

珠海校区2011学年度第一学期11级《高等数学二》期末考试题B

学院:_____ 专业:_____ 姓名:_____ 学号:_____ 评分:_____

阅卷老师签名:_____

警 示

《中山大学授予学士学位工作细则》第七条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

一. (10分, 每小题5分) 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 5)^2 (e^{2x} - 7)^5}{(e^{3x} + 9)^4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \cos t^2 dt}{x}.$$

解: (1) 原式 = 1.

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos x^4 - \cos x^2}{1} = -1.$$

二. (10分) 设 $f(x) = e^x \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$. 求单调区间, 拐点以及最大最小值.

$$\text{解: } f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x.$$

单调递增区间是 $[0, 3\pi/4], [7\pi/4, 2\pi]$; 单调递减区间是 $[3\pi/4, 7\pi/4]$.

$$f''(x) = 2e^x \cos x; \text{ 拐点是 } x = \pi/2, 3\pi/2.$$

$f(0) = 0$, $f(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$, $f(7\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi/4}$, $f(2\pi) = 0$; 所以最大值是 $f(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$, 最小值是 $f(7\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi/4}$.

三. (10分) 函数 $y = y(x)$ 由 $ye^x + \ln y = 1$ 确定. 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: 两边对 x 求导, 有 $y'e^x + ye^x + y'/y = 0$.

两边再对 x 求导, 有 $y''e^x + 2y'e^x + ye^x + y''/y - y'^2/y^2 = 0$, 得

$$y'' = \frac{y'^2/y^2 - 2y'e^x - ye^x}{e^x + \frac{1}{y}}.$$

得 $y' = -\frac{ye^x}{e^x + \frac{1}{y}}$. 再把 y' 代入即得 y'' .

四. (20分, 每小题5分) 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{x}{1+x^4} dx;$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx;$

解: (1) 原式 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^4} dx^2 = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C$.

(2) 令 $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$), 有

$$\text{原式} = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

(3) $\int x^4 \ln x dx;$

(4) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$

解: (3)

$$\text{原式} = \frac{1}{5} \int \ln x dx^5 = \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{25} x^5 + C.$$

(4)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)} dx + 2 \int \frac{1}{(x+2)} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+3)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x+1| + 2 \ln |x+2| - \frac{3}{2} \ln |x+3| + C. \end{aligned}$$

五. (20分, 每小题5分) 计算下列定积分和反常积分.

$$(1) \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx;$$

$$(2) \int_{-1}^1 x^4(\tan^3 x + \sin^5 x) dx;$$

解: (1) 令 $t = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^2 \frac{2t^2}{t+1} dt = 2 \int_0^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right) \Big|_0^2 = 2 \ln 3. \end{aligned}$$

(2) 由被积函数的奇偶性, 有, 原式 = 0.

$$(3) \int_0^{2\pi} |\sin(2x+10)| dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

解: (3) 原式 = $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 4$.

$$(4) \text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

六. (10分) 求曲线 $y = \sqrt{x}$, 和直线 $x = 0$, $y = 1$ 所围成的图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转形成的旋转体体积.

$$\text{解: 面积} = \int_0^1 1 - \sqrt{x} dx = \left(x - \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{体积} = \int_0^1 \pi (1-x) dy = \pi \left(x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

七. (5分) 求曲线 $\rho = 2(1 + \cos \theta)$ 的长度.

$$\text{解: } l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 16.$$

八. (5分) 求微分方程 $(2 + x^2)y' + y + 1 = 0$ 的通解.

$$\text{解: 分离变量得 } \frac{1}{y+1} dy = -\frac{1}{2+x^2} dx.$$

$$\text{积分得通解 } \ln |y+1| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

九. (10分) 求解初值问题: $xy' + y = x^5 + x, y|_{x=1} = 1$.

$$\text{解: 有一阶线性微分方程: } y' + \frac{1}{x}y = x^4 + 1.$$

$$\text{解相应的齐次方程有 } y = \frac{C}{x}.$$

$$\text{用常数变易法有通解 } y = \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}.$$

$$\text{又由初值条件 } y(1) = 1 \text{ 得 } C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以 } y = \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3x}.$$