

# § 6. Jordan 標準形（べき零行列の場合）

輪講 #3

2025-02-28

# べき零行列

---

# べき零行列

- 正方行列  $N$  が**べき零**であるというのは、 $N^k = O$  となるような  $k$  が存在すること.

例:  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  はべき零.

**定理 6.1:**  $N \in M_n(\mathbb{C})$  がべき零  $\Leftrightarrow N$  のすべての固有値が 0.

**Proof:**

- ( $\Rightarrow$ ) 固有値  $\lambda$  の固有ベクトル  $v$  に  $N$  を左から然るべき回数掛けると,  
 $0 = N^k v = \lambda^k v$  より  $\lambda = 0$ .
- ( $\Leftarrow$ ) 固有多項式は  $\phi_N(x) = x^n$ . Cayley-Hamilton の定理より  $N^n = O$ .

□

**Remark** 対角化可能なべき零行列は零行列に限る.

## べき零行列のべきの上界

**定理 6.2:**  $N \in M_n(\mathbb{C})$  をべき零行列とする.  $k$  を  $N^k = O$  となる最小の自然数とすると,  $k \leq n$ .

**Proof:**  $N^{k-1} \neq O$  より  $N^{k-1}x \neq 0$  なる  $x \in \mathbb{C}^n$  がとれる.

**Claim**  $x, Nx, \dots, N^{k-1}x$  は一次独立.

- 線型関係式  $\sum_{0 \leq i < k} c_i N^i x = 0$  を考える.
- 両辺に  $N^{k-1}$  を左から掛けることで  $c_0 = 0$  を得る.
- 同様に  $N^{k-2}, \dots, N, I$  を左から掛けることで線型関係式が自明であることがいえる.

したがって, 特に  $k \leq n$  がいえる.

□

# べき零行列の Jordan 標準形

---

**定義 6.1:**  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して, 次の  $J(\lambda; n)$  を **Jordan 細胞** という :

$$J(\lambda; n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Jordan 細胞を用いて, 次のように表される正方行列を **Jordan 標準形** という :

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & & & \\ & J(\lambda_2; m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix} \in M_{m_1 + \cdots + m_r}(\mathbb{C}).$$

**定理 6.3:**  $N \in M_n(\mathbb{C})$  がべき零行列ならば, ある正則な  $P \in M_n(\mathbb{C})$  が存在し,

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0; m_1) & & \\ & J(0; m_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J(0; m_r) \end{pmatrix}.$$

証明の流れはおおまかには次のようになる:

1. べき零行列  $N$  には, 増大列  $\{0\} \subsetneq \text{Ker } N \subseteq \dots \subseteq \text{Ker } N^k = \mathbb{C}^n$  が付随する.
2. 増大列に“沿う”ようにして, 都合の良い基底をとっていく.
3.  $A$  をこの基底で取り換えると Jordan 標準形になっている.

# Setup

$N = O$  なら始めから Jordan 標準形になっているので、以下では  $N \neq O$  とする。

- $k$  を,  $N^k = O$  となるような最小の自然数とする.  $\leadsto 2 \leq k \leq n$ .
- $W_j = \text{Ker } N^j$  を “ $j$  次の Kernel” と呼ぶことにする (これは一般的でない名称) .

次のような増大列をイメージする：

$$\{0\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

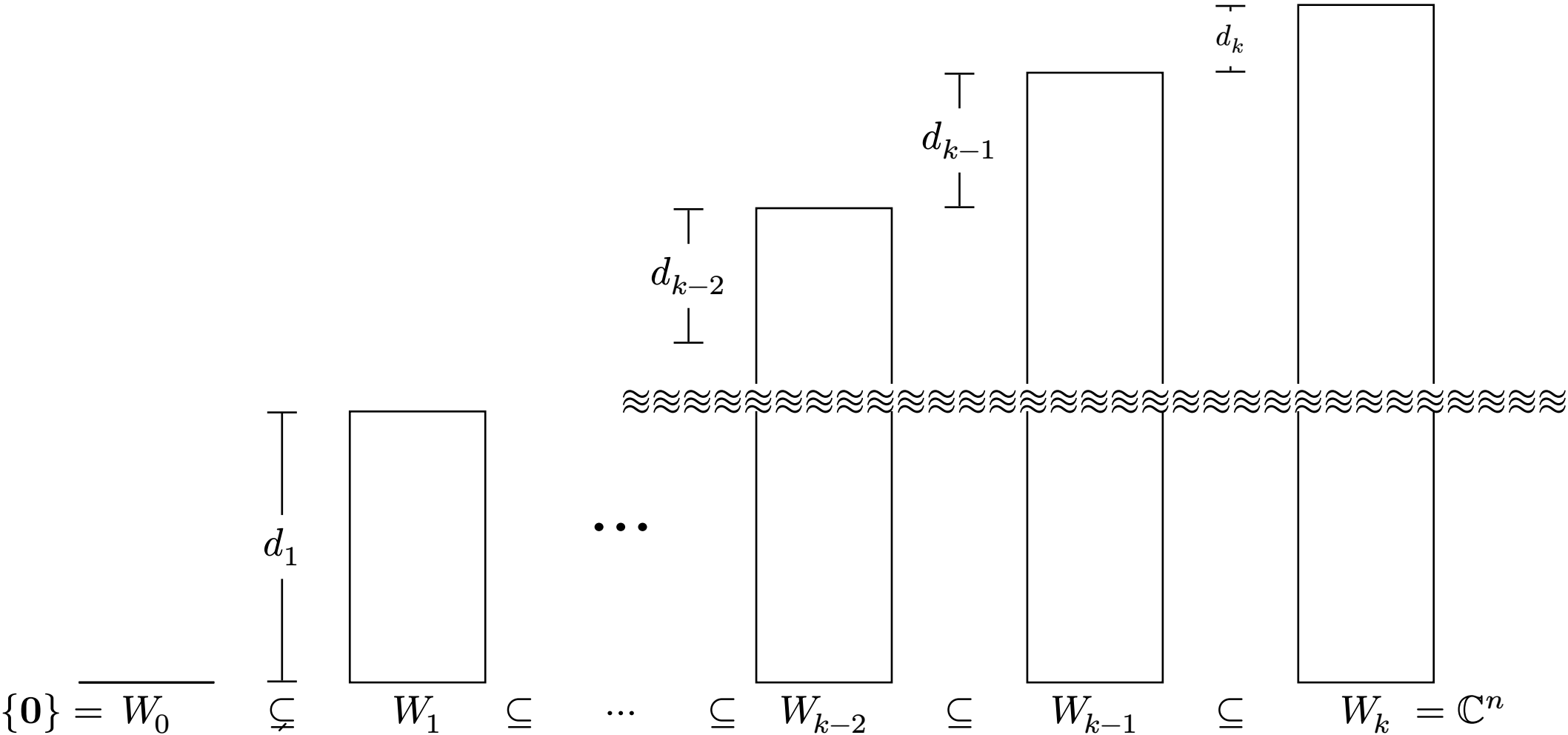
$N$  は正則でない ( $\because N$  の固有値はすべて  $0 \leadsto \det N = 0$ ) から,

$$\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k = \mathbb{C}^n.$$

- $1 \leq j \leq k$  について  $d_j = \dim W_j - \dim W_{j-1}$  とすると,  $d_j$  はつねに非負.
  - $\leadsto \sum_{j=1}^k d_j = \dim \mathbb{C}^n - \dim \{0\} = n$ .

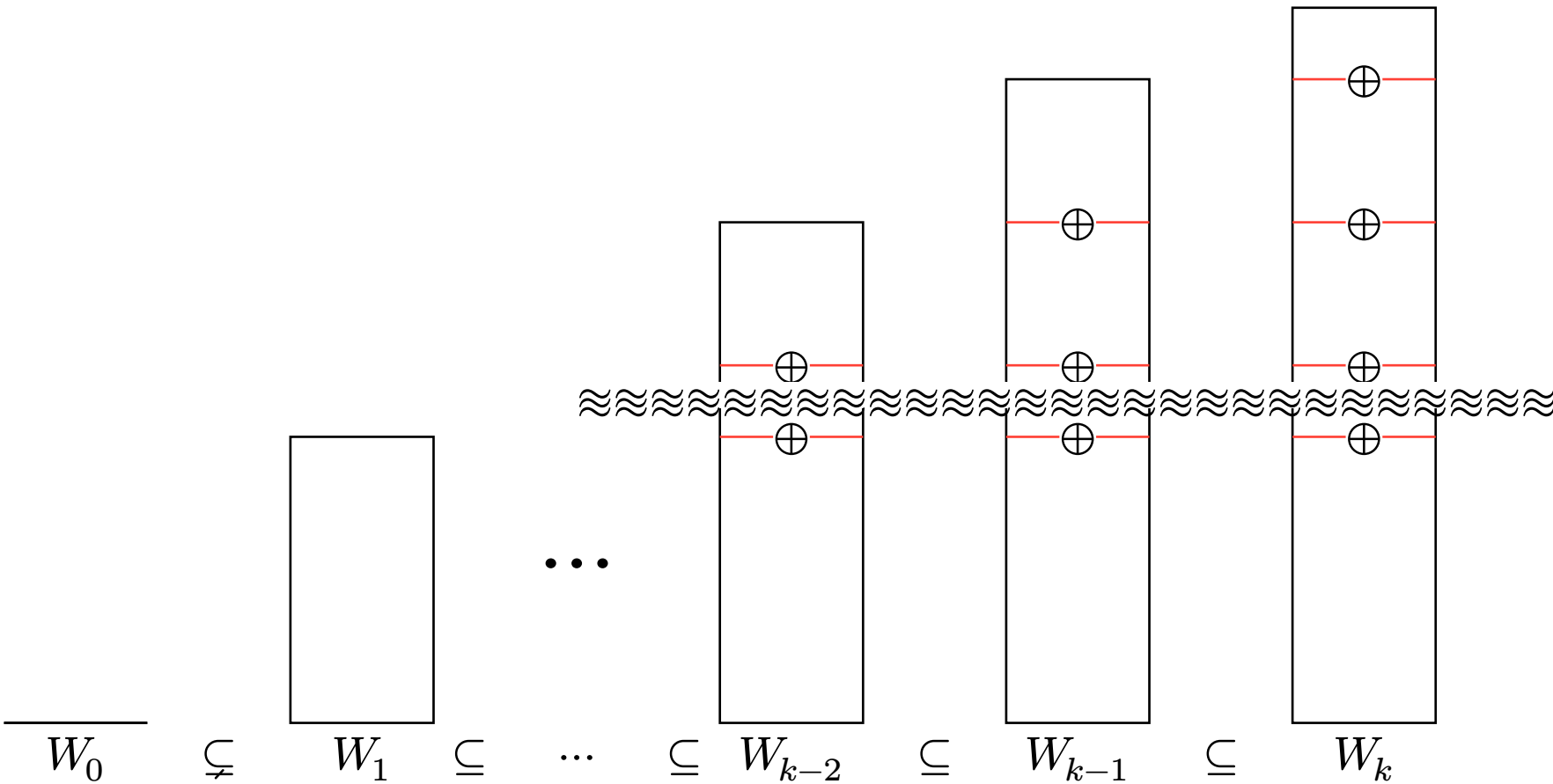
**Remark** 一般に, 線型空間の増大列のことを**旗 flag** という.

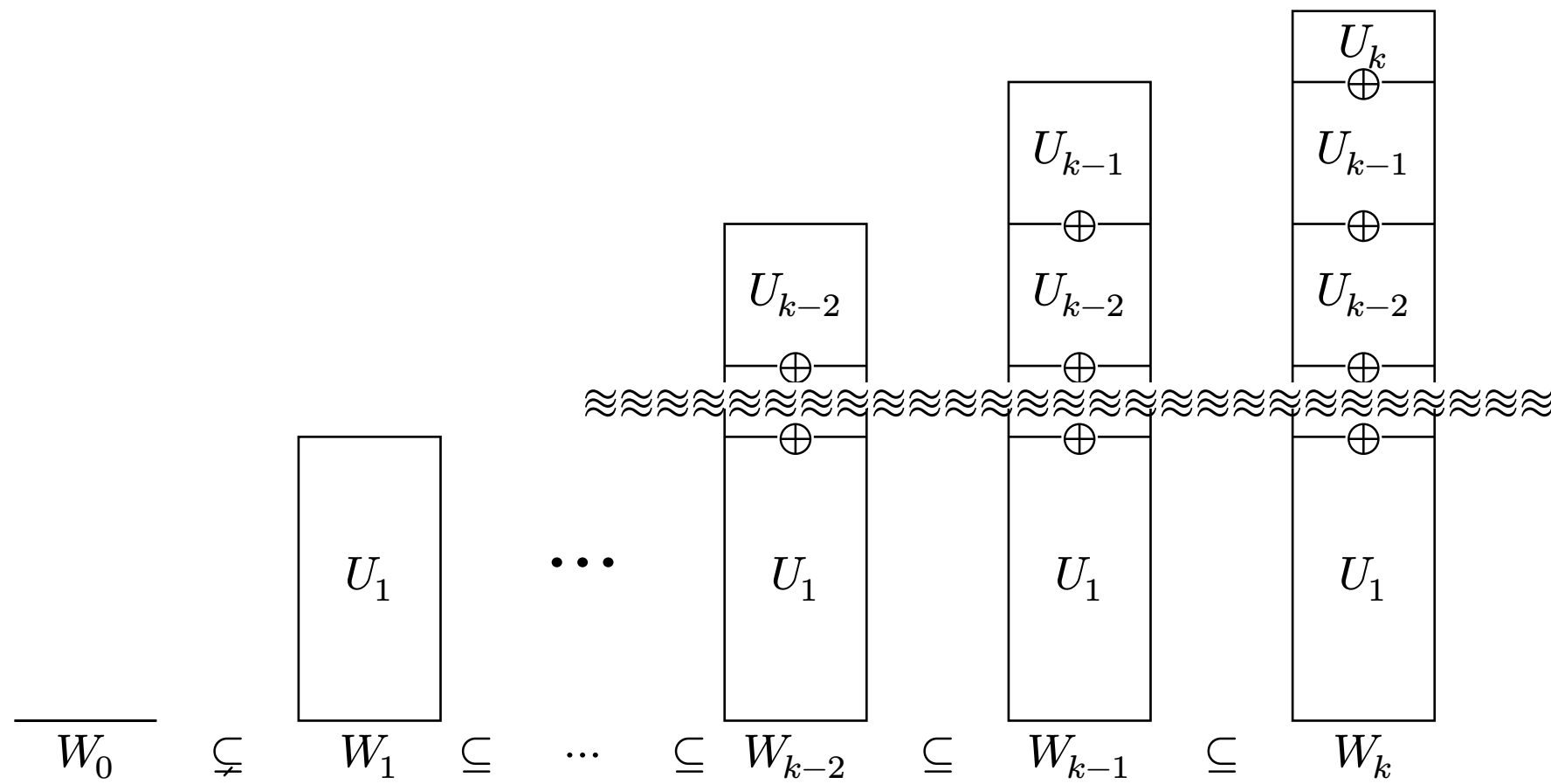




# 増大列の直和分割

**Remark**  $V$  の部分空間  $W$  に対して,  $V = W \oplus \tilde{W}$  なる  $\tilde{W}$  が存在する.

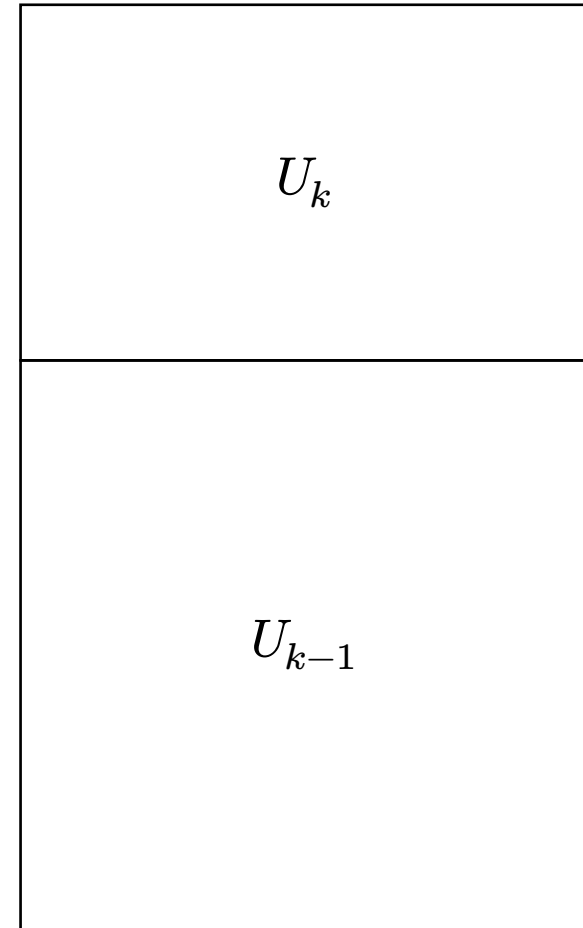
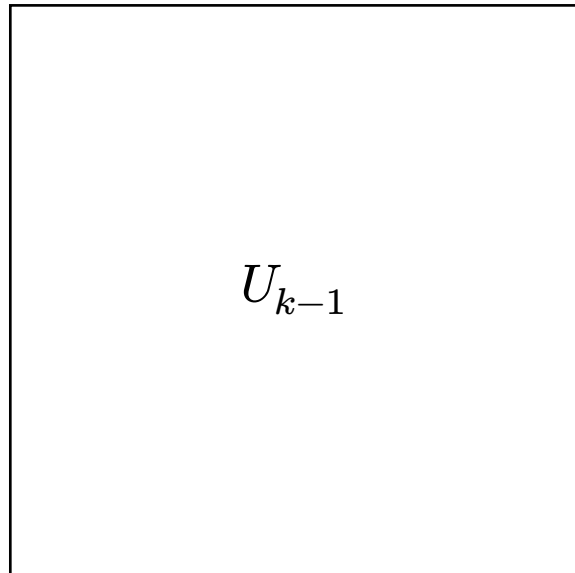




Check!  $U_j = W_j/W_{j-1}$  は“ $N^j$  でやっと 0 になる”ベクトル全体によって張られる部分空間.

$W_{k-1}, W_k$  の上段を抜粋

これから増大列から基底をとっていくので，基底がとれた部分に色を塗っていく．



$U_k$  の基底  $x_1, \dots, x_{d_k}$ 

線型独立な  $x_1, \dots, x_{d_k} \in U_k$  によって  $W_{k-1}$  の基底を延長して  $W_k$  の基底とする.

**Claim**  $N$  の  $U_k$  への制限は, 単射  $N|_{U_k} : U_k \rightarrow U_{k-1}$  として well-defined.

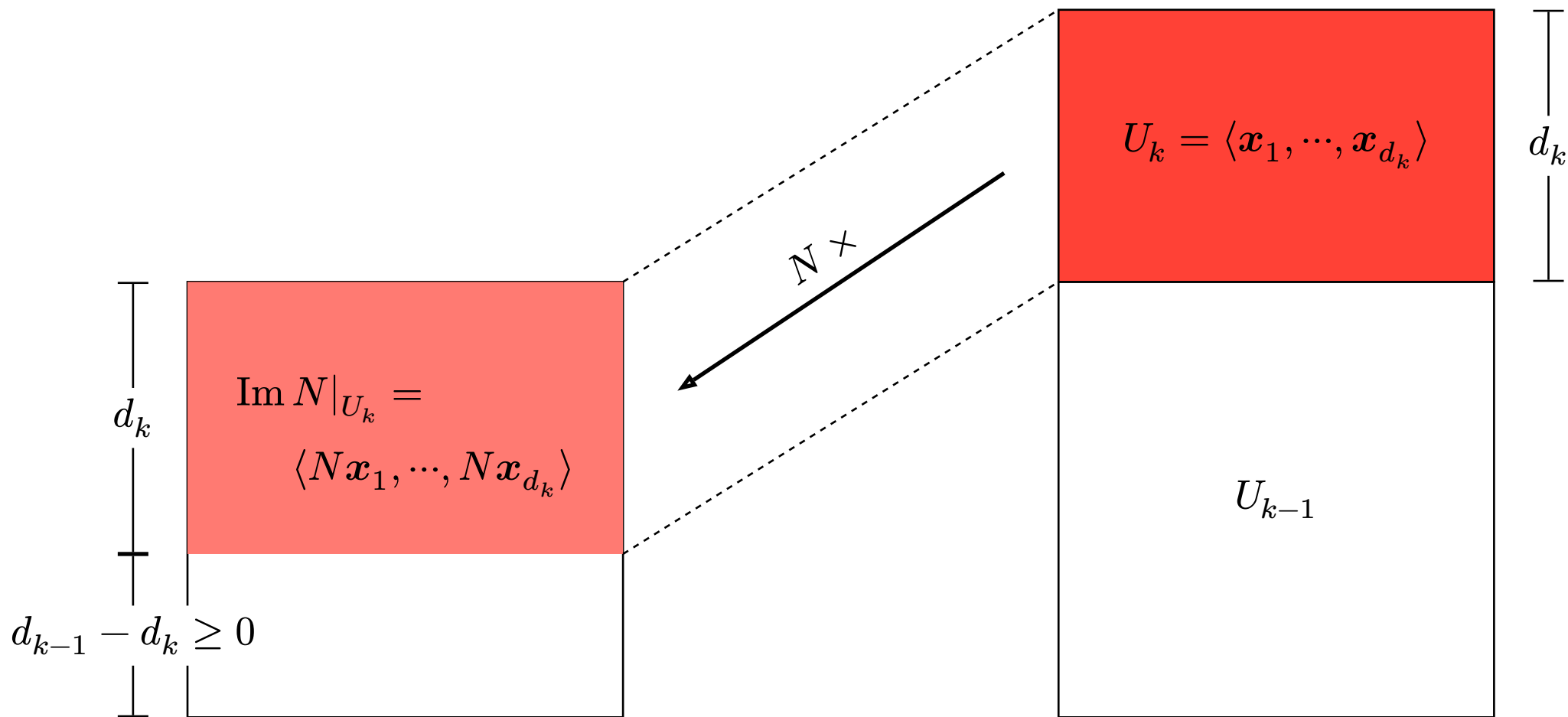
$x_1, \dots, x_{d_k}$  が次の条件を満たしていることを示せばよい:

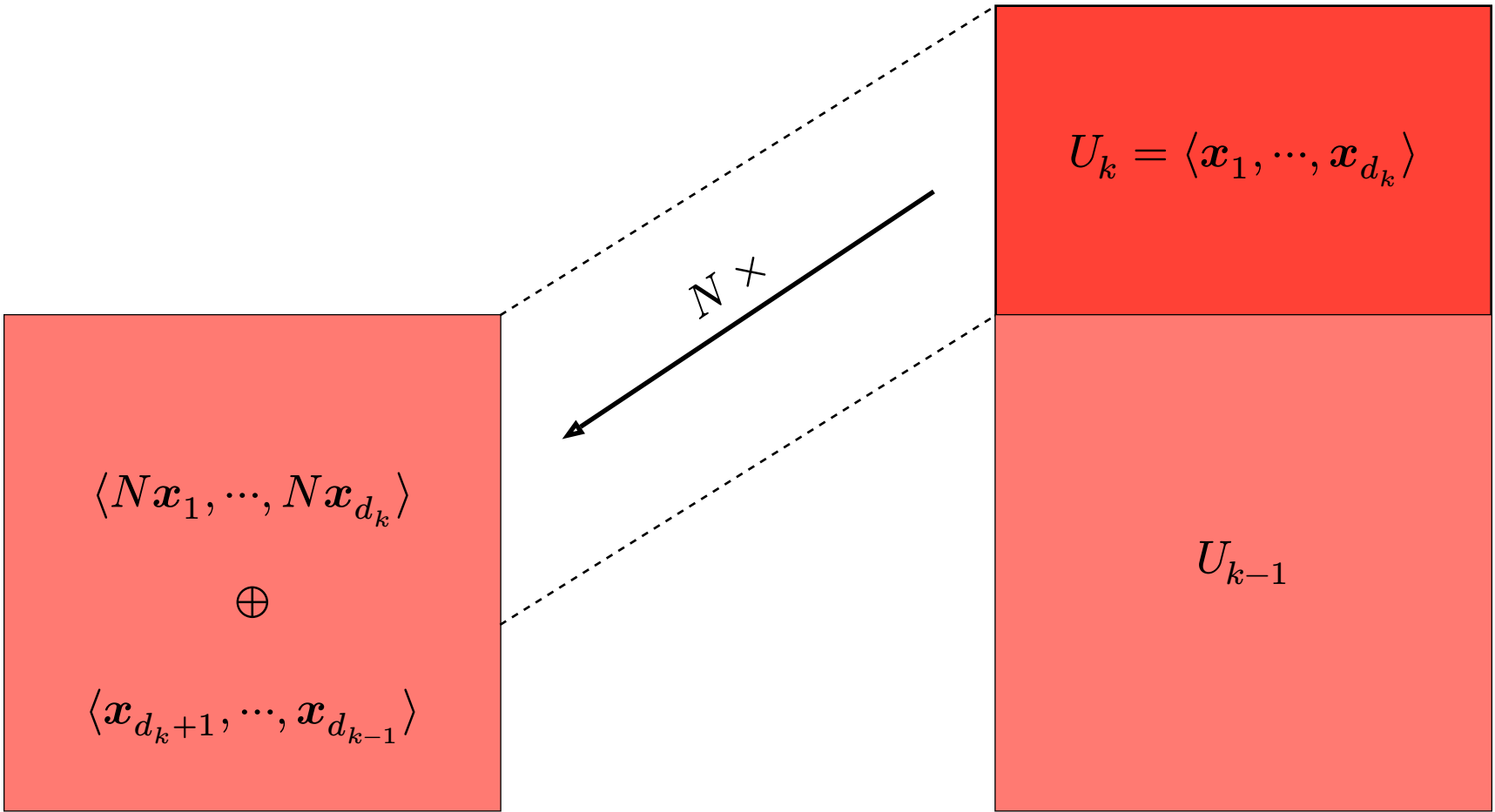
1.  $\langle Nx_1, \dots, Nx_{d_k} \rangle \subseteq U_{k-1}$ .
  - $x_j$  は “ $N^k$  でやっと 0 になる” から,  $Nx_j$  は “ $N^{k-1}$  でやっと 0” になる.
2.  $Nx_1, \dots, Nx_{d_k}$  は線型独立.
  - $\sum_j c_j Nx_j = 0 \Rightarrow N\left(\sum_j c_j x_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_j c_j x_j \in W_1 \Rightarrow \sum_j c_j x_j \in W_{k-1}$ .
  - もし  $\sum_j c_j x_j \neq 0$  であれば  $x_j \notin W_{k-1}$  に矛盾するので,  $\sum_j c_j x_j = 0$ .
  - $x_1, \dots, x_{d_k}$  は線型独立だったから  $c_1 = \dots = c_{d_k} = 0$ .

**Check!**  $U_k = \langle x_1, \dots, x_{d_k} \rangle$  上の  $N$  の像  $\text{Im } N|_{U_k} = \langle Nx_1, \dots, Nx_{d_k} \rangle$  は退化しない.

$\text{Im } N|_{U_k} \subseteq U_{k-1}$  の様子

色が濃い方が 0 から遠くて頑固なイメージ.  $N$  を適用する度に薄くなる.





**$W_{k-2}$  の上段でも同様の現象が起こる**

$U_{k-1}$  の基底は  $Nx_1, \dots, Nx_{d_k}, x_{d_k+1}, \dots, x_{d_{k-1}}$  になっている.

先程と全く同じように,  $N|_{U_{k-1}} : U_{k-1} \rightarrow U_{k-2}$  は単射として well-defined であることが示される. つまり,

1.  $\text{Im } N|_{U_{k-1}} = \langle N^2x_1, \dots, N^2x_{d_k}, Nx_{d_k+1}, \dots, Nx_{d_{k-1}} \rangle \subseteq U_{k-2}$ .
2.  $N^2x_1, \dots, N^2x_{d_k}, Nx_{d_k+1}, \dots, Nx_{d_{k-1}}$  は一次独立.

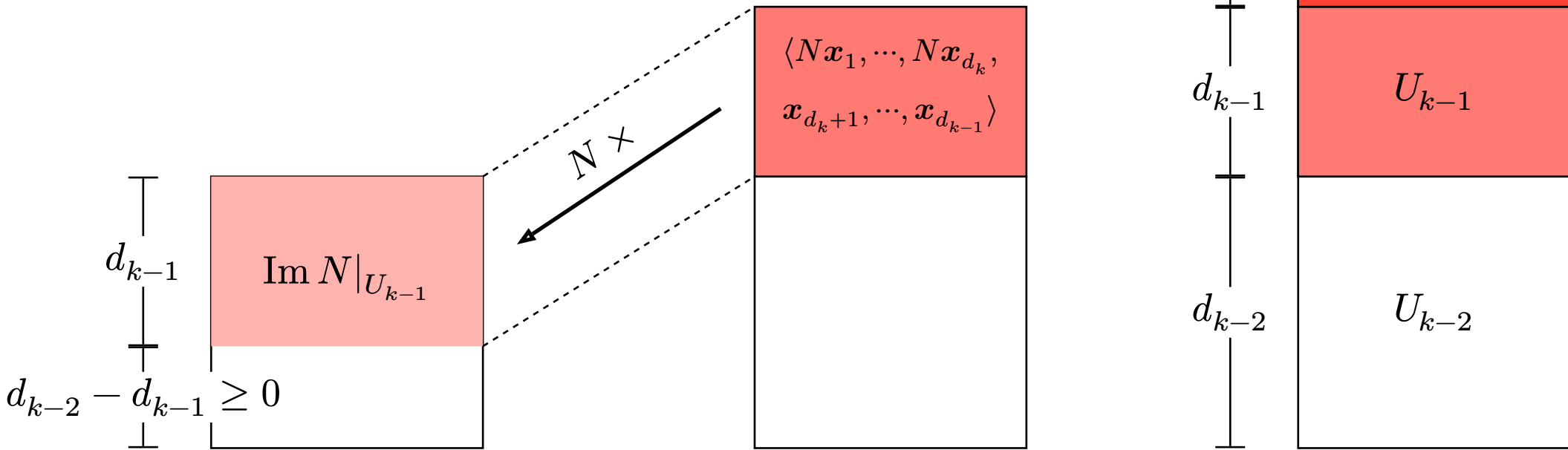
より一般に, 各  $j$  に対して, 次の命題が示される.

**$N$  の  $U_j$  への制限は, 単射  $N|_{U_j} : U_j \rightarrow U_{j-1}$  として well-defined.**

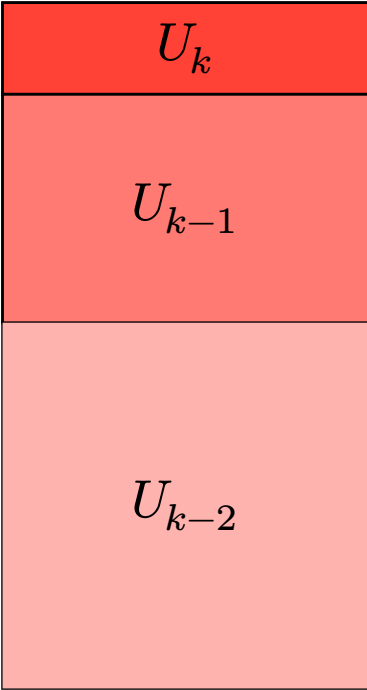
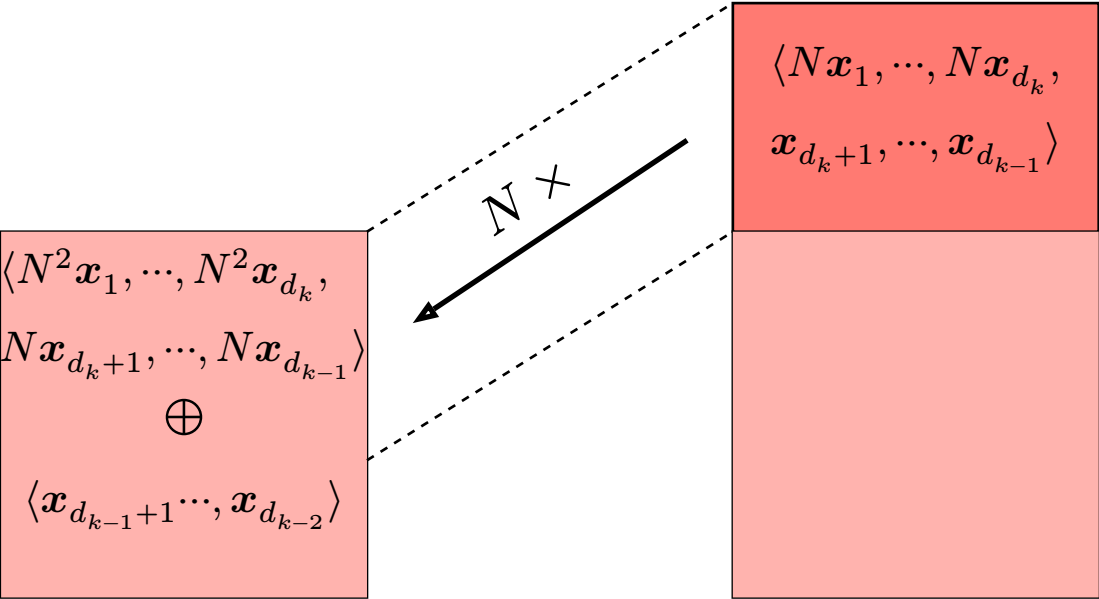


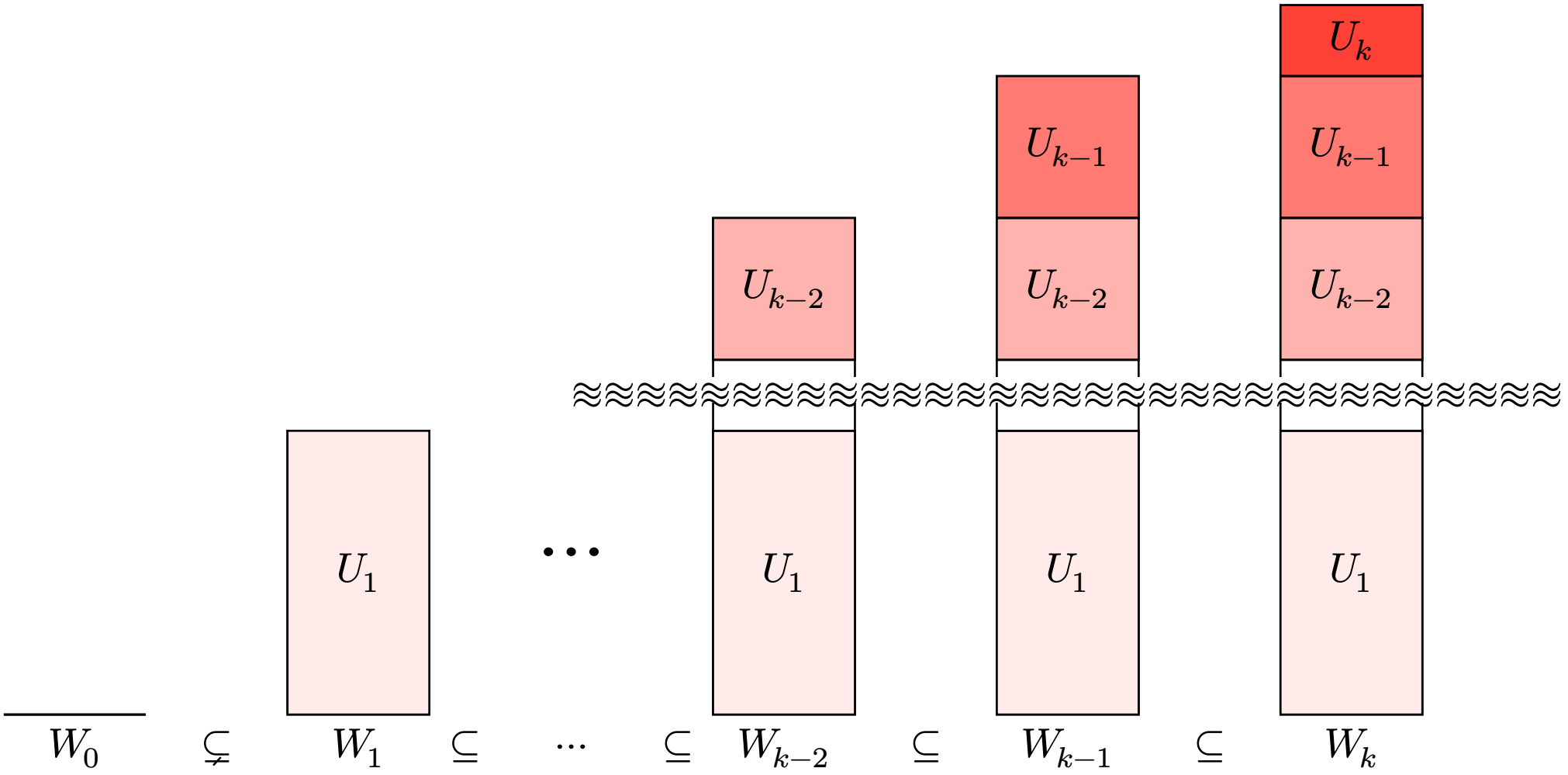
# $\text{Im } N|_{U_{k-1}} \subseteq U_{k-2}$ の様子

# べき零行列の Jordan 標準形



# 例によって余った部分の基底をとる





$\mathbb{C}^n$  の基底

以上のような操作を繰り返すことにより  $\mathbb{C}^n = W_k = U_k \oplus \cdots \oplus U_1$  の基底をとることができる.

$U_k$  の基底

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_k}$$

$U_{k-1}$  の基底

$$N\boldsymbol{x}_1, \cdots, N\boldsymbol{x}_{d_k} \qquad \boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_{k-1}}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$\ddots$

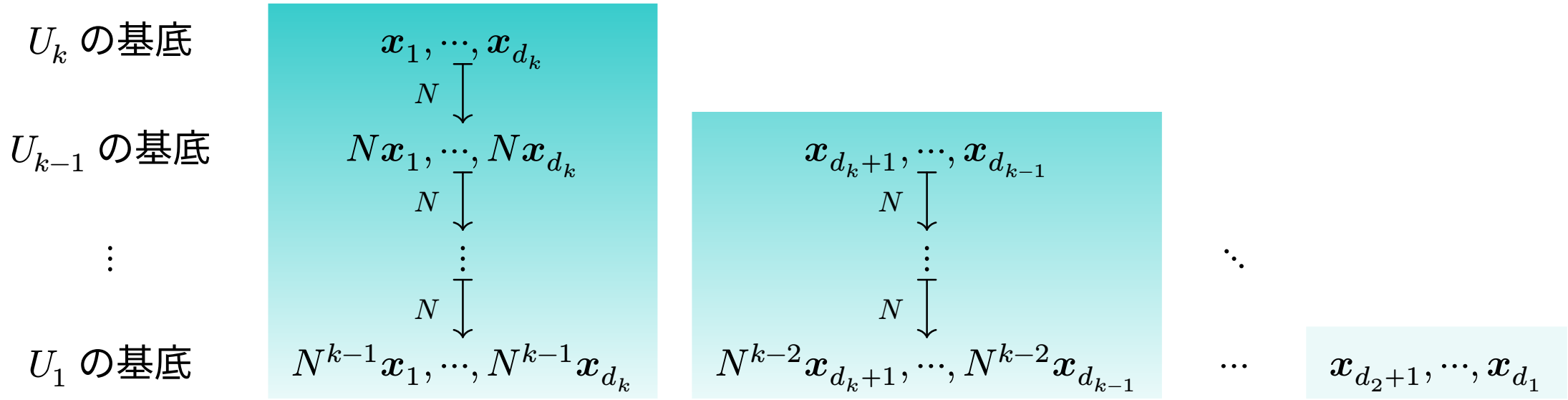
$U_1$  の基底

$$N^{k-1}\boldsymbol{x}_1, \cdots, N^{k-1}\boldsymbol{x}_{d_k} \qquad N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_k+1}, \cdots, N^{k-2}\boldsymbol{x}_{d_{k-1}} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{x}_{d_2+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_1}$$

# 視点の転換：“seed” が生成する基底たち

“余った部分”でとった基底  $x_l$  を seed と呼ぶことにする。

$\leadsto d_j + 1 \leq l \leq d_{j-1}$  なら、 $x_l \in U_j$  は“レベル  $j$  の seed”。



$P_{j,l}$  の構成

レベル  $j$  の seed  $x_l$  は、一次独立なベクトルの列を生成している。

$$x_l \rightarrow Nx_l \rightarrow \cdots \rightarrow N^{j-1}x_l (\rightarrow N^j x_l = \mathbf{0}).$$

これを並べることで、 $n \times j$  行列  $P_{j,l}$  をとる。

$$P_{j,l} = (N^{j-1}x_l \ N^{j-2}x_l \ \cdots \ Nx_l \ x_l).$$

$$\leadsto NP_{j,l} = (\mathbf{0} \ N^{j-1}x_l \ \cdots \ N^2x_l \ Nx_l)$$

$$= (N^{j-1}x_l \ N^{j-2}x_l \ \cdots \ Nx_l \ x_l) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= P_{j,l} J(0; j).$$

**Check!**  $P_{j,l}$  は、レベル  $j$  の seed  $x_l$  による長さ  $j$  のベクトル列を並べたもの。

## $P$ の構成

次のようにして  $P_{j,l}$  を並べることで,  $n \times n$  行列  $P$  を構成する.

$$P = (P_{k,1} \ \cdots \ P_{k,d_k} \ \cdots \ P_{1,d_2+1} \ \cdots \ P_{1,d_1}).$$

結局先程の基底を並べかえているだけなので,  $P$  は当然正則.

$$\begin{aligned} NP &= (NP_{k,1} \ \cdots \ NP_{k,d_k} \ \cdots \ NP_{1,d_2+1} \ \cdots \ NP_{1,d_1}) \\ &= (P_{k,1}J(0; d_k) \ \cdots \ P_{k,d_k}J(0; d_k) \ \cdots \ P_{1,d_2+1}J(0; 1) \ \cdots \ P_{1,d_1}J(0; 1)) \\ &= \overbrace{(P_{k,1} \ \cdots \ P_{k,d_k} \ \cdots \ P_{1,d_2+1} \ \cdots \ P_{1,d_1})}^P \begin{pmatrix} J(0; d_k) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(0; d_k) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J(0; 1) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J(0, 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上より， $N$  と相似な Jordan 標準形の存在が示された．

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0; d_k) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(0; d_k) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J(0; 1) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J(0, 1) \end{pmatrix}.$$

Jordan 細胞の分布は  $d_j$  の分布によって定まる．

↪ サイズ  $j$  の Jordan 細胞の個数：

$$\begin{aligned} d_j - d_{j+1} &= (\dim W_j - \dim W_{j+1}) - (\dim W_{j-1} - \dim W_j) \\ &= \operatorname{rank} N^{j-1} - 2 \operatorname{rank} N^j + \operatorname{rank} N^{j+1}. \end{aligned}$$



## 余談：主格転倒

**Question**  $P = (P_{k,1} \ \cdots \ P_{k,d_k} \ \cdots \ P_{1,d_2+1} \ \cdots \ P_{1,d_1})$  は本当に  $n \times n$  になっているのか？

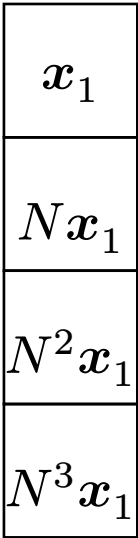
- $P$  を構成する行列のうち、サイズが  $n \times j$ なのは  $P_{j,d_{j+1}+1}, \dots, P_{j,d_j}$  の  $d_j - d_{j+1}$  個.
- したがって、 $P$  に含まれるベクトルは合計で  $\sum_{j=1}^k j(d_j - d_{j+1})$  本.
- $\sum_{j=1}^k j(d_j - d_{j+1}) = n$  を計算するのは意外と難しい.

**主格転倒テク** 積の和を計算するときに、添字を取り換えるテクニック.

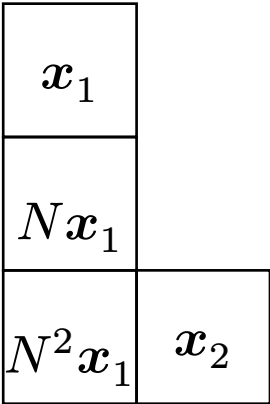
- 「 $j$  が  $d_j - d_{j+1}$  個寄与する」という視点を転換して、  
「 $d_j$  がいくつ寄与するか」を考える.
- $d_j$  の寄与は  $j - (j - 1) = 1$ .
- したがって  $\sum_j j(d_j - d_{j+1}) = \sum_{d_j} d_j = d_1 + \cdots + d_n = n$ .

べき零行列の Jordan 標準形は  $n$  の分割を表現する Young 図形と (Jordan 細胞の並び替えを同一視した上で) 一対一に対応する.

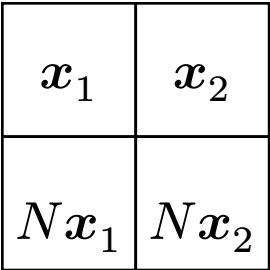
$x_1$	...	$x_{d_k}$							
$Nx_1$	...	$Nx_{d_k}$	$x_{d_k+1}$	...	$x_{d_{k-1}}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
$N^{k-1}x_1$	...	$N^{k-1}x_{d_k}$	$N^{k-2}x_{d_k+1}$	...	$N^{k-2}x_{d_{k-1}}$	...	$x_{d_2+1}$	...	$x_{d_1}$



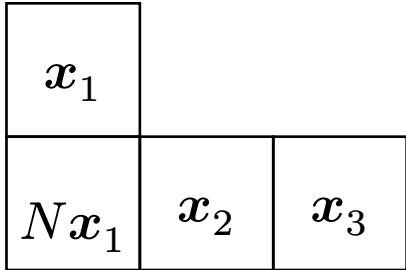
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$



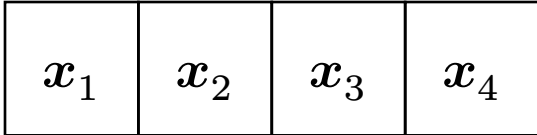
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$



$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$



$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$$