

# CALABI-YAU 多様体の退化と LAGRANGE ファイブレーション

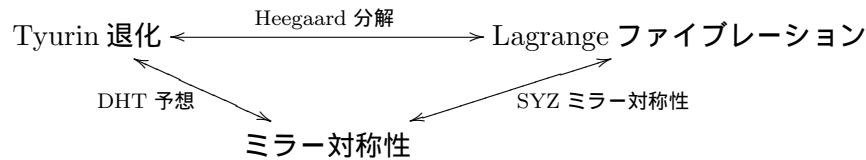
金沢篤

## 1. はじめに

多様体が退化する場合に、元の多様体の「幾何学」と退化先の多様体の「幾何学」の関係を問うことは基本的な問題である。退化先の多様体はしばしば簡明な構造を持ち、元の多様体の重要な情報を含む。実際、状況に応じて様々な不変量の退化公式が知られていて、現在でも数学の諸分野において重要な話題の一つである。

本講演では Calabi-Yau 多様体が二つの準 Fano 多様体の和へ退化する状況を考える。これは Calabi-Yau 多様体の Tyurin 退化と呼ばれ、実 3 次元有向閉多様体の Heegaard 分解の複素類似であることが知られている。一方、Calabi-Yau 多様体と準 Fano 多様体に対してミラー対称性と呼ばれる複素幾何とシンプレクティック幾何の双対性を考えることができる。Tyurin 退化によって Calabi-Yau 多様体と準 Fano 多様体のミラー対称性がどう関係しているのか (DHT 予想) を紹介することが一つ目の目標である。

Tyurin 退化とミラー対称性を繋げる架け橋となるのが、Calabi-Yau 多様体  $X$  の Lagrange トーラスファイブレーション  $\phi: X \rightarrow B$  である。まず適当な条件の元で Calabi-Yau 多様体  $X$  の Tyurin 退化が底空間  $B$  の Heegaard 分解を誘導することから、Tyurin 退化と Heegaard 分解には類似以上の関係が存在することが分かる。一方、Lagrange トーラスファイブレーションは底空間  $B$  の構造を介してミラー対称性の幾何学的な定式化 (SYZ ミラー対称性) を与える。これらについて解説するのが二つ目の目標である。



## 2. CALABI-YAU 多様体の退化

2.1. Calabi-Yau 多様体と準 Fano 多様体. Calabi-Yau 多様体  $X$  とはコンパクトな Kähler 多様体  $X$  で標準束が自明  $K_X = 0$ 、かつ  $0 < i < \dim X$  について  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  なるものとする。Calabi-Yau 多様体は、その性質の美しさで多くの数学者を魅了し続けてきた楕円曲線や K3 曲面の高次元化である。条件  $K_X = 0$  より  $X$  上には正則体積形式が定数倍を除いて一意に存在する。この意味で  $X$  は正則に向きづけられた Kähler 多様体とも思える。

準 Fano 多様体とはコンパクトな Kähler 多様体  $X$  で  $|-K_X|$  が非特異な元を含み、また  $0 < i \leq \dim X$  について  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  なるものとする。3 次

元以下では Fano 多様体 ( $-K_X$  が豊富) は準 Fano 多様体になるが、高次元では Fano 多様体は準 Fano 多様体になるとは限らない。

2.2. **Tyurin 退化.** Calabi–Yau 多様体  $X$  の退化で退化先が準 Fano 多様体  $X_1, X_2$  が共通の非特異な反標準因子  $Z \in |-K_{X_i}|$  で交差する和  $X_1 \cup_Z X_2$  になるものを Tyurin 退化  $X \rightsquigarrow X_1 \cup_Z X_2$  という。Tyurin 退化を許容する Calabi–Yau 多様体を構成的 Calabi–Yau 多様体と呼ぶ。Tyurin 退化の典型的な例は楕円曲線の小平  $I_2$  型退化や K3 曲面の二つの有理楕円曲面への II 型退化である。逆に共通の反標準因子  $Z$  で交差する準 Fano 多様体  $X_1, X_2$  の和  $X_1 \cup_Z X_2$  が与えられた時、これが Calabi–Yau 多様体に円滑化可能であることの必要十分条件は  $d$ -半安定性  $N_{Z/X_1} \cong N_{Z/X_2}^{-1}$  であることが知られている (川又–並河 [13])。

ゲージ理論の複素化の試みで知られているように、Calabi–Yau 多様体は有向閉実多様体の、準 Fano 多様体と反標準因子の組は境界付き有向実多様体とその境界の複素類似である。この類似を更に推し進めると、Calabi–Yau 多様体の Tyurin 退化は実 3 次元有向閉多様体の Heegaard 分解の複素類似であると考えられる (Tyurin[18])。実際、 $d$ -半安定性は境界の向きづけが反対になる条件であると理解できる。実 3 次元有向閉多様体が常に Heegaard 分解を許容する事実を鑑みると、3 次元 Calabi–Yau 多様体は常に構成的 Calabi–Yau 多様体と双有理か？という問題に辿り着くが、現在のところ未解決である。多くの剛的 Calabi–Yau 多様体が Tyurin 退化を許容することは驚きである。

Calabi–Yau 多様体の退化は小平による楕円曲線の退化の分類理論の一般化とも思え、代数幾何の重要な話題であることは容易に想像できる。例えば Calabi–Yau 多様体の極大退化は 3 節で説明するミラー対称性に密接に関係することからよく調べられてきた。Tyurin 退化は一般に極大退化ではなく、極大退化の次に重要な退化と考えられるがこれまであまり注目されることはなかった。例えば、K3 曲面に関して Tyurin 退化は II 型退化であり、極大退化は III 型退化である。

### 3. ミラー対称性

3.1. **Calabi–Yau 多様体のミラー対称性.** ミラー対称性とは超弦理論に由来する次の数学的予想である：「Calabi–Yau 多様体  $X$  に対してミラー Calabi–Yau 多様体  $Y$  が存在して、 $X$  の複素幾何と  $Y$  のシンプレクティック幾何が同値になる。」この同値性は様々な形で定式化・確認され、豊富な予想群を数学にもたらし続けてきた。

一番最初に見つかった対称性は位相的ミラー対称性と呼ばれ、Calabi–Yau 多様体のミラー対  $X, Y$  の Hodge 数に関して

$$h^{p,q}(X) = h^{n-q,p}(Y), \quad h^{n-q,p}(X) = h^{p,q}(Y)$$

が成立することを主張する。例えば、等式  $h^{1,n-1}(X) = h^{1,1}(Y)$  は  $X$  の複素構造のモジュライ空間の次元と  $Y$  の複素化された Kahler 構造のモジュライ空間の次元が等しいことを主張する。1980 年代後半から 1990 年にかけて、このような 3 次元 Calabi–Yau 多様体の対が数万見つかかり、多くの数学者を驚かせた。

ミラー対称性の数学的研究の大きな契機となったのは 1991 年に発表された物理学者 Candelas 達の仕事である。彼等は  $\mathbb{CP}^4$  内の非特異 5 次超曲面として得られる Calabi–Yau 多様体  $X$  内の有理曲線の数ミラー多様体  $Y$  の周期積分 (Hodge 構造の変形) を用いて全ての次数について計算した。当時  $X$  内の有理曲線数は数え上げ幾何の長年の未解決問題であり、次数 1 の場合の 2875 と次数 2 の場合の 609250 だけしか知られていなかった。その難問をミラー多様体  $Y$  という数学者には出自が全くわからない Calabi–Yau 多様体の比較的簡単な計算で完全に解いたことは大きなインパクトを与えた。Candelas 達の仕事は超共形場理論のアイデアに基づいていたが、後に Givental と Lian–Liu–Yau によって数学的に厳密な証明が与えられた。これは現在では Hodge 理論的ミラー対称性として理解されている。

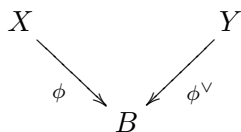
ミラー対称性の定式化は色々あるが、現在最も有力と考えられているのが圏論的ミラー対称性と SYZ ミラー対称性である。この二つは後の議論で必要となるので次節以降で詳しく解説する。

3.2. 圏論的ミラー対称性. 圏論的ミラー対称性は Kontsevich によって 1994 年の ICM で提唱された [14]。これは Calabi–Yau 多様体のミラー対  $X, Y$  に対して、 $X$  の接続層の導来圏  $D^b\text{Coh}(X)$  と  $Y$  の深谷圏  $D^b\text{Fuk}(Y)$  の間の三角圏の同値

$$D^b\text{Coh}(X) \cong D^b\text{Fuk}(Y)$$

を予想する。この予想は圏を空間と見る斬新な視点を与え、接続層の導来圏の研究の大きな発展の端緒となった。またこの予想はミラー多様体  $Y$  を共有する Calabi–Yau 多様体  $X_1, X_2$  は Fourier-向井対になることを示唆し、これを指導原理に興味深い Fourier-向井対が発見された。三角圏の同値を通して  $D^b\text{Coh}(X)$  の自己同値と  $D^b\text{Fuk}(Y)$  の自己同値が対応することにも注意する。

3.3. SYZ ミラー対称性. SYZ ミラー対称性は Strominger–Yau–Zaslow によって 1996 年に提唱された予想で、超弦理論における  $T$ -双対性のアイデアに基づいている [17]。これは Calabi–Yau 多様体のミラー対  $X, Y$  は共通の空間  $B$  上で互いに双対な特殊 Lagrange トーラスファイブレーション  $\phi : X \rightarrow B$ ,  $\phi^\vee : Y \rightarrow B$  を与えると予想する。



このとき  $\phi, \phi^\vee$  は SYZ ファイブレーションと呼ばれる。一般には特異ファイバーが存在するので双対の意味を定式化することも予想の一部と理解される。SYZ ミラー対称性は  $X$  と  $Y$  の間に幾何的な関係を与えている点が他の定式化よりも優れており、実際  $X$  から  $Y$  を具体的に構成する方法を与えていると見ることもできる。

Liouville–Arnold の定理より、Lagrange ファイブレーション  $\phi : X \rightarrow B$  は底空間の正則値集合  $B^\circ$  に整アフィン構造 (作用座標) を誘導する。ここで整アフィン構造とは局所座標の変換が  $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n, \mathbb{Z})$  で与えられるような多様体の構造である。また  $B^\circ$  の接束  $TB^\circ$  と余接束  $T^*B^\circ$  には互いに双対な  $\mathbb{Z}^n$ -

局所系  $T_{\mathbb{Z}}B^\circ$  と  $T_{\mathbb{Z}}^*B^\circ$  が存在し、ファイバー毎に商を取ることで互いに双対なトーラス束が得られる。

$$\begin{array}{ccc} T^*B^\circ/T_{\mathbb{Z}}^*B^\circ & & TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ \\ & \searrow & \swarrow \\ & B^\circ & \end{array}$$

$T^*B^\circ/T_{\mathbb{Z}}^*B^\circ$  は自然にシンプレクティック多様体になり、 $TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ$  は自然に複素多様体になる。適当な意味でこれらはミラー対になり、半平坦ミラー対と呼ばれる。また  $T^*B^\circ/T_{\mathbb{Z}}^*B^\circ \rightarrow B^\circ$  のファイバーは Lagrange 多様体になる。一方、 $TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ$  の標準的な局所正則座標を  $(z_1, \dots, z_n)$  と書いたときに  $TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ \rightarrow B^\circ$  は局所的にトロピカル写像

$$\text{Trop} : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(-\frac{\log |z_1|}{2\pi}, \dots, -\frac{\log |z_n|}{2\pi}\right).$$

の形に書ける。つまり Lagrange トーラスファイブレーションの複素類似はトロピカル写像であることがわかる。

半平坦ミラー対は SYZ ファイブレーション  $\phi, \phi^\vee$  の一次近似になると考えられている。実際、 $\phi$  が Lagrange 切断を許容する場合は  $\phi^{-1}(B^\circ)$  と  $T^*B^\circ/T_{\mathbb{Z}}^*B^\circ$  はシンプレクティック同相になる。一方、 $(\phi^\vee)^{-1}(B^\circ)$  と  $TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ$  は一般に複素多様体として同型でなく、 $TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ$  を複素多様体としてコンパクト化するためには  $\phi$  の Lagrange トーラスファイバーに境界を持つ正則円盤の数え上げ不変量 (開 Gromov–Witten 不変量) によって  $TB^\circ/T_{\mathbb{Z}}B^\circ$  の複素構造を量子補正する必要があると予想されている。トーリック Calabi–Yau 多様体などの特別な場合では量子補正を正しく定式化することが可能だが、一般の場合は現在も研究が進行中である。

以上の議論では  $X$  と  $Y$  を対等に扱っていないが、特殊 Lagrange ファイバーであることを使うと対等な議論ができる (Hitchin[8], Leung[15])。

3.4. 対数的 Calabi–Yau 多様体のミラー対称性. コンパクトな Kähler 多様体  $X$  と有効かつ正規交差な反標準因子  $D \in |-K_X|$  の組  $(X, D)$  は対数的 Calabi–Yau 多様体と呼ばれる。重要な例がトーリック Fano 多様体  $X$  とトーリック因子  $D$  の組  $(X, D)$  である。

対数的 Calabi–Yau 多様体  $(X, D)$  に対してもミラー対称性が適当な形で成立することが知られている。但しこの場合、ミラー対応物は Kähler 多様体  $Y$  と正則関数  $W : Y \rightarrow \mathbb{C}$  の組  $(Y, W)$  になる。物理的背景から、正則関数  $W$  は超ポテンシャル、組  $(Y, W)$  は Landau–Ginzburg 模型と呼ばれる。また Landau–Ginzburg 模型  $(Y, W)$  は Calabi–Yau ファイブレーション  $W : Y \rightarrow \mathbb{C}$  と見ることも可能で、反標準因子  $D$  と  $W$  の一般ファイバーは ( $D$  が特異な場合は修正が必要であるが) Calabi–Yau 多様体としてミラー対になる。

例 3.1. 一番基本的な対数的 Calabi–Yau 多様体は  $(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\})$  である。トーリック Kähler 形式  $\kappa$  に加えて  $B$ -場  $B \in H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{R})$  を導入して、 $\mathbb{CP}^1$  の複素化された Kähler 構造  $\omega = B + \sqrt{-1}\kappa$  を考える。そして  $q = \exp(-2\pi \int_{\mathbb{CP}^1} \omega)$

とおく。このとき  $(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\})$  のミラー *Landau–Ginzburg* 模型は

$$(\mathbb{C}^\times, W(z) = z + \frac{q}{z})$$

で与えられる (堀–Vafa[9])。ミラー対称性の根拠の一つとして、 $\mathbb{CP}^1$  の量子コホモロジーと  $W$  の *Jacobi* 環の間の環同型が存在する。

$$\mathrm{QH}(\mathbb{CP}^1) = \mathbb{C}[H]/(H^2 - q) \cong \mathbb{C}[z^{\pm 1}]/(z^2 - q) = \mathrm{Jac}(W).$$

同様の環同型を根拠とするミラー対称性は Batyrev によって全てのトーリック Fano 多様体に対して示されている。

3.5. 対数的 Calabi–Yau 多様体の SYZ ミラー対称性. 元々 Calabi–Yau 多様体に対して定式化された SYZ ミラー対称性は 2007 年に Auroux[1] によって対数的 Calabi–Yau 多様体の場合に拡張された。

後の議論のために  $(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\})$  の場合を少し詳細に説明する。例 3.1 と同じ記号を使って  $\tau = \sqrt{-1} \int_{\mathbb{CP}^1} \omega$  としたとき、トーリック運動量写像が Lagrange トーラスファイブレーション  $\phi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow B = [0, \Im(\tau)]$  を与える。底空間  $B = [0, \Im(\tau)]$  には整アフィン構造が入っていることに注意する。この状況で  $\phi^{-1}(B^\circ) = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, \infty\} \cong \mathbb{C}^\times$  の半平坦ミラー多様体は円環

$$Y = A_{(|q|, 1)} = \{|q| < |z| < 1\} \subset \mathbb{C},$$

で与えられる。但し  $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$  である。実際、トロピカル写像  $\mathrm{Trop}$  を使って  $Y = \mathrm{Trop}^{-1}(B^\circ)$  と書ける。

次に反標準因子  $\{0, \infty\}$  の情報に対応して  $Y$  上の超ポテンシャルを考える必要がある。これは  $\phi$  の Lagrange トーラスファイバーに境界を持つ Maslov 指数 2 の正則円盤の母関数として与えられる。まず Lagrange トーラスファイバー  $L$  は  $\mathbb{CP}^1$  を二つの Maslov 指数 2 の正則円盤に分離する。詳細は省くが、

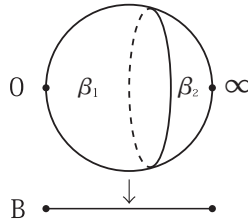


FIGURE 1. Lagrange ファイバーが  $\mathbb{CP}^1$  を二つの正則円盤に分離

これより  $Y = A_{(|q|, 1)}$  上の超ポテンシャルは

$$W(z) = z + \frac{q}{z}.$$

となる。各項は二つの正則円盤に対応し、これらの円盤を表現するクラスを  $\beta_1, \beta_2 \in \pi_2(X, L)$  とすれば  $\beta_1 + \beta_2 = [\mathbb{CP}^1]$  が成立することから  $z \cdot \frac{q}{z} = q$  なる関係式を満たす。トーリック Fano 多様体に関する超ポテンシャルの詳細については Cho–Oh[3] と深谷–Oh–太田–小野 [6] を参照されたい。

注意 3.2.  $\Im(\tau) \rightarrow +\infty$  つまり  $q \rightarrow 0$  なる極限を取りながら適当な正規化 (繰り込み) を行うことで、SYZの意味での Landau–Ginzburg 模型  $(A_{(|q|,1)}, W)$  から例 3.1 の Landau–Ginzburg 模型  $(\mathbb{C}^\times, W)$  が得られる。この極限はシンプレクティック幾何において大体積極限と呼ばれる。一般にミラー対称性は複素幾何側では極大退化極限、シンプレクティック幾何側では大体積極限の近傍で成立すると考えられている。しかしながら極限を取りきってしまうと円環  $A_{(|q|,1)}$  の複素構造の情報が失われてしまうので注意が必要である。実際、5 節で説明する DHT 予想の証明では円環  $A_{(|q|,1)}$  の複素構造が鍵となる。

#### 4. DORAN–HARDER–THOMPSON 予想

K3 曲面のミラー対称性と II 型退化に関する Dolgachev の研究 [4]、Calabi–Yau 多様体の Tyurin 退化に関する Tyurin の研究 [18]、対合同変な SYZ ミラー対称性に関する Auroux の研究 [2] 等を動機として、Doran–Harder–Thompson は 2015 年の String-Math において次の予想を提唱した。これを DHT 予想と呼ぶ。

予想 4.1 (Doran–Harder–Thompson [5]). Calabi–Yau 多様体  $X$  の Tyurin 退化  $X \rightsquigarrow X_1 \cup_Z X_2$  が与えられた時、対数的 Calabi–Yau 多様体  $(X_1, Z), (X_2, Z)$  のミラー Landau–Ginzburg 模型  $(Y_1, W_1), (Y_2, W_2)$  を貼り合わせることで Calabi–Yau 多様体  $Y$  と Calabi–Yau ファイブレーション  $W : Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  を構成することが出来る。更に  $Y$  は  $X$  のミラー Calabi–Yau 多様体となる。

予想における Landau–Ginzburg 模型の貼り合わせは以下のように幾何学的に理解できる。 $n = \dim X$  とし、超ポテンシャル  $W_i$  の一般ファイバーを  $Z_i^\vee$  と書く。 $Z_i^\vee$  は  $n-1$  次元 Calabi–Yau 多様体  $Z$  のミラー多様体になっていることに注意する。

- (1) 超ポテンシャル  $W_i$  の重要な情報はその臨界点の近傍に含まれているので、 $W_i$  の臨界値を全て含む十分大きな円盤  $\mathbb{D}_i \subset \mathbb{C}$  を取って、必要なら  $Y_i$  を縮めることで新しい Landau–Ginzburg 模型  $W_i : Y_i \rightarrow \mathbb{D}_i$  を考えても一般性は失わない。この二つの Landau–Ginzburg 模型を円周  $\partial\mathbb{D}_1$  と円周  $-\partial\mathbb{D}_2$  に沿って張り合わせることを考える。
- (2) まず  $W_1$  と  $W_2$  のファイバーが同一視できることを見る。Calabi–Yau 多様体  $Z_1^\vee$  と  $Z_2^\vee$  は共に  $Z$  のミラー多様体であるから、微分多様体として同一視できると期待できる。一般にミラー多様体を共有していたとしても異なる位相型を持つことがあるが、例えば低次元  $n \leq 3$  なら同じ微分構造を持つことがわかる。
- (3) 次にモノドロミーが一致することを見る。まず  $X_1 \cup_Z X_2$  が円滑化可能であることより  $d$ -半安定性  $N_{Z/X_1} \cong N_{Z/X_2}^{-1}$  が成立することに注意する。次に圏論的ミラー対称性によると

$$\mathrm{D}^b\mathrm{Coh}(Z) \cong \mathrm{D}^b\mathrm{Fuk}(Z_i^\vee)$$

が成立するが、円周  $\partial\mathbb{D}_i$  に沿ったモノドロミー・シンプレクティック同相が引き起こす  $\mathrm{D}^b\mathrm{Fuk}(Z_i^\vee)$  の自己同値は  $\mathrm{D}^b\mathrm{Coh}(Z)$  上の自己

同値  $(-) \otimes \omega_{X_i}[n]|_Z$  に対応する (Seidel[16], Katzarkov–Kontsevich–Pantev[12])。随伴公式より

$$(-) \otimes \omega_{X_i}[n]|_Z \cong (-) \otimes N_{Z/X_i}^{-1}[n]$$

が成立することから、 $d$ -半安定性  $N_{Z/X_1} \cong N_{Z/X_2}^{-1}$  はミラー対称性によって  $Z_1^\vee$  上の反時計周りの円周  $\partial\mathbb{D}_1$  に関するモノドロミー作用と  $Z_2^\vee$  上の時計周りの円周  $-\partial\mathbb{D}_2$  に関する・シンプレクティック同相が同一視されることがわかる。

このようにミラー対称性の様々な帰結を仮定すると、 $\partial\mathbb{D}_1$  と  $-\partial\mathbb{D}_2$  に沿って  $W_1 : Y_1 \rightarrow \mathbb{D}_1$  と  $W_2 : Y_2 \rightarrow \mathbb{D}_2$  を張り合わせることで  $C^\infty$ -多様体  $Y$  とファイブレーション  $W : Y \rightarrow S^2$  が得られる (Figure 2)。

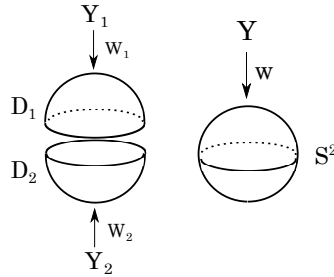


FIGURE 2. Landau–Ginzburg 模型の貼り合わせ

モジュライ空間の観点からも DHT 予想は興味深い。実際、複素モジュライ空間と Kahler モジュライ空間の対応を詳細に調べると  $X$  の Tyurin 退化は収縮写像 (Kahler 構造の退化) の特別な場合である Calabi–Yau ファイブレーション  $Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  に対応していることがわかる。

Doran–Harder–Thompson は DHT 予想に関して様々な状況証拠を示している [5]。例えば 3 次元の場合には、上で構成した  $C^\infty$ -多様体  $Y$  が Calabi–Yau 多様体の構造を許容すると仮定した上で、 $X$  と  $Y$  の位相的ミラー対称性が K3 曲面に関する Dolgachev–Nikulin ミラー対称性から従う。また適当な仮定の元で、一般の次元で  $Y$  が期待される Euler 数  $\chi(Y) = (-1)^{\dim X} \chi(X)$  を持つ。この意味で、DHT 予想は位相的なレベルではある程度示されていると考えられる。

しかしながら、この予想の最も重要かつ困難な点は  $Y$  を複素多様体として構成し、シンプレクティック多様体  $X$  とミラー対の関係にあることを示すことである。更には、底空間  $S^2$  に複素構造が定まり、超ポテンシャルの貼り合わせ  $W : Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  が Calabi–Yau ファイブレーションとなることも示す必要がある。

## 5. 証明の概略

講演者は論文 [10, 11] において楕円曲線と主偏極 Abel 曲面に対して DHT 予想の証明を与えた。標語的に言えば、SYZ ファイブレーションの底空間として現れる整アフィン多様体を張り合わせることで Landau–Ginzburg 模型

の張り合わせを数学的に行った。Calabi–Yau 多様体の Tyurin 退化は有向閉多様体の Heegaard 分解の複素類似であったが、この場合は単なる類似ではなく、Tyurin 退化は SYZ ファイブレーション  $X \rightarrow B$  を介して底空間  $B$  の Heegaard 分解を誘導することが分かる。

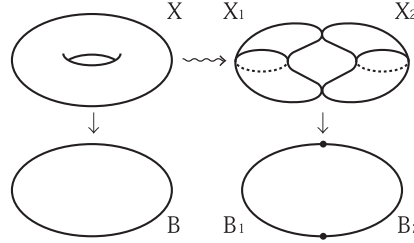


FIGURE 3. Tyurin 退化と底空間の Heegaard 分解

証明のもう一つの鍵となるのが超ポテンシャルからテータ関数を構成するステップである。超ポテンシャルはある種の標準的な関数という意味でテータ関数の類似であることは知られていたが、次節で説明する形の対応関係は今まで知られていなかったように思われる。

注意 5.1. *DHT* 予想に現れる *Calabi–Yau* ファイブレーションと *SYZ* ファイブレーションは別のものであることに注意する。前者の底空間は常に  $\mathbb{CP}^1$  であり、後者の底空間は  $\dim X/2$  次元の実多様体である。

5.1. 楕円曲線の場合. 楕円曲線の Tyurin 退化 (小平  $I_2$  型退化) が単位円盤上で与えられているとする  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ . つまり一般ファイバーは楕円曲線  $X$  で中心ファイバー  $\mathcal{X}_0 = X_1 \cup_Z X_2$  は二つの有理曲線  $X_1, X_2$  が 2 点  $Z$  で貼り合わさったものである。また  $\mathcal{X}$  の複素化された Kähler 構造  $\omega = B + \sqrt{-1}\kappa$  に対して

$$\tau_i = \int_{X_i} (B + \sqrt{-1}\kappa), \quad q_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau_i}, \quad i = 1, 2.$$

とおく。このとき楕円曲線  $X$  の複素化された Kähler 構造は

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \int_{\mathcal{X}_0} (B + \sqrt{-1}\kappa)$$

で与えられ、 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau} = q_1 q_2$  が成立する。

まず  $i = 1, 2$  についてトーリック運動量写像  $\phi_i : X_i \rightarrow B_i$  が定まる。ここで底空間の整アフィン多様体はそれぞれ  $B_1 = [0, \Im(\tau_1)], B_2 = [-\Im(\tau_2), 0]$  としておく。3.5 節で解説したように、対数的 Calabi–Yau 多様体  $(X_1, Z), (X_2, Z)$  のミラー Landau–Ginzburg 模型はそれぞれ

$$W_1 : Y_1 = A_{(|q_1|, 1)} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_1 \mapsto z_1 + \frac{q_1}{z_1}$$

$$W_2 : Y_2 = A_{(1, |q_2|^{-1})} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_2 \mapsto z_2 + \frac{q_2}{z_2}.$$

で与えられる。ここで  $q_1 z_2 = z_1$  であり、また複素多様体として  $A_{(|q_2|, 1)} \cong A_{(1, |q_2|^{-1})}$  であることに注意する。このとき閉包  $\overline{Y_1 \cup Y_2} \subset \mathbb{C}^\times$  の境界は乗法



的写像  $z \mapsto qz$  で張り合い、楕円曲線  $Y$  となる。実際、これは  $X$  のミラー楕円曲線

$$\mathbb{C}^\times / q^\mathbb{Z} = \mathbb{C}^\times / (z \sim qz)$$

である (Figure 4)。この構成法は整アフィン多様体  $B_1 \cup B_2 = [-\Im(\tau_2), \Im(\tau_1)]$

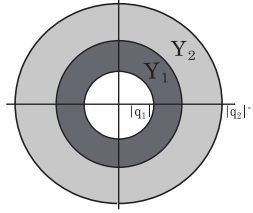


FIGURE 4. 円環  $Y_1$  と円環  $Y_2$

の境界を整アフィン変換  $b \mapsto b + \Im(\tau)$  で貼り合わせたものに他ならない (実際は  $B$ -場でファイバー方向も捻っている)。

DHT 予想を証明するには、超ポテンシャルの定義域だけでなく超ポテンシャル自身も張り合わせる必要がある。これには正則写像  $\mathbb{C}^\times \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (0, 0)$  であって  $W : \mathbb{C}^\times / q^\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  を誘導し、さらに  $\mathbb{CP}^1$  の北半球 (南半球) で局所的に  $W_1(W_2)$  のように振る舞う  $W$  を見つければ十分である。しかし残念ながら単純に  $(W_1, W_2)$  を  $\mathbb{C}^\times$  に解析接続するのでは上手くいかない。

そこで天下りのだが、次のような  $\mathbb{Z}$  で添え字付けされた無限個の Landau-Ginzburg 模型を用意する。

$$W_{2i+1} : Y_{2i+1} = A_{(|q^{-i}q_1|, |q^{-i}|)} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_{2i+1} \mapsto z_{2i+1} + \frac{q_1}{z_{2i+1}}$$

$$W_{2i} : Y_{2i} = A_{(|q^{1-i}|, |q^{1-i}q_2^{-1}|)} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_{2i} \mapsto z_{2i} + \frac{q_2}{z_{2i}}.$$

ここで  $z_i$  は機能的に  $qz_{i+2} = z_i$  で定義される。次に  $z = z_1 = e^{2\pi\sqrt{-1}\zeta}$  として次の無限積を考える。

$$W'_1(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q_1}{z_{2i-1}^2}\right) \left(1 + \frac{z_{-2i+1}^2}{q_1}\right) = \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}\tau}{6}}}{\eta(2\tau)} \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(2\zeta - \tau_1, 2\tau)$$

ここで

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}\tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi\sqrt{-1}\tau m}),$$

$$\vartheta_{a,b}(\zeta, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi\sqrt{-1}(n+a)^2\tau} e^{2\pi\sqrt{-1}(n+a)(\zeta+b)}$$

はそれぞれ Dedekind のエータ関数と指標  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  付きテータ関数である。実際、任意の  $j \in \mathbb{Z}$  と  $k = 1, 2$  に対して等式

$$\left(z_j + \frac{q_k}{z_j}\right) \left(z_{-j} + \frac{q_k}{z_{-j}}\right) = q_k q^j \left(1 + \frac{q_k}{z_j^2}\right) \left(1 + \frac{z_{-j}^2}{q_k}\right)$$

が成立することから、 $W'_1$  は奇数  $i \in \mathbb{Z}$  に関する超ポテンシャル  $W_i$  の無限積の正規化である。

同様に偶数  $i \in \mathbb{Z}$  に関する超ポテンシャル  $W_i$  の無限積の正規化

$$W'_2(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q_2}{z_{2i}^2}\right) \left(1 + \frac{z_{-2i+2}^2}{q_2}\right) = \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}\tau}{6}}}{\eta(2\tau)} \vartheta_{0,0}(2\zeta - \tau_1, 2\tau),$$

を考えることができる。古典的な事実として、指標付きテータ関数

$$\vartheta_{\frac{1}{2},0}(2\zeta - \tau_1, 2\tau), \vartheta_{0,0}(2\zeta - \tau_1, 2\tau)$$

は楕円曲線  $Y = \mathbb{C}^\times / q^\mathbb{Z}$  の (2)-偏極の大域切断の基底をなすことが知られている。従って 2 重被覆

$$W : Y = \mathbb{C}^\times / q^\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{CP}^1, z \mapsto [W'_1(z) : W'_2(z)].$$

が得られる。実際、 $W$  が各円環  $Y_i$  の上で局所的に  $W_i$  と同じ振る舞いをする  
ことが観察できるのでこれが DHT 予想の主張する超ポテンシャルの貼り合  
わせであることもわかる。以上で楕円曲線の場合の DHT 予想の証明が得ら  
れた。

注意 5.2.  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, \infty\} \cong \mathbb{C}^\times$  の半平坦ミラー多様体  $Y$  の実現の一つが円環  
 $A_{(|q|,1)} \subset \mathbb{C}$  であるが、 $Y$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込みに標準的なものは存在しない。そ  
こで無限個の *Landau–Ginzburg* 模型を一齐に考えることで埋め込みの恣意性  
を無くしている。

5.2. Abel 曲面の場合. 最後に Abel 曲面の場合も簡潔に述べておく。我々の  
定義では Abel 曲面は Calabi–Yau 多様体ではないが、DHT 予想は Abel 曲面  
に対しても意味を持つ。この場合も同様の方針で DHT 予想を肯定的に解決  
することができるが、大きな違いが二つある。

- (1) ミラー対称性は格子偏極 Abel 曲面に対して定義される。格子によっ  
ては Tyurin 退化を許容しないが、主偏極の場合が本質的である。
- (2) Abel 曲面の Tyurin 退化先はトーリック多様体でなく、また準 Fano  
多様体でもない。

主偏極 Abel 曲面  $X$  のミラー多様体は楕円曲線の自己積  $E_\tau \times E_\tau$  となる。楕  
円曲線の場合と同様に、 $X$  の Tyurin 退化と整合的な Lagrange トーラスファ  
イブレーション  $X \rightarrow B$  が取れ、Tyurin 退化は底空間  $B = T^2$  の Heegaard  
分解を誘導する (Figure 5)。

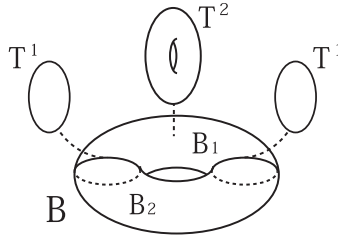


FIGURE 5. Lagrange ファイブレーションと Heegaard 分解

## REFERENCES

- [1] D. Auroux, Mirror symmetry and T-duality in the complement of an anticanonical divisor, *J. Gökova Geom. Topol.* 1 (2007), 51-91.
- [2] D. Auroux, Special Lagrangian fibrations, mirror symmetry and Calabi–Yau double covers, *Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société* (I) *Astérisque*, no. 321, 2008, 99-128.
- [3] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds, *Asian J. Math.* 10 (2006), 773-814.
- [4] I. V. Dolgachev, Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces, *J. Math. Sci.* 81 (1996), no. 3, 2599-2630.
- [5] C. Doran, A. Harder and A. Thompson, Mirror Symmetry, Tyurin Degenerations, and Fibrations on Calabi–Yau Manifolds, to appear in *Proc. of String-Math 2015*.
- [6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, *Astérisque*, vol 376, 2016, Societe Mathematique de France.
- [7] M. Gross, Mirror symmetry and the Strominger–Yau–Zaslow conjecture, current developments in mathematics 2012, 133-191, *Int. Press*, Somerville, MA, 2013.
- [8] N. Hitchin, The moduli space of special Lagrangian submanifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 25 (1997), 503-515.
- [9] K. Hori and C. Vafa, Mirror symmetry, [arXiv:hep-th/0002222](https://arxiv.org/abs/hep-th/0002222)
- [10] A. Kanazawa, Doran–Harder–Thompson conjecture via SYZ mirror symmetry: elliptic curves. *SIGMA Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 13 (2017), 024.
- [11] A. Kanazawa, Degenerations, theta functions and geometric quantization in mirror symmetry, to appear in *Handbook for Mirror Symmetries of Calabi–Yau and Fano Manifolds*, International Press of Boston, [arXiv:1801.02749](https://arxiv.org/abs/1801.02749).
- [12] L. Katzarkov, M. Kontsevich and T. Pantev, Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models, *J. Diff. Geom.* Vol. 105, No. 1 (2017), 55–117.
- [13] Y. Kawamata and Y. Namikawa, Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi–Yau varieties, *Invent. Math.* 118 (1994), no. 3, 395-409.
- [14] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, *Proc. of ICM (Zürich, 1994)*, 120-139.
- [15] N.-C. Leung, Mirror symmetry without corrections, *Comm. Anal. Geom.* 13 (2005), no. 2, 287-331.
- [16] P. Seidel, More about vanishing cycles and mutation, *Symplectic Geometry and Mirror Symmetry: Proc. of 4th KIAS AIC (Seoul, 2000)* World Sci., 2001, 429-465.
- [17] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, Mirror symmetry is T-duality, *Nuclear Phys. B* 479 (1996), no. 1-2, 243-259.
- [18] A.N. Tyurin, Fano versus Calabi–Yau, *The Fano Conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, 701-734.