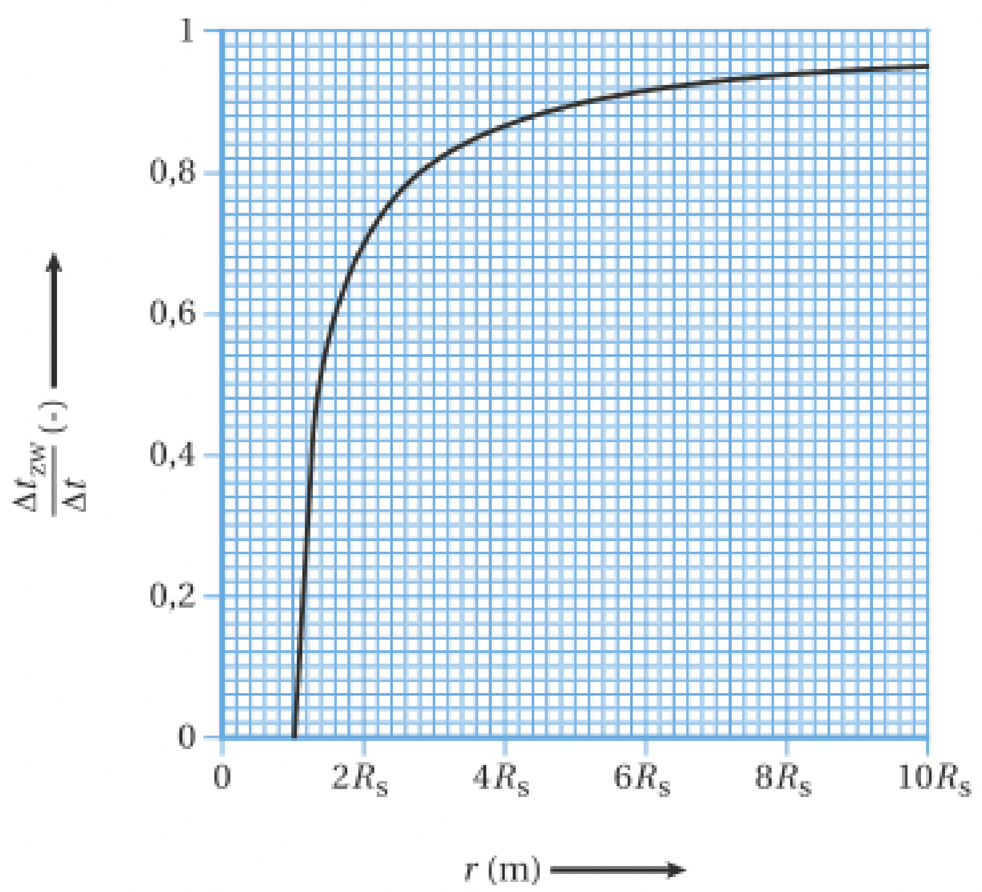
34 Als een ruimtesonde een zwart gat nadert, komt hij in een steeds sterker zwaartekrachtveld. De verhouding tussen de tijdsintervallen gemeten in de sonde en op aarde is $\frac{\Delta t_{zw}}{\Delta t}$. In figuur 58 is deze verhouding uitgezet tegen de afstand tot de kern van het zwarte gat.



Figuur 58

De ruimtesonde zendt regelmatig een signaal naar de aarde met een frequentie van $6{,}5 \cdot 10^8$ Hz.

a Leg uit dat de gemeten frequentie van het signaal op aarde kleiner is dan $6{,}5 \cdot 10^8$ Hz.

Het zwarte gat heeft een massa van $6{,}0 \cdot 10^{35}$ kg.

Als de sonde zich op een bepaalde afstand van de kern van het zwarte gat bevindt, is de gemeten frequentie van het uitgezonden signaal op aarde gelijk aan $4{,}2 \cdot 10^8$ Hz.

b Bepaal op welke afstand dat het geval is.

Passeert de ruimtesonde de schwarzschildstraal, dan wordt op aarde geen signaal meer van de ruimtesonde ontvangen.

c Leg dat uit met behulp van figuur 58.

Opgave 34

a Uit figuur 58 van het katern blijkt dat de verhouding tussen het tijdsinterval gemeten in de sonde en het tijdsinterval gemeten op aarde altijd kleiner is dan 1. Het tijdsinterval dat op aarde wordt gemeten is dus groter dan die in de sonde.
Voor de frequentie geldt $f = \frac{1}{T}$
De gemeten frequentie op aarde is dus kleiner dan $6{,}5 \cdot 10^8$ Hz.

b De afstand tot de kern van het zwarte gat bereken je met de schwarzschildstraal en de verhouding van de tijdsintervallen.
De tijdsintervallen bereken je met de formule voor de frequentie.
De schwarzschildstraal bereken je met de formule voor de schwarzschildstraal.

$R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$
$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} Zie BINAS tabel 7A.
$M = 6{,}0 \cdot 10^{35}$ kg
$c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m s^{-1} Zie BINAS tabel 7A.

$$R_s = \frac{2 \times 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times 6{,}0 \cdot 10^{35}}{(2{,}9979 \cdot 10^8)^2} = 8{,}91 \cdot 10^8 \text{ m}$$

De frequentie is omgekeerd evenredig met de tijd. Er geldt dus:

$$\frac{\Delta t_{zw}}{\Delta t} = \frac{f}{f_{zw}} = \frac{4{,}2 \cdot 10^8}{6{,}5 \cdot 10^8} = 0{,}6461$$

In figuur 58 van het katern lees je dan af: $r = 1{,}7R_S$.
De sonde bevindt zich dus op $1{,}7 \times 8{,}91 \cdot 10^8 = 1{,}51 \cdot 10^9$ m.
Afgerond: $1{,}5 \cdot 10^9$ m.

c Uit figuur 58 uit het katern blijkt dat wanneer de afstand r in de buurt van de schwarzschildstraal R_s komt, de verhouding tussen de tijd aan boord van de sonde en de tijd voor een waarnemer op aarde zeer klein wordt.
Een signaal dat aan boord slechts kort duurt, zal op aarde veel langer duren. Als deze verhouding naar nul gaat, dan duurt het op aarde oneindig lang om een signaal te waarnemen. Het signaal wordt dus niet waargenomen.