

中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2019 学年第 1 学期
学院/系：数学学院
考试方式：闭卷
考试时长：100 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
签名											

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不予授予学士学位。”

----- 以下为试题区域，共 10 道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答 -----

得分

一、计算下列极限（共10小题，每小题5分，共50分）

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+x^2-2}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{1+x+x^2} = -1$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x.$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{2x+3} \right) \right]^x = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{-2}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{2x+3} \cdot x} = e^{-1}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 3+0} (x - [x]).$
解 $\lim_{x \rightarrow 3+0} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 3+0} x - \lim_{x \rightarrow 3+0} [x] = 3 - 3 = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = 0 - 0 = 0$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$, 其中 $A > 0, B > 0, C > 0$.

设 $M = \max(A, B, C)$, 则

$$M \leq \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n} \leq \sqrt[n]{3M^n} = M \cdot 3^{\frac{1}{n}}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$, 根据夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n} = M$.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\sqrt{x} - 1}.$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\sqrt{1 + (x-1)} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\frac{1}{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x \ln(1+x)}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{\cos x - 1})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2} = -\frac{e}{2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} \right).$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1} = 3$$

$$9. \text{利用定积分的定义求极限: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right).$$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+2n} \right).$$

解

$$\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+2n} \leq \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$\text{由于 } \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+n+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+2n} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ 根据夹逼定理}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+2n} \right) = \frac{1}{2}$$

二、下列函数的导函数 (6分)

得分

$$1. y = e^{x^x}.$$

解 做复合函数分解: $y = e^u$, $u = x^x = e^{x \ln x} = e^v$, $v = x \ln x$. 根据复合函数链式法则,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^v \cdot e^v \cdot (1 + \ln x) = e^{x^x} x^x (1 + \ln x).$$

$$2. y = (\sin x)^x.$$

解 做微分演算

$$\begin{aligned} dy &= d e^{x \ln \sin x} \\ &= e^{x \ln \sin x} d(x \ln \sin x) \\ &= e^{x \ln \sin x} d(\ln \sin x \cdot dx + x d(\ln \sin x)) \\ &= (\sin x)^x d\left(\ln \sin x \cdot dx + x \frac{1}{\sin x} d(\sin x)\right) \\ &= (\sin x)^x d\left(\ln \sin x \cdot dx + x \frac{\cos x}{\sin x} dx\right) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x d(\ln \sin x + x \csc x)$$

得分

三、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导，求极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t)-f(a+t)-f(a)}{2t}$. (6分)

解

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t)-f(a+t)+f(a)-f(a)}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t)-f(a)}{2t} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \\ &= f'(a) - \frac{1}{2} f'(a) = \frac{1}{2} f'(a) \end{aligned}$$

得分

四、设 $y = x^2 e^{2x}$ ，求 $\frac{d^{100}y}{dx^{100}}$. (6分)

解

$$\begin{aligned} \frac{d^{100}y}{dx^{100}} &= x^2 (e^{2x})^{(100)} + C_{100}^1 \cdot 2x (e^{2x})^{(99)} + C_{100}^2 \cdot 2 (e^{2x})^{(98)} \\ &= x^2 2^{100} e^{2x} + C_{100}^1 \cdot 2x 2^{99} e^{2x} + C_{100}^2 \cdot 2 \cdot 2^{98} e^{2x} \\ &= 2^{100} (x^2 + 100x + 2475) e^{2x} \end{aligned}$$

得分

五、设 $y = y(x)$ 是由 $y = f(x+y)$ 确定的隐函数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$. (6分)

解 两边求导数

$$\begin{aligned} y' &= f'(x+y) = -1 + \frac{1}{1-f'(x+y)}, \quad 1+y' = \frac{1}{1-f'(x+y)}, \\ y'' &= \frac{f''(x+y) \cdot (1+y')}{(1-f'(x+y))^2} = \frac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3} \end{aligned}$$

得分

六、设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x > 0 \\ \ln(1+x) & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ ，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型. (6分)

解 函数的定义域为 $[-1, +\infty)$ ， $\forall x_0 \neq 0$ ，在 x_0 的一个小邻域内， $f(x)$ 是一个初等函数，根据初等函数的连续性定理， $f(x)$ 在 x_0 连续。

间断点只能在 $x_0 = 0$ 处，因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0$$

所以 $x_0 = 0$ 是函数的第一类跳跃型间断点。

得分

七、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)-1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) = 2$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (6分)

解 记 $\alpha = \frac{f(x)-1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = 2$ ，根据题目的条件， $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0$ 。于是

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\sin x}{x} + 2x$$

由极限的四则运算，

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 0 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 0 = 2.$$

得分

八、指出函数 $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的所有间断点，并判断其类型。(6分)

解 $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-2)}$, $x=1$ 是函数的可去间断点, $x=2$ 是函数的第二类无穷型间断点。

得分

九、设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$, 证明: 方程 $f(x) = f(x+a)$

在 $[0, a]$ 上至少有一个实根。(6分)

证 令 $F(x) = f(x+a) - f(x)$,

$$F(0) = f(a) - f(0),$$

$$F(a) = f(2a) - f(a) = f(0) - f(a) = -F(0),$$

分两种情况讨论:

- 1、如果 $f(a) = f(0)$, 则 $x=0$ 是方程的根;
- 2、如果 $f(a) \neq f(0)$, 则 $F(x)$ 在闭区间 $[0, a]$ 上满足零点定理, 于是 $\exists \xi \in (0, a)$ 使得

$$F(\xi) = 0, \text{ 即 } \xi \text{ 是方程的根.}$$

总之, 方程 $f(x) = f(x+a)$ 在 $[0, a]$ 上至少有一个实根。

得分

十、设 $f(x)$ 是在区间 $[a, b]$ 上连续的单调下降函数, 记 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$,

证明在区间 (a, b) 内, $F'(x) \leq 0$ 。(6分)

证 $\forall x \in (a, b)$, $x-a > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} \\ &= \frac{1}{x-a} \left(f(x) - \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt \right) \end{aligned}$$

根据积分中值定理, $\exists \xi \in [a, x]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 。由于函数单调下降,

$$\text{所以 } f(x) - f(\xi) \leq 0, \text{ 于是 } F'(x) = \frac{1}{x-a} (f(x) - f(\xi)) \leq 0.$$

数一
10.5

中山大学本科生期末考试试卷

中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学(一)》(A卷)

学年学期: 2014 学年第 2 学期

姓 名: _____

学 院/系: 数计学院

学 号: _____

考试方式: 闭卷

学 院: _____

考试时长: 120 分钟

年 级 专 业: _____



《中山大学授予学士学位工作细则》第八条: “考试作弊者, 不授予学士学位。”

----- 以下为答题区域, 共七道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答 -----

一、求如下极限 (共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

1, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right);$

2, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$

二、求如下积分 (共 4 小题, 每小题 7 分, 共 28 分)

1, $\int \frac{x^2}{1+x} dx;$

2, $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

3, $\int_1^e x (\ln x)^2 dx ;$

4, $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx.$

三、(共 10 分)

已知平面 $\pi: y+2z-2=0$ 与直线 $L: \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ 3y-2z+2=0 \end{cases}$,

(1) 问直线 L 和平面 π 是否平行?

(2) 如直线 L 与平面 π 平行, 则求直线 L 与平面 π 的距离, 如不平行, 则求直线 L 与平面 π 的交点。

(3) 求经过直线 L 且与平面 π 垂直的平面方程。

四、(共6分)

求函数 $F(x) = \int_0^x t(t-1)dt$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值。

五、(共11分)

设函数 $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$, (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2)

求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点; (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

六、完成如下各题 (共 3 小题, 每小题7分, 共21分)

1, 求函数 $z(x, y) = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$ 在点 $P(1, 1)$ 处的全微分。

2, 若隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

3, 求函数 $u = xy^2 + yz^3 + 3$ 在点 $A(2, -1, 1)$ 处的梯度及其在点 A 处沿向量 $l = (1, 2, 2)$ 的方向导数。

七、完成如下各题（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1, 求证: $e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$, $x > 0$.

2, 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 求证: 存在点 $\xi \in (0, 1)$, 满足 $f(\xi) + f(1-\xi) = 0$.

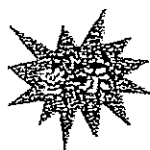
$$2.2 \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{1-x} f(t)dt$$

13

珠海校区 2013 学年度第二学期 13 级《高等数学一》期末考试题 A

学院/专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 评分 _____

阅卷教师签名: _____



《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

一、求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

2, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$

二、求如下积分（每小题 7 分，共 28 分）

1, $\int \frac{2x^2 + 1}{x^2(1 + x^2)} dx$

$$2, \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$$

$$3, \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$4, \int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$$

三, (每小题 5 分, 共 10 分)

1, 已知点 $A(2, 2, 2), B(4, 4, 2), C(4, 2, 4)$, 求向量 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 的夹角。

2, 求经过直线 $L_1: \begin{cases} x+y=0, \\ x-y-z-2=0, \end{cases}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=z$ 的平面的方程。

四, (6分) 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的极值。

五, (11分) 设函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2)

求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点; (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

六, 完成如下各题 (每小题7分, 共21分)

1. 求函数 $z(x, y) = \ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $P(1, 1)$ 处的全微分。

2. 若隐函数 $Z = Z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

3. 求函数 $u(x, y, z) = xyz$ 在点 $P(1, 3, -3)$ 沿空间曲线 $x=t^2$, $y=3t^2$, $z=-3t^3$ 的切线方向的方向导数。

七, (每小题6分, 共12分)

1, 求证: $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geq\sqrt{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$

2, 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且

$f(a)=f(b)=0, \quad f'(a+0)f'(b-0)>0,$ 求证: 在区间 (a, b) 中存在点 ξ, η , 满

足 $f(\xi)=0, \quad f''(\eta)=0.$

15715615901, 郑家宝

(也是微信号).

12

12

珠海校区 2012 学年度第一学期 12 级《高等数学一》期末考试题 A

学院/专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 评分 _____

阅卷教师签名: _____



《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

一、完成如下各题（每小题 7 分，共 21 分）

1, 设函数 $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

2, 求函数 $z(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $P(1, 1)$ 处的全微分。

3, 求函数 $u(x, y, z) = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处方向导数增加最快的方向, 并求沿该方向的方向导数。

二、求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

2, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

三, 完成如下各题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1, $\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

2, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + \cos^6 x) dx$

3, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$

4, 求由曲线 $y = |\ln x|$ 与直线 $x = e^{-1}$, $x = e$ 及 x 轴所围平面图形的面积。

四, (第 1 小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

1, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 求 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 。

2, 求通过直线 $l_1: \begin{cases} 2x+3y+3z=0 \\ x+2z-4=0 \end{cases}$ 且与直线

$l_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 平行的平面的方程。

五, (6 分) 若隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y + z = xyz$ 确定, 求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

六, (11 分) 设函数 $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2) 求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点; (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

七, (每小题 6 分, 共 12 分)

1, 证明: 当 $x > 1$ 时成立不等式 $(1+x)\ln x > 2(x-1)$ 。

2, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 令

$F(x) = x^2 \int_x^1 f(t) dt$, $0 \leq x \leq 1$, 求证: 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在

一点 ξ 满足 $F''(\xi) = 0$ 。

珠海校区 2011 年第一学期 10 级

《高等数学一》期末考试题 A 答案

一、求下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x(-\sin x)}{1 - \cos x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = 3.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{2-2x} \right)^x$

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{2-2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2-2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2-2x} \right)^{(2-2x) \cdot \frac{x}{2-2x}} = e^{\frac{1}{2}}.$

二、求如下积分

1. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx.$

解: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} de^x = \int \left(1 - \frac{1}{1+e^x} \right) de^x = e^x - \ln(1+e^x) + C.$

2. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

解: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$

3. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

解: $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^3 u^{-\frac{1}{2}} du = \left[2\sqrt{u} \right]_1^3 = 2(\sqrt{3}-1).$

4. $\int_2^2 |x^2 - 1| dx.$

解: $\int_2^2 |x^2 - 1| dx = \int_2^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (1 - x^2) dx + \int_2^2 (x^2 - 1) dx = 4.$

三,完成如下各题

1. 若 $z(x, y) = \sin(xy) + \cos^2(xy)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) - y \sin(2xy), \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) - x \sin(2xy).$

2. 已知函数 $f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 及点 $A(1, 0, 1), B(3, -2, -2)$, 求此函数在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解: $\overline{AB} = (2, -2, -3), l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}} \right);$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + z^2})\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{(x + \sqrt{y^2 + z^2})\sqrt{y^2 + z^2}}$$

所以 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_A = \frac{1}{2}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_A = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_A = \frac{1}{2}$; 于是此函数在点 A 处沿 l 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{17}} + 0 \times \frac{-2}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2} \times \frac{-3}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

此函数在点 A 处方向导数的最大值为

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \Big|_A = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y + z = xyz$ 给出, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 方程两边对 x 求导, 得 $1 + \frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-1}{1-xy}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{yz-1}{1-xy} \right) = \frac{(1-xy)y \frac{\partial z}{\partial x} - (-y)(yz-1)}{(1-xy)^2} = \frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}.$$

四, 1. 若 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, \vec{a} \cdot \vec{b}=-6$, 求 $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

解: $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{3}{5}$, 故 $\sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{4}{5}$. 于是

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 8.$$

2. 求通过直线 $l_1: \begin{cases} x+2y+z-3=0, \\ x-z-1=0; \end{cases}$ 并且与直线 $l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$

平行的平面方程.

解: 两直线的方向向量分别为 $\vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$,

故所求平面的法向量为 $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$.

又易知点(1,1,0)在直线 l_1 上, 故所求平面方程为 $-4(x-1)-6(y-1)-2z=0$, 即

$$2x+3y+z-5=0.$$

五, 记 $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+t^3} dt + \int_x^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t^3} dt$, $x > 0$, 求证: $F(x)$ 是常数, 并求此常数.

解: 因为 $F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{\sqrt{1/x}}{1+(1/x)^3} = 0$, $x > 0$, 所以 $F(x)$ 是常数.

于是, 对任意 $x > 0$,

$$F(x) = F(1) = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t^3} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+(\sqrt{t^3})^2} d\sqrt{t^3} = \frac{4}{3} \arctan \sqrt{t^3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

六, 设函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2) 求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点; (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线.

解: (1) $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, 单调增区间为 $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$; 单调减区间为 $(1, 3)$.

无极大值点, 极小值点为 $x=2$.

(2) $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$, 凸区间为 $(-\infty, 0)$, 凹区间为 $(0, 1), (1, +\infty)$. 拐点为 $x=0$ 或 $(0, 0)$.

(3) 显然有垂直渐近线 $x=1$; 而由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 2,$$

故函数有斜渐近线 $y = x + 2$.

七, 1. 求证: $(1+x)\ln^2(1+x) \leq x^2, \quad x \geq 0$.

证: 记 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2, \quad x \geq 0$. 则 $f(0) = 0$, 且

$$f'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x - x^2, \quad x \geq 0, \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{2[\ln(1+x) - x]}{1+x} < 0, \quad x \geq 0.$$

故 $f'(x)$ 单调降, 即 $f'(x) < f'(0) = 0, x > 0$. 于是 $f(x)$ 单调降, 即

$$f(x) < f(0) = 0, x > 0. \text{ 不等式得证.}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.

求证: 存在两个不同的点 $\xi \in (0, 1), \eta \in (0, 1)$, 满足 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$.

证明: 由闭区间上连续函数的介值定理, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f(c) = \frac{1}{2}$.

在区间 $[0, c]$ 上, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, c)$, 使得 $f(c) - f(0) = f'(\xi)c$.

在区间 $[c, 1]$ 上, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\eta \in (c, 1)$, 使得 $f(1) - f(c) = f'(\eta)(1-c)$.

即有 $\frac{1}{f'(\xi)} = 2c, \frac{1}{f'(\eta)} = 2(1-c)$. 于是 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$. 且显然 $\xi \neq \eta$. 证毕.

谨以此文献给所有坚持考前突击疏的朋友们!!

大家都是过来人。。这些公式都是对做题非常非常非常有用的,知道和不知道绝对不一样,一下午的血汗啊~~那些是个人都知道的公式我都省掉了,剩下的全部是精华,看看有没有你没见过的。如果觉得有帮助,别忘了分享一下!

WORD 里的特殊字符不能发在日志里,所以只能发图了

和差化积

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \quad \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

平方关系

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

等价无穷小

$$e^x - 1 \sim x \quad \ln(x+1) \sim x$$

$$(1+ax)^b - 1 \sim abx$$

$$\log_a(x+1) \sim \frac{x}{\ln a} \quad a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3 \quad x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3 \quad \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$$

基本初等函数导数

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \sec^2 x & (\cot x)' &= -\csc^2 x \\ (\sec x)' &= \sec x \tan x & (\csc x)' &= -\csc x \cot x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

微分的类似，不写了

高阶导数

$$(x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & n < k \\ n! & n = k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n (a > 0) \quad (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

重要极限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} &= 0 (a > 1, k > 0) & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 (a > 0) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= 1 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} &= 1 \end{aligned}$$

常用 Maclaurin 公式

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$$

不定积分公式

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c = \ln |\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c$$

变上限定积分求导公式

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

参数方程求曲线弧长、旋转体侧面积

$$x = f(t), y = g(t), (t \in [\alpha, \beta])$$

$$\text{弧长 } l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

$$\text{侧面积 } S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

直角坐标系求曲线弧长、旋转体侧面积

$$y = f(x), (x \in [a, b])$$

$$\text{弧长 } l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{侧面积 } S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

极坐标系求曲线弧长、旋转体侧面积

$$r = r(\theta), (\theta \in [\alpha, \beta])$$

$$\text{弧长 } l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

$$\text{侧面积 } S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} [r(\theta) \sin \theta] \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

点到平面距离公式

平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 则点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到 π 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

点到直线距离公式

直线 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

方向向量 $\vec{s} = (X, Y, Z)$ 则点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到 L 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

两直线距离公式

L_1 过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 方向向量 $\vec{s}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$

L_2 过 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 方向向量 $\vec{s}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$

$$L_1, L_2 \text{ 平行时 } d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1|}{|\vec{s}_1|}$$

$$L_1, L_2 \text{ 异面时 } d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题

专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 评分 _____



《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

一. 完成下列各题 (每小题 7 分, 共 70 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$
2. 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}$
3. $y = x \arccos x^2$, 求 y'
4. 已知 $y = y(x)$ 满足 $e^{xy} + \sin(x^2 y) = y^2$, 求 $y'(0)$
5. $y = x^2 e^{3x}$, (求 $y^{(20)}$)
6. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$
7. 求 $\int x \ln(1+x) dx$
8. 求 $\int_1^2 (x^2 + \arctan x) dx$

9. 已知 $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, 求一个同时垂直于 \vec{a}, \vec{b} 的向量. 答: $-8\vec{i} + 10\vec{j} + 14\vec{k}$

10. 求 $f(x) = \ln x$ 在 $x=2$ 处的 n 阶泰勒公式.

解: $\ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) \therefore \ln x = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-2)^k}{k \cdot 2^k} + o((x-2)^n)$.

二. 完成下列各题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 证明不等式 $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ ($b > a > 0$).

证: $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \frac{1}{\xi}(b-a)$, 其中 $b > \xi > a > 0$.

由于 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$, 所以 $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

2. 求过直线 $L: \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ 和点 $P_0(1, 2, 3)$ 的平面方程.

3. 设 $u = f(x, xy, x^2y)$, 其中 f 有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.

答: $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + y^2f'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xy(f''_{13} + yf''_{23} + y^2f''_{33}) + yf'_3$.

4. 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。 D-2 ✓

解 由于 $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = (v_1, v_2)$, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2y}$

所以 $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial z}{\partial x}v_1 + \frac{\partial z}{\partial y}v_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 要做一个容积为 1 立方米的有盖铝圆桶, 什么样的尺寸才能使用料最省?

解 假设圆桶的底面半径为 r , 高为 h , 则圆桶的容积为 $\pi r^2 h = 1$, 表面

积为 $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. 令 $L(r, h, \lambda) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h - 1)$,

求偏导, 得到 $\begin{cases} L_r = 2\pi h + 4\pi r - 2\pi rh\lambda = 0, \\ L_h = 2\pi r - \pi r^2\lambda = 0, \end{cases}$

解得 $h = 2r$, 再代入约束条件 $\pi r^2 h = 1$, 得到 $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

根据题意, 目标函数必有最小值, 所以可知当底面半径为 $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, 高为 $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

时用料最省。

6. 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

的偏导函数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续, 但它在该点可微。

解 由定义, $f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2 + 0^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$,

当 $(x, y) \neq (0,0)$ 时, $f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} \cos \frac{1}{2x^2})$,

极限不存在, 所以 $f_x(x, y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续。同理 $f_y(x, y)$ 在原点 $(0,0)$ 也

不连续。但由于 $f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]$

$= (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, 所以函数在 $(0,0)$ 可微。

$(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题答案 C-1

一. 完成下列各题 (每小题 7 分, 共 70 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$

2. 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{\sin 2xy}$

令 $u = xy$, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u = 0.$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{\sin 2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{2 \cos 2u} = \frac{1}{2}.$$

3. $y = x \arccos x^2$, 求 y' $y' = \arccos(x^2) - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}.$

4. 设 $z + \cos(xy) = e^z$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}.$

$$z_x - y \sin(xy) = e^z \cdot z_x$$

$$z_x = \frac{y \sin(xy)}{1 - e^z}.$$

5. 设 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}$; 求 $df(1, 1, 1).$

$$f_x(x, 1, 1) = (x)^{\frac{1}{2}} = 1, f_x(1, 1, 1) = 1$$

$$f_y(1, y, 1) = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}, f_y(1, 1, 1) = -1$$

$$f_z(1, 1, z) = (1)^0 = 0, f_z(1, 1, 1) = 0$$

$$df(1, 1, 1) = f_x(1, 1, 1)dx + f_y(1, 1, 1)dy + f_z(1, 1, 1)dz = dx - dy.$$

7

2.

C-2

$$6 \text{ 求 } \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + c.$$

$$7. \text{ 求 } \int x \ln(1+x) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + c.$$

$$8. \text{ 求 } \int_{-1}^1 (x^2 + \arctan x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

9. 已知 $\vec{a} = 2i + 3j - k$, $\vec{b} = 2i + 3j - k$, 求一个同时垂直于 \vec{a}, \vec{b} 的向量。

$$\vec{a} \times \vec{b} = -10i + 7j + k$$

10. 求 $f(x) = \ln(x-1)$ 在 $x=2$ 处的 n 阶泰勒公式。

$$\ln(x-1) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(x-2)^k}{k} + o((x-2)^n).$$

二. 完成下列各题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1. 求过直线 $L: \begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ 和点 $P_0(1,2,3)$ 的平面方程。

$$7x-7y+2z+1=0$$

2. 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 其中 f 有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + yf_2' + yzf_3'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_2' + zf_3' + xf_{12}'' + xzf_{13}'' + xyf_{22}'' + xyzf_{23}'' + xyzf_{32}'' + xyz^2 f_{33}''$$

3. 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (z_x(1,0), z_y(1,0)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,2) \cdot (1,-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. 求函数 $u = \sin x \sin y \sin z$ 在条件 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 下的极值和极值点。 C-3

$$F(x, y, z, \lambda) = \ln \sin x + \ln \sin y + \ln \sin z + \lambda(x + y + z - \frac{\pi}{2})$$

$$F_x = \frac{\cos x}{\sin x} = 0, F_y = \frac{\cos y}{\sin y} = 0, F_z = \frac{\cos z}{\sin z} = 0, F_\lambda = x + y + z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{\pi}{6}, u_{\max} = \frac{1}{8}.$$

5. 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

的偏导函数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续, 但它在点 $(0, 0)$ 可微。

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0 + x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{y^2} = 0.$$

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$f_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{2x^2})$ 不存在, 故 $f_x(x, y)$ 不连续。

因为 $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = y}} f_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (2y \sin \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{y} \cos \frac{1}{2y^2})$ 不存在, 故 $f_y(x, y)$ 不连续。

$$\begin{aligned} \text{但是 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0. \end{aligned}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微, 且 $df(0, 0) = 0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 二阶可导, 证明存在 $\eta \in (a, b)$, 使得下式成立

$$f(b) + f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta).$$

令 $g(x) = f(x) - f\left(x - \frac{b-a}{2}\right)$, 则 $g(x)$ 在 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 可导,

$$g(b) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right), g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a).$$

由微分中值定理 $g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g'(\xi) \cdot \frac{b-a}{2}, \xi \in \left(\frac{b+a}{2}, b\right)$

$$\text{即 } f(b) + f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g'(\xi) \cdot \frac{b-a}{2}, \xi \in \left(\frac{b+a}{2}, b\right) \quad (1)$$

$$g'(\xi) = f'(\xi) - f'\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right),$$

又因为 $f'(x)$ 在 $\left[\xi - \frac{b-a}{2}, \xi\right]$ 可导, 由微分中值定理可得

$$f'(\xi) - f'\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right) = f''(\eta) \cdot \frac{b-a}{2}, \eta \in (a, b) \quad (2)$$

综合 (1), (2) 式可得

$$f(b) + f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f''(\eta) \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \eta \in (a, b).$$

09级 - 第 3

一. (每小题 6 分, 共 12 分) 求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

二. (每小题 6 分, 共 24 分) 求下列积分:

(1) $\int \frac{dx}{2(2+x^{10})}$; (2) $\int \cos(\ln x) dx$; (3) $\int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$

三. (每小题 7 分, 共 21 分)

(1) 设 $z(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $dz|_{(0,1)}$;

(2) 已知 $f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 及点 $A(1, 0, 1), B(3, -2, -2)$, 求函数 $f(x, y, z)$ 在点 A 处

沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

(3) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y + z = e^z$ 给出, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四. (第一小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

(1) 给定空间三点: $A(1, 2, 0), B(-1, 3, 1), C(2, -1, 2)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

(2) 求经过直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: x = y = \frac{z}{2}$ 的平面方程.

五. (7 分) 求函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$ 的极值.

六. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求 (1) 此函数的单调区间与极值点; (2) 此函数的凹凸区间与拐点; (3) 此函数的渐近线.

七. (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 求证不等式 $\sin x + \tan x > 2x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$;

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0, f''(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

求证: $f(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

09 级一期 B 卷参考解答

一. (每小题 6 分, 共 12 分) 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{2x^3};$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x^3(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{12x^2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \sin x}{24x} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin^2 x} \ln \cos x} \quad \text{而}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x / \cos x}{2 \sin x \cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

二. (每小题 6 分, 共 24 分) 求下列积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x(2+x^{10})};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{dx}{x(2+x^{10})} &= \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(2+x^{10})} = \frac{1}{10} \int \frac{dx^{10}}{x^{10}(2+x^{10})}; \\ &= \frac{1}{20} \left(\int \frac{dx^{10}}{x^{10}} - \int \frac{dx^{10}}{2+x^{10}} \right) = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x^{10}}{2+x^{10}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$(2) \int \cos(\ln x) dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \cos(\ln x) dx &\stackrel{u=\ln x}{=} \int e^u \cos u du = \int e^u d \sin u = e^u \sin u - \int \sin u de^u \\ &= e^u \sin u + \int e^u d \cos u = e^u \sin u + e^u \cos u - \int e^u \cos u du \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int \cos(\ln x) dx = \frac{e^u}{2} [\sin u + \cos u] + C = \frac{x}{2} [\sin \ln x + \cos \ln x] + C.$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)} & \stackrel{u=\ln x}{=} \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d(u/\sqrt{2})}{1+(u/\sqrt{2})^2} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt & \stackrel{s=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} d\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin s}{\sin s + \cos s} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt. \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{于是} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

三. (每小题 7 分, 共 21 分)

$$(1) \text{ 设 } z(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 求 } dz|_{(0,1)};$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\text{于是} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 0, \quad \text{故} \quad dz|_{(0,1)} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} dy = dx.$$

$$(2) \text{ 已知 } f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2}) \text{ 及点 } A(1, 0, 1), B(3, -2, -2), \text{ 求函数 } f(x, y, z) \text{ 在点 } A \text{ 处}$$

沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解 $\overline{AB} = l = (2, -2, -3)$, 故 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}} \right)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{y}{x\sqrt{y^2 + z^2} + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{z}{x\sqrt{y^2 + z^2} + y^2 + z^2}$$

于是 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,0,1)} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2},$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{17}} + 0 \times \frac{(-2)}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2} \times \frac{(-3)}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{2\sqrt{17}}.$$

在 A 点的方向导数最大值为 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

(3) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y + z = e^z$ 给出, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x, y, z) = e^z - x - y - z$, 则 $\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \frac{\partial F}{\partial y} = -1, \frac{\partial F}{\partial z} = e^z - 1$. 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = \frac{1}{e^z - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = \frac{1}{e^z - 1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{e^z - 1} \right) = \frac{-e^z}{(e^z - 1)^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-e^z}{(e^z - 1)^3}.$$

四. (第一小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

(1) 给定空间三点: $A(1, 2, 0), B(-1, 3, 1), C(2, -1, 2)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

解 根据向量积的定义, 可知三角形 ABC 的面积

$$2S_{\triangle ABC} = |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sin \angle A = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

由于 $\overline{AB} = (-2, 1, 1), \overline{AC} = (1, -3, 2)$, 故

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5i + 5j + 5k, \quad |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(2)求经过直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=\frac{z}{2}$ 的平面方程.

解 平面的法向量为 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 0j - k$, 又显然所求平面过点 $(1, -2, -3)$

故所求平面方程为 $2(x-1) + 0(y+2) - (z+3) = 0$, 即 $2x - z - 5 = 0$.

五. (7分)求函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$ 的极值.

$$\text{解 } f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = e$. 又当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 故此点

为极大值点, 极大值为 $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

六. (12分) 设函数 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求(1)此函数的单调区间与极值点; (2)此函数的

凹凸区间与拐点; (3)此函数的渐近线.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - 2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x-1)^2[3(x+1) - 2(x-1)]}{(x+1)^3} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[2(x-1)(x+5) + (x-1)^2](x+1)^3 - 3(x-1)^2(x+5)(x+1)^2}{(x+1)^6} \\ &= \frac{(x-1)[(3x+9)(x+1) - 3(x-1)(x+5)]}{(x+1)^4} = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	+	0	+
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	凸, ↗	极大值 $-27/2$	凸, ↘	凸, ↗	拐点 $(1, 0)$	凹, ↗

单调增加区间为 $(-\infty, -5)$, $(-1, 1)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调减少区间为 $(-5, -1)$ 函数在点

$x=-5$ 处取到极大值, 极大值为 $f(-5)=-27/2$.

曲线的凸区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, 1)$, 凹区间为 $(1, +\infty)$, 曲线拐点为 $(1, 0)$.

显然曲线有垂直渐近线 $x=-1$, 曲线无水平渐近线. 由于

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5,$$

因此曲线有斜渐近线 $y=x-5$.

(七. (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 求证不等式 $\sin x + \tan x > 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

证 令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2$,

$$f''(x) = -\sin x + 2\sec x \cdot \sec x \tan x = \frac{\sin x(2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} \geq 0,$$

故 $f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2$, 在区间 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 内单调增加, 而 $f'(0) = 0$, 于是

在区间 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 内 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ 在区间 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 内单调增加,

于是 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x > f(0) = 0$. 证毕.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f''(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

求证: $f(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

证 用反证法. 设存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$. 于是由罗尔定理,

$$\exists \xi \in (a, c), \exists \eta \in (c, b), \text{使得 } f'(\xi) = f'(\eta) = 0.$$

同样由罗尔定理, $\exists \zeta \in (\xi, \eta) \subset (a, b)$, 使得 $f''(\zeta) = 0$. 矛盾.

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限: 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)} dx$; 2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; 3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$;

4. 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1. 设 $u(x, y) = \ln \sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du|_{(1,2)}$.

2. 已知 $f(x, y, z) = 2xy - z^2$ 及点 $A(2, -1, 1), B(3, 1, -1)$, 求函数 $f(x, y, z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 给出, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1. 已知点 $A(2, 2, 2), B(4, 4, 2), C(4, 2, 4)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 的夹角.

2. 求经过直线 $L_1: \begin{cases} x+y=0, \\ x-y-z-2=0, \end{cases}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求(1)函数的单调区间于极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1. 求证: $1+x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 求证:

(1) 存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得 $f(\alpha) = 1 - \alpha$;

(2) 存在两个不同的点 $\xi \in (0, 1), \eta \in (0, 1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

