

一、计算下列各题, 并写出必要的步骤。(共10 小题, 每小题 8 分, 共80 分)

1. 设 $a_n = n(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2 + n\pi})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x})^{\frac{1}{x^3}}$.

3. 计算积分 $\int e^x \arctan(e^{-x}) dx$.

4. 计算积分 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

5. 求双曲抛物面 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$ 与平面 $x + y + z = 6$ 的交线在 $P(4, 0, 2)$ 处的切线方程.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = e^3$,
求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

7. 将给定的正数 12 分成三个非负数 $x, 2y, 3z$ 之和, 使得 xy^2z^3 最大.

8. 设 $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-1}$, 求该函数(1)的单调区间和极值;(2)所确定曲线的凸凹区间;
(3)所确定曲线的渐近线.

9. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $x=3$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式, 并写出 $f^{(n)}(3)$ 的值.

10. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin x \sin y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性, 偏导数的存在性及可微性.

二、按要求解答下列各题, 并写出必要的步骤。(共4 小题, 每小题5 分, 共20 分)

11. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$

12. 若方程 $e^z = xyz$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

13. 求经过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ 且平行于直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ 的平面方程.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有二阶导数, 且有 $f(a) = f(b) = 0, f(c) > 0$, $(a < c < b)$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) < 0$.