

数理工学実験
テーマ7 組合せ最適化

2022年1月24日 提出

工学部情報学科数理工学コース2年
1029-32-7314 岡本淳志

1 目的

組合せ最適化とは、解が離散的に定義されていたり、順序や割当のように組合せ的な構造によって表現できる最適化問題のことである。この問題は問題の構造を上手く捉えなければ効率よく解くことが難しい。この実験は、最短路問題を通して組合せ最適化問題の難しさを体感し、代表的な解法の一つである分枝限定法について学ぶことを目的としている。

2 実験準備

2.1 最短路問題

節点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ と有向枝集合 $E \subseteq V \times V$ から成るグラフ $G = (V, E)$ と、各枝 $(u, v) \in E$ の長さ $d(u, v)$ が与えられたとき、 $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \dots, l - 1$ を満たす節点の列 $P = \langle u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_l = v \rangle$ を始点 u から節点 v への路（または有向路） P と呼び、路に含まれる枝の長さの総和を路の長さ $l(P)$ とする。最短路問題とは、この $l(P)$ を最小にする路を見つける問題である。ただし今回の実験では、枝が負の重みを持つ場合も考えるが、有向路は単純（同じ点を二度以上通らない）なものに限って考える。

最短路を求める問題は負の枝重みを許す場合は一般に、NP-困難な問題となる（多項式時間のアルゴリズムは存在しない）と考えられている。

2.2 分枝限定法

分枝限定法とは、組織的な場合分け（分枝）に基づく列挙法に不要な場合の排除機能（限定）を付したほとんど全ての組合せ最適化問題に適用できる幅広い計算方法である。問題をいくつかの小規模な問題に分割し、その全てを解くことで等価的に元の問題を解くという考え方に基づいている。問題を分割する操作を分枝操作という。分枝限定法では、実際に全ての葉を列挙するわけではなく、その一部分だけを生成する。生成木のうち実際に生成された節点のみから成るものを探索木という。ある節点に対して、

1. その最適値,
2. その部分問題が実行不可能であること,
3. その部分問題の最適解が元の問題の最適解とはならないこと,

のいずれかが分かれば、その節点をこれ以上調べる必要はなく、その下の節点の探索を省略できる（終端するという）。これを限定操作と呼ぶ。

3 課題 1

グラフ $G = (V, E)$, 節点 $s, t \in V$ 及び各枝 $(u, v) \in E$ の長さ $d(u, v)$ が与えられたとき、始点 s から終点 t へ至る最短路を求める分枝アルゴリズムを設計し、その擬似コード (Algorithm 1) を書いた。

Algorithm 1 分枝アルゴリズム $SPA(x, F, temp, Path)$

Require: グラフ G 上の節点 x , 始点 s から点 x へ至る有向路に含まれている節点集合 F , 最短路の長さの暫定値 $temp$, 暫定の最短路 $Path$;

Ensure: 始点 s から終点 t への最短路 $Path$

```
1: for  $(x, y) \in E, y \notin F$  を満たす全ての有向路について do
2:   if  $y = t$  then
3:      $sum \leftarrow 0$ 
4:     for 始点  $s$  から終点  $t$  へ至り、 $F$  を含む有向路の各枝  $(u, v)$  do
5:        $sum \leftarrow sum + d(u, v)$ 
6:     end for
7:     if  $sum < temp$  then
8:        $temp \leftarrow sum$ 
9:        $Path \leftarrow F \cup \{y\}$ 
10:    end if
11:  else
12:     $SPA(y, F \cup \{y\}, temp, Path)$ 
13:  end if
14: end for
15: return  $Path$ 
```

4 課題 2

Algorithm 1 を実装し、グラフの節点数及び枝数に対して実行時間及び探索したノード数を調べ、表 1 とグラフ 1~6 にまとめた。始点を 0, 終点を $n - 1$ とした。ただし、今回の実験では、節点数 n ($= 6, 7, \dots, 20$), 枝数 m ($2n \leq m \leq n(n - 1)$) のグラフを順に調べるように設定したが、ある節点数 n' , 枝数 m' を調べた時の実行時間が 30 秒以上かかった場合、 $n = n' + 1$ ($m = 2n$) として計算を続けるようにした。用いたソースコードを付録のソースコード 1 に示す。

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

n	m	最短路の長さ	探索したノード数	実行時間
6	12	-49	9	0.00009000
6	13	-49	11	0.00011100
6	14	-49	11	0.00010900
6	15	-49	15	0.00014500
6	16	-49	15	0.00014300
6	17	-49	18	0.00029100
6	18	-49	25	0.00023800
6	19	-49	25	0.00023500
6	20	-49	25	0.00020900
6	21	-49	35	0.00022800
6	22	-49	43	0.00028000
6	23	-119	53	0.00028000
6	24	-126	69	0.00028300
6	25	-126	77	0.00028700
6	26	-126	77	0.00028700
6	27	-126	96	0.00035500
6	28	-126	107	0.00035600
6	29	-126	107	0.00033300
6	30	-126	129	0.00031600
7	14	-31	7	0.00003900
7	15	-31	7	0.00003900
7	16	-31	8	0.00003800
7	17	-31	8	0.00004100
7	18	-31	8	0.00004000
7	19	-31	21	0.00008900
7	20	-113	24	0.00009000
7	21	-141	35	0.00012300
7	22	-141	35	0.00012200
7	23	-141	38	0.00013300
7	24	-141	43	0.00015100
7	25	-141	57	0.00019500
7	26	-141	86	0.00030400
7	27	-141	86	0.00030600
7	28	-141	125	0.00044200
7	29	-141	150	0.00053000

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

7	30	-184	177	0.00060800
7	31	-184	204	0.00070500
7	32	-184	244	0.00085600
7	33	-184	264	0.00085800
7	34	-184	337	0.00104400
7	35	-184	337	0.00104300
7	36	-184	392	0.00121800
7	37	-192	457	0.00142900
7	38	-192	457	0.00142400
7	39	-192	457	0.00142400
7	40	-192	586	0.00176700
7	41	-192	586	0.00173700
7	42	-192	651	0.00164900
8	16	-76	8	0.00004400
8	17	-76	16	0.00007500
8	18	-76	21	0.00009400
8	19	-97	24	0.00009500
8	20	-97	24	0.00009700
8	21	-97	32	0.00014300
8	22	-97	32	0.00012400
8	23	-97	32	0.00012400
8	24	-97	45	0.00016800
8	25	-97	49	0.00017000
8	26	-134	62	0.00020800
8	27	-134	68	0.00023000
8	28	-134	75	0.00023100
8	29	-134	104	0.00031800
8	30	-134	126	0.00038100
8	31	-134	182	0.00055900
8	32	-145	249	0.00073300
8	33	-148	306	0.00090000
8	34	-148	306	0.00089800
8	35	-148	356	0.00100700
8	36	-148	452	0.00129200
8	37	-148	550	0.00150000
8	38	-148	639	0.00176000

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

8	39	-148	770	0.00209300
8	40	-148	770	0.00205200
8	41	-148	838	0.00197100
8	42	-148	838	0.00192500
8	43	-148	839	0.00192400
8	44	-148	945	0.00211700
8	45	-148	1109	0.00291500
8	46	-173	1283	0.00301400
8	47	-173	1283	0.00293900
8	48	-173	1571	0.00458600
8	49	-173	1571	0.00422100
8	50	-173	2043	0.01094000
8	51	-173	2391	0.00714600
8	52	-173	2391	0.00580500
8	53	-173	2391	0.00520400
8	54	-173	2945	0.00625300
8	55	-173	3391	0.00974300
8	56	-216	3913	0.01023400
9	18	40	15	0.00021600
9	19	40	20	0.00025600
9	20	40	20	0.00025600
9	21	40	20	0.00025800
9	22	40	34	0.00043500
9	23	40	37	0.00047300
9	24	27	53	0.00063300
9	25	17	74	0.00091900
9	26	-40	115	0.00128200
9	27	-40	150	0.00130000
9	28	-40	212	0.00186100
9	29	-134	238	0.00158400
9	30	-134	238	0.00138200
9	31	-134	297	0.00160400
9	32	-134	436	0.00200000
9	33	-134	436	0.00203100
9	34	-134	506	0.00205600
9	35	-134	604	0.00236000

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

9	36	-134	693	0.00251300
9	37	-134	779	0.00287400
9	38	-134	779	0.00291300
9	39	-134	780	0.00397800
9	40	-134	1013	0.00405000
9	41	-134	1257	0.00467100
9	42	-134	1417	0.00482300
9	43	-145	1526	0.00495100
9	44	-145	1849	0.00829100
9	45	-145	1849	0.00624700
9	46	-145	2275	0.00743800
9	47	-145	2275	0.00772600
9	48	-145	2421	0.00805600
9	49	-145	2763	0.00927500
9	50	-145	3003	0.00941100
9	51	-145	3317	0.01004300
9	52	-145	3947	0.01090100
9	53	-145	4583	0.01305000
9	54	-145	5161	0.01371700
9	55	-145	5874	0.01515600
9	56	-145	6612	0.01750600
9	57	-145	6612	0.01768500
9	58	-145	6612	0.01760500
9	59	-162	7863	0.02114100
9	60	-178	9181	0.02511900
9	61	-178	9181	0.02453400
9	62	-178	10149	0.02656000
9	63	-178	10959	0.02791900
9	64	-178	13960	0.03663700
9	65	-178	13960	0.03712300
9	66	-178	16798	0.04397400
9	67	-178	16798	0.04943700
9	68	-178	19326	0.06352800
9	69	-195	21854	0.06995200
9	70	-195	21854	0.06869000
9	71	-195	25442	0.07548500

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

9	72	-195	27399	0.08519400
10	20	-19	9	0.00005300
10	21	-19	10	0.00005900
10	22	-19	20	0.00009600
10	23	-72	32	0.00015500
10	24	-72	34	0.00015800
10	25	-85	42	0.00018200
10	26	-85	50	0.00020800
10	27	-85	83	0.00033500
10	28	-85	83	0.00035600
10	29	-85	108	0.00045100
10	30	-85	143	0.00061300
10	31	-85	189	0.00084800
10	32	-85	289	0.00123300
10	33	-85	316	0.00123600
10	34	-85	356	0.00159300
10	35	-85	356	0.00137500
10	36	-85	387	0.00149500
10	37	-85	387	0.00147700
10	38	-85	490	0.00186400
10	39	-85	559	0.00211400
10	40	-111	743	0.00271800
10	41	-157	1014	0.00356700
10	42	-157	1087	0.00342300
10	43	-157	1087	0.00358800
10	44	-157	1257	0.00386500
10	45	-157	1351	0.00413300
10	46	-157	1565	0.00479400
10	47	-157	1565	0.00478900
10	48	-237	2120	0.00642500
10	49	-237	2526	0.00767100
10	50	-237	2893	0.00893500
10	51	-237	3591	0.01371600
10	52	-237	4017	0.01232700
10	53	-237	4750	0.01448300
10	54	-237	4750	0.01731500

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

10	55	-237	5342	0.01617600
10	56	-237	5342	0.01751800
10	57	-237	6696	0.02028900
10	58	-237	8710	0.02640400
10	59	-237	11278	0.03447000
10	60	-237	12385	0.03817000
10	61	-237	13305	0.03814000
10	62	-237	13305	0.03809500
10	63	-237	14629	0.04071600
10	64	-237	15907	0.04595100
10	65	-287	20002	0.05549700
10	66	-287	23207	0.06784200
10	67	-287	25767	0.07146600
10	68	-287	29190	0.08529800
10	69	-294	34493	0.10031500
10	70	-294	38153	0.11412400
10	71	-294	42354	0.12529100
10	72	-294	42354	0.11858300
10	73	-294	42354	0.11872400
10	74	-294	49626	0.14492800
10	75	-294	61133	0.18090700
10	76	-294	69682	0.20363200
10	77	-294	79671	0.28255000
10	78	-294	84138	0.27058200
10	79	-294	84138	0.26898300
10	80	-294	84139	0.26558000
10	81	-294	84139	0.27775100
10	82	-294	96569	0.30328500
10	83	-294	108665	0.33164900
10	84	-294	122637	0.37399200
10	85	-294	141099	0.40784200
10	86	-294	157061	0.45491800
10	87	-294	175491	0.52150100
10	88	-294	195715	0.57149200
10	89	-294	195715	0.55941500
10	90	-294	219201	0.62961200

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

11	22	-74	18	0.00015300
11	23	-100	24	0.00016000
11	24	-100	26	0.00017500
11	25	-151	39	0.00023800
11	26	-151	48	0.00027600
11	27	-151	48	0.00027700
11	28	-151	54	0.00027600
11	29	-151	66	0.00034100
11	30	-151	81	0.00039700
11	31	-151	81	0.00039600
11	32	-151	113	0.00057400
11	33	-151	114	0.00058700
11	34	-151	114	0.00056400
11	35	-151	243	0.00107000
11	36	-335	421	0.00181900
11	37	-335	521	0.00227800
11	38	-335	708	0.00310600
11	39	-335	842	0.00371500
11	40	-335	926	0.00506100
11	41	-335	926	0.00439900
11	42	-335	1405	0.00647700
11	43	-335	1551	0.00656700
11	44	-335	1912	0.01176800
11	45	-335	2409	0.01495000
11	46	-335	2649	0.01076100
11	47	-335	3354	0.01297400
11	48	-335	4423	0.01810700
11	49	-335	4423	0.01866700
11	50	-335	5573	0.02328700
11	51	-335	5573	0.02413200
11	52	-335	6635	0.02632200
11	53	-335	8356	0.03547000
11	54	-335	9934	0.04594100
11	55	-335	11762	0.04801100
11	56	-335	13315	0.05970200
11	57	-335	15516	0.06243700

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

11	58	-335	15516	0.06464800
11	59	-335	19310	0.07952800
11	60	-335	22523	0.09839300
11	61	-335	26790	0.11066600
11	62	-335	31021	0.13551100
11	63	-335	36469	0.15499300
11	64	-335	42666	0.17553800
11	65	-335	46327	0.18227300
11	66	-335	49848	0.17794300
11	67	-335	49848	0.18614700
11	68	-335	57115	0.21890700
11	69	-335	57115	0.20166500
11	70	-335	62959	0.23114000
11	71	-335	62959	0.22712300
11	72	-335	69765	0.25594100
11	73	-335	78325	0.30333900
11	74	-335	90358	0.33597900
11	75	-335	104135	0.38731400
11	76	-335	118605	0.44042500
11	77	-335	132964	0.48885800
11	78	-335	140480	0.51010000
11	79	-335	155246	0.55604400
11	80	-335	173885	0.61384400
11	81	-335	195756	0.69939800
11	82	-335	218400	0.79604200
11	83	-335	218400	0.80477000
11	84	-335	218401	0.79024700
11	85	-335	263869	0.95355300
11	86	-335	263869	0.94214200
11	87	-335	299244	1.08417300
11	88	-335	299244	1.10269400
11	89	-335	343202	1.30604400
11	90	-335	343202	1.29208200
11	91	-367	389946	1.45854500
11	92	-367	433392	1.63742900
11	93	-367	500762	1.86827100

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

11	94	-367	569209	2.12284900
11	95	-367	569209	2.15273000
11	96	-367	637143	2.40079800
11	97	-367	713629	2.73261000
11	98	-367	804976	3.09644200
11	99	-367	896323	3.47891500
11	100	-367	896323	3.51074100
11	101	-367	995345	3.91923800
11	102	-367	1094315	4.33446700
11	103	-367	1203965	4.80567700
11	104	-367	1327935	5.31031700
11	105	-367	1413723	5.31213900
11	106	-367	1561815	5.88553200
11	107	-367	1753617	6.63503100
11	108	-367	1753617	6.60218000
11	109	-367	1972819	7.53560000
11	110	-367	1972819	7.52132700
12	24	-207	11	0.00007700
12	25	-207	12	0.00008600
12	26	-207	12	0.00008500
12	27	-207	12	0.00008500
12	28	-207	12	0.00008300
12	29	-207	31	0.00020900
12	30	-207	39	0.00026500
12	31	-207	47	0.00026700
12	32	-207	57	0.00032400
12	33	-207	73	0.00039700
12	34	-207	80	0.00043400
12	35	-207	80	0.00046000
12	36	-207	126	0.00070400
12	37	-207	237	0.00134300
12	38	-207	237	0.00137400
12	39	-297	331	0.00201000
12	40	-297	385	0.00240800
12	41	-297	481	0.00279500
12	42	-297	697	0.00452400

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

12	43	-297	812	0.00501700
12	44	-297	1316	0.00870700
12	45	-297	1531	0.01044700
12	46	-297	1665	0.01029600
12	47	-297	1665	0.01038700
12	48	-297	2062	0.01291900
12	49	-297	2062	0.01295900
12	50	-297	2221	0.01271400
12	51	-297	2688	0.01581100
12	52	-297	2929	0.01566500
12	53	-297	3456	0.01842000
12	54	-297	3903	0.02006200
12	55	-297	5115	0.02726300
12	56	-297	5115	0.02712700
12	57	-297	5650	0.03039600
12	58	-297	7403	0.03917900
12	59	-297	8027	0.04185500
12	60	-323	12309	0.06652200
12	61	-323	14566	0.07453800
12	62	-323	17647	0.08699300
12	63	-323	20831	0.09184600
12	64	-323	25985	0.12266300
12	65	-323	29537	0.14351000
12	66	-323	35551	0.17654300
12	67	-323	39479	0.20584000
12	68	-323	48434	0.24395300
12	69	-323	57752	0.27894900
12	70	-323	57752	0.28660900
12	71	-323	65393	0.32304600
12	72	-323	72055	0.35927700
12	73	-323	83090	0.40718100
12	74	-323	83090	0.41686400
12	75	-323	95835	0.46160300
12	76	-323	112547	0.55448800
12	77	-323	132455	0.67654200
12	78	-323	153222	0.76854400

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

12	79	-323	179957	0.92851300
12	80	-323	196995	1.01430600
12	81	-323	227749	1.14944100
12	82	-323	267934	1.36889800
12	83	-323	305286	1.55593700
12	84	-323	353347	1.78563700
12	85	-323	398691	2.04557400
12	86	-323	443350	2.28498000
12	87	-323	503254	2.57036400
12	88	-323	554277	2.87203600
12	89	-323	586286	2.86358600
12	90	-346	658099	3.24517200
12	91	-346	658099	3.22757100
12	92	-346	784328	3.82142500
12	93	-346	877761	4.29827700
12	94	-346	978398	4.76240800
12	95	-346	978398	4.77884100
12	96	-351	1110448	5.45131400
12	97	-351	1110448	5.46946200
12	98	-351	1225266	6.04924400
12	99	-351	1345836	6.65752900
12	100	-351	1486802	7.36064900
12	101	-351	1729396	8.52450000
12	102	-351	1951991	9.42696000
12	103	-351	2198146	10.75880400
12	104	-351	2198146	10.62962400
12	105	-351	2431742	13.11723400
12	106	-351	2677370	12.98710000
12	107	-351	2929733	14.20727600
12	108	-351	3135406	15.19680600
12	109	-351	3433208	16.61337200
12	110	-351	3433208	16.54249100
12	111	-351	3433208	16.47467800
12	112	-351	3881000	18.82351500
12	113	-351	4211680	21.15681600
12	114	-351	4602069	22.09838500

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

12	115	-375	5210059	25.57378800
12	116	-375	5737085	29.65441000
12	117	-375	6256625	30.31811700
13	26	-126	24	0.00022300
13	27	-126	31	0.00025700
13	28	-126	47	0.00040100
13	29	-126	47	0.00036500
13	30	-126	59	0.00046300
13	31	-126	91	0.00072300
13	32	-126	144	0.00117500
13	33	-126	179	0.00144600
13	34	-126	241	0.00304000
13	35	-166	422	0.00340000
13	36	-166	422	0.00325100
13	37	-166	521	0.00407200
13	38	-166	653	0.00504800
13	39	-166	884	0.00724700
13	40	-166	1239	0.01050100
13	41	-166	1394	0.01159000
13	42	-166	1550	0.01214100
13	43	-166	2132	0.01606100
13	44	-166	2329	0.02340300
13	45	-166	2959	0.02408800
13	46	-166	3527	0.02680800
13	47	-166	4075	0.02656100
13	48	-166	4708	0.03989300
13	49	-166	5530	0.04241900
13	50	-166	5530	0.04049600
13	51	-166	8310	0.06154100
13	52	-166	9827	0.07399900
13	53	-166	11437	0.08801500
13	54	-166	11437	0.08458800
13	55	-166	13075	0.10051400
13	56	-166	16034	0.12060000
13	57	-166	18253	0.13626900
13	58	-166	21916	0.16595800

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

13	59	-166	24637	0.19113200
13	60	-166	29793	0.23193300
13	61	-166	37337	0.29562300
13	62	-166	41174	0.32512000
13	63	-166	52843	0.41402600
13	64	-166	59743	0.47167200
13	65	-166	74128	0.59513900
13	66	-166	88064	0.68690100
13	67	-166	112413	0.89453500
13	68	-166	126583	0.99172700
13	69	-166	139500	1.10844000
13	70	-166	139500	1.11229800
13	71	-166	139501	1.12335800
13	72	-425	147775	1.35290600
13	73	-460	159847	1.24801300
13	74	-460	178519	1.27358600
13	75	-460	203391	1.46129500
13	76	-460	203391	1.42274100
13	77	-460	257892	1.79619700
13	78	-460	275210	1.78029700
13	79	-460	316293	2.08151900
13	80	-460	316293	2.11223400
13	81	-460	365621	2.39854400
13	82	-460	420818	2.78149700
13	83	-460	498672	3.32447200
13	84	-460	605468	4.01484100
13	85	-460	697693	4.56030500
13	86	-460	779205	5.04883600
13	87	-460	904446	5.93969900
13	88	-460	1020634	6.90497400
13	89	-460	1155828	7.70315000
13	90	-460	1155828	8.09448900
13	91	-460	1299998	9.00044400
13	92	-460	1395786	9.09439200
13	93	-460	1538331	9.96249200
13	94	-460	1862475	12.96344900

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

13	95	-460	1862475	12.41524700
13	96	-460	2143657	14.18936700
13	97	-460	2356284	15.78857700
13	98	-461	2720567	18.36785400
13	99	-461	2960419	19.24525500
13	100	-521	3440136	22.07769000
13	101	-521	3773672	24.49182900
13	102	-521	3773672	24.21545500
13	103	-521	4357328	27.79196600
13	104	-521	4357328	27.79056100
13	105	-521	4357328	27.70862600
13	106	-521	4933394	31.35240900
14	28	52	14	0.00012900
14	29	14	21	0.00025700
14	30	14	33	0.00027900
14	31	14	39	0.00030000
14	32	14	60	0.00042400
14	33	14	74	0.00053200
14	34	-56	108	0.00073800
14	35	-70	117	0.00069800
14	36	-96	153	0.00094700
14	37	-96	243	0.00146400
14	38	-96	300	0.00195600
14	39	-205	323	0.00195800
14	40	-205	355	0.00209700
14	41	-205	355	0.00196500
14	42	-205	356	0.00205100
14	43	-205	387	0.00229400
14	44	-205	428	0.00263100
14	45	-253	629	0.00410100
14	46	-492	944	0.00627800
14	47	-492	1156	0.00810000
14	48	-492	1275	0.00932700
14	49	-492	1430	0.01053600
14	50	-492	1741	0.01300100
14	51	-492	2355	0.01467600

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

14	52	-492	2978	0.01968700
14	53	-492	4663	0.03128700
14	54	-492	4663	0.03427400
14	55	-492	5571	0.03681900
14	56	-492	6385	0.04414600
14	57	-492	7591	0.05965100
14	58	-492	8003	0.06159300
14	59	-492	12231	0.08209300
14	60	-520	13338	0.08394000
14	61	-520	18103	0.11352600
14	62	-520	21038	0.14057800
14	63	-520	26264	0.17229800
14	64	-520	26264	0.17617500
14	65	-520	33768	0.21834900
14	66	-520	33768	0.22684500
14	67	-520	39383	0.26453300
14	68	-520	47009	0.32186900
14	69	-520	59137	0.40737400
14	70	-520	59137	0.39394100
14	71	-520	59137	0.39467800
14	72	-520	73708	0.50434600
14	73	-525	84473	0.55756700
14	74	-525	94428	0.62828700
14	75	-525	104913	0.69083600
14	76	-525	120522	0.80942700
14	77	-525	120522	0.79372000
14	78	-525	145029	0.99894800
14	79	-525	166641	1.11442000
14	80	-525	192487	1.25745200
14	81	-525	192487	1.26158400
14	82	-525	216443	1.44438400
14	83	-525	245762	1.63263900
14	84	-525	295165	1.99600200
14	85	-525	378006	2.54610900
14	86	-525	428818	2.89657600
14	87	-525	428818	2.86958400

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

14	88	-525	566983	3.78128900
14	89	-525	661732	4.39402700
14	90	-525	903062	5.84205800
14	91	-582	1000911	6.54024100
14	92	-582	1197499	7.97866000
14	93	-582	1290629	7.95051100
14	94	-582	1559879	9.45954300
14	95	-582	1743288	10.80245000
14	96	-582	1877458	11.66555300
14	97	-582	1877458	11.50611000
14	98	-582	1877458	11.60177100
14	99	-582	2114788	13.09288500
14	100	-582	2635459	16.25031200
14	101	-582	2955017	18.50368200
14	102	-582	3303901	20.54813600
14	103	-582	4151435	25.67094500
14	104	-582	4931339	30.77376300
15	30	-184	27	0.00029400
15	31	-184	34	0.00036300
15	32	-184	46	0.00051100
15	33	-184	57	0.00056400
15	34	-299	62	0.00055000
15	35	-299	90	0.00080000
15	36	-299	91	0.00079600
15	37	-299	91	0.00085900
15	38	-299	143	0.00131400
15	39	-299	206	0.00183800
15	40	-299	264	0.00240900
15	41	-299	298	0.00276400
15	42	-299	367	0.00354600
15	43	-299	495	0.00480100
15	44	-378	590	0.00584200
15	45	-378	590	0.00597100
15	46	-378	1124	0.01217200
15	47	-378	1611	0.01905900
15	48	-380	2208	0.01934900

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

15	49	-380	2730	0.02293300
15	50	-380	3520	0.03301300
15	51	-380	4230	0.03347200
15	52	-380	6290	0.07068800
15	53	-449	7867	0.08189500
15	54	-449	7867	0.07751700
15	55	-494	8867	0.08907100
15	56	-494	9525	0.08854400
15	57	-494	9525	0.08709700
15	58	-494	12666	0.10335000
15	59	-494	16780	0.12845600
15	60	-494	16780	0.12552800
15	61	-494	19792	0.15633900
15	62	-494	20773	0.14368300
15	63	-494	22103	0.16495200
15	64	-494	27868	0.21373000
15	65	-494	35028	0.24450400
15	66	-581	44584	0.31794700
15	67	-612	52209	0.38412900
15	68	-612	61223	0.46352500
15	69	-612	77195	0.58115100
15	70	-612	77195	0.58377900
15	71	-612	89280	0.66151700
15	72	-612	110952	0.83947000
15	73	-636	143479	1.06813600
15	74	-636	167075	1.21451300
15	75	-660	210347	1.53686700
15	76	-660	252777	1.84972700
15	77	-660	286613	2.09808300
15	78	-660	399827	2.85451100
15	79	-660	479980	3.42122300
15	80	-660	550911	3.95164400
15	81	-660	597938	4.33475900
15	82	-667	680188	4.94982500
15	83	-667	922874	6.79761200
15	84	-667	922874	6.77057000

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

15	85	-667	1128361	8.23804700
15	86	-684	1203981	8.47005200
15	87	-684	1391445	9.85439700
15	88	-684	1540156	10.69297100
15	89	-684	1635252	10.55046000
15	90	-684	1814534	11.62526200
15	91	-684	2194028	14.21970300
15	92	-684	2194028	14.18113300
15	93	-684	2478645	16.70965400
15	94	-684	2478645	17.18986600
15	95	-684	2740281	18.89477600
15	96	-706	3140838	21.39130600
15	97	-706	3790614	30.00047900
16	32	-72	15	0.00015500
16	33	-72	26	0.00026300
16	34	-258	36	0.00033700
16	35	-258	37	0.00035100
16	36	-258	37	0.00034700
16	37	-258	45	0.00038900
16	38	-258	55	0.00049700
16	39	-258	61	0.00054600
16	40	-258	122	0.00108000
16	41	-367	170	0.00154700
16	42	-367	228	0.00208600
16	43	-367	288	0.00265200
16	44	-423	342	0.00316300
16	45	-423	342	0.00331300
16	46	-423	422	0.00400400
16	47	-423	686	0.00678700
16	48	-423	750	0.00748700
16	49	-423	1118	0.01132600
16	50	-423	1388	0.01346900
16	51	-423	1764	0.01632300
16	52	-423	1764	0.01528800
16	53	-423	1764	0.01563700
16	54	-423	2852	0.02711600

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

16	55	-423	3601	0.03260600
16	56	-423	4823	0.04519700
16	57	-423	6935	0.06277000
16	58	-423	9231	0.08638600
16	59	-423	12492	0.11185900
16	60	-423	14932	0.13455800
16	61	-423	17565	0.16554500
16	62	-423	21011	0.19884700
16	63	-535	22329	0.20138800
16	64	-535	28053	0.24974500
16	65	-535	34228	0.30876700
16	66	-535	34228	0.31430800
16	67	-535	34229	0.29618300
16	68	-535	35185	0.32329900
16	69	-535	46010	0.44404600
16	70	-535	61992	0.54258200
16	71	-535	64072	0.70643500
16	72	-535	70201	0.72620200
16	73	-535	81442	0.91545000
16	74	-535	95164	0.94084100
16	75	-535	109634	0.99189500
16	76	-535	127355	1.11826000
16	77	-535	158815	1.33176700
16	78	-535	158815	1.37806600
16	79	-535	235482	2.18218600
16	80	-535	235482	2.16744200
16	81	-535	285410	2.35337200
16	82	-535	324931	2.81083200
16	83	-535	430466	3.70903100
16	84	-544	530724	4.99596100
16	85	-544	604636	5.13185800
16	86	-544	706152	5.91921700
16	87	-544	808176	6.77567300
16	88	-544	868189	7.26106100
16	89	-544	1025287	8.74701000
16	90	-544	1143726	9.69535800

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

16	91	-544	1508272	12.68925800
16	92	-567	1868281	15.86603200
16	93	-567	1868281	16.13171400
16	94	-567	2134356	18.27173100
16	95	-567	2568517	21.68815000
16	96	-567	2866921	24.31912400
16	97	-567	2866921	25.53845400
16	98	-567	3229983	27.61898800
16	99	-567	3458473	28.91440000
16	100	-567	3908676	29.45787000
16	101	-567	4246676	31.80528000
17	34	48	16	0.00022600
17	35	-107	24	0.00032600
17	36	-107	26	0.00037200
17	37	-107	26	0.00035300
17	38	-107	35	0.00051700
17	39	-107	35	0.00047200
17	40	-150	67	0.00087600
17	41	-150	67	0.00072400
17	42	-150	106	0.00111500
17	43	-150	106	0.00111200
17	44	-150	110	0.00115900
17	45	-150	238	0.00239000
17	46	-150	238	0.00246800
17	47	-150	425	0.00451900
17	48	-150	527	0.00521700
17	49	-150	527	0.00446400
17	50	-150	649	0.00589200
17	51	-150	788	0.00839100
17	52	-150	1186	0.01090400
17	53	-312	1685	0.01644200
17	54	-322	2217	0.02454300
17	55	-322	3273	0.03633200
17	56	-330	3890	0.03886600
17	57	-330	3890	0.03605600
17	58	-330	4542	0.04709800

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

17	59	-330	4542	0.04929900
17	60	-330	4542	0.04502000
17	61	-330	4542	0.04705300
17	62	-330	5519	0.05346600
17	63	-345	6492	0.06648300
17	64	-345	10200	0.10390300
17	65	-345	12026	0.12116200
17	66	-345	14190	0.14060600
17	67	-442	23287	0.23005600
17	68	-442	23287	0.23413500
17	69	-442	28910	0.29092600
17	70	-442	34667	0.36077000
17	71	-442	42303	0.43016100
17	72	-442	63002	0.64230200
17	73	-442	72222	0.73880300
17	74	-442	79247	0.84692800
17	75	-442	102835	1.02909500
17	76	-442	108687	1.12478500
17	77	-442	108687	1.08945200
17	78	-442	144361	1.46799400
17	79	-442	179925	1.85058200
17	80	-442	194883	1.84114900
17	81	-442	218634	2.09641300
17	82	-442	279871	2.64969100
17	83	-442	357910	3.43696700
17	84	-463	431476	4.15948600
17	85	-463	500174	4.82736600
17	86	-463	587939	5.67579900
17	87	-463	724089	7.14541200
17	88	-463	759536	6.98999600
17	89	-463	870759	8.30213500
17	90	-463	948667	8.87398200
17	91	-463	1099263	10.02995600
17	92	-463	1289975	11.77677100
17	93	-463	1289976	11.66773100
17	94	-463	1889990	17.05774700

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

17	95	-463	2228820	20.02678700
17	96	-463	2583771	23.06851300
17	97	-467	2771365	23.40372500
17	98	-467	3860704	32.07723100
18	36	294	18	0.00026300
18	37	294	19	0.00025300
18	38	294	19	0.00023000
18	39	159	26	0.00030200
18	40	159	26	0.00030200
18	41	159	26	0.00031400
18	42	51	90	0.00099100
18	43	51	125	0.00142000
18	44	51	125	0.00142200
18	45	51	157	0.00179400
18	46	18	198	0.00246200
18	47	18	282	0.00339400
18	48	18	337	0.00404300
18	49	18	516	0.00619300
18	50	18	758	0.00801700
18	51	18	838	0.00863200
18	52	18	1035	0.01050200
18	53	18	1035	0.01081300
18	54	-309	1843	0.02026500
18	55	-309	1953	0.02109600
18	56	-342	3108	0.03267000
18	57	-342	3514	0.03801400
18	58	-377	4643	0.05210600
18	59	-377	6376	0.07697200
18	60	-377	7428	0.08539100
18	61	-377	9749	0.10324200
18	62	-377	11797	0.12778400
18	63	-560	16802	0.18466300
18	64	-560	17177	0.18403300
18	65	-560	17177	0.19033600
18	66	-560	21435	0.22640700
18	67	-560	28120	0.30285400

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

18	68	-560	31193	0.33585000
18	69	-560	47691	0.51613700
18	70	-570	57219	0.62180600
18	71	-570	76818	0.84143700
18	72	-600	98634	1.07675300
18	73	-600	113570	1.24793000
18	74	-600	139187	1.53391800
18	75	-600	168353	1.82672000
18	76	-600	176162	1.82591700
18	77	-600	224114	2.37449200
18	78	-600	239846	2.51946400
18	79	-600	271316	2.80768100
18	80	-600	382122	4.01191400
18	81	-600	522213	5.59337900
18	82	-600	674794	7.28827000
18	83	-600	812078	8.89672000
18	84	-658	976070	10.33222000
18	85	-696	1223691	12.79137900
18	86	-696	1600325	16.63739200
18	87	-696	1959582	20.48318500
18	88	-696	2202617	22.80759300
18	89	-696	2501615	25.84418800
18	90	-696	2751305	28.61758200
18	91	-696	2751305	29.04817300
18	92	-696	3225223	33.68700100
19	38	243	35	0.00077800
19	39	243	51	0.00158300
19	40	-21	65	0.00198600
19	41	-21	88	0.00214400
19	42	-21	137	0.00292800
19	43	-21	137	0.00220100
19	44	-21	197	0.00286800
19	45	-21	272	0.00358300
19	46	-21	272	0.00320900
19	47	-88	584	0.00743700
19	48	-88	671	0.00902600

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

19	49	-88	735	0.00775600
19	50	-88	876	0.00946000
19	51	-88	1129	0.01368000
19	52	-88	1481	0.01794800
19	53	-157	2398	0.02742400
19	54	-359	2676	0.02684400
19	55	-359	2910	0.02730100
19	56	-448	3488	0.03349300
19	57	-511	4517	0.04641600
19	58	-511	4930	0.04730300
19	59	-511	5967	0.05771400
19	60	-597	6371	0.06377100
19	61	-597	7784	0.07207600
19	62	-597	8566	0.08083400
19	63	-597	12909	0.12693800
19	64	-597	12909	0.11531800
19	65	-678	22823	0.21416500
19	66	-678	26772	0.25286200
19	67	-678	30311	0.27843000
19	68	-678	40656	0.39307100
19	69	-678	56868	0.52918700
19	70	-678	69346	0.66770500
19	71	-678	91302	0.90298800
19	72	-678	110189	1.09158000
19	73	-678	124970	1.23058800
19	74	-678	147490	1.45075100
19	75	-678	172657	1.74797400
19	76	-678	206800	2.15513800
19	77	-678	233300	2.40252500
19	78	-678	266044	2.64014400
19	79	-678	266044	2.66517200
19	80	-678	311902	3.28480200
19	81	-678	335207	3.46347900
19	82	-678	391927	3.93084400
19	83	-678	434515	4.30391900
19	84	-678	527430	5.19772900

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

19	85	-678	686439	6.73504400
19	86	-678	875048	8.78580400
19	87	-678	1132921	11.50869000
19	88	-678	1194247	12.05613300
19	89	-678	1376893	15.11149600
19	90	-678	1436921	16.48587500
19	91	-678	1681949	15.03516400
19	92	-678	2227017	23.19421800
19	93	-678	2700535	30.00821600
20	40	38	20	0.00030500
20	41	38	36	0.00054300
20	42	38	44	0.00069200
20	43	38	54	0.00075300
20	44	38	71	0.00092900
20	45	18	83	0.00104500
20	46	18	83	0.00104600
20	47	18	115	0.00149800
20	48	18	151	0.00200700
20	49	18	241	0.00336800
20	50	18	340	0.00493400
20	51	-70	396	0.00522500
20	52	-141	523	0.00659800
20	53	-141	523	0.00725500
20	54	-141	906	0.01370000
20	55	-239	1338	0.01866200
20	56	-239	1764	0.02510000
20	57	-239	1902	0.03147000
20	58	-239	2970	0.04757000
20	59	-285	3600	0.05664900
20	60	-285	5425	0.09660300
20	61	-285	6914	0.09846500
20	62	-285	9475	0.13148700
20	63	-285	9475	0.12796800
20	64	-285	12383	0.17125600
20	65	-285	12383	0.18415500
20	66	-285	13775	0.19017100

表 1: 分枝アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

20	67	-308	18344	0.27980000
20	68	-308	19997	0.27939800
20	69	-308	25565	0.34329500
20	70	-308	34110	0.44705700
20	71	-308	42692	0.60842700
20	72	-380	48094	0.65865400
20	73	-380	54397	0.72586200
20	74	-380	75175	1.04350700
20	75	-380	90061	1.23124800
20	76	-380	101338	1.40707600
20	77	-380	101338	1.34463900
20	78	-380	101338	1.37223800
20	79	-380	136267	2.12519300
20	80	-380	164398	2.26748700
20	81	-380	216226	3.59282300
20	82	-380	273461	4.18136600
20	83	-380	273461	3.96736700
20	84	-380	322664	4.87685700
20	85	-435	498184	7.77522300
20	86	-435	687397	10.94012000
20	87	-435	775497	11.35997500
20	88	-435	1112346	15.91885600
20	89	-435	1175206	16.38831300
20	90	-435	1489423	20.89626500
20	91	-435	1666412	21.82294600
20	92	-435	2058527	25.99239100
20	93	-435	2464496	30.84505800

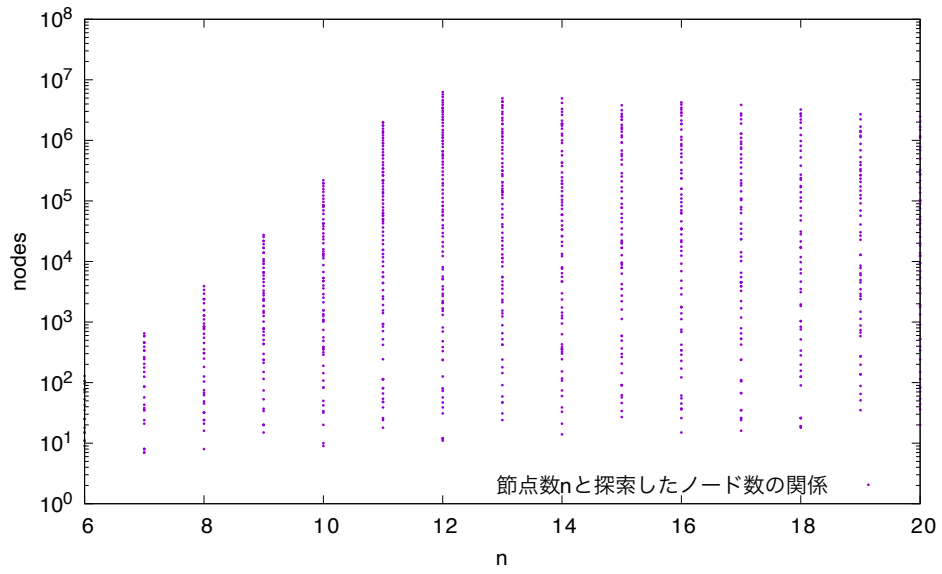


図 1: 分枝アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と探索したノード数 (nodes) の関係, 横軸は $6 \leq n \leq 20$, 縦軸は $1 \leq \text{nodes} \leq 10^8$ (対数スケール)

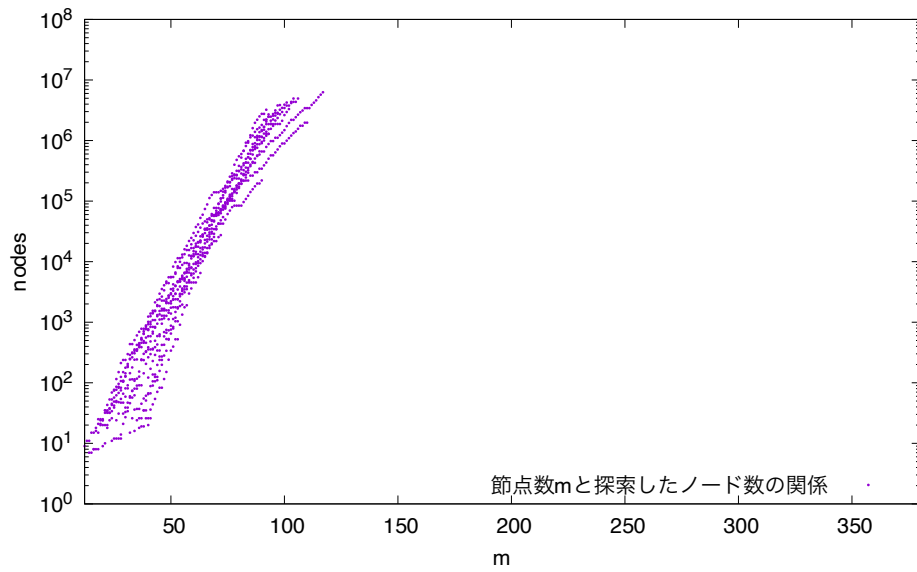


図 2: 分枝アルゴリズムを用いた場合, 枝数 m と探索したノード数 (nodes) の関係, 横軸は $12 \leq m \leq 380$, 縦軸は $1 \leq \text{nodes} \leq 10^8$ (対数スケール)

節点数 n ,枝数 m と探索したノード数の関係

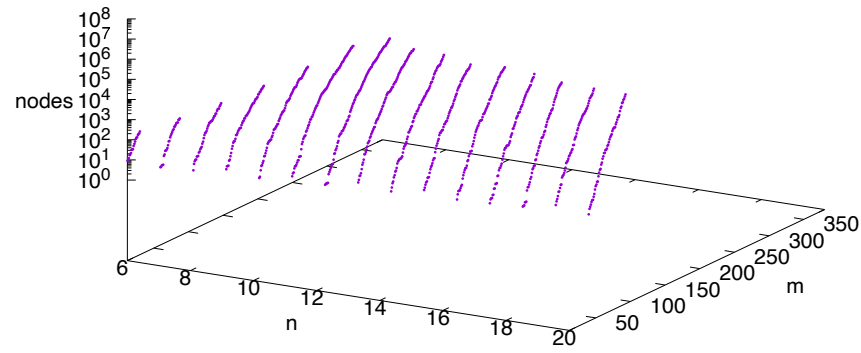


図 3: 分枝アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と枝数 m と探索したノード数 (nodes) の関係, 軸の範囲は $6 \leq n \leq 20$, $12 \leq m \leq 380$, $1 \leq \text{nodes} \leq 10^8$ (対数スケール)

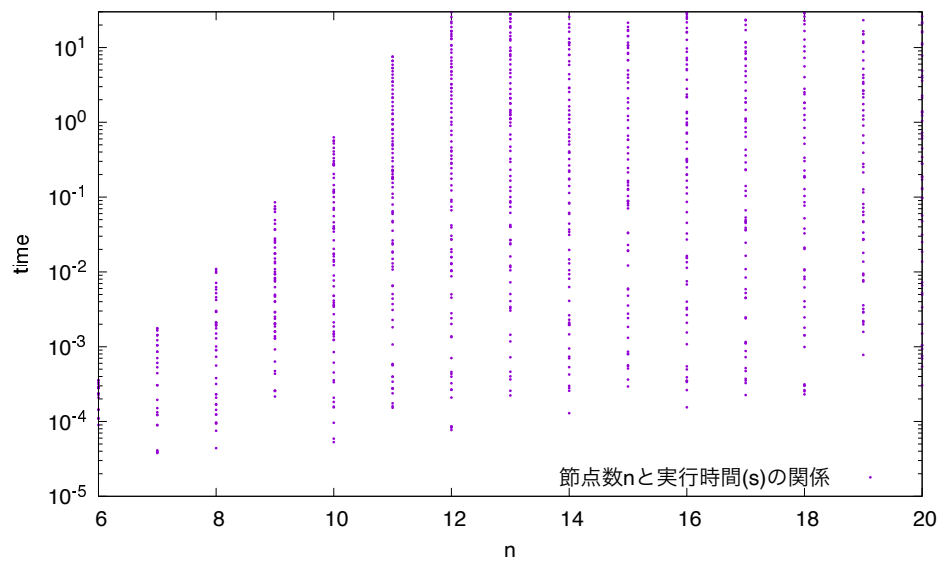


図 4: 分枝アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と実行時間 (time, 単位は s) の関係, 横軸は $6 \leq n \leq 20$, 縦軸は $10^{-5} \leq \text{time} \leq 30$ (対数スケール)

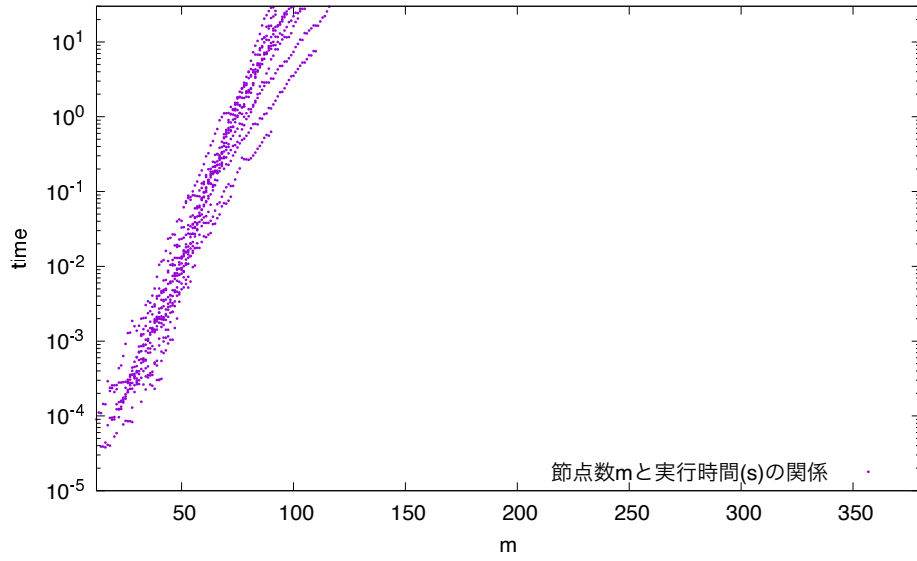


図 5: 分枝アルゴリズムを用いた場合, 枝数 m と実行時間 (time, 単位は s) の関係, 横軸は $12 \leq m \leq 380$, 縦軸は $10^{-5} \leq \text{time} \leq 30$ (対数スケール)

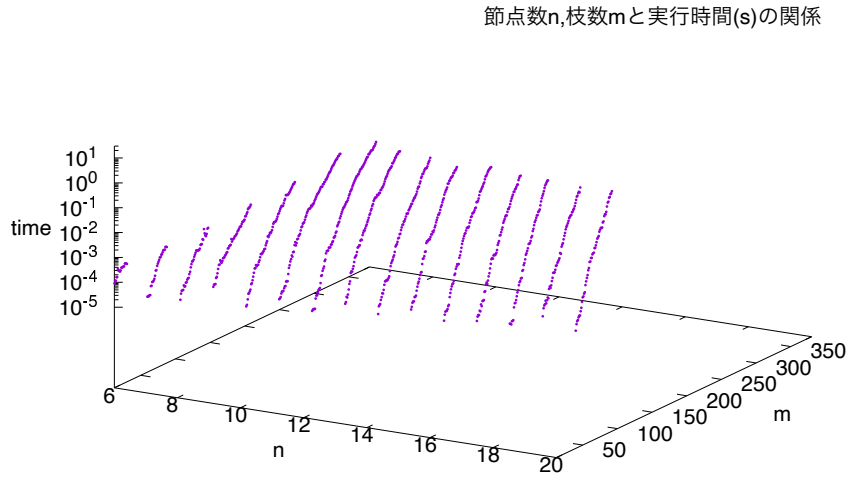


図 6: 分枝アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と枝数 m と実行時間 (time, 単位は s) の関係, 軸の範囲は $6 \leq n \leq 20$, $12 \leq m \leq 380$, $10^{-5} \leq \text{time} \leq 30$ (対数スケール)

5 課題3

課題1で設定したアルゴリズムに関して限定操作を導入し、限定操作別の擬似コードを書き、最後に全体の限定操作アルゴリズムの擬似コードを書く。

Algorithm 2 負の重みを持つ枝の長さの和を格納する配列 *NegaBranches*[]

Require: グラフ G ;

Ensure: 配列 *NegaBranches*[]

```
1: for  $0 \leq i \leq N, i \neq s$  do
2:    $MinLength[i] \leftarrow \min_{0 \leq j \leq N-1} d(j, i)$ 
3: end for
4:  $MinLength[ ]$  を昇順ソート
5:  $sum \leftarrow 0$ 
6: for  $0 \leq i \leq N-1$  do
7:    $NegaBranches[i] \leftarrow sum$ 
8:   if  $MinLength[i] < 0$  then
9:      $sum \leftarrow sum + MinLength[i]$ 
10:  end if
11: end for
12: return NegaBranches[ ]
```

Algorithm 3 限定操作

Require: 最短路の長さの暫定値 $temp$, 始点 s から点 $x (\neq t)$ までの一つの路 P_k , *NegaBranches*[];

```
1:  $k \leftarrow P_k$  が持つ枝数
2:  $l_k \leftarrow l(P_k)$ 
3:  $sum \leftarrow 0$ 
4: if  $l_k + NegaBranches[N-1-k] > temp$  then
5:   点  $x$  以降の探索を終端
6: end if
```

Algorithm 4 分枝限定アルゴリズム $BOSPA(x, F, temp, Path)$

Require: グラフ G 上の節点 x , 始点 s から点 x へ至る有向路に含まれている節点集合 F , 最短路の長さの暫定値 $temp$, 暫定の最短路 $Path$;

Ensure: 始点 s から終点 t への最短路 $Path$

```
1: for  $(x, y) \in E, y \notin F$  を満たす全ての有向路について do
2:   if  $y = t$  then
3:      $sum \leftarrow 0$ 
4:     for 始点  $s$  から終点  $t$  へ至り、 $F$  を含む有向路の各枝  $(u, v)$  do
5:        $sum \leftarrow sum + d(u, v)$ 
6:     end for
7:     if  $sum < temp$  then
8:        $temp \leftarrow sum$ 
9:        $Path \leftarrow F \cup \{y\}$ 
10:    end if
11:  else
12:     $k \leftarrow F.size$ 
13:     $l_k \leftarrow 0$ 
14:    for 始点  $s$  から点  $y$  へ至り、 $F \cup \{y\}$  を含む有向路の各枝  $(u, v)$  do
15:       $l_k \leftarrow l_k + d(u, v)$ 
16:    end for
17:    if  $l_k + NegaBranches[N - 1 - k] > temp$  then
18:      以降の探索を終端
19:    else
20:       $BOSPA(y, F \cup \{y\}, temp, Path)$ 
21:    end if
22:  end if
23: end for
24: return  $Path$ 
```

以下に今回導入した限定操作の妥当性を示す。まず、枝が入る点全て異なるという条件のもと（それらの枝が路を構成しているというかは考慮しない）で、負の重みを持つ枝の長さの総和を格納する配列 ($NegaBranches[]$) を考える。今回は単純な路を考えているので、最短路が持つ枝の本数は $N - 1$ 本である。また、グラフを探索する際、例えば始点 s から点 x まで k 本の枝で到達しているとき、点 x から終点 t に到達するには最大で $N - 1 - k$ 本の枝を選ぶことになる。 $NegaBranches[N - 1 - k]$ は路を構成している $N - 1 - k$ 本以下枝の長さの和の下界値となっているので、始点 s から点 x まで k 本の枝で到達しているときの路の長さを l_k として、 $l_k + NegaBranches[N - 1 - k] > (最$

最短路の長さの暫定値) となれば、「その部分問題の最適解が元の問題の最適解とはならないこと」になるので探索を終端できる。

6 課題 4

限定操作を実装し、グラフの節点数及び枝数に対して実行時間及び探索したノード数を調べ、表 2 を作成した。また、課題 2 の実装と比較したグラフ 7~12 を作成した。始点を 0, 終点を $n-1$ とした。ただし、課題 2 と同様、今回の実験では、節点数 n ($= 6, 7, \dots, 20$), 枝数 m ($2n \leq m \leq n(n-1)$) のグラフを順に調べるように設定したが、ある節点数 n' , 枝数 m' を調べた時の実行時間が 30 秒以上かかった場合、 $n = n' + 1$ ($m = 2n$) として計算を続けるようにした。用いたソースコードを付録のソースコード 2 に示す。

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

n	m	最短路の長さ	探索したノード数	実行時間
6	12	-49	9	0.00009200
6	13	-49	11	0.00011200
6	14	-49	11	0.00010900
6	15	-49	15	0.00014500
6	16	-49	15	0.00014500
6	17	-49	18	0.00017700
6	18	-49	25	0.00024200
6	19	-49	25	0.00023800
6	20	-49	25	0.00023600
6	21	-49	35	0.00032500
6	22	-49	43	0.00040500
6	23	-119	50	0.00037800
6	24	-126	65	0.00037900
6	25	-126	73	0.00044900
6	26	-126	73	0.00038100
6	27	-126	92	0.00047300
6	28	-126	102	0.00047900
6	29	-126	102	0.00047800
6	30	-126	118	0.00054000
7	14	-31	7	0.00007800
7	15	-31	7	0.00007700
7	16	-31	8	0.00007600
7	17	-31	8	0.00007900

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

7	18	-31	8	0.00007600
7	19	-31	20	0.00016400
7	20	-113	21	0.00015500
7	21	-141	27	0.00017700
7	22	-141	27	0.00017700
7	23	-141	30	0.00019600
7	24	-141	33	0.00020700
7	25	-141	41	0.00023900
7	26	-141	50	0.00027200
7	27	-141	50	0.00020900
7	28	-141	83	0.00033700
7	29	-141	102	0.00044700
7	30	-184	93	0.00035800
7	31	-184	113	0.00045100
7	32	-184	130	0.00052400
7	33	-184	142	0.00052300
7	34	-184	189	0.00069800
7	35	-184	189	0.00051400
7	36	-184	205	0.00053800
7	37	-192	238	0.00063300
7	38	-192	238	0.00063100
7	39	-192	238	0.00063300
7	40	-192	287	0.00070700
7	41	-192	287	0.00070700
7	42	-192	317	0.00070800
8	16	-76	8	0.00006200
8	17	-76	16	0.00008300
8	18	-76	21	0.00010700
8	19	-97	24	0.00010500
8	20	-97	24	0.00010400
8	21	-97	32	0.00014300
8	22	-97	32	0.00014200
8	23	-97	32	0.00014200
8	24	-97	36	0.00015400
8	25	-97	39	0.00015500
8	26	-134	46	0.00017300

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

8	27	-134	52	0.00019600
8	28	-134	58	0.00019000
8	29	-134	86	0.00028600
8	30	-134	95	0.00029200
8	31	-134	109	0.00032400
8	32	-145	147	0.00041300
8	33	-148	177	0.00051800
8	34	-148	177	0.00051400
8	35	-148	202	0.00058300
8	36	-148	223	0.00058700
8	37	-148	287	0.00071800
8	38	-148	312	0.00074300
8	39	-148	345	0.00078600
8	40	-148	345	0.00078600
8	41	-148	363	0.00078600
8	42	-148	363	0.00078200
8	43	-148	364	0.00077400
8	44	-148	393	0.00081500
8	45	-148	461	0.00096100
8	46	-173	500	0.00102300
8	47	-173	500	0.00097600
8	48	-173	537	0.00102000
8	49	-173	537	0.00101400
8	50	-173	753	0.00138200
8	51	-173	837	0.00153300
8	52	-173	837	0.00156100
8	53	-173	837	0.00147500
8	54	-173	915	0.00156800
8	55	-173	978	0.00159900
8	56	-216	1115	0.00188300
9	18	40	15	0.00010400
9	19	40	20	0.00009400
9	20	40	20	0.00009800
9	21	40	20	0.00011000
9	22	40	34	0.00018100
9	23	40	37	0.00018900

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

9	24	27	53	0.00026400
9	25	17	74	0.00036800
9	26	-40	106	0.00043700
9	27	-40	147	0.00064200
9	28	-40	192	0.00081300
9	29	-134	109	0.00035000
9	30	-134	109	0.00034900
9	31	-134	156	0.00051300
9	32	-134	203	0.00063500
9	33	-134	203	0.00063400
9	34	-134	230	0.00072700
9	35	-134	248	0.00075600
9	36	-134	282	0.00085500
9	37	-134	296	0.00087300
9	38	-134	296	0.00087200
9	39	-134	297	0.00087600
9	40	-134	395	0.00134000
9	41	-134	493	0.00164200
9	42	-134	541	0.00161500
9	43	-145	488	0.00131200
9	44	-145	508	0.00127500
9	45	-145	508	0.00127300
9	46	-145	509	0.00126700
9	47	-145	509	0.00126600
9	48	-145	528	0.00127100
9	49	-145	567	0.00137100
9	50	-145	630	0.00144800
9	51	-145	679	0.00152000
9	52	-145	764	0.00170600
9	53	-145	810	0.00175100
9	54	-145	886	0.00178600
9	55	-145	916	0.00196800
9	56	-145	987	0.00182200
9	57	-145	987	0.00192900
9	58	-145	987	0.00187400
9	59	-162	1720	0.00324100

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

9	60	-178	1665	0.00319800
9	61	-178	1665	0.00347300
9	62	-178	1792	0.00371900
9	63	-178	1849	0.00337400
9	64	-178	2251	0.00443200
9	65	-178	2251	0.00467800
9	66	-178	2640	0.00646800
9	67	-178	2640	0.00561500
9	68	-178	2986	0.00686900
9	69	-195	3478	0.00946300
9	70	-195	3478	0.01094300
9	71	-195	3707	0.01119200
9	72	-195	3822	0.00875900
10	20	-19	9	0.00006700
10	21	-19	10	0.00006700
10	22	-19	20	0.00012200
10	23	-72	32	0.00018400
10	24	-72	34	0.00031100
10	25	-85	42	0.00030300
10	26	-85	50	0.00036400
10	27	-85	78	0.00052100
10	28	-85	78	0.00047000
10	29	-85	103	0.00055600
10	30	-85	129	0.00072200
10	31	-85	170	0.00090800
10	32	-85	243	0.00112300
10	33	-85	265	0.00116600
10	34	-85	294	0.00124000
10	35	-85	294	0.00131500
10	36	-85	311	0.00133200
10	37	-85	311	0.00139400
10	38	-85	400	0.00189800
10	39	-85	458	0.00196000
10	40	-111	529	0.00223300
10	41	-157	639	0.00243400
10	42	-157	670	0.00251700

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

10	43	-157	670	0.00270300
10	44	-157	757	0.00320500
10	45	-157	828	0.00296100
10	46	-157	937	0.00330200
10	47	-157	937	0.00329300
10	48	-237	847	0.00301300
10	49	-237	942	0.00317300
10	50	-237	1087	0.00339200
10	51	-237	1368	0.00417800
10	52	-237	1392	0.00443000
10	53	-237	1568	0.00490500
10	54	-237	1568	0.00456100
10	55	-237	1600	0.00489900
10	56	-237	1600	0.00485300
10	57	-237	1777	0.00487300
10	58	-237	2195	0.00610800
10	59	-237	2587	0.00712600
10	60	-237	2746	0.00703400
10	61	-237	2856	0.00743800
10	62	-237	2856	0.00686700
10	63	-237	3038	0.00758200
10	64	-237	3237	0.00759500
10	65	-287	4160	0.00903100
10	66	-287	4569	0.00999300
10	67	-287	5258	0.01188100
10	68	-287	5611	0.01199400
10	69	-294	4003	0.00772700
10	70	-294	4156	0.00746600
10	71	-294	4633	0.00793300
10	72	-294	4633	0.00787700
10	73	-294	4633	0.00776700
10	74	-294	5350	0.00887500
10	75	-294	6056	0.01048900
10	76	-294	7046	0.01168900
10	77	-294	7361	0.01191600
10	78	-294	7601	0.01208500

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

10	79	-294	7601	0.01237500
10	80	-294	7602	0.01244600
10	81	-294	7602	0.01239400
10	82	-294	8018	0.01272000
10	83	-294	8524	0.01343000
10	84	-294	8884	0.01512700
10	85	-294	8997	0.01545900
10	86	-294	9539	0.01524900
10	87	-294	10254	0.01522400
10	88	-294	10539	0.01607900
10	89	-294	10539	0.01597600
10	90	-294	10819	0.01564000
11	22	-74	18	0.00013200
11	23	-100	24	0.00016500
11	24	-100	26	0.00018300
11	25	-151	39	0.00027100
11	26	-151	48	0.00031600
11	27	-151	48	0.00031500
11	28	-151	54	0.00031400
11	29	-151	66	0.00036000
11	30	-151	81	0.00044600
11	31	-151	81	0.00045200
11	32	-151	105	0.00054300
11	33	-151	106	0.00054600
11	34	-151	106	0.00055800
11	35	-151	228	0.00104700
11	36	-335	300	0.00123300
11	37	-335	355	0.00145700
11	38	-335	461	0.00184400
11	39	-335	497	0.00196300
11	40	-335	544	0.00184900
11	41	-335	544	0.00184300
11	42	-335	935	0.00342900
11	43	-335	1014	0.00343500
11	44	-335	1214	0.00421300
11	45	-335	1439	0.00495400

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

11	46	-335	1562	0.00513300
11	47	-335	2021	0.00674000
11	48	-335	2336	0.00760000
11	49	-335	2336	0.00781900
11	50	-335	2887	0.00920800
11	51	-335	2887	0.00952500
11	52	-335	3659	0.01273600
11	53	-335	4380	0.01419100
11	54	-335	5219	0.02119700
11	55	-335	6080	0.02268000
11	56	-335	6693	0.02052800
11	57	-335	7344	0.02262900
11	58	-335	7344	0.02208500
11	59	-335	8858	0.03494600
11	60	-335	10011	0.03884300
11	61	-335	11306	0.04230000
11	62	-335	12630	0.04331700
11	63	-335	14573	0.04567100
11	64	-335	15862	0.04707500
11	65	-335	16800	0.04503200
11	66	-335	16094	0.04054600
11	67	-335	16094	0.04415600
11	68	-335	18176	0.04682800
11	69	-335	18176	0.04933300
11	70	-335	19090	0.04857400
11	71	-335	19090	0.05811600
11	72	-335	21318	0.05420600
11	73	-335	24165	0.06234900
11	74	-335	26137	0.06450900
11	75	-335	25886	0.06475100
11	76	-335	29106	0.06920100
11	77	-335	34023	0.08149800
11	78	-335	35524	0.08632100
11	79	-335	36951	0.09281300
11	80	-335	39165	0.10284900
11	81	-335	43524	0.10502000

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

11	82	-335	49106	0.11316800
11	83	-335	49106	0.11713200
11	84	-335	49107	0.11295700
11	85	-335	54084	0.12789900
11	86	-335	54084	0.13954200
11	87	-335	59214	0.16428000
11	88	-335	59214	0.15921400
11	89	-335	66984	0.17546100
11	90	-335	66984	0.16831600
11	91	-367	69763	0.18654800
11	92	-367	74815	0.19383200
11	93	-367	78701	0.20329300
11	94	-367	83464	0.21585700
11	95	-367	83464	0.19295800
11	96	-367	85913	0.21509100
11	97	-367	90296	0.23510500
11	98	-367	100139	0.25127400
11	99	-367	112026	0.29714000
11	100	-367	112026	0.26838000
11	101	-367	124245	0.29105500
11	102	-367	133880	0.32932400
11	103	-367	139526	0.32721600
11	104	-367	150451	0.34579800
11	105	-367	155944	0.33774800
11	106	-367	163974	0.43052500
11	107	-367	176393	0.40826600
11	108	-367	176393	0.41620600
11	109	-367	180624	0.39234600
11	110	-367	180624	0.41725000
12	24	-207	11	0.00007400
12	25	-207	12	0.00008100
12	26	-207	12	0.00008000
12	27	-207	12	0.00008200
12	28	-207	12	0.00008000
12	29	-207	31	0.00020500
12	30	-207	39	0.00026000

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

12	31	-207	47	0.00029800
12	32	-207	57	0.00031900
12	33	-207	73	0.00038900
12	34	-207	80	0.00045400
12	35	-207	80	0.00048900
12	36	-207	126	0.00071300
12	37	-207	235	0.00128400
12	38	-207	235	0.00128500
12	39	-297	308	0.00175700
12	40	-297	362	0.00206100
12	41	-297	430	0.00209700
12	42	-297	551	0.00265400
12	43	-297	619	0.00296100
12	44	-297	977	0.00502600
12	45	-297	1128	0.00541300
12	46	-297	1222	0.00609300
12	47	-297	1222	0.00888000
12	48	-297	1604	0.00773600
12	49	-297	1604	0.00705200
12	50	-297	1689	0.00693900
12	51	-297	2057	0.00801100
12	52	-297	2184	0.00834600
12	53	-297	2555	0.01094000
12	54	-297	2843	0.01113300
12	55	-297	3813	0.01433300
12	56	-297	3813	0.01598500
12	57	-297	4103	0.02183200
12	58	-297	5304	0.02319000
12	59	-297	5832	0.02365200
12	60	-323	8791	0.03620500
12	61	-323	9961	0.03875200
12	62	-323	12201	0.05015400
12	63	-323	13619	0.05189000
12	64	-323	17316	0.06750200
12	65	-323	19509	0.07477600
12	66	-323	23640	0.08806200

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

12	67	-323	26900	0.10517800
12	68	-323	31454	0.12151000
12	69	-323	37133	0.13730600
12	70	-323	37133	0.14424200
12	71	-323	38307	0.14564700
12	72	-323	40618	0.15282500
12	73	-323	45937	0.18064800
12	74	-323	45937	0.18225500
12	75	-323	50685	0.19104000
12	76	-323	57647	0.21628200
12	77	-323	65556	0.26037400
12	78	-323	72198	0.27459500
12	79	-323	82867	0.29992700
12	80	-323	88068	0.32542700
12	81	-323	96446	0.37889800
12	82	-323	114302	0.42504000
12	83	-323	127389	0.46396900
12	84	-323	139200	0.50592400
12	85	-323	151309	0.55465400
12	86	-323	159313	0.55008900
12	87	-323	172311	0.60339500
12	88	-323	181353	0.63737900
12	89	-323	190246	0.65661400
12	90	-346	208772	0.69426800
12	91	-346	208772	0.70185900
12	92	-346	248624	0.82935600
12	93	-346	284928	1.11349300
12	94	-346	306621	1.15330900
12	95	-346	306621	1.09698900
12	96	-351	350868	1.21751500
12	97	-351	350868	1.17073500
12	98	-351	371090	1.31356700
12	99	-351	399652	1.46742900
12	100	-351	423955	1.55004100
12	101	-351	452968	1.45577300
12	102	-351	493966	1.62263000

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

12	103	-351	545175	2.04224200
12	104	-351	545175	1.89970600
12	105	-351	574880	1.98630500
12	106	-351	615046	2.10338700
12	107	-351	658944	2.51884700
12	108	-351	706960	2.59779200
12	109	-351	749922	2.47620700
12	110	-351	749922	2.53797100
12	111	-351	749922	2.83265600
12	112	-351	786494	2.61815700
12	113	-351	840184	2.75558600
12	114	-351	881653	2.88452600
12	115	-375	845436	2.64512500
12	116	-375	928459	2.98106500
12	117	-375	1008643	3.15603200
12	118	-375	1133867	3.46097300
12	119	-375	1133867	3.93451300
12	120	-375	1286675	4.04083500
12	121	-375	1461971	4.51395100
12	122	-375	1610513	4.95323000
12	123	-375	1734893	5.30733200
12	124	-385	1464951	4.16194200
12	125	-385	1522452	4.18505400
12	126	-385	1522452	4.16020500
12	127	-385	1731267	4.70182900
12	128	-385	1731267	4.74730400
12	129	-385	1933553	5.23910000
12	130	-396	1896936	4.97395000
12	131	-396	2063536	5.46470100
12	132	-396	2187553	5.71454400
13	26	-126	24	0.00022000
13	27	-126	31	0.00027000
13	28	-126	47	0.00040900
13	29	-126	47	0.00039300
13	30	-126	59	0.00046000
13	31	-126	91	0.00075100

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

13	32	-126	144	0.00118800
13	33	-126	179	0.00153100
13	34	-126	241	0.00207900
13	35	-166	420	0.00353500
13	36	-166	420	0.00342900
13	37	-166	518	0.00395400
13	38	-166	645	0.00471800
13	39	-166	870	0.00680000
13	40	-166	1201	0.00910900
13	41	-166	1340	0.00893100
13	42	-166	1500	0.01135300
13	43	-166	2035	0.01620900
13	44	-166	2221	0.01789200
13	45	-166	2795	0.02244300
13	46	-166	3319	0.02353400
13	47	-166	3825	0.02810600
13	48	-166	4390	0.03450800
13	49	-166	5207	0.04222700
13	50	-166	5207	0.03672700
13	51	-166	7371	0.04908600
13	52	-166	8621	0.06644600
13	53	-166	9914	0.06672900
13	54	-166	9914	0.06471600
13	55	-166	11329	0.08347800
13	56	-166	13404	0.08638000
13	57	-166	14813	0.09468300
13	58	-166	17975	0.12111400
13	59	-166	20024	0.13297600
13	60	-166	24169	0.15509300
13	61	-166	30067	0.20251300
13	62	-166	32637	0.21407200
13	63	-166	39177	0.25798900
13	64	-166	42971	0.27813700
13	65	-166	51917	0.32130300
13	66	-166	61216	0.39038200
13	67	-166	77606	0.49217100

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

13	68	-166	89086	0.56587700
13	69	-166	100271	0.63813500
13	70	-166	100271	0.65055500
13	71	-166	100272	0.65893100
13	72	-425	91237	0.52755800
13	73	-460	72960	0.36732100
13	74	-460	78369	0.38263400
13	75	-460	87312	0.42073600
13	76	-460	87312	0.41942800
13	77	-460	104288	0.51379600
13	78	-460	108744	0.50216200
13	79	-460	120321	0.52904000
13	80	-460	120321	0.54398100
13	81	-460	128733	0.57454100
13	82	-460	142221	0.62614200
13	83	-460	161499	0.69114400
13	84	-460	192658	0.82834600
13	85	-460	210261	0.91687900
13	86	-460	226485	0.97905100
13	87	-460	260153	1.12954100
13	88	-460	297852	1.26978900
13	89	-460	329855	1.39296400
13	90	-460	329855	1.38364900
13	91	-460	375865	1.57282100
13	92	-460	363985	1.48237600
13	93	-460	386028	1.57135900
13	94	-460	465592	1.89545700
13	95	-460	465592	1.90171600
13	96	-460	518739	2.05554100
13	97	-460	566089	2.27741700
13	98	-461	661752	2.68800100
13	99	-461	716188	2.87592100
13	100	-521	692580	2.65424200
13	101	-521	772163	3.02912100
13	102	-521	772163	3.02467600
13	103	-521	719040	2.68486400

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

13	104	-521	719040	2.67130000
13	105	-521	719040	2.67678400
13	106	-521	835952	3.16696300
13	107	-521	899046	3.30959800
13	108	-521	927744	3.28611900
13	109	-521	1084102	3.94955600
13	110	-521	1203174	4.30738600
13	111	-521	1203174	4.35139500
13	112	-521	1333257	4.74923600
13	113	-521	1428532	5.05813500
13	114	-541	1643987	5.79254400
13	115	-541	1687344	5.80769400
13	116	-541	1623113	5.48541900
13	117	-541	1822816	6.15577900
13	118	-541	2089862	7.11844100
13	119	-541	2089862	7.04311300
13	120	-541	2089862	7.03423300
13	121	-541	2231822	7.41944400
13	122	-541	2379898	7.75237000
13	123	-541	2470122	8.10429000
13	124	-541	2640865	8.61980900
13	125	-541	2848018	9.32203700
13	126	-541	3070507	9.92742600
13	127	-541	3132786	9.91614400
13	128	-541	3337706	10.99799400
13	129	-541	3337706	10.33247700
13	130	-541	3459758	10.59229800
13	131	-541	3459758	10.56371800
13	132	-541	4002012	12.25174300
13	133	-541	4212438	12.73625500
13	134	-541	4460498	13.29400700
13	135	-541	5013058	15.02181400
13	136	-541	5183234	15.32652300
13	137	-557	4925257	14.35015300
13	138	-557	5036518	14.34656100
13	139	-557	5364281	15.23992000

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

13	140	-557	5997599	16.91062700
13	141	-557	5997599	16.91319400
13	142	-557	6146953	16.90314700
13	143	-557	6378381	17.50120500
13	144	-557	7091624	19.38578200
13	145	-557	7553915	20.36209500
13	146	-557	8040428	21.64505900
13	147	-557	8397992	22.62096300
13	148	-557	8397992	22.46429800
13	149	-557	8599357	22.79058900
13	150	-561	9127897	24.58608700
13	151	-561	9127897	24.50244000
13	152	-561	10101422	27.16792000
13	153	-561	10514242	28.02263300
13	154	-561	10907005	28.94630600
13	155	-561	11222287	28.92363400
13	156	-561	11591864	29.04884800
14	28	52	14	0.00012400
14	29	14	21	0.00017600
14	30	14	33	0.00027300
14	31	14	39	0.00030000
14	32	14	60	0.00044100
14	33	14	74	0.00060500
14	34	-56	108	0.00087900
14	35	-70	117	0.00093200
14	36	-96	153	0.00119800
14	37	-96	241	0.00166600
14	38	-96	297	0.00209000
14	39	-205	304	0.00200900
14	40	-205	336	0.00227000
14	41	-205	336	0.00230200
14	42	-205	337	0.00238600
14	43	-205	367	0.00252600
14	44	-205	404	0.00295700
14	45	-253	574	0.00434800
14	46	-492	680	0.00456800

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

14	47	-492	848	0.00565800
14	48	-492	934	0.00651100
14	49	-492	1029	0.00635900
14	50	-492	1210	0.00770200
14	51	-492	1706	0.01155800
14	52	-492	2092	0.01457600
14	53	-492	3058	0.02132300
14	54	-492	3058	0.01923500
14	55	-492	3555	0.02138500
14	56	-492	4269	0.02403200
14	57	-492	4704	0.02610500
14	58	-492	5018	0.03047800
14	59	-492	7526	0.04361500
14	60	-520	7477	0.04341700
14	61	-520	9641	0.04908100
14	62	-520	10688	0.05714700
14	63	-520	11882	0.06463000
14	64	-520	11882	0.07008600
14	65	-520	14299	0.08193700
14	66	-520	14299	0.07280200
14	67	-520	16527	0.08442300
14	68	-520	18349	0.09025600
14	69	-520	21334	0.10579700
14	70	-520	21334	0.10549200
14	71	-520	21334	0.11335000
14	72	-520	25890	0.13175100
14	73	-525	27719	0.13582000
14	74	-525	32398	0.16377700
14	75	-525	35617	0.19180100
14	76	-525	37705	0.18062100
14	77	-525	37705	0.18277000
14	78	-525	52481	0.27456500
14	79	-525	61097	0.31601500
14	80	-525	69977	0.34831600
14	81	-525	69977	0.35177900
14	82	-525	77235	0.38961000

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

14	83	-525	85806	0.42764600
14	84	-525	95474	0.47341200
14	85	-525	112730	0.55023900
14	86	-525	124423	0.59746700
14	87	-525	124423	0.61596200
14	88	-525	148201	0.72139600
14	89	-525	168912	0.80305600
14	90	-525	214042	0.97174500
14	91	-582	209451	0.96267900
14	92	-582	242176	1.12709100
14	93	-582	251366	1.09146000
14	94	-582	279496	1.22501300
14	95	-582	320026	1.40653000
14	96	-582	346690	1.57971800
14	97	-582	346690	1.89785700
14	98	-582	346690	1.58093700
14	99	-582	355711	1.57191700
14	100	-582	417408	1.81919600
14	101	-582	471540	2.06120000
14	102	-582	510070	2.21939100
14	103	-582	602873	2.58542200
14	104	-582	669191	2.85359200
14	105	-582	815835	3.52987300
14	106	-582	853973	3.51688600
14	107	-582	933706	3.80420400
14	108	-607	883318	3.61735700
14	109	-607	1012601	4.21008400
14	110	-607	1012601	4.20692800
14	111	-607	1052720	4.39463300
14	112	-607	1063833	4.35644900
14	113	-607	1093850	4.36932300
14	114	-607	1255992	4.99031400
14	115	-607	1325645	5.19398000
14	116	-607	1644142	6.55692200
14	117	-607	1810613	7.18731900
14	118	-607	1965564	7.73898500

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

14	119	-607	1965564	7.74635200
14	120	-607	2135156	8.39369000
14	121	-607	2235678	8.75509800
14	122	-607	2235678	8.71393400
14	123	-607	2350507	9.18959900
14	124	-607	2626445	10.28502700
14	125	-607	2817943	10.94178900
14	126	-607	3072145	12.84091300
14	127	-607	3188884	11.92694800
14	128	-607	3504172	12.98026100
14	129	-607	3756581	13.67888600
14	130	-607	3927772	14.57829500
14	131	-607	3927772	14.71591600
14	132	-607	3927772	14.45039800
14	133	-607	4138742	15.04834600
14	134	-607	4397237	15.95696000
14	135	-607	4717815	16.95905900
14	136	-607	4903464	17.47203200
14	137	-607	5296100	18.77706500
14	138	-607	5296100	18.66901900
14	139	-607	5728579	20.04772600
14	140	-607	6297435	23.00494900
14	141	-607	6756932	24.01569800
14	142	-607	6756932	23.76270200
14	143	-607	7282011	25.25621500
14	144	-607	7447653	25.69548900
14	145	-607	7674443	25.77444600
14	146	-607	8480769	28.98427900
14	147	-607	8941164	30.20038100
15	30	-184	27	0.00028600
15	31	-184	34	0.00032700
15	32	-184	46	0.00043400
15	33	-184	57	0.00052000
15	34	-299	62	0.00054000
15	35	-299	90	0.00079200
15	36	-299	91	0.00077900

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

15	37	-299	91	0.00078200
15	38	-299	143	0.00121400
15	39	-299	206	0.00173600
15	40	-299	264	0.00222800
15	41	-299	298	0.00216300
15	42	-299	367	0.00272500
15	43	-299	495	0.00374300
15	44	-378	590	0.00468600
15	45	-378	590	0.00493500
15	46	-378	1076	0.00863200
15	47	-378	1477	0.01212500
15	48	-380	2031	0.01760000
15	49	-380	2527	0.01838600
15	50	-380	3200	0.02414400
15	51	-380	3799	0.03028500
15	52	-380	5440	0.04151500
15	53	-449	5723	0.04408000
15	54	-449	5723	0.04244600
15	55	-494	6601	0.05191200
15	56	-494	7035	0.05017700
15	57	-494	7035	0.04919900
15	58	-494	8999	0.05657200
15	59	-494	11122	0.07138300
15	60	-494	11122	0.07452400
15	61	-494	12911	0.08449100
15	62	-494	12821	0.07497300
15	63	-494	13801	0.08812000
15	64	-494	16532	0.09810100
15	65	-494	20982	0.13573100
15	66	-581	24521	0.14742000
15	67	-612	26767	0.16379000
15	68	-612	31349	0.19033600
15	69	-612	35249	0.21929000
15	70	-612	35249	0.22169700
15	71	-612	41152	0.24854300
15	72	-612	51670	0.31892500

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

15	73	-636	46189	0.26634000
15	74	-636	54618	0.32049200
15	75	-660	68542	0.39692100
15	76	-660	76803	0.44353100
15	77	-660	85123	0.49515100
15	78	-660	95455	0.55687900
15	79	-660	107859	0.58484700
15	80	-660	115791	0.64117300
15	81	-660	126170	0.69890000
15	82	-667	138544	0.75232100
15	83	-667	169299	0.91299300
15	84	-667	169299	0.90630900
15	85	-667	191336	1.00658700
15	86	-684	189362	0.95615600
15	87	-684	204334	1.03209700
15	88	-684	228986	1.15988600
15	89	-684	240518	1.13730800
15	90	-684	267243	1.26504900
15	91	-684	323453	1.53124400
15	92	-684	323453	1.51875000
15	93	-684	339025	1.57369800
15	94	-684	339025	1.59459700
15	95	-684	354105	1.63984500
15	96	-706	419929	1.95782500
15	97	-706	462362	2.13167600
15	98	-706	502783	2.30216300
15	99	-706	502783	2.31226900
15	100	-706	525969	2.41982200
15	101	-706	525969	2.38129800
15	102	-725	559135	2.50442500
15	103	-725	643804	2.89347700
15	104	-725	675019	2.98470400
15	105	-725	702557	3.10851800
15	106	-725	770183	3.36170400
15	107	-725	836288	3.69321800
15	108	-725	836288	3.64746000

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

15	109	-725	836288	3.63809000
15	110	-725	836288	3.65197300
15	111	-725	870529	3.76562700
15	112	-725	1014766	4.38649000
15	113	-725	1045844	4.38544200
15	114	-725	1146428	4.81472100
15	115	-725	1265281	5.30518000
15	116	-725	1337181	5.56054000
15	117	-725	1461294	6.00623100
15	118	-725	1657140	6.89009600
15	119	-725	1715759	7.00476100
15	120	-725	1858190	7.53418600
15	121	-725	1858190	7.57098400
15	122	-725	2166097	8.81750500
15	123	-725	2242032	9.09341000
15	124	-725	2511950	10.06493500
15	125	-725	2810994	11.28474500
15	126	-725	2993619	12.04830400
15	127	-725	3206152	12.80736700
15	128	-725	3301098	12.77037300
15	129	-725	3555191	13.75948200
15	130	-729	3599944	13.96063300
15	131	-729	3776495	14.64711300
15	132	-729	3961393	15.17569400
15	133	-729	4001347	15.41817200
15	134	-729	4001347	15.34104500
15	135	-729	4638649	17.72588500
15	136	-729	5096352	19.30440300
15	137	-729	5232820	19.71401700
15	138	-729	5758170	21.61998900
15	139	-729	6339558	23.70503100
15	140	-729	6714898	24.78109000
15	141	-729	7304973	26.84440700
15	142	-729	7701179	28.12371800
15	143	-729	8013607	29.84508800
15	144	-729	8414095	31.56271300

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

16	32	-72	15	0.00018600
16	33	-72	26	0.00027500
16	34	-258	36	0.00036400
16	35	-258	37	0.00035200
16	36	-258	37	0.00034700
16	37	-258	45	0.00036900
16	38	-258	54	0.00043100
16	39	-258	58	0.00047700
16	40	-258	114	0.00089800
16	41	-367	156	0.00123800
16	42	-367	205	0.00163700
16	43	-367	264	0.00211000
16	44	-423	305	0.00235300
16	45	-423	305	0.00211800
16	46	-423	372	0.00262100
16	47	-423	587	0.00439400
16	48	-423	642	0.00489800
16	49	-423	918	0.00677900
16	50	-423	1173	0.00859800
16	51	-423	1500	0.01183800
16	52	-423	1500	0.01224000
16	53	-423	1500	0.01212100
16	54	-423	2552	0.02059100
16	55	-423	3219	0.02591500
16	56	-423	4257	0.03537500
16	57	-423	5915	0.05063600
16	58	-423	8004	0.06863500
16	59	-423	9935	0.08359500
16	60	-423	11534	0.09974000
16	61	-423	13674	0.11171900
16	62	-423	16710	0.13395800
16	63	-535	12268	0.09348600
16	64	-535	14731	0.10787900
16	65	-535	17084	0.12356300
16	66	-535	17084	0.11892100
16	67	-535	17085	0.11656100

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

16	68	-535	17443	0.15735500
16	69	-535	21623	0.14995100
16	70	-535	26341	0.18852200
16	71	-535	26982	0.19364400
16	72	-535	28760	0.19356100
16	73	-535	33116	0.22229900
16	74	-535	40573	0.27007500
16	75	-535	42401	0.26596300
16	76	-535	48362	0.31761400
16	77	-535	54911	0.35058900
16	78	-535	54911	0.34624600
16	79	-535	71176	0.44176700
16	80	-535	71176	0.44834800
16	81	-535	78125	0.49206800
16	82	-535	94391	0.59241800
16	83	-535	115212	0.70951500
16	84	-544	134902	0.81330600
16	85	-544	145047	0.87802300
16	86	-544	160219	0.94395600
16	87	-544	169520	1.03460600
16	88	-544	183760	1.10076200
16	89	-544	211926	1.23161800
16	90	-544	261317	1.54317800
16	91	-544	328816	1.88371800
16	92	-567	365047	2.07906800
16	93	-567	365047	2.10939500
16	94	-567	387134	2.24841700
16	95	-567	461153	2.63598800
16	96	-567	499145	2.80878600
16	97	-567	499145	2.81348000
16	98	-567	539452	3.01259000
16	99	-567	564467	3.02565700
16	100	-567	591838	3.11591900
16	101	-567	610913	3.21410700
16	102	-567	622833	3.23076400
16	103	-567	647553	3.39318500

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

16	104	-567	675405	3.45190700
16	105	-567	675405	3.44361100
16	106	-567	729319	3.77097400
16	107	-567	790855	4.01705800
16	108	-567	857428	4.34229000
16	109	-567	953815	4.84011000
16	110	-567	1109152	5.59307100
16	111	-567	1167908	5.86688100
16	112	-567	1238859	6.15555700
16	113	-567	1510685	7.48363300
16	114	-567	1652150	8.13500600
16	115	-567	1763047	8.53795500
16	116	-590	1870806	8.99004300
16	117	-590	1870806	9.03009600
16	118	-590	1977592	9.36469500
16	119	-590	2139263	10.09682100
16	120	-590	2254162	10.66294600
16	121	-623	1819927	8.59997500
16	122	-623	1964912	9.51918000
16	123	-623	2178078	10.36802100
16	124	-623	2178078	10.17235800
16	125	-623	2178078	10.09625000
16	126	-623	2332426	10.67562300
16	127	-623	2451772	11.23830000
16	128	-623	2529545	11.59874500
16	129	-623	2529545	11.50568200
16	130	-623	3155763	14.48895800
16	131	-623	3456788	15.42912200
16	132	-664	1831452	7.99097700
16	133	-664	1870094	7.97818600
16	134	-664	2164981	9.30441600
16	135	-664	2246739	9.55905900
16	136	-664	2358366	10.08576000
16	137	-664	2501332	10.59832000
16	138	-664	2501332	10.56628700
16	139	-664	3395619	14.39352100

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

16	140	-664	3885370	16.51842100
16	141	-664	3938461	16.66108900
16	142	-664	4136522	17.22590200
16	143	-664	4253689	17.30666500
16	144	-664	4422127	17.92232800
16	145	-664	4542827	18.36758600
16	146	-664	5184185	20.91322600
16	147	-664	5377603	21.65319000
16	148	-664	5572594	22.35141200
16	149	-664	5895200	23.20168300
16	150	-664	6515753	25.67799000
16	151	-676	6877639	26.86863500
16	152	-676	7402707	28.96319300
16	153	-676	8898970	34.78941500
17	34	48	16	0.00016500
17	35	-107	24	0.00023700
17	36	-107	26	0.00025900
17	37	-107	26	0.00028200
17	38	-107	35	0.00034600
17	39	-107	35	0.00034500
17	40	-150	67	0.00064200
17	41	-150	67	0.00063800
17	42	-150	106	0.00113800
17	43	-150	106	0.00112800
17	44	-150	110	0.00143800
17	45	-150	238	0.00251500
17	46	-150	238	0.00243500
17	47	-150	419	0.00383000
17	48	-150	520	0.00504100
17	49	-150	520	0.00560600
17	50	-150	642	0.00587200
17	51	-150	770	0.00674400
17	52	-150	1168	0.01151300
17	53	-312	1575	0.01638900
17	54	-322	2065	0.01785300
17	55	-322	3086	0.03049400

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

17	56	-330	3610	0.03626900
17	57	-330	3610	0.03250600
17	58	-330	4220	0.03861500
17	59	-330	4220	0.03835100
17	60	-330	4220	0.03880900
17	61	-330	4220	0.04370200
17	62	-330	4983	0.04696500
17	63	-345	5906	0.05880900
17	64	-345	9181	0.08332700
17	65	-345	10763	0.09803200
17	66	-345	12845	0.11809700
17	67	-442	19986	0.18209500
17	68	-442	19986	0.18705600
17	69	-442	22681	0.20403900
17	70	-442	27046	0.23524500
17	71	-442	32548	0.29885600
17	72	-442	46934	0.41317500
17	73	-442	54623	0.49188300
17	74	-442	59492	0.53145700
17	75	-442	68512	0.58930600
17	76	-442	72008	0.63100500
17	77	-442	72008	0.62370800
17	78	-442	86614	0.72983000
17	79	-442	103338	0.89045800
17	80	-442	109387	0.87167500
17	81	-442	122844	0.96227000
17	82	-442	152312	1.20242400
17	83	-442	184213	1.44654700
17	84	-463	212270	1.66435700
17	85	-463	242176	1.90381300
17	86	-463	256775	1.97060800
17	87	-463	306469	2.36541500
17	88	-463	323264	2.34349200
17	89	-463	377192	2.73952100
17	90	-463	404981	2.95659500
17	91	-463	468665	3.38897600

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

17	92	-463	528604	3.80572100
17	93	-463	528605	3.86931300
17	94	-463	601292	4.13747300
17	95	-463	660141	4.53131200
17	96	-463	742153	5.06030900
17	97	-467	768952	4.93782000
17	98	-467	1128620	7.24589900
17	99	-467	1319428	8.40447100
17	100	-467	1558673	10.04221700
17	101	-467	1689280	10.83914700
17	102	-467	1804940	11.39379500
17	103	-467	1804940	11.37680200
17	104	-481	1781985	11.28184400
17	105	-481	1894147	11.77908800
17	106	-481	1894147	11.79109900
17	107	-481	2121261	13.24281200
17	108	-495	2185828	13.59319800
17	109	-495	2546281	15.83076100
17	110	-495	2961142	18.22144300
17	111	-495	3205004	19.54226100
17	112	-495	3599719	21.67130800
17	113	-495	3964059	23.79615100
17	114	-549	3493734	20.82791300
17	115	-549	3624499	21.46922900
17	116	-549	3746065	22.04988400
17	117	-549	3948510	23.24446200
17	118	-549	4276833	24.96670300
17	119	-549	4276833	25.06416900
17	120	-563	4835352	28.31835300
17	121	-563	5314879	30.87458700
18	36	294	18	0.00027600
18	37	294	19	0.00029100
18	38	294	19	0.00029100
18	39	159	26	0.00038400
18	40	159	26	0.00038300
18	41	159	26	0.00038500

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

18	42	51	90	0.00113900
18	43	51	125	0.00175700
18	44	51	125	0.00143900
18	45	51	157	0.00181300
18	46	18	198	0.00226600
18	47	18	282	0.00304100
18	48	18	337	0.00322600
18	49	18	516	0.00474500
18	50	18	758	0.00743900
18	51	18	838	0.00877000
18	52	18	1035	0.01315300
18	53	18	1035	0.01714600
18	54	-309	1843	0.01901200
18	55	-309	1953	0.02120200
18	56	-342	3106	0.03450500
18	57	-342	3512	0.03883800
18	58	-377	4628	0.04955000
18	59	-377	6361	0.06901600
18	60	-377	7405	0.07820200
18	61	-377	9693	0.10635100
18	62	-377	11735	0.12880400
18	63	-560	15031	0.15476400
18	64	-560	15302	0.15884600
18	65	-560	15302	0.14849700
18	66	-560	19045	0.19358800
18	67	-560	23920	0.26173300
18	68	-560	26654	0.27333700
18	69	-560	36388	0.35370900
18	70	-570	42949	0.41554300
18	71	-570	55521	0.57218300
18	72	-600	65005	0.63717100
18	73	-600	75003	0.73348400
18	74	-600	96589	0.96200200
18	75	-600	101197	0.96117000
18	76	-600	105496	0.94903200
18	77	-600	121192	1.08599500

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

18	78	-600	131119	1.16159900
18	79	-600	145037	1.28457600
18	80	-600	211997	1.91239200
18	81	-600	257989	2.30322200
18	82	-600	305214	2.65174000
18	83	-600	354893	3.06922800
18	84	-658	367007	3.09264600
18	85	-696	450088	3.77134500
18	86	-696	555494	4.64666600
18	87	-696	689192	5.73789100
18	88	-696	799636	6.68204900
18	89	-696	915435	7.65079400
18	90	-696	1023492	8.91616100
18	91	-696	1023492	8.68680600
18	92	-696	1236619	10.50128000
18	93	-696	1312029	11.26363500
18	94	-710	1486344	12.38054000
18	95	-710	1690988	14.30321800
18	96	-710	1690988	13.90970000
18	97	-710	1845914	15.16453900
18	98	-710	2227347	18.23724300
18	99	-710	2670328	21.96782500
18	100	-710	3078704	25.24501800
18	101	-710	3425625	28.26339600
18	102	-734	3828973	31.18248600
19	38	243	35	0.00045700
19	39	243	51	0.00067000
19	40	-21	65	0.00075500
19	41	-21	88	0.00113500
19	42	-21	137	0.00156700
19	43	-21	137	0.00146300
19	44	-21	197	0.00212900
19	45	-21	263	0.00341100
19	46	-21	263	0.00306200
19	47	-88	564	0.00575700
19	48	-88	651	0.00740700

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

19	49	-88	712	0.00853700
19	50	-88	847	0.01041700
19	51	-88	1097	0.01450500
19	52	-88	1408	0.01850600
19	53	-157	2311	0.02773900
19	54	-359	2338	0.02263800
19	55	-359	2529	0.02449000
19	56	-448	2758	0.02793200
19	57	-511	3349	0.03443200
19	58	-511	3654	0.03593700
19	59	-511	4418	0.04746600
19	60	-597	4284	0.03808100
19	61	-597	5075	0.04405700
19	62	-597	5572	0.04650200
19	63	-597	8109	0.06653500
19	64	-597	8109	0.07750900
19	65	-678	13244	0.11868000
19	66	-678	15667	0.13868300
19	67	-678	17810	0.15559100
19	68	-678	21933	0.18321800
19	69	-678	29099	0.25400700
19	70	-678	34844	0.31601500
19	71	-678	44846	0.40032300
19	72	-678	56375	0.50393700
19	73	-678	63250	0.54806200
19	74	-678	72586	0.62106600
19	75	-678	81535	0.71278900
19	76	-678	100734	0.88475500
19	77	-678	107774	0.95445600
19	78	-678	122253	1.06362600
19	79	-678	122253	1.04964400
19	80	-678	137138	1.20785300
19	81	-678	145407	1.26498000
19	82	-678	181370	1.58155100
19	83	-678	200565	1.73585800
19	84	-678	235669	2.01427700

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

19	85	-678	275441	2.30577300
19	86	-678	307866	2.56158800
19	87	-678	360381	3.01790000
19	88	-678	374227	3.08477900
19	89	-678	437001	3.59110600
19	90	-678	450960	3.57074700
19	91	-678	513036	4.07688300
19	92	-678	590251	4.67091600
19	93	-678	760837	6.01624200
19	94	-678	760837	6.00623800
19	95	-678	1179654	9.23616200
19	96	-710	1330966	10.40090600
19	97	-710	1591131	12.22049800
19	98	-710	1804884	13.82537700
19	99	-710	2523135	19.05255700
19	100	-710	2845505	21.26445700
19	101	-710	3004995	22.26260100
19	102	-710	3235024	23.93622700
19	103	-713	3545821	26.13712500
19	104	-713	3804535	27.97479500
19	105	-713	4098191	29.90662700
19	106	-713	4775539	34.60994100
20	40	38	20	0.00032000
20	41	38	36	0.00053000
20	42	38	44	0.00062800
20	43	38	54	0.00077100
20	44	38	71	0.00097500
20	45	18	83	0.00115100
20	46	18	83	0.00117200
20	47	18	115	0.00161800
20	48	18	151	0.00214600
20	49	18	241	0.00345000
20	50	18	340	0.00486400
20	51	-70	396	0.00522400
20	52	-141	523	0.00713900
20	53	-141	523	0.00728800

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

20	54	-141	906	0.01302600
20	55	-239	1338	0.01906800
20	56	-239	1762	0.02509900
20	57	-239	1900	0.02708100
20	58	-239	2965	0.03530400
20	59	-285	3594	0.04525900
20	60	-285	5404	0.06685300
20	61	-285	6890	0.08735500
20	62	-285	9292	0.11513500
20	63	-285	9292	0.11181400
20	64	-285	12003	0.15472400
20	65	-285	12003	0.14016400
20	66	-285	13377	0.16644300
20	67	-308	17600	0.21095800
20	68	-308	19199	0.24055900
20	69	-308	24551	0.31426900
20	70	-308	32939	0.39572300
20	71	-308	41027	0.50524100
20	72	-380	45837	0.56550200
20	73	-380	51531	0.60769400
20	74	-380	70597	0.84776200
20	75	-380	84626	0.99478400
20	76	-380	95514	1.14861200
20	77	-380	95514	1.13552200
20	78	-380	95514	1.13301200
20	79	-380	124660	1.46232000
20	80	-380	148614	1.75357100
20	81	-380	192079	2.24458600
20	82	-380	242909	2.79338800
20	83	-380	242909	2.80581400
20	84	-380	286606	3.31273500
20	85	-435	427352	4.95014500
20	86	-435	594563	6.93319700
20	87	-435	664306	7.71091800
20	88	-435	920988	10.54385300
20	89	-435	816249	8.50494900

表 2: 分枝限定アルゴリズムを使った、節点数 n , 枝数 m , 最短路の長さ, 探索したノード数, 実行時間の関係

20	90	-435	1000449	10.37546000
20	91	-435	1096688	11.23089200
20	92	-435	1314190	13.35906300
20	93	-435	1592381	16.27099400
20	94	-475	1843815	18.49597100
20	95	-475	2351631	22.87356000
20	96	-475	2351631	22.86288900
20	97	-475	3057433	29.34639900
20	98	-475	3365696	31.95201700

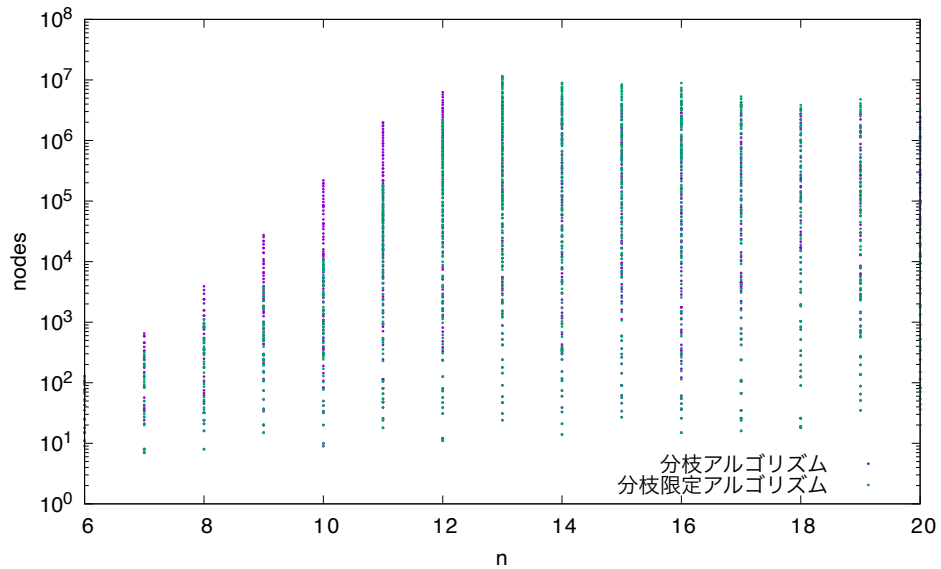


図 7: 分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と探索したノード数 (nodes) の関係, 横軸は $6 \leq n \leq 20$, 縦軸は $1 \leq \text{nodes} \leq 10^8$ (対数スケール)

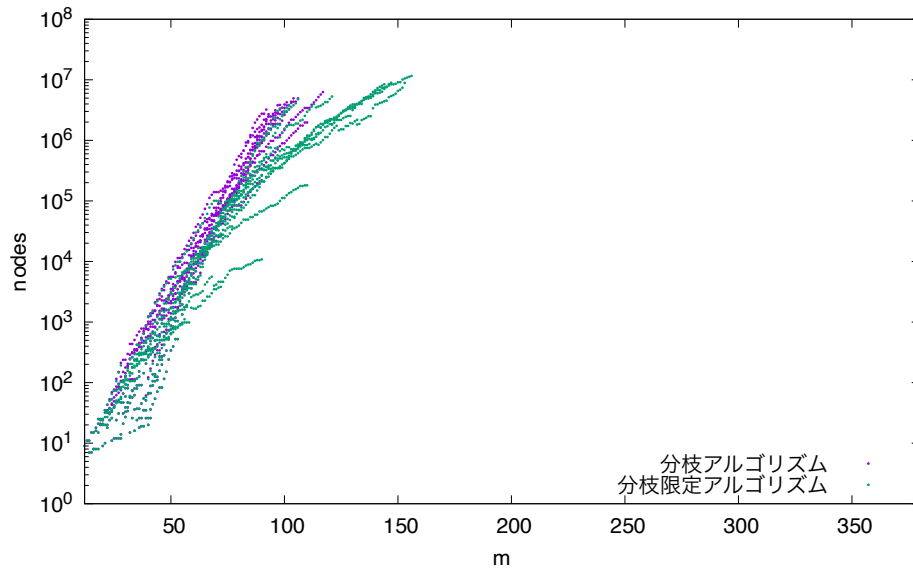


図 8: 分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムを用いた場合, 枝数 m と探索したノード数 (nodes) の関係, 横軸は $12 \leq m \leq 380$, 縦軸は $1 \leq \text{nodes} \leq 10^8$ (対数スケール)

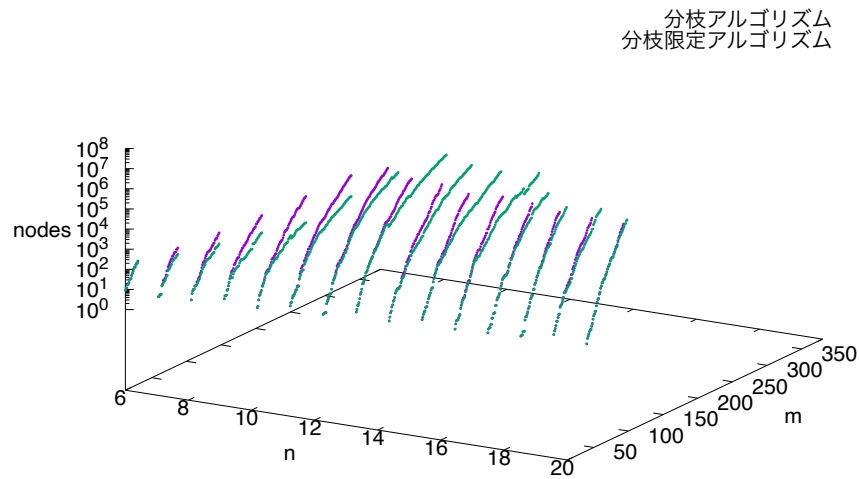


図 9: 分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と枝数 m と探索したノード数 (nodes) の関係, 軸の範囲は $6 \leq n \leq 20$, $12 \leq m \leq 380$, $1 \leq \text{nodes} \leq 10^8$ (対数スケール)

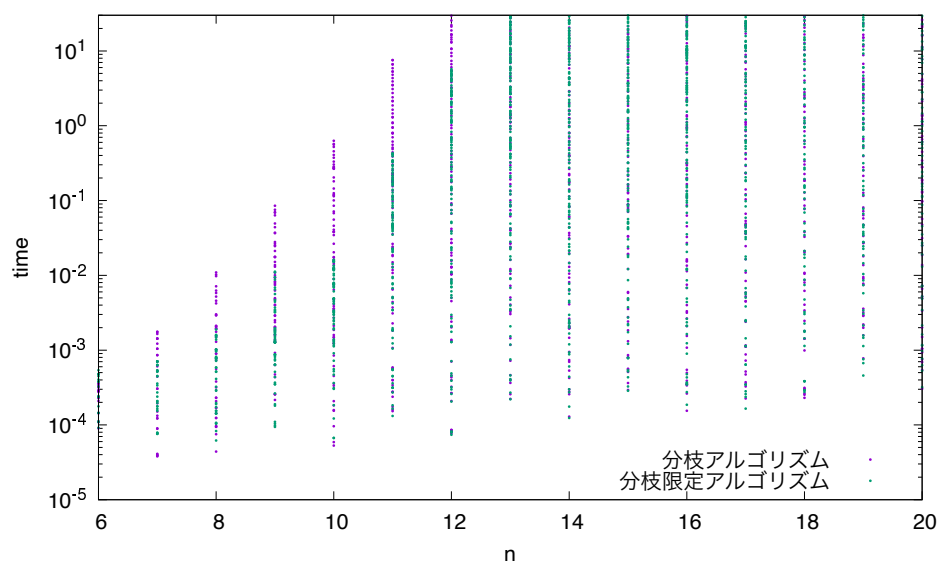


図 10: 分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と実行時間 (time, 単位は s) の関係, 横軸は $6 \leq n \leq 20$, 縦軸は $10^{-5} \leq \text{time} \leq 30$ (対数スケール)

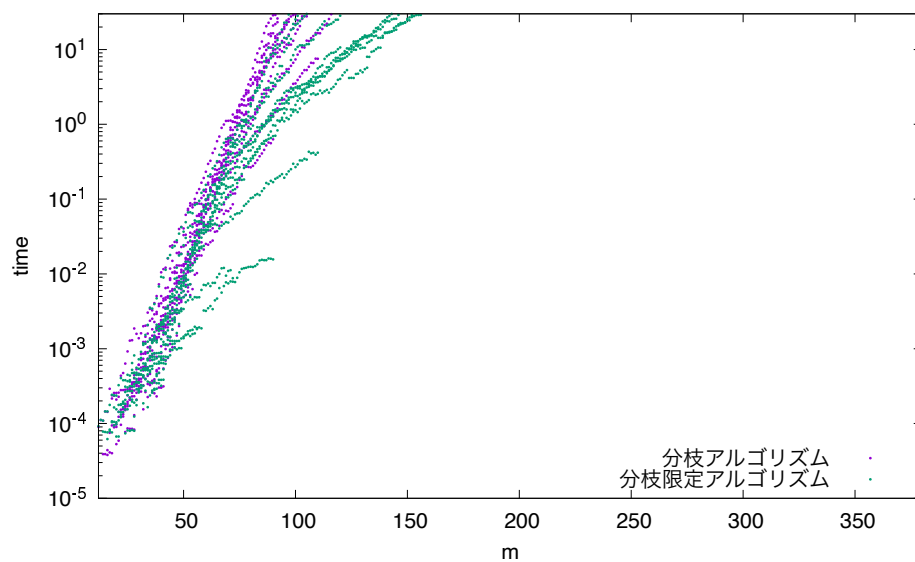


図 11: 分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムを用いた場合, 枝数 m と実行時間 (time, 単位は s) の関係, 横軸は $12 \leq m \leq 380$, 縦軸は $10^{-5} \leq \text{time} \leq 30$ (対数スケール)

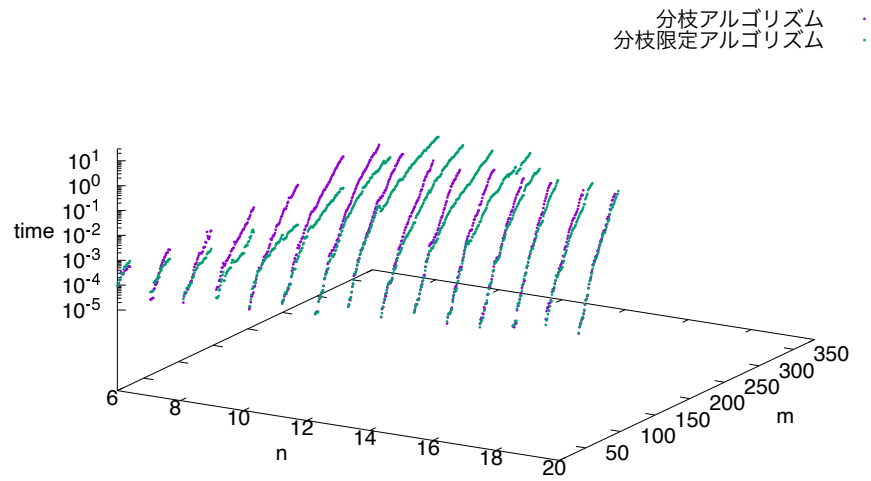


図 12: 分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムを用いた場合, 節点数 n と枝数 m と実行時間 (time, 単位は s) の関係, 軸の範囲は $6 \leq n \leq 20$, $12 \leq m \leq 380$, $10^{-5} \leq \text{time} \leq 30$ (対数スケール)

7 考察

まず、今回の実験では、節点数 n ($= 6, 7, \dots, 20$), 枝数 m ($2n \leq m \leq n(n-1)$) のグラフを順に調べるように設定したが、ある節点数 n' , 枝数 m' を調べた時の実行時間が 30 秒以上かかった場合、 $n = n' + 1$ ($m = 2n$) として計算を続けるようにしたことに注意しながら考察を進める。

表 1 を見ても分かるように、 $n \leq 12$ では $m = n(n-1)$ まで計算されていない。よって、分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムの比較では主に $n = 12$ までを比較する。

課題 2,4 いずれの場合も節点数 n , 枝数 m が大きくなり、よりスケールの大い最短経路問題になれば、探索するノード数や実行時間が急激に大きくなっていくことが分かる。また、分枝アルゴリズムと分枝限定アルゴリズムでは、同じ問題でもそれを解くのに探索したノード数や実行時間は分枝限定アルゴリズムの方が小さくなっている。

8 総括

今回の実験より、NP-困難な問題であっても、問題のスケールが小さければ解くことができることが分かった。問題のスケールが大きいと PC を用いても計算にかなりの時間がかかることにも体面した。今回は組合せ最適化の一例として最短経路問題を扱い、分枝アルゴリズムより分枝限定アルゴリズムの方が優れたアプローチであることが分かった。このように、多くの場面において現れる組合せ最適化問題を解くには、問題の構造を上手く捉え、より効率よく解くことが大事だと感じた。

9 付録

ソースコード 1: C++を用いて、最短路問題を解くプログラム

```
1 //数理工学実験テーマ7 //課題2
2
3 #include <fstream>
4 #include <iostream>
5 #include <iomanip>
6 #include <string>
7 #include <algorithm>
8 #include <vector>
9 #include <utility>
10 #include <tuple>
11 #include <map>
12 #include <queue>
13 #include <stack>
14 #include <deque>
15 #include <bitset>
16 #include <math.h>
17 #include <numeric>
18 #include <time.h>
19 using namespace std;
20 #define suf 100000000 //十分大きい数
21
22 //探索済か判定する配列
23 vector<bool> searching;
24
25 //課題1で設定した分枝アルゴリズムを実装(
    nodecount は探索したノード数を数える変数)
26 void SPA(int x, vector<int> &F, vector<vector<int>> &G, int n
    , int &temp, int64_t &nodecount)
27 {
28     for (int y = 0; y < n; y++)
29     {
30         //グラフ上に枝(x,y)が存在するかを判定
31         if (G[x][y] != suf)
32         {
33             // y が探索済かを判定
34             if (searching[y])
35             {
36                 nodecount++;
37                 if (y == n - 1)
38                 {
39                     int sum = 0;
40                     for (int i = 0; i < F.size() - 1; i++)
```

```

41         {
42             sum += G[F[i]][F[i + 1]];
43         }
44         sum += G[F[F.size() - 1]][n - 1];
45         if (sum < temp)
46             temp = sum;
47     }
48     else
49     {
50         F.push_back(y);
51         // y を探索済にする
52         searching[y] = false;
53         SPA(y, F, G, n, temp, nodecount);
54     }
55 }
56 }
57 }
58 //探索できる点がないので、1つ前の節点に戻る
59 searching[x] = true;
60 F.pop_back();
61 }
62
63 int main()
64 {
65     for (int n = 6; n <= 20; n++) //調べるnの範囲を指定
66     {
67         for (int m = n * 2; m <= n * (n - 1); m++)
68         {
69             string a = to_string(m);
70             string b = to_string(n);
71             ifstream fin("n_" + b + "/" + n_ + b + "_m_" + a +
72                         ".txt");
73             int check_n, check_m;
74             fin >> check_n >> check_m;
75             vector<vector<int>> G(n, vector<int>(n, suf));
76             for (int i = 0; i < m; i++)
77             {
78                 int from, to, length;
79                 fin >> from >> to >> length;
80                 G[from][to] = length;
81             }
82             //全ての節点を未探索にする
83             searching.assign(n, true);
84             //節点集合
85             vector<int> F;
86             // F に始点 s を格納

```

```

86         F.push_back(0);
87         searching[0] = false;
88
89         //探索前の最短路の長さの暫定値を十分大きく設定して
            おく
90         int temp = suf;
91
92         //探索したノード数を数える
93         int64_t nodecount = 0;
94
95         double starttime = clock();
96         SPA(0, F, G, n, temp, nodecount);
97         double endtime = clock();
98         double time = (endtime - starttime) /
            CLOCKS_PER_SEC;
99
100        cout << n << " " << m << " ";
101        cout << temp << " ";
102        cout << nodecount << " ";
103        cout << fixed << setprecision(8) << time << endl
            ;
104
105        //計算に 30s 以上かかった場合次の n を調べる
106        if (time > 30.0)
107        {
108            break;
109        }
110    }
111 }
112 }

```

ソースコード 2: C++を用いて、最短路問題を解くプログラム

```

1 //数理工学実験テーマ7 //課題 4
2
3 #include <fstream>
4 #include <iostream>
5 #include <iomanip>
6 #include <string>
7 #include <algorithm>
8 #include <vector>
9 #include <utility>
10 #include <tuple>
11 #include <map>
12 #include <queue>
13 #include <stack>

```

```

14 #include <deque>
15 #include <bitset>
16 #include <math.h>
17 #include <numeric>
18 #include <time.h>
19 using namespace std;
20 #define suf 100000000 //十分大きい数
21
22 //探索済か判定する配列
23 vector<bool> searching;
24
25 //負の重みを持つ枝の長さの和を格納する配列
26 vector<int> NegaBranches;
27
28 //課題 3で設定した分枝限定アルゴリズムを実装(
    nodecount は探索したノード数を数える変数)
29 void BOSPA(int x, vector<int> &F, vector<vector<int>>> G, int
    n, int &temp, int64_t &nodecount)
30 {
31     for (int y = 0; y < n; y++)
32     {
33         //グラフ上に枝 (x,y)が存在するかを判定
34         if (G[x][y] != suf)
35         {
36             // y が探索済かを判定
37             if (searching[y])
38             {
39                 nodecount++;
40                 if (y == n - 1)
41                 {
42                     int sum = 0;
43                     for (int i = 0; i < F.size() - 1; i++)
44                     {
45                         sum += G[F[i]][F[i + 1]];
46                     }
47                     sum += G[F[F.size() - 1]][n - 1];
48                     if (sum < temp)
49                         temp = sum;
50                 }
51             }
52             else
53             {
54                 //限定操作
55                 int sum = 0;
56                 for (int i = 0; i < F.size() - 1; i++)
57                 {
58                     sum += G[F[i]][F[i + 1]];

```

```

58         }
59         sum += G[F[F.size() - 1]][y];
60         int edge = n - 1 - F.size();
61         int NegaBranch = NegaBranches[edge];
62         if (sum + NegaBranch > temp)
63         {
64             //終端
65             continue;
66         }
67         else
68         {
69             //継続
70             F.push_back(y);
71             // y を探索済にする
72             searching[y] = false;
73             BOSPA(y, F, G, n, temp, nodecount);
74         }
75     }
76 }
77 }
78 }
79 //探索できる点がないので、1つ前の節点に戻る
80 searching[x] = true;
81 F.pop_back();
82 }
83
84 int main()
85 {
86     for (int n = 6; n <= 20; n++) //調べるnの範囲を指定
87     {
88         for (int m = n * 2; m <= n * (n - 1); m++)
89         {
90             string a = to_string(m);
91             string b = to_string(n);
92             ifstream fin("n_" + b + "/" + n + "_m_" + a +
93                         ".txt");
94             int check_n, check_m;
95             fin >> check_n >> check_m;
96             vector<vector<int>> G(n, vector<int>(n, suf));
97             for (int i = 0; i < m; i++)
98             {
99                 int from, to, length;
100                 fin >> from >> to >> length;
101                 G[from][to] = length;
102             }

```

```

103     vector<int> MinLength(n, suf);
104     NegaBranches.assign(n, 0);
105     for (int j = 1; j < n; j++)
106     {
107         for (int i = 0; i < n - 1; i++)
108         {
109             MinLength[j] = min(MinLength[j], G[i][j
110                                 ]));
111         }
112     }
113     sort(MinLength.begin(), MinLength.end());
114     int sum = 0;
115     for (int i = 0; i < n; i++)
116     {
117         NegaBranches[i] = sum;
118         if (MinLength[i] < 0)
119             sum += MinLength[i];
120     }
121     //全ての節点を未探索にする
122     searching.assign(n, true);
123     //節点集合
124     vector<int> F;
125     // F に始点 s を格納
126     F.push_back(0);
127     searching[0] = false;
128
129     //探索前の最短路の長さの暫定値を十分大きく設定して
        おく
130     int temp = suf;
131
132     //探索したノード数を数える
133     int64_t nodecount = 0;
134
135     double starttime = clock();
136     BOSPA(0, F, G, n, temp, nodecount);
137     double endtime = clock();
138     double time = (endtime - starttime) /
        CLOCKS_PER_SEC;
139
140     cout << n << " " << m << " ";
141     cout << temp << " ";
142     cout << nodecount << " ";
143     cout << fixed << setprecision(8) << time << endl
        ;
144

```

```
145         //計算に 30s 以上かかった場合次の n を調べる
146         if (time > 30.0)
147         {
148             break;
149         }
150     }
151 }
152 }
```

10 参考文献

- 数理工学実験テキスト
- Cloud LaTeX
<https://cloudlatex.io>
- LaTeX コマンド一覧 (リスト)
<https://medemanabu.net/latex/latex-commands-list/>
- LaTeX にソースコードを【美しく】貼る方法
<https://ta-b0.hateblo.jp/entry/2020/08/13/001223>
- 【LaTeX】箇条書きの方法について徹底解説
<https://mathlandscape.com/latex-enum/>
- TeX 論文にアルゴリズム (疑似コード) を書く方法
<https://qiita.com/jirojiro/items/0ae13aac9112a804f8d5>
- Tex ページをまたぐ表を作る方法
<https://hiru926.hatenadiary.org/entry/20080702/1215008433>
- Tables Generator (.txt ファイルから LaTeX の表を生成)
https://www.tablesgenerator.com/latex_tables