

§ 6. Jordan 標準形（べき零行列の場合）

輪講 #3

2025-02-24

べき零行列

べき零行列

- 正方行列 N が**べき零**であるというのは、 $N^k = O$ となるような k が存在すること.

例: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零.

定理 6.1: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零 $\Leftrightarrow N$ のすべての固有値が 0.

Proof:

- (\Rightarrow) 固有値 λ の固有ベクトル v に N を左から然るべき回数掛けると,
 $0 = N^k v = \lambda^k v$ より $\lambda = 0$.
- (\Leftarrow) 固有多項式は $\phi_N(x) = x^n$. Cayley-Hamilton の定理より $N^n = O$.

□

Remark 対角化可能なべき零行列は零行列に限る.

べき零行列のべきの上界

定理 6.2: $N \in M_n(\mathbb{C})$ をべき零行列とする. k を $N^k = O$ となる最小の自然数とすると, $k \leq n$.

Proof: $N^{k-1} \neq O$ より $N^{k-1}x \neq 0$ なる $x \in \mathbb{C}^n$ がとれる.

Claim $x, Nx, \dots, N^{k-1}x$ は一次独立.

- 線型関係式 $\sum_{0 \leq i < k} c_i N^i x = 0$ を考える.
- 両辺に N^{k-1} を左から掛けることで $c_0 = 0$ を得る.
- 同様に N^{k-2}, \dots, N, I を左から掛けることで線型関係式が自明であることがいえる.

したがって, 特に $k \leq n$ がいえる.

□

べき零行列の Jordan 標準形

定義 6.1: $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, 次の $J(\lambda; n)$ を **Jordan 細胞** という :

$$J(\lambda; n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Jordan 細胞を用いて, 次のように表される正方行列を **Jordan 標準形** という :

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & & \\ & J(\lambda_2; m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix} \in M_{m_1 + \cdots + m_r}(\mathbb{C}).$$

定理 6.3: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零行列ならば, ある正則な $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在し,

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0; m_1) & & \\ & J(0; m_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J(0; m_r) \end{pmatrix}.$$

証明の流れはおおまかには次のようになる:

1. べき零行列 N には, 増大列 $\{0\} \subsetneq \text{Ker } N \subseteq \dots \subseteq \text{Ker } N^k = \mathbb{C}^n$ が付随する.
2. 増大列に“沿う”ような良い具合の基底をとっていく.
3. A をこの基底で取り換えると Jordan 標準形になっている.

Setup

$N = O$ なら始めから Jordan 標準形になっているので、以下では $N \neq O$ とする。

- k を, $N^k = O$ となるような最小の自然数とする. $\leadsto 2 \leq k \leq n$.
- $W_j = \text{Ker } N^j$ を “ j 次の Kernel” と呼ぶことにする (これは一般的でない名称) .

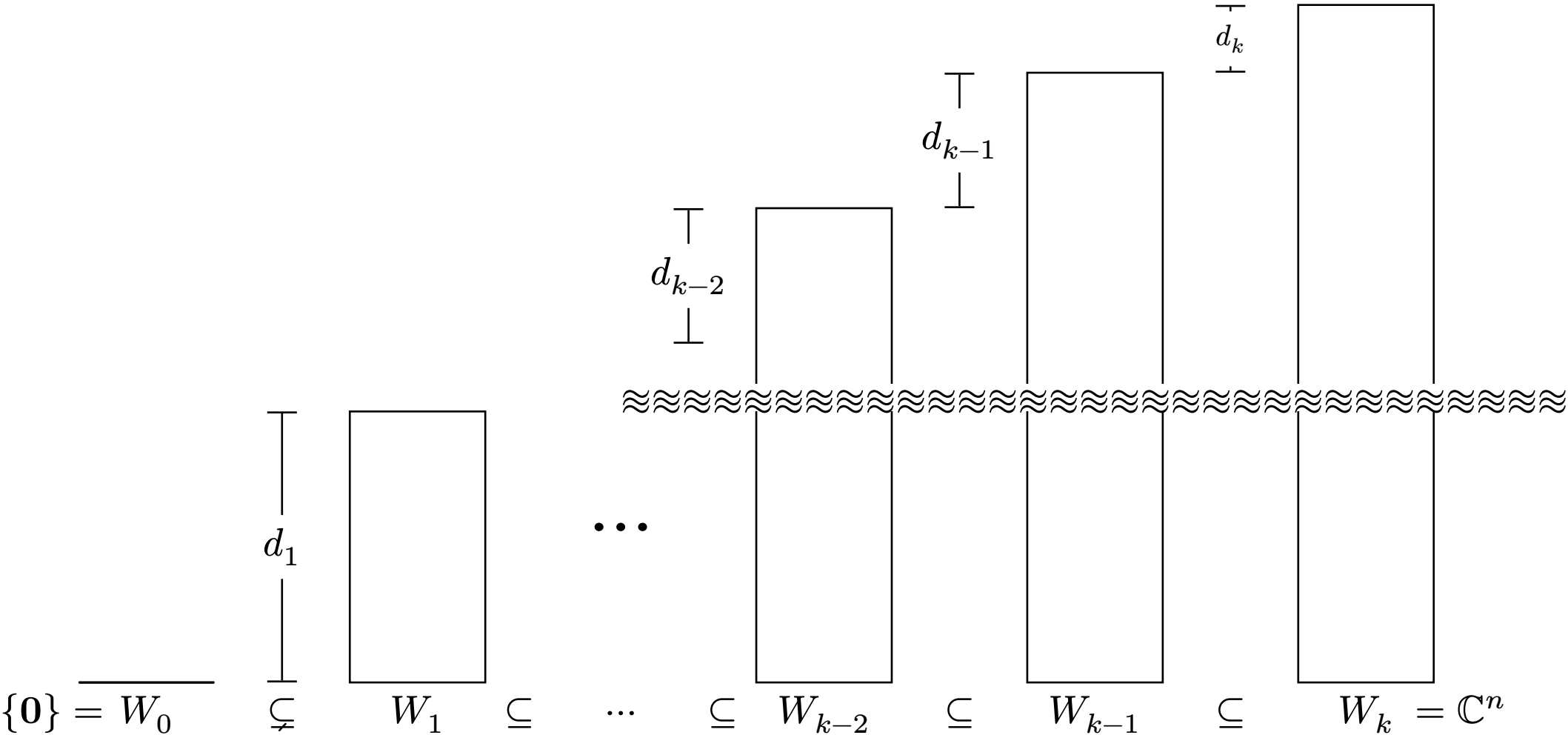
次のような増大列をイメージする：

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

N は正則でない ($\because N$ の固有値はすべて $0 \leadsto \det N = 0$) から,

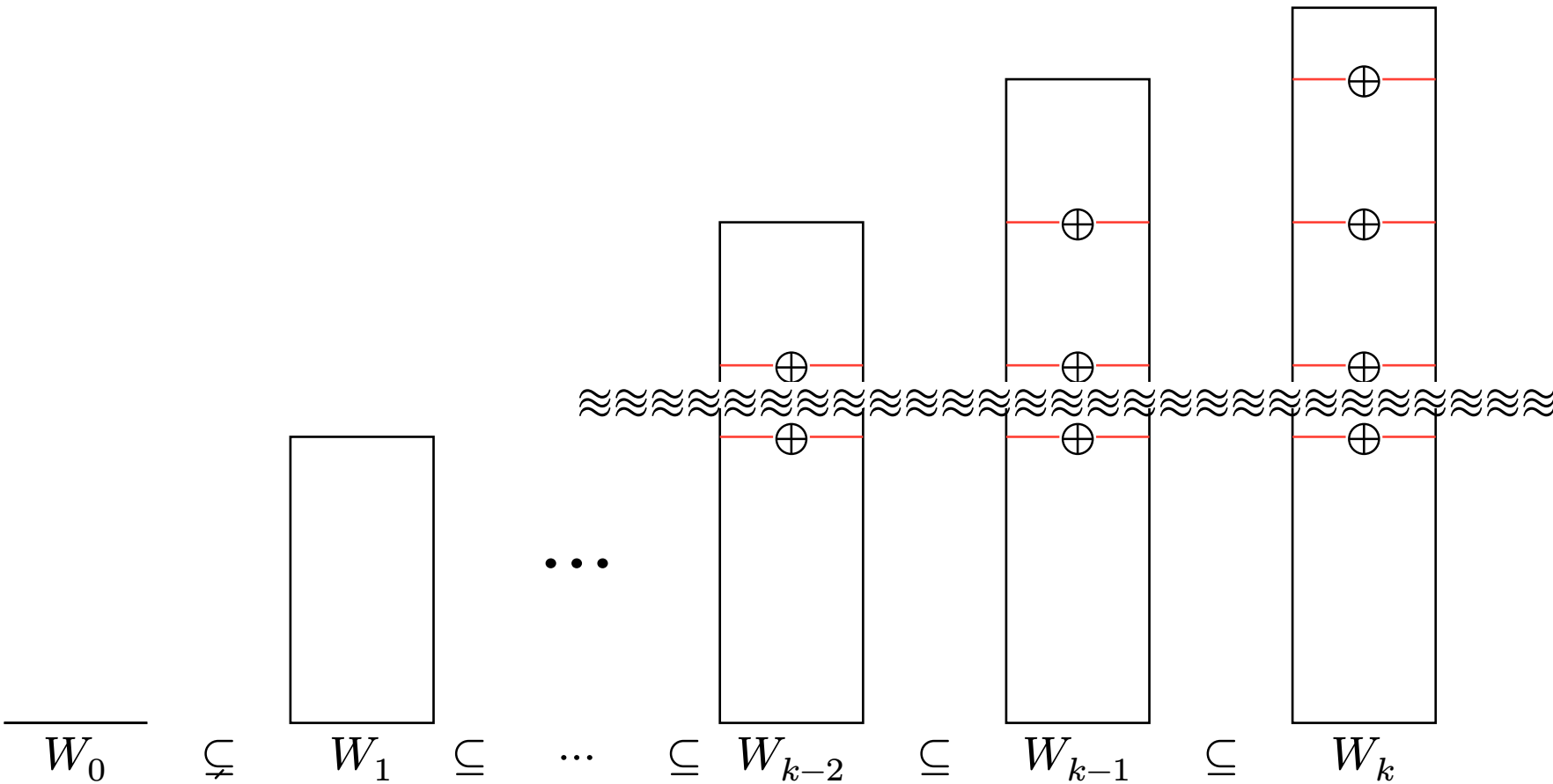
$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

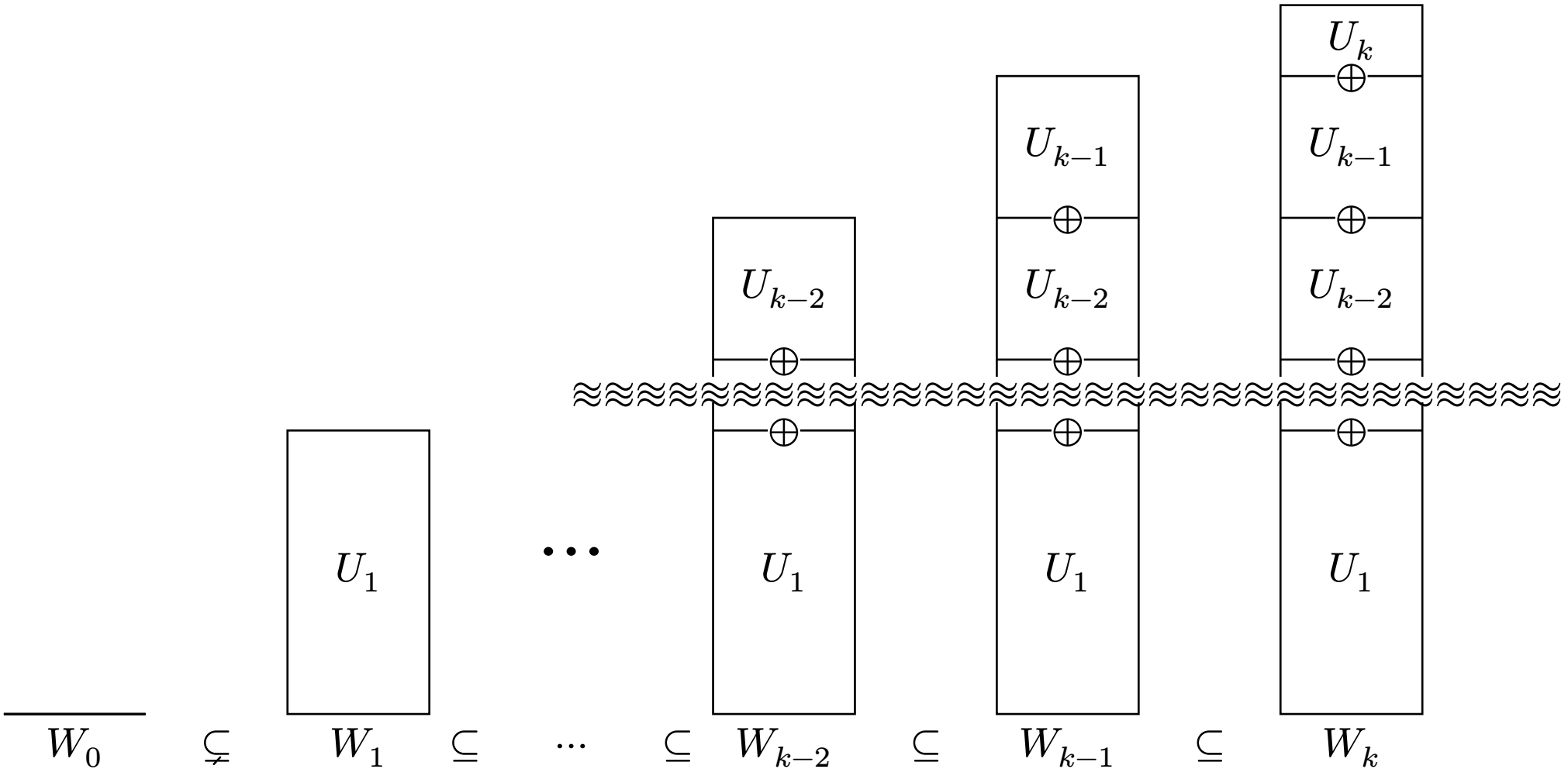
- $1 \leq j \leq k$ について $d_j = \dim W_j - \dim W_{j-1}$ とすると, d_j はつねに非負.
 - $\leadsto \sum_{j=1}^k d_j = \dim \mathbb{C}^n - \dim \{\mathbf{0}\} = n$.



増大列の直和分割

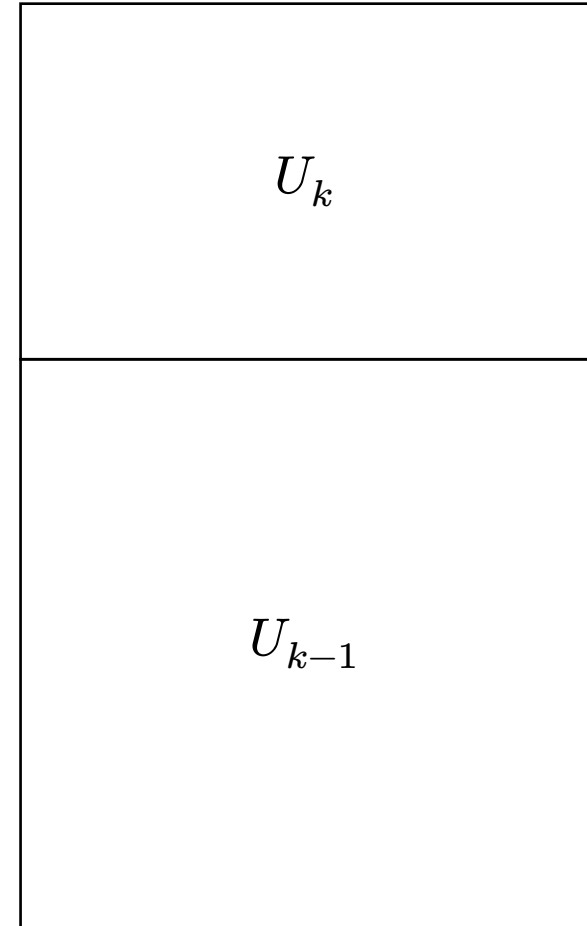
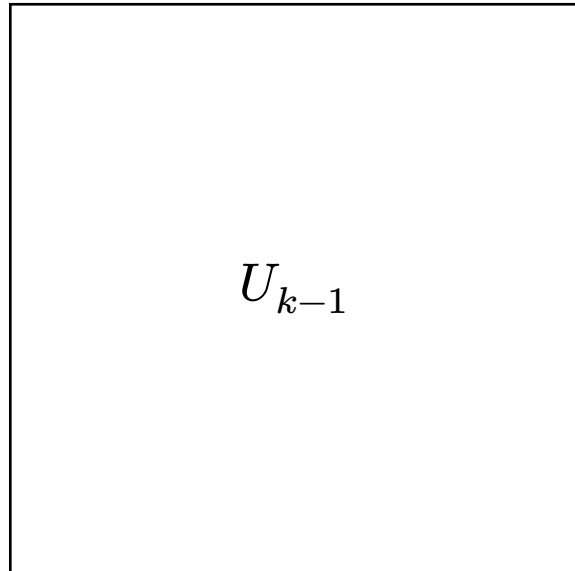
Remark V の部分空間 W に対して, $V = W \oplus \tilde{W}$ なる \tilde{W} が存在する.





W_{k-1}, W_k の上段を抜粋.

べき零行列の Jordan 標準形



Check! U_j は“ $N^j \times$ でやっと 0 になる”ベクトル全体によって張られる部分空間。

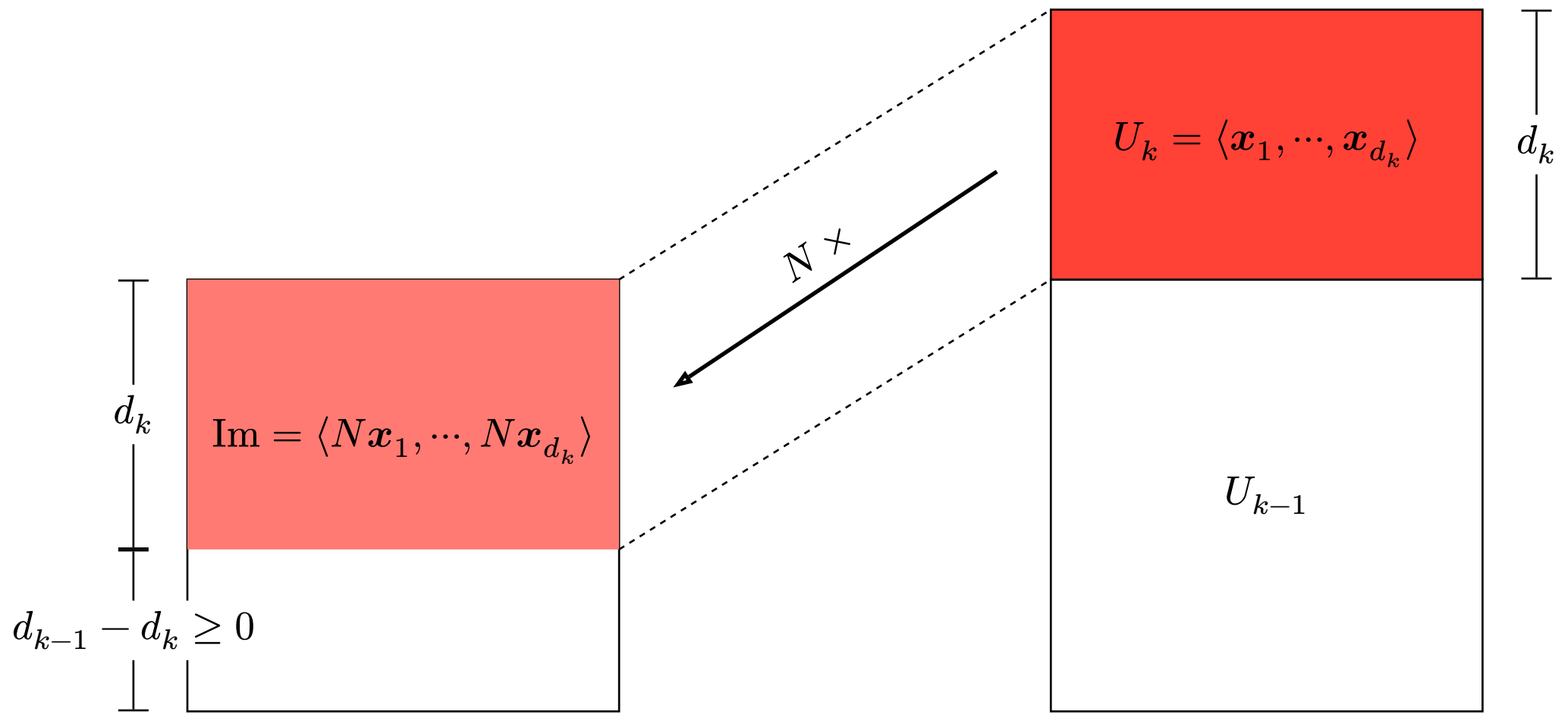
線型独立な $x_1, \dots, x_{d_k} \in U_k$ によって W_{k-1} の基底を延長して W_k の基底とする。

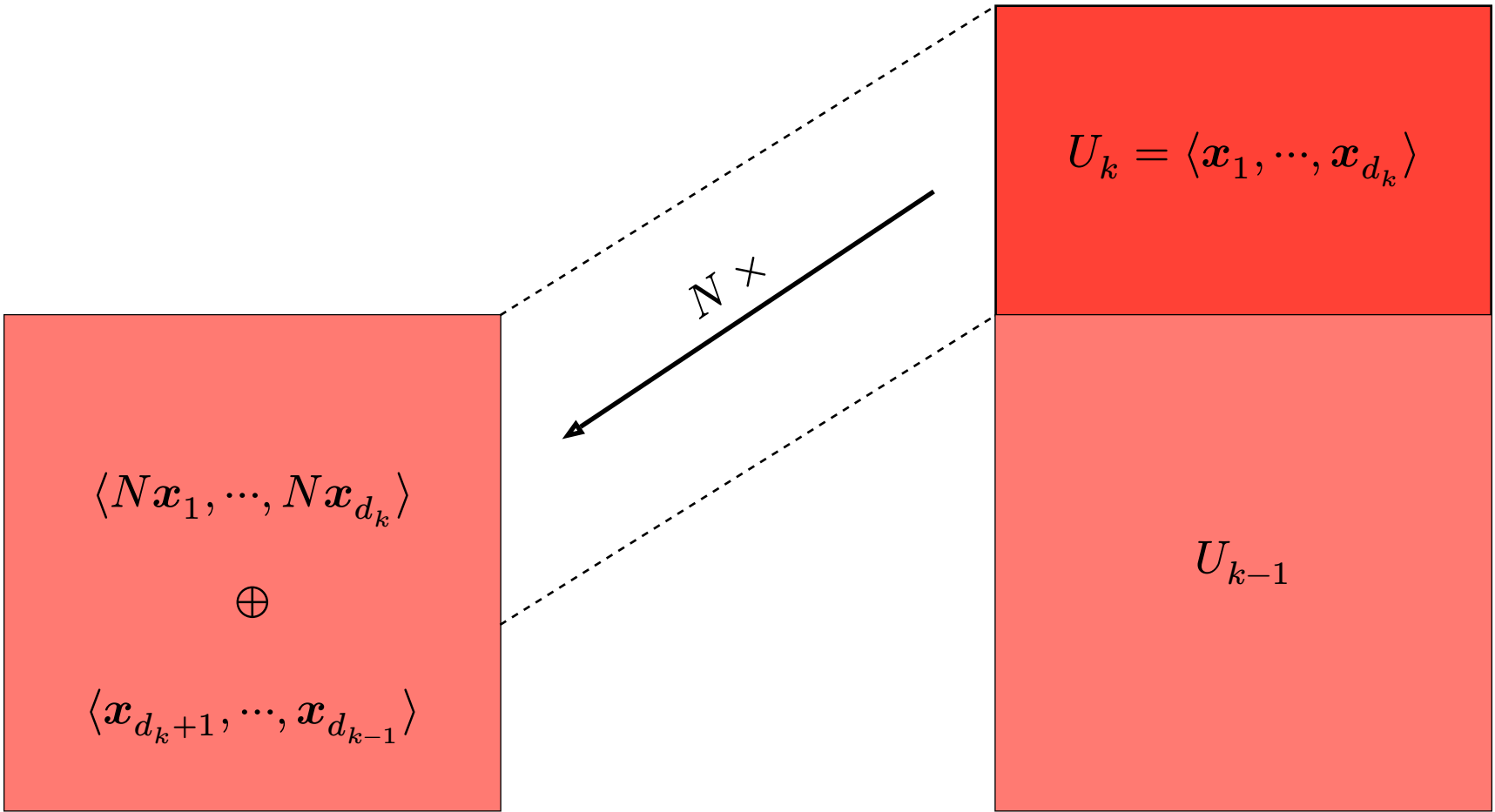
このとき, x_1, \dots, x_{d_k} は次の条件を満たしている:

1. $\langle Nx_1, \dots, Nx_{d_k} \rangle \subseteq U_{k-1}$.
 - x_j は“ N^k でやっと 0 になる”から, Nx_j は“ N^{k-1} でやっと 0”になる.
2. Nx_1, \dots, Nx_{d_k} は線型独立.
 - $\sum_j c_j Nx_j = 0 \Rightarrow N\left(\sum_j c_j x_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_j c_j x_j \in W_1 \Rightarrow \sum_j c_j x_j \in W_{k-1}$.
 - もし $\sum_j c_j x_j \neq 0$ であれば $x_j \notin W_{k-1}$ に矛盾するので, $\sum_j c_j x_j = 0$.
 - x_1, \dots, x_{d_k} は線型独立だったから $c_1 = \dots = c_{d_k} = 0$.

$\text{Im}_N U_k \subseteq U_{k-1}$ の様子.

べき零行列の Jordan 標準形





W_{k-2} の上段でも同様の現象が起こる.

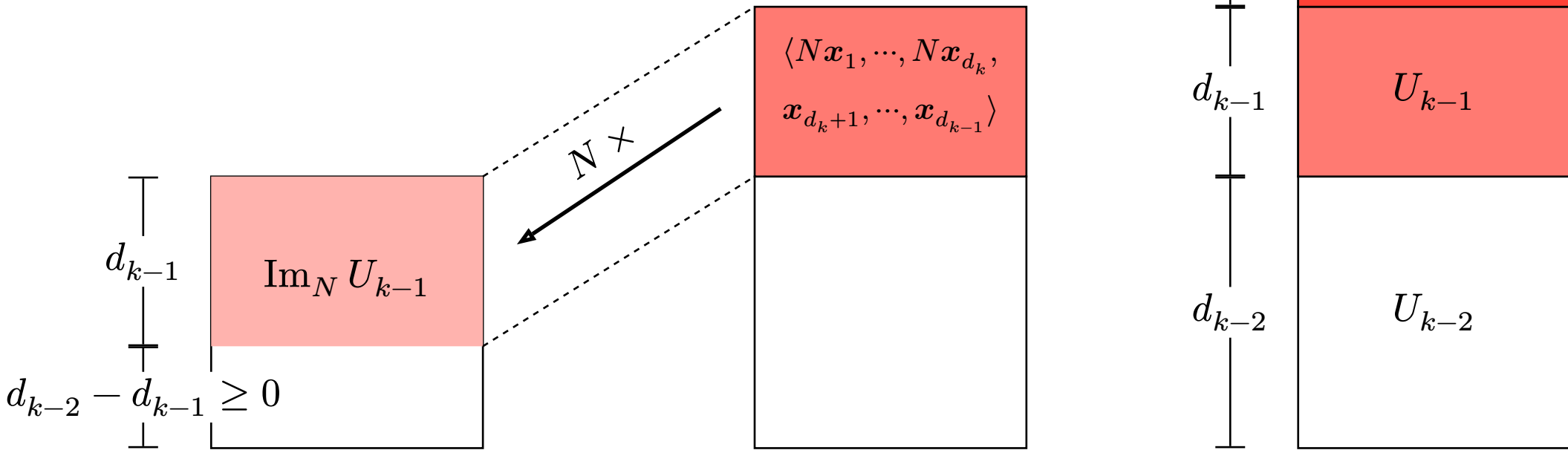
U_{k-1} の基底は $Nx_1, \dots, Nx_{d_k}, x_{d_k+1}, \dots, x_{d_{k-1}}$ になっている.

$\text{Im}_N U_k \subseteq U_{k-1}$ と Nx_1, \dots, Nx_{d_k} の線型独立性を示したときとまったく同様にして次が成り立つ:

- $\text{Im}_N U_{k-1} = \langle N^2x_1, \dots, N^2x_{d_k}, Nx_{d_k+1}, \dots, Nx_{d_{k-1}} \rangle \subseteq U_{k-2}$.
- $N^2x_1, \dots, N^2x_{d_k}, Nx_{d_k+1}, \dots, Nx_{d_{k-1}}$ は一次独立.
 - 次のように換言してもよい: $N \times$ によって U_{k-1} は退化しない. つまり, $\dim \text{Im}_N U_{k-1} = d_{k-1}$.

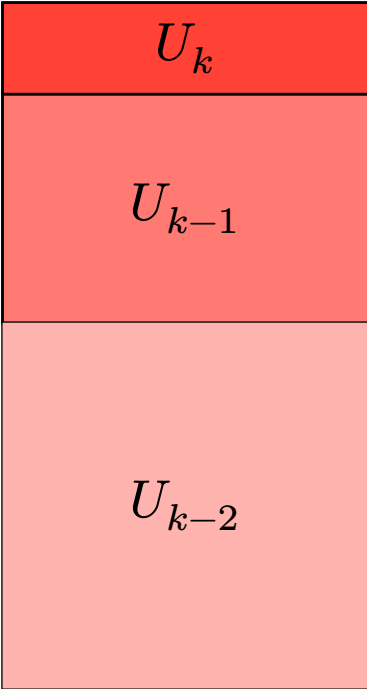
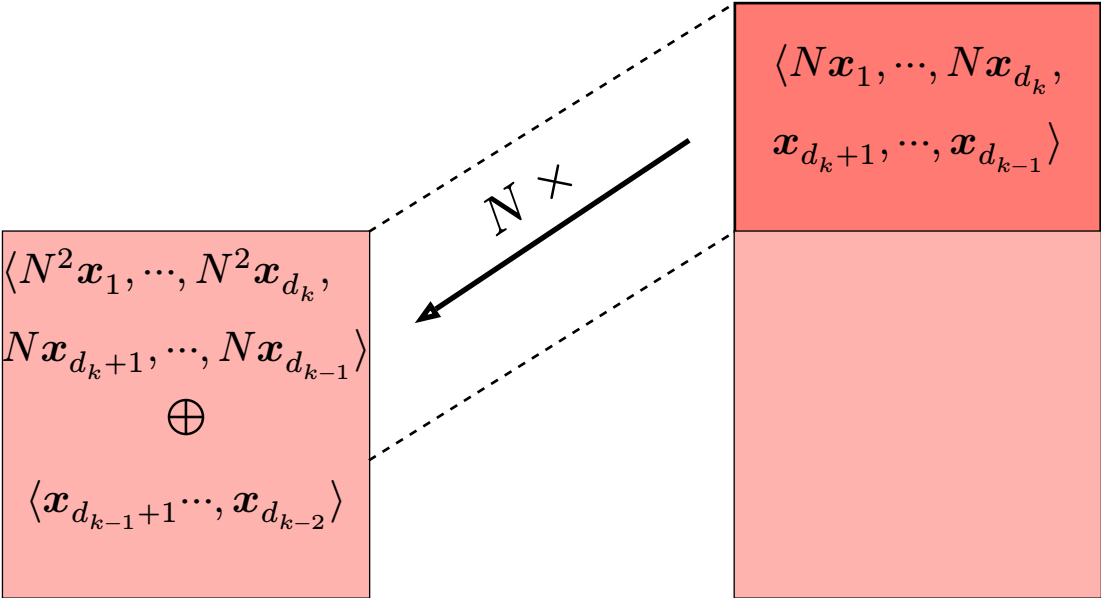
$\text{Im } U_{k-1} \subseteq U_{k-2}$ の様子.

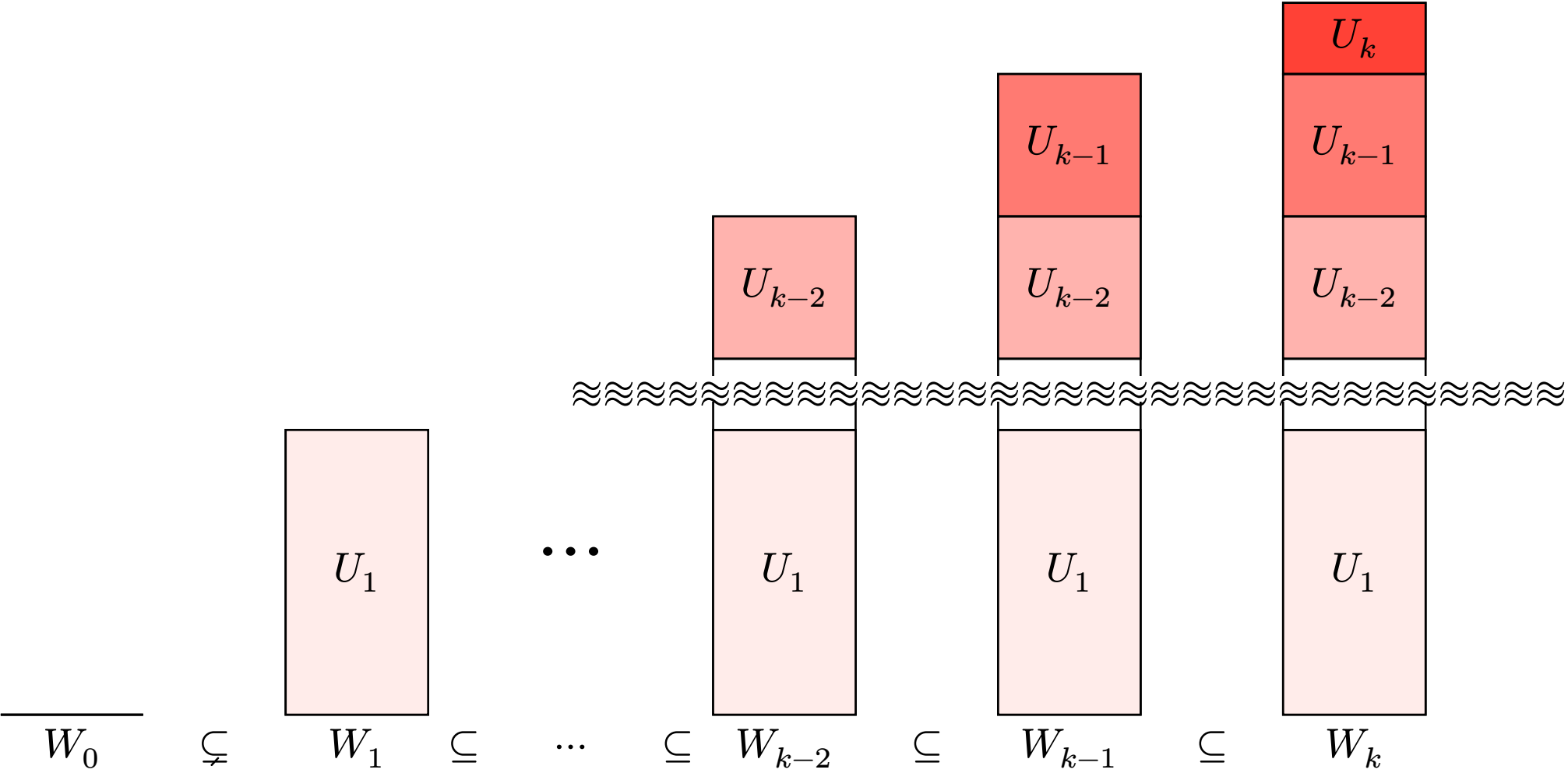
べき零行列の Jordan 標準形



例によって余った部分の基底をとる.

べき零行列の Jordan 標準形





\mathbb{C}^n の基底

以上のような操作を繰り返すことにより $\mathbb{C}^n = W_k = U_k \oplus \cdots \oplus U_1$ の基底をとることができる.

U_k の基底

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$$

U_{k-1} の基底

$$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k} \qquad \boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$$

\vdots

\vdots

\vdots

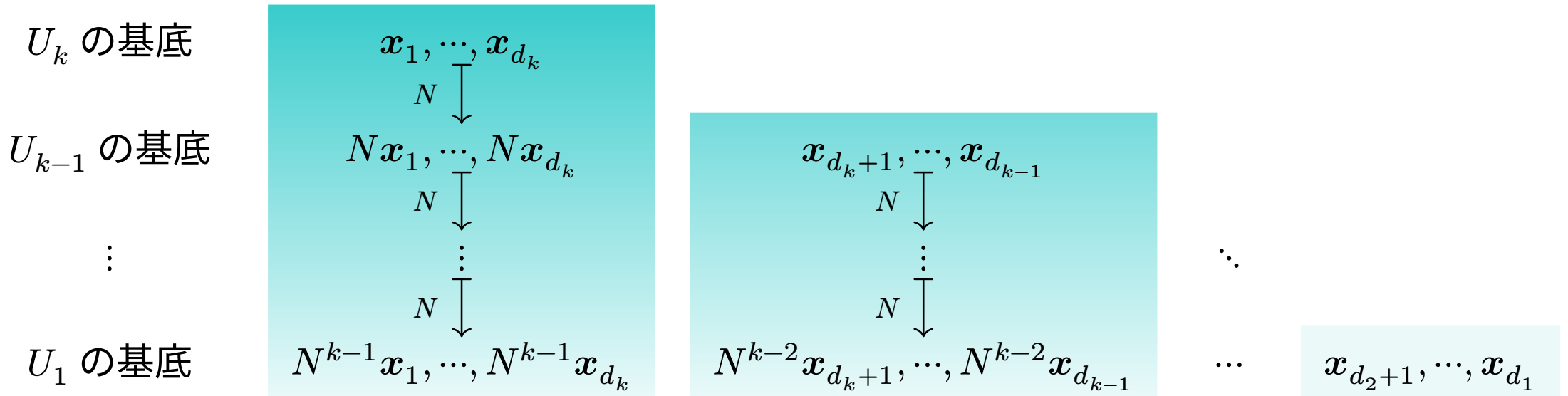
\ddots

U_1 の基底

$$N^{k-1}\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}_{d_k} \qquad N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{x}_{d_2+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_1}$$

視点の変換：“seed”により基底が生成されていく．べき零行列の Jordan 標準形

- “余った部分”でとった基底 x_l を seed と見る．
- $d_j + 1 \leq l \leq d_{j-1}$ なら， $x_l \in U_j$ は “レベル j の seed”．



$P_{j,l}$ の構成

レベル j の seed x_l は、一次独立なベクトルの列を生成している。

$$x_l \rightarrow Nx_l \rightarrow \cdots \rightarrow N^{j-1}x_l (\rightarrow N^jx_l = \mathbf{0}).$$

これを並べることで、 $n \times j$ 行列 $P_{j,l}$ をとる。

$$P_{j,l} = (N^{j-1}x_l \ N^{j-2}x_l \ \cdots \ Nx_l \ x_l).$$

$$\leadsto NP_{j,l} = (\mathbf{0} \ N^{j-1}x_l \ \cdots \ N^2x_l \ Nx_l)$$

$$= (N^{j-1}x_l \ N^{j-2}x_l \ \cdots \ Nx_l \ x_l) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= P_{j,l}J(0; j).$$

Check! $P_{j,l}$ は、レベル j の seed x_l による長さ j のベクトル列。

P の構成

次のようにして $P_{j,l}$ を並べることで, $n \times n$ 行列 P を構成する.

$$P = (P_{k,1} \ \cdots \ P_{k,d_k} \ \cdots \ P_{1,d_2+1} \ \cdots \ P_{1,d_1}).$$

結局先程の基底を並べかえているだけなので, P は当然正則.

$$\begin{aligned} NP &= (NP_{k,1} \ \cdots \ NP_{k,d_k} \ \cdots \ NP_{1,d_2+1} \ \cdots \ NP_{1,d_1}) \\ &= (P_{k,1}J(0; d_k) \ \cdots \ P_{k,d_k}J(0; d_k) \ \cdots \ P_{1,d_2+1}J(0; 1) \ \cdots \ P_{1,d_1}J(0; 1)) \\ &= \overbrace{(P_{k,1} \ \cdots \ P_{k,d_k} \ \cdots \ P_{1,d_2+1} \ \cdots \ P_{1,d_1})}^P \begin{pmatrix} J(0; d_k) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(0; d_k) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J(0; 1) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J(0; 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上より, N と相似な Jordan 標準形の存在が示された.

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0; d_k) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J(0; d_k) & \\ & & & \ddots \\ & & & & J(0; 1) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J(0, 1) \end{pmatrix}.$$

Jordan 細胞の分布は d_j の分布によって定まる.

↪ サイズ d_j の Jordan 細胞が $d_j - d_{j+1}$ 個.

余談：主格転倒

Question $P = (P_{k,1} \cdots P_{k,d_k} \cdots P_{1,d_2+1} \cdots P_{1,d_1})$ は本当に n 本のベクトルを含むのか？

- P を構成する行列のうち、サイズが $n \times j$ なのは $P_{j,d_{j+1}+1}, \dots, P_{j,d_j}$ の $d_j - d_{j+1}$ 個.
- したがって、 P に含まれるベクトルは合計で $\sum_{j=1}^k j(d_j - d_{j+1})$ 本.
- $\sum_{j=1}^k j(d_j - d_{j+1}) = n$ を計算するのは意外と難しい.

主格転倒テク 積の和を計算するときに、添字を取り換えるテクニック.

- 「 j が $d_j - d_{j+1}$ 個寄与する」という視点を転換して、「 d_j がいくつ寄与するか」を考える.
- d_j の寄与は $j - (j - 1) = 1$.
- したがって $\sum_j j(d_j - d_{j+1}) = \sum_{d_j} d_j = d_1 + \cdots + d_n = n$.