§ 22. 商空間

輪講 #10

2025-03-25

同値関係

Motivation まず，一般の集合に対して商集合を定義する．

定義: 集合 X 上の**二項関係**とは，X^2 の部分集合 R のことである．

$(x, y) \in R$ のことを $x \sim y$ などと略記することもある．

定義: 集合 X 上の二項関係 $\sim$ が**同値関係**であるとは，次が満たされるとき：

反射律 $\forall a \in X, a \sim a.$

対称律 $\forall a, b \in X, a \sim b \Rightarrow b \sim a.$

推移律 $\forall a, b, c \in X, a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c.$

同値関係

X を空でない集合とする．

例：自明な同値関係 空でない集合 X 上の二項関係 $R = X^2$ は同値関係．
$\rightsquigarrow$ すべての $a, b \in X$ について $a \sim b$.

例：相当関係 空でない集合 X 上の二項関係 $R = \{(x, x) \mid x \in X\}$ は同値関係．
$\rightsquigarrow$ $a \sim b \Leftrightarrow a = b$.

例：有理数 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上の二項関係 $R = \{((m, n), (m', n')) \mid mn' = m'n\}$ は同値関係． $\rightsquigarrow$ $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$

- （反射律） (m, n) に対して $mn = mn$ だから $(m, n) \sim (m, n)$.
- （対称律） $mn' = m'n \Rightarrow m'n = mn'$ だから $(m, n) \sim (m', n') \Rightarrow (m', n') \sim (m, n)$.
- （推移律） $(m, n) \sim (m', n'), (m', n') \sim (m'', n'') \Rightarrow mn' = m'n, m'n'' = m''n'$ であり， $mn'' = \left(\frac{n}{n'}m'\right)\left(\frac{m''}{m'}n'\right) = nm''$.

例 $\mathbb{R}$ 上の二項関係 $\leq$ は同値関係でない． $\rightsquigarrow$ 対称律に反する．

同値類

定義: 空でない集合 X 上の二項関係 $\sim$ がある．$a \in X$ に対して，X の部分集合

$$C(a) = [a] = \{x \in X \mid a \sim x\}$$

を a の**同値類** といい，各 $x \in C(a)$ を $C(a)$ の**代表元**という.

定理: 任意の $a \in X$ に対して，$a \in C(a)$. 特に $C(a)$ は空でない.

同値類

定理: 次は互いに同値.

(a) $a \sim b$

(b) $C(a) = C(b)$

(c) $C(a) \cap C(b) \neq \varnothing$

Proof:

(a) ⇒ (b) $x \in C(a)$ とすると $x \sim a$. 推移律より $x \sim b$. 逆も同様.

(b) ⇒ (c) 同値類は空でないことによる.

(c) ⇒ (a) $x \in C(a) \cap C(b)$ がとれて, $x \sim a, x \sim b$ が成立する. 対称律と推移律より $a \sim b$.

□

Remark $\sim$ による同値類全体は X を互いに素な部分集合の和に分解する.

商集合

定義: 集合 X 上の二項関係 $\sim$ に対して，$\sim$ による同値類全体は X の分割になる． これを $\sim$ による X の**商集合** といい，$X/\sim$ と書く．

$x \in X$ を $C(x) \in X/\sim$ に対応させる全射 $\pi : X \to X/\sim$ を**自然な射影**という．

部分集合による商空間

定理: 線型空間 V の部分空間 W に対して，$x \sim y := (x - y \in W)$ は V 上の同値関係である．

Proof:
反射律 $x - x = 0 \in W$ より $[x] = [x]$.
対称律 $x - y \in W \Rightarrow y - x \in W$ より $[x] = [y] \Rightarrow [y] = [x]$.
推移律 $x - y \in W \wedge y - z \in W \Rightarrow x - z \in W$ より $[x] = [y] \wedge [y] = [z] \Rightarrow [x] = [z]$

□

Remark $V/\sim$ を V/W と書く．

部分集合による商空間

定理: 線型写像 $+: V/W \times V/W \to V/W, \cdot : K \times V/W \to V/W$ で，次の図式を可換にするものがただ一つ存在する． これにより V/W は線型空間をなし，これを**商空間**という．

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/W \times V/W \arrow[r, "+"] & V/W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \times V \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\mathrm{id}_K \times \pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/W \times V/W \arrow[r, "\cdot"] & V/W \end{tikzcd}$$

Proof: $x, y \in V$ に対して $[x] + [y] = [x + y]$ と定義すると，$[x] = [x'], [y] = [y]$ なら $[x + y] = [x' + y']$ であることから，定理中の $+$ が well-defined であることが言える． $\cdot$ も同様． $\square$

商空間の次元

定理: $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

Proof:

$\dim W = 0$ のとき $V/W = V$ だから成立.

$\dim W = \dim V$ のとき $V = W$ だから成立.

$0 < \dim W < \dim V$ のとき W の基底 $x_1, \cdots, x_m$ を $x_{m+1}, \cdots, x_n$ により延長して V の基底とする．このとき，$[x_{m+1}], \cdots, [x_n]$ は一次独立である．実際，$\sum_{m<i} c_i[x_i] = [0] \Rightarrow \left[\sum_{m<i} c_i x_i\right] = [0] \Rightarrow \sum_{m<i} c_i x_i \in W$ だから $\sum_{i\leq m} c_i x_i = \sum_{m<i} c_i x_i$ なる $(c_i)_{i\leq m}$ が存在し，これは V 上の一次関係式だから $c_i = 0(\text{for } \forall i)$ となる．また，$[x_{m+1}], \cdots, [x_n]$ は V/W を生成する．実際，$[x] \in V/W$ に対し $x \in V$ より $x = \sum_i c_i x_i$ なる $c_i \in K$ がとれて，$x - \sum_{m<i} c_i x_i = \sum_{i\leq m} c_i x_i \in W$ より $[x] = \left[\sum_{m<i} c_i x_i\right] = \sum_{m<i} c_i [x_i]$ と書ける．$\therefore (V/W) = \dim V - \dim W$.

□

準同型定理

定理: 線型写像 $f : V \to W$ について，$V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$.

Proof: $[x] \in V/\operatorname{Ker} f$ に対して $f(x) \in \operatorname{Im} f$ を対応させる線型写像 $[f]$ が well-defined であることと，同型であることを示す．

まず，$[x] = [x']$ つまり $x - x' \in \operatorname{Ker} f$ なら $f(x) - f(x') = f(x - x') = 0$ となるから，$[f]$ は well-defined．

また，次元定理より $\dim V/\operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$ だから $V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$. □

Remark 準同型定理はさらに一般化され，代数学のいたるところに登場する．