# § 6. Jordan 標準形（べき零行列の場合）

輪講 #3

2025-02-24

# べき零行列

# べき零行列



- 正方行列 $N$ が**べき零**であるというのは，$N^k = O$ となるような $k$ が存在すること．

**例**: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零．

**定理 6.1**: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零 $\Leftrightarrow$ $N$ のすべての固有値が $0$.

**Proof**:

($\Rightarrow$) 固有値 $\lambda$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に $N$ を左から然るべき回数掛けると，
$\mathbf{0} = N^k \boldsymbol{v} = \lambda^k \boldsymbol{v}$ より $\lambda = 0$.

($\Leftarrow$) 固有多項式は $\phi_N(x) = x^n$. Cayley-Hamilton の定理より $N^n = O$.

$\square$

**Remark** 対角化可能なべき零行列は零行列に限る．

# べき零行列のべきの上界



**定理 6.2**: $N \in M_n(\mathbb{C})$ をべき零行列とする． $k$ を $N^k = O$ となる最小の自然数とすると，$k \leq n$.

**Proof**: $N^{k-1} \neq O$ より $N^{k-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ がとれる．

**Claim** $\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x}, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}$ は一次独立．

- 線型関係式 $\sum_{0 \leq i < k} c_i N^i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える．
- 両辺に $N^{k-1}$ を左から掛けることで $c_0 = 0$ を得る．
- 同様に $N^{k-2}, \cdots, N, I$ を左から掛けることで線型関係式が自明であることがいえる．

したがって，特に $k \leq n$ がいえる． □

# べき零行列の Jordan 標準形

# Jordan 細胞，Jordan 標準形

**定義 6.1**: $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次の $J(\lambda; n)$ を **Jordan 細胞**という：

$$J(\lambda; n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Jordan 細胞を用いて，次のように表される正方行列を **Jordan 標準形** という：

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & & \\ & J(\lambda_2; m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix} \in M_{m_1+\cdots+m_r}(\mathbb{C}).$$

# べき零行列の Jordan 標準形の存在定理



**定理 6.3**: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零行列ならば，ある正則な $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在し，

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0;m_1) & & & \\ & J(0;m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0;m_r) \end{pmatrix}.$$

証明の流れはおおまかには次のようになる：

1. べき零行列 $N$ には，増大列 $\{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathrm{Ker}\,N \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\,N^k = \mathbb{C}^n$ が付随する．
2. 増大列に“沿う”ような良い具合の基底をとっていく．
3. $A$ をこの基底で取り換えると Jordan 標準形になっている．

# Setup

$N = O$ なら始めから Jordan 標準形になっているので，以下では $N \neq O$ とする．

- $k$ を，$N^k = O$ となるような最小の自然数とする．$\rightsquigarrow 2 \le k \le n$.
- $W_j = \operatorname{Ker} N^j$ を "$j$ 次の Kernel" と呼ぶことにする（これは一般的でない名称）．

次のような増大列をイメージする：

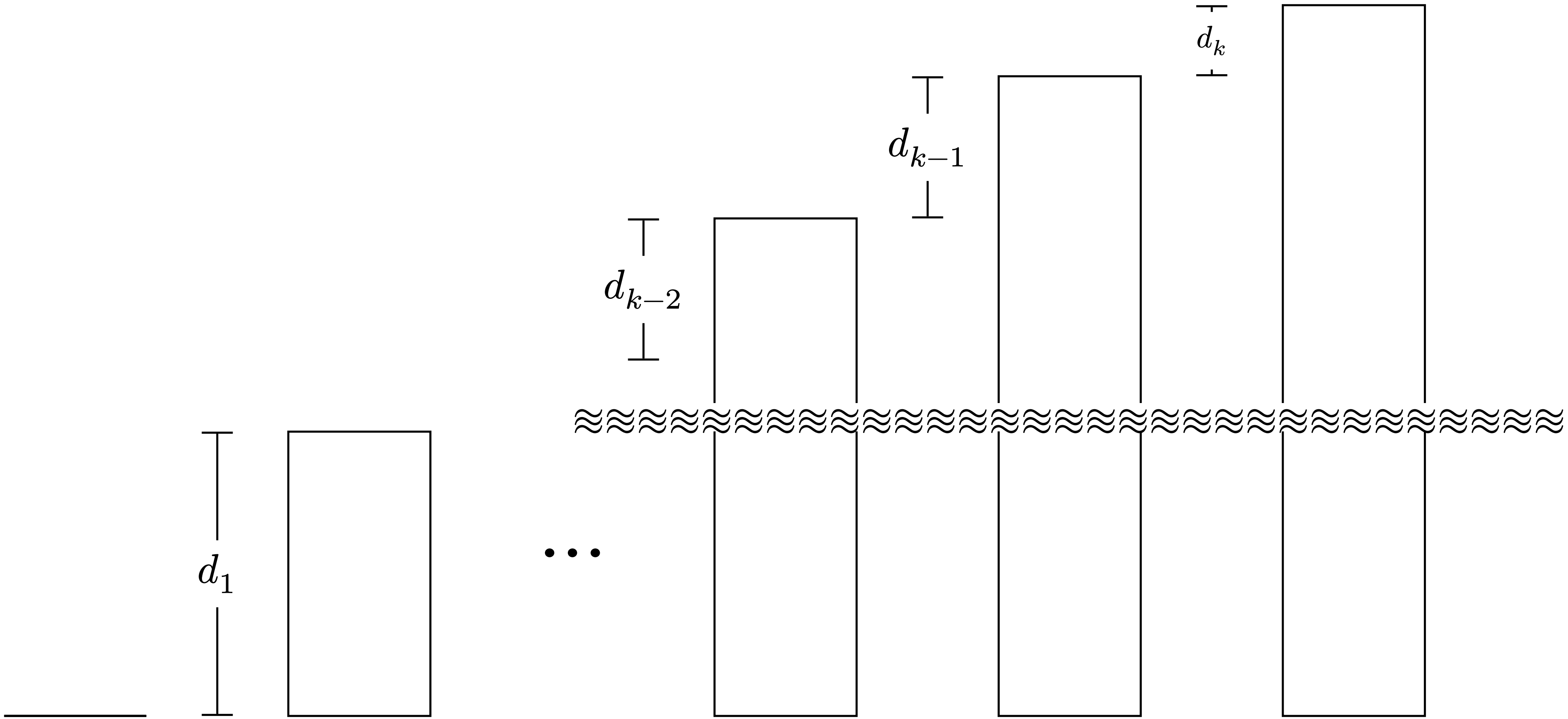
$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

$N$ は正則でない $(\because N$ **の固有値はすべて** $0 \rightsquigarrow \det N = 0)$ から，

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

- $1 \le j \le k$ について $d_j = \dim W_j - \dim W_{j-1}$ とすると，$d_j$ はつねに非負．
  - $\rightsquigarrow \sum_{j=1}^{k} d_j = \dim \mathbb{C}^n - \dim\{\mathbf{0}\} = n.$

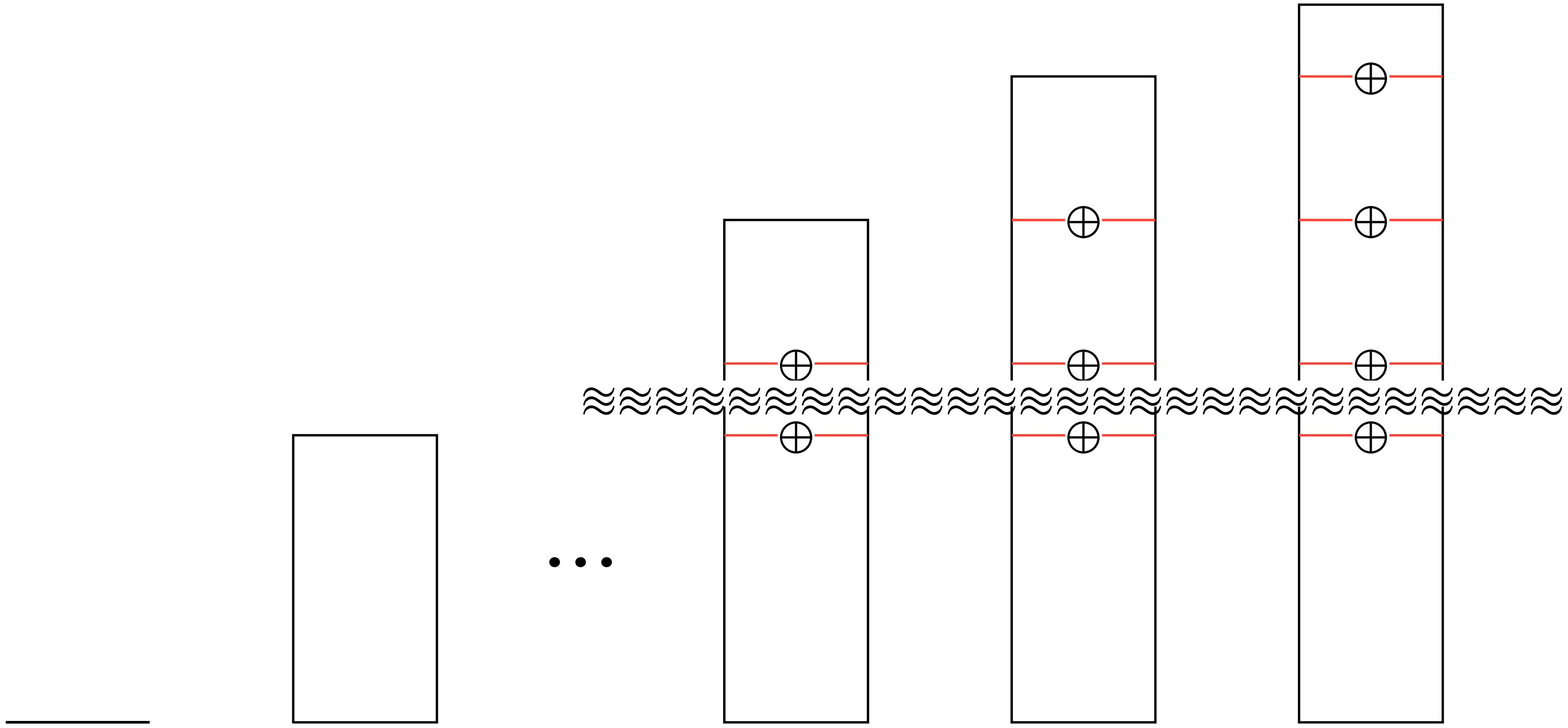
# 増大列の様子




$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-2} \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n$$

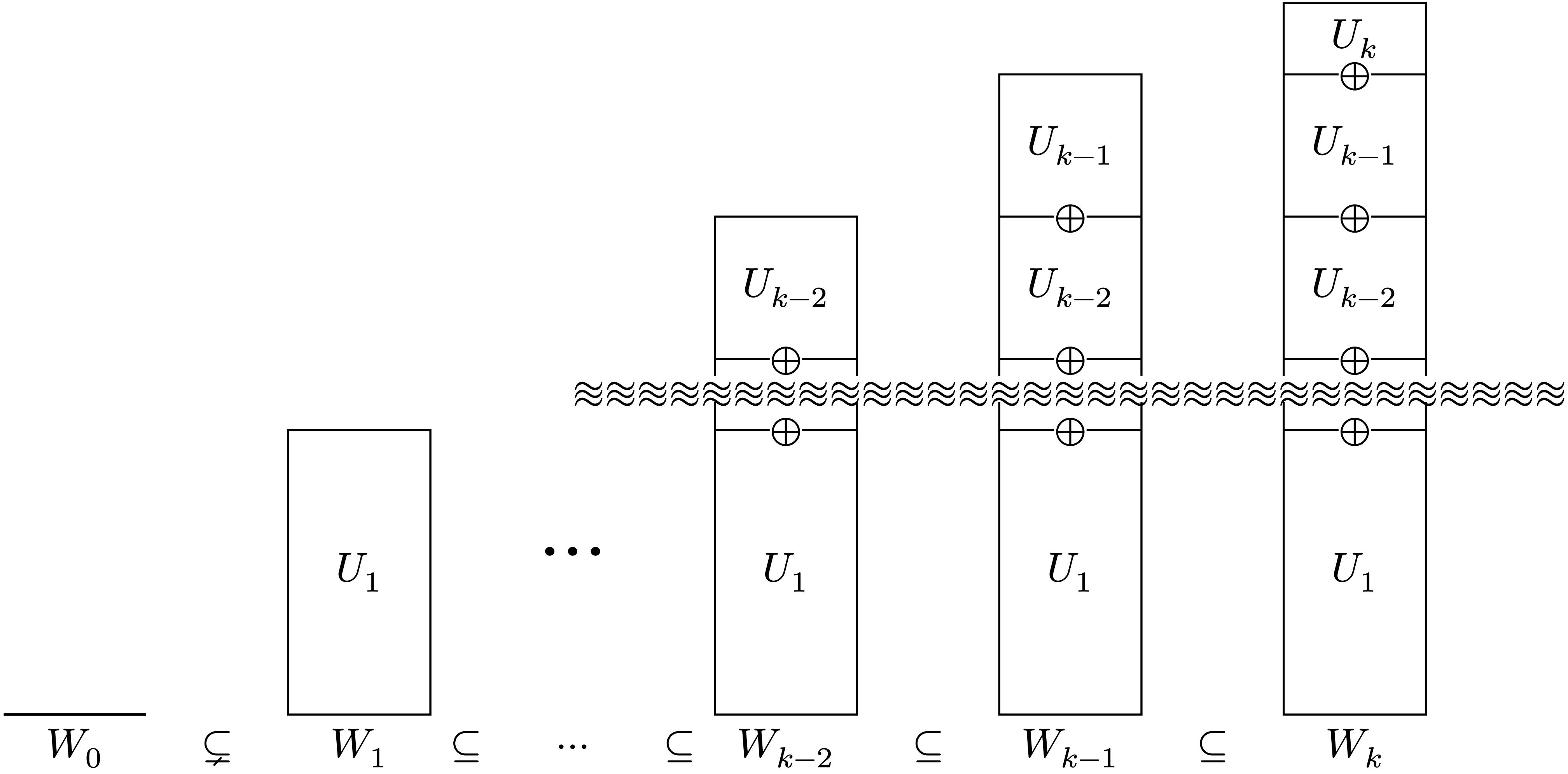
# 増大列の直和分割

**Remark** $V$ の部分空間 $W$ に対して，$V = W \oplus \widetilde{W}$ なる $\widetilde{W}$ が存在する．



$$W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-2} \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k$$

# 直和分解の因子に名前をつける



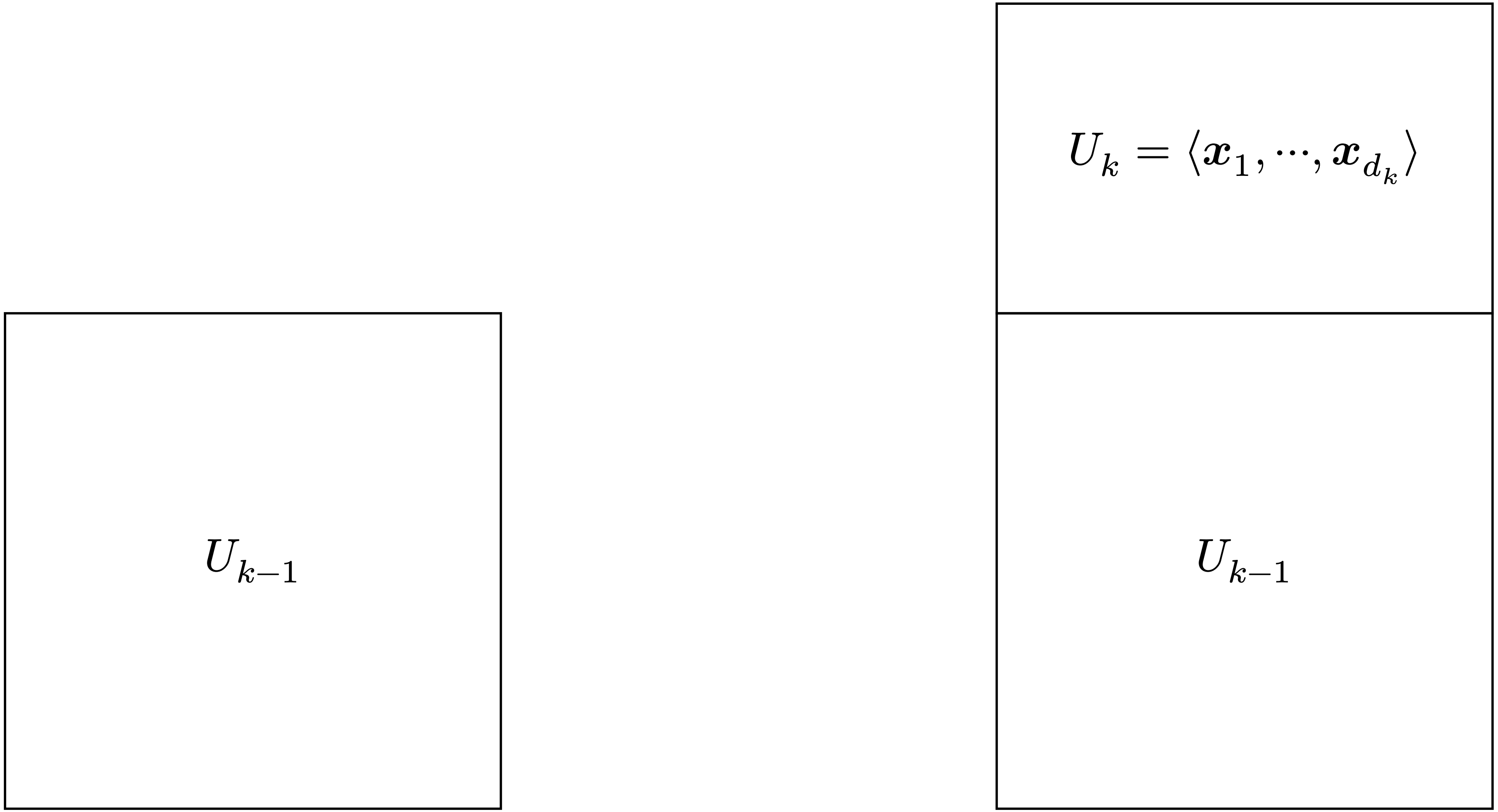
## Check! $U_j$ は“$N^j \times$ でやっと $0$ になる”ベクトル全体によって張られる部分空間.

線型独立な $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k} \in U_k$ によって $W_{k-1}$ の基底を延長して $W_k$ の基底とする.

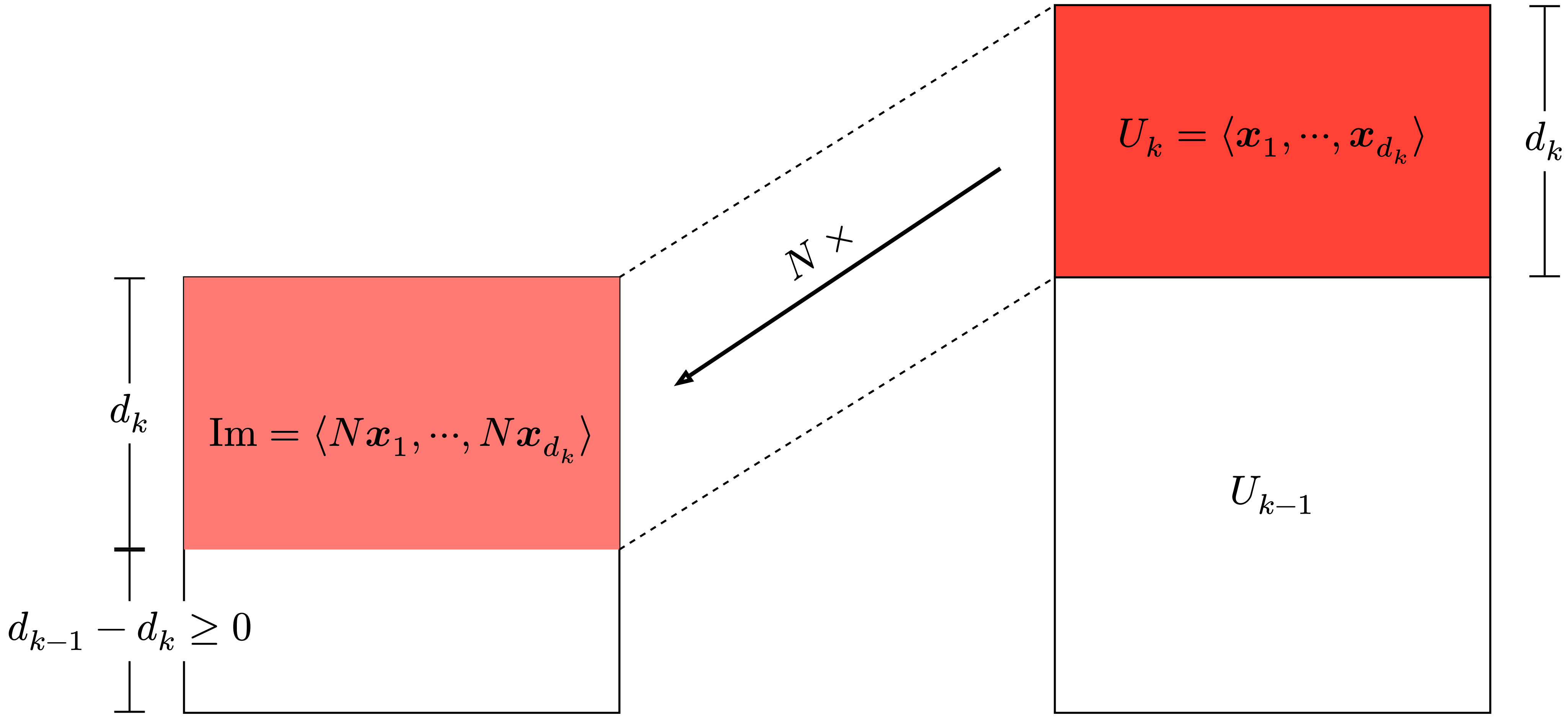
このとき，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$ は次の条件を満たしている：

1. $\langle N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k} \rangle \subseteq U_{k-1}$.
   - $\boldsymbol{x}_j$ は“$N^k$ でやっと $\mathbf{0}$ になる”から，$N\boldsymbol{x}_j$ は“$N^{k-1}$ でやっと $\mathbf{0}$”になる.
2. $N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}$ は一次独立.
   - $\sum_j c_j N\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0} \Rightarrow N\left(\sum_j c_j \boldsymbol{x}_j\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_j c_j \boldsymbol{x}_j \in W_1 \Rightarrow \sum_j c_j \boldsymbol{x}_j \in W_{k-1}$.
   - もし $\sum_j c_j \boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0}$ であれば $\boldsymbol{x}_j \notin W_{k-1}$ に矛盾するので，$\sum_j c_j \boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$.
   - $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$ は線型独立だったから $c_1 = \cdots = c_{d_k} = 0$.

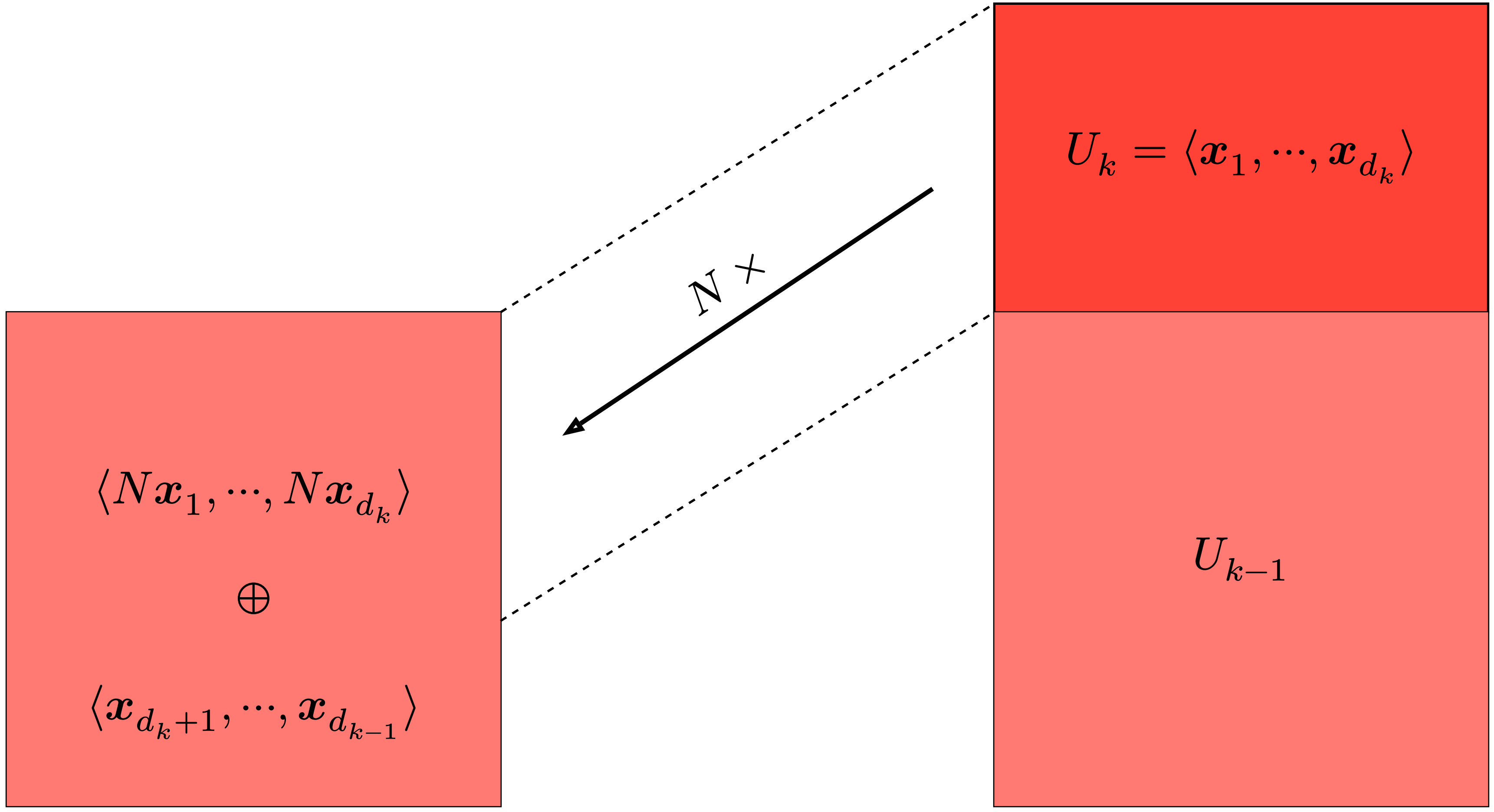
# $W_{k-1}, W_k$ の上段を抜粋．



# $\mathrm{Im}_N\, U_k \subseteq U_{k-1}$ の様子．



# 余った部分の基底をとる．



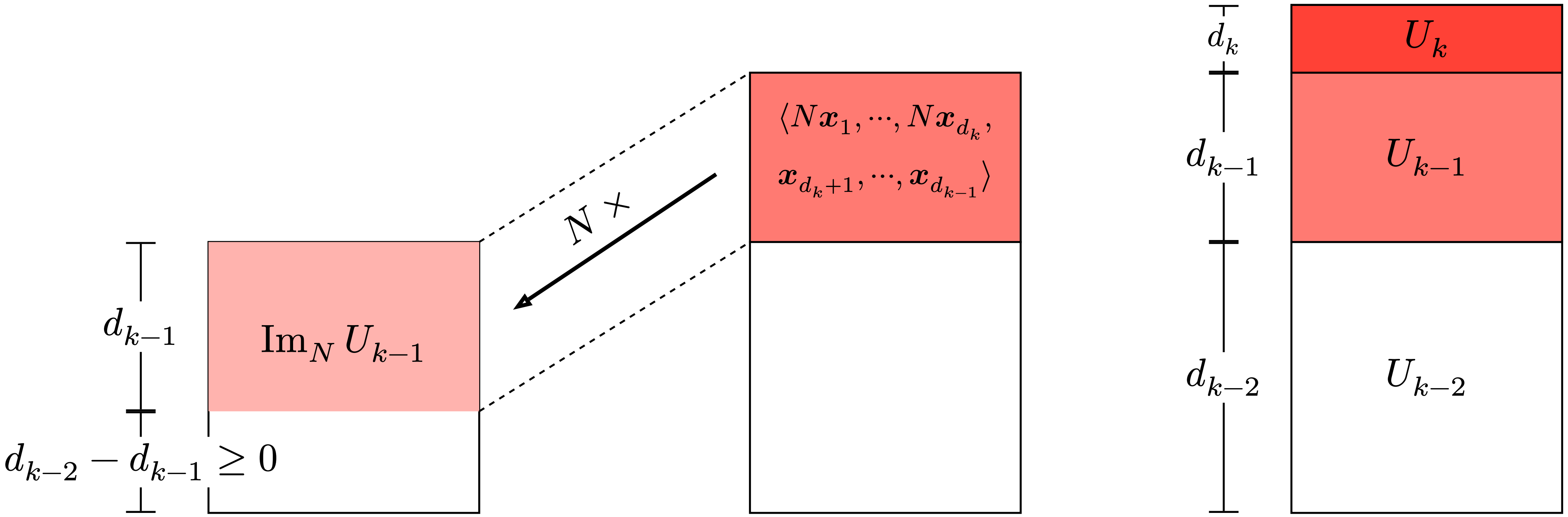
## $W_{k-2}$ の上段でも同様の現象が起こる．

$U_{k-1}$ の基底は $N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}, \boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ になっている．

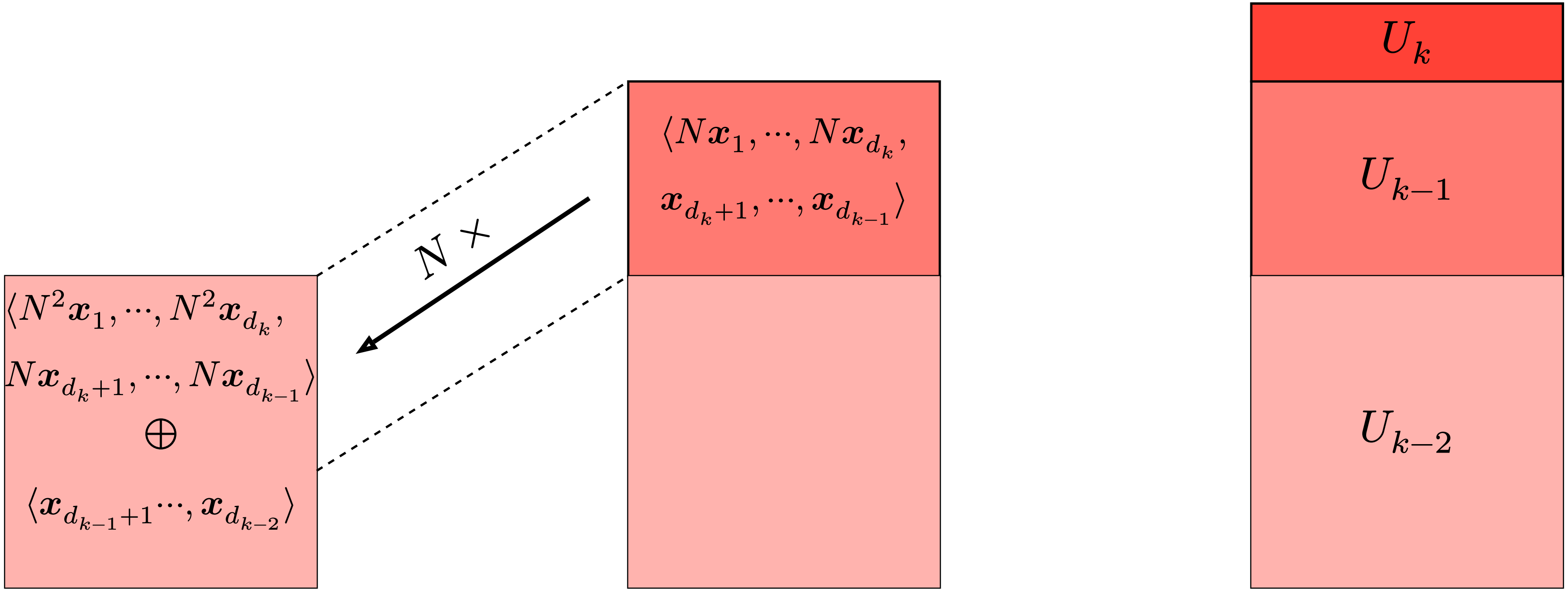
$\operatorname{Im}_N U_k \subseteq U_{k-1}$ と $N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}$ の線型独立性を示したときとまったく同様にして次が成り立つ：

- $\operatorname{Im}_N U_{k-1} = \langle N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{d_k}, N\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} \rangle \subseteq U_{k-2}$.
- $N^2\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{x}_{d_k}, N\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$ は一次独立．
  - 次のように換言してもよい：$N\times$ によって $U_{k-1}$ は退化しない．つまり，$\dim \operatorname{Im}_N U_{k-1} = d_{k-1}$.

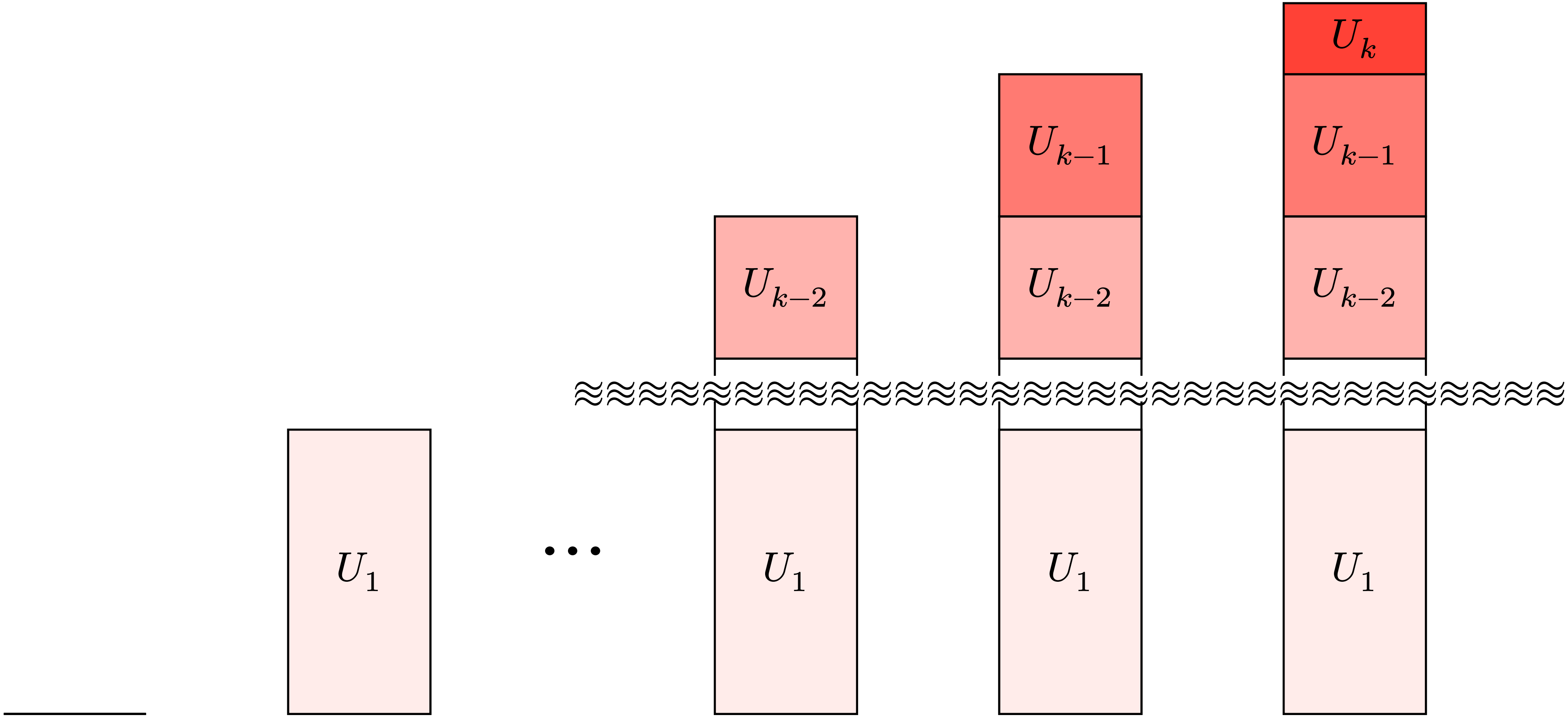
# $\operatorname{Im} U_{k-1} \subseteq U_{k-2}$ の様子．



# 例によって余った部分の基底をとる．



# 増大列再訪




$$W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-2} \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k$$

## $\mathbb{C}^n$ の基底



以上のような操作を繰り返すことにより $\mathbb{C}^n = W_k$ の基底をとることができる．その構成は次の基底を集めたものになっている：

- $U_k$ の基底：$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$.
- $U_{k-1}$ の基底：$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k}, \boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$.
- $\vdots$
- $U_1$ の基底 $N^{k-1}\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}_{d_k}, N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_2+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_1}$.