09 级一期 A 卷参考解答

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}\cdot\left(-2/x^2\right)}{-1/x^2}=2\lim\limits_{x\to\infty}e^{2/x}=2e^0=2$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,则

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{6},\quad \text{于是}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^y=e^{-1/6}.$$

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

解 原式$=\displaystyle\int\left(\frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

解 令 $x+2=t^3$, $dx=3t^2dt$,则

$$\text{原式}=\int\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int(t-1)dt+3\int\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|t+1|+C \quad =\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3(x+2)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right|+C.$$

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

解　令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx =2\int_0^2 te^t dt=2\left[te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t dt\right]=2\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)=2(e^2+1).$$

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

证明　令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$\text{左边}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^{2010}t}{\sin^{2010}t+\cos^{2010}t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\text{右边}.$$

而,左边+右边= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$,　故　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\frac{\pi}{4}$.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{x}{1+x^2+y^2}$,　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2}$,　于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{1+1+4}=\frac{1}{6},\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$du\big|_{(1,2)}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}dy=\frac{dx+2dy}{6}.$$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1),B(3,1,-1)$,求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解 $l=\overline{AB}=(1,2,-2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y,\frac{\partial f}{\partial y}=2x,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z.\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=-2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=4,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=-2.$$

因此,$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=(-2)\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$.

而在点 A 处方向导数的最大值为 $|g|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x,y)=z^3-3xyz-1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2},$$

$$=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z^2-xy)^2}=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\cdot\frac{yz}{z^2-xy}}{(z^2-xy)^2}$$

$$=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2),B(4,4,2),C(4,2,4)$,求向量 $\overline{AB},\overline{AC}$ 的夹角.

解 $\overline{AB}=(2,2,0),\overline{AC}=(2,0,2)$,设所求夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{2\times2+2\times0+0\times2}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=z$ 的平面方程.

解 L_1 的参数方程为 $x=t,y=-t,z=2(t-1)$，化为标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2},$$

其方向向量为 $l_1=(1,-1,2)$，而直线 L_2 的方向向量为 $l_2=(1,1,1)$，故所求平面法向量为

$$n=l_1\times l_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3i+j+2k=(-3,1,2).$$

所求平面过点(0,0,－2),故所求平面方程为 $-3x+y+2(z+2)=0$,即$3x-y-2z=4$.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

解 $f'(x)=(x-1)(x-2)^2$,从而驻点为 $x_1=1,x_2=2$.列表如下

x	$(-\infty,1)$	1	（1，2）	2	（2，+∞）
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	非极值	↗

所求函数最小值为

$$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=\int_0^1(t^3d-5t^2+8t-4)dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+4-4=-\frac{17}{12}.$$

六.(12 分)设函数 $f(x)=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$，求(1)函数的单调区间与极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

解 函数的定义域为$(-\infty,\ -1)\cup(-1,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{3x^2(1+x)^2-x^3\cdot 2(1+x)}{2(1+x)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(1+x)^3-(x^3+3x^2)\cdot 3(1+x)^2}{2(1+x)^6}=\frac{3x}{(1+x)^4}.$$

从而函数的驻点为 0, —3.又二阶导数为零的点为 0,列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	+	0	+
$f''(x)$	—	—	—	—	0	+
$f(x)$	凸↗	极大	凸↘	凸↗	拐点	凹↗

函数的单调增加区间为$(-\infty,-3)$和$(0,+\infty)$,单调减少区间为$(-3,-1)$.极小值点为—3.凹区间为$(0,+\infty)$,凸区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$,拐点为$(0,0)$.下面再求渐近线.

显然,直线 $x=-1$ 是垂直渐近线.而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty$$

因而曲线无水平渐近线,但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(1+x)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(1+x)^2}-\frac{x}{2}\right]=-1,$$

因而曲线有斜渐近线 $y=\frac{1}{2}x-1.$

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证:$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$

证 令 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$,则当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,$$

故此函数单调增加.而容易验证$f(0)=0$,故当$x>0$时,$f(x)\geq 0$,此即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x>0.$$

又，$f(-x)=1-x\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=1-x\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)-\sqrt{1+x^2}=f(x)$,

从而 $$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x\in R.$$

2.设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内可导,且$f(0)=0,f(1)=1$,求证:

(1)存在$\alpha\in(0,1)$,使得$f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点$\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证 (1)令$g(x)-f(x)+x-1$, 则$g(0)=f(0)-1<0,g(1)=f(1)+1-1=1>0$.

于是由介值定理,存在$\alpha\in(0,1)$,使得$g(\alpha)=0$, 即$f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)由 Largranger 定理,在区间$(0,\alpha)$内存在ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

在区间$(\alpha, 1)$内,存在η,使得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

于是存在两个不同的点$\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

高数下

一.(每小题 6 分,共 12 分)求极限: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

二.(每小题 6 分,共 24 分)求下列积分:

(1) $\int\dfrac{dx}{2\left(2+x^{10}\right)}$; (2) $\int\cos(\ln x)dx$; (3) $\int_1^e\dfrac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

三.(每小题 7 分, 共 21 分)

(1)设 $z(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 $dz\big|_{(0,1)}$;

(2)已知 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1)$, $B(3,-2,-2)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在电 A 处方向导数的最大值.

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 给出, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

四.(第一小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

(1)给定空间三点: $A(1,2,0)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,-1,2)$, 求 ΔABC 的面积 S.

(2)求经过直线 $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}, x>0$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求(1)此函数的单调区间与极值点; (2)此函数的凹凸区间与拐点; (3)此函数的渐近线.

七.(每小题 7 分, 共 14 分)

1.求证不等式 $\sin x+\tan x>2x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f''(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$. 求证: $f(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$.

09 级二期期末 B 卷试题.完成以下共 13 题,除最后两题各 6 分外其余各题各 8 分.

一.求初值问题: $\begin{cases}(2xy-1)dx+x^2dy=0,\\ y(1)=2.\end{cases}$

二.计算累次积分 $I=\int_0^1 dy\int_y^1 \sin x^2 dx.$

三.验证数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛,并求其和.

四.若函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx,\quad y>0$, 求 $g'(x)$.

五.计算曲线积分 $I=\oint_{L^+}(ye^x-\sin x^3)dx+(e^x+x^3+\sin y^3)dy$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=1$,逆时针方向.

六.求解一阶常微分方程: $\frac{dy}{dx}-\frac{6y}{x}+xy^2=0.$

七.求解二阶非齐次方程的初值问题: $\begin{cases}y''-4y'+3y=1+e^{2x},\\ y(0)=y'(0)=1.\end{cases}$

八.计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}(x^3z+x)dydz+(\cos y-x^2yz)dzdx-x^2z^2dxdy$, 其中 S^+为曲面 $z=2-x^2-y^2, 1\le z\le 2$, 取上侧.

九.若函数 $\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)$, 的和函数,并证明其在区间 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

十.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ 的收敛半径,收敛域及和函数.

十一. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=2$ 处的泰勒展开式,并求其收敛域.

十二. 判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛,

十三. 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots, \{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

09级一期月卷

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题.

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2),B(4,4,2),C(4,2,4)$,求向量 $\overline{AB},\overline{AC}$ 的夹角.

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$，求(1)函数的单调区间于极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$, 求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1), \eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

09级一期A卷参考解答

一.(每小题6分,共12分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}\cdot\left(-2/x^2\right)}{-1/x^2}=2\lim\limits_{x\to\infty}e^{2/x}=2e^0=2$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,则

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{6},\quad \text{于是}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^y=e^{-1/6}.$$

二.(每小题6分,共24分)完成如下各题

1. $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

解 原式$\displaystyle=\int\left(\frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

解 令 $x+2=t^3, dx=3t^2dt$, 则

原式$\displaystyle=\int\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int(t-1)dt+3\int\frac{1}{1+t}dt$

$$=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|t+1|+C \quad =\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3(x+2)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right|+C.$$

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

解　令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx \ =2\int_0^2 te^t dt=2\left[te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t dt\right]=2\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)=2(e^2+1).$$

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

证明　令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$\text{左边}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^{2010}t}{\sin^{2010}t+\cos^{2010}t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\text{右边}.$$

而,左边+右边$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$, 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\frac{\pi}{4}$.

三.(每小题7分,共21分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{1+1+4}=\frac{1}{6},\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$du\Big|_{(1,2)}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}dy=\frac{dx+2dy}{6}.$$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1),B(3,1,-1)$,求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解　$l=\overline{AB}=(1,2,-2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y,\frac{\partial f}{\partial y}=2x,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z.\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=-2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=4,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=-2.$$

因此,$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=(-2)\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$.

而在点 A 处方向导数的最大值为　$|g|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解　令 $F(x,y)=z^3-3xyz-1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2},$$

$$=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z^2-xy)^2}=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\cdot\frac{yz}{z^2-xy}}{(z^2-xy)^2}$$

$$=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2),B(4,4,2),C(4,2,4)$,求向量 $\overline{AB},\overline{AC}$ 的夹角.

解　$\overline{AB}=(2,2,0),\overline{AC}=(2,0,2)$,设所求夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2\times2+2\times0+0\times2}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

2.求经过直线$L_1:\begin{cases}x+y=0,\\ x-y-z-2=0,\end{cases}$且平行于直线$L_2:x=y=z$的平面方程.

解 L_1的参数方程为$x=t,y=-t,z=2(t-1)$，化为标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2},$$

其方向向量为$\boldsymbol{l}_1=(1,-1,2)$，而直线$L_2$的方向向量为$\boldsymbol{l}_2=(1,1,1)$，故所求平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-3,1,2)$$

所求平面过点$(0,0,-2)$,故所求平面方程为$-3x+y+2(z+2)=0$,即$3x-y-2z=4$.

五.(7 分)求函数$f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2dt$的极值.

解 $f'(x)=(x-1)(x-2)^2$,从而驻点为$x_1=1,x_2=2$.列表如下

x	$(-\infty,1)$	1	(1, 2)	2	(2, +∞)
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	非极值	↗

所求函数最小值为

$$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=\int_0^1(t^3d-5t^2+8t-4)dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+4-4=-\frac{17}{12}.$$

六.(12 分)设函数$f(x)=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$,求(1)函数的单调区间与极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

解 函数的定义域为$(-\infty,\ -1)\cup(-1,+\ \infty)$,且

$$f'(x)=\frac{3x^2(1+x)^2-x^3\cdot 2(1+x)}{2(1+x)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(1+x)^3-(x^3+3x^2)\cdot 3(1+x)^2}{2(1+x)^6}=\frac{3x}{(1+x)^4}.$$

从而函数的驻点为 0, −3.又二阶导数为零的点为 0,列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	凸↗	极大	凸↘	凸↗	拐点	凹↗

函数的单调增加区间为$(-\infty,-3)$和（$0,+\infty$），单调减少区间为$(-3,-1)$.极小值点为−3.凹区间为$(0,+\infty)$,凸区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$.拐点为$(0,0)$.下面再求渐近线.显然,直线$x=-1$是垂直渐近线.而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty$$

因而曲线无水平渐近线.但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(1+x)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(1+x)^2}-\frac{x}{2}\right]=-1,$$

因而曲线有斜渐近线　$y=\frac{1}{2}x-1.$

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证:$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x\in R.$

证　令$f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$,则当$x>0$时,

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,$$

故此函数单调增加.而容易验证 $f(0)=0$, 故当 $x>0$ 时, $f(x)\geq 0$, 此即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x>0.$$

又, $f(-x)=1-x\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=1-x\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)-\sqrt{1+x^2}=f(x)$,

从而 $$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$$

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

证 (1)令 $g(x)-f(x)+x-1$, 则 $g(0)=f(0)-1<0, g(1)=f(1)+1-1=1>0$.

于是由介值定理,存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $g(\alpha)=0$, 即 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)由 Largranger 定理,在区间 $(0, \alpha)$ 内存在 ξ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

在区间 $(\alpha, 1)$ 内, 存在 η 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

于是存在两个不同的点 $\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

08级 B

一.(每小题 7 分,共 28 分)

1.若函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^2}\dfrac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求 $g'(y)$.

3.级数二重积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{\sin x}{x}dxdy$,其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.

4.求解一阶常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$.

二.(10 分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0$,求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$到 $A(1,1)$的弧段,求如上曲线积分 I.

三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$,其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,求上侧.

四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$;　　(2) $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

六.(10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其和函数.

八.(6 分)研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

08级B卷

一.(每小题7分,共28分)　2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求 $g'(y)$.

解　$g'(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{-x\sin(xy)}{x}dx+3y^2\frac{\cos y^3 y}{y^3}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\cos\sqrt{y}y}{\sqrt{y}}$

$$=-\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\sin(xy)dx+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=\frac{\cos xy}{y}\bigg|_{\sqrt{y}}^{y^3}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}$$

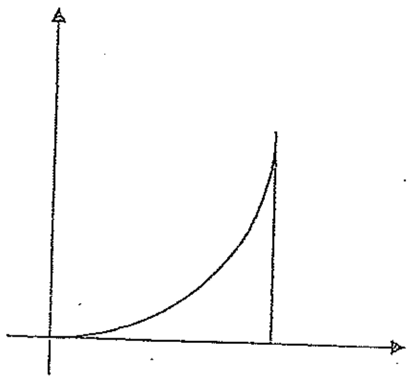
$$=\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{y}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=4\frac{\cos y^4}{y}-\frac{3\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}.$$

3.计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy$,其中D是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.

解　$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1 x\sin xdx$

$$=\int_0^1 xd(-\cos x)=-x\cos x\big|_0^1+\int_0^1\cos xdx$$

$$=-x\cos x\big|_0^1+\sin x\big|_0^1=\sin 1-\cos 1.$$



4.求解一阶常微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$.

解　方程改写为 $\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$, ① 把x看作y的函数,是一阶线性方程.

先解方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x$, 分离变量,得 $\frac{dx}{x}=\frac{2}{y}dy$, $\ln x=2\ln y+\ln C$, 即 $x=Cy^2$.

用常数变易法,令 $x=C(y)y^2$,则 $\frac{dx}{dy}=C'(y)y^2+2C(y)y$, 代入①,得

$C'(y)y^2=-y$,因此 $C'(y)=-y^{-1}$, $C(y)=-\ln Cy$, 于是原方程的通解为 $x=-y^2\ln Cy$.

二.(10分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0$,求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段,求如上曲线积分 I.

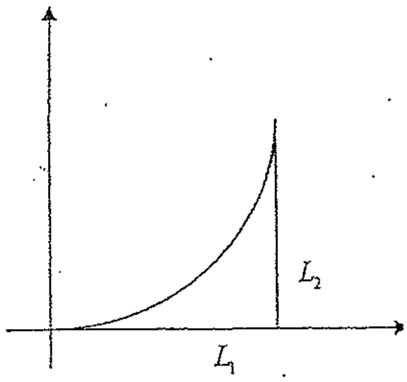
解 $P = xy^2, Q = y\varphi(x)$, 因为积分与路径无关,故必有 $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x} = y\varphi'(x)$,

即得 $\varphi'(x) = 2x$, $\varphi(x) = x^2 + C$, 由于 $\varphi(0) = 0$, 得 $C = 0$, 故 $\varphi(x) = x^2$.

$$I = \int_L xy^2dx + x^2ydy = \int_{L_1+L_2} xy^2dx + x^2ydy$$

$$= \int_{L_1} xy^2dx + x^2ydy + \int_{L_2} xy^2dx + x^2ydy$$

$$= 0 + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}.$$



三.(10 分)级数曲面积分 $I = \iint_{S^+}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 取上侧.

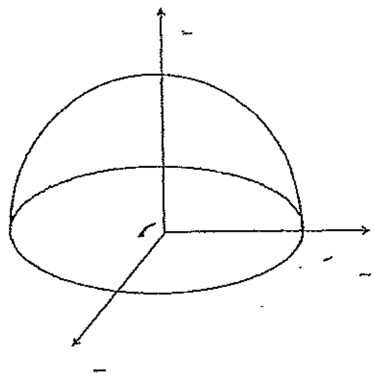
解 取 A: z=0 为辅助平面, $\frac{\partial P}{\partial x} = 4x^3 - z, \frac{\partial Q}{\partial y} = z, \frac{\partial R}{\partial z} = 0$. 由高斯公式,

$$I = \iint_{S^+ + A}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy, = \iiint_{\Omega}(4x^3 - z + z + 0)dV \overset{\text{由对称性}}{=} 0.$$

故 $I = \iint_{S^+}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy$

$$= \iint_{A^+}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy,$$

$$= -4\iint_{A^+} y^2dxdy = -4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sin^2\theta rdrd\theta = -16\pi.$$



四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 + e^x, \\ y(0) = 2, y'(0) = 2. \end{cases}$

解 先解齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 故通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

对非齐次方程 $y'' - 2y' + y = 1$. ①可设特解为 $y = C$, 代入①,得 C=1.

对非齐次方程 $y'' - 2y' + y = e^x$. ②因 1 是二重根, 可设特解为 $y = Cx^2e^x$,

代入②, 得$C=\dfrac{1}{2}$,即得特解为$y=\dfrac{1}{2}x^2e^x$. 于是, 原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+1.$$

由 $y(0)=2$, 得$C_1=1$.

由 $y'=(C_1+C_2x+\dfrac{x^2}{2})e^x+(C_2+2x)e^x$ 得 $y'(0)=C_1+C_2=2$, 得 $C_2=1$.

故初值问题的解为 $\quad y=(1+x+\dfrac{x^2}{2})e^x+1.$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$; (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

解 (1)因 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=1$, 而无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛, 由比较判别法的极限形式得, 无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$ 收敛.

(2)因 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^{7/3}}\Big/\frac{1}{x^{4/3}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, 而瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{4/3}}dx$ 发散,故瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$ 发散

六.(10 分)求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

解 $\displaystyle l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}\Big/\frac{1}{n(n-1)}=1$, 故收敛半径 R=1. 收敛区间为 (-1, 1) 收敛域为[-1, 1] .

记 $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $\displaystyle xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\triangleq F(x)$ 于是 $\displaystyle F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$$F''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \text{于是 } F'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$$

$F(x)=-\displaystyle\int_0^x\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x)$, 故 $f(x)=1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=x-2$,则所求的展开式为

$$f(x)=\ln 3x=\ln(6+3t)=\ln 6+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n2^n}=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}$$

收敛域为 $-1<\frac{x-2}{2}\le 1$,即 $0<x\le 4$ 或 $(0,4]$.

八.(6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

解　显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$,记 $f(x)=x-\ln x$,则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0\quad(x>1)$,

从而 $f(n)$ 递增,即 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减,由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛.

但 $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 也发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

九.(6 分)设 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

证　因 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$. 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,

故必有 $a_n\ge a>0,n=1,2,\cdots$, 从而 $\frac{1}{1+a_n}\le\frac{1}{1+a}<1$. 于是 $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n\le\left(\frac{1}{1+a}\right)^n,n=1,2,\cdots$.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛,由比较判别法;级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

08级

一,完成以下各题(每小题 7 分,共 28 分)

1.若 $u(x,y)=\sqrt{e^x\cos y-\sin(xy)}$,求 $u_x(0,0),u_y(0,0)$.

2.若函数 $z=z(x,y)$满足方程$x+y+z=e^z$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx$.

4.求解一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$.

二.(10 分)求曲线积分 $I=\int_L(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$, 其中$L$为曲线y=$\sin\frac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.

三.(10 分)计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}(y^2+z^2)dydz+yzdzdx+z(x^3+y^2)dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

四. (10 分)求解初值问题: $\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\frac{1}{3},y'(0)=3.\end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\alpha>0$.

六. (10 分)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成$(x-2)$的幂级数,并求其收敛域.

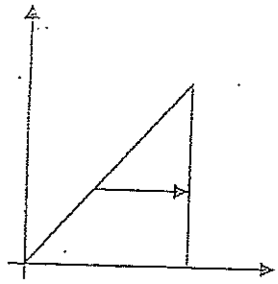
八.(6 分)研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$的敛散性.

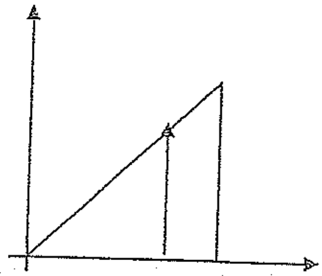
九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n; 且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

08级答

一,完成以下各题

3.计算累次积分. $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx.$





解 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^x y^2e^{-x^4}dy$

$$=\int_0^1 \frac{y^3}{3}\bigg|_0^x e^{-x^4}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1 e^{-x^4}dx^4=\frac{1}{12}\left(-e^{-x^4}\right)\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left(1-e^{-1}\right).$$

4.求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}.$

解 先解 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0.$ 分离变量,得 $\frac{dy}{y}=-\cos x dx$

$$\ln y=-\sin x+\ln C,\qquad y=Ce^{-\sin x}.$$

令 $y=C(x)e^{-\sin x}$. 则 $y'=C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}.$

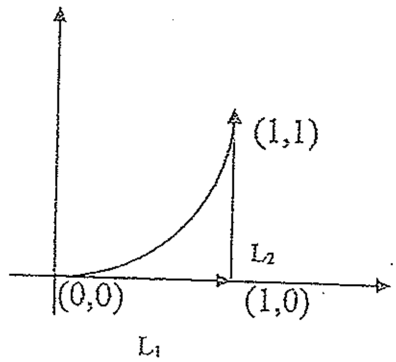
代入原方程,得 $C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}+C(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x}.$

即 $C'(x)=1,\quad C(x)=x+C.$ 从而方程通解为

$$y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

二.(10 分)求曲线积分 $I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy,$

其中L为曲线$y=\sin\frac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.



解 $P=e^y+x, Q=xe^y-2y, \frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$

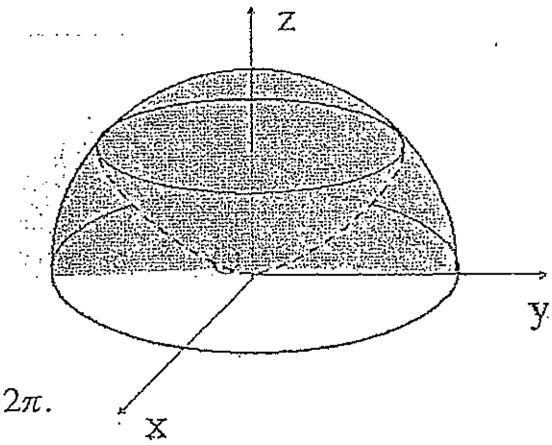
故积分值和路径无关,从而

$$I=\int_{L_1+L_2}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$$

$$=\int_0^1 (e^0+x)dx+\int_0^1 (e^y-2y)dy=e-\frac{1}{2}.$$

三.(10 分)计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}\left(y^2+z^2\right)dydz+yzdzdx+z\left(x^3+y^2\right)dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

解　记 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 2\}$,则有高斯公式及对称性,



$$I=\iiint_\Omega\left(z+x^3+y^3\right)dV=\iiint_\Omega zdV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_r^{\sqrt{4-r^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(4-2r^2\right)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\cdot(2-r^2)dr^2=\pi\left(2r^2-\frac{1}{2}r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=2\pi.$$

四. (10 分)求解初值问题: $\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\frac{1}{3},y'(0)=3.\end{cases}$

解　齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$.特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$.

因此齐次方程的通解为　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

由于 0 不是特征方程的根,故设非齐次方程的特解为 $y=ax+b$, 代入原方程,比较系数,得 $a=-1,b=\frac{1}{3}$.即原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$.

由定解条件,得　$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ -C_1+3C_2-1=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=1.\end{cases}$

初值问题的解为　$y=-e^{-x}+e^{3x}-x+\frac{1}{3}$.

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\alpha>0$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{1+x|\sin x|}\geq\dfrac{1}{1+x},(x>0)$ 而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$ 发散,

由比较判别法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}\Big/\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 故 $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ 和 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx,\alpha>0$ 同敛散.

而当 $\alpha-1<1$ 即 $\alpha<2$ 时, $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 收敛; 当 $\alpha-1\geq 1$ 即 $\alpha\geq 2$ 时, $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 发散. 故

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\begin{cases}\text{收敛,当}0<\alpha<2,\\ \text{发散,当}\alpha\geq 2.\end{cases}$$

六. (10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

解 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}\overset{t=\frac{x-1}{2}}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}$$

$$(x-1)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=g(t),\qquad g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t},$$

因此 $$g(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|,$$

$$(x-1)f(x)=-\ln\left|1-\frac{x-1}{2}\right|=\ln 2-\ln|3-x|,$$

从而 $$f(x)=\frac{\ln 2-\ln|3-x|}{x-1}.$$

由于 $a_n=\dfrac{1}{2^n},l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$, 收敛半径为 R=2,

收敛区间为 $-1<t<1,-1<\dfrac{x-1}{2}<1$, 即 $-1<x<3$. 即 $(-1,3)$.

又由于级数当 $x=-1$ 收敛,当 $x=3$ 时发散,故收敛区域为 $[-1,3)$.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=\frac{x}{5}$,则

$$f(x)=\ln(7+x-2)=\ln 7+\ln\left(1+\frac{x-2}{7}\right)=\ln 7+\ln(1+t)$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{7^n}$$

其收敛域为 $-1<\frac{x-2}{7}\le 1$,即　$-5<x\le 9$.

八.(6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 的敛散性.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}=1$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 也发散,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 不绝对收敛.

但　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}=0$,又函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}$ 单调下降,即 $f(n)=\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 关于 n 单调下降,于是由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 收敛.因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 条件收敛.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n;且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

证　记 $f(x)=x^n+nx-1$,则 $f(1)=n>0,f(0)=-1<0$. 故由 $f(x)$ 的连续性,必有 $x_n\in(0,1)$,使 $f(x_n)=0$. 又 $f'(x)=n(x^{n-1}+1)>0$,即 $f(x)$ 严格单调,故根唯一.

又,由 $f(x_n)=x_n^n+nx_n-1=0$,得　$nx_n=1-x_n^n<1$,　$x_n<\frac{1}{n}$,　$x_n^{\alpha}<\frac{1}{n^{\alpha}}$.

当 $\alpha>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛,故由比较判别法,$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.证毕.

一,完成以下各题(每小题 7 分,共 28 分)

1.若 $u(x,y)=\sqrt{e^x\cos y-\sin(xy)}$, 求 $u_x(0,0), u_y(0,0)$.

2.若函数 $z=z(x,y)$满足方程$x+y+z=e^z$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx$.

4.求解一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$.

二.(10 分)求曲线积分$I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$, 其中$L$为曲线$y=\sin\frac{\pi x}{2}$

上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.

三.(10 分)计算曲面积分$I=\iint\limits_{S^+}\left(y^2+z^2\right)dydz+yzdzdx+z\left(x^3+y^2\right)dxdy$, 其中 S 为

上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

四. (10 分)求解初值问题:$\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\frac{1}{3}, y'(0)=3.\end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x\left|\sin x\right|}$;　　　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \alpha>0$.

六. (10 分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成$\left(x-2\right)$的幂级数,并求其收敛域.

八.(6 分)研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 的敛散性.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n; 且当 $\alpha>1$

时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

东校区高等数学（一）期末考试试卷

（2006学年度第一学期）

姓名：　　　　　　　　专业：

学号：　　　　　　　　成绩：

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、　求如下函数的导数（每小题7分，共21分）

1、设函数 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

2，设函数 $y=(x^2+\cos x)^{\sin x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

3，设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ 给出，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

二，　求如下极限（每小题6分，共12分）

1，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1+x}{x}\right)$

2，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

三、　完成如下各题（每小题 7 分，共 28 分）

1、$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

2、$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

3、$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$

4、求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=e^{-1}$，$x=e$ 及 x 轴所围平面图形的面积。

四，（第 1 小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分）

1，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$。

2，求通过直线 l_1：$\begin{cases}2x+3y+3z=0\\x+2z-4=0\end{cases}$ 且与直线 l_2：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ 平行的平面的方程。

五，（6 分）若 $f(0)=0$ 而当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t}\,)\,dt}{x^3}$，

求 $f'(0)$。

一，（每小题 7 分，共 28 分）

1，设函数 $z(x,y)=\dfrac{x^2}{2y}+f(xy)$，其中函数 f 二阶可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

2， 若隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 y'。

3，设函数 $g(y)=\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx$， $y>0$，求 $g'(y)$。

4， 计算积分：$I=\displaystyle\int_1^2 dy\int_y^2\frac{\sin x}{x-1}dx$。

二，（10 分）求曲线积分 $I=\displaystyle\oint_{\ell}(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy$，其中 ℓ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的上半周由点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$。

三，（10 分）计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{S^+}x\,dydz+(y+y^2)\,dzdx+z\,dxdy$，其中 S^+ 为曲面 $z=x^2+y^2$，$0\le z\le 1$，取下侧。

四，（每小题 7 分，共 14 分）

1，求解微分方程初值问题：$\begin{cases}xy'+y=e^x\\ y(1)=1\end{cases}$ 。

2，求微分方程：$y''-4y'+3y=1+e^{2x}$ 的通解。

五，讨论如下广义积分的敛散性：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x+1}}$，　　（2）$\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^{4/3}}dx$

六，（每小题 8 分，共 16 分）

（1）求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}(x-3)^n$ 的收敛半径，收敛区间和收敛域。

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开式。

七，（7 分）讨论无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin x}{5+x^3}dx$ 的敛散性，若积分收敛，研究其是绝对收敛还是条件收敛？

八,(5分)设序列 $\{na_n\}$ 收敛,级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 也收敛,求证:级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限: 1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$; 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; 3. $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

4.求证: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2)$, $B(4,4,2)$, $C(4,2,4)$, 求向量 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的夹角.

2.求经过直线 L_1: $\begin{cases}x+y=0,\\x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 L_2: $x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int (t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求(1)函数的单调区间于极值点,(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

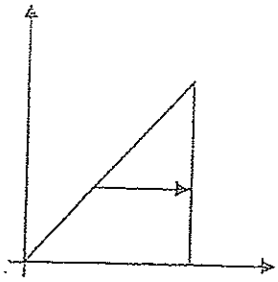
1.求证: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2}$, $x\in R$.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

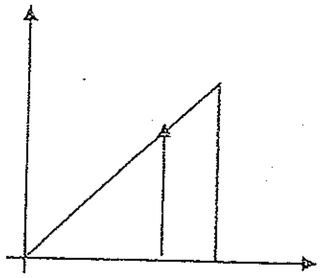
(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

一,完成以下各题



3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2 e^{-x^4}dx.$

解 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^x y^2e^{-x^4}dy$



$$=\int_0^1 \frac{y^3}{3}\bigg|_0^x e^{-x^4}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1 e^{-x^4}dx^4=\frac{1}{12}\left(-e^{-x^4}\right)\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left(1-e^{-1}\right).$$

4.求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$.

解 先解 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0$. 分离变量,得 $\frac{dy}{y}=-\cos xdx$

$$\ln y=-\sin x+\ln C,\qquad y=Ce^{-\sin x}.$$

令 $y=C(x)e^{-\sin x}$. 则 $y'=C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}$.

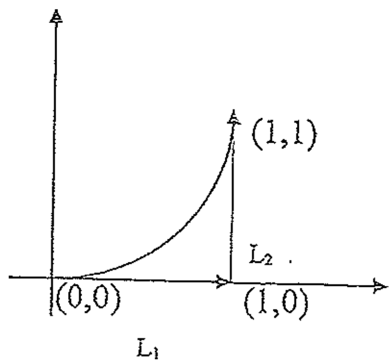
代入原方程,得 $C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}+C(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x}$.

即 $C'(x)=1,\quad C(x)=x+C$. 从而方程通解为

$$y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

二.(10 分)求曲线积分 $I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$,

其中L为曲线y=sin$\frac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.



解 $P=e^y+x,Q=xe^y-2y,\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

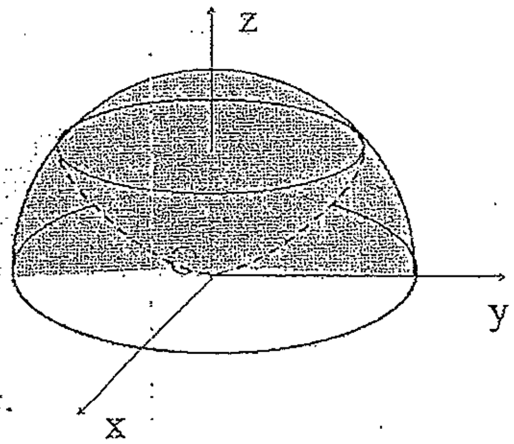
故积分值和路径无关,从而

$$I=\int_{L_1+L_2}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$$

$$= \int_0^1 (e^0 + x)dx + \int_0^1 (e^y - 2y)dy = e - \frac{1}{2}.$$

三.(10 分)计算曲面积分 $I = \iint\limits_{S^+} (y^2+z^2)dydz + yzdzdx + z(x^3+y^2)dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

解　记 $\Omega = \{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \le 2\}$, 则有高斯公式及对称性,



$$I = \iiint\limits_{\Omega} (z + x^3 + y^3)dV = \iiint\limits_{\Omega} zdV$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} zdz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(4-2r^2)dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}\cdot(2-r^2)dr^2 = \pi\left(2r^2 - \frac{1}{2}r^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

四. (10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 3x + 1, \\ y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 3. \end{cases}$

解　齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

因此齐次方程的通解为　　$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

由于 0 不是特征方程的根,故设非齐次方程的特解为 $y = ax + b$, 代入原方程,比较系数,得 $a=-1, b=\frac{1}{3}$. 即原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3}$.

由定解条件,得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 3C_2 - 1 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$

初值问题的解为　　$y = -e^{-x} + e^{3x} - x + \frac{1}{3}$.

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x|\sin x|}$;　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{1+x|\sin x|} \ge \dfrac{1}{1+x},(x>0)$ 而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$ 发散,

由比较判别法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}\Big/\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 故 $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ 和 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx,\alpha>0$ 同敛散.

而当 $\alpha-1<1$ 即 $\alpha<2$ 时, $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 收敛; 当 $\alpha-1\ge 1$ 即 $\alpha\ge 2$ 时, $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 发散. 故

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\begin{cases}\text{收敛},\text{当}0<\alpha<2,\\ \text{发散},\text{当}\alpha\ge 2.\end{cases}$$

六. (10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

解 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}\overset{t=\frac{x-1}{2}}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}$$

$$(x-1)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=g(t),\qquad g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t},$$

因此 $$g(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|,$$

$$(x-1)f(x)=-\ln\left|1-\frac{x-1}{2}\right|=\ln 2-\ln|3-x|,$$

从而 $$f(x)=\frac{\ln 2-\ln|3-x|}{x-1}.$$

由于 $a_n=\dfrac{1}{2^n},l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$, 收敛半径为 R=2,

收敛区间为 $-1<t<1,-1<\dfrac{x-1}{2}<1$, 即 $-1<x<3$. 即$(-1,3)$.

又由于级数当 $x=-1$ 收敛,当 $x=3$ 时发散,故收敛区域为$[-1,3)$.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=\dfrac{x}{5}$, 则

$$f(x)=\ln(7+x-2)=\ln 7+\ln\left(1+\frac{x-2}{7}\right)=\ln 7+\ln(1+t)$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{7^n}.$$

其收敛域为 $-1<\dfrac{x-2}{7}\le 1$, 即　$-5<x\le 9$.

八. (6 分)研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 的敛散性.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}=1$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 也发散,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 不绝对收敛.

但　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}=0$, 又函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}$ 单调下降,即 $f(n)=\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 关于 n 单调下降,于是由莱布尼兹判别法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 收敛.因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 条件收敛.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n; 且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

证　记 $f(x)=x^n+nx-1$, 则 $f(1)=n>0$, $f(0)=-1<0$. 故由 $f(x)$ 的连续性,必有 $x_n\in(0,1)$, 使 $f(x_n)=0$. 又 $f'(x)=n(x^{n-1}+1)>0$, 即 $f(x)$ 严格单调, 故根唯一.

又,由 $f(x_n)=x_n^n+nx_n-1=0$, 得　$nx_n=1-x_n^n<1$,　$x_n<\dfrac{1}{n}$,　$x_n^{\alpha}<\dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

当 $\alpha>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛,故由比较判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.证毕.

一.(每小题 7 分,共 28 分)

1.若函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^2}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求 $g'(y)$.

3.级数二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$,其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.

4.求解一阶常微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$.

二.(10 分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0$,求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段,求如上曲线积分 I.

三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$,其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,求上侧.

四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$;　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

六.(10 分)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其和函数.

八.(6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

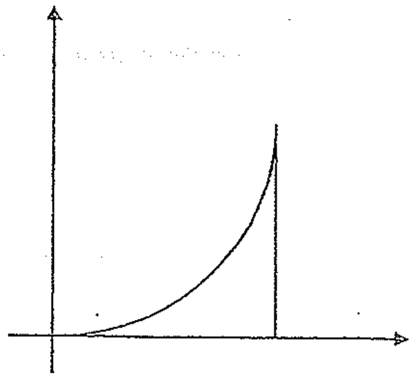
一.(每小题 7 分,共 28 分)　2.设函数$g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求$g'(y)$.

解　$g'(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{-x\sin(xy)}{x}dx+3y^2\frac{\cos y^3y}{y^3}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\cos\sqrt{y}y}{\sqrt{y}}$

$$=-\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\sin(xy)dx+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=\frac{\cos xy}{y}\Big|_{\sqrt{y}}^{y^3}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}$$

$$=\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{y}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=4\frac{\cos y^4}{y}-\frac{3\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}.$$

3.计算二重积分$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy$,其中 D 是由$y=x^2, y=0, x=1$所围成的区域.



解　$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1x\sin xdx$

$$=\int_0^1xd(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos xdx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1.$$

4.求解一阶常微分方程　$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$.

解　方程改写为　$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$, ① 把 x 看作 y 的函数,是一阶线性方程.

先解方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x$, 分离变量,得 $\frac{dx}{x}=\frac{2}{y}dy$,　$\ln x=2\ln y+\ln C$, 即 $x=Cy^2$.

用常数变易法,令$x=C(y)y^2$,则　$\frac{dx}{dy}=C'(y)y^2+2C(y)y$, 代入①,得

$C'(y)y^2=-y$, 因此 $C'(y)=-y^{-1}$, $C(y)=-\ln Cy$, 于是原方程的通解为　$x=-y^2\ln Cy$.

二.(10 分)设曲线积分$I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关,其中函数$\varphi(x)$连续可导且$\varphi(0)=0$,求函数$\varphi(x)$;又设$L$为曲线$y=x^{2009}$上从点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段,求如上曲线积分$I$.

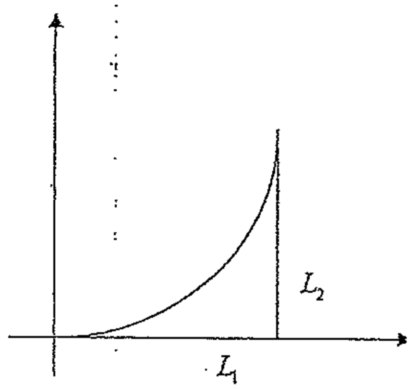
解　$P = xy^2, Q = y\varphi(x)$，因为积分与路径无关,故必有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y\varphi'(x)$,

即得 $\varphi'(x) = 2x$, $\varphi(x) = x^2 + C$, 由于 $\varphi(0) = 0$, 得 $C = 0$, 故 $\varphi(x) = x^2$.

$$I = \int_L xy^2dx + x^2ydy = \int_{L_1+L_2} xy^2dx + x^2ydy$$

$$= \int_{L_1} xy^2dx + x^2ydy + \int_{L_2} xy^2dx + x^2ydy$$

$$= 0 + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}.$$



三.(10 分)级数曲面积分 $I = \iint\limits_{S^+}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy$,其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 取上侧.

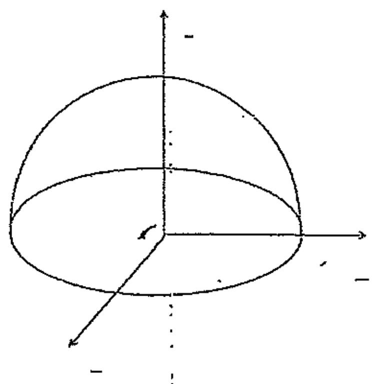
解　取 A: z=0 为辅助平面, $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 4x^3 - z, \dfrac{\partial Q}{\partial y} = z, \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$. 由高斯公式,

$$I = \iint\limits_{S^+ + A}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy, = \iiint\limits_{\Omega}(4x^3 - z + z + 0)dV \overset{\text{由对称性}}{=} 0.$$

故 $I = \iint\limits_{S^+}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy$

$$= \iint\limits_{A^+}(x^4 - xz)dydz + (x^3 + yz)dzdx - 4y^2dxdy,$$

$$= -4\iint\limits_{A^+}y^2dxdy = -4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sin^2\theta rdrd\theta = -16\pi.$$



四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 + e^x, \\ y(0) = 2, y'(0) = 2. \end{cases}$

解　先解齐次方程　$y'' - 2y' + y = 0$.　特征方程为　$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,　故通解为　$y = (C_1 + C_2x)e^x$.

对非齐次方程 $y'' - 2y' + y = 1$. ①可设特解为 $y = C$, 代入①,得 C=1.

对非齐次方程 $y'' - 2y' + y = e^x$. ②因 1 是二重根, 可设特解为 $y = Cx^2e^x$,

代入②, 得$C=\frac{1}{2}$,即得特解为$y=\frac{1}{2}x^2e^x$. 于是, 原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+1.$$

由 $y(0)=2$,得$C_1=1$.

由 $y'=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+(C_2+2x)e^x$ 得 $y'(0)=C_1+C_2=2$, 得 $C_2=1$.

故初值问题的解为 $y=(1+x+\frac{x^2}{2})e^x+1$.

五.(每小题 5 分;共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$;　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

解　(1)因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=1$, 而无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛, 由比较判别法的极限形式得, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$ 收敛.

(2)因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^{7/3}}\Big/\frac{1}{x^{4/3}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, 而瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{x^{4/3}}dx$ 发散,故瑕积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$ 发散

六.(10 分)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

解　$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}\Big/\frac{1}{n(n-1)}=1$, 故收敛半径 R=1. 收敛区间为 (-1, 1) 收敛域为[-1, 1] .

记　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $xf(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\triangleq F(x)$ 于是$F'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$F''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$, 于是 $F'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$

$F(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x)$, 故 $f(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=x-2$, 则所求的展开式为

$$f(x)=\ln 3x=\ln(6+3t)=\ln 6+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n2^n}=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}.$$

收敛域为 $-1<\frac{x-2}{2}\le 1$,即 $0<x\le 4$ 或 $(0,4]$.

八.(6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

解　显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$, 记 $f(x)=x-\ln x$, 则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0\quad(x>1)$,

从而 $f(n)$ 递增,即 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减,由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛.

但 $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 也发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

九.(6 分)设 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

证　因 $a_n>0,n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$. 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,

故必有 $a_n\ge a>0,n=1,2,\cdots$, 从而 $\frac{1}{1+a_n}\le\frac{1}{1+a}<1$. 于是 $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n\le\left(\frac{1}{1+a}\right)^n, n=1,2,\cdots$.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

05学年度上学期05级高等数学（一）试题

（东校区B卷）

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一， 求下列极限（每小题6分，共12分）

1，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$　　　　2，$\mathop{Lim}\limits_{x\to 0+0}(\tan x)^{\sin x}$，

二， 完成下列各题（每小题6分，共24分）

1，设 $y=\dfrac{\sin e^x}{1+x^2}+\ln\sqrt{x}$，求 dy。

2，设 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$，求$y'$。

3，设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

4，求曲线 $ye^x+\ln y=1$ 在点$(0,1)$处的切线方程。

三， 求下列积分（每小题6分，共24分）：

1，$\int(\dfrac{1}{x\ln x}+\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}})dx$　　　　2，$\int\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$，

3，$\int_a^b|2x-a-b|dx$，　　　　4，$\int_{-1}^{1}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

四，（8分）

若当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})dt}{x^3}$，而 $f(0)=0$，求 $f'(0)$。

五，（8分）求通过直线 $l_1:\begin{cases} x+2y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ 并且与直线

l_2 ： $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ 平行的平面的方程。

六，（12分） 设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$，

（1） 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点；

（2） 讨论函数 $f(x)$ 的凸凹性区间与拐点；

（3） 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

七，（每小题6分，共12分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $f(\frac{1}{2})=1$， 求证：

（1） 存在 $\eta \in (\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2） 对任意实数 λ，必存在 $\xi \in (0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

六.（11分） 设函数 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，（1） 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点

（2）求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点；（3） 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

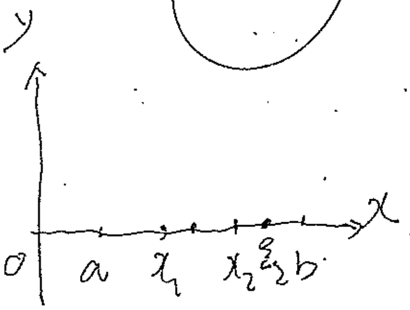
七．（每小题 6 分，共 12 分）

1．证明：当 $x>1$ 时成立不等式， $(1+x)\ln x > 2(x-1)$ 。

2， 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可导，

$f(b)=1$， 又有 (a,b) 中两点 $x_1<x_2$，满足 $f(a)+f(x_1)+f(x_2)=3$ 。

求证：在区间 (a, b) 中存在一点 c，满足 $f'(c)=0$ 。



证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导.

由中值定理：$f(b)-f(x_2)=f'(\xi_2)(b-x_2)$

$f(b)-f(x_1)=f'(\xi_1)(b-x_1)$

$f(b)-f(a)=f'(\xi_3)(b-a)$

由 $f(b)=1$， $f(a)+f(x_1)+f(x_2)=3$

得 $f'(\xi_2)(b-x_2)+f'(\xi_1)(b-x_1)+f'(\xi_3)(b-a)=0$

又由 $b-a\neq 0$， $b-x_1\neq 0$， $b-x_2\neq 0$ ，且 $b-a\neq b-x_1\neq b-x_2$

如果 $f'(\xi_1)\neq 0$， $f'(\xi_2)\neq 0$， $f'(\xi_3)\neq 0$ 则等号不成立.

05学年度上学期

05级高等数学(一)试题(东校区)

(第2期)

(B卷答案)

一、求极限

1. 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$　　2. 原式 $= 1$

二、

1. $dy = \frac{(1+x^2)e^x\cos e^x - 2x\sin e^x}{(1+x^2)^2}dx + \frac{1}{2x}dx$

2. $y' = \sqrt{x^2-a^2}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}$，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+t^2}{4t}$

4. $x+2y-2=0$

中山大學考试草稿纸

三、

1. 原式 $= \ln(\ln x) + 2\sin\sqrt{x} + C$

2. 原式 $= \ln(1+\sin^2 x) + C$

3. 原式 $= \frac{1}{2}(a-b)^2$

4. 原式 $= 0$

四、 $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(1-\cos x)}{4x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}$

②

中山大學 考试草稿纸

五：

直线 l_1 的方向向量 $n_1=(-2,2,-2)$

直线 l_2 的方向向量 $n_2=(2,-1,-1)$

所求平面的法向量

$n=n_1\times n_2=(-4,-6,-2)$

所求平面过直线 l_1 上点 $P_1(1,1,0)$.

所求平面方程

$-4(x-1)-6(y-1)-2z=0$

即 $2x+3y+z-5=0$

③

中山大學考试草稿纸

六

(1) 单调递增区间 $(-\infty,-3)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$

单调递减区间 $(-3,-1)$. 极大值点 $x=-3$.

(2) 凸区间 $(-\infty,0)$、凹区间 $(0,+\infty)$

拐点 $x=0$.

(3) 垂直渐近线 $x=-1$. 斜渐近线 $y=\frac{x}{2}-1$.

七. (1) 令 $g(t)=f(t)-t$, 则 $g(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续.

又 $g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}>0$. $g(1)=f(1)-1=-1<0$.

$\therefore$ 由介值定理, 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$. 使得 $g(\eta)=0$.

即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 令 $g(t)=e^{\lambda t}(f(t)-t)$. 则 $g(t)$ 在 $[0,\eta]$

连续, 在 $(0,\eta)$ 可导. 且 $g(0)=g(\eta)=0$.

$\therefore$ 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,\eta)$ 满足 $g'(\xi)=0$.

由此即得此等式.

④

求导得到$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(1+x^2)x^2}<0,$

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$内严格单调下降，又

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{2}=0,$$

由此知道当当$x>0$时，$F(x)>0$，移项即得证。

2 设函数 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，其中$f(x)$在区间$[1,2]$上二阶可导且有$f(2)=0$，证明存在$\xi(1<\xi<2)$使得$F''(\xi)=0$。

证明：由$f(x)$在$[1,2]$上二阶可导，故$F(x)$在$[1,2]$上二阶可导，因为$f(2)=0$，故$F(1)=F(2)=0$。

在$[1,2]$上应用罗尔定理，至少存在一点$x_0,(1<x_0<2)$，使得$F'(x_0)=0$。

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$，得到$F'(1)=0$。

在$[1,x_0]$上对$F'(x)$应用罗尔定理，至少有点$\xi(1<\xi<x_0<2)$ $F''(\xi)=0$。