中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学（一）I》（A 卷）

学年学期：**2017** 学年第一学期　　　　姓　　名：________________

学 院/系：数学学院　　　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　　　年级专业：________________

考试时长：120 分钟　　　　成　　绩：________________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------------以下为试题区域，共 14 道大题，总分 100 分, 考生请在试卷上作答------------

注：第 1~10 题每题 8 分，第 11~14 题每题 5 分。题目顺序随机，与难易无关。

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{sinx}$.

3. 计算积分 $\int_0^x \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

4. 求函数 $y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积。

5. 求过点 M(0, 1, 2) 且与直线 $\begin{cases}2x-z+1=0\\ x+y-2=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

6. 在曲线 C ：$y=1-x^2\ (x>0)$ 上点 P 处作 C 的切线，该切线与两坐标轴交与 A,B 两点，

   (1)试确定点 P 的位置，使得 A，B 两点与坐标原点 O 所围的三角形 ΔOAB 的面积最小;

   (2)求 P 点的切线方程，　　(3)求曲线 C 与 x 轴所围图形的面积。

7. 设 $z=ycos(ax+by)$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

8. 求曲线 $y=3e^{-x^2}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

9. 将函数 $f(x)=x^2\ln(3+x)$ 在 $x=0$ 处展开为带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

10. 求函数 $u=sinx\cdot siny\cdot sinz$ 在条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$，$(x,y,z>0)$下的极值和极值点。

11. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$处的连续性、一阶偏导数和一阶微分的存在性。

12. 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy+x})$, f 的二阶偏导数连续，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 设 $f(x),g(x)$在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续，$g(x)$为偶函数，$f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$ $(A\text{为常数})$，证明：

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_{0}^{a}g(x)dx$$

并利用该等式计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}dx$ 的值 .

14. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续， 在区间 $(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$,

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0$.