高数(2-3)下学期期末试题　(A 卷)

专业 ____________ 姓名 ______________ 学号 ________________

《中山大学授予学士学位工作细则》　第六条："考试作弊不授予学士学位"

一,填空题　(每题 4 分,共 32 分)

1. 若平面 $x+2y-kx=1$ 与平面 $y-z=3$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角, 则 $k=$ ______ 1/4

2. 曲线 $x=\int_0^t e^u\cos u\,du$, $y=\sin t+\cos t$, $z=1+e^{2t}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为 $\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$

3. 方程 $e^z=xyz$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$

4. 交换 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$ 的积分次序为 ____________

5. 已知 L 是圆周 $x^2+y^2=1$, 则 $\int_L(x-y^2)ds=$ ______ $-\pi$

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2+n+1}$ 的敛散性为 __________ 收敛

7. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 2,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$ 的收敛半径是 $\sqrt{2}$

8. 微分方程 $(1+x^2)y''=1$ 的通解是 $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c_1x+c_2$

二. 计算题　(每题 7 分,共 63 分)

1. 讨论函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$, $f(0,0)=0$ 在点 (0 , 0) 处的连续性，可导性及可微性。　P。330

2. 求函数 $u=x^2+y^2+2z^2$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿 $\overrightarrow{P_0O}$ 方向的方向导数，其中 O 为坐标原点。

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}$ 的敛散性 .　P. 544

4. 设 u= $f(xy, y+z)$， $f(s,t)$ 可微， 求 du $f_1' \cdot y\,dx + \left(f_1' x + f_2'\right)dy + f_2' dz$.

5. 欲造一无盖长方形容器 ，已知其底部造价为 3元/m^2,侧面造价为 1元/m^2，现想用36元造一容积最大的容器 ，求它的尺寸 .

答：长宽为 2M，高为 3M。

6. 计算 $I = \int_c \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx + \left[4x^2 + 2y\ln\left(x+\sqrt{R^2+x^2}\right)\right]dy$

曲线 c是从点 $A(a,0)$沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的第一象限部分到点 $B(0,b)$的弧段 .

解：

将积分路径家直线段 Bo与oA,构成正向的闭曲线 ，由格林公式得 ，

$$I = \iint_D 8x\,dxdy - \int_{Bo} - \int_{oA}$$

$$= \int_0^b dy \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} 8x\,dx - \int_b^0 2y\ln R\,dy = \frac{8b^5}{3a^2} + b^2\ln R$$

7. 计算极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1} \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$

解: 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1 \ln\left(r^2\right)r\,dr = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon^2}^1 \ln u\,du = \pi\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(u\ln u - u\right)\Big|_{\varepsilon^2}^1 = -\pi$

8. 试求幂函数 $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{2nx^{2n-1}}{(2n-1)}$ 的收敛域及和函数。

9. 求微分方程 $y'' - 2y' + y = 8(1+e^{2x})$ 的通解。

特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$ 的根为：

$$r_1 = r_2 = 1$$

对应的齐次方程的通解为

$$y_C = (C_1 + C_2 x)e^x$$

设特解为 $y^* = A + Be^{2x}$ 代入方程确定 $A=8, B=8$ $y^* = 8 + 8e^{2x}$

故所求通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + 8 + 8e^{2x}$$

三. （本题 5 分）

已知曲线积分 $\int_L \left[\sin x - \varphi(x)\right]\frac{y}{x}dx + \varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 可导，且 $\varphi(\pi) = 1$， 求 $\varphi(x)$。

解：由积分与路径无关，故

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$　$\Phi'(x)=\frac{\sin x-\Phi(x)}{x}$　即 $\Phi'-\frac{1}{x}\Phi=\frac{\sin x}{x}$

一阶线性微分方程通解为：$\Phi=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{dx}{x}}dx+c\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+c)$

代初始条件：$\varphi(\pi)=1$ 得 $c=\pi-1$ 特解为：$\Phi(x)=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1)$

2. 设平面上有三个点 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$，在 ΔOAB 的闭区域 D 上，求出点 M，使它到点 O、A、B 的距离平方和为最大。

解：设所求点为 M(x,y,) 　距离的平方和：

$d=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2\ (0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x)$

在区域内部求驻点：

$\frac{\partial d}{\partial x}=6x-2=0$ 解出 $x=\frac{1}{3}$　$\frac{\partial d}{\partial y}=6y-2=0$ 解出 $y=\frac{1}{3}$　驻点：$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

在该点的函数值 d(1/3,1/3)=4/3,

在边界 x=0, 0≤y≤1 上 $d=2y^2+(y-1)^2+1$ 驻点 (0,1/3), 与端点函数值比较，得该边界上最大值点（0,1）d(0,1)=3 。

在边界 y=0, 0≤x≤1 上 $d=2x^2+(x-1)^2+1$ 驻点 (1/3，0), 与端点函数值比较，得该边界上最大值点（1,0），最大值 d(1,0)=3 。

在边界 y=1-x ,0≤x≤1 上 $d=3x^2+2(1-x)^2+(x-1)^2$ 驻点 (1/2,1/2)　与端点函数值比较，得该边界上最大值点是 (1,0) 、(0,1) 。

比较区域内驻点及边界上最大值点的函数值知，　该问题最大值点为：A(1,0) 、B(0,1) ，最大值为 3。

中山大学 2005 级东校区第二学期高等数学一

期末考试试题 （2006 年 6 月）

姓名： 专业：

学号： 成绩：

警 示

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

一.（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设函数 $z(x,y)=\dfrac{y^2}{2x}+f(xy)$，其中 f 二阶可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设函数 $\vec{F}=xyz\vec{i}+3x^2y\vec{j}+(y^2-xz^2)\vec{k}$，求 $\operatorname{div}\vec{F}$，$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F})$。

3. 设函数 $g(y)=\int_{y}^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}dx$，$(y>0)$，求 $g'(y)$。

4. 在直角坐标系下，用两种不同的次序将二重积分 $I=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ 化为累次积分，其中 D 是由直线 $x=1$，$x=2$，$y=x$，$y=2x$ 所围成区域。

二.（10 分）计算曲线积分 $I=\int_L (e^x\cos y-my)dx-(e^x\sin y-m)dy$（$m>0$ 为常数），其中有向曲线 L 是圆周 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 从点 $A(2a,0)$ 经 $M(a,a)$ 至 $O(0,0)$ 的部分。

三.（10 分）利用高斯公式计算曲面积分 $I=\oint\!\!\!\int_S (xy^2+x^2)dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$，其中 S 是由球面 $y=\sqrt{2z-z^2-x^2}$，平面 $y=0$ 所围区域表面的外侧。

四.（每小题 7 分，共 14 分）

1. 求微分方程：$x\dfrac{dy}{dx}+y=xy\dfrac{dy}{dx}$ 的通积分。

2. 求微分方程：$y''-5y'+6y=4-3e^{2x}$ 的通解。

五．讨论下列广义积分的敛散性：（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^5}}dx$，　　2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$。

六. （9 分） 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(n-1)} x^{2n}$ 的收敛半径、收敛域以及和函数。

七．（7 分）求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的泰勒展开式，并求出收敛域。

八.（7 分）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{p}}$，$(0<p\le 1)$ 在闭区间 $[\delta,\pi-\delta]$ 上一致收敛，

但对任意固定的 $x\in[\delta,\pi-\delta]$，该级数并不绝对收敛，其中 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$。

九.（5 分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S，且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 也收敛于 S。

高等数学（一）重修重考试题（ B 卷）

（**2005** 学年度第二学期）东校区

姓名： 专业：

学号： 成绩：

警 示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条： “考试作弊不授予学士学位。 ”

一，（每小题 7 分，共 28 分）

1，设函数 $z(x,y)=\dfrac{x^2}{2y}+f(xy)$，其中函数 f 二阶可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

2， 若隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 y'。

3，设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx$， $y>0$，求 $g'(y)$。

4， 计算积分： $I=\int_1^2 dy\int_y^2\frac{\sin x}{x-1}dx$。

2

二，（10 分）求曲线积分 $I=\oint_{\ell}(1+ye^{x})dx+(x+e^{x})dy$，其中 ℓ 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的上半周由点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$。

三，（10 分）计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}x\,dydz+(y+y^2)dzdx+z\,dxdy$，其中 S^+ 为曲面 $z=x^2+y^2$，$0\le z\le 1$，取下侧。

3

四，（每小题 7 分，共 14 分）

1，求解微分方程初值问题：$\begin{cases} xy' + y = e^{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 。

2，求微分方程：$y'' - 4y' + 3y = 1 + e^{2x}$ 的通解。

五，讨论如下广义积分的敛散性：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{2} - x + 1}}$ ，　　(2) $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$.

4

六，（每小题 8 分，共 16 分）

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}(x-3)^n$ 的收敛半径，收敛区间和收敛域。

（2）求函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开式。

5

七，（7 分）讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin x}{5+x^3}dx$ 的敛散性，若积分收敛，研究其是绝对收敛还是条件收敛？

八，（5 分）设序列 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 也收敛，求证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

6

05 级高数 (一)下学期期中考试试题

1. 设 $u(x,y,z)=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

2. 若隐函数 $y=y(x)$ 有方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 y'.

3. 求曲面 $e^z-2z+xy=3$ 在点 (2,1,0) 处的切平面方程与法线方程 .

4. 计算 $I=\int_1^2 dy\int_y^2\frac{\sin x}{x-1}dx$.

5. 计算 $I=\iint\limits_D |y|\,dxdy$，其中 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

6. 计算 $I=\oint_L (ye^x-y^3)dx+(e^x+x^3)dy$，其 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的正向 .

7. 计算 $I=\iint_{S^+} xdydz+(y+y^2)dzdx+zdxdy$，其中 S^+ 为曲面

$z=x^2+y^2$，$0\le z\le 1$ 的下侧 .

8. 若 $G(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)dxdy$，求 $G'(t)$.

9. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$(x_i,y_i)\in D$，$(i=1,2)$，试证

在 D 中至少存在一点 (ξ,η)，使 $f(\xi,\eta)=\frac{3f(x_1,y_1)+4f(x_2,y_2)}{7}$.