

一. 求下列极限 (50 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^{\frac{1}{7}} - n^{\frac{1}{7}}].$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x \sin 3x}.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}.$$

二. (10 分) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x 二阶可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, 试求 $(f^{-1})''(y)$.

三. (10 分) 讨论 $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点类型.

四. (10 分) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ 证明 $f^{(n)}(1) = 0$.

五. (10 分) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arcsin t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

六. (10 分) 当 a 为何值时? $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导, 并求 $f'(0)$, 此时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续?