

§ 5. 和空間と直和

輪講 #3

2025-02-26

可換な行列による部分空間

定理: $A \in M_n$ について, $C(A) = \{X \in M_n \mid XA = AX\}$ はベクトル空間 M_n の部分空間をなす. ただし, 和とスカラー倍は自然に定まるものとする.

Proof: O を含むことと, 和とスカラー倍で閉じていることを示す.

- $OA = AO = O$ より $O \in C(A)$.
- $X, Y \in C(A)$ ならば, $(X + Y)A = XA + YA = AX + AY = A(X + Y)$ より $X + Y \in C(A)$.
- $X \in C(A)$ ならば, $(cX)A = A(cX)$ より $cX \in C(A)$.

□

Remark $C(A)$ は (群としての) M_n の部分群となり, **中心化群**と呼ばれる.

Question $C(A)$ の次元はいくつになるだろうか?

Motivation A を簡単な標準形にしたい.

- A の相似変換に対して $C(A)$ が不変, つまり $C(A) = C(P^{-1}AP)$ ならよいが, そうではない……
- 実際, $XA = AX \Leftrightarrow \textcolor{red}{PXP^{-1}}\textcolor{blue}{PAP^{-1}} = \textcolor{blue}{PAP^{-1}}\textcolor{red}{PXP^{-1}}$.
- 不変ではないけれど, 線形同型写像 $F : X \mapsto PXP^{-1}$ を考えられる!

定理: 正方行列 A, B が相似なら, $C(A) \simeq C(B)$. 特に $\dim C(A) = \dim C(B)$.

Proof: $B = P^{-1}AP$ となるような正則行列 P をとれる.

線形同型写像 $F : C(A) \ni X \mapsto PXP^{-1} \in C(B)$ が存在する. □

Remark 有限次元なら, $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

- したがって, A を初めから Jordan 標準形として考えてよい.
- A が対角化可能という条件付きでさらに考察してみよう.

- 始めから $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ としてよい.
- $f(X) = XA - AX$ として, $C(A) = \text{Ker } f$.
 - ▶ 特に $C(A)$ が部分空間であることがただちにわかる.
- $f(E_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i)E_{ij}$. つまり, E_{ij} は固有値 $\lambda_j - \lambda_i$ の固有ベクトル.
- $C(A) = \text{Ker } f$ は f の固有値 0 の固有空間に等しい.
 - ▶ $\dim C(A) = \#\{(i, j) \mid \lambda_i = \lambda_j\}$.

定理: 対角化可能な正方行列 A の**相異なる**固有値を μ_1, \dots, μ_s とし, それぞれの重複度を m_1, \dots, m_s とする. このとき, $\dim C(A) = \sum_{i=1}^s (m_i)^2$.

Example:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -2 \\ 6 & -7 & -2 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{diagonalize}} D = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 2 & \\ & & 2 \end{array} \right).$$

したがって, $\dim C(A) = \dim C(D) = 1^2 + 2^2 = 5$.

実際, D と可換な行列 X は次のような形をしているハズである:

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} * & & \\ \hline & * & * \\ & * & * \end{array} \right).$$

本編

- $V : \mathbb{C}$ 上のベクトル空間.
- $W_1, \dots, W_m : V$ の部分空間.

定理 5.1: 和空間 $W_1 + \dots + W_m := \{x_1 + \dots + x_m \mid x_j \in W_j\}$ は V の部分空間.

定義 5.1: 任意の $x \in W_1 + \dots + W_m$ が

$$x = x_1 + \dots + x_m \quad (x_j \in W_j)$$

と一意的に表されるとき,

$$W_1 + \dots + W_m = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$$

と表し, $W_1 + \dots + W_m$ は W_1, \dots, W_m の直和であるという.

直和の特徴付け

定理 5.2: 次の 1 ~ 4 は互いに同値.

1. $W_1 + \cdots + W_m$ は W_1, \dots, W_m の直和.
2. $x_1 \in W_1, \dots, x_m \in W_m$ に対して $x_1 + \cdots + x_m = 0$ ならば, $x_1 = \cdots = x_m = 0$.
3. $x_1 \in W_1 \setminus \{0\}, \dots, x_m \in W_m \setminus \{0\}$ とすると, x_1, \dots, x_m は一次独立.
4. 各 $j = 2, \dots, m$ に対して, $(W_1 + \cdots + W_{j-1}) \cap W_j = \{0\}$.

Proof: $1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3$ は明らか. $3 \Rightarrow 4$ は対偶が簡単に従う. $4 \Rightarrow 1$ を示す. $w \in W_1 + \cdots + W_m$ に対して, $w = \sum_j x_j = \sum_j y_j$ ($x_j, y_j \in W_j$) とすると, $z_j = x_j - y_j \in W_j$ として $\sum_{j < m} z_j = -z_m$ だが, 4 の主張よりその両辺は 0 に等しい. これを繰り返すことで $\forall j, z_j = 0$ となり, w の分解の一意性が従う. □

部分空間に対する次元定理

定理 5.3: $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Proof: $n_0 = \dim(W_1 \cap W_2)$ とし, $W_1 \cap W_2$ の基底 z_1, \dots, z_{n_0} をとる. これを延長することで, 次のように基底をとることができる:

- W_1 の基底 $z_1, \dots, z_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_1}$. ただし, $n_1 = \dim W_1$.
- W_2 の基底 $z_1, \dots, z_{n_0}, y_{n_0+1}, \dots, y_{n_2}$. ただし, $n_2 = \dim W_2$.

Claim $z_1, \dots, z_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_1}, y_{n_0+1}, \dots, y_{n_2}$ は $W_1 + W_2$ の基底をなす.

Proof: $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ に対して,

- $w_1 = c_1 z_1 + \dots + c_{n_0} z_{n_0} + c_{n_0+1} x_{n_0+1} + \dots + c_{n_1} x_{n_1}$
- $w_2 = d_1 z_1 + \dots + d_{n_0} z_{n_0} + d_{n_0+1} y_{n_0+1} + \dots + d_{n_2} y_{n_2}$

なる $(c_i)_i, (d_i)_i$ が一意に存在するから, 次の分解も一意的:

$$w_1 + w_2 = \sum_{i \leq n_0} (c_i + d_i) z_i + \sum_{n_0 < i \leq n_1} c_i x_i + \sum_{n_0 < i \leq n_2} d_i y_i.$$

部分空間に対する次元定理（より一般の場合）

定理 5.4: $\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \sum_{j=1}^m \dim W_j - \sum_{j=2}^m \dim((W_1 + \cdots + W_{j-1}) \cap W_j).$

Example:

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 \\ &\quad - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim((W_1 + W_2) \cap W_3). \end{aligned}$$

Proof: m に関する帰納法. 簡単なので略.

□