33 Het ruimtestation ISS beweegt in een cirkelvormige baan op 342 km boven het aardoppervlak. De massa van het ISS is $2{,}46 \cdot 10^5$ kg.

a Bereken de gravitatie-energie van het ISS ten opzichte van de aarde.

Op het ISS werkt de luchtweerstandskracht. Wordt er niet gecorrigeerd, dan zal de baanstraal van het ISS elke dag tientallen meters kleiner worden. Daarbij neemt de gravitatie-energie af.

b Leg dit uit met behulp van de formule voor gravitatie-energie.

c Leg dit uit met behulp van de arbeid die door de gravitatiekracht verricht wordt.

Het ISS draait in 92 minuten rondom de aarde. Er worden regelmatig ruimtecapsules met astronauten en voorraden richting het ISS gelanceerd.

d Toon aan dat de verticale snelheid van een capsule minstens 2,3 km s^{-1} moet zijn om vanaf het aardoppervlak tot 342 km hoogte te kunnen komen.

Het is echter niet genoeg om even hoog te komen als het ISS. Om het ISS te naderen moet een ruimtecapsule met het ISS meevliegen. Daardoor wordt de benodigde bewegingsenergie ongeveer 10 keer zo groot.

e Toon dit aan met een berekening.

Opgave 33

a De gravitatie-energie bereken je met de formule voor de gravitatie-energie (t.o.v. oneindig).
De baanstraal van het ISS bereken je met de straal van de aarde en de hoogte van het ISS boven het aardoppervlak.

$r = R_{aarde} + h$
$R_{aarde} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m (zie BINAS tabel 31)
$h = 342$ km = $342 \cdot 10^3$ m
$r = 6{,}371 \cdot 10^6 + 342 \cdot 10^3 = 6{,}713 \cdot 10^6$ m

$$E_g = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} (zie BINAS tabel 7)
$m = 2{,}46 \cdot 10^5$ kg
$M = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (zie BINAS tabel 31)

$$E_g = -6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times \frac{2{,}46 \cdot 10^5 \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}713 \cdot 10^6}$$

$E_g = -1{,}460 \cdot 10^{13}$ J
Afgerond: $E_g = -1{,}46 \cdot 10^{13}$ J.

b Als de baanstraal van het ISS kleiner wordt, dan volgt uit de formule voor de gravitatie-energie dat de gravitatie-energie een grotere negatieve waarde krijgt.
Wordt de gravitatie-energie meer negatief, dan neemt de gravitatie-energie dus af.

c Als de baanstraal van het ISS kleiner wordt, dan verplaatst het ISS zich in de richting van het aardoppervlak. De richting van de gravitatiekracht en de richting van de verplaatsing zijn hetzelfde. De gravitatiekracht verricht dus positieve arbeid. Verricht een kracht positieve arbeid, dan neemt de erbij behorende energie af. De gravitatie-energie neemt dus af.

d De snelheid van de capsule bereken je met de formule voor de kinetische energie.
De kinetische energie bereken je met de wet van behoud van energie.

Bij de wet van behoud van energie bepaal je eerst de energievormen die van belang zijn.

A (capsule op aarde)
De capsule heeft een snelheid nodig om richting ISS te kunnen.
De straal van de aarde bepaalt de gravitatie-energie.
De gravitatie-energie en kinetische energie zijn van belang.

B (capsule bij ISS op 342 km hoogte)
De snelheid is dan minstens 0 m s^{-1}.
De hoogte is 342 km boven het aardoppervlak.
Je hoeft geen rekening te houden met weerstandskrachten: er staat minstens.
Dus alleen de gravitatie-energie is van belang.

$$\sum E_{in,A} = \sum E_{uit,B}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + \left(-G \cdot \frac{m \cdot M}{r_A}\right) = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r_B}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot v_A^2 - G \cdot \frac{M}{r_A} = -G \cdot \frac{M}{r_B}$$

$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} (zie BINAS tabel 7)
$M = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (zie BINAS tabel 31)
$r_A = R_{aarde} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m (zie BINAS tabel 31)
$h = 342$ km = $342 \cdot 10^3$ m
$r_B = 6{,}371 \cdot 10^6 + 342 \cdot 10^3 = 6{,}713 \cdot 10^6$ m

$$\tfrac{1}{2} \cdot v_A^2 - 6{,}67383 \cdot 10^{-11} \times \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^6} = -6{,}67383 \cdot 10^{-11} \times \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}713 \cdot 10^6}$$

$v_A = 2{,}29 \cdot 10^3$ m s^{-1}
Afgerond: $v_A = 2{,}3$ km s^{-1}.

e De benodigde bewegingsenergie bereken je met de totale snelheid van de capsule.
De totale snelheid van de capsule bereken je met de snelheid om op 342 km hoogte te komen plus de baansnelheid van ISS.
De baansnelheid van ISS bereken je met de formule voor de baansnelheid.

$$v_{ISS} = \frac{2\pi r}{T}$$

$r = R_{aarde} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m
$T = 92$ min $= 92 \times 60 = 5{,}52 \cdot 10^3$ s

$$v_{ISS} = \frac{2\pi \times 6{,}371 \cdot 10^6}{5{,}52 \cdot 10^3}$$

$v_{ISS} = 7{,}25 \cdot 10^3$ m s^{-1} = 7,3 km s^{-1}

Dat is ongeveer drie keer zo groot als 2,3 km s^{-1}.

$E_k = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$

Vanwege het kwadraat is de kinetische energie om met het ISS mee te vliegen dus negen keer zo groot als de kinetische energie die nodig is om de hoogte van het ISS te halen.
De totale kinetische energie is dus 1 + 9 = 10 keer zo groot.