# lezione6

## Pumping lemma

$L \in REG \Rightarrow \exists n \geq 0$ t.c. $\forall w \in L\ |w| \geq n\ \exists x, y, z\ w = xyz$
Vale:

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| \geq 1$
3. $\forall i \geq 0 xy^i z \in L$

**Dimostrazione:** $L \in REG \Rightarrow \exists A \in DFA$ che riconosce $L$ con $n$ stati. Sia $p \in L$ t.c. $|p| \geq n$, il cammino che determina in A è composto da almeno $n+1$ stati. Se il cammino è composto da un numero di nodi maggiore del numero degli stati vuol dire che in esso è presente un ciclo. Inoltre possiamo dire che questo ciclo di presenta necessariamente entro l'n-esimo passo di computazione poiché nella sequenza di nodi attraversati ci sarà necessariamente almeno una ripetizione.
Questo lemma negato è utile per dimostrare la non regolarità di un linguaggio.

## Pumping lemma negato

$L \in REG \Rightarrow \forall w \in L\ |w| \geq n\ \forall x, y, z$ t.c. $w = xyz$
Vale:

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| \geq 1$
3. $\exists i \geq 0 xy^i z \notin L$

## Applicazione Pumping lemma negato

**Esempio 1:** Dimostrare che $L = \{ww | w \in \{0,1\}^\star\} \notin REG$.
Dato $p \in \mathbb{N}$ vogliamo trovare una parola $w \in L$ t.c. $|w| \geq p$ e che per ogni sua scomposizione $w = xyz$ esiste un $i$ t.c. $W' = xy^i z \notin L$.
Scriviamo in maniera generica $w$. Ad esempio $w = 0^p 1 0^p 1$, questa parola è evidentemente più lunga di $p$.
Scegliamo come scomposizione $x = 0^r$,$y = 0^s$,$z = 0^{p-(r+s)} 1 0^p$ con $r \geq 0$, $s\, 0$, $t \geq 0$.
Adesso scriviamo $w' = xy^i z$ per la scomposizione che abbiamo scelto: $0^r (0^s)^i 0^{p-(r+s)} 1 0^p 1$.
Affinché $w' \notin L$ deve essere vero che: $r + is + p - (r+s) \neq p$, questo perchè vogliamo "rompere" la simmetria della parola. Semplificando otteniamo che $is - s \neq 0$ e questo è vero $\forall i \neq 1$.
Più intuitivamente si può dire che per "rompere" la simmetrie basta elevare a 0 y per ottenere un numero di 0 nella prima metà della parola inferiore al numero di 0 nella seconda metà della parola.

**Esempio 2:** Dimostrare che $L = \{w | w \in \{a,b\}^\star \wedge n_a(w) = n_b(w)\} \notin REG$.
Dato $p \in \mathbb{N}$ vogliamo trovare una parola $w \in L$ t.c. $|w| \geq p$ e che per ogni sua scomposizione $w = xyz$ esiste un $i$ t.c. $w' = xy^i z \notin L$.
Procediamo scrivendo in maniera generica una parola che appartiene ad L. Ad esempio:
$w = b^p a^p$, $|w| \geq p$ dato che $|b^p| = p$.
Ora scomponiamo in maniera generica $w$:
$x = b^r$, $y = b^s$, $z = b^t a^p$ t.c. $r \geq 0$, $s\, 0$, $t \geq 0$ e $r + s + t = p$.
Adesso scriviamo $w' = xy^i z$ per la scomposizione che abbiamo scelto: $b^r (b^s)^i b^t a^p$.
Per ottenere $w' \notin L$ deve valere che $r + is + t \neq p$, ma questo è vero $\forall i \neq 1$.

**Esempio 3:** Dimostrare che $L' = \{w | w \in \{a,b\}^\star \wedge n_a(w) \neq n_b(w)\} \notin REG$.
Sta volta il Pumping lemma non ci aiuta e dobbiamo ragionare diversamente. Nell'esempio 3 è stato dimostrato che $L \notin REG$ ma $L = L'^c$ quindi possiamo concludere che $L' \notin REG$ poich'e il suo complemento non è regolare.

**Esempio 4:** Dimostrare che $L = \{a^n b^m | n \neq m \wedge n, m \geq 0\} \notin REG$.
Per questo esempio di nuovo il Pumping lemma non ci aiuta. Proviamo a dimostrare la sua non regolarità per assurdo.
Supponiamo che $L \in REG$ e consideriamo un altro linguaggio che possiamo dimostrare non essere regolare sfruttando il Pumping lemma: $L' = \{a^n b^m | n = m \wedge n, m \geq 0\}$. Definiamo ora il complemento di $L'$ come unione di $L$ e di un altro linguaggio. Essendo $L'$ il linguaggio delle parole formate da un certo numerdo i a seguite dallo stesso numero di b il suo complemento sarà formato da:

- $L$, ossia tutte le parole che seguono l'ordinamento di $L'$ (a prima di b) in cui il numero di a differisce dal numero di b;

- $\{xbyaz | x, y, z \in \{a, b\}^\star\}$, ossia tutte le parole che non seguono l'ordinamento di $L'$.

Ora possiamo scrivere che $L'^c = L \cup \{xbyaz | x, y, z \in \{a, b\}^\star\}$. Abbiamo supposto che $L \in REG$, sappiamo che $\{xbyaz | x, y, z \in \{a, b\}^\star\} \in REG$. La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'unione quindi $L'^c \in REG$, ed è chiusa anche rispetto al complemento quindi $L' \in REG$. Questo è un assurdo in quanto sappiamo che $L' \notin REG$.