Caja de Herramientas: Espacios Métricos e Inequidades

Resumen

Espacio métrico	Un par (X, d) donde $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ cumple: (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, (iii) **desigualdad triangular** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
Bolas y topología	*Bola abierta*: $B(x, r) = \{y : \ d(x, y) < r\}$. *Bola cerrada*: $\overline{B}(x, r) = \{y : \ d(x, y) \leq r\}$. Los abiertos son uniones de bolas abiertas.
Cierre / interior / frontera	$x \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \ B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. $\operatorname{int}(A) = \{x : \ \exists r > 0, \ B(x, r) \subset A\}$. $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$.
Convergencia	$x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N : \ d(x_n, x) < \varepsilon$. **Caracterización de cierre**: $\overline{A} = \{x : \ \exists (a_n) \subset A, \ a_n \to x\}$.
Continuidad	$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Equivalente: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.
Ineq. triangular (básica)	$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (toda métrica). **Iterada**: $d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k)$.
Ineq. triangular inversa	$\lvert d(x, z) - d(y, z) \rvert \leq d(x, y)$ (toda métrica). Consecuencia: $\lvert d(x, A) - d(y, A) \rvert \leq d(x, y)$.
Distancia a un conjunto	$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ (convención $d(x, \varnothing) = +\infty$). Propiedades clave: • $0 \leq d(x, A) \leq d(x, a)$ para todo $a \in A$. • $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$. • **1-Lipschitz**: $\lvert d(x, A) - d(y, A) \rvert \leq d(x, y)$. • Si A es cerrado y $d(x, A) > 0$, entonces $B(x, d(x, A)) \cap A = \varnothing$.
Diámetro	$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Si $A \subset B$, entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$. Si f es L-Lipschitz, $\operatorname{diam}(f(A)) \leq L \operatorname{diam}(A)$.
Aplicaciones Lipschitz	f es L-Lipschitz si $d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x, y)$. Si $L < 1$ (contracción) $\Rightarrow$ punto fijo de Banach (en completos).
Secuencias de Cauchy	(x_n) es Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Toda convergente es Cauchy; en espacios **completos**, toda Cauchy converge.
Compacidad (métricos)	En métricos: *compacto* $\Leftrightarrow$ *secuencialmente compacto* $\Leftrightarrow$ *totalmente acotado + completo*. Totalmente acotado: para todo $\varepsilon > 0$ existe recubrimiento finito por bolas de radio ε.
Métricas producto	Si d_i son métricas en X_i, en $X_1 \times X_2$: $d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$, $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Ambas inducen la topología producto.

Caja de Herramientas Topológicas

Definiciones clave

- **Vecindario:** V es vecindario de x si existe un abierto U con $x \in U \subseteq V$.
- **Punto límite:** x es punto límite de A si
$$\forall U \text{ abierto con } x \in U, \quad (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$
- **Clausura:** $\overline{A} = A \cup A'$ (conjunto más todos sus puntos límite).
- **Interior:**
$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A : \exists U \text{ abierto, } x \in U \subseteq A\}.$$
- **Frontera:**
$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Propiedades de la clausura

- Extensividad: $A \subseteq \overline{A}$.
- Idempotencia: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- Monotonía: $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
- Cerrado mínimo: $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.
- Intersección: $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
- Diferencia: $\overline{A \setminus B} \subseteq \overline{A} \setminus \operatorname{int}(B)$.

Propiedades del interior

- Contractividad: $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.
- Idempotencia: $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$.
- Monotonía: $A \subseteq B \implies \operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$.
- Abierto máximo: $\operatorname{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.
- Unión: $\operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

Relaciones importantes

- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
- $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$.
- $\mathrm{int}(A) = A \setminus \partial A$.
- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$.

Checklist para demostraciones

Probar que un conjunto es cerrado

1. Usar la definición: A es cerrado si contiene todos sus puntos límite o si $\overline{A} = A$.
2. Tomar un punto límite x de A.
3. Mostrar que $x \in A$.
4. Concluir: A es cerrado.

Probar que un conjunto es abierto

1. Definición: U es abierto si $\forall x \in U, \exists V$ abierto con $x \in V \subseteq U$.
2. Tomar $x \in U$.
3. Construir un vecindario abierto dentro de U.
4. Concluir: U es abierto.

Trabajar con clausura

1. Recordar: $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.
2. Para inclusiones: tomar $x \in \overline{A \cap B}$ y usar vecindarios.
3. Deducir que $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Trabajar con interior

1. Tomar $x \in \operatorname{int}(A)$.
2. Usar que $\exists U$ abierto con $x \in U \subseteq A$.
3. Encadenar inclusiones según el objetivo.

Trabajar con frontera

1. Tomar $x \in \partial A$.
2. Usar: todo abierto $U \ni x$ toca A y $X \setminus A$.
3. Concluir: $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.