§6. Jordan 標準形（べき零行列の場合）

輪講 #3

2025-02-23

Jordan 細胞，Jordan 標準形

定義 6.1: $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次の $J(\lambda; n)$ を **Jordan 細胞**という：

$$J(\lambda; n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Jordan 細胞を用いて，次のように表される正方行列を **Jordan 標準形** という：

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & & \\ & J(\lambda_2; m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix} \in M_{m_1+\cdots+m_r}(\mathbb{C}).$$

べき零行列

- 正方行列 N が**べき零**であるというのは，$N^k = O$ となるような k が存在すること．

  例: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零．

定理 6.1: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零 $\Leftrightarrow$ N のすべての固有値が 0.

Proof:

($\Rightarrow$) 固有値 λ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に N を左から然るべき回数掛けると，

$\mathbf{0} = N^k \boldsymbol{v} = \lambda^k \boldsymbol{v}$ より $\lambda = 0$.

($\Leftarrow$) 固有多項式は $\phi_N(x) = x^n$. Cayley-Hamilton の定理より $N^n = O$.

$\square$

Remark 対角化可能なべき零行列は零行列に限る．

べき零行列のべきの特徴付け

定理 6.2: $N \in M_n(\mathbb{C})$ をべき零行列とする． k を $N^k = O$ となる最小の自然数とすると，$k \le n$.

Proof: $N^{k-1} \neq O$ より $N^{k-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ がとれる．

Claim $\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x}, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}$ は一次独立．

- 線型関係式 $\sum_{0 \le i < k} c_i N^i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える．
- 両辺に N^{k-1} を左から掛けることで $c_0 = 0$ を得る．
- 同様に $N^{k-2}, \cdots, N, I$ を左から掛けることで線型関係式が自明であることがいえる．

したがって，特に $k \le n$ がいえる． □

べき零行列の Jordan 標準形

定理 6.3: $N \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零行列ならば，ある正則な $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在し，

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0; m_1) & & & \\ & J(0; m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0; m_r) \end{pmatrix}.$$