

一、求数列极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, 其中 $p > 0$.

解

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

二、设 $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-2021)$, 求 $f'(0)$.

解 $f'(x) = (-1)(-2) \cdots (-2021) = -2021!$.

三、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos^2 x}^1 \sqrt{1+t^2} dt}{x^2}$.

解 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos^2 x}^1 \sqrt{1+t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\xi^2} (1 - \cos^2 x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\xi^2} \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.

其中 $\xi \in [\cos^2 x, 1]$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow 0$.

(方法二) 用洛必达求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos^2 x}^1 \sqrt{1+t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{1+\cos^4 x} \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

四、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$, 求 a .

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{x+2a}{x-a} - 1\right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x+2a}{x-a} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{3a}{x-a}\right)} = e^{3a} = 8, a = \ln 2. \end{aligned}$$

五、设 $y = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$, 求 y 的 n 阶导数.

解 $y = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$, 于是

$$y^{(n)} = (-1)^n \left[\frac{1}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+3)^{n+1}} \right] \cdot n!$$

六、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 是否存在, 说明理由.

解 用极坐标, $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 x \sin^2 x$, 因为 $\rho \rightarrow 0$, $|\cos^2 x \sin^2 x| \leq 1$,

无穷小量与有界量相乘是无穷小量, 所以原极限等于 0.

七、讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2^t - 1}{2^t + 1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2^t - 1}{2^t + 1} = -1$,

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 所以函数不连续.

八、求不定积分: $\int (\arcsin x)^2 dx$.

解 令 $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2 dx &= \int t^2 d \sin t = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \\ &= t^2 \sin t + 2 \int t d \cos t \\ &= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C \\ &= t^2 \sin t + 2t \sqrt{1 - \sin^2 t} - 2 \sin t + C \\ &= x \arcsin^2 x + 2t \sqrt{1 - x^2} - 2x + C \end{aligned}$$

九、设 $f''(x_0)$ 存在, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

证明 用洛必达法则，之后再用导数的定义，

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h} \right] \\ &= f''(x_0). \end{aligned}$$

也可以用局部泰勒公式证明。因为 $f''(x_0)$ 存在，则当 $x \rightarrow x_0$ 时，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

所以

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + o(h^2) \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f''(x_0) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right] \\ &= f''(x_0). \end{aligned}$$

十、证明 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$ ，其中 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

证明 设 $f(x) = \tan x \sin x - x^2$ ，则当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \sec^2 x \sin x + \tan x \cos x - 2x \\
 &= \sec^2 x \sin x + \sin x - 2x \\
 &= \tan x \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \right) - 2x, \\
 &> x \cdot 2 - 2x = 0
 \end{aligned}$$

所以函数在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 严格单调上升, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f(x) = \tan x \sin x - x^2 > f(0) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}.$$

十一、 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

解 令 $F(x) = (b^2 - a^2)f(x) - (f(b) - f(a))x^2$, 则

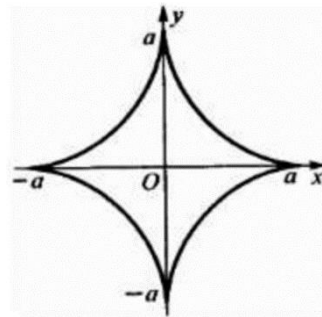
$$F'(x) = (b^2 - a^2)f'(x) - 2(f(b) - f(a))x,$$

在 $[a, b]$ 运用罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

十二、 计算由星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (a > 0)$ 围成的图形的面积.

解 $dx = -3a \cos^2 t \sin t dt$,



$$\begin{aligned}
A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y |dx| \\
&= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt \\
&= 12a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right) \\
&= 12a^2 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{3}{8} a^2 \pi.
\end{aligned}$$

十三、求平面的方程，该平面过直线 $\begin{cases} 4x - y + 3z - 3 = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ ，且与 xOy 坐标面垂直.

解（方法一） 直线的方向：

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3i + 6j + 6k = 3(-1, 2, 2),$$

设所求平面的方程是 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，则平面的法方向与直线垂直，于是

$$-A + 2B + 2C = 0;$$

与坐标面 xOy 垂直，则

$$C = 0$$

解得 $C = 0$ ， $A = 2B$ 。所以 $(2, 1, 0)$ 是法方向。

易见 $(1, 1, 0)$ 是直线上的一点，根据平面的点法式，该平面的方程为

$$2(x-1) + (y-1) = 0, .$$

即 $2x + y - 3 = 0$.

（方法二） 利用线性代数中的平面束方程，可以设所求的平面为

$$\lambda(4x - y + 3z - 3) + \mu(-2x + 2y - 3z) = 0,$$

其中 λ, μ 为不同时为 0 的常数。该平面的法方向为

$$(4\lambda - 2\mu, -\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu),$$

根据题设的垂直条件， $3\lambda - 3\mu = 0$ ，即 $\lambda = \mu$ 。于是所求平面方程为

$$(4x - y + 3z - 3) + (-2x + 2y - 3z) = 0, \quad 2x + y - 3 = 0.$$

十四、 利用局部泰勒公式，求函数 $y = e^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

解 取整数 $N > n$ ，已知 $e^x = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} x^k + o(x^N)$ ，则

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} + o(x^{2N})$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } x^n \text{ 的系数为 } \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, \quad \frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, \quad y^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!};$$

当 n 为奇数时， x^n 的系数为 0， $y^{(n)}(0) = 0$.

十五、 立体 V 由平面 $z=1$ 和椭圆锥面 $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ 围成，求立体 V 的体积.

解 1、用水平面 $z = z_0$ 截椭圆锥面 $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ，得一椭圆，

$$\frac{x^2}{(z_0 a)^2} + \frac{y^2}{(z_0 b)^2} = 1,$$

该椭圆的面积为 $\pi(z_0 a) \cdot (z_0 b) = \pi ab z_0^2$.

2、已知平行截面，求立体的体积：

$$V = \int_0^1 \pi ab z^2 dz = \frac{1}{3} \pi ab.$$