

KÄHLER モジュライ空間と三角圏の安定性条件

金沢篤

1. はじめに

Kähler 多様体は複素構造とシンプレクティック構造という 2 つの構造を持つので 2 つのモジュライを考えることができる。前者のモジュライ空間は射影曲線に関する Riemann の仕事を創始とする長い研究の歴史があり、小平–Spencer、倉西らの仕事によって精緻な一般論が確立されている。一方で、後者のモジュライ空間はシンプレクティック商の理論などに関係していて基本的であるが、その (大域的構造の) 重要性が認識されたのはミラー対称性の発見後である。誤解を招く用語だが、シンプレクティック構造を Kähler 構造と呼ぶのが慣例なので以下ではそれを踏襲する。

本稿では主に Calabi–Yau 多様体の Kähler 構造のモジュライ空間について論じる。Calabi–Yau 多様体に着目する理由は、ミラー対称性を指導原理として、構築すべき理論の見通しが良くなるからである。実際、Calabi–Yau 多様体の複素構造のモジュライ空間に関しては、Riemann 面のそれと同等に美しい理論が知られている。そして、その双対となる理論が Kähler 構造のモジュライ空間上に存在することをミラー対称性は予想する。

一方で、素朴な意味での Kähler 構造のモジュライ空間は不十分であることが、ミラー対称性や双有理幾何の研究の過程で明らかになってきた。実際、複数の空間の (複素化された) Kähler 錐を張り合わせることで、興味深く意味のある「Kähler 構造のモジュライ空間」が構成されることが観察されている。これらの観察を動機の一つとして三角圏の安定性条件の空間が導入され、代数幾何において重要な研究対象となってきた。この空間は Hodge 理論における周期領域の Kähler 類似とも見做せ、Kähler 構造のモジュライ空間の良い近似を与えられられる。

本稿の目標は、三角圏の安定性条件の理論を援用して、複素構造のモジュライ空間上の Weil–Petersson 幾何の双対となるべき理論を Kähler 構造のモジュライ空間上に構築することである。

2. CALABI–YAU 多様体と複素モジュライ空間

2.1. Calabi–Yau 多様体. Calabi–Yau 多様体 X とはコンパクトな Kähler 多様体 X で標準束が自明 $K_X = 0$ 、かつ $0 < i < n := \dim X$ について $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ なるものとする。Calabi–Yau 多様体は、その性質の美しさで多くの数学者を魅了し続けてきた楕円曲線や K3 曲面の高次元化である。条件 $K_X = 0$ より X 上には正則体積形式が定数倍を除いて一意に存在する。この意味で X は正則に向きづけられた Kähler 多様体とも思える。

Calabi–Yau 多様体 X は Kähler 多様体であるので、Riemann 構造、複素構造、Kähler 構造 (シンプレクティック構造) の 3 つの構造が整合的な形で存

在している。Kähler 性より、3 つのうち 2 つを決めれば残りの 1 つが決まるので、Calabi–Yau 多様体は本質的に 2 つの構造で決まることがわかる。本稿では複素構造と Kähler 構造に着目する。前者のモジュライ空間を単に複素モジュライ空間と呼び、 $\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ と書く。後者のモジュライ空間を単に Kähler モジュライ空間と呼び、 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ と書くが、これは暫定的なもので詳細は次章以降で解説する。

2.2. 複素モジュライ空間. 小平–Spencer 理論によると、一般に複素多様体 X の複素モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ の接空間は $H^1(X, T_X)$ と同一視される。一方で、Calabi–Yau 多様体に対しては倉西写像 $\mathfrak{Kur} : H^1(X, T_X) \rightarrow H^2(X, T_X)$ が零写像となり、複素構造の変形に障害がない (Bogomolov–Tian–Todorov の定理)。またその定義と Serre 双対から $H^0(X, TX) = \overline{H^1(X, \mathcal{O}_X)}^\vee = 0$ が従い、 X の正則自己同型群は離散的であることも分かる。以上を纏めると次の定理を得る。

定理 2.1. *Calabi–Yau 多様体 X の複素モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ は複素多様体 (軌道体) となり、その接空間は $H^1(X, TX)$ と同一視される。*

3 次元 Calabi–Yau 多様体 X の場合が特別である。交代双線型形式 $q : H^3(X, \mathbb{C}) \times H^3(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^6(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ を用いて周期領域

$$\mathfrak{D} = \{[\Omega] \in \mathbb{P}(H^3(X, \mathbb{C})) \mid q(\Omega, \Omega) = 0, \sqrt{-1}q(\Omega, \bar{\Omega}) > 0\}$$

が定義される。 \mathfrak{D} には標準的な正則接触形式 $\theta = q(d\Omega, \Omega)$ が存在し、Griffith 横断性の帰結として周期写像 $\text{per} : \mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X) \rightarrow \mathfrak{D}/G$ は Legendre 埋め込みとなる。

2.3. Weil–Petersson 幾何. 普遍族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ を考えたいが、存在するかどうかは一般に不明である。本稿では記号の節約のため、必要であれば局所普遍族を考えることにして、族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ を考察する。実際、以下の議論は全て局所的である。

$\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ 上のベクトル束 $H = \mathcal{R}^n \pi_* \underline{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)}$ には重さ n の Hodge フィルトレーション $F^n \subset F^{n-1} \subset \dots \subset F^0 = H$ が自然に付随し、Calabi–Yau 条件より $F^n \rightarrow \mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ は真空束と呼ばれる直線束になる。真空束の局所切断 $\{\Omega_z \neq 0\}_z$ に対して、Weil–Petersson ポテンシャルを

$$K^B(z) = -\log(\sqrt{-1}^{n^2} \int_{X_z} \Omega_z \wedge \bar{\Omega}_z)$$

で与え、Weil–Petersson 計量をその複素 Hessian $\frac{\sqrt{-1}}{2} \partial \bar{\partial} K^B$ として定義する。ポテンシャルは局所切断の取り方に依存するが、計量は局所切断の取り方に依存せず、 $\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X)$ 上の Kähler 計量を定める [17]。

例 2.2 (楕円曲線). 標準的な楕円曲線族 $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{H}$ を考える ($\tau \in \mathbb{H}$ のファイバーは $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$)。真空束の自然な大域切断 dz を用いて

$$K^B(\tau) = -\log(\sqrt{-1} \int_{E_\tau} dz \wedge \bar{dz}) = -\log(2\Im(\tau))$$

従って、Weil–Petersson 計量は Poincare 計量 $\frac{dx dy}{\Im(\tau)^2}$ に他ならない。

例 2.3 (K3 曲面). *Torelli* の定理より格子偏極 K3 曲面の複素モジュライ空間は周期領域 (IV 型対称領域) の商空間 \mathcal{D}/G と同一視される。この場合に *Weil–Petersson* 計量は \mathcal{D}/G の *Bergman* 計量と一致する。

3. KÄHLER モジュライ空間

3.1. 複素化された Kähler 構造. Calabi–Yau 多様体 X に対して複素化された Kähler 構造を考えるのが自然であることをミラー対称性は示唆する。これは複素化された Kähler 錐

$$\mathcal{C}_X = \{\omega = B + \sqrt{-1}\kappa \mid \kappa \text{ Kähler 類}\} \subset H^{1,1}(X)$$

の元で与えられる。ここで $B \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ は B -場と呼ばれる。直感的には \mathcal{C}_X は Siegel 上半空間の類似である。例えば楕円曲線 E の場合は $H^2(E, \mathbb{C}) = H^{1,1}(E) \cong \mathbb{C}$ であるから、 \mathcal{C}_E は上半平面 \mathbb{H} と同型である。

3.2. 双有理幾何と導来圏. Kähler モジュライ空間は双有理幾何や幾何学的不変式論と深い関係がある。基本例として \mathbb{C}^\times が $\mathbb{C}^4_{(x,y,z,w)}$ に重さ $(1, 1, -1, -1)$ で作用する状況を考える。指標に関して $\text{char}(\mathbb{C}^\times)_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{g}(S^1)^\vee \cong \mathbb{R}_\theta$ である。安定性 (指標) の取り方に依存して 2 つの幾何学的商

$$\mathbb{C}^4 //_{\theta > 0} \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^4 \setminus \{z = w = 0\} / \mathbb{C}^\times \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}$$

$$\mathbb{C}^4 //_{\theta < 0} \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^4 \setminus \{x = y = 0\} / \mathbb{C}^\times \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}$$

が構成され、これらは互いにコニフォールド特異点上のフロップを与える。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 //_{\theta > 0} \mathbb{C}^\times & \xleftrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbb{C}^4 //_{\theta < 0} \mathbb{C}^\times \\ & \searrow \quad \quad \swarrow & \\ & \text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y, Z, W]/(XY - ZW)) & \end{array}$$

複素化された Kähler 錐はそれぞれ

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}^4 //_{\theta > 0} \mathbb{C}^\times} = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\mathbb{R}_{\theta > 0} \cong \mathbb{H}$$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}^4 //_{\theta < 0} \mathbb{C}^\times} = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\mathbb{R}_{\theta < 0} \cong \mathbb{H}$$

で与えられる。これらの境界から原点を除いたもの $\mathcal{C}_{con} := \mathbb{R} \setminus 0$ をコニフォールド特異点の退化した Kähler 構造に対応すると考えると、これらを貼り合わせて

$$\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}^4 //_{\theta > 0} \mathbb{C}^\times} \cup \mathcal{C}_{con} \cup \mathcal{C}_{\mathbb{C}^4 //_{\theta < 0} \mathbb{C}^\times}$$

を得るが、これは超弦理論における「Kähler モジュライ空間」と一致する。この様に、複数の空間の Kähler 構造が自然に張り合う状況がしばしば現れる。また Kähler 構造を調べる際に安定性の空間が自然に現れることも重要な観察である (実際、 \mathcal{C}_{con} は非可換代数加群の圏から構成される三角圏の安定性条件に対応する)。

実は双有理な 3 次元 Calabi–Yau 多様体の Kähler 錐は互いに張り合って可動錐と呼ばれる錐をなす。これは \mathcal{C}_X が張り合うことを意味し、Kähler モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ は \mathcal{C}_X を局所座標とするより大きな空間であるべきことを示唆する。もっと強く X と導来同値な Calabi–Yau 多様体 Y の \mathcal{C}_Y も

$\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ の局所座標を与えることをミラー対称性は予想する。つまり Kähler

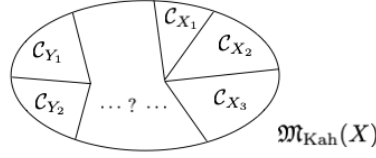


FIGURE 1. X_i と Y_j は導来同値だが双有理ではない

モジュライ空間の大域的構造を知るには、双有理なものだけでなく、導来同値といった幾何学的な繋がりがよく分からない Calabi–Yau 多様体たち全体を見る必要がある。ここに Kähler モジュライ空間の研究の難しさと面白さがある。次章で解説する安定性条件の空間はこれらの予想と観察を極めて上手く取り込んだ数学的対象である。

4. 三角圏の安定性条件

4.1. 三角圏の安定性条件. 本稿では三角圏 \mathcal{D} は \mathbb{C} -線形かつ有限型であるとする。 \mathcal{D} の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$ 上の双線型形式、Euler 形式 χ を

$$\chi(E, F) := \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F[i])$$

で定義する。Euler 形式に関する数値的自明部分群 $K(\mathcal{D})^{\perp}$ で $K(\mathcal{D})$ を割って得られる自由 Abel 群 $\mathcal{N}(\mathcal{D}) := K(\mathcal{D})/K(\mathcal{D})^{\perp}$ を数値的 Grothendieck 群と呼ぶ。以下では $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ が有限階数であることを仮定する。

三角圏の安定性条件は Bridgeland[3] によって導入されたものであるが、その起源は Douglas による D プレーンの II-安定性の研究 [6] にある。

定義 4.1 (Bridgeland[3], Kontsevich–Soibelman[11]). 三角圏 \mathcal{D} の (数値的) 安定性条件 $\sigma = (\mathcal{Z}, \mathcal{P})$ とは

- 群準同型 $\mathcal{Z} : \mathcal{N}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ (中心電荷),
- \mathcal{D} の充満加法部分圏族 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ (半安定対象の集合)

の組であり、以下を満たすものである。

- (1) $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ であれば、 $\mathcal{Z}(E) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{\sqrt{-1}\pi\phi}$ が成立 (ϕ を対象 E の位相、 $|\mathcal{Z}(E)|$ を質量という)。
- (2) $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ が成立。
- (3) $\phi_1 > \phi_2$ かつ $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ であれば、 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A_1, A_2) = 0$ が成立。
- (4) 任意の $0 \neq E \in \mathcal{D}$ について、完全三角形の列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E_{k-1} \longrightarrow E_k = E \\ & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \downarrow \\ & & A_1 & & A_2 & & A_k \end{array}$$

であって、 $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ かつ $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_k$ なるものが存在。

- (5) 定数 $C > 0$ と $\mathcal{N}(\mathcal{D})_{\mathbb{R}}$ 上のノルム $\|\ast\|$ が存在して、任意の半安定対象 E について $\|E\| \leq C|\mathcal{Z}(E)|$ が成立する。

三角圏 \mathcal{D} の安定性条件全体のなす集合を $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ と書き、安定性条件の空間と呼ぶ。Bridgeland は $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ 上に適当な位相を導入し、その位相に関して忘却写像

$$\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{D}), \mathbb{C}), \quad \sigma = (\mathcal{Z}, \mathcal{P}) \mapsto \mathcal{Z}$$

が局所同相であることを示した [3]。これより $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ は局所的に \mathbb{C} -線型空間 $\text{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ の開部分集合と同一視されることから、自然に複素多様体の構造を持つ。また各点での接空間が標準的に $\text{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ と同一視されることにも注意しておく。

$\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ には、三角圏 \mathcal{D} の自己同値群 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ が左から、 $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$ が右から作用する。より具体的には、 $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$ は中心電荷 $\mathcal{Z} : \mathcal{N}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ には値域の線形変換として、半安定対象の集合 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ にはそれと整合的な位相変換として作用する。しばしば部分群 $\mathbb{C} \subset \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$ に作用を制限する。

4.2. Kähler モジュライ空間と安定性条件の空間。次の予想は周期写像の Kähler 類似であり、安定性条件の空間と Kähler モジュライ空間の関係を与える。

予想 4.2 (Bridgeland). Calabi–Yau 多様体 X と (接続層の) 導来圏 $\mathcal{D}_X = \text{D}^b\text{Coh}(X)$ に対して、埋め込み

$$\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X) \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_X) \backslash \text{Stab}(\mathcal{D}_X) / \mathbb{C}$$

が存在する。

現在のところ Kähler モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ の一般的な定義は存在しない (個別の例では定義ができる場合がある) が、予想 4.2 は $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ の数学的定義の 1 つの可能性を示唆している。

直感的には、中心電荷 $\mathcal{Z} : K(X) \rightarrow \mathbb{C}$ は Hodge 理論における周期積分の、右辺は周期領域の Kähler 類似である。実際、Calabi–Yau 多様体 X のミラー多様体 X^\vee を考え、導来圏 $\text{D}^b\text{Coh}(X)$ と深谷圏 $\text{D}^b\text{Fuk}(X^\vee)$ の三角圏の同値 $\text{D}^b\text{Coh}(X) \cong \text{D}^b\text{Fuk}(X^\vee)$ を予想する圏論的ミラー対称性を鑑みれば、下図のような関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} \text{D}^b\text{Coh}(X) & \xleftarrow{\cong} & \text{D}^b\text{Fuk}(X^\vee) & & \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{\mathcal{Z}} & K(X) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X^\vee, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_\Omega} \mathbb{C} \end{array}$$

ここで縦の矢印は脱圏化を、上の両矢印は三角圏の同値を、下の両矢印は (捻れ部分を見捨てる) 格子の同型を表す。 $\text{D}^b\text{Fuk}(X^\vee)$ に欠けている複素構造の情報が周期積分で補われていると見做すと、 $\text{D}^b\text{Coh}(X)$ に欠けている Kähler 構造の情報は中心電荷で与えられていると考えるのが自然である。

4.3. 中心電荷と向井形式. X を非特異射影多様体とする. K3 曲面に関する向井の仕事 [14] を動機として、Căldăraru は $H^*(X, \mathbb{C})$ 上の向井形式を次で定義した [5]:

$$\langle v, w \rangle_{\text{Muk}} := \int_X e^{c_1(X)/2} v^\vee w$$

ただし $v = \sum_j v_j \in \oplus_j H^j(X, \mathbb{C})$ に対して向井双対が $v^\vee = \sum_j \sqrt{-1}^j v_j$ で与えられる. 任意の $\Lambda \in H^*(X, \mathbb{C})$ であって $\Lambda^\vee = -\Lambda$ なるものに対して、対象 $E \in \mathcal{D}_X = \text{D}^b\text{Coh}(X)$ の捻り向井ベクトルを

$$v_\Lambda(E) := \text{ch}(E) e^{\sqrt{-1}\Lambda} \sqrt{\text{Td}_X}$$

で定義する (通常の向井ベクトルは $\Lambda = 0$). Hirzebruch–Riemann–Roch の定理より、捻り向井形式は Euler 形式と整合的であることが分かる:

$$\chi(E, F) = \int_X \text{ch}(E^\vee) \text{ch}(F) \text{Td}_X = \langle v_\Lambda(E), v_\Lambda(F) \rangle_{\text{Muk}}$$

量子コホモロジーの整構造と整合的な Λ は入谷 [8]、Katzarkov–Kontsevich–Pantev [9] によって発見された. まず複素解析において基本的な公式

$$\frac{z}{1 - e^{-z}} = e^{z/2} \frac{z/2}{\sinh(z/2)} = e^{z/2} \Gamma(1 + \frac{z}{2\pi\sqrt{-1}}) \Gamma(1 - \frac{z}{2\pi\sqrt{-1}}),$$

を思い出す. 左辺の冪級数は Todd 類を誘導することを念頭において、Todd 類の平方根を以下の様に導出する. z を実変数として

$$\sqrt{\frac{z}{1-z}} e^{\sqrt{-1}\Lambda(z)} = e^{z/4} \Gamma(1 + \frac{z}{2\pi\sqrt{-1}})$$

を $\Lambda(z)$ に関して解く

$$\Lambda(z) = \Im(\log \Gamma(1 + \frac{z}{2\pi\sqrt{-1}})) = \frac{\gamma z}{2\pi} + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \frac{\zeta(2j+1)}{2j+1} \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2j+1}$$

ここで γ は Euler 定数である. $\Lambda(z)$ を用いて対数的 Gamma 類と呼ばれる加法的特性類 Λ_X を定義する. $\Lambda(z)$ に z は奇数冪しか現れないので $\Lambda_X^\vee = -\Lambda_X$ である. Calabi–Yau 多様体の場合、具体的に

$$\Lambda_X = -\frac{\zeta(3)}{(2\pi)^3} c_3(X) + \frac{\zeta(5)}{(2\pi)^5} (c_5(X) - c_2(X)c_3(X)) + \dots$$

となる. 曲面の場合は $\Lambda_X = 0$ であるので捻りは存在しない. 3 次元 Calabi–Yau 多様体の場合には補正は初項で与えられ、これは B-モデルの周期積分の計算において現れる値と一致する. 対数的 Gamma 類 Λ_X に付随する $E \in \mathcal{D}_X$ の捻り向井ベクトルを $v_X(E)$ と書く.

Kähler モジュライ $\omega = B + \sqrt{-1}\kappa \in H^2(X, \mathbb{C})$ を考え、 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\omega}$ とおく. 量子積 $*$ を用いて、量子指数関数 $\exp_*(\omega)$ が

$$\exp_*(\omega) := 1 + \omega + \frac{1}{2!} \omega * \omega + \frac{1}{3!} \omega * \omega * \omega + \dots$$

で定義される。全ての曲線 $C \subset X$ に関して $\int_C \Im(\omega) \gg 0$ なる ω の極限を大
体積極限と呼ぶ。基本的予想は、大体積極限において、 \mathcal{D}_X の安定性条件で中
心電荷が

$$(1) \quad \mathcal{Z}(E) = - \langle \exp_*(\omega), v_X(E) \rangle_{\text{Muk}}$$

なるものが存在するという予想である。大体積極限において、中心電荷 (1) の
漸近展開は

$$\mathcal{Z}(E) \sim - \int_X e^{-\omega} v_X(E) + O(q)$$

この初項を中心電荷とする安定性条件の存在は、K3 曲面や Abel 曲面 [4]、3
次元 Abel 多様体 [2, 13] を含む多くの重要な例について示されている。

4.4. 安定性条件と Weil-Petersson 幾何. $n \in \mathbb{N}$ を固定し、 n 次元 Calabi-Yau
三角圏 \mathcal{D} を考える。つまり対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して、関手的な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F, E[n])^\vee$$

が存在する。これより n が偶数 (奇数) の場合には Euler 形式が (反) 対称とな
る。 \mathcal{D} の典型例は n 次元 Calabi-Yau 多様体の接続層の導来圏である。

次に数値的 Grothendieck 群 $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ の基底 $\{E_i\}$ を 1 つ取り、双線型形式
 $\mathfrak{b} : \text{Hom}(\mathcal{N}(\mathcal{D}), \mathbb{C})^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{Z}_1 \otimes \mathcal{Z}_2 \mapsto \mathfrak{b}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) := \sum \chi^{i,j} \mathcal{Z}_1(E_i) \mathcal{Z}_2(E_j)$$

で定義する。ここで $(\chi^{i,j}) := (\chi(E_i, E_j))^{-1}$ である。双線型形式 \mathfrak{b} は基底の取
り方に依存しないことが簡単に分かる。また n が奇数であれば \mathfrak{b} は反対称と
なり、 $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ 上の正則シンプレクティック構造を誘導する。

Hodge-Riemann の双線型関係式を背景に、 $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ の部分空間

$$\text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}) := \{\sigma = (\mathcal{Z}, \mathcal{P}) \mid \mathfrak{b}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = 0, (\sqrt{-1})^{-n} \mathfrak{b}(\mathcal{Z}, \overline{\mathcal{Z}}) > 0\}$$

を考える (n が奇数であれば $\mathfrak{b}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = 0$ は自明)。すると $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ の右 \mathbb{C} -
作用は $\text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D})$ を保つ。この時 \mathbb{C} -トーサー $\text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D})/\mathbb{C}$ の
局所切断 $s = (\mathcal{Z}_{\bar{\sigma}}, \mathcal{P}_{\bar{\sigma}})$ に対して

$$K^A(\bar{\sigma}) := -\log \left((\sqrt{-1})^{-n} \mathfrak{b}(\mathcal{Z}_{\bar{\sigma}}, \overline{\mathcal{Z}_{\bar{\sigma}}}) \right)$$

は $\text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D})/\mathbb{C}$ 上の局所 C^∞ -関数となるが、これを (安定性条件の空間上
の) Weil-Petersson ポテンシャルと呼ぶことにする。

命題 4.3 (Fan-K-Yau [7]). 複素 $\text{Hessian}^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} \partial \bar{\partial} K^A$ は局所切断 s の取り方に
依存しない。更に自己同値群 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ の作用で不変であり、商空間

$$\text{Aut}(\mathcal{D}) \backslash \text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D})/\mathbb{C}$$

の特異点を除いた部分で矛盾なく定義される。

Calabi-Yau 多様体 X とその (接続層の) 導来圏 $\mathcal{D}_X = \text{D}^b \text{Coh}(X)$ を考える。
 $\text{Aut}(\mathcal{D}_X) \backslash \text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_X)/\mathbb{C}$ が X の Kähler モジュライ空間と見做せる時 (予想
4.2 の埋め込みが同型)、 $\frac{\sqrt{-1}}{2} \partial \bar{\partial} K^A$ が複素モジュライ空間上の Weil-Petersson

計量のミラー対応物となるように K^A の定義が与えられている。記号 K^A と K^B はそれぞれ A-模型と B-模型に対応している。

5. 具体例の計算

5.1. 楕円曲線. 楕円曲線 X の導来圏 $\mathcal{D}_X = \mathrm{D}^b\mathrm{Coh}(X)$ を考える。 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_X)$ 上の右 $\widetilde{\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})}$ -作用は自由かつ推移的であり

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_X) = \mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_X) \cong \widetilde{\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{H}$$

なる同型が存在する [3]。更に商空間は

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_X) \backslash \mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_X) / \mathbb{C} \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$$

となり、実際これは X の Kähler モジュライ空間と一致する。 $\tau \in \mathbb{H}$ における (正規化された) 中心電荷は $\mathcal{Z}(E) = -\deg(E) + \tau \mathrm{rank}(E)$ で与えられる。 $\mathcal{N}(\mathcal{D}_X)$ の基底 $\{\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_p\}$ を用いれば、Weil–Petersson ポテンシャルは

$$\begin{aligned} K^A(\tau) &= -\log \left((\sqrt{-1})^{-1} (\mathcal{Z}(\mathcal{O}_p) \overline{\mathcal{Z}(\mathcal{O}_X)} - \mathcal{Z}(\mathcal{O}_X) \overline{\mathcal{Z}(\mathcal{O}_p)}) \right) \\ &= -\log(\Im(\tau)) - \log 2 \end{aligned}$$

従って Kähler モジュライ空間 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ の Weil–Petersson 計量は Poincaré 計量と一致し、ミラー対称性と整合的である。

5.2. 楕円曲線の自己直積. 楕円曲線 $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ ($\tau \in \mathbb{H}$) の自己直積 $A := E_\tau \times E_\tau$ となる Abel 曲面 A を考察する。 A の Néron–Severi 格子は $\mathrm{NS}(A) = H^2(A, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(A)$ で定義される。

導来圏 $\mathcal{D}_A = \mathrm{D}^b\mathrm{Coh}(A)$ の自己同値は向井格子 $H^*(A, \mathbb{Z})$ の Hodge 同型を誘導し、群準同型 $\delta : \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_A) \rightarrow \mathrm{Aut}H^*(A, \mathbb{Z})$ が定義される (Orlov[15])。この核空間を $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{D}_A) := \mathrm{Ker}(\delta)$ と書く。

A の正則体積形式を $\Omega \in H^2(A, \mathbb{C})$ とすると、部分格子

$$\mathcal{N}(A) := H^*(A, \mathbb{Z}) \cap \Omega^\perp \subset H^*(A, \mathbb{C})$$

は $\mathcal{N}(\mathcal{D}_A) = H^0(A, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{NS}(A) \oplus H^4(A, \mathbb{Z})$ と同一視される。実際、複素モジュライ $\tau \in \mathbb{H}$ が一般的であれば $\mathcal{N}(\mathcal{D}_A) \cong U^{\oplus 2} \oplus \langle 2 \rangle$ である。ここで U は双曲格子、 $\langle 2 \rangle$ は Gram 行列が (2) なる階数 1 の格子を表す。

次に $[\Omega] \in \mathbb{P}H^*(A, \mathbb{C})$ を保つ Hodge 同型のなす部分群を $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}^+ H^*(A) \subset \mathrm{Aut}^+ H^*(A)$ とする。この様な Hodge 同型は $\mathcal{N}(\mathcal{D}_A)$ の同型を誘導し、指数 2 の部分群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}^+ H^*(A) \subset \mathrm{Aut}\mathcal{N}(\mathcal{D}_A)$ となる。

自己同値 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_A)$ が Calabi–Yau であるとは、それが誘導する Hodge 同型 $\delta(\Phi)$ が $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}^+ H^*(A)$ に属する時を言う (Bayer–Bridgeland[1])。Calabi–Yau 自己同値のなす部分群を $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}(\mathcal{D}_A) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_A)$ と記すと、短完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(\mathcal{D}_A) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}(\mathcal{D}_A) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}^+ H^*(A) \longrightarrow 1$$

が存在する。

$\text{Pic}^0(A)$ の元での捻りと A の自己同型で $H^*(A, \mathbb{Z})$ に自明に作用するもので生成される部分群 $\text{Aut}_{\text{tri}}^0(\mathcal{D}_A) \subset \text{Aut}^0(\mathcal{D}_A)$ は安定性条件の空間 $\text{Stab}(\mathcal{D}_A)$ に自明に作用することから商群

$$\overline{\text{Aut}}_{\text{CY}}(\mathcal{D}_A) := \text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}_A) / \text{Aut}_{\text{tri}}^0(\mathcal{D}_A)$$

を考えるのが自然である。 $\overline{\text{Aut}}_{\text{CY}}(\mathcal{D}_A)$ は $\text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_A)$ に作用し、短完全列

$$1 \longrightarrow \langle [2] \rangle \longrightarrow \overline{\text{Aut}}_{\text{CY}}(\mathcal{D}_A) \longrightarrow \text{Aut}_{\text{CY}}^+ H^*(A) \longrightarrow 1$$

が存在する。以上の準備の元で次が成立する ($\langle [2] \rangle \cong \mathbb{Z}$ の左作用と \mathbb{C} の 2π 回転右作用が同じことに注意)。

定理 5.1 (Fan–K–Yau [7]). 標準的な同型

$$\overline{\text{Aut}}_{\text{CY}}(\mathcal{D}_A) \backslash \text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_A) / \mathbb{C}^\times \cong \text{Sp}(4, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_2$$

が存在する。

左辺が A の Kähler モジュライ空間となるべき空間である。Siegel モジュラー多様体 $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_2$ には Bergman 計量と呼ばれる完備な Kähler–Einstein 計量が存在する。

一般に、次数 g の Siegel 上半空間 \mathfrak{H}_g の Bergman 核 $K_{\text{Ber}} : \mathfrak{H}_g \times \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$K_{\text{Ber}}(M, N) = -\text{tr}(\log(-\sqrt{-1}(M - \overline{N})))$$

で定まり、Bergman ポテンシャル

$$K_{\text{Ber}}(M) := K_{\text{Ber}}(M, M) = -\text{tr}(\log(2\Im(M)))$$

の複素 Hessian として Bergman 計量を与えられる [16]。

定理 5.2 (Fan–K–Yau [7]). 定理 5.1 の同型を通して、Kähler モジュライ空間上の Weil–Petersson 計量は Siegel モジュラー多様体 $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_2$ 上の Bergman 計量と一致する。

5.3. 分裂 Abel 曲面. 前章の例の変種として、分裂 Abel 曲面 A を考える。つまり、2 つの楕円曲線 E_{τ_1}, E_{τ_2} が存在して $A \cong E_{\tau_1} \times E_{\tau_2}$ なる状況を考える。 E_{τ_1}, E_{τ_2} が一般的であれば、分裂は一意的で

$$\text{Aut}_{\text{CY}}^+ H^*(A) \cong O^+(U^{\oplus 2}) \cong \text{P}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \text{SL}(2, \mathbb{Z})) \rtimes \mathbb{Z}_2$$

が成立する。ただし $\text{P}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ は $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の対合 $(A, B) \mapsto (-A, -B)$ による商群を表し、半直積構造は \mathbb{Z}_2 の生成元が $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の直積成分を交換することで与えられている。

定理 5.3 (Fan–K–Yau [7]). 標準的な同型

$$\overline{\text{Aut}}_{\text{CY}}(\mathcal{D}_A) \backslash \text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_A) / \mathbb{C}^\times \cong \text{P}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \text{SL}(2, \mathbb{Z})) \rtimes \mathbb{Z}_2 \backslash (\mathbb{H} \times \mathbb{H})$$

が存在し、左辺の Weil–Petersson 計量は右辺の Bergman 計量と一致する。

以上 2 つの Abel 曲面の計算例はミラー対称性と整合的である。実際、楕円曲線の自己直積のミラー多様体は主偏極 Abel 曲面であり、その複素モジュライ空間は Siegel モジュラー多様体 $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_2$ である。分裂 Abel 曲面は自己ミラー多様体である。

5.4. 5 次超曲面 Calabi–Yau 多様体. 5 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^4$ に関しては、中心電荷が (1) の形の安定性条件が大体積極限の近傍で存在する (Li[12])。 H を超平面類、 $\tau \in \mathbb{H}$ として、 Kähler モジュライ $\tau H \in H^2(X, \mathbb{C})$ を考える。 X の種数 0 次数 d の Gromov–Witten 不変量を N_d^X と記すと

$$\exp_*(\tau H) = 1 + \tau H + \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{1}{5} \sum_{d \geq 1} N_d d^3 q^d\right) H^2 + \frac{\tau^3}{6} \left(1 + \frac{1}{5} \sum_{d \geq 1} N_d d^3 q^d\right) H^3$$

なる表示を持つ。ここで $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ であり、量子積

$$H * H = \Phi(q) H^2 = \frac{1}{5} \left(5 + \sum_{d \geq 1} N_d^X q^d d^3\right) H^2$$

を用いた。中心電荷は、 X の位相的 Euler 数 $\chi(X)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(E) &= -\langle \exp_*(\tau H), v_X(E) \rangle_{\text{Muk}} \\ &= -\int_X e^{-\tau H} v_X(E) + \frac{\zeta(3)\chi(X)}{(2\pi)^3} \left(\frac{\tau^2}{10} H^2 \text{ch}_1(E) - \frac{\tau^3}{6} \text{ch}_0(E) \right) \sum_{d \geq 1} N_d^X d^3 q^d \end{aligned}$$

で与えられる。これより Weil–Petersson ポテンシャルは大体積極限の近傍で

$$\begin{aligned} K^A(\tau) &= -\log \left(H^3(\overline{\Phi(q)} \left(\frac{\bar{\tau}^3}{6} + \frac{\tau \bar{\tau}^2}{2} \right) - \Phi(q) \left(\frac{\tau^3}{6} + \frac{\tau^2 \bar{\tau}}{2} \right) \right) - 2 \log \left(\frac{\zeta(3)\chi(X)}{(2\pi)^3} \right) \\ &\sim -\log \left(\frac{4}{3} H^3 \Im(\tau)^3 \right) - 2 \log \left(\frac{\zeta(3)\chi(X)}{(2\pi)^3} \right) + O(q) \end{aligned}$$

で与えられる。従って、Weil–Petersson 計量は \mathbb{H} の Poincaré 計量の量子変形である。特に十分小さな q に関して非退化である。また B -場が存在しない場合には、補正項 $O(q)$ は明示的に $\log(\Phi(q))$ で与えられる。

6. 応用

Calabi–Yau 多様体 X の安定性条件の空間 $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_X)$ は Kähler モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ とは一般に一致せず、適当な意味での拡大 Kähler モジュライ空間と考えられる。実際、 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ の接空間は $H^{1,1}(X)$ である一方、 $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_X)$ の接空間は $\oplus_p H^{p,p}(X)$ である。 $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_X)$ と $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ の差は本研究分野において最重要問題の 1 つと考えられるが、この方向の研究として、我々は予想 4.2 を精密化することを試みた。

予想 6.1 (Fan–K–Yau [7]). Kähler モジュライ空間の埋め込み

$$\iota : \mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X) \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}_X) \backslash \text{Stab}_{\mathcal{N}}^+(\mathcal{D}_X) / \mathbb{C}$$

が存在する。引き戻し $\iota^* K_{\text{WP}}$ の複素 Hessian は Kähler モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ 上の Kähler 計量を与える。更にこれはミラー写像 $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X) \cong \mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X^\vee)$ を介して $\mathfrak{M}_{\text{Cpx}}(X^\vee)$ の Weil–Petersson 計量と一致する。また X が 3 次元の場合に右辺は正則接触多様体となるが、この時 ι は Legendre 埋め込みとなる。

我々の導入した Weil–Petersson 計量は一般に退化しているが、その退化性を逆手にとって $\mathfrak{M}_{\text{Kah}}(X)$ の部分的特徴付けが与えられる可能性を予想 6.1 は示唆している。

REFERENCES

- [1] A. Bayer and T. Bridgeland, *Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1*. Duke Math. J. 166 (2017), no. 1, 75-124.
- [2] A. Bayer, E. Macri and P. Stellari, *The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi–Yau threefolds*. Invent. Math. 206 (2016), no. 3, 869-933.
- [3] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*. Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 2, 317-345.
- [4] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces*. Duke Math. J. 141 (2008), no. 2, 241-291.
- [5] A. Căldăraru, *The Mukai pairing II: the Hochschild–Kostant–Rosenberg isomorphism*. Adv. Math. 194 (2005), 34-66.
- [6] M. Douglas, *Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability*. Proc. of ICM, Vol. III (Beijing, 2002), 395-408.
- [7] Y.-W. Fan, A. Kanazawa, and S.-T. Yau, *Weil-Petersson geometry on the space of Bridgeland stability conditions*. to appear in Comm. Anal. Geom.
- [8] H. Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*. Adv. Math. 222 (2009), 1016-1079.
- [9] L. Katzarkov, M. Kontsevich and T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*. From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. 87-174.
- [10] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*. Proc. of ICM (Zürich, 1994), 120-139.
- [11] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson–Thomas invariants and cluster transformations*. arXiv: 0811.2435.
- [12] C. Li, *On stability conditions for the quintic threefold*. Invent. Math. 218(2019), 301-340.
- [13] A. Maciocia and D. Piyaratne, *Fourier–Mukai transforms and Bridgeland stability conditions on abelian threefolds*. Algebr. Geom. 2 (2015), no. 3, 270-297.
- [14] S. Mukai, *On the moduli space of bundles on K3 surfaces*. Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984), 341-413, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 11, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1987.
- [15] D. Orlov, *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*. J. Math. Sci. (New York) 84 (1997), no. 5, 1361-1381.
- [16] G. Schumacher, *On the geometry of moduli spaces*. Manuscripta Math. 50 (1985), 229-267.
- [17] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi–Yau manifolds and its Petersson–Weil metric*. Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), 629-646, Adv. Ser. Math. Phys. 1.