

中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学（一）（I）》

学年学期：2020 学年第 1 学期

学院/系：数学学院

考试方式：闭卷

考试时长：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
分数												
签名												

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

----- 以下为试题区域，共十一道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答。 -----

得分

一、证明数列

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots, \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}} \dots,$$

收敛，并求其极限。（10 分）

证明

- 1、设 $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}$ ，则 a_n 单调上升；
- 2、 $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ ；
- 3、 $a_1 \leq 2$ ，如果 $a_{n-1} \leq 2$ ，则 $a_n \leq 2$ ，根据数学归纳法， $a_n \leq 2$ ；
- 4、根据实数公理， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在，设为 A ；
- 5、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2+\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}$ ， $A = \sqrt{2+A}$ ， $A^2 = 2+A$ ， $A^2 - A - 2 = 0$ ， $A = 2$ ；

得分

二、求下列数列或函数的极限（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）：

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^x} + \frac{1}{x} \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$

解

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^x} + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+x^2+1-e^x}{x(1-e^x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+x^2+1-e^x}{x \cdot x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2x-e^x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-e^x}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0 = 1$$

得分

三、证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x+\sin x} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx.$ （8 分）

证明

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x+\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} d\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\cos t+\sin t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x+\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x+\sin x} dx \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x+\sin x} dx &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx \end{aligned}$$

得分

四、 求下列不定积分（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）：

1、 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} .$

解

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\cos x}{2+\cos x} - \frac{1}{6} \int \frac{d\cos x}{1-\cos x} - \frac{1}{2} \int \frac{d\cos x}{1+\cos x} \\ &= \frac{1}{3} \ln|2+\cos x| + \frac{1}{6} \ln|1-\cos x| - \frac{1}{2} \ln|1+\cos x| + C \end{aligned}$$

2、 $\int 2x \arctan x dx .$

$$\begin{aligned} &= \int \arctan x dx^2 = x^2 \arctan x - \int x^2 d \arctan x \\ &= x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= x^2 \arctan x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= x^2 \arctan x - x + \arctan x + C \end{aligned}$$

得分

五、 设 $f(x) = (1-x^2)\sin x$ ，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的带皮亚诺余项的 7 阶泰勒展式，由此求 $f^{(7)}(0)$ 的值.（8 分）

解

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x^2) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8) \right) \\ &= x - \left(1 + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 - \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{7!}\right)x^7 + o(x^8) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{7!}\right),$$

$$f^{(7)}(0) = -\left(\frac{7!}{5!} + 1\right) = -43$$

得分

六、 过(1,0)作曲线 $y = \ln(x-1)$ 的切线, 求切线、 x 轴以及曲线 $y = \ln(x-1)$ 所围成的图形的面积. (10 分)

解

1、设切点为 $(x_0, \ln(x_0-1))$, 则

$$\frac{\ln(x_0-1)-0}{x_0-1} = \frac{1}{x_0-1}, \quad \ln(x_0-1)=1, \quad x_0=1+e$$

2、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 - \int_2^{1+e} \ln(x-1) dx \\ &= \frac{e}{2} - x \ln(x-1) \Big|_2^{1+e} + \int_2^{1+e} \frac{x}{x-1} dx \\ &= \frac{e}{2} - x \ln(x-1) \Big|_2^{1+e} + \int_2^{1+e} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= \frac{e}{2} - x \ln(x-1) \Big|_2^{1+e} + (e-1) + \ln(x-1) \Big|_2^{1+e} = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

得分

七、 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的最大项. (8 分)

解

1、 求函数 $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ 的驻点。

$$y' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \left(\frac{1}{x} \ln x \right)' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln x} (1 - \ln x)$$

唯一驻点 $x=e$

2、 讨论函数的单调性。

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 函数在 $(0, e]$ 单调上升; 当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 函数在 $[e, +\infty)$

单调下降;

3、 $3^2 > 2^3$, $\sqrt[3]{3} > \sqrt[2]{2}$, 所以 $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的最大项在 $n=3$ 达到

得分

八、 求函数 $y = \frac{x^2}{1+x}$ 的单调区间、凹凸性、极值和渐近线方程. (10 分)

解

$$y' = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1+x)^2} = -\frac{x(x-2)}{(1+x)^2}$$

$$y'' = \frac{2(1-x)(1+x)^2 - 2(1+x)x(2-x)}{(1+x)^4} = \frac{2(1-2x)}{(1+x)^3} = \frac{-4\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(1+x)^3}$$

得分

九、 求二元函数 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^4)}{x^2 + y^2}$ 的极限. (8 分)

解 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 等价于 $\rho \rightarrow 0$, 不妨设 $\rho < 1$, 则

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^4)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} = \rho(\cos^3 \theta + \rho \sin^4 \theta) < 2\rho$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^4)}{x^2 + y^2} = 0$$

得分

十、 求过点 $A(2,1,3)$ ，并与直线

$$L:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$$

垂直的直线方程.（8 分）

解 设垂足为 $(-2+2t,2+t,-t)$ ，则垂线的方向为

$$(-4+2t,1+t,-t-3),$$

两直线垂直，两直线的方向的内积等于 0，所以

$$(-4+2t)\cdot 2+(1+t)+(t+3)=0，\ t=\frac{2}{3}。$$

垂线的方向为 $\left(-\frac{8}{3},\frac{5}{3},-\frac{11}{3}\right)$ ，垂线方程为

$$\frac{x-2}{-\frac{8}{3}}=\frac{y-1}{\frac{5}{3}}=\frac{z-3}{-\frac{11}{3}}$$

得分

十一、 设 $w=f(x+y+z,xyz)$ ，且 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$ 。

（10 分）

解

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2';$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}(f_1'+yzf_2')\\&\overset{\text{四则运算}}{=====}\frac{\partial f_1'}{\partial z}+yf_2'+yz\frac{\partial f_2'}{\partial z}\\&=f_{11}''+xyf_{12}''+yf_2'+yz(f_{21}''+xyf_{22}'')\\&=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'.\end{aligned}$$