§ 5. 和空間と直和

輪講 #3

2025-02-24

可換な行列による部分空間

定理: $A \in M_n$ について，$C(A) = \{X \in M_n \mid XA = AX\}$ はベクトル空間 M_n の部分空間をなす．ただし，和とスカラー倍は自然に定まるものとする．

Proof: O を含むことと，和とスカラー倍で閉じていることを示す．

- $OA = AO = O$ より $O \in C(A)$.
- $X, Y \in C(A)$ ならば，$(X+Y)A = XA + YA = AX + AY = A(X+Y)$ より $X + Y \in C(A)$.
- $X \in C(A)$ ならば，$(cX)A = A(cX)$ より $cX \in C(A)$.

$\square$

Remark $C(A)$ は（群としての）M_n の部分群となり，**中心化群**と呼ばれる．

Question $C(A)$ の次元はいくつになるだろうか？

Motivation A を簡単な標準形にしたい．

- A の相似変換に対して $C(A)$ が不変，つまり $C(A) = C(P^{-1}AP)$ ならよいが，そうではない……
- 実際，$XA = AX \Leftrightarrow PXP^{-1}PAP^{-1} = PAP^{-1}PXP^{-1}$.
- 不変ではないけれど，線形同型写像 $F : X \mapsto PXP^{-1}$ を考えられる！

定理: 正方行列 A, B が相似なら，$C(A) \simeq C(B)$. 特に $\dim C(A) = \dim C(B)$.

Proof: $B = P^{-1}AP$ となるような正則行列 P をとれる．
線形同型写像 $F : C(A) \ni X \mapsto PXP^{-1} \in C(B)$ が存在する． □

Remark 有限次元なら，$V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

- したがって，A を初めから Jordan 標準形として考えてよい．
- A が対角化可能という条件付きでさらに考察してみよう．

- 始めから $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ としてよい．
- $f(X) = XA - AX$ として，$C(A) = \operatorname{Ker} f$.
  - 特に $C(A)$ が部分空間であることがただちにわかる．
- $f\left(E_{ij}\right) = \left(\lambda_j - \lambda_i\right)E_{ij}$. つまり，$E_{ij}$ は固有値 $\lambda_j - \lambda_i$ の固有ベクトル．
- $C(A) = \operatorname{Ker} f$ は f の固有値 0 の固有空間に等しい．
  - $\dim C(A) = \#\left\{(i, j) \mid \lambda_i = \lambda_j\right\}$.

定理: 対角化可能な正方行列 A の**相異なる**固有値を $\mu_1, \cdots, \mu_s$ とし，それぞれの重複度を $m_1, \cdots, m_s$ とする．このとき，$\dim C(A) = \sum_{i=1}^{s} (m_i)^2$.

Example：

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -2 \\ 6 & -7 & -2 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{diagonize}}{\rightsquigarrow} D = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 2 & \\ & & 2 \end{array}\right).$$

したがって，$\dim C(A) = \dim C(D) = 1^2 + 2^2 = 5.$

実際，D と可換な行列 X は次のような形をしているハズである：

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} * & & \\ \hline & * & * \\ & * & * \end{array}\right).$$

本編

- V：$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間．
- $W_1, \cdots, W_m$：V の部分空間．

定理 5.1: 和空間 $W_1 + \cdots + W_m := \left\{\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m \mid \boldsymbol{x}_j \in W_j\right\}$ は V の部分空間．

定義 5.1: 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 + \cdots + W_m$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m \quad \left(\boldsymbol{x}_j \in W_j\right)$$

と**一意的に**表されるとき，

$$W_1 + \cdots + W_m = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

と表し，$W_1 + \cdots + W_m$ は $W_1, \cdots, W_m$ の**直和**であるという．

直和の特徴付け

定理 5.2: 次の 1 〜 4 は互いに同値.

1. $W_1 + \cdots + W_m$ は $W_1, \cdots, W_m$ の直和.
2. $\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in W_m$ に対して $\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x}_1 = \cdots = \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$.
3. $\boldsymbol{x}_1 \in W_1 \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in W_m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とすると，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ は一次独立.
4. 各 $j = 2, \cdots, m$ に対して，$\left(W_1 + \cdots + W_{j-1}\right) \cap W_j = \{\boldsymbol{0}\}$.

Proof: **1 ⇒ 2, 2 ⇒ 3** は明らか．**3 ⇒ 4** は対偶が簡単に従う．**4 ⇒ 1** を示す． $\boldsymbol{w} \in W_1 + \cdots + W_m$ に対して，$\boldsymbol{w} = \sum_j \boldsymbol{x}_j = \sum_j \boldsymbol{y}_j \left(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j \in W_j\right)$ とすると，$\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{y}_j \in W_j$ として $\sum_{j<m} \boldsymbol{z}_j = -\boldsymbol{z}_m$ だが，4 の主張よりその両辺は $\boldsymbol{0}$ に等しい．これを繰り返すことで $\forall j, \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{w}$ の分解の一意性が従う. □

部分空間に対する次元定理

定理 5.3: $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Proof: $n_0 = \dim(W_1 \cap W_2)$ とし，$W_1 \cap W_2$ の基底 $\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_0}$ をとる． これを延長することで，次のように基底をとることができる：

- W_1 の基底 $\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_0}, \boldsymbol{x}_{n_0+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{n_1}$. ただし，$n_1 = \dim W_1$.
- W_2 の基底 $\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_0}, \boldsymbol{y}_{n_0+1}, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_2}$. ただし，$n_2 = \dim W_2$.

Claim $\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_0}, \boldsymbol{x}_{n_0+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{n_1}, \boldsymbol{y}_{n_0+1}, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_2}$ は $W_1 + W_2$ の基底をなす.

Proof: $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W_1 + W_2$ に対して，

- $\boldsymbol{w}_1 = c_1 \boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_{n_0} \boldsymbol{z}_{n_0} + c_{n_0+1} \boldsymbol{x}_{n_0+1} + \cdots + c_{n_1} \boldsymbol{x}_{n_1}$
- $\boldsymbol{w}_2 = d_1 \boldsymbol{z}_1 + \cdots + d_{n_0} \boldsymbol{z}_{n_0} + d_{n_0+1} \boldsymbol{y}_{n_0+1} + \cdots + d_{n_1} \boldsymbol{y}_{n_1}$

なる $(c_i)_i, (d_i)_i$ が一意に存在するから，次の分解も一意的：

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \sum_{i \le n_0} (c_i + d_i) \boldsymbol{z}_i + \sum_{n_0 < i \le n_1} c_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{n_0 < i \le n_2} d_i \boldsymbol{y}_i.$$

部分空間に対する次元定理（より一般の場合）

定理 5.4: $\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \sum_{j=1}^{m} \dim W_j - \sum_{j=2}^{m} \dim\bigl((W_1 + \cdots + W_{j-1}) \cap W_j\bigr)$.

Example:

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 \\ &\quad - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim((W_1 + W_2) \cap W_3).\end{aligned}$$

Proof: m に関する帰納法．簡単なので略． □