

Sommaire

1	Le radiateur	1
1.1	Modéliser la situation	1
1.1.1	Modélisation mathématique du modèle physique	1
1.1.2	Détermination du champ de vitesse	2
1.1.3	Conditions initiales	2
1.1.4	Conditions au bord	2
1.2	Discretisation de l'équation - Différences finies	2
1.2.1	Schéma spatiale	2
1.2.2	Schéma temporelle	3
1.3	Algorithmique	3
1.3.1	Analyse de la complexité	3
1.4	Mise en oeuvre informatique	3
1.5	Vérification	3
1.6	Validation	3
1.7	Conclusion	3

Chapitre 1

Le radiateur

Il est possible de viser une température cible qui sera ressentie comme confortable par une grande majorité de personnes. Cette température idéale a d'ailleurs pu être évaluée très exactement à 19°C par l'ADEME¹. L'agence recommande cette température pour toutes les pièces à vivre de la maison ainsi que pour les appartements en copropriété. En l'hiver, il peut être nécessaire de réchauffer les pièces de vie de la maison pour assurer un confort optimale. On utilise généralement un radiateur pour augmenter la température d'une pièce, en utilisant un phénomène de transport thermique appelé la convection naturelle thermique.

1.1 Modéliser la situation

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs intensives telles que la température ("convection thermique") ou bien la concentration d'un soluté ("convection solutale"). La masse volumique dépendant de la température, un gradient de température ou de concentration engendre des différences de masse volumique au sein du fluide, d'où résultent des variations latérales de la poussée d'Archimède qui sont à l'origine du mouvement. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection.

Ainsi, le transfert d'énergie depuis le système chaud engendre des variations locales de densité qui se traduisent par des mouvements d'ensemble du fluide, du "chaud" vers le "froid". C'est le plus efficace dans les fluides. Ainsi, le radiateur augmente la température d'une pièce en étant une source de chaleur. Ce transfert d'énergie est réalisé par deux modes de transfert élémentaire combinés que sont l'advection et la diffusion.

Il est temps de modéliser mathématiquement ce phénomène physique

1.1.1 Modélisation mathématique du modèle physique

La forme générale de l'équation différentielle de transfert de chaleur par convection est généralement exprimée comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha \Delta T$$

où :

- T est la température
- \vec{u} est la vitesse du fluide
- α est la diffusivité thermique

¹Agence de l'environnement et de la maîtrise de l'énergie : autorité administrative française en charge des questions de performance thermique

L'opérateur advection correspond au produit scalaire du vecteur vitesse \vec{u} par le vecteur gradient nabla $\vec{\nabla}$. En coordonnées cartésiennes en , on a

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Ainsi, pour trouver une solution à cette équation, il est nécessaire de déterminer le champ de vitesse \vec{u} . Pour déterminer le champ de vitesse, on doit normalement résoudre les équations de Navier-Stokes, ce qui est coûteux en termes de temps de calcul. Pour autant, on peut tirer partie du fait que l'expérience se fait dans des conditions spécifiques.

1.1.2 Détermination du champ de vitesse

La vitesse de l'air augmente l'évaporation à la surface de la peau ce qui entraîne une sensation désagréable (à un certain seuil).

La vitesse idéale de déplacement de l'air est de $0.13m/s$ (pour les personnes assises). On considère souvent que dans une habitation, la vitesse de déplacement d'air est négligeable s'il ne dépasse pas $0.2m/s$ (\implies se promener à $1km/h$ = déplacement d'air de $0.3m/s$).

Pour calculer la vitesse maximale d'air dans une pièce u , on a $u = \frac{Q}{S}$ où:

- V le volume d'air disponible en m^3 , volume qu'on peut obtenir à partir des dimensions de la pièce de vie
- T_r le renouvellement de l'air en h^{-1} :

$$T_r = \frac{\text{Debit d'air neuf } (m^3/h)}{\text{Volume du local } (m^3)}$$

. Exemple: toutes les 20 minutes $\implies T_r = 3$

- Q le débit de l'air en m^3/h tel que

$$Q = V \times T_r$$

On considère dans une pièce de vie qu'un humain marche à une vitesse de $2 m/s$

1.1.3 Conditions initiales

On considère, lorsqu'on allume le radiateur, que la température de la pièce est uniforme sur toute la pièce. Dans l'énoncé de notre problème, on prend en considération la saison, donc on va prendre la température extérieure moyenne au mois de janvier. On considère aussi que la température extérieure sera égale à la température à l'intérieur de la pièce. Ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y) = 4^\circ C$$

1.1.4 Conditions au bord

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T(\pm a, \pm b, t) = T_{ext}$$

1.2 Discrétisation de l'équation - Différences finies

1.2.1 Schéma spatiale

On utilise la formule de Taylor-Young pour obtenir :

Suivant les y :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T(x_i, y_j, t_n) - T(x_i, y_{j-1}, t_n)}{\Delta y} = \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n}{\Delta y}$$

(schéma décentré à gauche, d'ordre 1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T(x_i, y_{j+1}, t_n) - 2T(x_i, y_j, t_n) + T(x_i, y_{j-1}, t_n)}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}$$

(centré, d'ordre 2)

Suivant les x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x_i, y_j, t_n) - T(x_{i-1}, y_j, t_n)}{\Delta x} = \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta x}$$

(schéma décentré à gauche, d'ordre 1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x_{i+1}, y_j, t_n) - 2T(x_i, y_j, t_n) + T(x_{i-1}, y_j, t_n)}{(\Delta x)^2} = \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

(centré, d'ordre 2)

1.2.2 Schéma temporelle

Pour obtenir la solution au temps t_n , on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x_i, y_j, t_{n+1}) - T(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

(schéma décentré à droite, d'ordre 1)

1.3 Algorithmique

1.3.1 Analyse de la complexité

1.4 Mise en oeuvre informatique

On fait le choix d'implémenter le code en langage Python. Le code sera mis à disposition dans le dossier Github sous peu et prêt à l'emploi.

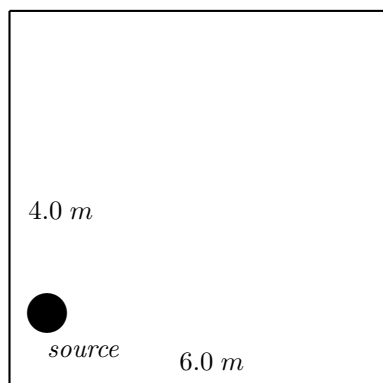
```

1 import numpy as np
2
3 def incmatrix(genl1, genl2):
4     m = len(genl1)
5     n = len(genl2)
6     M = None #to become the incidence matrix
7     VT = np.zeros((n*m, 1), int) #dummy variable

```

Listing 1.1: Python example

1.5 Vérification



1.6 Validation

1.7 Conclusion