§12. 行列の指数関数と微分方程式

輪講 #6

2025-03-11

行列の指数関数

定義: 正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$\exp A$ を次で定義する．

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \cdots$$

Question ちゃんと収束するの？

定理 (Weierstrass's M-test): 関数列 $(f_k(x))$ に対してある数列 (M_k) が存在し，

1. $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$.
2. $\sup_x |f_k(x)| \leq M_k$ for $\forall k$.

の 2 条件が成立するとき，関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ は**絶対かつ一様に収束する**．

定理: $\exp A$ の各成分は A の成分に対して絶対広義一様収束する.

Proof: $\sup_{\|A\|<\infty} \left|\frac{A^k}{k!}\right|_{ij} \leq M_k$ なる実数列 $(M_k)_k$ がとれて，$\sum_k M_k < \infty$ となることを示せばよい（Weierstrass の M-test）.

$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^* A)}$ は $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ を満たし（略），次が成り立つ.

$$\left|\left(\frac{A^k}{k!}\right)_{ij}\right| = \frac{\left(A^k\right)_{ij}}{k!} \leq \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

任意の有界な A に対して $\|A\| \leq L$ なる十分大きな定数 L がとれて，$M_k = \frac{L^k}{k!}$ とすれば $\sum_k M_k = e^L < \infty$ となるから，題意は示された. □

定理:

1. A, B が可換なら $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$.
2. $\exp A$ は正則であり，$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.
3. $(\exp A)^{\mathsf{T}} = \exp(A^{\mathsf{T}})$.
4. $\overline{(\exp A)} = \exp\left(\overline{A}\right)$.
5. P が正則なら $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}(\exp A)P$.

一様収束するので割とやりたい放題.

一階の連立定数係数同次線型微分方程式

時間 t の関数 $z_1(t), \cdots, z_n(t)$ の満たす微分方程式が

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

によって

$$\boldsymbol{z}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z}$$

で与えられるものとする．

定理: 微分方程式 $\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}$ の解は $\boldsymbol{z}(t) = e^{tA}\boldsymbol{z}(0)$ により一意的に与えられる.

Proof: まず，$\boldsymbol{z}(t) = e^{tA}\boldsymbol{z}(0)$ は実際に微分方程式の解である．実際，

$$\left(e^{tA}\boldsymbol{z}(0)\right)' = \sum_k \left(\frac{(tA)^k}{k!}\right)' \boldsymbol{z}(0) = \sum_k \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}\boldsymbol{z}(0) = A\boldsymbol{z}$$

である（$\because$ e^{tA} は一様収束するから項別微分可能）．

また，$\boldsymbol{z}(t)$ が $\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}$ をみたすとすれば

$$\left(e^{-tA}\boldsymbol{z}\right)' = -Ae^{-tA}\boldsymbol{z} + e^{-tA}A\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$$

だから $e^{-tA}\boldsymbol{z}$ は t に依らず一定．$t = 0$ において $e^{-tA}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(0)$ ゆえ $\boldsymbol{z} = e^{tA}\boldsymbol{z}(0)$ はただひとつの解にほかならない. $\square$

$\exp tA$ の計算（Jordan 標準形）

$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ だったから，A の Jordan 標準形 J に対して $\exp J$ を計算できればよい．

$$\exp tJ = \begin{pmatrix} \exp tJ(\lambda_1; m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp tJ(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}.$$

例によって Jordan 細胞 $J(\lambda; m)$ に対する $\exp(J(\lambda; m))$ の計算に帰着された．

$N = J(\lambda; m) - \lambda I_m = J(0; m)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \exp(tJ(\lambda; m)) &= \exp(\lambda tI + tN) \\ &= \exp(\lambda tI) \exp(tN) \\ &= e^{\lambda t} \exp(tN). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\exp(J(\lambda; m)) \\
&= e^{\lambda t} \exp(tN) \\
&= e^{\lambda t} \left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\
&= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

第一行を左から眺めていくと，e^t の Taylor 展開の各項が並んでいる．

$\exp tA$ の計算（一般スペクトル分解）

A の一般スペクトル分解が $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$ で与えられるとする．

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(t\lambda_1 P_1 + \cdots + t\lambda_r P_r + tN) \\ &= \exp(t\lambda_1 P_1 + \cdots + t\lambda_r P_r) \exp(tN) \\ &= \left(e^{t\lambda_1} P_1 + \cdots + e^{t\lambda_r} P_r\right) \exp(tN).\end{aligned}$$

また，

$$\exp(tN) = \exp\left(\sum_j t(A - \lambda_j I) P_j\right) = \sum_j \exp\big(t(A - \lambda_j I)\big) P_j$$

であることから，k_j を λ_j に対応する標数として，

$$\exp(tA) = \sum_j e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \le k \le k_j} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I)^k\right) P_j.$$

計算例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

に対して $\exp(tA)$ を計算してみよう．

Jordan 標準形による方法

$\phi_A(x) = (x-2)^2$ であり，$A - 2I \neq O$ より $\psi_A(x) = (x-2)^2$ となる． $\mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathrm{Ker}\,(A-2I)^2 = \mathbb{C}^2$ だから，$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ と線型独立な $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}$ としてとると，$(A-2I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ で，$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $A = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Jordan 細胞の指数関数を計算する．

$$\exp t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \exp\left(t\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，

計算例

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 6t+1 & 9t \\ -4t & -6t+1 \end{pmatrix}.$$

👍 わかりやすい．

👎 Jordan 標準形を与える基底の計算，逆行列計算，最後の行列積の計算．

一般スペクトル分解による方法

一般スペクトル分解は $A = 2I + (A - 2I)$ で与えられる．

$$\exp(tA) = \exp(2tI + t(A-2I)) = e^{2t}(I + t(A-2I)) = e^{2t} \begin{pmatrix} 6t+1 & 9t \\ -4t & -6t+1 \end{pmatrix}.$$

👍 ラク．賢い．かっこいい．

👎 射影の計算が面倒になるときがある（部分分数分解）．

n 階の定数係数同次線型微分方程式

$z(t)$ の k 階微分を $z^{(k)}$ と書く．定数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ によって与えられる微分方程式

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_n z = 0$$

は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \cdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

によって $\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}$ と書ける．

Remark A は同伴行列だから Jordan 標準形がすぐにわかる．

Example $z''' - 5z'' + 8z' - 4z = 0.$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}$.
- $\phi_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2 = \psi_A(x)$.
- Jordan 標準形は $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right) =: J$ で，$\exp(tJ) = \left(\begin{array}{c|cc} e^t & & \\ \hline & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{array}\right)$.
- $\boldsymbol{z} = \exp(tA)\boldsymbol{z}(0)$ だから，$z(t)$ は e^t, e^{2t}, te^{2t} の線型結合で書ける．

Quiz

1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$\det \exp A = \exp \mathrm{Tr}\, A$ か？
2. $[A, B] = O \Rightarrow \exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$ か？
3. $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B) \Rightarrow [A, B] = O$ か？
4. $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ は全射か？また，単射か？
5. $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ は全射か？また，単射か？
6. Jordan 標準形の存在定理は $M_n(\mathbb{R})$ でも成立する．

Quiz

1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$ か？
2. $[A, B] = O \Rightarrow \exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$ か？
3. $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B) \Rightarrow [A, B] = O$ か？
4. $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ は全射か？また，単射か？
5. $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ は全射か？また，単射か？
6. Jordan 標準形の存在定理は $M_n(\mathbb{R})$ でも成立する．

解答

1. Yes.
2. Yes.
3. No.
4. 全射でないし，単射でもない．
5. 全射でないし，単射でもない．
6. No.

$\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$

A ははじめから上三角と仮定してよい．実際，

- $\det \exp(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\exp A)P) = \det \exp A$
- $\exp \operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \exp \operatorname{Tr}(APP^{-1}) = \exp \operatorname{Tr} A$

より A の相似変換によって両辺は不変．

A の対角成分を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とすると，

$$(\text{LHS}) = \det \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge *} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \text{\huge *} \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r} \end{pmatrix} = \prod_j e^{\lambda_j}.$$

$$(\text{RHS}) = \exp \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge *} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_r}.$$

$\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B) \overset{?}{\Leftrightarrow} [A,B] = O$

($\Leftarrow$) 成り立つ.

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A+B) = \sum_{0\le j\le k} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} = (\exp A)(\exp B).$$

($\Rightarrow$) 成り立たない.

反例として $A = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}$ がある.

- $\exp\begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} = e^{i\pi} \exp I = -eI.$
- $\exp\begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} = \exp\left(i\pi I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{i\pi}\left(I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$\exp : M_n(K) \to M_n(K)$

$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ は全射ではない

$\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A > 0$ だから，$\det B \leq 0$ となるような $B \in M_n(\mathbb{R})$ に対しては $B = \exp A$ となるような A が存在しない．

$\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ は全射ではない

$\operatorname{Tr} A \in \mathbb{C}$ の場合でも $\exp \operatorname{Tr} A \neq 0$ だから正則でない行列 B に対して $B = \exp A$ となる $A \in M_n(\mathbb{C})$ は存在しない．

$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ も $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ も単射ではない

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} = I = \exp O.$$

Remark 逆に，正則な行列に対しては必ず“対数”が存在する．

行列の対数

定義: 正方行列 A に対し，$A = \exp X$ となるような X が存在するとき，この X を行列 A の対数といい，$\log A$ と書く．これはしばしば多価関数になる．

行列の対数

定理: $A \in M_n(\mathbb{C})$ の対数が存在することは A が正則であることと必要十分.

Proof:

($\Rightarrow$) $\det A = \exp \operatorname{Tr} \log A \neq 0$.

($\Leftarrow$) A を Jordan 標準形としてよい.

各 Jordan 細胞 $J(\lambda, m) = \lambda I + N \in M_m(\mathbb{C})$ について,

$$K = (\log \lambda) I + \sum_{1 \leq k < m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{N}{\lambda} \right)^k$$

を対応させたブロック対角行列が $\log A$ を与える. $\square$

実行列の固有値は実とは限らない！

例えば $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $\pm i$ だから当然 Jordan 標準形は実の範囲で書けない．

$\mathbb{C}$ がエライのは**代数的に閉じている**，つまり代数学の基本定理が成り立つというところ．このような体は一般に代数閉体と呼ばれている．

$K[A]$ と $C(A)$

まずは $C(A)$ から

復習

- $C(A) = \{X \mid XA = AX\}$ は $M_n(K)$ の部分空間.
- $C(P^{-1}AP) = \{P^{-1}XP \mid X \in C(A)\} \simeq C(A)$
- A が対角化可能なら E_{ij} が固有値 $\lambda_j - \lambda_i$ の固有ベクトルで，$\dim C(A) = \sum m_j^2$.

対角化可能性を仮定しなかったら $\dim C(A)$ はどうなる？

A を Jordan 標準形だとしてよい． A の相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とする． i 番目の Jordan 細胞を $J(\lambda_k, m_i)$ とし，このような添字 i を集めて集合 I_k とする.

定理: $C(A) = \sum_k \sum_{i,j \in I_k, i \leq j} \min(m_i, m_j)$.

X を A と同様に区分けし，X

定義: K を体とする． $K[X] = \left\{\sum_{k<\infty} a_k X^k \mid a_k \in K\right\}$ は多項式環と呼ばれる．

記号を濫用して，$K[A] = \{f(A) \mid f(X) \in K[X]\}$ とする．

定理: $K[A]$ は $M_n(K)$ の部分空間であり，$\dim K[A] = \deg \psi_A \leq \deg \phi_A = n.$

Remark 明らかに $K[A] \subseteq C(A).$

Question $K[A] = C(A)$ となるのはどんなときだろうか？

$K[A]$ と $C(A)$：対角化可能な場合

$$
\begin{array}{lccccc}
 & K[A] & \subseteq & C(A) & \subseteq & M_n(K) \\
\dim: & \deg\psi & \le n = \sum_j m_j \le & \sum_j m_j^2 & \le & \left(\sum_j m_j\right)^2 = n^2
\end{array}
$$

対角化可能な場合，$\dim K[A] \le n \le \dim C(A)$ がいえるから，

$$
\begin{aligned}
& K[A] = C(A) \\
\Leftrightarrow\ & n = \dim K[A] = \dim C(A) \\
\Leftrightarrow\ & n = \deg\psi = \sum_j m_j^2 \\
\Leftrightarrow\ & \phi = \psi.
\end{aligned}
$$

定理: A が対角化可能なとき，$K[A] = C(A) \Leftrightarrow \phi_A = \psi_A$.

$K[A]$ と $C(A)$：一般の場合

定理: 一般の $A \in M_n(K)$ に対して， $K[A] = C(A) \Leftrightarrow \phi_A = \psi_A$.

Remark 同伴行列のように，各 Jordan 細胞の固有値が相異なっているような状況．

($\Leftarrow$) $I, A, \cdots, A^{n-1}$ が $M_n(K)$ 上線型独立だから，ある $\boldsymbol{x} \in K^n$ がとれて
$\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{x}$ が K^n の基底をなす．