23 In deze opgave vergelijk je de maan die in een baan om de aarde draait met het model van een elektron dat om de kern van een waterstofatoom beweegt.
In beide systemen geldt voor de kracht $F = \frac{k}{r^2}$.
In het waterstofatoom geldt $k = f \cdot e^2$.
In het aarde-maansysteem geldt $k = G \cdot M_{aarde} \cdot M_{maan}$.
De kracht F houdt het elektron of de maan in een cirkelbaan.
In dit geval kun je afleiden dat voor de snelheid v geldt:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}$$

- v is de snelheid in m s^{-1}.
- k is gelijk aan een van de twee gegeven formules.
- m is de massa van het voorwerp in de cirkelbaan in kg.
- r is de straal van de cirkelbaan in m.

a Leid de vergelijking voor de snelheid v af.

De gemiddelde afstand tussen elektron en waterstofkern is gelijk aan de $5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m.
De gemiddelde afstand tussen aarde en maan is $3{,}84 \cdot 10^{8}$ m.
Het quantumgetal n is de verhouding tussen de debrogliegolflengte en de omtrek van de cirkel. Het waterstofatoom bevindt zich in de grondtoestand ($n = 1$) en de maan in een zeer hoge aangeslagen toestand.

b Toon dat aan.

De energieniveaus van beide systemen worden beschreven door $E_n = -\frac{E_\infty}{n^2}$.
Voor het waterstofatoom geldt $E_\infty = 13{,}6$ eV en voor het aarde-maansysteem geldt $E_\infty = 5{,}66 \cdot 10^{165}$ J. Ondanks de enorme waarde voor E_∞ kan de maan vrijwel elke energiehoeveelheid opnemen of afstaan.

c Leg dit uit.

Opgave 23

a De snelheid leid je af met de formule voor de middelpuntzoekende kracht en de algemene formule voor de kracht.
Bij een eenparige cirkelbeweging is de middelpuntzoekende kracht gelijk aan de algemene kracht. $F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ en $F = \frac{k}{r^2}$

$F_{mpz} = F$

$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{k}{r^2}$.

$v^2 = \frac{k}{m \cdot r}$

$v = \sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}$

b De waarde van n bereken je met de omtrek van de cirkel en de debrogliegolflengte.
De debrogliegolflengte bereken je met de formule voor de debrogliegolflengte.
De snelheid bereken je met de gegeven formule voor snelheid.
De constante k bereken je met de gegeven formule voor k.

Voor het elektron
$k = f \cdot e^2$
$f = 8{,}98755 \cdot 10^{9}$ N m^2 C^{-2} (zie BINAS tabel 7)
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C (zie BINAS tabel 7)
$k = 8{,}98755 \cdot 10^{9} \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^2 = 2{,}30656 \cdot 10^{-28}$ N m^2

$v = \sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}$

$m = m_e = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}$ kg (zie BINAS tabel 7B)
$r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m

Invullen levert: $v = \sqrt{\frac{2{,}3068 \cdot 10^{-28}}{9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times 5{,}29 \cdot 10^{-11}}}$

$v = 2{,}1878 \cdot 10^{6}$ m s^{-1}

$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (zie BINAS tabel 7A)

Invullen levert: $\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{9{,}10938 \cdot 10^{-31} \times 2{,}1878 \cdot 10^{6}} = 3{,}32469 \cdot 10^{-10}$ m

$O = 2\pi r$
$r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m
Invullen levert: $O = 2\pi \times 5{,}29 \cdot 10^{-11} = 3{,}3238 \cdot 10^{-10}$ m

$n = \frac{O}{\lambda}$

$n = \frac{3{,}3238 \cdot 10^{-10}}{3{,}32469 \cdot 10^{-10}} = 0{,}9973$

Afgerond: $n = 1$ (want n is altijd een geheel getal).
$n = 1$ geeft de grondtoestand aan.

Voor de maan
$k = G \cdot M_{aarde} \cdot M_{maan}$
$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^2 (zie BINAS tabel 7A)
$M_{aarde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (zie BINAS tabel 31)
$M_{maan} = 0{,}0735 \cdot 10^{24}$ kg (zie BINAS tabel 31)
$k = 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24} \times 0{,}0735 \cdot 10^{24}$
$k = 2{,}92942 \cdot 10^{37}$ N m^2

$v = \sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}$

$m = M_{maan} = 0{,}0735 \cdot 10^{24}$ kg (zie BINAS tabel 31)
$r = 384{,}4 \cdot 10^{6}$ m

$v = \sqrt{\frac{2{,}92942 \cdot 10^{37}}{0{,}0735 \cdot 10^{24} \times 384{,}4 \cdot 10^{6}}}$

$v = 1{,}01825 \cdot 10^{3}$ m s^{-1}

$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (zie BINAS tabel 7A)

$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{0{,}0735 \cdot 10^{24} \times 1{,}01825 \cdot 10^{3}} =$

$\lambda = 8{,}85333 \cdot 10^{-60}$ m

$O = 2\pi r$
$r = 384{,}4 \cdot 10^{6}$ m
$O = 2\pi \times 384{,}4 \cdot 10^{8} = 2{,}415 \cdot 10^{9}$ m

$n = \frac{O}{\lambda}$

$\lambda = 8{,}86 \cdot 10^{-60}$ m

$n = \frac{2{,}415 \cdot 10^{9}}{8{,}8533 \cdot 10^{-60}} = 2{,}728 \cdot 10^{68}$

Afgerond: $n = 2{,}73 \cdot 10^{68}$.
n is heel groot. Dus dit is een zeer hoge aangeslagen toestand.

c Als n heel groot wordt, wordt het energieverschil tussen opeenvolgende energieniveaus steeds kleiner. Voor de maan is n zeer groot. Dus de maan gaat over naar een ander energieniveau door een zeer kleine energiehoeveelheid op te nemen of af te staan.