§ 11. 行列のべき乗と差分方程式

輪講 #6

2025-03-10

1 階の連立定数係数同次線型差分方程式

連立方程式がある．

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = a_{11}x_k^{(1)} + a_{12}\,x_k^{(2)} + \cdots + a_{1n}x_k^{(n)} \\ x_{k+1}^{(2)} = a_{21}x_k^{(1)} + a_{22}\,x_k^{(2)} + \cdots + a_{2n}x_k^{(n)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_{k+1}^{(n)} = a_{n1}x_k^{(1)} + a_{n2}x_k^{(2)} + \cdots + a_{nn}x_k^{(n)} \end{cases}$$

これは行列と数ベクトルによって簡単に書き表すことができる．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

とすると， $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k$.

1 階の連立定数係数同次線型差分方程式

初期値を $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}$ とすると，

$$\boldsymbol{x}_k = A^k \boldsymbol{x}_0.$$

Motivation 一般の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して A^k を計算したい！

1. Jordan 標準形を利用する方法．
   $A = PJP^{-1}$ とすれば $A^k = PJ^kP^{-1}$ だから，Jordan 標準形のべき乗を計算．
2. 一般スペクトル分解を利用する方法．

行列のべき乗（Jordan 標準形の利用）

Jordan 標準形の存在定理より，任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して正則行列 $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix} =: J.$$

ブロック対角行列の性質により，

$$\begin{aligned} A^k &= PJ^kP^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r; m_r)^k \end{pmatrix}P^{-1}. \end{aligned}$$

したがって，Jordan 細胞のべき乗 $J(\lambda; m)^k$ が計算できればよい．

$N = J(0;m)$ はべき零行列であり，$J(\lambda;m) = \lambda I + N$ と書ける．

$$
\begin{aligned}
J(\lambda;m)^k &= (\lambda I + N)^k \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \cdots & 0 & \binom{k}{j}\lambda^{k-j} & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & \binom{k}{j}\lambda^{k-j} \\
\hline
 & & & & & 0 \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} j \end{array}
= \begin{pmatrix}
\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\
0 & \lambda^k & \cdots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda^k
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

行列のべき乗（一般スペクトル分解）

Jordan 分解 $A = S + N$ の半単純部分をスペクトル分解する：$S = \sum_{l=0}^{r} \lambda_l P_l$.

$$A^k = (S+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S^{k-j} N^j$$

半単純部分 S のべき乗は簡単に計算できる．

$$S^{k-j} = \sum_{l=0}^{r} \lambda_l^{k-j} P_l.$$

べき零部分 N はどうだろう？

$$N = A - \sum_l \lambda_l P_l = \sum_l (A - \lambda_l I) P_l$$

$$\rightsquigarrow N^j = \sum_l \underbrace{(A - \lambda_l I)^j}_{\text{if } j \geq k_l \text{ then } O} P_l.$$

行列のべき乗（一般スペクトル分解）

まとめると，

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{r} \binom{k}{j} \lambda_l^{k-j} (A - \lambda_l I)^j P_l$$

行列のべき乗の計算例

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

に対して A^k を求めてみよう．

Jordan 標準形による計算

- $\phi_A(x) = (x-2)^2$ であり，$A - 2I \neq O$ より $\psi_A(x) = (x-2)^2$ となる．
- Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ だとわかったので，基底を計算する．
- $\mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathrm{Ker}\,(A-2I)^2 = \mathbb{C}^2.$
- したがって $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ と線型独立な $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}$ としてとると，$(A-2I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ で，

$$(A-2I)((A-2I)\boldsymbol{x} \ \ \boldsymbol{x}) = ((A-2I)\boldsymbol{x} \ \ \boldsymbol{x})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 以上より，$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $A = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$.
- $A^k = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 2^k\begin{pmatrix} 3k+1 & \frac{9}{2}k \\ -2k & -3k+1 \end{pmatrix}.$

行列のべき乗の計算例

一般スペクトル分解による計算

- $\phi_A(x) = (x-2)^2$ であり，$A - 2I \neq O$ より $\psi_A(x) = (x-2)^2$ となる．
- 射影の和は I なので，一般スペクトル分解は $A = 2I + (A - 2I)$ で与えられる．
- $$\begin{aligned} A^k &= (2I)^k + (2I)^{k-1}(A-2I) \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ &= 2^k \begin{pmatrix} 3k+1 & \frac{9}{2}k \\ -2k & -3k+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この場合はスペクトル分解が自明なので後者の方がラク．

同伴行列

定義: n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

を多項式 $F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$ の**同伴行列**という．

Remark A^{T} が同伴行列として定義されることもある．

Remark

- $\phi_A(x) = F(x)$.
  - 帰納法による．
- 各固有空間の次元は 1.
  - $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ とすると，$x_2 = \lambda x_1, \cdots, x_n = \lambda x_{n-1}, -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n = \lambda x_n$.
  - したがって$\boldsymbol{x}$ の自由度は 1 しかない．
  - 特に，A が対角化可能 $\Leftrightarrow \phi_A$ が相異なる一次式の積に分解される．
- $\boldsymbol{e}_1^\top$ に**右から** A を適用していくと，次のようになる．

$$\boldsymbol{e}_1^\top \xmapsto{\times A} \boldsymbol{e}_2^\top \xmapsto{\times A} \cdots \xmapsto{\times A} \boldsymbol{e}_n^\top \xmapsto{\times A} (-a_n, \cdots, -a_1)$$

$0 \leq j < n$ に対して，$\boldsymbol{e}_1^\top A^j = \boldsymbol{e}_{j+1}^\top$ となっている．

定理: 多項式 $F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ の同伴行列 A の最小多項式は $F(x)$.
つまり，固有多項式と最小多項式が一致するということ.

Proof: Cayley-Hamilton の定理より，$F(A) = \phi_A(A) = O$.
n 次未満の多項式 $G(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n$ に対して $G(A) = O$ だったとすると，

$$
\begin{aligned}
& b_1 A^{n-1} + b_2 A^{n-2} + \cdots + b_n = O \\
\Rightarrow\ & b_1 \boldsymbol{e}_1^\top A^{n-1} + b_2 \boldsymbol{e}_1^\top A^{n-2} + \cdots + b_n \boldsymbol{e}_1^\top = \mathbf{0} \\
\Rightarrow\ & b_1 \boldsymbol{e}_n^\top + b_2 \boldsymbol{e}_{n-1}^\top + \cdots + b_n \boldsymbol{e}_1^\top = \mathbf{0} \\
\Rightarrow\ & b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0.
\end{aligned}
$$

したがって $G(x) = 0$ となってしまうので，最小多項式は $F(x) = \phi_A(x)$. $\square$

n 階の定数係数同次線型差分方程式

定数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ によって次の漸化式：

$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \cdots + a_n x_k = 0$$

が与えられる数列 $(x_k)_k$ に対して，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_{k+n-1} \end{pmatrix}$$

を用いることで次の表式を得る：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k.$$

同伴行列のべき乗を求めよう．$\phi_A(x) = \prod_j \left(x - \lambda_j\right)^{m_j}$ が最小多項式に一致することから，λ_j の標数は m_j であり，A の Jordan 標準形は次のような形になっている．

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}$$

したがって，x_k は $\binom{k}{j}\lambda_l^{k-j}$ for j, k の線型結合で書ける．

Example $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{k+2} - 6x_{k+1} + 9x_k = 0$.

- $\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ として $\boldsymbol{x}_k = A^{k-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- $\phi_A(x) = \psi_A(x) = (x-3)^2$ より Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & k3^{k-2} \\ 0 & 3^{k-1} \end{pmatrix}$ より $x_k = 3^{k-2}(3\alpha + \beta k)$ と書ける．
- $x_1 = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = 1, x_2 = 3\alpha + 2\beta = 2$ より $\alpha = -4, \beta = 7$.
- $x_k = 3^{k-2}(7k - 12)$.