§ 21. 双対空間

輪講 #10

2025-03-24

一次形式と双対空間

Remark もうベクトルを太字にしません．

体 K 上の線型空間 V から，新たな線型空間を作り出す．

線型写像 $f : V \to K$ を，**1 次形式（線型形式，線型汎関数）**という．

定義:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, K) = \{\text{線型写像 } f : V \to K\}$$

は K 上の線型空間をなし，これを V の**双対空間(dual space)**という．

Remark 線型空間 V, W に対し，線型写像 $V \to W$ 全体のなす線型空間を $\mathrm{Hom}(V, W)$ と書くことがある．準同型 homomorphic の頭文字．

一次形式の例

例: $f_a : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n; K^n \to K$ は K^n 上の一次形式.
$a \in K^n$ に f_a を対応させる写像は可逆.

例: 実関数 $f(x)$ に対して $f(a) \in \mathbb{R}$ を対応させる写像は $C(\mathbb{R})$ 上の一次形式.

双対基底

$n < \infty$ を V の次元とする．

V の基底 $x_1, \cdots, x_n$ に対し，次によって双対空間 V^* の n 個の元 $f_1, \cdots, f_n$ を定める．

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

定理: $f_1, \cdots, f_n$ は V^* の基底をなす．特に，$\dim V = \dim^* = n$.

- 線型独立性：$\sum_i c_i f_i = 0_{V^*}$ とする．両辺を x_j に適用すると $c_j = 0$ を得る．
- 生成すること：任意の $f \in V^*$ に対し，$f = \sum_i f(x_i) f_i$ なる表示が定まる．実際，$x = \sum_j c_j x_j \in V$ を代入すると，

$$f(x) = f\left(\sum_i c_i x_i\right) = \sum_i f(x_i) c_i = \sum_i f(x_i) f_i(x).$$

双対基底

定義: V^* の基底 $f_1, \cdots, f_n$ を $x_1, \cdots, x_n$ の**双対基底(dual basis)**という.

Remark V と V^* の次元は等しいから，2 つの線型空間は同型である．つまり，全単射 $V \xrightarrow{\sim} V^*$ が存在する.

伏線 $V \overset{\sim}{\to} V^*$ は基底に依存した同型である．実際，$K = \mathbb{R}$ 上の線形空間 $V = \mathbb{R}$ の基底として 1 をとったとき，$f_1 = \mathrm{id}$ だが，基底として 2 をとると，f_2 は $1/2$ 倍写像になる.

Remark 無限次元線型空間においても双対空間は存在するが，必ずしも基底が存在しないかもしれないので，$\dim V = \dim V^*$ は有限次元でないと言えない．ここまで有限次元を仮定していたが，以降この仮定を取り払う.

双線型形式

V と V^* がいずれも線型空間であるということは，

$f(x)$ という形式において f と x いずれにも線型性があるということ．

$\rightsquigarrow$ 双線型形式 $b : (f, x) \mapsto f(x)$ を考えることができる．

$\rightsquigarrow$ f, x は単なるベクトルであり，もはや関数 / 引数という違いは意識されない．

引数がペアなのは扱いにくいので，片方を固定して 1 変数の線型写像にしてみる．

$$\mathrm{app}_f = b(f, \cdot) : V \to K,$$
$$\mathrm{ev}_x = b(\cdot, x) : V^* \to K.$$

b が非退化な双線型形式だとすると，

$$f \mapsto \mathrm{app}_f ; V^* \to V^*,$$
$$x \mapsto \mathrm{ev}_x ; V \to (V^*)^*$$

はいずれも同型．前者は恒等写像なので，後者について考察してみる．

第 2 双対空間

K 上の線型空間 V の双対空間 V^* 自身も線型空間であるから，その「双対空間の双対空間」を考えることができる．

定義: $V^{**} = (V^*)^*$ を V の**第 2 双対空間(bidual space)**という．

$e_V : x \mapsto \mathrm{ev}_x$ は同型 $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ を定める．

$$
\begin{aligned}
e_V : \quad V &\longrightarrow V^{**} \\
x &\longmapsto \mathrm{ev}_x : \quad V^* \longrightarrow K \\
&\qquad\qquad\qquad\quad f \longrightarrow f(x)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{ev}_x : V^* \to K$

（さすがに線型写像でしょう）と思いながらここまで来たので，このあたりで証明．

定理: $\mathrm{ev}_x : V^* \to K$ は線型写像である．

Proof:

和について 任意に $f, g \in V^*$ をとる．このとき，

$$\mathrm{ev}_x(f+g) = (f+g)x = f(x) + g(x) = \mathrm{ev}_x(f) + \mathrm{ev}_x(g).$$

スカラー倍について 任意に $c \in K, f \in V^*$ をとる．このとき，

$$\mathrm{ev}_x(cf) = (cf)(x) = c \cdot f(x) = c \cdot \mathrm{ev}_x(f).$$

□

定理: $e_V : x \mapsto \mathrm{ev}_x$ は線型写像である．

Proof:

和について 任意に $x, y \in V$ をとる．このとき，

$$\begin{aligned} e_V(x+y) &= \mathrm{ev}_{x+y} = f \mapsto f(x+y) = f \mapsto (f(x) + f(y)) \\ &= (f \mapsto f(x)) + (f \mapsto f(y)) = \mathrm{ev}_x + \mathrm{ev}_y = e_V(x) + e_V(y). \end{aligned}$$

スカラー倍について 任意に $c \in K, x \in V$ をとる．このとき，

$$\begin{aligned} e_V(cx) &= \mathrm{ev}_{cx} = f \mapsto f(cx) = f \mapsto c \cdot f(x) \\ &= c \cdot (f \mapsto f(x)) = c \cdot \mathrm{ev}_x = c \cdot e_V(x). \end{aligned}$$

□

$e_V : V \to V^{**}$

定理: e_V は単射である． V が有限次元ならば，さらに同型でもある．

Proof: $x \neq 0$ に対して $\mathrm{ev}_x \neq 0$ を示す． 直和分解 $V = Kx \oplus V'$ をとり，一次形式 p を部分空間 Kx への射影 $V \to Kx$ と $Kx \ni kx \mapsto k \in K$ の合成とすると，$\mathrm{ev}_x(p) = 1$ だから，$\mathrm{ev}_x \neq 0$ である．

また，V が有限次元なら e_V は基底を基底にうつすから同型である．実際，V の基底 $x_1, \cdots, x_n$ の双対基底 $f_1, \cdots, f_n$ に対し，$e_V(x_i)(f_j) = f_j(x_i) = \delta_{ij}$ だから，$e_V(x_1), \cdots, e_V(x_n)$ は $f_1, \cdots, f_n$ の双対基底になっている． □

標準的な同型

線型空間に対して基底をとるときはつねに恣意性が伴う．

Remark K^n に対しては標準基底が“全会一致”の基底なようにに思われるが，例えば関数空間や多項式の空間を考えてみると“全開一致”の基底をとるのは自明でない．

$V \to V^*$ の同型は基底に依存していたという意味で，**標準的**でない．

一方，$e_V : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ は基底に依存せず，**標準的（自然，cannonical）な同型**である．

V と V^{**} は集合論的に等しいわけではないが，二つの集合の間に標準的な同型があるという意味で，リベラルに $V = V^{**}$ と書くこともある．

標準的な同型による同一視

例: 有限次元線型空間 V, W とその基底 E, F がある． 線型写像と行列は異なるものだが，「E, F に関する表現行列をとる」という標準的な同型 $\mathrm{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} M_{mn}$ が存在するため，これらを同一視したりする．

例: 線型空間 V とその部分空間 W_1, W_2 について，**集合論的な直和** $W_1 \oplus W_2 = \{(w_1, w_2)\}$ と**和** $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2\}$ はいずれも線型空間をなす．

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ が成り立っているとき，$+ : (w_1, w_2) \to w_1 + w_2$ は標準的な同型 $W_1 \oplus W_2 \xrightarrow{\sim} W_1 + W_2$ を与えるから，二つの空間を同一視して**部分空間のとしての直和** $W_1 \oplus W_2$ が定義される．

双対写像

定理: V, W を K 上の線型空間とし，$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ とする．このとき，$\varphi \in W^*$ を $\varphi \circ f \in V^*$ に対応させる写像 $f^* : W^* \to V^*$ は線型写像である．

Proof:
和について　任意に $\varphi, \psi \in W^*$ をとる．このとき，

$$f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi).$$

スカラー倍について　任意に $c \in K, \varphi \in W^*$ をとる．このとき，

$$f^*(c\varphi) = (c\varphi) \circ f = c(\varphi \circ f) = cf^*(\varphi).$$

□

双対写像

定義: 線型写像 $f : V \to W$ に対し，先の線型写像 $f^* : W^* \to V^*$ を**双対写像** **(dual mapping)** という．

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, phantom, "\overset{f^*}{\leftsquigarrow}"] \\
& K
\end{tikzcd}
$$

双対写像の基本的な性質

定理:

1. $* : (V \to W) \to (V^* \to W^*)$ は線型写像.
2. $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$.
3. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.（**反変性 contravariant**）

Proof:

1. 略.
2.
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V \circ \varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, phantom, "="] \\
& K
\end{tikzcd}$$
3. $(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ g \circ f = f^*(g \circ \varphi) = f^*(g^*(\varphi))$.

$\square$

線型写像の転置

定理: V, W の各基底 E, F に対し，E^*, F^* をそれぞれの双対基底とする． 線型写像 $f : V \to W$ の E, F に関する表現行列を A とすると，$f^* : W^* \to V^*$ の F^*, E^* に関する表現行列は A^T である．

Proof: 次の図式が可換であることによる．

$$
\begin{tikzcd}
W^* \arrow[rrr, "f^*"] \arrow[ddd, "\varphi_{F^*}"'] & & & V^* \arrow[ddd, "\varphi_{E^*}"] \\
& (K^m)^* \arrow[ul, "(\varphi_F)^*"'] \arrow[r, "(A\times)^*"] \arrow[ddl, "\mathsf{T}"] & (K^n)^* \arrow[ur, "(\varphi_E)^*"] \arrow[ddr, "\mathsf{T}"'] & \\
& & & \\
K^m \arrow[rrr, "A^\mathsf{T}"] & & & K^n
\end{tikzcd}
$$

□

線型写像の転置

実際，それぞれの可換性は次のようにして示される．

上側の台形 表現行列の定義から $(A\times)\circ\varphi_E = \varphi_F\circ f$ で，両辺の双対をとる．

右側の三角形 $E=(x_1,\cdots,x_n), E^*=(f_1,\cdots,f_n)$ とする．$a^\mathsf{T}\in(K^n)^*$ に対して，

$$(\varphi_{E^*}\circ(\varphi_E)^*)(a^\mathsf{T}) = \varphi_{E^*}(a^\mathsf{T}\circ\varphi_E) = \varphi_{E^*}\left(\sum_i a_i f_i\right) = a.$$

左側の三角形 右側の三角形と同様．

下側の三角形 $a^\mathsf{T}\in(K^m)^*$ として，K^n 上の等式 $(A^\mathsf{T}\circ\mathsf{T})(a^\mathsf{T}) = (\mathsf{T}\circ(A\times)^*)(a^\mathsf{T})$ であればよい．両辺は $A^\mathsf{T}a$ において一致する．

Point 上・右・左の可換性により $V=K^n, W=K^m$ で基底が標準基底の場合に帰着できるということを示している．

Remark この性質に由来して，双対写像のことを**転置写像**と呼ぶこともある．