警 示

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条

考 试 作 弊 不 授 予 学 士 学 位

计算机科学系　2012 第一学期

《高等数学 I》期末考试试题（A 卷 答案）

任课教师：李绿周，陈伟能　　考试形式：闭卷　考试时间：2 小时

年级：12 级 专业：计算机 1、2、3 班　姓名：______ 学号：______ 成绩：______

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

CCBCA CDDCC

二、解答与证明题（共 11 题，共 80 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x^3)}{\sin x(\sec x-\cos x)}$。（5 分）

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x^3)}{\sin x(\sec x-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{\sin x(\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{\sin^3 x}=2$

2．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3+x}{2+x})^{2x}$。（5 分）

解：　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{x+2})^{x+2}]^2(1+\dfrac{1}{x+2})^{-4}=e^2$

3．已知 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}+x^{\sin x}\ (x>0)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。（7 分）

解：　$y'=\left(\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\right)'+(x^{\sin x})'$　（1 分），其中：

$$\left(\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\right)'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\tfrac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}.\cos\tfrac{1}{x}.\left(\tfrac{1}{x}\right)'=-\tfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}.\cos\tfrac{1}{x}\quad（3 分）$$

$$(x^{\sin x})'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})\quad（3 分）$$

也可用两边取对数求 $(x^{\sin x})'$，取对数得 $\ln y=\sin x\ln x$，则

$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$，所以$(x^{\sin x})'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$

所以所求导数为 $y'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}.\cos\frac{1}{x}+x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$.

4．设$\begin{cases} e^y+(t+1)y+t^2=2 \\ x=\int_1^{-t}e^u du \end{cases}$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}$（8 分）

解：对 t 求导得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}e^y+y+(t+1)\frac{dy}{dt}+2t=0 \\ \frac{dx}{dt}=-e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt}=\frac{-2t-y}{e^y+t+1} & \text{（3分）} \\ \frac{dx}{dt}=-e^{-t} & \text{（2分）} \end{cases}$$

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{e^t(2t+y)}{e^y+t+1}$ （1分）.

当 t=−1 时，可确定 x=0, y=0 （1 分）.

代入上述值，得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=-\frac{2}{e}$ （1分）.

5．求不定积分$\int e^x\cos x\mathrm{d}x$。（6 分）

解：$\int\cos x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\cos x\mathrm{e}^x-\int e^x\mathrm{d}\cos x=\cos x\mathrm{e}^x+\int e^x\sin x\mathrm{d}x$（2 分）

$$\begin{aligned}&=\cos x\mathrm{e}^x+\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\cos x\mathrm{e}^x+(\sin x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x)\\&=\cos x\mathrm{e}^x+\sin x\mathrm{e}^x-\int\cos x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{aligned}$$（2 分）

所以$\int\sin x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+C$（2 分）

6．求定积分$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$。（7 分）

解：原式=$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$（利用奇偶性，2 分）

$=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx$（分母有理化，2 分）

$$=4[\int_0^1 dx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx]=4-\pi$$ (第二部分可根据几何意义得到，3分)

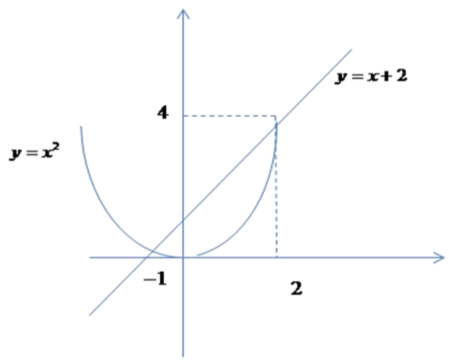
注意：可能有同学会直接在 $4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ 中进行变量代换进行计算，此时可根据计算过程酌情给分。

7. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 围成一平面图形，求以下问题：（8分）

1）该平面图形的面积.（4分）

2）该图形被 y 轴划分所得的右半部分图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.（4分）

解：求得两曲线交点为(-1,1)和（2,4），画出草图如下：



（1） 面积 **S=** $\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$

(2) 体积 $V_y=\pi\int_0^4\left[\left(\sqrt{y}\right)^2\right]dy-\pi\int_2^4\left(y-2\right)^2dy$

$$=\pi\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4-\pi\frac{(y-2)^3}{3}\bigg|_2^4=\frac{16}{3}\pi$$

也可以用柱壳法求得：$V_y=\pi\int_{-1}^{2}x[x+2-x^2]dx$

8. 已知函数 $f(x)=\int_0^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t^4}\mathrm{d}t$，试讨论：

1）该函数的奇偶性

2）该函数的单调性；

3）该函数的凹凸性和拐点。（8分）

解：

1）因为 $f(-x)=\int_0^{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t^4}\mathrm{d}t\,\underline{\underline{令u=-t}}\int_0^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}u^4}\mathrm{d}(-u)=-\int_0^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}u^4}\mathrm{d}u=-f(x)$，所以是奇函数（2分）。

2） $f'(x)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^4}$ （1 分），因为该一阶导数在区间$(-\infty,+\infty)$均有 $f'(x)<0$，所以单调递减（1 分）。

3） $f''(x)=x^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^4}$ （1 分），令 $f''(x)=0$ 得 x=0，所以函数的拐点是(0,0)（1 分）。

$x>0$时 $f''(x)>0$，所以曲线是凹的（1 分）；

$x<0$时 $f''(x)<0$，所以曲线是凸的（1 分）。

9．求微分方程$(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0$ 的通解。（8 分）

解：　方程两边同时除以x^2 ，整理得齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$.（1 分）

设$u=\dfrac{y}{x}$得$y'=u+u'x$，代入方程得$u+xu'=2u-u^2$（2 分）

分离变量得$\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，即$\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$（2 分）

积分得$\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+C_1$，即$\dfrac{x(u-1)}{u}=C(C=\pm e^{C_1})$（2 分）

将$u=\dfrac{y}{x}$代入得通解$x(y-x)=Cy$。（1 分）

10．求微分方程$(2+x^2)y'+2xy=x^2, y\big|_{x=0}=1$的特解.（8 分）

解：方程变形为一阶线性微分方程：$y'+\dfrac{2x}{(2+x^2)}y=\dfrac{x^2}{(2+x^2)}$ …………① （1 分）

1) 首先解该方程对应的齐次方程：$y'+\dfrac{2x}{(2+x^2)}y=0$，分离变量得

$\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{2x}{2+x^2}dx$，从而有$\ln|y|=-\ln(2+x^2)+C_1$

即有$y=\dfrac{C}{2+x^2}$ （3 分）

2）令$y=\dfrac{u(x)}{2+x^2}$，把相关量代人方程①，即得$\dfrac{u'(x)}{2+x^2}=\dfrac{x^2}{2+x^2}$，从而得

$u(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$。所以上述微分方程的通解为$y=\dfrac{\frac{1}{3}x^3+C}{2+x^2}$.（3 分）

代人条件 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C=2$，所以 $y=\dfrac{\frac{1}{3}x^3+2}{2+x^2}$　（1 分）

11．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，且 $f(0)=f(2)=0$， $f(1)=-3$ 。试证明：

1）在区间 $(1,2)$ 内至少存在一点 η，使得 $f(\eta)=-2\eta$；

2）在区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-2$ 。（10 分）

证明：

1）构造 $g(x)=f(x)+2x$，则 $g(1)=-1$， $g(2)=4$，且 $g(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，　由零点定理得，存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $g(\eta)=f(\eta)+2\eta=0$，即 $f(\eta)=-2\eta$ 。（5 分）

2）由于 $g(0)=0$， $g(\eta)=0$，且 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，所以 $g(x)$ 在区间 $(0, \eta)$ 满足罗尔定理条件。即存在 $\xi\in(0, \eta)\subseteq(0,2)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+2=0$，所以 $f'(\xi)=-2$，得证。（5 分）