1 Formulation

1.1 Bounce average

磁場Bを以下のように与える.

$$\mathbf{B} = \psi_p'(\rho)\nabla\zeta \times \nabla\rho + RB_t\nabla\zeta,\tag{1}$$

ここで

$$\psi_p'(\rho) = \frac{d\psi_p(\rho)}{d\rho}$$

である.

磁力線に沿って運動する粒子のバウンス周期は

$$\tau_B = \oint \frac{ds}{v_0 |\cos \theta|} \tag{2}$$

である.ここで s は磁力線に沿った距離, v_0 は赤道面での速度, θ は位置 s でのピッチ角である. 磁力線に沿った座標変数 ds のポロイダル角 $d\chi$ への変換を行う.磁力線方向の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{b} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \sum \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds},\tag{3}$$

ここで、 u^i は ρ, χ, ζ を示す。 $\nabla u^i \cdot \frac{\partial x}{\partial u^j} = \delta_{ij}$ なので、

$$\boldsymbol{b} \cdot \nabla \chi = \frac{d\chi}{ds} \tag{4}$$

である. 式(1)から,

$$\boldsymbol{b} \cdot \nabla \chi = \frac{1}{B} \left[\psi'_{p} (\nabla \zeta \times \nabla \rho) \cdot \nabla \chi + R B_{t} \nabla \zeta \cdot \nabla \chi \right]$$

$$= \frac{\psi'_{p}}{B} \nabla \rho \cdot (\nabla \chi \times \nabla \zeta)$$

$$\equiv \frac{\psi'_{p}}{B \cdot T}$$
(5)

従って,

$$ds = \frac{B\mathcal{J}}{\psi_p'} d\chi \tag{6}$$

$$\equiv \mathcal{L}d\chi \tag{7}$$

である. ここでgはヤコビアンである. よってバウンス周期は

$$\tau_B = \oint \frac{\mathcal{L}d\chi}{v_0|\cos\theta|} \tag{8}$$

である. バウンス周期 τ_B を用いて、バウンス平均は以下のように表される.

$$\langle Q \rangle_B \equiv \frac{1}{\tau_B} \oint Q \frac{\mathcal{L} d\chi}{v_0 |\cos \theta|}.$$
 (9)

1.2 Flux average

磁気面平均の定義から、物理量 Q の磁気面平均は以下のように表される.

$$\langle Q \rangle_M \equiv \frac{1}{V'} \oint \mathcal{J} Q d\chi d\zeta, \quad V' = \oint \mathcal{J} d\chi d\zeta.$$
 (10)

これを用いて, f_0dp の磁気面平均を考える.運動量空間変数 (p,θ) は赤道面弱磁場側での運動量 (p_0,θ_0) との間に以下のような関係がある.

$$p = p_0, \quad \psi_B = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} = \frac{B(s)}{B(s=0)}.$$
 (11)

これらを用いて,

$$f_0 d\mathbf{p} = \psi_B \frac{|\cos \theta_0|}{|\cos \theta|} f d\mathbf{p}_0 \tag{12}$$

が得られる. 従って、 f_0dp の磁気面平均は

$$\langle f_0 d\mathbf{p} \rangle_M = \frac{2\pi}{V'} \oint \mathcal{J} d\chi \frac{B(s)}{B(s=0)} \frac{|\cos \theta_0|}{|\cos \theta|} f_0 d\mathbf{p}_0$$

$$= \frac{2\pi}{V'} \frac{\psi'_p}{B(s=0)} v_0 |\cos \theta_0| \tau_B \frac{1}{\tau_b} \oint \mathcal{J} d\chi \frac{B(s)}{\psi'_p} \frac{1}{v_0 |\cos \theta|} f_0 d\mathbf{p}_0$$

$$= \frac{2\pi}{V'} \frac{\psi'_p}{B(0)} \lambda \langle f_0 \rangle_B d\mathbf{p}_0$$

$$= \frac{2\pi}{V'} \frac{\psi'_p}{B(0)} \lambda f_0 d\mathbf{p}_0$$
(13)

一方, (r, r + dr) 間に含まれる粒子数は,

$$dN = \oint v_0 \cos |\theta_0| \tau_B f_0 d\mathbf{p}_0 \frac{\mathcal{J} dr \, d\chi \, d\zeta}{\mathcal{L} d\chi}$$
$$= 2\pi \frac{\psi_p'}{B(0)} \lambda f_0 d\mathbf{p}_0 dr \tag{14}$$

である. つまり,

$$\frac{dN}{dr} = 2\pi \frac{\psi_p'}{B(0)} \lambda f_0 d\mathbf{p}_0 \tag{15}$$

なので,

$$\langle f_0 d\mathbf{p} \rangle_M = \frac{dN}{\oint \mathcal{J} dr \, d\chi \, d\zeta}$$
$$= \frac{dN}{dV} \tag{16}$$

となる. これは、 f_0dp の磁気面平均がr面での粒子数密度であることを意味する.

1.3 Radial transport

以上の議論から, 径方向輸送による粒子数密度の変化は以下のように表される.

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \langle f_0 d\mathbf{p} \rangle_M \right|_R = \langle \nabla \cdot (\mathbf{\Gamma} d\mathbf{p}) \rangle_M. \tag{17}$$

右辺は以下のように変形できる.

$$\langle \nabla \cdot (\boldsymbol{\Gamma} d\boldsymbol{p}) \rangle_{M} = \frac{\partial}{\partial V} \langle \boldsymbol{\Gamma} \cdot \nabla V d\boldsymbol{p} \rangle_{M}$$

$$= \frac{\partial}{\partial V} \left(2\pi \lambda \frac{\psi'_{p}}{B(0)} \langle \boldsymbol{\Gamma} \cdot \nabla \rho \rangle_{B} \right) d\boldsymbol{p}$$
(18)

従って,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\psi_p'}{B(0)} \lambda f_0 \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\psi_p'}{B(0)} \lambda \langle \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla \rho \rangle_B \right) \tag{19}$$

となる. ここで

$$\left(\Gamma = -D_0 \frac{\partial f_0}{\partial \rho} + F_0 f_0\right) \nabla \rho \tag{20}$$

であることから、速度空間の拡散を含む形で以下のようにかける.

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda A_{\chi 0} f_0 = \lambda A_{\chi 0} \langle C(f_0) \rangle + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\lambda A_{\chi 0} \left(-D_0 \frac{\partial f_0}{\partial \rho} + F_0 f_0 \right) \right], \tag{21}$$

ここで, $D_0 = \langle |\nabla \rho|^2 D \rangle_B, \, F_0 = \langle |\nabla \rho| F \rangle_B, \, A_{\chi 0} = \psi_{p 0}'/B(0)$ である.

1.4 Bounce averaged coefficients

bounce 平均された拡散係数は以下のように表される.

$$D_{pp0} = \lambda A_{\chi 0} \langle D_{pp} \rangle_{B}, \qquad D_{p\theta0} = \lambda A_{\chi 0} \langle \frac{\tan \theta_{0}}{\tan \theta} D_{p\theta} \rangle_{B}, \qquad F_{p0} = \lambda A_{\chi 0} \langle F_{p} \rangle_{B},$$

$$D_{\theta p0} = \lambda A_{\chi 0} \langle \frac{\tan \theta_{0}}{\tan \theta} D_{\theta p} \rangle_{B}, \qquad D_{\theta \theta 0} = \lambda A_{\chi 0} \langle \frac{\tan^{2} \theta_{0}}{\tan^{2} \theta} D_{\theta \theta} \rangle_{B}, \qquad F_{\theta 0} = \lambda A_{\chi 0} \langle \frac{\tan \theta_{0}}{\tan \theta} F_{\theta} \rangle_{B}$$
(22)

拡散係数にはポロイダル角依存性が含まれていないので以下のように表される. D_{pp0}, F_{p0} は

$$D_{pp0} = \lambda A_{\chi 0} \langle D_{pp} \rangle_{B}$$

$$= \lambda A_{\chi 0} \frac{1}{\tau_{B}} \oint \frac{D_{pp}}{v_{0} |\cos \theta|} \mathcal{L} d\chi$$

$$= \lambda A_{\chi 0} D_{pp}, \tag{23}$$

 $D_{p\theta 0}, D_{\theta p0}, F_{\theta 0}$ は

$$F_{\theta 0} = \lambda A_{\chi 0} \frac{1}{\tau_B} \oint \frac{\sin \theta_0 \cos \theta}{\cos \theta_0 \sin \theta |\cos \theta_0|} F_{\theta} \mathcal{L} d\chi$$
$$= A_{\chi 0} \frac{|\cos \theta_0|}{\cos \theta_0} \oint \frac{1}{\sqrt{\psi_B}} \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} F_{\theta} \mathcal{L} d\chi \tag{24}$$

ここで $\psi_B = \sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0$ である.

 $D_{\theta\theta0}$ は

$$D_{\theta\theta0} = A_{\chi0}v_0|\cos\theta_0|\tau_B \frac{1}{\tau_B} \oint \frac{1}{v_0|\cos\theta|} \frac{\sin^2\theta_0}{\cos^2\theta_0} \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} D_{\theta\theta} \mathcal{L} d\chi$$

$$= A_{\chi0} \frac{|\cos\theta_0|}{\cos^2\theta_0} \oint \frac{\cos^2\theta}{\psi_B|\cos\theta|} D_{\theta\theta} \mathcal{L} d\chi$$

$$= A_{\chi0} \frac{1}{|\cos\theta_0|} \oint \frac{|\cos\theta|}{\psi_B} D_{\theta\theta} \mathcal{L} d\chi$$
(25)

1.4.1 電場加速項

電場による加速項は

$$F_{Ep} = \frac{qE}{p_{th}}\cos\theta, \qquad F_{E\theta} = -\frac{qE}{p_{th}}\sin\theta$$
 (26)

である. これらを bounce average すると F_{Ep0} は

$$F_{Ep0} = \lambda A_{\chi 0} \frac{1}{\tau_B} \oint \frac{qE \cos \theta}{p_{th}} \frac{1}{v_0 |\cos \theta|} \mathcal{L} d\chi$$

$$= A_{\chi 0} \frac{qE}{p_{th}} |\cos \theta_0| \oint \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \mathcal{L} d\chi$$

$$= A_{\chi 0} \frac{qE}{p_{th}} \cos \theta_0 \oint \mathcal{L} d\chi \text{ (passing)}$$
(27)

となる. trapped の場合は \oint が 0 になる. $F_{E\theta 0}$ は

$$F_{E\theta 0} = -\lambda A_{\chi 0} \frac{1}{\tau_B} \oint \frac{qE \sin \theta}{p_{th}} \frac{1}{v_0 |\cos \theta|} \frac{\sin \theta_0 \cos \theta}{\cos \theta_0 \sin \theta} \mathcal{L} d\chi$$
$$= -A_{\chi 0} \frac{qE}{p_{th}} \sin \theta_0 \oint \frac{|\cos \theta_0|}{\cos \theta_0} \frac{\cos \theta}{|\cos \theta_0|} \mathcal{L} d\chi \tag{28}$$

となる. passing の場合は被積分関数が1になり、trapped の場合は周回積分が0になる.

1.5 Estimation of current density

磁気面上の任意の位置での磁力線方向速度は $v_0\cos\theta$ であるので、 $v_0\cos\theta f_0d\mathbf{p}$ の磁気面平均が必要である。磁気面平均 $\langle v_0\cos\theta f_0d\mathbf{p}\rangle_M$ は

$$\langle v_0 \cos \theta f_0 d\mathbf{p} \rangle_M = \frac{2\pi}{V'} \frac{\psi_p'}{B(0)} v_0 |\cos \theta_0| \tau_B \frac{1}{\tau_B} \oint \mathcal{J} d\chi \frac{B(s)}{\psi_p'} \frac{v_0 \cos \theta}{|\cos \theta|} f_0 d\mathbf{p}_0$$

$$= \frac{2\pi}{V'} \lambda A_{\chi 0} \frac{1}{\tau_B} \oint \frac{v_0 \cos \theta}{v_0 |\cos \theta|} f_0 d\mathbf{p}_0 \mathcal{L} d\chi$$

$$= \frac{2\pi}{V'} \lambda A_{\chi 0} \langle v_0 \cos \theta f_0 d\mathbf{p}_0 \rangle_B$$

$$= \frac{2\pi}{V'} A_{\chi 0} v_0 |\cos \theta_0| f_0 d\mathbf{p}_0 \oint \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \mathcal{L} d\chi$$
(29)

となる. trapped の場合は周回積分が0になる. 一方, passing の場合は

$$\langle v_0 \cos \theta f_0 d\mathbf{p} \rangle_M = \frac{2\pi}{V'} A_{\chi 0} v_0 \cos \theta_0 f_0 d\mathbf{p}_0 \oint \mathcal{L} d\chi$$
 (30)

となる.

1.6 円柱の場合

1.6.1 これまでの式との対応

FP に実装していた式は

$$\mathcal{L} = \pi q R \tag{31}$$

である. ここで, 安全係数は

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R} \frac{B_t}{B_p} ds \tag{32}$$

であり、大アスペクト近似では $q = rB_t/RB_p$ である.

この式との対応を考えるため、安全係数を ψ_p を用いて表す. 微小面積 $2\pi Rdr$ を通過する poloidal flux は

$$d\psi_p = 2\pi R B_p dr \tag{33}$$

である. また, toroilda flux は

$$d\psi_t = \oint B_t dr ds \tag{34}$$

である. これらから, 安全係数は

$$q = \frac{d\psi_t}{d\psi_p} \tag{35}$$

で与えられる.

FP で実装されている式は円柱座標 $(x,y,z) = (r\cos\chi,r\sin\chi,R\zeta)$ で大アスペクト近似を行っているので、

$$\mathcal{L} = \frac{B}{\psi'_p} \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} = Ra^2 \rho, \quad \psi'_P = 2\pi Ra B_p, \quad r = a\rho$$
 (36)

である. これらを用いて,

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\pi} \frac{rB}{RB_p}$$

$$\sim \frac{1}{2\pi} qR,$$
(37)

となる. ここで $B \sim B_t$ とした. これは定数以外は一致している.

従って,バウンス周期は

$$\tau_B = \frac{R}{2\pi} \oint \frac{q d\chi}{v_0 |\cos \theta|} \tag{38}$$

となる.

1.6.2 計算に必要な量

バウンス平均を行う上で必要な量は、バウンス平均拡散係数、fq 磁気面平均密度(式 13), BAFP(式 21)から

$$\lambda, \quad \frac{2\pi\lambda A_{\chi 0}}{V'}, \quad \lambda A_{\chi 0} \tag{39}$$

の三つである. ここで,

$$\lambda = v_0 |\cos \theta_0| \tau_B, \quad \tau_B = \oint \frac{\mathcal{L} d\chi}{v_0 |\cos \theta|}, \quad \mathcal{L} = \frac{B}{\psi_p'} \mathcal{J}, \quad A_{\chi 0} = \frac{\psi_p'}{B(s=0)}, \quad V' = \oint \mathcal{J} d\chi d\zeta \quad (40)$$

である. $\mathcal J$ はヤコビアン, $\mathcal L$ は line element, $A_{\chi 0}$ は赤道面での area element である.

円柱座標系 (ρ,χ,ζ) において、上記の geometry に依存する量は

$$\mathcal{J} = Ra^2\rho, \quad \mathcal{L} = \frac{Rq(\rho)}{2\pi}, \quad A_{\chi 0} = \frac{2\pi a^2\rho}{q(\rho)} \frac{R+r}{R}, \quad V' = (2\pi R)(2\pi a^2\rho)$$
 (41)

となる. ここで $\psi_p' = 2\pi RaB_p$, $r = a\rho$, $q = rB_t/RB_p$, $B(s = 0) = RB_t/(R+r)$, $B \sim B_t \gg B_p$ を用いた. B_t は磁気軸上でのトロイダル磁場である.

これらを踏まえて.

$$\lambda(\theta_0, \rho) = \frac{Rq(\rho)}{2\pi} \oint \frac{|\cos \theta_0|}{|\cos \theta|} d\chi, \tag{42}$$

$$\lambda A_{\chi 0} = ar(R+r) \oint \frac{|\cos \theta_0|}{|\cos \theta|} d\chi, \tag{43}$$

$$\frac{2\pi\lambda A_{\chi 0}}{V'} = \frac{1+\epsilon}{2\pi} \oint \frac{|\cos\theta_0|}{|\cos\theta|} d\chi,\tag{44}$$

となる. ここで、 $\epsilon = r/R$ である. 従って、円柱の場合に必要な χ 方向の積分は

$$\oint \frac{|\cos \theta_0|}{|\cos \theta|} d\chi = |\cos \theta_0| \oint \frac{d\chi}{|\cos \theta|}$$

$$= |\cos \theta_0| \oint \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \psi_B(s)(1 - \cos^2 \theta_0)}} \tag{45}$$

だけである. ここで,

$$\psi_B(s) = \frac{B(s)}{B(s=0)} = \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon\cos\gamma} \tag{46}$$

である.

1.7 NB source term の扱いについて

総粒子数が変化する NB source term の扱いは以下のようになる. 実用上, bounce average の 有無で fast ion density に変化があっては困るため, bounce averaged source term $\langle S_b \rangle_B$ を以下の 関係から求める.

NB source term による粒子数密度の変化量 $\partial n_b/\partial t$ は

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} = \langle S_{b0}^{BA} d\mathbf{p} \rangle
= \frac{2\pi}{V} \lambda A_{\chi 0} S_b^{BA} d\mathbf{p}_0$$
(47)

である. これが bounce average 無しでの密度変化 $\partial n_b/\partial t = S_b d\mathbf{p}_0$ と一致する必要がある. 従って,

$$S_{b0}^{\text{BA}} = \frac{S_b}{2\pi/V'\lambda A_{\nu 0}} \tag{48}$$

となる.

これは、位相空間の volume element が $2\pi p^2 \sin\theta dp d\theta$ から $2\pi\lambda A_{\chi 0}p_0^2 \sin\theta_0 dp_0 d\theta_0$ に変化する ためであり、これに伴い、粒子数は bounce average の有無で変化しないが、速度空間 2 次元上での表示は若干変化する.

NB source term の扱いは、FIT3D の出力を取り込む場合、TASK/FP 内で δ function 型の source term を与える場合のどちらでも同様である.

2 Validation

以下,実装した bounce average が正常に機能しているかどうかを検証する. bounce 平均された FP 方程式は以下のような構成となる.

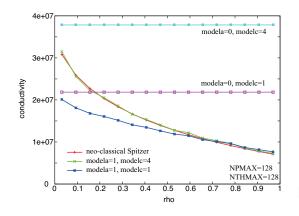
$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda A_{\chi 0} f_{0} = \lambda A_{\chi 0} \langle C(f_{0}) \rangle_{B} + \lambda A_{\chi 0} \langle E_{DC}(f_{0}) \rangle_{B} + \lambda A_{\chi 0} \langle Q(f_{0}) \rangle_{B} + \lambda A_{\chi 0} \langle L(f_{0}) \rangle_{B} + \lambda A_{\chi 0} \langle S \rangle_{B}
+ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\lambda A_{\chi 0} \left(-D_{0} \frac{\partial f_{0}}{\partial \rho} + F_{0} f_{0} \right) \right]. (1)$$

ここで、 $\langle C(f_0)\rangle_B$, $\langle E_{DC}(f_0)\rangle_B$, $\langle Q(f_0)\rangle_B$, $\langle L(f_0)\rangle_B$, $\langle S\rangle_B$ はそれぞれ、collision term, DC electric field term, quasi-linear diffusion term, loss term, source term (NBI) である.このうち、source term は速度分布関数に依存しない.

2.1 DC electric field term

弱トロイダル電場を加えることで得られる plasma conductivity と Spitzer conductivity with neoclassical correction $\sigma_{nc}=(1-\epsilon^{0.5})^2\sigma$ を比較する. 1 図 1 は conductivity の径方向分布である. 赤線が上記の neo-classical spitzer conductivity であり,緑線・青線がそれぞれ非線形 Coulomb 衝突項,背景 Maxwell 衝突項に対して得られた conductivity である. 水色・紫の y= const. な直線は,均一磁場(bounce 平均なし)で得られた conductivity である. $\rho \to 0$ の極限で,bounce average ありの結果は bounce average 無しの結果と一致するべきであり,計算結果もその通りとなっている. また,非線形 Coulomb 衝突項を用いて得られた conductivity は neo-classical conductivity と十分によく一致している.

これらの結果から,式(1)のうち, collision term, DC electric field term, は正常に動作していると考えられる.



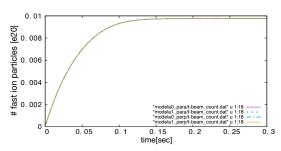


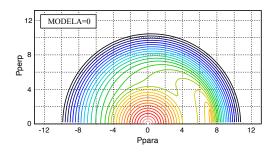
図 2: fast ion 粒子数 (fast ion density を体積積分したもの) の時間変化.

図 1: 横軸:規格化小半径,縦軸:電気伝導度.

2.2 NB source term and loss term

NB source term の挙動を NB fast ion density と速度分布関数の形状から検証する. まずは, MODEL_NBI=1 の場合に対して検証する. また, delta_f 計算の場合, thermalize されて消える 粒子を loss term で記述しているため, loss term の検証も行う. thermalize loss term には thermal momentum 以下の領域に $(p < p_{th})$ 時定数 $\tau = 1$ ms の loss term を設定した.

 $^{^{1}\}epsilon = r/R$



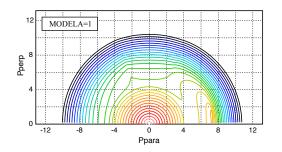


図 3: MODELA=0 での速度分布関数 (接線 NB). 図 4: MODELA=1 での速度分布関数 (接線 NB).

等方 PPL の場合 図 2 は delta f 計算,MODEL_NBI=1 (δ function particle source) で接線 NB (θ = 10 degree), 垂直 NB (θ = 90 degree) を入射した場合の,fast ion density を表示したものである.入射直後の dn/dt,定常状態での n のどちらも,bounce average の有無で変化しないことが確認できる.このことから,NB source term ならびに loss term のどちらも,正しく bounce average できていることがわかる.

また、図 3,4 は、2次元速度空間上での速度分布関数を表示したもので、速度分布関数の形状(ピッチ角分布)は bounce average による変形が表現できていることがわかる.

非等方 PPL の場合 続いて、passing particle に対しては $\tau_c = 0.4$ s, trapped particle に対しては $\tau_c = 0.05$ s の時定数で粒子が損失する、非等方な loss term を与えた場合の結果を以下に示す.NB source term には δ function 型で $\theta = 10^\circ$ のピッチ角で入射するものを、t = 0.7s まで与えた.loss term が非等方の場合、図 5 に示すように、bounce average の有無で fat ion density に差が生じる ことがわかる.これは、bounce average によって、 θ 方向の flux に変化が生じ、trapped particle region に入る粒子数が変わるためである.これは人為的に S_θ を 0 にすると、bounce average の 有無による差がなくなることから確認できる.

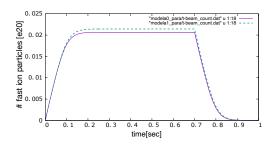


図 5: 非等方な loss term を与えた時の fast ion 粒子数の時間変化.

FIT3D 出力を読みこむ場合 (**MODEL_NBI=2**) FIT3D の出力を NB source term として読み込み, T_e , n_e の時間発展を外部ファイルから読み込んだ場合の計算例を以下に示す. このときの, passing particle, trapped particle に対する loss time はそれぞれ $\tau_c = 0.55$ s, 0.053s である.

図 6 は fast ion 粒子数, 図 7 は中性子発生率の時間発展を示したものである. どちらの場合も, bounce average の有無で若干変化が生じているが, 大きな差にはなっていない. 図 8,9 は modela=0,1 での速度分布関数である. これらの結果から, source term $\langle S \rangle_B$, loss term $\langle L(f_0) \rangle_B$ も正常に動作していると考えられる.

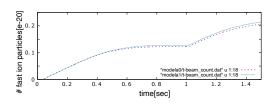


図 6: fast ion 粒子数の時間発展 (LHD: SN140828)

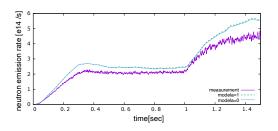


図 7: 中性子発生率の時間発展 (SN140828)

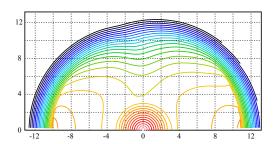


図 8: modela=0 での速度分布関数

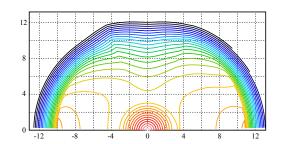


図 9: modela=1 での速度分布関数