§ 6. Jordan 標準形（べき零行列の場合）

輪講 #3

2025-03-08

べき零行列

べき零行列

- 正方行列 N が**べき零**であるというのは，$N^k = O$ となるような k が存在すること．

例: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零．

定理 6.1: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零 $\Leftrightarrow$ N のすべての固有値が 0.

Proof:

($\Rightarrow$) 固有値 λ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に N を左から然るべき回数掛けると，
$\mathbf{0} = N^k\boldsymbol{v} = \lambda^k\boldsymbol{v}$ より $\lambda = 0$.

($\Leftarrow$) 固有多項式は $\phi_N(x) = x^n$. Cayley-Hamilton の定理より $N^n = O$.

□

Remark 対角化可能なべき零行列は零行列に限る．

べき零行列のべきの上界

定理 6.2: $N \in M_n(\mathbb{C})$ をべき零行列とする． k を $N^k = O$ となる最小の自然数とすると，$k \leq n$.

Proof: $N^{k-1} \neq O$ より $N^{k-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ がとれる．

Claim $\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x}, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}$ は一次独立．

- 線型関係式 $\sum_{0 \leq i < k} c_i N^i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える．
- 両辺に N^{k-1} を左から掛けることで $c_0 = 0$ を得る．
- 同様に $N^{k-2}, \cdots, N, I$ を左から掛けることで線型関係式が自明であることがいえる．

したがって，特に $k \leq n$ がいえる． □

べき零行列の Jordan 標準形

Jordan 細胞，Jordan 標準形

定義 6.1: $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次の $J(\lambda; n)$ を **Jordan 細胞**という：

$$J(\lambda; n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Jordan 細胞を用いて，次のように表される正方行列を **Jordan 標準形** という：

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & & \\ & J(\lambda_2; m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix} \in M_{m_1 + \cdots + m_r}(\mathbb{C}).$$

べき零行列の Jordan 標準形の存在定理

定理 6.3: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零行列ならば，ある正則な $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在し，

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0;m_1) & & & \\ & J(0;m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0;m_r) \end{pmatrix}.$$

証明の流れはおおまかには次のようになる：

1. べき零行列 N には，増大列 $\{\mathbf{0}\} \subsetneq \operatorname{Ker} N \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} N^k = \mathbb{C}^n$ が付随する．
2. 増大列に“沿う”ようにして，都合の良い基底をとっていく．
3. A をこの基底で取り換えると Jordan 標準形になっている．

Setup

$N = O$ なら始めから Jordan 標準形になっているので，以下では $N \neq O$ とする．

- k を，$N^k = O$ となるような最小の自然数とする．$\rightsquigarrow 2 \leq k \leq n$.
- $W_j = \operatorname{Ker} N^j$ を "j 次の Kernel" と呼ぶことにする（これは一般的でない名称）．

次のような増大列をイメージする：

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

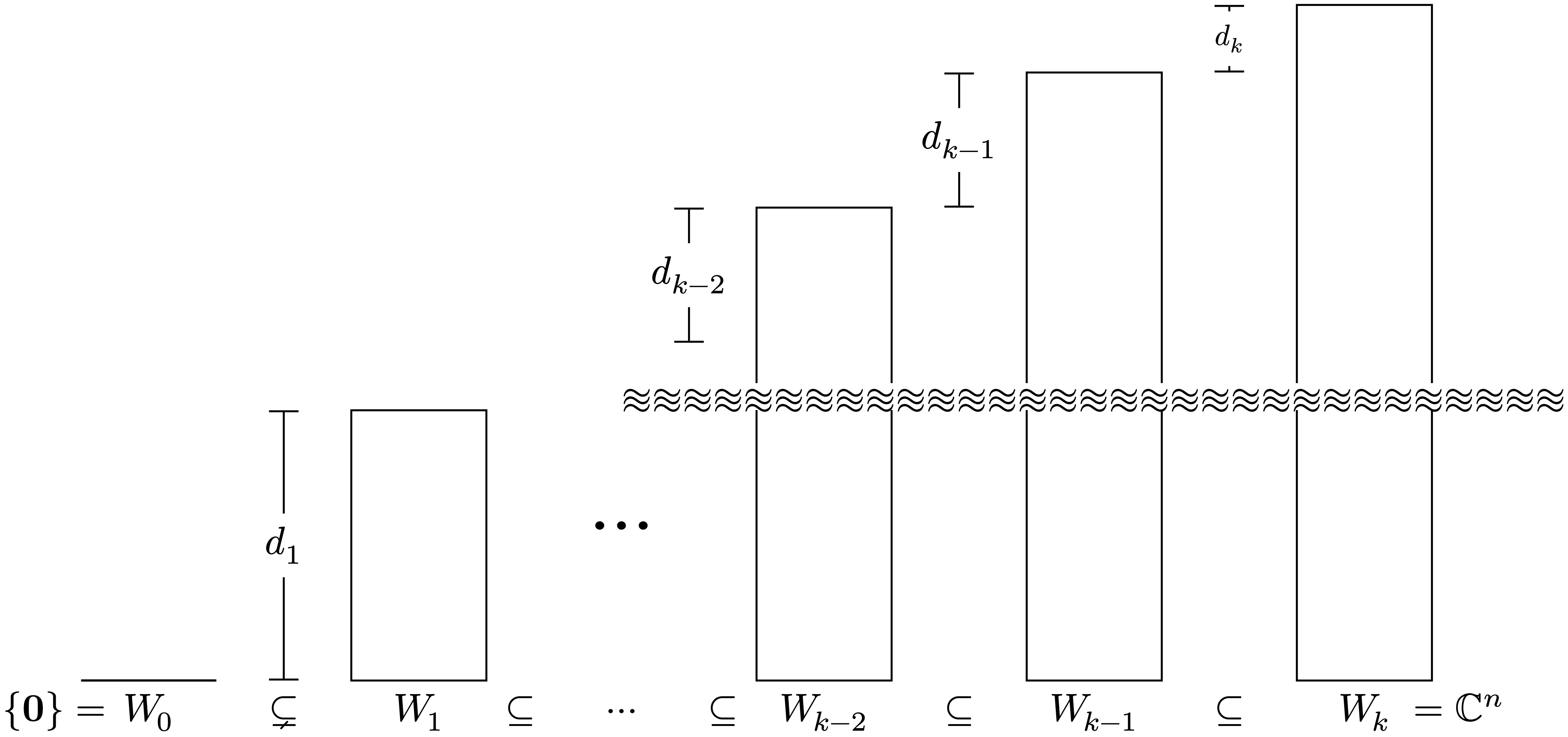
N は正則でない ($\because N$ **の固有値はすべて** $0 \rightsquigarrow \det N = 0$) から，

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

- $1 \leq j \leq k$ について $d_j = \dim W_j - \dim W_{j-1}$ とすると，d_j はつねに非負．
  - $\rightsquigarrow \sum_{j=1}^{k} d_j = \dim \mathbb{C}^n - \dim\{\mathbf{0}\} = n$.

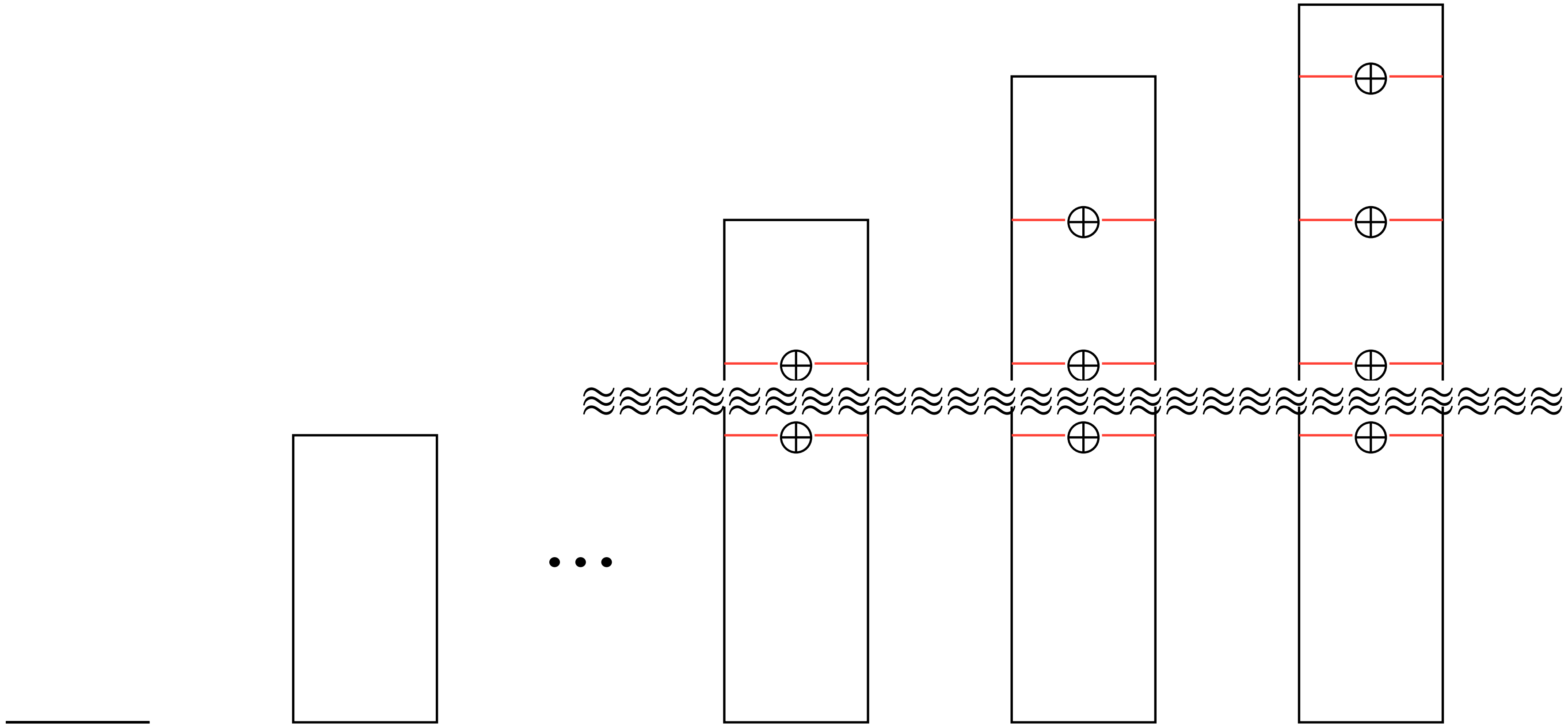
Remark 一般に，線型空間の増大列のことを**旗 flag** という．

増大列の様子


d_1
d_{k-2}
d_{k-1}
d_k
$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-2} \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n$

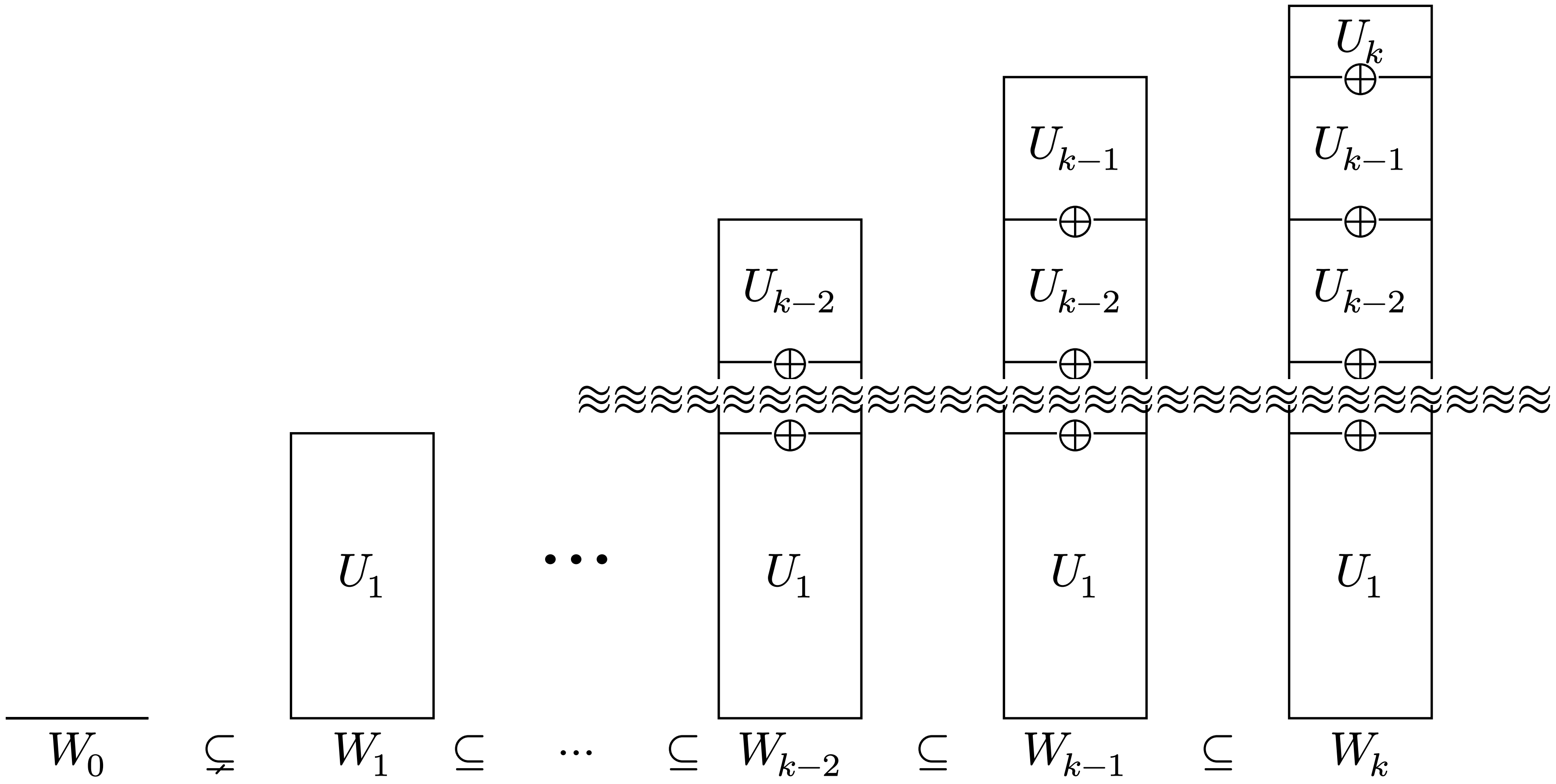
増大列の直和分割

Remark V の部分空間 W に対して，$V = W \oplus \widetilde{W}$ なる $\widetilde{W}$ が存在する．



$$W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-2} \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k$$

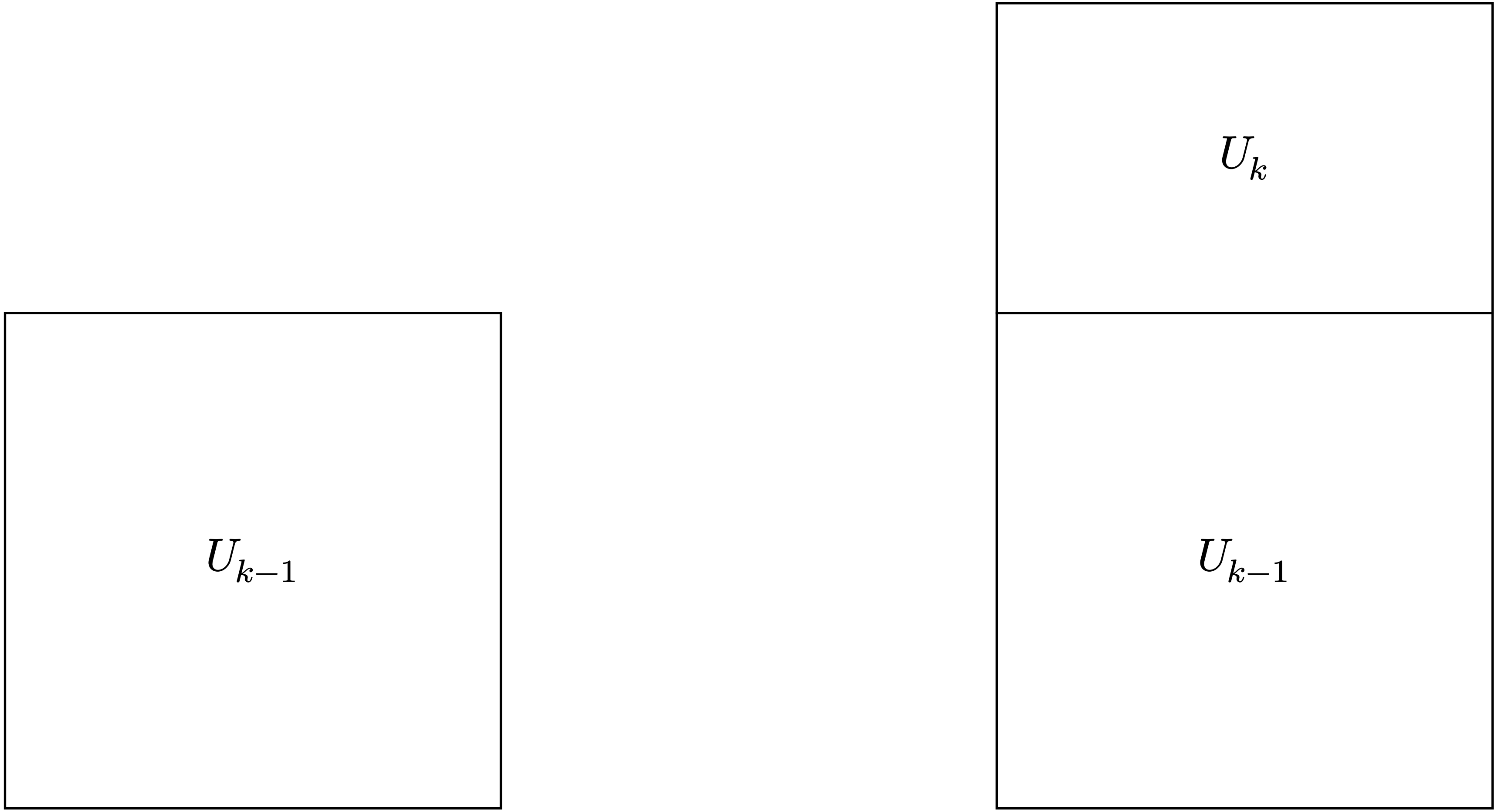
直和分解の因子に名前をつける



Check! $U_j = W_j / W_{j-1}$ **は“N^j でやっと 0 になる”ベクトル全体によって張られる部分空間．**

W_{k-1}, W_k の上段を抜粋

これから増大列から基底をとっていくので，基底がとれた部分に色を塗っていく．



U_k の基底 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$

線型独立な $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k} \in U_k$ によって W_{k-1} の基底を延長して W_k の基底とする．

Claim N **の** U_k **への制限は，単射** $N|_{U_k} : U_k \to U_{k-1}$ **として well-defined．**

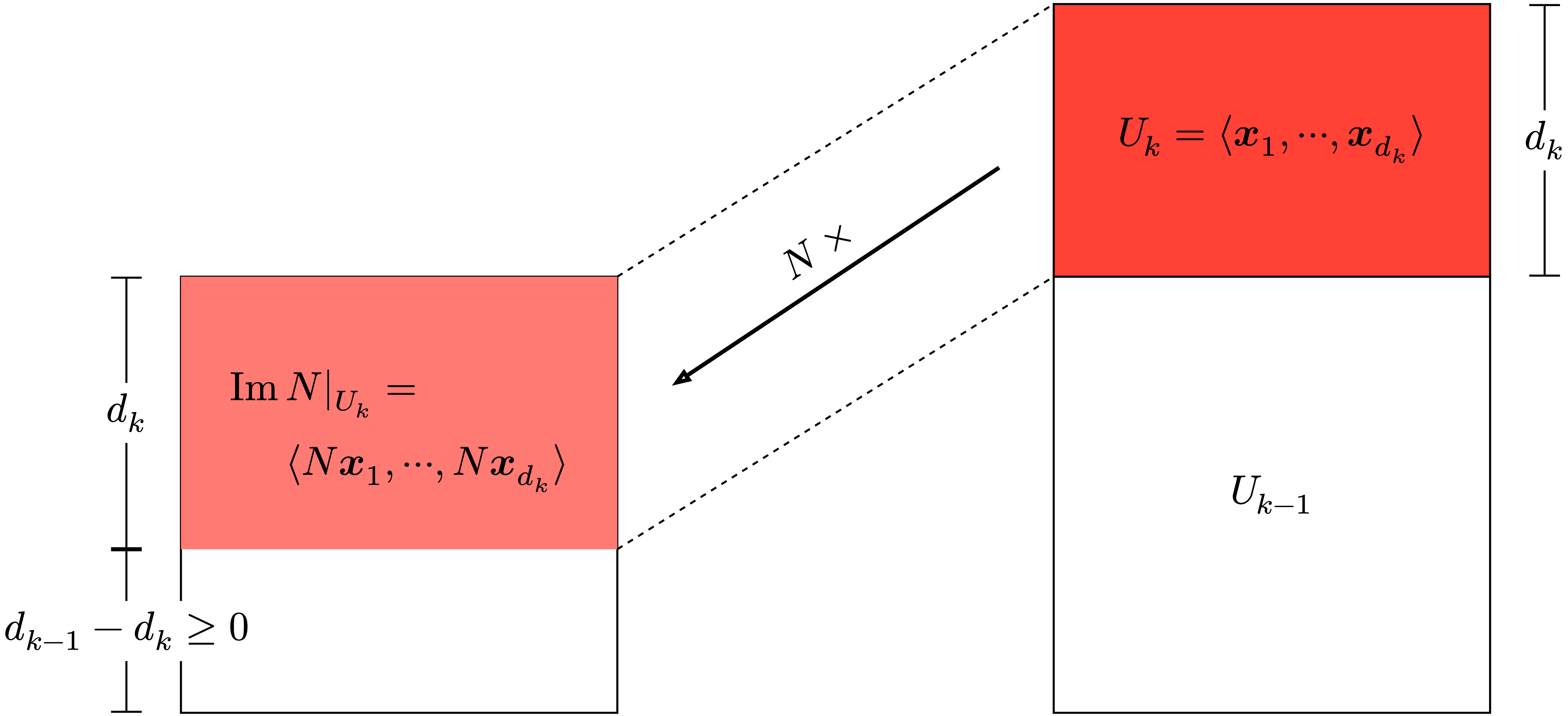
$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$ が次の条件を満たしていることを示せばよい：

1. $\langle N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k} \rangle \subseteq U_{k-1}$.
   - $\boldsymbol{x}_j$ は "N^k でやっと $\mathbf{0}$ になる"から，$N\boldsymbol{x}_j$ は "N^{k-1} でやっと $\mathbf{0}$" になる．
2. $N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}$ は線型独立．
   - $\sum_j c_j N\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0} \Rightarrow N\left(\sum_j c_j \boldsymbol{x}_j\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_j c_j \boldsymbol{x}_j \in W_1 \Rightarrow \sum_j c_j \boldsymbol{x}_j \in W_{k-1}$.
   - もし $\sum_j c_j \boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0}$ であれば $\boldsymbol{x}_j \notin W_{k-1}$ に矛盾するので，$\sum_j c_j \boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$.
   - $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$ は線型独立だったから $c_1 = \cdots = c_{d_k} = 0$.

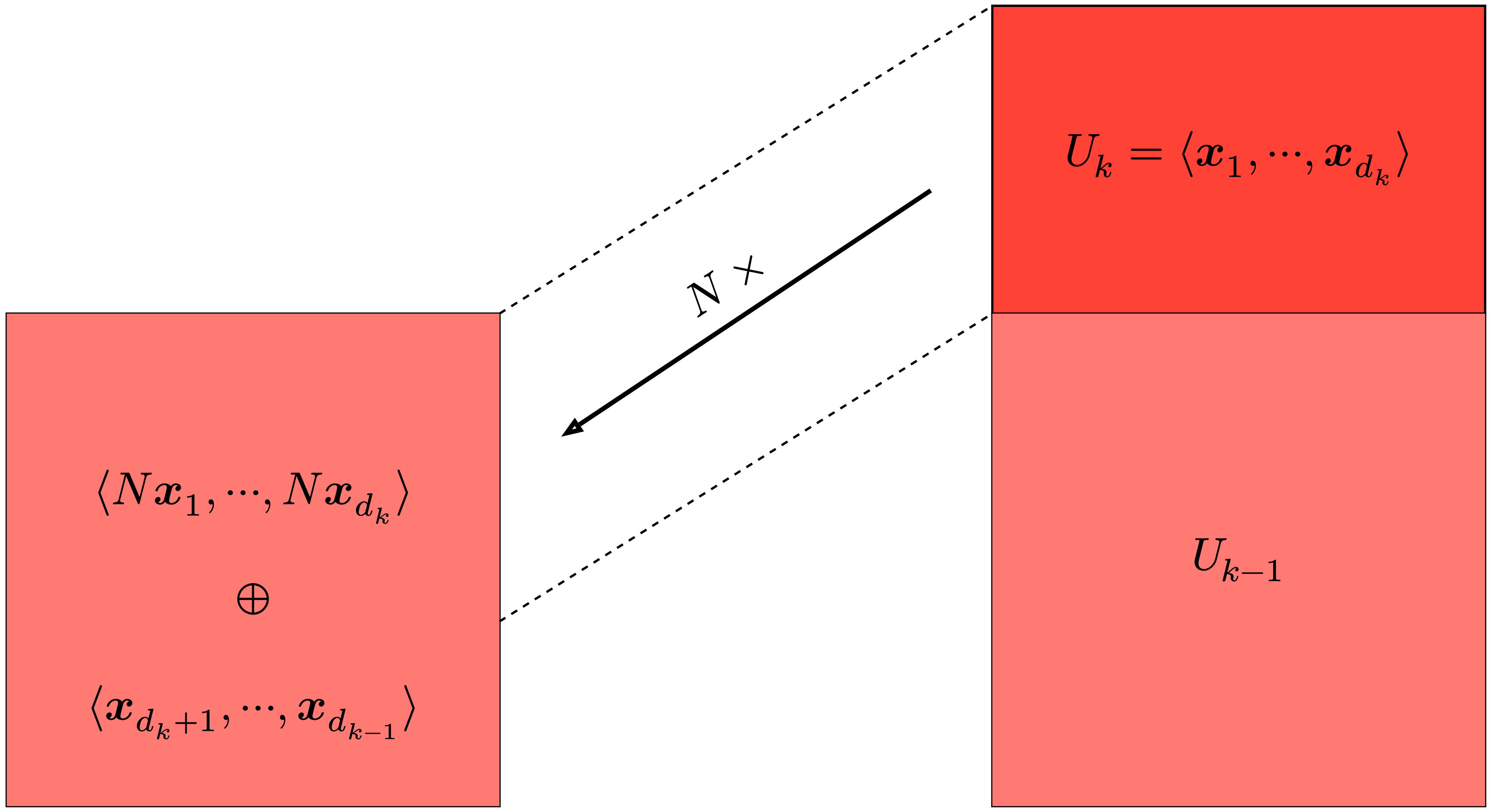
Check! $U_k = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k} \rangle$ 上の N の像 $\operatorname{Im} N|_{U_k} = \langle N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k} \rangle$ は**退化しない**．

$\operatorname{Im} N|_{U_k} \subseteq U_{k-1}$ の様子

色が濃い方が $\mathbf{0}$ から遠くて頑固なイメージ．N を適用する度に薄くなる．



余った部分の基底をとる



W_{k-2} の上段でも同様の現象が起こる

U_{k-1} の基底は $N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}, \boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ になっている．

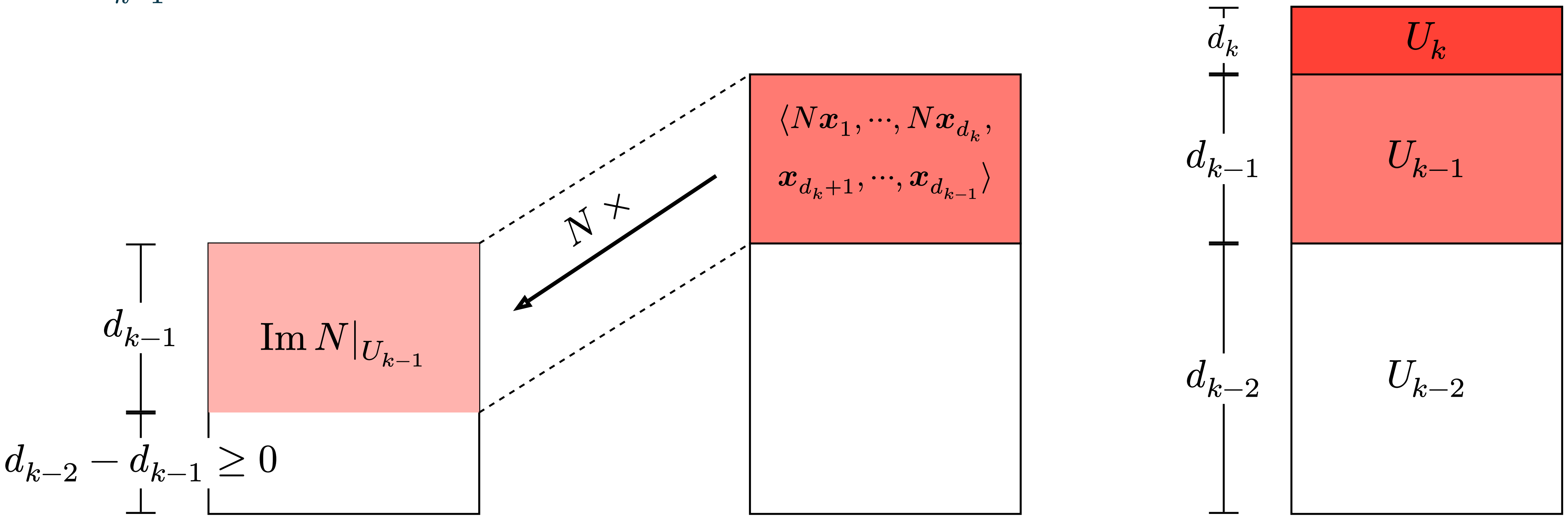
先程と全く同じように，$N|_{U_{k-1}} : U_{k-1} \to U_{k-2}$ は単射として well-defined であることが示される．つまり，

1. $\operatorname{Im} N|_{U_{k-1}} = \langle N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{d_k}, N\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} \rangle \subseteq U_{k-2}$.
2. $N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{d_k}, N\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ は一次独立．

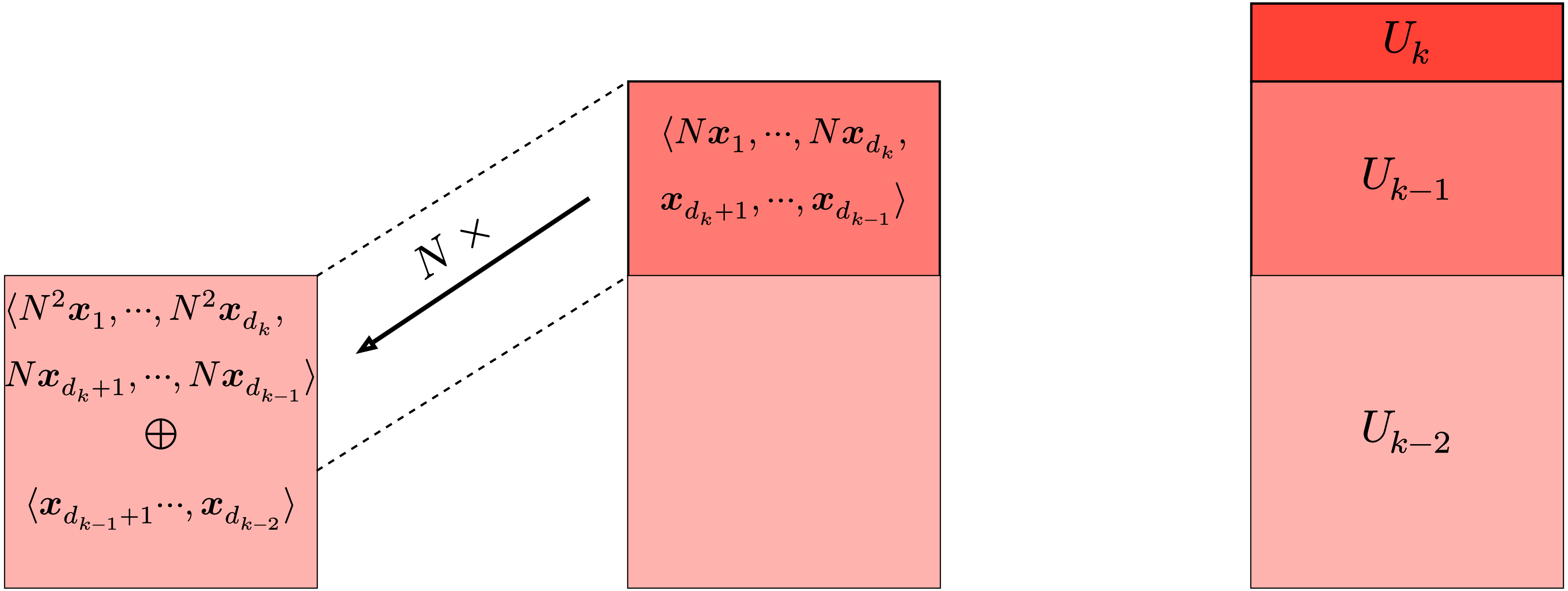
より一般に，各 j に対して，次の命題が示される．

N の U_j への制限は，単射 $N|_{U_j} : U_j \to U_{j-1}$ として well-defined.

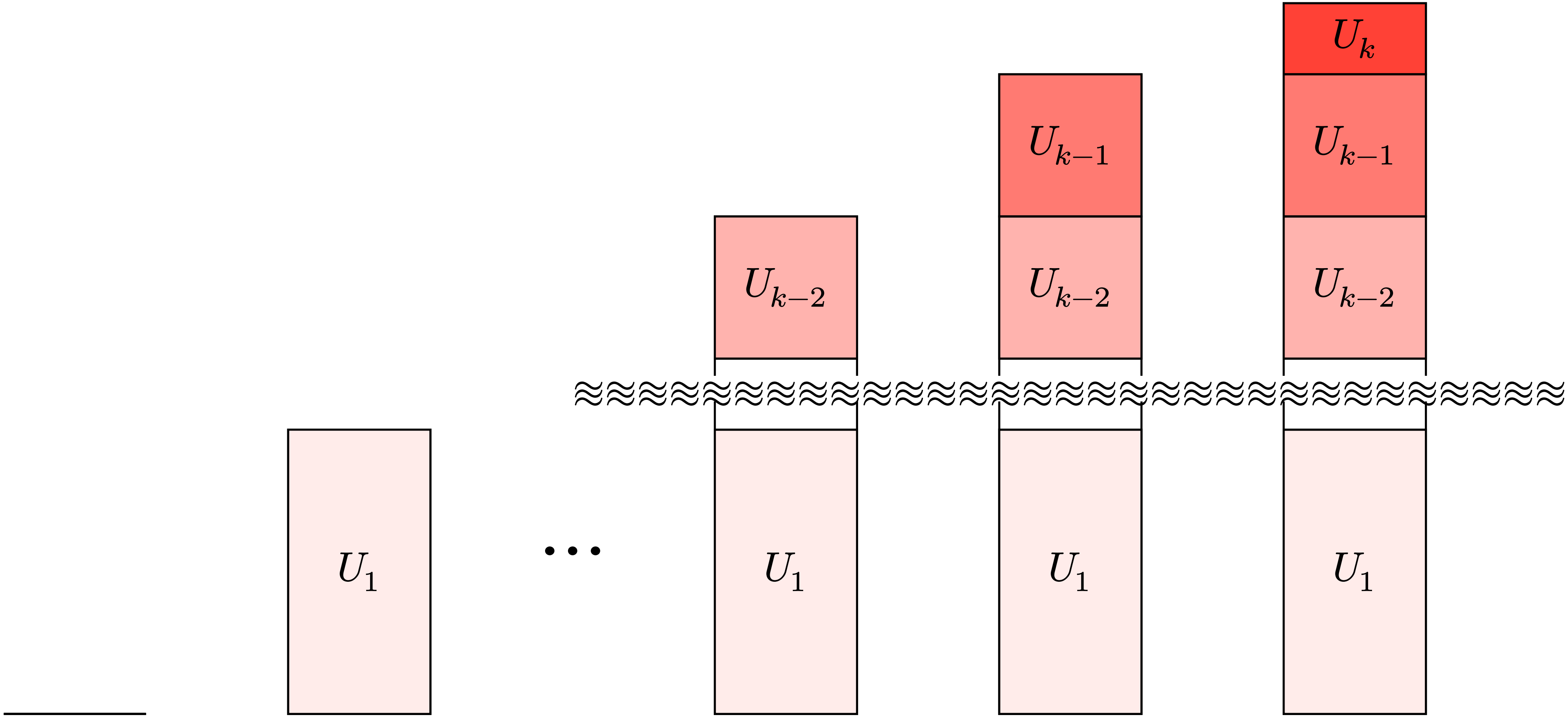
$\operatorname{Im} N|_{U_{k-1}} \subseteq U_{k-2}$ の様子



例によって余った部分の基底をとる



増大列再訪



$$W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-2} \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k$$

$\mathbb{C}^n$ の基底

以上のような操作を繰り返すことにより $\mathbb{C}^n = W_k = U_k \oplus \cdots \oplus U_1$ の基底をとることができる．

U_k の基底	$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$			
U_{k-1} の基底	$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}$	$\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
U_1 の基底	$N^{k-1}\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}_{d_k}$	$N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{x}_{d_2+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_1}$

視点の転換：“seed” が生成する基底たち

“余った部分”でとった基底 $\boldsymbol{x}_l$ を seed と呼ぶことにする．

$\rightsquigarrow d_j + 1 \leq l \leq d_{j-1}$ なら，$\boldsymbol{x}_l \in U_j$ は “レベル j の seed”．

$$\begin{array}{llll}
U_k \text{ の基底} & \boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{d_k} & & \\
& \quad\downarrow N & & \\
U_{k-1} \text{ の基底} & N\boldsymbol{x}_1,\cdots,N\boldsymbol{x}_{d_k} & \boldsymbol{x}_{d_k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} & \\
& \quad\downarrow N & \quad\downarrow N & \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \ddots \\
& \quad\downarrow N & \quad\downarrow N & \\
U_1 \text{ の基底} & N^{k-1}\boldsymbol{x}_1,\cdots,N^{k-1}\boldsymbol{x}_{d_k} & N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_k+1},\cdots,N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} & \cdots \quad \boldsymbol{x}_{d_2+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{d_1}
\end{array}$$

レベル j の seed $\boldsymbol{x}_l$ は長さ j のベクトルの系列を生成する．

$$\boldsymbol{x}_l \xmapsto{N} N\boldsymbol{x}_l \xmapsto{N} \cdots \xmapsto{N} N^{j-1}\boldsymbol{x}_l \xmapsto{N} N^j\boldsymbol{x}_l = \mathbf{0}$$

$P_{j,l}$ の構成

レベル j の seed $\boldsymbol{x}_l$ は，一次独立なベクトルの列を生成している．

$$\boldsymbol{x}_l \to N\boldsymbol{x}_l \to \cdots \to N^{j-1}\boldsymbol{x}_l (\to N^j\boldsymbol{x}_l = \boldsymbol{0}).$$

これを並べることで，$n \times j$ 行列 $P_{j,l}$ をとる．

$$\begin{aligned} P_{j,l} &= \begin{pmatrix} N^{j-1}\boldsymbol{x}_l & N^{j-2}\boldsymbol{x}_l & \cdots & N\boldsymbol{x}_l & \boldsymbol{x}_l \end{pmatrix}. \\ \rightsquigarrow NP_{j,l} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & N^{j-1}\boldsymbol{x}_l & \cdots & N^2\boldsymbol{x}_l & N\boldsymbol{x}_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N^{j-1}\boldsymbol{x}_l & N^{j-2}\boldsymbol{x}_l & \cdots & N\boldsymbol{x}_l & \boldsymbol{x}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P_{j,l} J(0; j). \end{aligned}$$

Check! $P_{j,l}$ は，レベル j の seed $\boldsymbol{x}_l$ による長さ j のベクトル列を並べたもの．

P の構成

次のようにして $P_{j,l}$ を並べることで，$n \times n$ 行列 P を構成する．

$$P = \begin{pmatrix} P_{k,1} & \cdots & P_{k,d_k} & \cdots & P_{1,d_2+1} & \cdots & P_{1,d_1} \end{pmatrix}.$$

結局先程の基底を並べかえているだけなので，P は当然正則．

$$\begin{aligned}
NP &= \begin{pmatrix} NP_{k,1} & \cdots & NP_{k,d_k} & \cdots & NP_{1,d_2+1} & \cdots & NP_{1,d_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_{k,1}J(0;k) & \cdots & P_{k,d_k}J(0;k) & \cdots & P_{1,d_2+1}J(0;1) & \cdots & P_{1,d_1}J(0;1) \end{pmatrix} \\
&= \overbrace{\begin{pmatrix} P_{k,1} & \cdots & P_{k,d_k} & \cdots & P_{1,d_2+1} & \cdots & P_{1,d_1} \end{pmatrix}}^{P} \begin{pmatrix} J(0;k) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J(0;k) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & J(0;1) & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(0;1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

以上より，N と相似な Jordan 標準形の存在が示された．

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0;k) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(0;k) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(0;1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(0,1) \end{pmatrix}.$$

Jordan 細胞の分布は d_j の分布によって定まる．

$\rightsquigarrow$ サイズ j の Jordan 細胞の個数：

$$\begin{aligned} d_j - d_{j+1} &= \bigl(\dim W_j - \dim W_{j+1}\bigr) - \bigl(\dim W_{j-1} - \dim W_j\bigr) \\ &= \operatorname{rank} N^{j-1} - 2 \operatorname{rank} N^j + \operatorname{rank} N^{j+1}. \end{aligned}$$

余談：主格転倒

Question $P = \begin{pmatrix} P_{k,1} & \cdots & P_{k,d_k} & \cdots & P_{1,d_2+1} & \cdots & P_{1,d_1} \end{pmatrix}$ は本当に $n \times n$ になっているのか？

- P を構成する行列のうち，サイズが $n \times j$ なのは $P_{j,d_{j+1}+1}, \cdots, P_{j,d_j}$ の $d_j - d_{j+1}$ 個．
- したがって，P に含まれるベクトルは合計で $\sum_{j=1}^{k} j\bigl(d_j - d_{j+1}\bigr)$ 本．
- $\sum_{j=1}^{k} j\bigl(d_j - d_{j+1}\bigr) = n$ を計算するのは意外と難しい．

主格転倒テク 積の和を計算するときに，添字を取り換えるテクニック．

- 「j が $d_j - d_{j+1}$ 個寄与する」という視点を転換して，「d_j がいくつ寄与するか」を考える．
- d_j の寄与は $j - (j-1) = 1$．
- したがって $\sum_{j} j\bigl(d_j - d_{j+1}\bigr) = \sum_{d_j} d_j = d_1 + \cdots + d_n = n$．

余談 2：Young 図形

べき零行列の Jordan 標準形は n の分割を表現する Young 図形と（Jordan 細胞の並び替えを同一視した上で）一対一に対応する．

$\boldsymbol{x}_1$	$\cdots$	$\boldsymbol{x}_{d_k}$							
$N\boldsymbol{x}_1$	$\cdots$	$N\boldsymbol{x}_{d_k}$	$\boldsymbol{x}_{d_k+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
$N^{k-1}\boldsymbol{x}_1$	$\cdots$	$N^{k-1}\boldsymbol{x}_{d_k}$	$N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_k+1}$	$\cdots$	$N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{x}_{d_2+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{x}_{d_1}$

$n = 4$ の場合

$$
\begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{x}_1 \\ \hline N\boldsymbol{x}_1 \\ \hline N^2\boldsymbol{x}_1 \\ \hline N^3\boldsymbol{x}_1 \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c}\hline \boldsymbol{x}_1 & \\ \cline{1-1} N\boldsymbol{x}_1 & \\ \hline N^2\boldsymbol{x}_1 & \multicolumn{1}{c|}{\boldsymbol{x}_2} \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \\ \hline N\boldsymbol{x}_1 & N\boldsymbol{x}_2 \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|cc}\hline \boldsymbol{x}_1 & & \\ \hline N\boldsymbol{x}_1 & \multicolumn{1}{c|}{\boldsymbol{x}_2} & \multicolumn{1}{c|}{\boldsymbol{x}_3} \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ \hline & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)
$$