22 Een elektron is opgesloten in een energieput met lengte $L = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m. Volgens het model van een deeltje in een energieput heeft het elektron in de grondtoestand een energie van 15 meV.

a Laat dit zien.

b Toon aan dat in de grondtoestand de snelheid van het elektron gelijk is aan $7{,}3 \cdot 10^4$ m s^{-1}.

Stel dat het elektron, elke keer als het bij een uiteinde komt, een kans van 1 op 1 miljard heeft om erdoor te tunnelen.

c Toon aan dat het elektron waarschijnlijk binnen een milliseconde uit de put is. Bereken eerst hoe vaak het elektron in een milliseconde tegen een uiteinde botst.

Als het elektron in de eerste aangeslagen toestand komt, tunnelt het elektron nog gemakkelijker naar buiten. Dit kun je op verschillende manieren uitleggen. Een uitleg is dat de snelheid van het elektron in de aangeslagen toestand groter is en dat het elektron dus vaker tegen de uiteinden botst.

d Leg uit waardoor de snelheid van het elektron groter is.

Een andere uitleg heeft te maken met de hoogte van de energiebarrière. Stel dat de energiebarrière voor het elektron 15 eV is.

e Leg uit waarom de kans om te tunnelen groter is als het elektron in een aangeslagen toestand is.

Als de energiebarrière voor het elektron hetzelfde blijft, maar je maakt de ruimte waar het elektron kan bewegen tien keer zo groot, dan is de kans op tunnelen minder groot.

f Noem hiervoor een reden. Licht je antwoord toe.

Opgave 22

a De energie van het deeltje in een energieput bereken je met de formule voor de energie van een deeltje in een eendimensionale energieput.

$$E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$$

$n = 1$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (zie BINAS tabel 7)
$m = m_e = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}$ kg (zie BINAS tabel 7)
$L = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m

$$E_1 = 1^2 \cdot \frac{(6{,}6260 \cdot 10^{-34})^2}{8 \times 9{,}10938 \cdot 10^{-31} \times (5{,}0 \cdot 10^{-9})^2}$$

$E_1 = 2{,}4098 \cdot 10^{-21}$ J

Dit komt overeen met $\frac{2{,}4098 \cdot 10^{-21}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 0{,}01504$ eV .

Afgerond: 15 meV.

b De snelheid bereken je met de formule van de debrogliegolflengte.
De golflengte bereken je met de voorwaarde voor een staande golf met twee vaste uiteinden.

$$L = n \cdot \tfrac{1}{2}\lambda$$

$L = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m
$n = 1$
$5{,}0 \cdot 10^{-9} = 1 \times \tfrac{1}{2}\lambda$
$\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ m

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}.$$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (zie BINAS tabel 7A)
$m = m_e = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}$ kg (zie BINAS tabel 7B)

$$1{,}0 \cdot 10^{-8} = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{9{,}10938 \cdot 10^{-31} \cdot v}$$

$v = 7{,}2738 \cdot 10^4$ m s^{-1}
Afgerond: $v = 7{,}3 \cdot 10^4$ m s^{-1}.

c Hoe vaak het elektron in een milliseconde tegen de wanden botst bereken je met de tijd die het kost om de lengte van de energieput over te steken.
De oversteektijd bereken je met de formule voor de verplaatsing bij een eenparige beweging.

$s = v \cdot t$
$s = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m
$v = 7{,}3 \cdot 10^4$ m s^{-1}
$5{,}0 \cdot 10^{-9} = 7{,}3 \cdot 10^4 \cdot t$
$t = 6{,}849 \cdot 10^{-14}$ s

Het elektron steekt dus elke $6{,}849 \cdot 10^{-14}$ s over.

Dan zijn er $\frac{1}{6{,}849 \cdot 10^{-14}} = 1{,}46 \cdot 10^{13}$ oversteken per seconde, oftewel 15 miljard oversteken per milliseconde. Bij elke oversteek is er een botsing met een uiteinde.

Met een kans van 1 op 1 miljard is de kans dus zeer klein dat het deeltje na 15 miljard oversteken nog in de energieput zit.

d Dat de snelheid groter is, beredeneer je met de formule voor de kinetische energie.
Bij een aangeslagen toestand hoort een grotere energie. Een deeltje dat tussen de wanden van een energieput beweegt heeft alleen maar kinetische energie. Dus is de kinetische energie in een aangeslagen toestand groter.

$$E_k = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$

Als E_k groter is en de massa is niet veranderd, dan is de snelheid groter.

e Dat de kans op tunnelen groter is, beredeneer je met het energietekort.
In een aangeslagen toestand is de energie groter dan 15 meV. De energie van de barrière blijft 15 eV. Het energietekort (het verschil tussen de energie in de aangeslagen toestand en de hoogte van de barrière) is dus kleiner. Als het energietekort kleiner, is de kans om te tunnelen groter.

f Als de barrières verder uit elkaar staan, is de tijd die een elektron nodig heeft om over te steken ook groter. Er zijn dus minder botsingen met de wand.

Bovendien geldt $E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$. Omdat h en m dezelfde waarde houden, is de energie in de grondtoestand omgekeerd evenredig met L^2. Hoe groter L, hoe kleiner de energie van het deeltje is. Het verschil tussen de energie van het systeem en de hoogte van de barrière is dan groter. De kans om uit de energieput te tunnelen is dan kleiner.