De massa van een zwart gat bereken je met de formule voor de Schwarzschildstraal.

Voor $R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$

$$R_s = 1,0 \text{ cm} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$G = 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \qquad \text{Zie BINAS tabel 7}$$

$$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \qquad \text{Zie BINAS tabel 7}$$

$$1,0 \cdot 10^{-2} = \frac{2 \times 6,67384 \cdot 10^{-11} \cdot M}{\left(2,9979 \cdot 10^8 \right)^2}$$

$$M = 6,733 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{3 \times (2,9979 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6,67384 \cdot 10^{-11})^3 \times (6,733 \cdot 10^{24})^2} = 1,607 \cdot 10^{30} \text{ kg m}^{-3}$$

Afgerond: $\rho = 1,6 \cdot 10^{30} \text{ kg m}^{-3}$.