

这道题是一道奥赛题的弱化版(原题是我自己出的qwq)

让下面的 $N = 6, K = 3$ 即可

我们可以把不写作业看做 $+1$, 写作业看做 -1

那么, 转化后的题意为: 长度为 $2N$ 的序列, N 个 -1 , N 个 $+1$, 问不存在一个前缀值 $\geq K$ 的方案数有多少

首先, 若存在一个不合法的前缀 $\geq K$, 那么一定存在一个位置 $= K$ 。

$K = 1$ 显然是Catalan数, 但是我发现其实可以拓展

若数列不合法, 则一定存在一个位置, 在这之前有 $m + K$ 个 $+1$, m 个 -1 , 我们把之后的1变为 -1 , -1 变为1

则该序列含有 $N + K$ 个 $+1$, $N - K$ 个 -1

也就是说, 一种不合法的方案进行上述转化后, 一定唯一对应了长度为 $2N$ 且含 $N + K$ 个1的序列

那么转化后序列的方案数为 C_{2N}^{N+K} , 用总的 C_{2N}^N 减去即可