Appunti Automi, Calcolabilità e Complessità

S. Antonelli, G. Attenni, A. Caciolai, D. Crisostomi, S. Esposito

January 7, 2019

Questi appunti sono tratti dalle lezioni del corso di Automi Calcolabilità e Complessità del c.d.l. in Informatica della Sapienza tenuto dalla Professoressa E. Fachini. Le lezioni fanno riferimento alle lezioni in presenza dell'anno accademico 2018/2019.

Invito agli studenti dei prossimi anni:
Essendo questi appunti frutto della collaborazione di studenti vi sconsigliamo di utilizzarli come unica fonte per il vostro studio. Probabilmente sono presenti numerosi errori e incompletezze. Per tale motivo vi invitiamo a collaborare per migliorarli e l'integrarli. Per chi fosse interessato tutto il progetto in latex è reperibile al seguente link.

1 Lezione 1

1.1 Introduzione al corso

Il corso di *Automi, Calcolabilità e Complessità* è un corso di informatica teorica. L'informatica teorica è importante per lo sviluppo della materia in quanto grazie a risultati teorici si sono fatti passi avanti nel campo applicativo.
Possiamo suddividere gli argomenti trattati in questo corso come segue:

Teoria dei linguaggi formali

Teoria della complessità

Teoria della calcolabilità

Un concetto fondamentale e che è presente in tutte e tre le aree è il *modello di calcolo*, ossia un sistema formale nel quale si descrive una computazione.

1.2 La macchina di Turing e il λ-calcolo

La macchina di Turing e il λ-calcolo sono dei modelli di calcolo definiti nel 1936 per risolvere un problema enunciato da Hilbert nel 1928, tale problema consisteva nel trovare una procedura(algoritmo) che data una formula di calcolo in input stabilisse se fosse un teorema. Per risolvere questo problema si è avuta la necessità di formalizzare il concetto di algoritmo e per la prima volta venne dimostrata la non esistenza di un algoritmo risolutivo per un certo problema. Ciò fu un notevole successo nello sviluppo dell'informatica teorica.

La macchina di Turing Questo modello di calcolo è alla base della teoria della complessità. Possiamo immaginare la macchina di Turing come un calcolatore ideale con un nastro infinito e una testina in grado di leggere una cella del nastro e effettuare un computazione. Ciò che interessa sapere è se un algoritmo termina oppure no.

1.3 Classificazione dei problemi

La teoria della calcolabilità studia i problemi che non possono essere risolti da un calcolatore e cerca di capire cosa rende certi problemi così difficili da non poter essere risolti e di fornire strumenti per dimostrare che effettivamente non possono essere risolti attraverso un algoritmo.
Quindi possiamo classificare i problemi tra problemi risolvibili da un calcolatore e problemi non risolvibili da un calcolatore.

Per avere un' idea di quale sia il rapporto tra i problemi risolvibili e quelli non risolvibili possiamo paragonare la cardinalità dei problemi risolvibili a quella dei numeri naturali e la cardinalità di quelli non risolvibili a quella dei numeri reali.
Tutti i problemi risolvibili possono essere espressi attraverso il λ-calcolo (e ogni modello di calcolo equivalente).
I problemi risolvibili dal calcolatore possono essere classificati anche in base alla loro complessità.

P, in questa classe si collocano tutti i problemi risolvibili in tempo polinomiale. Questi problemi vengono chiamati anche *trattabili* o *ragionevoli*.

NP, in questa classe si collocano tutti i problemi che ammettono un verificatore polinomiale. Ossia data un' istanza del problema e un'ipotetica soluzione deve esistere un algoritmo polinomiale che stabilisce se la soluzione è valida oppure no. Un esempio di problema NP è la ricerca di un ciclo hamiltoniano (ossia la ricerca di un ciclo in un grafo che includa tutti i nodi senza passare più volte nello stesso arco). Un altro esempio è l'algoritmo che stabilisce se una formula booleana sia soddisfacibile.

p.s. Se un problema è risolvibile in tempo polinomiale lo è in tutti i modelli di calcolo.

2 Lezione 2

2.1 Automi a stati finiti

Prima di definire gli automi a stati finiti introduciamo alcuni concetti.

Un *alfabeto* è un insieme Σ che contiene dei simboli. Questi simboli possono essere lettere, cifre o rappresentazioni. Un esempio di alfabeto è quello binario $\Sigma_0 = \{0, 1\}$.

Una *parola* è una sequenza di simboli che appartengono ad un certo alfabeto. Sia x una parola indichiamo con $|x|$ la lunghezza della parola x. Esiste la *parola vuota* e viene indicata con ε e indica la parola di lunghezza 0.

$\Sigma^\star$ è l'insieme di tutte le parole che posso costruire con l'alfabeto Σ. $|\Sigma^\star| = \infty$

Un *linguaggio* L è un sottoinsieme di $\Sigma^\star$.

Possiamo ora procedere con la definizione di automa a stati finiti. Spesso ci si riferisce ad essi con l'acronimo inglese DFA *[Deterministic Finite state Automata]*. Un automa a stati finiti è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0.F)$$

Dove:

Q è un insieme finito di stati;

Σ è l'alfabeto di input;

$q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è una funzione che dato uno stato di partenza e un simbolo in input restituisce lo stato di arrivo;

$F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali o di accettazione, ossia quegli stati che accettano parole in input.

Un automa a stati finiti può essere rappresentato attraverso un grafo dove i nodi rappresentano gli stati e sono etichettati con il nome dello stato. Gli stati sono il modo in cui un automa mantiene memoria di ciò che ha letto. Quando l'automa legge un simbolo c in input trovandosi in un certo stato q_1 deve sapere in che stato transitare. Questa informazione è data funzione δ, se tale stato è q_2 allora $\delta(q_1, c) = q_2$. Nel grafo questa informazione è rappresentata dagli archi che vengono etichettati dal simbolo che causa la transizione di stato. Al termine della lettura

della parola l'automa si troverà in un certo stato q_f, se $q_f \in F$ allora si dice che la parola viene accettata dall'automa. In sostanza una parola è un cammino sul grafo degli stati.
Definiamo ora la funzione $\delta^\star$ che prende in input una parola x e un qualsiasi stato $q \in Q$ e restituisce lo stato dell'automa al termine della computazione di x. Formalmente possiamo definire $\delta^\star$ ricorsivamente:

$$\delta^\star : Q \times \Sigma^\star \to Q$$

$$\forall q \in Q, \delta^\star(q, \varepsilon) = q$$

$$\forall q \in Q, \forall x \in \Sigma^\star, \forall a \in \Sigma, \delta^\star(q, xa) = \delta(\delta^\star(q, x), a)$$

Sia A un certo automa, $L(A)$ è il linguaggio di A, ossia l'insieme delle parole accettate da A. Più formalmente lo possiamo definire come segue:

$$L(A) = \{x | x \in \Sigma^\star \wedge \delta^\star(q_0, x) \in F\}$$

Allo stesso modo si può definire $L(A)^c$, ossia l'insieme delle parole non accettate dall'automa A.

2.2 Classe dei linguaggi regolari

Possiamo riunire sotto la classe dei linguaggi regolari tutti i linguaggi per cui esiste un automa che accetta quel linguaggio. Formalmente:

$$REG = \{L | L \subseteq \Sigma^\star \exists A \in DFA \wedge L(A) = L\}$$

Ordine canonico Indichiamo con *ordine canonico* un ordinamento quasi lessicografico. Più formalmente possiamo definirlo come segue:
Siano x, y parole, $x < y \Leftrightarrow |x| < |y| \vee |x| = |y|$ e x precede y in ordine lessicografico.
Prendendo come esempio $\Sigma_0^\star$ notiamo che l'ordinamento canonico è:

$$\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111...$$

Dimostriamo ora che $\Sigma_0^\star$ è un insieme numerabile, per far ciò costruiamo una biezione da $\mathbb{N}$ a $\Sigma_0^\star$.
Sia $f : \mathbb{N} \to \Sigma_0^\star$,

$f(2^n) = 0^n$

$f(2^n + i) = bin_n(i)\ 1 \geq i \leq 2^n - 1$

Per 0^n si intende la parola formata da tutti 0 lunga n.
Per $bin_n(i)$ si intende la parola che corrisponde alla rappresentazione in binario di i lunga n.

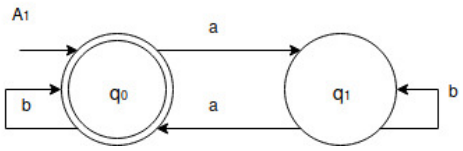
ε	0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	101
2^0	2^1	2^1+1	2^2	2^2+1	2^2+2	2^2+3	2^3	2^3+1	2^3+2	2^3+3	2^3+4	2^3+5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

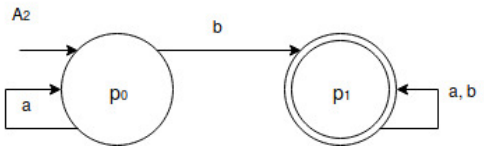
–manca dimostrazione biezione–

Unione di linguaggi regolari Vogliamo determinare se l'operazione di unione di linguaggi regolari è chiusa in REG, più formalmente ci stiamo chiedendo:

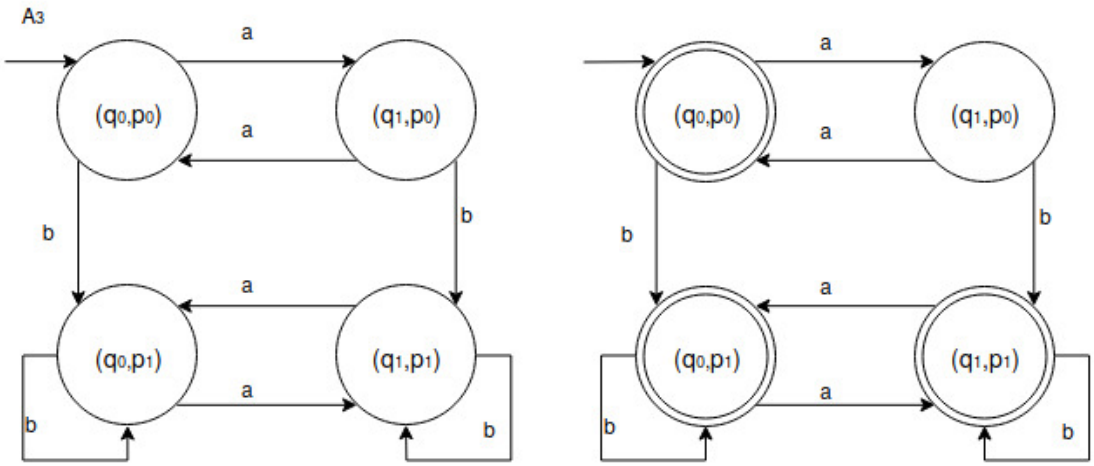
$$L, L' \in REG \Rightarrow L \cup L' \in REG$$

La risposta è sì, e rappresenta il primo passo nella costruzione di automi sempre più complessi.
Dimostrazione: Se $L \in REG$ allora $\exists A_1$ tale che $L(A_1) = L$, lo stesso vale per L', quindi $\exists A_2$ tale che $L(A_2) = L'$. Supponiamo di costruire un terzo automa A_3 che contenga sia A_1 che A_2 e che valuti l'input contemporaneamente sia su A_1 che su A_2 e accetti la parola solo se è accettata almeno da uno dei due.
Il seguente esempio renderà tutto più chiaro:
$L = \{x | x \in \{a,b\}^\star$ e con un numero pari di $a\}$
$L' = \{x | x \in \{a,b\}^\star \wedge x = ybz \wedge y, z \in \{a,b\}^\star\}$ ossia l'insieme delle parole in $\{a,b\}^\star$ che hanno almeno una b.
Costruiamo gli automi A_1 t.c. $L(A_1) = L$ e A_2 t.c. $L(A_2) = L'$.





Ora costruiamo l'*automa prodotto* rappresentando tutte le possibili combinazioni di stati che i due automi possono assumere in qualsiasi istante. Lo stato iniziale è lo stato che ha come combinazione gli stati iniziali degli automi di partenza. Per capire come aggiungere gli archi consideriamo lo stato (q_0, p_0), iniziamo chiedendoci in che stato l'automa deve transitare se l'input è a.
$\delta_3((q_0, p_0), a) = (\delta_1(q_0, a), \delta_2(p_0, a)) = (q_1, p_0)$, quindi aggiungiamo l'arco etichettato a da (q_0, p_0) a (q_1, p_0). Con la stessa logica aggiungiamo tutti gli archi e otteniamo il seguente automa.
Ora dobbiamo decidere quali sono gli stati finali. Dato che vogliamo ottenere l'unione dei due linguaggi gli stati finali sono quelli che nella propria etichetta contengono almeno uno stato finale degli automi di partenza.


A3
(q0,p0)
(q1,p0)
(q0,p1)
(q1,p1)
a
a
b
b
a
a
b
b
(q0,p0)
(q1,p0)
(q0,p1)
(q1,p1)
a
a
b
b
a
a
b
b

3 Lezione 3

3.1 Operazioni tra linguaggi regolari

Siano A_1 e A_2 due automi a stati finiti possiamo definire un automa A che accetti il risultato di una certa operazione tra il linguaggio di A_1 : e il linguaggio di A_2. Per ogni operazione binaria possiamo definire l'automa come segue:

$$A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$\delta = (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma \to Q_1 \times Q_2$$

Definita come segue:

$$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

$$q_0 = (q_0^1, q_0^2)$$

Possiamo definire anche $\delta^\star$:

$$\delta^\star((q_1, q_2), x) = (\delta_1^\star(q_1, x), \delta_2^\star(q_2, x))$$

Ora definiamo F per le due operazioni binarie.

Unione di linguaggi regolari

$$\exists A \in DFA\ L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$$

$$Q = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \wedge q_2 \in Q_2\}$$

$$F = (Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)$$

Intersezione di linguaggi regolari

$$\exists A \in DFA\ L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$$

$$Q = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \wedge q_2 \in Q_2\}$$

$$F = F_1 \times F_2$$

Complemento di un linguaggio regolare Definiamo separatamente il complemento di un linguaggio regolare.

$$L \in REG \Rightarrow \exists A \in DFA t.c. L(A) = L$$

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$A^c = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$$

$$L(A) \in REG \Leftrightarrow L^c(A) \in REG$$

3.2 Problemi di riduzioni, da automi a grafi

Per rispondere ad alcune domande sugli automi è comodo ridurre il problema ad un problema sui grafi.

Esempio 1: dato un automa A vogliamo sapere se $L(A)$ è finito, questo problema si può ridurre alla ricerca di un ciclo in un grafo. Per applicare l'algoritmo di ricerca dei cicli dobbiamo avere un *automa ridotto*, ossia un grafo che rappresenti l'automa solamente con stati che appartengono a cammini da q_0 ad un qualsiasi stato in F o da un qualsiasi stato in F a q_0.

Esempio 2: dato un automa A vogliamo sapere se $L(A) = \emptyset$, questo problema si può ridurre alla ricerca di un percorso da q_0 ad un qualsiasi stato in F. Se non esistono cammini da q_0 ad un qualsiasi stato in F allora $L(A) = \emptyset$.

Questi due problemi verranno discussi in dettaglio nella lezione 4.

3.3 Operazioni su parole

Concatenazione

$x, y \in \Sigma^\star \Rightarrow xy \in \Sigma^\star$

elemento neutro: ε, $x\varepsilon = x = \varepsilon x$

Potenza

$x \in \Sigma^\star \Rightarrow x^n = x...x$(x concatenata n volte con se stessa) $\in \Sigma^\star$

elemento neutro: 1, $x^1 = x$

elemento cancellatore: 0, $x^0 = \varepsilon$

3.4 Operazioni su linguaggi

Concatenazione

$L, L' \in REG \Rightarrow LL' = \{x | x \in \Sigma^\star \wedge \exists y \in L, z \in L' \wedge x = yz\}$

elemento neutro: $\{\varepsilon\}$, $L\{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\}L$

elemento cancellatore: $\emptyset$, $L\emptyset = \emptyset = \emptyset L$

Potenza

$L \in REG \Rightarrow L^n = \{x^n | x \in L \wedge n \geq 0\}$

elemento neutro: 1, $L^1 = L$

elemento cancellatore: 0, $L^0 = \{\varepsilon\}$

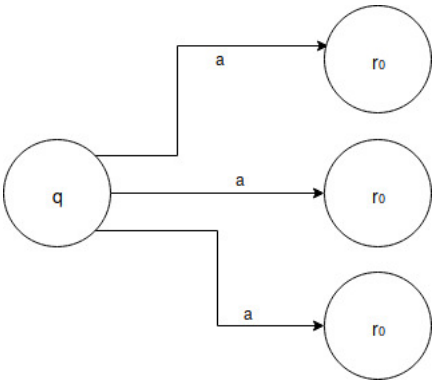
Estensione o stella di Kleene

$L^\star = \bigcup_{i \geq 0} L^i$

Questa operazione fu introdotta nel 1976 da Robin e Scott.

3.5 Automi non deterministici

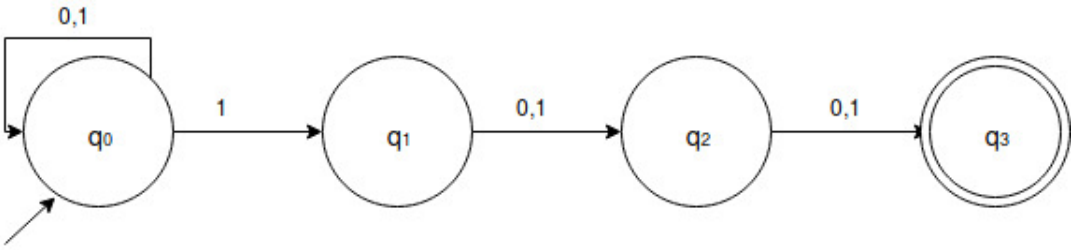
In generale Un automa a stati finiti non deterministico, in breve NFA, è un automa in cui esistono passi di calcolo non è univocamente determinati.
Immaginiamo di avere una macchina per il seguente automa:



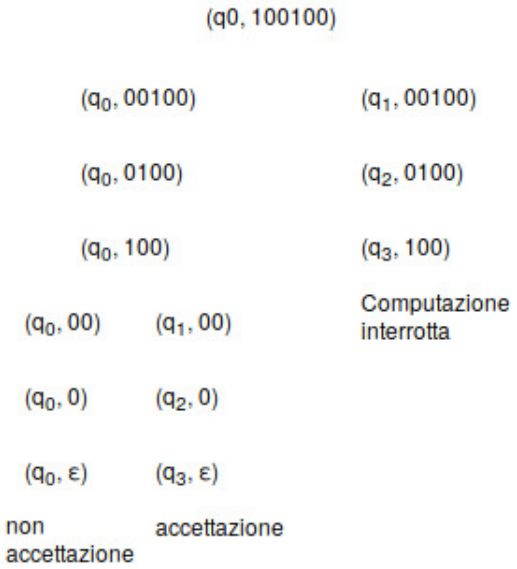
Possiamo immaginare la macchina eseguire i passi che corrispondono ad una sequenza di input e per ogni passo non univocamente determinato abbiamo delle macchine equivalenti che proseguono la computazione parallelamente per ogni possibile scelta di passo successivo.
Introduciamo ora il concetto di *configurazione*, sostanzialmente è un' estensione del concetto di stato e consiste nella coppia (q, x) dove q è uno stato dell'automa e x è la parola in input allo stato q.
Utilizzando le configurazioni possiamo rappresentare l'albero della computazione. Notare che nel caso di DFA abbiamo un albero degenere.

Primi esempi

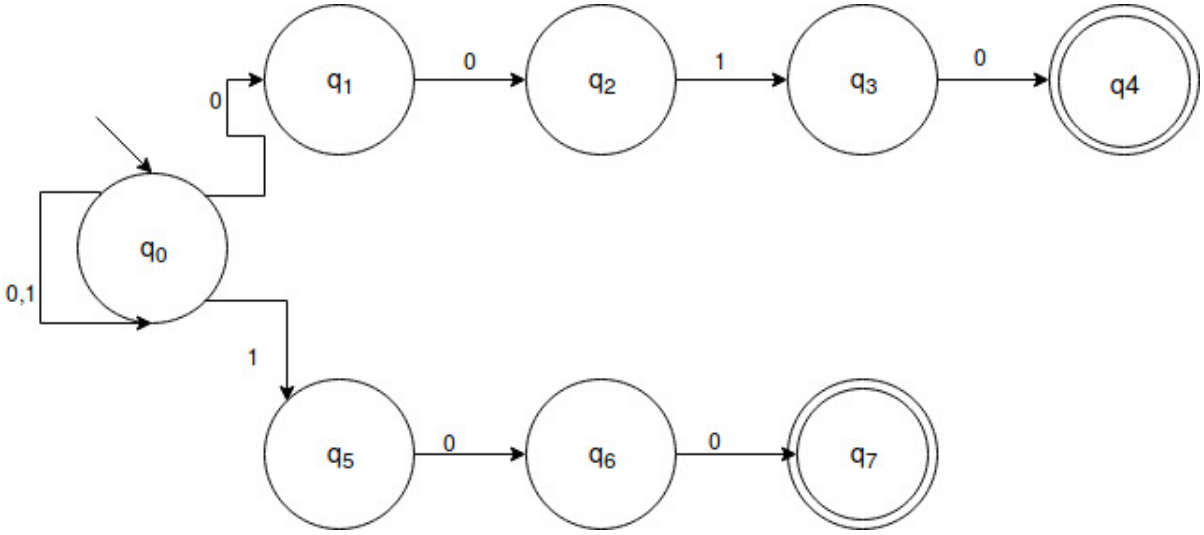
Esempio 1: $L = \{x1y | x \in \Sigma^\star \wedge y \in \Sigma^2\}$, ossia tutte le stringhe che hanno 1 come terzultimo simbolo.
Automa:



Albero della computazione:



Esempio 2: $L = \{x0010 | x \in \Sigma^\star\} \cup \{x100 | x \in \Sigma^\star\}$ Automa:



3.6 Dimostrazioni extra

Dimostrazione 1

$$\delta^\star((q_1, q_2), x) = (\delta_1^\star(q_1, x), \delta_2^\star(q_2, x))$$

Proviamo per induzione la precedente uguaglianza:
Ricordiamo che la definizione di $\delta^\star$ è

$\delta^\star(q, \varepsilon) = q \forall q \in Q$

$\delta^\star(q, xa) = \delta(\delta^\star(q, x), a) \forall q \in Q, x \in \Sigma^\star, a \in \Sigma$

Passo base: $x = \varepsilon$
$\delta^\star((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$ per definizione di $\delta^\star$ ma $(q_1, q_2) = (\delta(q_1, \varepsilon), \delta(q_2, \varepsilon))$

Passo induttivo: Supponiamo che l'uguaglianza valga per tutte le parole lunghe n, $(|x| = n, x \in \Sigma^\star)$, e proviamo che valga per le parole lunghe $n + 1$, $(xa, a \in \Sigma)$.

$\delta^\star((q_1, q_2), xa) = \delta(\delta^\star((q_1, q_2), x), a)$ per definizione di $\Sigma^\star$

$\delta((\delta^\star((q_1, q_2), x), a) = \delta((\delta_1^\star(q_1, x), \delta_2^\star(q_2, x)), a)$ per ipotesi induttiva

$\delta((\delta_1^\star(q_1, x), \delta_2^\star(q_2, x)), a) = (\delta_1(\delta_1^\star(q_1, x), a), \delta_2(\delta_2^\star(q_2, x), a))$ per definizione di δ

$(\delta_1(\delta_1^\star(q_1, x), a), \delta_2(\delta_2^\star(q_2, x), a)) = (\delta_1^\star(q_1, xa), \delta_2^\star(q_2, xa))$ per definizione di $\delta^\star$ $\square$

Dimostrazione 2 Dati due automi $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ con $L_1 = L(A_1)$ e $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ con $L_2 = L(A_2)$ esiste $A = (Q = Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, q_0, F = Q_1 \times F_2 \cup F_1 \times Q_2)$ tale che $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$. Vogliamo dimostrare che:

$$x \in L(A) \Leftrightarrow x \in L(A_1) \vee x \in L(A_2)$$

$$x \in L(A) \Leftrightarrow$$
$$\delta^\star((q_0^1, q_0^2), x) \in F \Leftrightarrow$$
$$(\delta_1^\star(q_0^1, x), \delta_1^\star(q_0^2, x)) \in F = Q_1 \times F_2 \cup F_1 \times Q_2) \Leftrightarrow$$
$$\delta_1^\star(q_0^1, x) \in F_1 \vee \delta_1^\star(q_0^2, x) \in F_2 \Leftrightarrow$$
$$x \in L(A_1) \vee x \in L(A_2) \square$$

4 Lezione 4

4.1 Algoritmi di problemi di riduzione

Algoritmo per linguaggio vuoto in DFA

Input: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in DFA$

Output: sì se $L(A) = \emptyset$, no altrimenti

Algoritmo:

1. Costruisci il grafo diretto $G = (V, E)$ così definito:

$$V = Q \cup \{t | t \notin Q\}$$

$$E = \{(p, q) | p, q \in Q \wedge \exists a \in \Sigma \wedge \delta(p, a) = q\} \cup \{(p, t) | p \in F\}$$

2. Verificare se c'è un cammino da q_0 a t; se sì rispondi no ($L(A)$ non vuoto), altrimenti rispondi sì

Complessità: $\Theta(|Q| + |Q| \times |\Sigma|)$.

Algoritmo per linguaggio finito in DFA

Input: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in DFA$

Output: sì se $L(A)$ è finito, no altrimenti

Algoritmo:

1. Costruisci il grafo $G = (V, E)$ così definito:

$$V = Q$$

$$E = \{(p, q) | p, q \in Q \wedge \exists a \in \Sigma \delta(p, a) = q\}$$

2. Elimina i nodi non raggiungibili da q_0 o dai quali non si raggiunge un nodo corrispondente ad uno stato finale.
3. Verifica se G è aciclico; se sì rispondi sì ($L(A)$ è finito), altrimenti rispondi no.
4. *Complessità:* $\Theta(|Q| + |Q| \times |\Sigma|)$.

4.2 Definizione formale di NFA

Possiamo definire un automa non deterministico esattamente come abbiamo fatto per gli automi deterministici, quello che cambia è la definizione della funzione δ. Quindi un NFA è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:

$$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$

Ossia $\delta(q, a) = \mathcal{P}(Q)$, quindi preso uno stato di partenza in Q e un carattere $a \in \Sigma$ la funzione stabilisce in quale insieme di stati può transitare l'automa dopo la lettura di a.
Notare che i DFA sono casi particolari di NFA, ossia NFA con stati singoletto.

4.3 Da NFA a DFA

Dopo aver capito l'utilità di costruire automi non deterministici ci chiediamo se esiste un modo formale per costruire un automa deterministico partendo da un automa non deterministico.

Teorema $\forall A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in NFA \; \exists A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \in DFA$ tale che:

$Q' = \mathcal{P}(Q)$

$\forall X \in \mathcal{P}(Q) \; \delta'(X, a) = \bigcup_{p \in X} \delta(p, a)$

$q_0 = \{q_0\}$

$F' = \{X | X \in \mathcal{P}(Q) \wedge X \cap F \neq 0\}$

Notare che $|Q'| = 2^{|Q|} - 1$.

Algoritmo

Input: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in NFA$

Output: $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \in DFA$

Algoritmo:

1. Poni $Q' = \{\{q_0\}\}$
2. Ripeti finchè in Q' ci sono stati non marcati
   2.1. Prendi un elemento non marcato $X \in Q'$
   2.2. Marca X

2.3. $\forall a \in \Sigma$

2.3.1. $Y_a = \bigcup_{p \in X} \delta(p, a)$

2.3.2. $\delta'(X, a) = Y_a$

2.3.3. $Y_a \notin Q' \Rightarrow$ aggiungi Y_a, non marcato, in Q'

2.4. $\delta'(X, a) = Y$

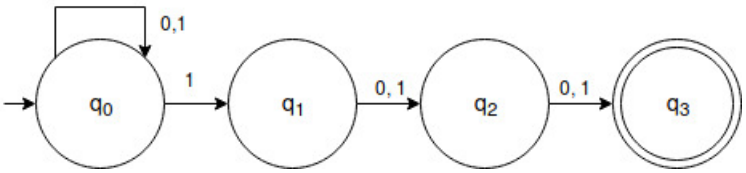
2.5. $Y \notin Q' \Rightarrow$ aggiungi Y, non marcato, a Q'

3. $\forall X \in \mathcal{P}(Q) - Q'$ $\delta'(X, a) = \emptyset$ $\forall a \in \Sigma$. Questo serve per rendere δ completo.

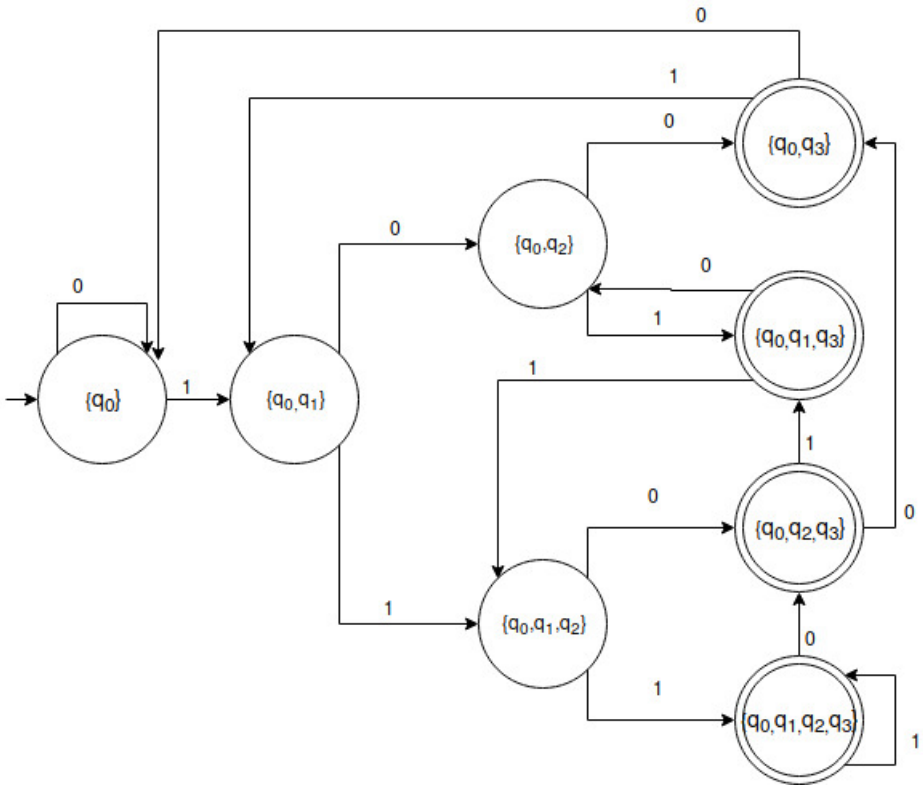
4. Poni $q_0 = \{q_0\}$ e $F' = \{X \in \mathcal{P}(Q) | X \cap F \neq \emptyset\}$

Esempio Automa A tale che $L(A) = \{x1ab | x \in \Sigma^\star \wedge a, b \in \Sigma\}$.

NFA:



DFA:



4.4 NFA con ε mosse

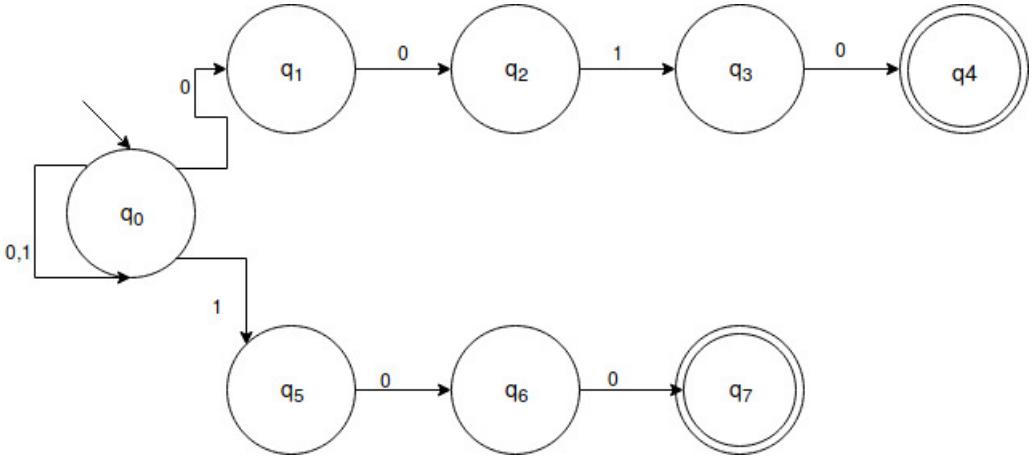
Vorremmo essere in grado di poter rappresentare dei cambi di stato non determinati da alcun input. Per far ciò usiamo la parola vuota. Più formalmente:

$$A = (Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F)$$

Dove:

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$
$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$$

Esempio 1: Ricerca stringhe nel testo. Sia $\Sigma =$ { alfabeto inglese } vogliamo definire un NFA A tale che $L(A) =$ { color, colour, web }.

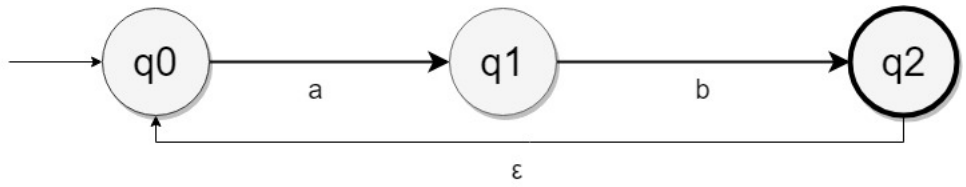


Esercizio 1: Automa che riconosce i numeri reali.

5 Lezione 5

5.1 ε-mossa

Introduciamo una mossa che permette la transizione di stato senza lettura di input. Non sempre la presenza della ε-mossa implica non determinismo.
Ad esempio volendo costruire un automa che arrivato allo stato finale torni allo stato iniziale possiamo usare tale mossa senza creare non determinismo.
Esempio:



5.2 Definizione formale di NFA_ε

Ciò che cambia negli NFA_ε è l'alfabeto di input, a Σ viene aggiunta ε che in questo caso rappresenta l'assenza di input. Quindi un NFA_ε è una quintupla così definita:

$$A = (Q, \Sigma_\varepsilon, \lambda, q_0, F)$$

Dove:

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$

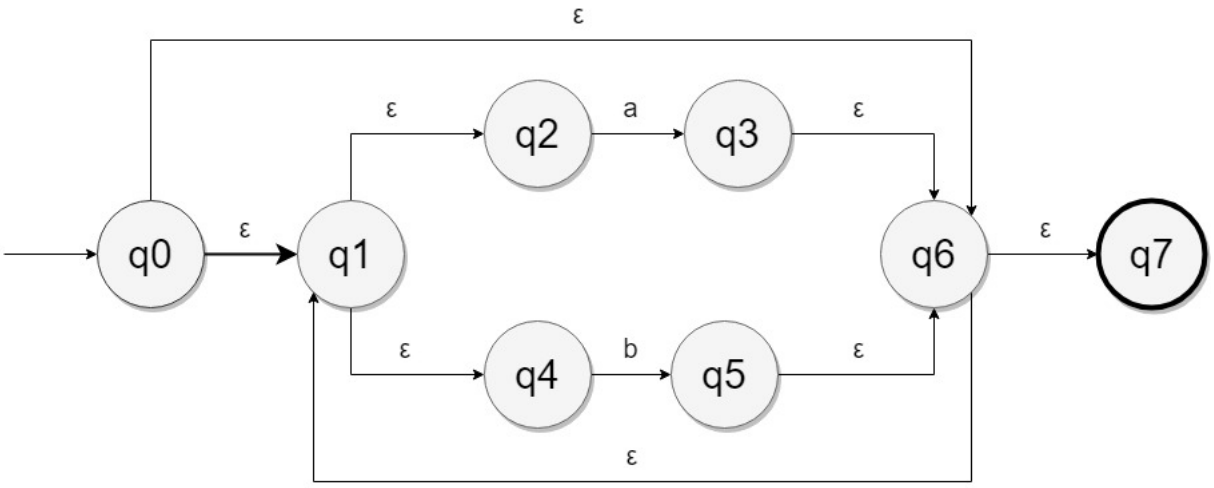
$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$$

Cambiando la definizione di δ dobbiamo ridefinire anche la funzione $delta^\star$:

$$\delta^\star(q, \varepsilon) = q \cup \delta(q, \varepsilon)$$

$$\delta^\star(q, xa) = \delta(\delta^\star(q, x), a)$$

Esempio:



5.3 Da NFA_ε a DFA

Chiusura rispetto alla ε-mossa $\varepsilon - C(q) =$ insieme degli stati raggiungibili da q eseguendo solo ε mosse.

Definiamo la chiusura di un insieme X di stati rispetto alla ε-mossa come l'insieme degli stati raggiungibili con un numero arbitrario di ε mosse da almeno uno stato nell'insieme X. Più formalmente:

$$\varepsilon - C(X) = \bigcup_{q \in X} \varepsilon - C(q)$$

Algoritmo

Input: $A = (Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F) \in NFA$

Output: $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \in DFA$ tale che $L(A) = L(A')$

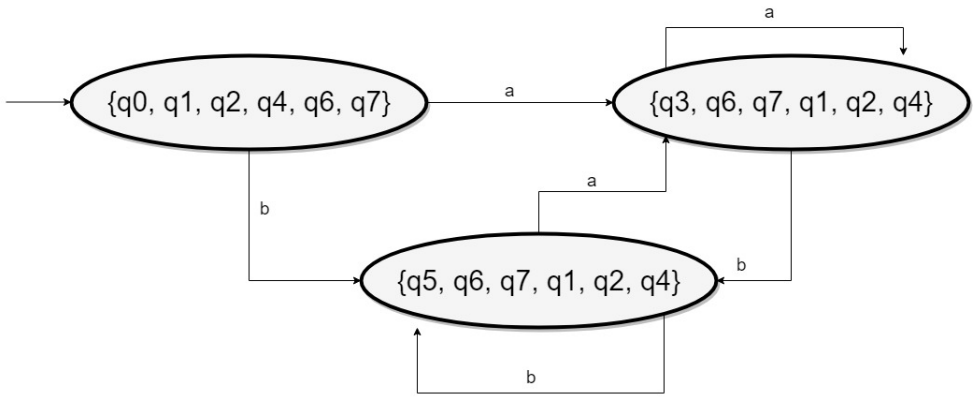
Algoritmo:

1. Poni $Q' = \varepsilon - C(q_0)$
2. Ripeti finchè in Q' ci sono stati non marcati
   2.1. Prendi un elemento non marcato $X \in Q'$
   2.2. $\forall a \in \Sigma$
      2.2.1. $Y_a = \bigcup_{p \in X} \delta(p, a) \cup \varepsilon - C(p)$
      2.2.2. $\delta'(X, a) = Y_a$
      2.2.3. $Y_a \notin Q' \Rightarrow$ aggiungi Y_a, non marcato, in Q'

2.3. $\forall X \in \mathcal{P}(Q) - Q' \Rightarrow \delta'(X, a) = \emptyset \ \forall a \in \Sigma$. Questo serve per rendere δ completo.

2.4. Poni $q'_0 = \varepsilon - C(q_0)$ e $F' = \{Y \in Q' | Y \cap F \neq \emptyset\}$

Esempio: Il DFA che segue è il risultato dell'applicazione dell'algoritmo sull'NFA dell'esempio precedente.



5.4 Automa prodotto

Siano A_1 e A_2 due automi così definiti:
$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ tale che $L = L(A_1)$
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ tale che $L' = L(A_2)$
e che valga $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.
L'automa prodotto è $A = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0^1, F_2)$ con δ definita come segue:

$$A = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0^1, F_2)$$

Dove:

$$\delta(q, a) = \delta_1(q, a) \forall q \in Q_1 - F_1, \forall a \in \Sigma_\varepsilon$$
$$\delta(q, a) = \delta_1(q, a) \forall q \in F_1, \forall a \in \Sigma$$
$$\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon) \cup q_0^2 \forall q \in F_1$$
$$\delta(q, a) = \delta_2(q, a) \forall q \in Q_2, \forall a \in \Sigma$$

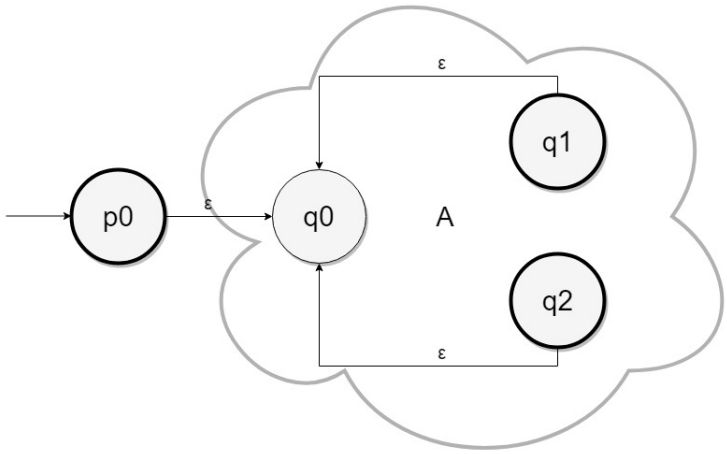
5.5 Automa chiusura a stella di Kleene

Siano A' un automa così definito:
$A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ tale che $L = L(A')$
L'automa che accetta $L^\star$ è definito come segue:

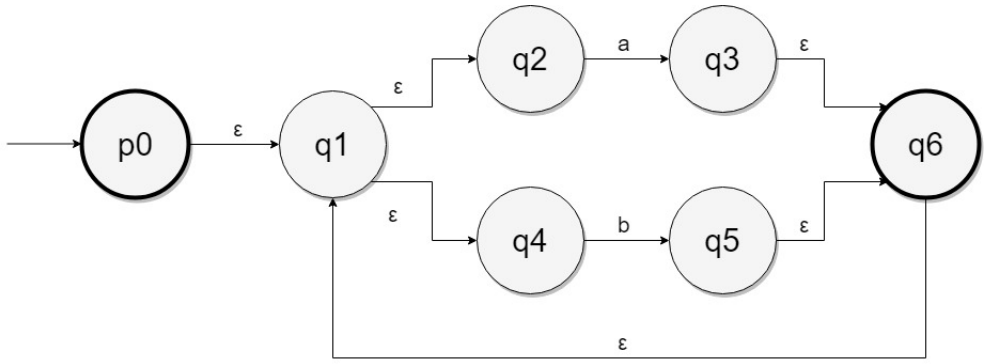
$$A = (Q \cup \{p_0\}, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \cup \{p_0\})$$

Dove:

$$p_0 \notin Q$$
$$\delta(q,a) = \delta'(q,a) \forall q \in Q - F, \forall a \in \Sigma$$
$$\delta(p_0, \varepsilon) = \{q_0\}$$
$$\delta(q,a) = \delta'(q,a) \forall q \in F_1, \forall a \in \Sigma$$
$$\delta(q,\varepsilon) = \delta'(q,\varepsilon) \cup q_0 \forall q \in F_1$$



Esempio: Automa che riconosce il linguaggio $L = \{L^\star\}$



5.6 Automa complemento

Per ottenere l'automa complemento di un NFA bisogna prima passare al DFA equivalente e poi effettuare il complemento su di esso.

6 Lezione 6

6.1 Pumping lemma

$L \in REG \Rightarrow \exists n > 0$ t.c. $\forall w \in L\ |w| \geq n\ \exists x, y, z\ w = xyz$
Vale:

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| \geq 1$
3. $\forall i \geq 0 xy^i z \in L$

Dimostrazione: $L \in REG \Rightarrow \exists A \in DFA$ che riconosce L con n stati. Sia $p \in L$ t.c. $|p| \geq n$, il cammino che determina in A è composto da almeno $n+1$ stati. Se il cammino è composto da un numero di nodi maggiore del numero degli stati vuol dire che in esso è presente un ciclo. Inoltre possiamo dire che questo ciclo si presenta necessariamente entro l'n-esimo passo di computazione poiché nella sequenza di nodi attraversati ci sarà necessariamente almeno una ripetizione.
Questo lemma negato è utile per dimostrare la non regolarità di un linguaggio.

6.2 Pumping lemma negato

$L \notin REG \Rightarrow \forall n > 0 \exists w \in L\ |w| \geq n\ \forall x, y, z$ t.c. $w = xyz$
Vale:

1. $|xy| \leq n$
2. $|y| \geq 1$
3. $\exists i \geq 0 xy^i z \notin L$

6.3 Applicazione Pumping lemma negato

Esempio 1: Dimostrare che $L = \{ww | w \in \{0,1\}^\star\} \notin REG$.
Dato $p \in \mathbb{N}$ vogliamo trovare una parola $w \in L$ t.c. $|w| \geq p$ e che per ogni sua scomposizione $w = xyz$ esiste un i t.c. $W' = xy^i z \notin L$.
Scriviamo in maniera generica w. Ad esempio $w = 0^p 10^p 1$, questa parola è evidentemente più lunga di p.
Scegliamo come scomposizione $x = 0^r$,$y = 0^s$,$z = 0^{p-(r+s)}10^p$ con $r \geq 0$, $s\,0$, $t \geq 0$.
Adesso scriviamo $w' = xy^i z$ per la scomposizione che abbiamo scelto: $0^r(0^s)^i 0^{p-(r+s)}10^p 1$.
Affinché $w' \notin L$ deve essere vero che: $r+is+p-(r+s) \neq p$, questo perchè vogliamo "rompere" la simmetria della parola. Semplificando otteniamo che $is - s \neq 0$ e questo è vero $\forall i \neq 1$.

Più intuitivamente si può dire che per "rompere" la simmetrie basta elevare a 0 y per ottenere un numero di 0 nella prima metà della parola inferiore al numero di 0 nella seconda metà della parola.

Esempio 2: Dimostrare che $L = \{w | w \in \{a,b\}^\star \wedge n_a(w) = n_b(w)\} \notin REG$.
Dato $p \in \mathbb{N}$ vogliamo trovare una parola $w \in L$ t.c. $|w| \geq p$ e che per ogni sua scomposizione $w = xyz$ esiste un i t.c. $w' = xy^iz \notin L$.
Procediamo scrivendo in maniera generica una parola che appartiene ad L. Ad esempio:
$w = b^p a^p$, $|w| \geq p$ dato che $|b^p| = p$.
Ora scomponiamo in maniera generica w:
$x = b^r$, $y = b^s$, $z = b^t a^p$ t.c. $r \geq 0$, s 0, $t \geq 0$ e $r + s + t = p$.
Adesso scriviamo $w' = xy^iz$ per la scomposizione che abbiamo scelto: $b^r(b^s)^i b^t a^p$.
Per ottenere $w' \notin L$ deve valere che $r + is + t \neq p$, ma questo è vero $\forall i \neq 1$.

Esempio 3: Dimostrare che $L' = \{w | w \in \{a,b\}^\star \wedge n_a(w) \neq n_b(w)\} \notin REG$.
Sta volta il Pumping lemma non ci aiuta e dobbiamo ragionare diversamente. Nell'esempio 3 è stato dimostrato che $L \notin REG$ ma $L = L'^c$ quindi possiamo concludere che $L' \notin REG$ poiché il suo complemento non è regolare.

Esempio 4: Dimostrare che $L = \{a^n b^m | n \neq m \wedge n, m \geq 0\} \notin REG$.
Per questo esempio di nuovo il Pumping lemma non ci aiuta. Proviamo a dimostrare la sua non regolarità per assurdo.
Supponiamo che $L \in REG$ e consideriamo un altro linguaggio che possiamo dimostrare non essere regolare sfruttando il Pumping lemma: $L' = \{a^n b^m | n = m \wedge n, m \geq 0\}$. Definiamo ora il complemento di L' come unione di L e di un altro linguaggio. Essendo L' il linguaggio delle parole formate da un certo numero di a seguite dallo stesso numero di b il suo complemento sarà formato da:

- L, ossia tutte le parole che seguono l'ordinamento di L' (a prima di b) in cui il numero di a differisce dal numero di b;
- $\{xbyaz | x, y, z \in \{a,b\}^\star\}$, ossia tutte le parole che non seguono l'ordinamento di L'.

Ora possiamo scrivere che $L'^c = L \cup \{xbyaz | x, y, z \in \{a,b\}^\star\}$. Abbiamo supposto che $L \in REG$, sappiamo che $\{xbyaz | x, y, z \in \{a,b\}^\star\} \in REG$. La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'unione quindi $L'^c \in REG$, ed è chiusa anche rispetto al complemento quindi $L' \in REG$. Questo è un assurdo in quanto sappiamo che $L' \notin REG$.

7 Lezione 7

7.1 Le espressioni regolari

Le espressioni regolare, dall'inglese *Regular Expression* in breve **RE**, sono un linguaggio formale alternativo agli automi. Le espressioni regolari denotano un linguaggio formale.

Definizione induttiva

Passo base:

- $\forall a \in \Sigma$ a è una RE;
- ε è una RE;
- $\emptyset$ è una RE.

Passo induttivo: Se R_1 e R_2 sono RE allora:

- $R_1 \cup R_2$ o $R_1 + R_2$ è una RE;
- $R_1 R_2$ è una RE;
- $R_1^\star$ è una RE.

Linguaggi denotati da RE

$a \in \Sigma$ denota $L = \{a\}$;

ε denota $L = \{\varepsilon\}$;

$\emptyset$ denota $L = \emptyset$;

$L(R_1 + R_2) = L(R_1) \cup L(R_2)$;

$L(R_1 R_2) = L(R_1)L(R_2)$;

$L(R_1^\star) = (L(R_1))^\star$.

Ricordiamo che:

$R\emptyset = \emptyset = \emptyset R$;

$\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$;

$\emptyset^\star = \{\varepsilon\}$, questo rappresenta l'unico caso in cui l'operazione della stella di Kleene restituisce un insieme finito.

7.2 Da RE a NFA

Data $R \in RE \Rightarrow \exists A \in NFA$ t.c. $L(R) = L(A)$.

Dimostrazione: per dimostrare questa implicazione ci baseremo sulla definizione induttiva di RE.

Passo base:

- $a \in \Sigma \Rightarrow$ possiamo rappresentare a come un automa costituito da un arco etichettato a tra lo stato inziale q_i e lo stato finale q_f.
- $\varepsilon \in \Sigma \Rightarrow$ possiamo rappresentare ε come un automa costituito dallo stato iniziale che è anche finale.
- $\emptyset \Rightarrow$ possiamo rappresentarlo come un automa costituito dal solo stato iniziale.

Passo induttivo:

- $R_1 \cup R_2 \Rightarrow \exists A_1, A_2 \in NFA$ t.c. $L(A_1) = L(R_1) \wedge L(A_2) = L(R_2) \wedge L(A_1 \cup A_2) = L(R_1 \cup R_2)$.
- $R_1 + R_2 \Rightarrow$ come sopra ma con l'intersezione.
- $R_1^\star \Rightarrow \exists A_1$ t.c. $L(A_1) = L(R_1) \Rightarrow L(A_1)^\star = L(R_1)^\star \Rightarrow L(A_1^\star) = L(R_1^\star)$.

7.3 Da DFA a RE

Dato $A \in DFA \Rightarrow \exists R \in RE$ t.c. $L(A) = L(R)$.

Dimostrazione: per dimostrare questa implicazione esibiremo un algoritmo che dato un DFA fornisce la RE equivalente e motiveremo la sua correttezza.

Input: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in DFA$

Output: $R \in RE$ t.c. $L(R) = L(A)$

Algoritmo:

1. Trasformare A in un $GNFA$ in forma normale.
2. Ripeti l' eliminazione di uno stato finché resta solo la coppia di stati iniziale e finale, (q_0, q_f).
3. L'etichetta che resta sulla transizione dallo stato iniziale a quello finale è la RE che denota il linguaggio accettato da A.

GNFA in forma normale:
$GNFA$ sta per *Generalized NFA*, ossia un automa in cui ogni transizione è etichettata con una RE. Un $GNFA$ per essere in forma normale deve avere le seguenti proprietà:

1. Esiste un unico stato finale diverso da quello iniziale.
2. Lo stato iniziale non deve avere archi entranti.
3. Lo stato finale non deve avere archi uscenti.
4. Tra ogni coppia di stati esiste un unico arco.
5. Tra ogni coppia di stati esiste almeno un arco. Quest'ultima proprietà serve per rendere δ completa, quindi per ogni coppia di stati non legata da nessun arco bisogna aggiungere un arco etichettato $\emptyset$.

Passo di eliminazione di uno stato:
Dato uno stato $q \in Q$ vogliamo eliminarlo senza cambiare il linguaggio accettando dall'automa. Per ogni $u, s \in Q$ t.c. esiste un cammino da u ad s passante per q e di lunghezza 3, creo un arco da u ad s etichettato dalla RE che consentiva di transitare da u ad s passando per q.
Correttezza:
La correttezza di questo algoritmo risiede nel fatto che ad ogni passo di eliminazione il linguaggio accettato dall'automa non viene alterato. Per tale motivo al termine delle eliminazioni avremo una sola etichetta tra lo stato iniziale e quello finale, tale etichetta è proprio la RE che denota il linguaggio accettato dall'automa.

8 Lezione 8

8.1 Context Free Grammar

Introduzione Una *GFG*, *[Contex Free Grammar]* , è un meccanismo che consente di generare tutte le parole di un certo linguaggio. Quindi date delle regole di derivazione, delle variabili e dei terminali dobbiamo essere in grado di applicare le regole ripetutamente partendo da una variabile di partenza fino ad arrivare ad una stringa composta da terminali che corrisponde ad una parola del linguaggio descritto dalla CFG.
Le GCF sono applicate nello sviluppo di parser per i compilatori poichè consentono di effettuare un analisi sintattica dei programmi.

Definizione formale Una grammatica G è una quadrupla così definita:

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

Dove:

V è un insieme finito di *variabili*;

Σ è un insieme finito di *terminali*;

R è un insieme finito di *regole*;

$S \in V$ è la *variabile di partenza*.

Definiamo anche una relazione binaria $\Rightarrow \subseteq (V \times (V \cup \Sigma)^\star)$. Questa relazione è ciò che ci consente di effettuare una sostituzione mediante l'uso delle regole, ad esempio siano $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^\star$ e $S \in V$ allora $uSv \Rightarrow uwv$.
Sfruttando questa relazioni possiamo anche definire il concetto di *derivazione*, che consiste in una sequenza di sostituzioni, e indicheremo con $\Rightarrow^\star$.
Una derivazione può essere descritta anche dall'*albero di derivazione*. La radice è sempre la variabile di partenza, i figli della radice sono il risultato della prima sostituzione. Ogni nodo se è un terminale allora non può più essere derivato e quindi è una foglia, se è una variabile viene effettuata una sostituzione e i suoi figli sono il risultati e a seconda delle regole possono essere altre variabili e/o terminali.

Esempi

Esempio 1: Grammatica per il linguaggio delle parole palindrome $PAL = \{x | x \in 0, 1^\star \wedge x = x^{rev}\}$.

Variabili: $V = \{S\}$

Terminali: $\Sigma = \{0, 1\}$

Regole: $R = \{S \to 0|1|\varepsilon,\ S \to 0S0|1S1\}$

Variabile di partenza: S

Esempio 2: Grammatica per il linguaggio $L = \{0^n 1^n n \geq 0\}$.

Variabili: $V = \{S\}$

Terminali: $\Sigma = \{0, 1\}$

Regole: $R = \{S \to \varepsilon,\ S \to 0S1\}$

Variabile di partenza: S

Esempio 3: Grammatica per il linguaggio per le operazioni aritmetiche.

Variabili: $V = \{E, I\}$

Terminali: $\Sigma = \{a, b, (,), +, \times\}$

Regole: $R = \{E \to I|(E)|E + E|E \times E,\ I \to a|b\}$

Variabile di partenza: E

9 Lezione 9

9.1 La classe dei linguaggi descrivibili dalle CFG

Possiamo ora definire una nuova classe di linguaggi, ossia quelli denotati dalle grammatiche context free.

$$L(CFG) = \{L | \exists G \in CFG \wedge L(G) = L\}$$

Come la classe dei linguaggi regolari, anche questa classe gode di alcune proprietà di chiusura rispetto a delle operazioni che ci consentono di creare grammatiche complesse sulla base di grammatiche semplici.

Unione: Dati $L, L' \in L(CFG) \Rightarrow L \cup L' \in L(CFG)$
Siano $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1) \in CFG$ e $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ definiamo l'unione delle due grammatiche come segue: $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \Sigma, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1|S_2\}, S)$. Aggiungendo la regola $S \to S_1|S_2$ stiamo imponendo che la prima derivazione sia la o la variabile di partenza di G_1 o quella di G_2. Notare che non vogliamo che le regole si mescolino per tale motivo deve valere che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Prodotto: Dati $L, L' \in L(CFG) \Rightarrow LL' \in L(CFG)$
Siano $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1) \in CFG$ e $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ definiamo il prodotto delle due grammatiche come segue: $G_1G_2 = (V_1 \cup V_2, \Sigma, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1S_2\}, S)$. Aggiungendo la regola $S \to S_1S_2$ stiamo imponendo che la prima derivazione sia la concatenazione delle variabili di partenza di G_1 e di G_2. Per lo stesso motivo di prima $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Esempio: Dato il linguaggio $L = \{0^n1^m | n \neq m \wedge n, m \geq 0\}$ vogliamo trovare una grammatica per L scomponendolo in linguaggi più semplici, per i quali trovare una grammatica sia facile, per poi unirle ed ottenere una grammatica per L.
Possiamo scrivere L come l'unione dei seguenti linguaggi:

$L_1 = \{0^n, n \geq 1\}$, per il quale possiamo definire la grammatica con le seguenti regole $R_1 = \{S_0 \to 0|0S_0\}$ con S_0 variabile di partenza.

$L_2 = \{1^m, m \geq 1\}$, per il quale possiamo definire la grammatica con le seguenti regole $R_2 = \{S_1 \to 1|1S_1\}$ con S_1 variabile di partenza.

$L_3 = \{0^n1^m, n > m > 0\}$ che senza perdita di generalità possiamo riscrivere come $L_3 = \{0^{m+p}1^m, m, p > 0\}$, per il quale possiamo definire la grammatica con le seguenti regole $R_3 = \{S_2 \to S_0S', S' \to 0S'1|01\}$ con S_2 variabile di partenza.

$L_4 = \{0^n 1^m m > n > 0\}$ che senza perdita di generalità possiamo riscrivere come $L_3 = \{0^n 1^{n+p}, n, p > 0\}$, per il quale possiamo definire la grammatica con le seguenti regole $R_4 = \{S_3 \to S' S_1\}$ con S_3 variabile di partenza.

Notare che, sapendo di dover fare l'unione, alcune variabili delle grammatiche che descrivono i linguaggi semplici $L_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sono definite in un solo linguaggio e poi riutilizzate negli altri, ad esempio S_0 o S'.
Combinando le regole scritte per il linguaggi semplici otteniamo che la grammatica per L è $G = (V, \Sigma, R, S)$ dove:

$V = \{S, S_0, S_1, S_2, S_3, S'\}$;

$\Sigma = \{0, 1\}$;

$R = \{S \to S_0|S_1|S_2|S_3,\ S_0 \to 0|0S_0,\ S_1 \to 1|1S_1,\ S_2 \to S_0 S',\ S_3 \to S' S_1,\ S' \to 0S'1|01\}$.

9.2 Grammatiche ambigue

Intanto diciamo che una *derivazione leftmost* o *derivazione canonica a sinistra* è una derivazione in cui l'ordine di derivazione da precedenza alle variabili scritte più a sinistra.
Una grammatica G si dice *ambigua* se esiste almeno una parola in $L(G)$ che può essere derivata con almeno due diverse derivazioni leftmost.
Data una grammatica ambigua G, ottenere G' non ambigua ed equivalente a G non è algoritmicamente risolvibile.
Esistono anche *linguaggi intrinsecamente ambigui*, ossia non esiste grammatica non ambigua che li genera. Ad esempio $L = \{a^i b^j c^k | i = joj = k, i, j, k \geq 0\}$

Gestire l'ambiguità Segue un esempio di come modificare una grammatica ambigua per il linguaggio delle espressioni aritmetiche per renderla non ambigua.
Data la grammatica $G = (V, \Sigma, R, E)$ dove:

$V = \{E, I\}$;

$\Sigma = \{a, b, (,), +, \times\}$;

$R = \{E \to (E)|E + E|E \times E|I, I \to a|b\}$;

Possiamo vedere che è possibile ricavare l'espressione $a + b \times b$ attraverso due diverse derivazioni leftmost:

$$E \Rightarrow E \times E \Rightarrow E + E \times E \Rightarrow a + E \times E \Rightarrow a + b \times E \Rightarrow a + b \times b$$

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + E \times E \Rightarrow a + b \times E \Rightarrow a + b \times b$

Modifichiamo ora la grammatica in modo che non risulti più ambigua:

$V = \{E, T, F, I\}$, dove T la possiamo interpretare come la variabile dei termini e F la come la variabile dei fattori;

$\Sigma = \{a, b, (,), +, \times\}$;

$R = \{E \to T|E + T, T \to F|T \times F, F \to I|(E), I \to a|b\}$;

9.3 Problemi decidibili e indecidibili

Un problema si dice *decidibile* se esiste un algoritmo che lo risolve.
Un problema si dice *indecidibile* se non esiste un algoritmo che lo risolve.
Seguono esempi di problemi:

Problema 1: Disambiguazione di una grammatica è un problema indecidibile

Problema 2: Dati $A_1, A_2 \in DFA$ dire se $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ è decidibile. Sì, possiamo riformulare $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ come $L(A_1) \cup L(A_2)^c = \emptyset$ che sappiamo essere un problema decidibile

Problema 3: Dati $A_1, A_2 \in DFA$ dire se $L(A_1) = L(A_2)$ è decidibile? Sì, perchè $L(A_1) = L(A_2) \Leftrightarrow L(A_1) \subseteq L(A_2) \wedge L(A_2) \subseteq L(A_1)$.

Problema 4: Dato $A \in DFA$ dire se $L(A) = \Sigma^\star$ è decidibile. Sì e possiamo vedere il problema in due diversi modi. Il primo è ricondurlo all'equivalenza di due linguaggi. Il secondo è riformulare il problema come segue: $L(A)^c = \emptyset$.

Problema 5: Dati $A_1, A_2 \in DFA$ dire se esiste una parola x t.c. $x \notin L(A_1) \wedge x \notin L(A_2)$. Anche questo problema è decidibile e può essere risolto in due diversi modi. Possiamo dire che $(L(A_1) \cup L(A_2))^c \neq \emptyset \Rightarrow \exists x$ t.c. $x \notin L(A_1) \wedge x \notin L(A_2)$. Oppure possiamo risolvere verificando se almeno uno dei linguaggi è uguale a $\Sigma^\star$.

10 Lezione 10

10.1 Forma normale di Chomsky

La forma normale di Chomsky è la più semplice e utile forma in cui esprimere una CFG. Diciamo che una grammatica $G = (V, \Sigma, R, S)$ è nella forma normale di Chomsky se ogni regola in R è nella forma:

$$A \to BC | A, B, C \in V$$

$$A \to a | A \in V, a \in \Sigma$$

Inoltre Sipser aggiunge che sia permessa la regola cencellante:

$$S \to \varepsilon$$

e che per limitare la lunghezza della derivazione S non deve essere nella parte destra di nessuna regola.

Algoritmo per ottenere una grammatica in forma normale di Chomsky

Input: $G = (V, \Sigma, R, S) \in CFG$.

Output: $G' = (V', \Sigma, R', S')$ equivalente a G ma in forma normale di Chomsky.

Algoritmo:

0. Dato che non vogliamo che la variabile di partenza S compaia nella parte destra delle regole allora aggiungiamo S_0 in V come variabile di partenza e la regola $S_0 \to S$.
1. **Eliminazione delle regole cancellanti**
2. **Eliminazione delle regole unitarie**
3. **Eliminazione delle variabili e regole inutili**
4. **Sostituzione delle regole con parte destra più lunga di tre e sostituzione dei terminali con delle variabili**
5. Aggiungiamo la regola $S_0 \to \varepsilon$ se necessario.

Notare che i passi 0 e 5 sono stati aggiunti da Sipser e la forma normale di Chomsky originale prevede solo i passi da 1 a 4.
Ora vediamo nel dettaglio i passi dal 1 al 4:

1. **Eliminazione delle regole cancellanti**

Input: $G = (V, \Sigma, R, S)$

Output: $G' = (V', \Sigma, R', S')$ equivalente a G ma senza regole cancellanti

Algoritmo:

- Sia $NULL$ l'insieme delle variabili implicate in regole cancellanti.
- Definiamo inizialmente $NULL$ come $NULL_0 = \{A | A \in V \wedge A \to \varepsilon\}$.
- Ripetiamo $NULL_i = NULL_{i-1} \cup \{A | A \in V \wedge A \to u_1 ... u_k \in R \wedge u_j \in NULL_{i-1} 1 \leq j \leq k\}$ finché $NULL_i \neq NULL_{i-1}$ o $NULL_i \neq V$.
- $\forall A \in NULL$, $\forall B \to uAv \in R$ t.c. $B \in V, u, v \in (V \cup \Sigma)^\star$ aggiungo una nuova regola $B \to uv$. Notare che se u e v sono composte interamente da variabili che appartengono a NULL allora possiamo direttamente non aggiungere la regola.
- Eliminiamo tutte le regole nella forma $A \to \varepsilon, \forall A \in NULL$.

2. **Eliminazione delle regole unitarie**

   Input: $G = (V, \Sigma, R, S)$

   Output: $G' = (V', \Sigma, R', S')$ equivalente a G ma senza regole unitarie

   Algoritmo:

   - Sia $UNIT$ l'insieme delle variabili implicate in regole unitarie.
   - Definiamo inizialmente $UNIT$ come $UNIT_0 = \{(A, A) | A \in V\}$. Ossia stiamo considerando le regole unitarie implicite della forma $A \to A$ che equivale a non applicare nessuna regola in un passo di derivazione.
   - Ripetiamo $UNIT_i = UNIT_{i-1} \cup \{(A, C) | (A, B) \in UNIT_{i-1} \wedge B \to C \in R\}$ finché $UNIT_i \neq UNIT_{i-1}$ o $UNIT_i \neq V$.
   - $\forall (A, B) \in UNIT$ se esiste la regola $B \to u, u \in (V \cup \Sigma)^\star$ aggiungo la regola $A \to u$ ed elimino le regole unitarie.

3. **Eliminazione delle variabili e regole inutili** Le variabili sono inutili se:

   (a) partendo da essa non è possibile derivare una stringa di terminali per qualsiasi numero di passi. Queste variabili sono chiamate *variabili non produttive*.

   (b) dalla variabile iniziale non è possibile derivarla. Queste variabili sono chiamate *variabili non derivabili*.

Suddividiamo questo passo in due algoritmi che si occupano rispettivamente dell'eliminazione delle variabili non produttive e delle variabili non derivabili.

Eliminazione delle variabili non produttive

Input: $G = (V, \Sigma, R, S)$

Output: $G' = (V', \Sigma, R', S')$ equivalente a G ma senza regole non produttive

Algoritmo:

- Sia $PROD$ l'insieme delle variabili produttive
- Definiamo inizialmente $PROD$ come $PROD_0 = \{A | A \in V \wedge A \to u \in R \wedge u \in \Sigma^{Star}\}$.
- Ripetiamo $PROD_i = PROD_{i-1} \cup \{A | A \in V \wedge A \to u \in R \wedge u \in PROD_{i-1}\}$ finché $PROD_i \neq PROD_{i-1}$ o $PROD_i \neq V$.
- Eliminiamo tutte le regole in cui occorrono elementi che appartengono a $V - PROD$.

Eliminazione delle variabili non derivabili

Input: $G = (V, \Sigma, R, S)$

Output: $G' = (V', \Sigma, R', S')$ equivalente a G ma senza regole non derivabili

Algoritmo:

- Sia DER l'insieme delle variabili derivabili
- Definiamo inizialmente DER come $DER_0 = \{S\}$.
- Ripetiamo $DER_i = DER_{i-1} \cup \{A | \exists B \in DER_{i-1} \wedge B \to uAv \in R\}$ finché $DER_i \neq DER_{i-1}$ o $DER_i \neq V$.
- Eliminiamo tutte le regole in cui occorrono elementi che appartengono a $V - DER$.

4. **Sostituzione delle regole con parte destra più lunga di tre e sostituzione dei terminali con delle variabili**
   - Se sono presenti regole del tipo $A \to u_1 ... u_k$ con $k \geq 3$ la sostituisco con una serie di regole di questa forma:

$$A \to u_1 B_1$$
$$B_1 \to u_2 B_2$$
$$...$$
$$B_{k-2} \to u_{k-1} u_k$$

   - $\forall u \in \Sigma$ aggiungiamo una nuova regola definendo una nuova variabile $U \to u$ e sostituiamo U ad u in tutte le regole in cui u occorre nella parte destra (di lunghezza 2).

Esempio Diamo ora un esempio completo dell'applicazione dell'algoritmo. Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ la seguente grammatica:

$V = \{S, A, B\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

Le seguenti regole appartengono ad R:

$$S \to ASB|\varepsilon$$

$$A \to aAS|a$$

$$B \to bSb|A|bb$$

1. Aggiungiamo una nuova variabile di partenza S_0 e la regola $S_0 \to S$, quindi G è ora così definita:

   $V = \{S_0, S, A, B\}$

   $\Sigma = \{a, b\}$

   Le seguenti regole appartengono ad R:

   $$S_0 \to S$$

   $$S \to ASB|\varepsilon$$

   $$A \to aAS|a$$

   $$B \to bSb|A|bb$$

   S_0 variabile di partenza.

2. L'unica regola cancellante è $S \to \varepsilon$. Quindi $NULL = \{S\}$. Procediamo aggiungendo le regole in cui S viene cancellato e otteniamo le regole $S \to AB, A \to aA$ quindi R sarà così definito:

   $$S_0 \to S$$

   $$S \to ASB|AB$$

   $$A \to aAS|aA|a$$

   $$B \to bSb|A|bb$$

3. Eliminiamo ora le regole unitarie.

   $UNIT_0 = \{(S_0, S_0), (S, S), (A, A), (B, B)\}$

$UNIT_1 = UNIT_0 \cup \{(S_0, S), (B, A)\}$

$UNIT_2 = UNIT_1 \cup \emptyset$

ora dobbiamo sostituire $S_0 \to S$ con $S_0 \to ASB|AB$ e $B \to A$ con $B \to aAS|aA|a$ e otteniamo il nuovo insieme di regole così definito:

$$S_0 \to ASB|AB$$

$$S \to ASB|AB$$

$$A \to aAS|aA|a$$

$$B \to bSb|aAS|aA|a|bb$$

4. Cerchiamo ora le variabili produttive e quelle derivabili.

   $PROD_0 = \{A, B\}$

   $PROD_1 = PROD_0 \cup \{S, S_0\}$

   $PROD_1 = V$ quindi mi fermo poichè non ci sono variabili non produttive.

   $DER_0 = \{S_0\}$

   $DER_1 = DER_0 \cup \{S, A, B\}$

   $DER_1 = V$ quindi mi fermo poichè non ci sono variabili non derivabili.

   In questo passo la grammatica è rimasta invariata.

5. Adesso introduciamo le variabili per le regole di derivazione dei terminali e aggiungiamo tali regole e infine riduciamo tutte le regole a regole con parte destra di lunghezza al più 2:

   Introducendo le regole dei terminali otteniamo:

$$S_0 \to ASB|AB$$

$$S \to ASB|AB$$

$$A \to DAS|DA|D$$

$$B \to CSC|DAS|DA|D|CC$$

$$C \to b$$

$$D \to a$$

$S_0 \to ASB$ diventa $S_0 \to AF$ e viene quindi introdotta la variabile F e la regola $F \to SB$. Similmente procediamo per tutte le regole con parte destra con lunghezza maggiore di 2 e otteniamo R così definito:

$$S_0 \to AF|AB$$
$$F \to SB$$
$$S \to AG|AB$$
$$G \to SB$$
$$A \to DH|DA|D$$
$$H \to AS$$
$$B \to CI|DJ|DA|D|CC$$
$$I \to SC$$
$$J \to AS$$
$$C \to b$$
$$D \to a$$

6. Infine aggiungiamo la regola $S_0 \to \varepsilon$ poichè la parola vuota poteva essere derivata della grammatica iniziale.

Quindi la nuova grammatica è così definita:

$V = \{S_0, S, A, B, C, D, F, G, H, I, J\}$

$Sigma = \{a, b\}$

Le seguenti regole appartengono ad R

$$S_0 \to AF|AB$$
$$F \to SB$$
$$S \to AG|AB$$
$$G \to SB$$
$$A \to DH|DA|D$$
$$H \to AS$$
$$B \to CI|DJ|DA|D|CC$$
$$I \to SC$$
$$J \to AS$$
$$C \to b$$
$$D \to a$$

S_0 variabile di partenza

Problema di decisione Stabilire se una grammatica genera un linguaggio vuoto.
Una grammatica non è vuota se ha almeno una variabile produttiva. Possiamo quindi ridurre questo problema alla ricerca di variabili produttive, se non troviamo alcuna variabile produttiva allora la grammatica genera un linguaggio vuoto, altrimenti no.
Proviamo a dare un'idea della complessità asintotica di questo algoritmo risolutivo. Possiamo dire che la grandezza della grammatica è data dal numero di variabili e dal numero di regole, quindi cerchiamo di esprimere la complessità attraverso queste due grandezze. Sia $m = |V|$ e $n = |R|$. Il calcolo di $PROD_i$ è lineare nel numero di regole, infatti calcolando $PROD_i$ al massimo tutte le regole causeranno l'aggiunta di una variabile produttiva. Per calcolare $PROD$ al massimo sono necessarie m iterazioni poichè una volta raggiunto $PROD = V$ non possiamo più aggiungere nulla. Quindi concludiamo che questo algoritmo ha complessità $O(m \times n)$.

11 Lezione 11

11.1 Problema appartenenza per CFG

Dato $G = (V, \Sigma, R, S)$ e $w \in \Sigma^\star$ vogliamo sapere se $w \in L(G)$. Sia $n = |w|$, se G è in forma normale di Chomsky w è derivabile in $2n - 1$ passi, poiché abbiamo bisogno di $n - 1$ passi per arrivare da S a $A_1 \dots A_n$ e altri n passi per arrivare da $A_1 ... A_n$ a $a_1 ... a_n$. Quindi dato che le le derivazioni di parole lunghe n sono lunghe $2n-1$ passi possiamo cercare w tra tutte le derivazioni lunghe $2n-1$ passi. —manca complessità—

11.2 Automi a pila

Gli *automi a pila* o PDA (*Push Down Automata*) sono un'estensione del concetto di NFA che ci permettono di esprimere i linguaggi espressi dalle CFG. Ciò che hanno di nuovo è una pila che fornisce la possibilità di memorizzare più informazioni e quindi effettuare scelte più complesse. Ciò consente agli automi di riconoscere alcuni linguaggi non regolari. La pila viene acceduta in cima, sia in lettura che in scrittura, è inizialmente vuota e ogni volta che si "toglie" un carattere dalla pila, l'informazione è persa, così come ogni volta che si "mette" un carattere nella pila, prima di potervi accedere bisogna leggere e togliere i caratteri impilati successivamente.

Definizione formale Un PDA è una sestupla

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

Dove:

- Q è l'insieme degli stati
- Σ è l'alfabeto di input
- Γ è l'alfabeto sulla pila (che può coincidere con l'alfabeto di input);
- δ è la funzione di transizione:

  $$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

  Ossia dato uno stato di partenza $q \in Q$, un carattere letto in input $a \in \Sigma_\varepsilon$ e il carattere da leggere in cima alla pila $b \in \Gamma_\varepsilon$ la funzione δ ci dice l'insieme di stati in cui transitare e il relativo carattere da scrivere al posto del carattere letto. Quindi $\delta(q, a, x) = (p, y), (r, z)$ significa che da q dopo aver letto a

possiamo transitare o in p sostituendo y ad x in cima alla pila oppure in r sostituendo z ad x in cima alla pila. Se $a = \varepsilon$ siamo aggiungendo un elemento in cima alla pila. Se $y = \varepsilon$ allora stiamo eliminando a dalla cima della pila

- q_0 è lo stato iniziale
- F è l'insieme degli stati finali

Classe dei linguaggi riconosciuti dai PDA Definiamo la classe e dei linguaggi riconosciuti dai PDA come:

$$L(PDA) = \{L | \exists A \in PDA \wedge L(A) = L\}$$

Configurazioni in PDA Come negli automi a stati finiti anche nei PDA esiste il concetto di configurazione, in questo caso è una tripla (q, x, w) dove:

- q è lo stato corrente
- x è la parola in input da leggere
- e w è il contenuto della pila (il carattere più a sinistra è quello in cima alla pila)

Definiamo la relazione binaria "*porta a*" $\Rightarrow$ tra due configurazioni per indicare che dalla prima, con un passo di calcolo, l'automa passa alla seconda; siano:

- $q, p \in Q$ due stati
- $a \in \Sigma_\varepsilon$, $x \in \Sigma^\star$ un carattere e una stringa di input
- $A, B \in \Gamma_\varepsilon$ due caratteri di pila e $\alpha \in \Gamma^\star$ una stringa nella pila

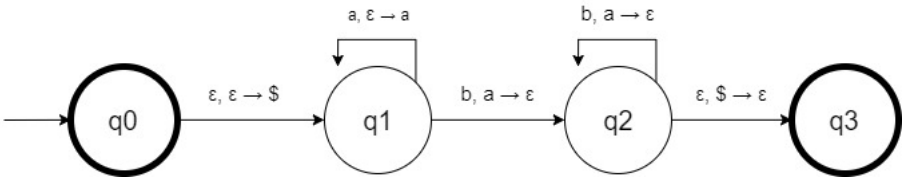
$$(q, ax, A\alpha) \Rightarrow (p, x, B\alpha) \text{ sse } (p, B) \in \delta(q, a, A)$$

Se $A = \varepsilon$ allora viene effettuato il push di B. Se $B = \varepsilon$ allora viene effettuato un pop di A.

Possiamo definire la chiusura riflessiva e transitiva di questa relazione con $\Rightarrow^\star$ che ci consente di descrivere più passi di calcolo e tornerà utile per fornire una descrizione del linguaggio accettato dall'automa.

Esempi PDA

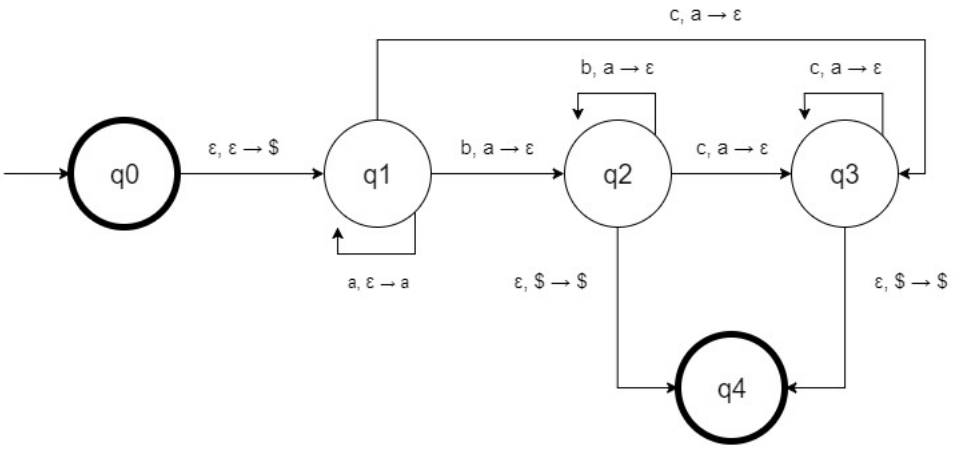
Esempio 1: Costruiamo $A \in PDA$ t.c. $L(A) = \{a^n b^n | n \geq 0\}$.



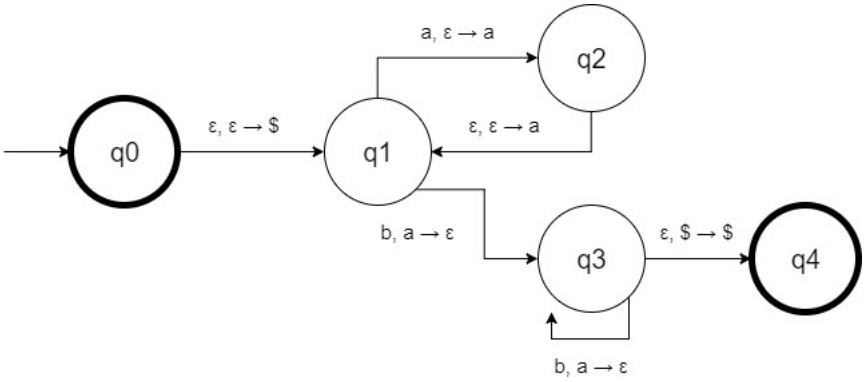
Diamo degli esempi di computazione:

- $(q_0, a^2b^2, \varepsilon) \Rightarrow (q_0, a^2b^2, \$) \Rightarrow (q_1, ab^2, a\$) \Rightarrow (q_1, b^2, a^2\$) \Rightarrow (q_2, b, a\$) \Rightarrow (q_2, \varepsilon, \$) \Rightarrow (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$
  La parola viene correttamente accettata perché q_3 è finale e l'input è terminato. Notare che è ininfuente il fatto che la pila sia vuota ai fini dell'accettazione di una parola.
- $(q_0, a^4b^3, \varepsilon) \Rightarrow^\star (q_2, \varepsilon, a\$)$. La parola non viene accettata poiché q_2 non è finale.
- $(q_0, ab^2, \varepsilon) \Rightarrow^\star (q_3, b, \varepsilon)$. La parola non viene accettata poiché l'input non è stato completamente consumato.

Esempio 2: Costruiamo $A \in PDA$ t.c. $L(A) = \{a^n b^m c^{n-m} | n \geq m \geq 0\}$.

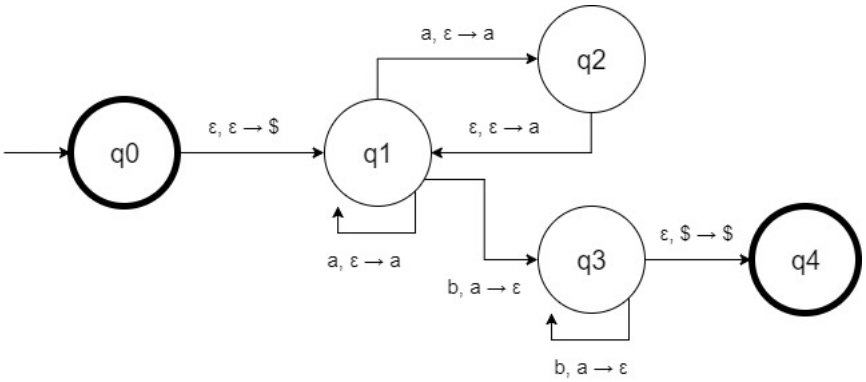


Esempio 3: Costruiamo $A \in PDA$ t.c. $L(A) = \{a^n b^{2n} | n \geq 0\}$.



Esercizi

Esercizio 1: Costruire $A \in PDA$ t.c. $L(A) = \{a^n b^m | 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$.



Esercizio 2: Data la grammatica $G = (S, 0, 1, S \to SS|0S1|1S0|\varepsilon, S)$ fornire la descrizione del linguaggio che G descrive.
Soluzione $L = \{x^n | n \geq 0 \wedge x \in \{0,1\}^\star \wedge n_1(x) = n_0(x)\}$, ossia un linguaggio formato da tutte parole che possono essere scomposte in sottostringhe tutte uguali in cui il numero di 1 è uguale al numero di 0.

Esercizio 3: Data la grammatica $G = (S, A, 0, 1, S \to AS|0S1|A, A \to 0A|0, S)$ fornire la descrizione del linguaggio che G descrive.
Soluzione: $L = \{0^{n+k}1^n | n \geq 0 \wedge k \geq 1\}$

Esercizio 4: Esprimere la grammatica dell'esercizio 2 in forma normale di Chomsky.
Soluzione: Per essere sintetici scriveremo solo come vengono modificate le regole.

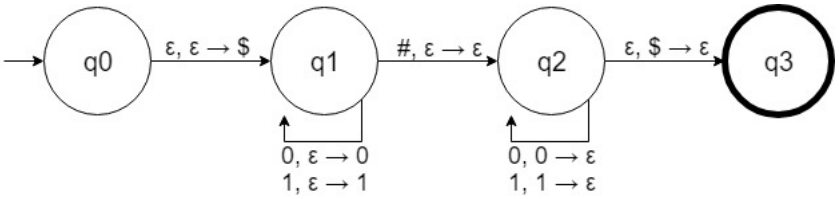
1.
$$S_0 \to S$$
$$S \to SS|0S1|1S0|\varepsilon$$
2. $NULL = \{S\}$
$$S_0 \to S$$
$$S \to SS|0S1|01|1S0|10$$
3. $UNIT = \{(S_0, S_0), (S, S), (S_0, S)\}$
$$S_0 \to SS|0S1|01|1S0|10$$
$$S \to SS|0S1|01|1S0|10$$
4. $PROD = V$ e $DER = V$ quindi non dobbiamo fare modifiche.
5. Aggiungiamo le regole per i terminali:
$$A \to 0$$
$$B \to 1$$
$$S_0 \to SS|ASB|AB|BSA|BA$$
$$S \to SS|ASB|AB|BSA|BA$$
Scomponiamo le regole in modo che la parte destra sia sempre di due variabili.
$$A \to 0$$
$$B \to 1$$
$$C \to SB$$
$$D \to SA$$
$$S_0 \to SS|AC|AB|BD|BA$$
$$S \to SS|AC|AB|BD|BA$$

12 Lezione 12

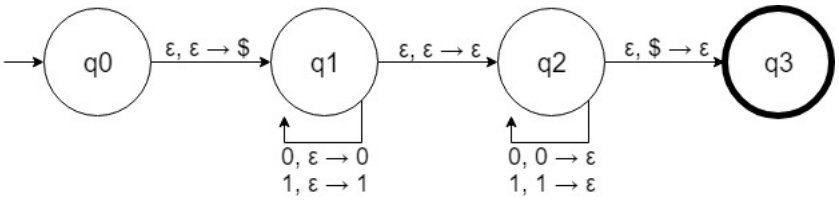
12.1 PDA e DPDA

Esempi Siano L_1 e L_2 i seguenti linguaggi:

$L_1 = \{w\#w^R | w \in \{0,1\}^\star\}$, ossia l'insieme delle parole palindrome con un # al centro.



$L_2 = \{ww^R | w \in \{0,1\}^\star\}$, ossia l'insieme delle parole palindrome di lunghezza pari.



Nel linguaggio L_1 sappiamo quando abbiamo finito di leggere w appena leggiamo # in input. A questo punto abbiamo w impilata nella pila dell'automa e possiamo controllare che il resto dell'input sia esattamente w al contrario.
Nel linguaggio L_2 invece non sappiamo con certezza quale sia il carattere che determina la fine della parola w per tale motivo dobbiamo ricorrere al non determinismo. Infatti l'automa ha sempre la possibilità di fare o non fare la ε mossa. Quindi in q_1 ho sempre due possibilità: continuare ad impilare oppure iniziare a togliere dalla pila.
Nei PDA il modello non deterministico è molto più potente dell'equivalente deterministico, infatti abbiamo che:

$$L(DPDA) \subsetneq L(PDA)$$

Questo è l'unico modello in cui questo è vero.
Dimostrazione: Dato un automa a pila deterministico $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ la cui funzione di transizione è definita come segue:

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

Affinché A sia deterministico deve valere che:

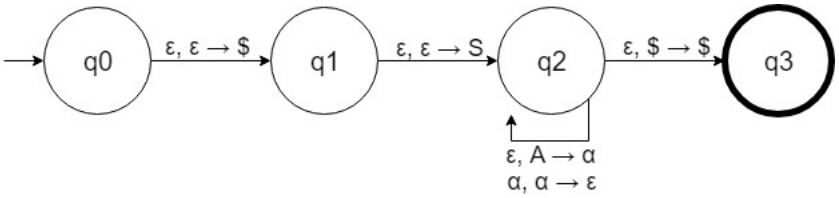
1. $|\delta(q, a, A)| \leq 1 \quad \forall a \in \Sigma_\varepsilon, \forall A \in \Gamma_\varepsilon$
2. $|\delta(q, \varepsilon, A)| = 1 \Rightarrow \delta(q, a, A) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma,\ \forall A \in \Gamma_\varepsilon$, ossia se da q leggendo in input ε e sulla cima della pila A l'automa effettua una transizione allora da q leggendo A dalla pila e qualsiasi altro carattere in input l'automa non deve effettuare transizioni.
3. $|\delta(q, a, \varepsilon)| = 1 \Rightarrow \delta(q, a, A) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma_\varepsilon,\ \forall A \in \Gamma$, ossia se da q leggendo a in input e la parola vuota dalla cima della pila l'automa effettua una transizione allora se in cima alla pila c'è un carattere diverso da ε allora l'automa non deve effettuare transizioni.

12.2 Equivalenza tra linguaggi generati da PDA e CFL

Si vuole dimostrare che $L(PDA)$=$L(CFG) = CFL$.

1. $L(PDA) \subseteq CFL$, non sarà trattata in questo documento.
2. $CFL \subseteq L(PDA)$, utile dimostrazione poiché usa la stessa tecnica per costruire i parser di linguaggi di programmazione.
   Quindi vogliamo dimostrare che: $L \in L(CFL) \Rightarrow L \in L(PDA)$

Dimostrazione: Se $L \in L(CFL)$ allora $\exists\, G = (V, \Sigma, R, S) \mid L(G) = L$. Il seguente PDA è costruito in modo da accettare il linguaggio denotato dalla grammatica G, quindi accetta il linguaggio L.



Esempio: Data la grammatica $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to aSA|\varepsilon, A \to bA|b\}, S)$ costruiamo il PDA che riconosce il linguaggio descritto da G.

12.3 Modello di Turing

Una macchina di Turing è caratterizzata da:

- Un nastro di input con lunghezza infinita a destra, formato da celle che possono memorizzare un carattere l'una. Tra i caratteri vi è un carattere speciale utilizzato per indicare la cella vuota, detto blank, indicato con "B".
- Una testina per la lettura e la scrittura di caratteri sul nastro, la quale si può muovere sia a destra che a sinistra o restare ferma.
- Un insieme finito di stati in cui può transitare, fra cui uno stato iniziale q_0, lo stato di accettazione q_a e lo stato di rifiuto q_r

Modello Formale Sia M una macchina di Turing, essa è definita come la seguente 7-tupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$$

Dove:

- Q: insieme finito di stati di M
- $\Sigma \subseteq \Gamma$: alfabeto finito di input
- Γ: alfabeto finito di nastro
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$: funzione di transizione

Anche in questo modello possiamo definire il concetto di *configurazione*. Una configurazione deve mantenere le seguenti informazioni:

- stato attuale
- contenuto del nastro $\alpha \in \Gamma^\star$
- posizione della testina sul nastro

Sia c una configurazione generica

$$c = \alpha p a \beta \text{ con } \alpha, \beta \in \Gamma^\star \; a \in \Gamma, p \in Q$$

essa ci fornisce le seguenti informazioni:

- la macchina si trova sullo stato p
- il contenuto del nastro è $\alpha a \beta$

- la testina è posizionata sulla cella di a (il primo carattere dopo lo stato)

Per descrivere un passo di calcolo abbiamo bisogno di definire una relazione ($\Rightarrow_M$) tra due configurazioni. Sia $c' = \alpha bq\beta$ un'altra configurazione dove α e β sono le stesse di c, mentre $b \in \Gamma$ e $q \in Q$ potrebbero essere differenti. Le due configurazioni sono in relazione se da c con un passo di calcolo si può raggiungere c':

$$\text{Se } \delta(p, a) = (q, b, R) \text{ allora scriviamo } \alpha pa\beta \Rightarrow_M \alpha bq\beta \text{ ossia } c \Rightarrow_M c'$$

Quindi dallo stato p leggendo a sul nastro viene scritto b al posto di a e viene fatto un passo a destra spostando la testina sul primo carattere di β (non necessario esplicitarlo) e l'automa transita nello stato q.

Come al solito definiamo anche la chiusura riflessiva e transitiva di $\Rightarrow_M$ che ci aiuta nella definizione del linguaggio accettato dalla macchina M.

$$L(M) = \{x \mid x \in \Sigma^\star \wedge q_0 x \Rightarrow_M^\star \alpha q_a \beta \text{ con } \alpha, \beta \in \Gamma^\star\}$$

12.4 Correlazione tra problemi di decisione e di ricerca

Un *problema di decisione* è un problema che risponde in modo dicotomico ad una certa domanda. Ad esempio dato un grafo stabilire se esiste un cammino aciclico. Invece un *problema di ricerca* è un problema che trova un' istanza che soddisfi una certa domanda. Ad esempio dato un grafo esibire un cammino aciclico.

Vediamo ora il problema della ricerca di un assegnamento per una formula booleana che la renda soddisfatta. Partiamo dal problema di decisione correlato, ossia stabilire se esiste un assegnamento che renda soddisfatta la formula.

ALGSAT:

Input: φ, formula booleana

Output: "sì" se φ è soddisfacibile, "no" altrimenti.

Algoritmo: ricerca esaustiva di un assegnamento. Nel caso peggiore se φ è formata da k variabili allora verranno generate 2^k stringhe binarie da testare.

Ora definiamo un algoritmo di ricerca che utilizza $ALGSAT$:

ALGRICSAT:

Input: φ, formula booleana

Output: un assegnamento che soddisfa φ se esiste, altrimenti "no".

Algoritmo:

1. esegui $ALGSAT$. Se risponde "no" allora termina e rispondi "no", altrimenti continua.
2. Si assegna 0 alla prima variabile e si esegue $ALGSAT$ sulla formula ottenuta φ_0. Se φ_0 non e' soddisfacibile si pone la prima variabile a 1.
3. In entrambi i casi si prosegue nello stesso modo per la successive variabili.

13 Lezione 13

13.1 Problemi di decisione

Un problema può essere visto come l'insieme delle sue istanze, partizionate fra istanze sì e istanze no. La tesi di Church-Turing afferma che la classe dei linguaggi riconosciuti da una TM corrisponde alla classe dei problemi effettivamente risolvibili. Quindi si può identificare l'idea di algoritmo con quella di una TM che si ferma sempre, mentre un semialgoritmo corrisponde ad una TM che non sempre si ferma.

13.2 Semi-algoritmo per DFA vuoto

input: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
output: sì se $L(A) \neq \emptyset$

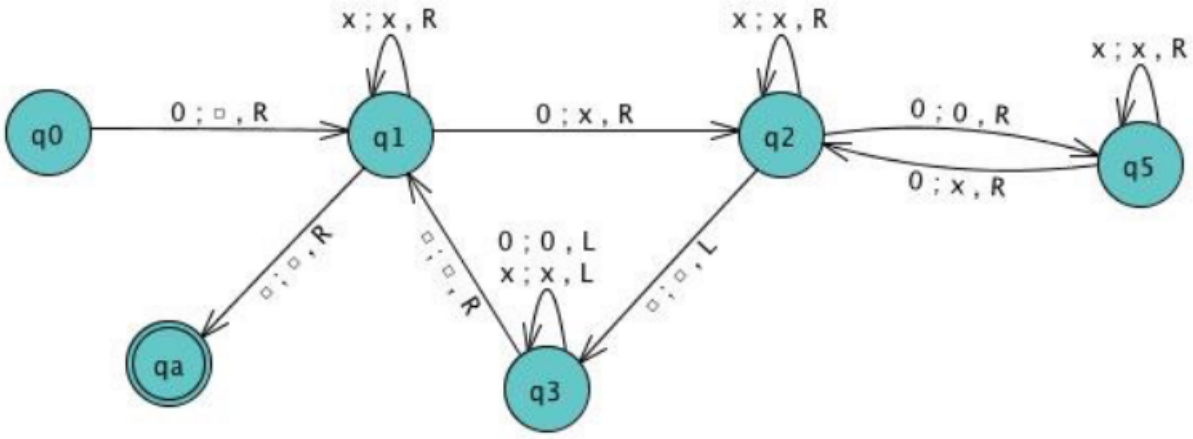
1. Poni $x = \varepsilon$
2. Esegui A su x
3. Se A accetta x rispondi sì
4. Altrimenti metti in x la parola successiva nell'ordine canonico e torna a 2.

13.3 Linguaggi non CFL

$$L = \{\ 0^{2^n} \mid n \geq 0\ \}$$

Algoritmo:

1. Sostituisci B con il primo 0 sul nastro
2. Spostare la testina verso destra sostituendo con x ogni secondo 0
3. Se il nastro non ha altri 0 $\rightarrow$ accetta
4. Se num(0) è dispari $\rightarrow$ rifiuta
5. Riporta la testina all'inizio del nastro e torna al punto 2



$$L = \{\ a^n b^n c^n \mid n \geq 0\ \}$$

14 Lezione 14

14.1 Macchine di Turing e Teoremi

14.1.1 Classe dei linguaggi Turing-Riconoscibili

$$L(TM) = \{L \mid \exists\ T \in TM \wedge L(T) = L\}$$

14.1.2 Classe dei linguaggi Turing-Decidibili

$$L(TM_d) = \{L \mid \exists\ T \in TM \wedge L(T) = L \wedge T \text{ si ferma sempre}\}$$

14.1.3 Equivalenza tra TM a k nastri e TM

Una macchina di Turing a k nastri è identica ad una "normale", a differenza della funzione di transizione, adattata per leggere, scrivere e muovere la testina per ognuno dei k nastri. Essa è descritta formalmente così:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times (\Gamma \times \{L, R\})^k$$

$$\delta(q, a_1, a_2, ..., a_k) = (p, (b_1, L), (b_2, R), ..., (b_k, L))$$

che significa che se la macchina sta nello stato q e legge a_i sull'i-esimo nastro, va nello stato p e sull'i-esimo nastro scrive b_i e sposta la testina a destra o a sinistra.

Sia $L(TM_k)$ la classe dei linguaggi riconosciuti dalle macchine di Turing a k nastri, vogliamo dimostrare che è equivalente ad $L(TM)$ e quindi che la versione a k nastri delle macchine di Turing non è un modello più potente.

Dimostrazione: Per dimostrare che $L(TM_k) = L(TM)$ dobbiamo dimostrare le due inclusioni $L(TM) \subseteq L(TM_k)$ e $L(TM_k) \subseteq L(TM)$.

- $L(TM) \subseteq L(TM_k)$, questa inclusione è banale poiché le macchine di Turing a k nastri con $k = 1$ sono le classiche macchine di Turing.
- $L(TM_k) \subseteq L(TM)$, per dimostrare questa inclusione utilizziamo il seguente teorema.

14.1.4 Teorema

$$T \in TM_k \Rightarrow \exists T' \in TM \wedge L(T) = L(T')$$

Dimostrazione: Data $T \in TM_k$ vogliamo mostrare che possiamo costruire una macchina T' con un unico nastro equivalente a T. T' avrà il contenuto dei k nastri di T sul suo unico nastro con dei delimitatori (#) per riconoscere la fine del contenuto di un singolo nastro.

- *Configurazione iniziale:* Sia c_0^T la configurazione iniziale di T. Poiché T ha k nastri essa deve mantenere l'informazione sullo stato (lo stesso per tutti i k nastri) e le celle di tutti i k nastri, che sono tutti vuoti tranne il primo, il quale contiene l'input.

  Quindi la configurazione iniziale è della forma

  $$c_0^T = (q_0 a_1 ... a_n,\ q_0 B, q_0 B, ...,\ q_0 B)$$

  Con una serie di passi possiamo portare T' in una configurazione iniziale equivalente:

  $$c_0^{T'} = (p_0 a_1 ... a_n) \Rightarrow^* (p(q_0)\ \dot{a_1} ... a_n\ \#\dot{B}\#...\#\ \dot{B}\#\#)$$

  dove il punto sopra un simbolo del nastro significa che la testina dell'i-esimo nastro di T che stiamo simulando sta su quel simbolo, mentre $p(q_0)$ significa che T' sta in uno stato equivalente a q_0 di T.

- *Configurazione generica:* Assumiamo ora che T' sia in una configurazione

  $$c = (p(q)\ \alpha_1 b_1 \dot{c_1} d_1 \beta_1\ \#...\#\ \alpha_k b_k \dot{c_k} d_k \beta_k\ \#\#)$$

  e che la funzione di transizione di T sia della forma

  $$\delta(q, c_1, ..., c_k) = (q', (f_1, L), ..., (f_k, R))$$

  Allora in una serie di passi possiamo portare T' in una configurazione c' in cui lo stato è cambiato seconda la funzione, mentre il nastro è rimasto invariato:

  $$c \Rightarrow^* c' = (p(q, c_1 ... c_k)\ \alpha_1 b_1 \dot{c_1} d_1 \beta_1\ \#...\#\ \alpha_k b_k \dot{c_k} d_k \beta_k\ \#\#)$$

  Da questa configurazione possiamo poi cambiare le k "posizioni di lettura" sul nastro, sempre simulando la funzione di transizione, arrivando ad una configurazione c'':

  $$c' \Rightarrow^* c'' = (p(q')\ \alpha_1 \dot{b_1} f_1 d_1 \beta_1\ \#...\#\ \alpha_k b_k f_k \dot{d_k} \beta_k\ \#\#)$$

- *Configurazione di accettazione*: La macchina T' deve accettare quando la macchina T che sta simulando arriva in q_a, ovvero quando raggiunge una configurazione

  $$c = (p(q_a)\ \alpha_1 \dot{c_1} \beta_1 \#...\#\ \alpha_k \dot{c_k} \beta_k\ \#\#)$$

14.1.5 NTM, macchine di Turing non deterministiche

Ridefiniamo la funzione di transizione per le macchine di Turing non deterministiche.

$$\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \times \{L, R\}))$$

Per rendere la funzione totale aggiungiamo:

$$\delta(q_a, a) = \emptyset,\ \delta(q_r, a) = \emptyset \quad \forall a \in \Gamma$$

Partendo da una configurazione iniziale possiamo ricavare l'albero delle computazioni di una NTM. Questo albero può non essere finito in quanto non abbiamo certezza che la macchina si fermi.

Definiamo *grado di non determinismo* di un nodo il numero di figli che esso ha nell'albero, ovvero il numero di possibili configurazioni in cui la NTM può andare da una certa configurazione.

Sia d il massimo grado di non determinismo di un albero

$$d = max\{|\delta(q, a)| \mid q \in Q,\ a \in \Gamma\}$$

allora ogni nodo ha al massimo d figli e quindi l'albero è d-ario, non necessariamente completo.

Sulla base dell'albero possiamo definire la condizione di accettazione e di rifiuto:

- *Condizione di accettazione*: L'albero ha almeno un ramo finito, che quindi termina in una foglia, e tale foglia è una configurazione di accettazione
- *Condizione di rifiuto*: L'albero è **finito**, e ogni foglia è una configurazione di rifiuto o bloccata.

Da ciò discende che è molto più facile stabilire se un input viene accettato piuttosto che rifiutato. Se abbiamo un albero senza nessuna foglia allora vuol dire che la macchina su quell'input non termina mai, ma non possiamo concludere che l'input venga rifiutato, possiamo solo dire che non è accettato.

14.1.6 Teorema: equivalenza tra TM e NTM

Il non determinismo non aumenta il potere della macchina di Turing: mostriamo che è possibile costruire una TM che simula una NTM.

L'idea è "visitare" l'albero, simulando tutti i possibili rami di computazione. La visita avviene per livelli in quanto andare in profondità potrebbe portarci ad esplorare rami infiniti prima di rami che portano a configurazioni di accettazione o di rifiuto.

Ogni nodo dell'albero è univocamente determinato dalla sequenza di scelte che dalla dalla radice portano al nodo. Per codificare le scelte numeriamo i figli di ogni nodo e diciamo che da una certa configurazione la macchina ha effettuato la scelta i se passiamo alla configurazione corrispondente all' i-esimo figlio del nodo corrispondente.

Possiamo rappresentare tutti i possibili cammini sull'albero d-ario (che supponiamo essere completo) dalla radice ad un qualsiasi nodo come una stringa $s \in \{1, ..., d\}^*$. L'ordine canonico descrive la visita per livelli.

Diamo ora una descrizione di una $T' \in TM$ equivalente a una $T \in NTM$:

- $M_0 \in TM$ è usata per enumerare i cammini da simulare
  input: $x \in \{1, ..., d\}^*$
  descrizione: rimpiazza x con la stringa successiva nell'ordine canonico

- $T' \in TM$ simula T tramite 3 nastri:

  1. il primo nastro contiene la stringa di input di T
  2. il secondo nastro è il nastro di lavoro
  3. il terzo nastro contiene la codifica del ramo di computazione che sta simulando

  input: $s \in \Sigma^*$
  descrizione:

  1. inizializza il terzo nastro con 1 (la configurazione iniziale)
  2. copia l'input s sul nastro di lavoro ed esegui le mosse che T fa (se ce ne sono) per raggiungere la configurazione identificata dalla stringa sul terzo nastro.
     - se si raggiunge q_a, accetta
     - se manca una mossa o si raggiunge una configurazione di rifiuto esegui M_0 sulla stringa sul terzo nastro, cancella il secondo nastro e ricomincia il punto 2

15 Lezione 15

15.1 Problema dell'appartenenza per TM

Chiameremo il problema dell'appartenenza per macchine di Turing A_{TM}. Questo è anche primo esempio di macchina universale, in pratica un calcolatore. Questa macchina prende in input un' altra macchina e un suo input e il risultato della computazione dipende dal risultato dell'esecuzione della macchina presa in input sul suo input.

$$A_{TM} = \{< T, x > | x \in L(T)\}$$

A_{TM} è Turing-Riconoscibile ma non decidibile. [immagine dei Problemi di decisione che includono i Turing-riconoscibili, che includono i decidibili]

15.2 Teorema

$$A_{TM} \textit{ non decidibile}$$

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che A_{TM} sia decidibile $\Rightarrow \exists T \in TM \quad t.c. \quad L(T) = A_{TM}$ e si ferma sempre

$$T(< M, w >) = \begin{cases} accetta\ se\ M\ accetta\ w \\ rifiuta\ altrimenti \end{cases}$$

Considero la macchina T' uguale a T ma con le uscite invertite:

$$T'(< M, w >) = \begin{cases} accetta\ se\ w \notin L(M) \\ rifiuta\ se\ w \in L(M) \end{cases}$$

Considero T" che si comporta come T' ma prende in input due codifiche di macchine

$$T''(< M, < M' >>) = \begin{cases} accetta\ se\ \ < M' > \notin L(M) \\ rifiuta\ se\ \ < M' > \in L(M) \end{cases}$$

T"	$< M1 >$	$< M2 >$	$< M3 >$	$\cdots$
M1	acc	rif	acc	$\cdots$
M2	rif	rif	acc	$\cdots$
M3	acc	acc	rif	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Descriviamo ora la diagonale della macchina T" con una macchina T"'

$$T'''(< M >) = \begin{cases} accetta\ se\ \ < M > \notin L(M) \\ rifiuta\ se\ \ < M > \in L(M) \end{cases}$$

Tra le macchine M, posso considerare anche T"', per cui T"' diventa:

$$T'''(< T''' >) = \begin{cases} accetta\ se\ \ < T''' > \notin L(T''') \\ rifiuta\ se\ \ < T''' > \in L(T''') \end{cases}$$

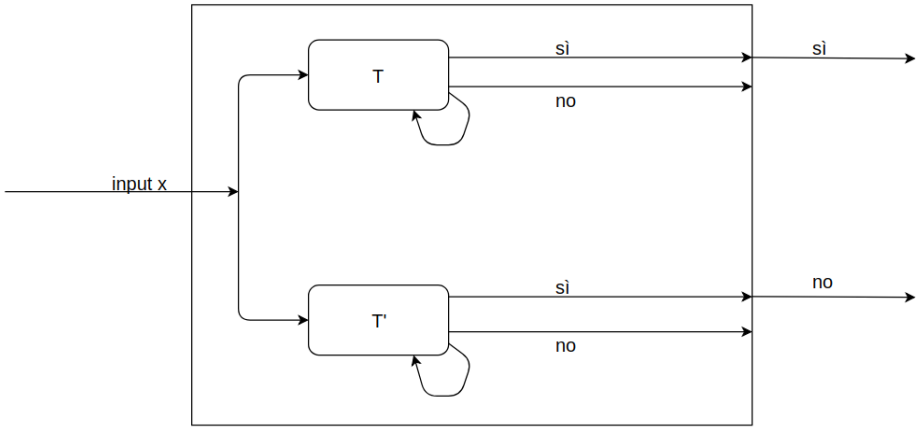
Qui arriviamo a una contraddizione, poiché T"' ci dice che:

$$< T''' > \in L(T''') \Leftrightarrow < T''' > \notin L(T''')\ ^{1}$$

15.3 Teorema

Se L è Turing-Riconoscibile e anche $\overline{L}$ lo è, allora L è decidibile
Dimostrazione:

$$\exists T, T' \in TM \mid L(T) = L\ e\ L(T') = \overline{L}$$



Descrizione di M:

input: x

output: sì se x ∈ L, no altrimenti

Descrizione ad alto livello:

1. fai una mossa di T sul primo nastro, se T accetta, allora accetta
2. fai una mossa di T' sul secondo nastro, se T' accetta, allora rifiuta

[1] Paradosso di Russel: Siano F = $\{X \mid X$ è infinito$\}$, E = $\{X \mid X$ è finito$\}$ e R = $\{X \mid X \notin X\}$.
$F \in R$? Si, poiché F è a sua volta un insieme infinito
$E \in R$? No, perché E è un insieme infinito
$R \in R$? $R \in R \Rightarrow R \notin R, ma R \notin R \Rightarrow R \in R$

15.3.1 Corollario

$$\overline{A_{TM}} \textit{ non è } Turing - Riconoscibile$$

Dimostrazione: A_{TM} è Turing-Riconoscibile e quindi se $\overline{A_{TM}}$ fosse Turing-Riconoscibile dovrei dedurre che A_{TM} sia decidibile.

$A_{TM} = \{< M, w > \mid \ w \in L(M) \ e \ M \in TM\}$

$\overline{A_{TM}} = \{X \mid \text{X non codifica M,w}\} \cup \{< M, w > \mid M \in TM \text{ e } w \notin L(M)\}$

15.4 Il problema della fermata

$Halt_{TM} = \{< M, w > \ e \ M \in \text{TM e M si ferma su w}\}$
$Halt_{TM}$ *non è decidibile*
Dimostrazione: Per assurdo supponiamo che $Halt_{TM}$ sia decidibile

$$\exists T \in TM \text{ tale che } T(< M, w >) = \begin{cases} \text{accetta se M si ferma su w} \\ \text{rifiuta se M non si ferma} \end{cases}$$

T':

input: $< M, w >$

output: sì se $w \in L(M)$, no altrimenti

descrizione:

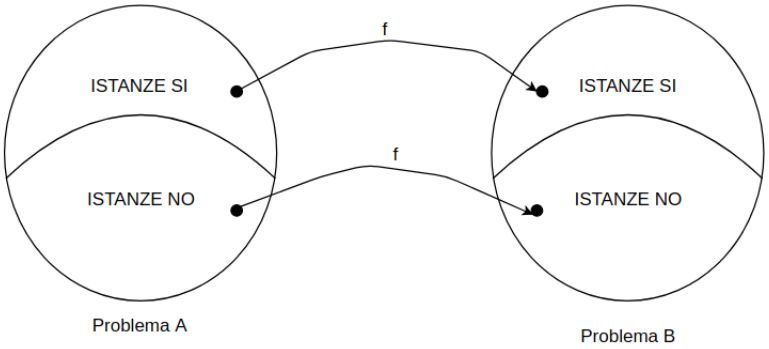
1. esegue T su $< M, w >$
2. se T accetta, allora M si ferma su w, quindi:
   2.1. esegue M su w
   2.2. se M accetta w, allora accetta $< M, w >$
   2.3. se M rifiuta w, allora rifiuta
3. se T non accetta $< M, w >$ allora rifiuta

Quindi per ogni codifica di macchina e input $< M, w >$ abbiamo che:

$$< M, w > \in \ L(T') \ se \ w \in L(M)$$
$$< M, w > \notin \ L(T') \ se \ w \notin L(M)$$

Ovvero T' decide A_{TM}, sfruttando T, ma abbiamo dimostrato che A_{TM} non è decidibile, quindi T non può esistere [Contraddizione].

15.5 Mapping Reduction



Siano $A, B \subseteq \Sigma^\star$ due problemi, con $A \leq_m B$ si indica che il problema A "*si riduce*" al problema B.

$$A \leq_m B \iff \exists f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star \text{ tale che:}$$

1. f deve essere calcolabile ovvero $\exists\, T_f \in TM$ t.c ricevendo $x \in \Sigma^\star$ in input scrive $f(x)$ sul nastro e si ferma
2. $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$

15.5.1 Teorema

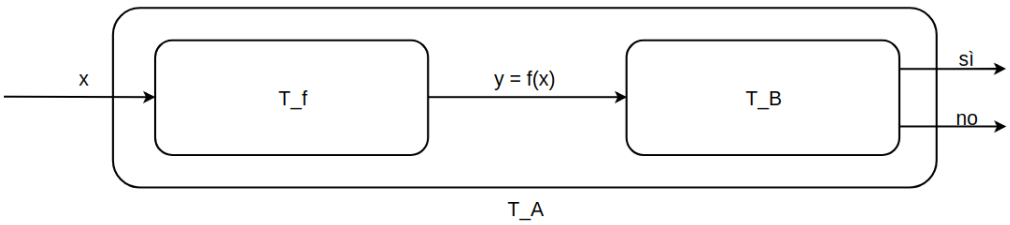
Se $A \leq_m B$ e B è decidibile, allora A è decidibile

Dimostrazione:

$A \leq_m B \Rightarrow \exists$f calcolabile x $\in A \Leftrightarrow f(x) \in B$

$$B \text{ è decidibile} \Rightarrow \exists T_B \in TM \; t.c. T_B(x) = \begin{cases} \text{accetta se x è in B} \\ \text{rifiuta altrimenti} \end{cases}$$

Combino le due macchine:



15.6 Teorema

$A \leq_m$ B e supponiamo che A sia non decidibile, allora B non è decidibile
Dimostrazione:

Per assurdo se B fosse decidibile allora A sarebbe decidibile contro l'ipotesi

Esempio Sia E_{TM} il linguaggio delle codifiche delle macchine che riconosco almeno una parola. Più formalmente:

$$E_{TM} = \{ < T > \mid \ T \in TM \wedge L(T) \neq \emptyset \ \}$$

Dimostriamo che E_{TM} non è decidibile per riduzione utilizzando il seguente teorema: dato A non decidibile se $A \leq_m B$ allora B non è decidibile.
Quindi se riduciamo A_{TM} ad E_{TM} abbiamo dimostrato che E_{TM} non è decidibile poiché A_{TM} non è decidibile.
Definiamo una macchina che calcola la funzione di riduzione di cui abbiamo bisogno. Questa macchina prende in input lo stesso input di A_{TM}, ossia la codifica di una macchina M e di un suo input w e fornisce in output la codifica di un' altra macchina T.

$$< M, w > \stackrel{f}{\rightarrow} < T >$$

Sia R_f la macchina che calcola la funzione di riduzione. Essa è costruita nel seguente modo:

Input: $< M, w >$

Output: $< T >$

Descrizione: costruisce T come descritto di seguito.

T:

Input: $x \in \Sigma^\star$

Output: sì se $w \in L(M) \Rightarrow L(T) = \Sigma^\star$, no se $w \notin L(M) \Rightarrow$ (w è rifiutata da M o M non si ferma)

Descrizione:

1. Esegui M su w
2. Se M accetta w $\rightarrow$ accetta x
3. Se M rifiuta w $\rightarrow$ rifiuta x

Correttezza:

Se $w \in L(M)$ allora $L(T) = \Sigma^\star$, poiché T $\forall x \in \Sigma^\star$ accetta x e quindi E_{TM} risponderà sì.

Se $w \notin L(M)$ allora $\begin{cases} \text{w è rifiutata da M} \\ \text{M non si ferma su w} \end{cases}$ $\rightarrow L(T) = \emptyset$ e quindi E_{TM} risponderà no

Quindi abbiamo ridotto A_{TM} ad E_{TM} con l'uso della funzione di riduzione R_f.

16 Lezione 16

16.1 Indecidibilità di $Halt_{TM}$ tramite riduzione

In alternativa alla dimostrazione "tradizionale", mostriamo che si può mostrare la non decidibilità di $Halt_{TM}$ riducendo A_{TM}, che sappiamo essere indecidibile, ad esso:

$$A_{TM} \leq_m Halt_{TM}$$

Dobbiamo quindi esibire una $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ che mappa istanze sì di A_{TM} in istanze sì di $Halt_{TM}$ e istanze no in istanze no. Ricordiamo che

$$A_{TM} = \{< M, w > \mid T \in TM \wedge w \in L(M)\}$$
$$Halt_{TM} = \{< T, w > \mid T \in TM \wedge M \text{ si ferma su } w\}$$

Quindi la funzione di riduzione f dovrà comportarsi nel seguente modo:

$$< M, w > \mapsto < T, w > \text{ tale che } M \text{ accetta } w \iff T \text{ si ferma su } w$$

Diamo ora una descrizione di una macchina R_f che calcola f:

input: $< M, w >$

output: $< T, w >$, descriviamo ora la T prodotta:

input: x

descrizione:

1. esegui M su w
2. se M accetta w allora accetta x
3. se M rifiuta w allora "*cicla*"

Prova di correttezza

- Se M accetta w, la macchina T accetta x, e in particolare si ferma.
- Se M *non* accetta w, abbiamo due casi:
  1. se M rifiuta w allora T "cicla", ovvero R_f ha opportunamente realizzato T in modo da non farla terminare in questo caso, quindi T non si ferma
  2. se M non si ferma su w, a maggior ragione non si ferma T che sta eseguendo M su w

  Quindi in entrambi i casi T non si ferma.

Abbiamo dunque costruito un decisore per A_{TM}, supponendo di avere un decisore per $Halt_{TM}$; tuttavia sappiamo che un decisore per A_{TM} non può esistere, quindi necessariamente non può esistere un decisore per $Halt_{TM}$, ovvero esso è **indecidibile**.

16.2 Esercizi sulle riduzioni

TM che accettano linguaggi regolari

$$REG_{TM} = \{< T > \mid T \in TM \wedge L(T) \text{ è regolare}\}$$

Mostriamo che è un linguaggio indecidibile riducendo A_{TM} ad esso:

$$< M, w > \overset{f}{\mapsto} < T > \text{ tale che } M \text{ accetta } w \iff L(T) \text{ è regolare}$$

Per procedere dobbiamo pensare a come costruire una macchina T tale che $L(T)$ non è regolare sulle istanze no di A_{TM}, mentre lo è sulle istanze sì: qualsiasi coppia di linguaggio regolare e non regolare va bene, quindi per comodità scegliamo di costruire T così che

$$L(T) = \Sigma^\star \text{ per le istanze sì di } A_{TM}$$
$$L(T) = 0^n 1^n \text{ per le istanze no di } A_{TM}$$

Una utile proprietà di questa scelta è che $0^n 1^n \subset \Sigma^\star$, per cui possiamo (definire R_f in modo da) costruire T in modo che accetti *almeno* $0^n 1^n$, indipendentemente dall'accettazione di w. Successivamente T controllerà se M accetta w o meno:

1. nel primo caso, accetterà anche tutti gli input x *non* della forma $0^n 1^n$, ovvero il resto di $\Sigma^\star$, rendendo $L(T)$ regolare
2. nel secondo caso rifiuterà tutto il resto di $\Sigma^\star$, continuando ad accettare solo input x della forma $0^n 1^n$, quindi lasciando $L(T)$ non regolare

La funzione di riduzione f è quindi così definita:

input: $< M, w >$

output: $< T >$ dove $T \in TM$ è così definita:

> *input*: x
>
> *descrizione*:
>
> 1. se $x = 0^n 1^n$ per qualche $n \geq 0$, accetta x
> 2. altrimenti esegui M su w
> 3. se M accetta w, accetta x
> 4. se M rifiuta w, rifiuta x

Prova di correttezza

- Se M accetta w, allora $L(T) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\} \cup \neg\{0^n1^n \mid n \geq 0\} = \Sigma^\star \in REG$.
- Se M non accetta w, abbiamo due casi:
  1. se M rifiuta w, allora $L(T) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\} \notin REG$
  2. se M non termina su w, allora non termina nemmeno T che la esegue, per cui non accetta alcun x che non sia della forma 0^n1^n, perciò di nuovo $L(T) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\} \notin REG$

  Quindi in entrambi i casi $L(T) \notin REG$.

TM che accettano linguaggi REV

$$REV_{TM} = \{< T > \mid T \in TM \wedge w \in L(T) \implies w^{rev} \in L(T)\}$$

Vogliamo costruire una R_f che calcola una f che riduca A_{TM} a REV_{TM} in modo da mostrarne l'indecidibilità. Come nell'esercizio precedente, ci scegliamo per comodità un linguaggio "semplice" che gode della proprietà desiderata, ad esempio $\{01, 10\}$ e uno che non ne gode, ad esempio $\{01\}$.

Con questa scelta, di nuovo possiamo far sì che R_f costruisca T tale da accettare *almeno* $x = 01$, ovvero $L(T) = \{01\}$ che non gode della proprietà.

Poi eseguendo M su w capirà se accettare anche $x = 10$, ovvero $L(T) = \{01, 10\}$ che gode della proprietà, quindi $< T > \in REV_{TM}$, oppure no, lasciando $L(T)$ inalterato e quindi $< T > \notin REV_{TM}$.

Formalmente definiamo R_f come una TM che calcola f nel seguente modo:

input: $< M, w >$

output: $< T >$ dove $T \in TM$ è così definita:

> *input*: x
>
> *descrizione*:
>
> 1. se $x = 01$, accetta x
> 2. altrimenti esegui M su w
> 3. se M accetta w e $x = 10$, accetta x
> 4. se M rifiuta w, oppure $x \neq 10$, rifiuta x

Prova di correttezza

- Se M accetta w, allora $L(T) = \{01\} \cup \{10\} = \{01, 10\}$ che rispetta la proprietà
- se M non accetta w, abbiamo due casi:
  1. se M rifiuta w, allora $L(T) = \{01\}$ che non rispetta la proprietà
  2. se M non termina su w, allora non termina nemmeno T che la esegue, per cui non accetta alcun x che non sia 01, perciò di nuovo $L(T) = \{01\}$ che non rispetta la proprietà.

Quindi in entrambi i casi $L(T) = \{01\}$ che non rispetta la proprietà.

16.3 Dimostrare la non Turing-riconoscibilità di un linguaggio

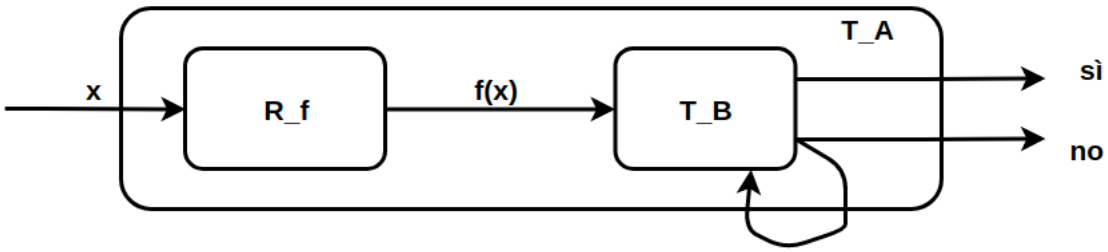
Teorema

B è Turing-riconoscibile e $A \leq_m B \implies A$ è Turing-riconoscibile

Prova Una $T_A \in TM$ che riconosce A è molto semplice da costruire:

- *input*: x
- *descrizione*:
  1. esegui R_f
  2. esegui T_B su $f(x)$ prodotta da R_f

Poiché B è Turing-riconoscibile, per definizione esiste una T_B tale che $L(T_B) = B$. Poiché f di riduzione deve essere calcolabile, per definizione esiste una R_f che prende in input x e restituisce in output sul nastro $f(x)$. Dunque T_A così costruita è effettivamente una macchina di Turing corretta.



Corollario A ¬Turing-riconoscibile e $A \leq_m B \implies B$ ¬Turing-riconoscibile

Teorema

$$A \leq_m B \iff \neg A \leq_m \neg B$$

Prova Se $A \leq_m B$ allora deve esistere una qualche f di riduzione per cui $\forall a \in A,\ b \in B \quad a \overset{f}{\mapsto} b$ (istanze sì) e $\forall x \notin A,\ y \notin B \quad x \overset{f}{\mapsto} y$ (istanze no).

Ma poiché le istanze sì di $\neg A$ sono le istanze no di A, e lo stesso vale per B, allora la f è una funzione di riduzione anche per $\neg A$ e $\neg B$, in quanto:

1. è ancora definita come $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$
2. è ancora calcolabile
3. mappa ancora istanze sì ad istanze sì e istanze no ad istanze no

Abbiamo quindi esibito una funzione di riduzione di $\neg A$ a $\neg B$, perciò possiamo scrivere $\neg A \leq_m \neg B$.

Naturalmente per dimostrare l'altro verso della implicazione basta prendere $A' = \neg A$ e $B' = \neg B$ e applicare l'implicazione dimostrata precedentemente:
$A' \leq_m B' \implies \neg A' \leq_m \neg B'$ che è come dire $\neg A \leq_m \neg B \implies A \leq_m B$.

Quindi è vera la coimplicazione.

16.4 Il problema dell'equivalenza EQ_{TM}

Le istanze sì del problema sono costituite da tutte le codifiche di una coppia di macchine di Turing T_1, T_2 *equivalenti*, ovvero tali che $L(T_1) = L(T_2)$.

$$EQ_{TM} = \{< T_1, T_2 > \mid T_1, T_2 \in TM \wedge L(T_1) = L(T_2)\}$$

Questo problema non solo è indecidibile, ma è anche non Turing-riconoscibile. Inoltre è l'unico problema che incontriamo nel corso per cui anche il complemento è non Turing-riconoscibile

Teorema EQ_{TM}, il problema dell'equivalenza tra TM, non è Turing-riconoscibile

Prova Riduciamo $\neg A_{TM}$, che sappiamo essere non Turing-riconoscibile, a EQ_{TM}:

$$\neg A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Tuttavia ridurre *da* un problema non Turing-riconoscibile è complicato perché bisogna effettuare un mapping $< M, w > \overset{f}{\mapsto} < T_1, T_2 >$ che garantisce che $< T_1, T_2 > \in$

$L(EQ_{TM})$ non solo se M rifiuta w, ma anche se M non si ferma su w. Questa ultima condizione è chiaramente difficile da imporre.

Sfruttiamo allora il teorema di equivalenza tra riduzioni per portarci ad un caso più trattabile:

$$\neg A_{TM} \leq_m EQ_{TM} \text{ è come dire } A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM}$$

Vogliamo quindi esibire una f così definita:

$$f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star \text{ calcolabile}$$
$$< M, w > \overset{f}{\mapsto} < T_1, T_2 > \text{ tale che } w \in L(M) \iff < T_1, T_2 > \notin EQ_{TM}$$

L'idea è quindi fare sì che le T_1, T_2 costruite riconoscano lo stesso linguaggio se $w \notin L(M)$, mentre riconoscano due linguaggi diversi se $w \in L(M)$. Il modo più semplice di farlo è costruire T_1 in modo che non accetta mai nulla, ovvero tale che $L(T_1) = \varnothing$ sempre, mentre T_2 nel seguente modo:

$$\begin{cases} w \in L(M) \implies T_2 \text{ accetta qualsiasi x, ovvero } L(T_2) = \Sigma^\star \\ w \notin L(M) \implies T_2 \text{ non accetta alcun x, ovvero } L(T_2) = \varnothing \end{cases}$$

Quindi una R_f che calcola f ad alto livello è così definita:

input: $< M, w >$

output: $< T_1, T_2 >$ così definite:

- T_1:

  input: x

  descrizione:

  1. rifiuta x

- T_2

  input: x

  descrizione:

  1. esegui M su w
  2. se M accetta w allora accetta x
  3. se M rifiuta w allora rifiuta x

Prova di correttezza Vediamo se R_f così costruita rispetta la proprietà voluta:

- se M accetta w, allora $L(T_1) = \varnothing$ mentre T_2 accetta qualsiasi x, per cui $L(T_2) = \Sigma^\star$, di conseguenza $L(T_1) \neq L(T_2) \implies < T_1, T_2 > \notin EQ_{TM}$.
- se M *non* accetta w, allora abbiamo due casi:
  1. se M rifiuta w, allora di nuovo $L(T_1) = \varnothing$, ma T_2 rifiuta qualsiasi x, per cui anche $L(T_2) = \varnothing$, di conseguenza $L(T_1) = L(T_2) \implies < T_1, T_2 > \in EQ_{TM}$
  2. se M non si ferma su w, allora di nuovo $L(T_1) = \varnothing$, ma T_2 che esegue M su w a maggior ragione non si ferma, su nessun x, per cui anche $L(T_2) = \varnothing$, di conseguenza $L(T_1) = L(T_2) \implies < T_1, T_2 > \in EQ_{TM}$

  Quindi in entrambi i casi la conseguenza è che $< T_1, T_2 > \in EQ_{TM}$.

Teorema Anche $\neg EQ_{TM}$ è non Turing-riconoscibile

Prova Come prima riduciamo $\neg A_{TM}$, che sappiamo essere non Turing-riconoscibile, a $\neg EQ_{TM}$:

$$\neg A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM}$$

Di nuovo sfruttiamo il teorema di equivalenza tra riduzioni per portarci ad un caso più trattabile:

$$\neg A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM} \text{ è come dire } A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Vogliamo quindi esibire una f così definita:

$$f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star \text{ calcolabile}$$

$$< M, w > \overset{f}{\mapsto} < T_1, T_2 > \text{ tale che } w \in L(M) \iff < T_1, T_2 > \in EQ_{TM}$$

L'idea è esattamente la stessa della prova del teorema precedente, ma cambia come costruiamo T_1 e T_2. T_1 invece di non accettare alcun x, accetta ogni x, quindi $L(T_1) = \Sigma^\star$; T_2 invece è identico al T_2 precedente:

$$\begin{cases} w \in L(M) \implies T_2 \text{ accetta qualsiasi x, ovvero } L(T_2) = \Sigma^\star \\ w \in L(M) \implies T_2 \text{ non accetta alcun x, ovvero } L(T_2) = \varnothing \end{cases}$$

Quindi una R_f che calcola f ad alto livello è così definita:

input: $< M, w >$

output: $< T_1, T_2 >$ così definite:

- T_1:

  input: x

  descrizione:

  1. accetta x

- T_2

  input: x

  descrizione:

  1. esegui M su w
  2. se M accetta w allora accetta x
  3. se M rifiuta w allora rifiuta x

Prova di correttezza Vediamo se R_f così costruita rispetta la proprietà voluta:

- se M accetta w, allora $L(T_1) = \Sigma^\star$ e T_2 accetta qualsiasi x, per cui $L(T_2) = \Sigma^\star$, di conseguenza $L(T_1) = L(T_2) \implies < T_1, T_2 > \in EQ_{TM}$.

- se M *non* accetta w, allora abbiamo due casi:

  1. se M rifiuta w, allora di nuovo $L(T_1) = \Sigma^\star$, ma T_2 rifiuta qualsiasi x, per cui $L(T_2) = \varnothing$, di conseguenza $L(T_1) \neq L(T_2) \implies < T_1, T_2 > \notin EQ_{TM}$
  2. se M non si ferma su w, allora di nuovo $L(T_1) = \Sigma^\star$, ma T_2 che esegue M su w a maggior ragione non si ferma, su nessun x, per cui $L(T_2) = \varnothing$, di conseguenza $L(T_1) \neq L(T_2) \implies < T_1, T_2 > \notin EQ_{TM}$

  Quindi in entrambi i casi la conseguenza è che $< T_1, T_2 > \notin EQ_{TM}$.

16.5 Chiusura delle classi

Ci chiediamo ora se le classi di linguaggi Turing-decidibili ($L(TM_d)$) e Turing-riconoscibili ($L(TM_r)$) sono chiuse rispetto alle operazioni di unione, intersezione e complemento.

Prenderemo di volta in volta come esempio due $T_1, T_2 \in TM_d$ oppure $T_1, T_2 \in TM_r$ generiche che decidono o riconoscono due linguaggi generici L_1, L_2.

Unione

- $L(TM_d)$ Sì
  Poiché T_1, T_2 sono entrambi decisori, entrambi si fermano sia in accettazione che in non accettazione. Quindi possiamo costruire una $T \in TM_d$ che accetta $L(T_1) \cup L(T_2)$:

  input: x

  descrizione:

  1. esegue T_1 su x
  2. se T_1 accetta, allora accetta
  3. altrimenti esegue T_2 su x
  4. se T_2 accetta, allora accetta
  5. altrimenti rifiuta

- $L(TM_r)$ Sì
  Poiché T_1, T_2 *non* sono decisori, non possiamo semplicemente eseguirli in sequenza, perché una parola accettata da T_2 potrebbe non venire accettata dalla "macchina unione" se T_1 non termina su di essa. Quindi le due macchine verranno eseguite "in parallelo", ovvero un passo di calcolo alla volta, su due nastri diversi della macchina unione T:

  input: x

  descrizione:

  1. copia l'input sul secondo nastro
  2. esegui un passo di calcolo di T_1 sul primo nastro
  3. se T_1 raggiunge una configurazione di accettazione, allora accetta (e termina)
  4. altrimenti esegui un passo di calcolo di T_2 sul secondo nastro
  5. se T_2 raggiunge una configurazione di accettazione, allora accetta (e termina)
  6. torna al punto 2

Intersezione

- $L(TM_d)$ Sì
  Eseguiamo T_1, T_2 in sequenza, sapendo che entrambi si fermeranno su qualsiasi input:

input: x

descrizione:

1. esegue T_1 su x
2. se T_1 rifiuta, allora rifiuta (e termina)
3. altrimenti esegue T_2 su x
4. se T_2 accetta, allora accetta
5. se T_2 rifiuta, allora rifiuta

- $L(TM_r)$ Sì
  Possiamo eseguire le due macchine T_1, T_2 semplicemente in sequenza, in quanto se anche una delle due non terminasse su qualche input x, allora x non sarebbe nel suo linguaggio e quindi nemmeno nell'intersezione dei due:

  input: x

  descrizione:

  1. esegue T_1 su x
  2. se T_1 rifiuta, allora rifiuta (e termina)
  3. altrimenti esegue T_2 su x
  4. se T_2 accetta, allora accetta
  5. se T_2 rifiuta, allora rifiuta

Complemento

- $L(TM_d)$ Sì
  Basta costruire una macchina $\overline{T} \in TM_d$ che "inverte le uscite" di $T \in TM_d$:

  input: x

  descrizione:

  1. esegue T su x
  2. se T accetta, allora rifiuta
  3. se T rifiuta, allora accetta

- $L(TM_r)$ No
  Se $T \in TM_r$ riconosce un certo L, allora in $\overline{L}$ ci devono essere sia le parole che T rifiuta ma anche quelle su cui T non termina. Ma si è dimostrato che data una TM e un suo input, non siamo in grado di stabilire se questa termini oppure no, quindi non siamo in grado di individuare alcune delle parole che dovrebbero stare in $\overline{L}$, quindi non possiamo costruire un $\overline{T} \in TM_r$ che lo riconosce.

16.6 Ulteriore esercizio su riduzione

$$PART = \{< T > \mid T \in TM \wedge 010 \in L(T)\} \text{ è non decidibile}$$

Per mostrarne la non decidibilità riduciamo, come sempre, A_{TM} ad esso: $A_{TM} \leq_m PART$. Questo implica costruire una macchina R_f che calcola una f così definita:

$$< M, w > \overset{f}{\mapsto} < T > \text{ tale che } w \in L(M) \iff 010 \in L(T)$$

Come spesso facciamo, ci poniamo nel caso più semplice, ovvero scegliamo come $L(T)$ che rispetterà la condizione il singoletto $\{010\}$ (potremmo anche equivalentemente scegliere $\Sigma^\star$, in quanto $010 \in \Sigma^\star$), mentre scegliamo come $L(T)$ che *non* rispetterà la condizione il linguaggio vuoto.

Quindi quando M accetta w la macchina T costruita da R_f accetterà solo input $x = 010$, mentre quando M *non* accetta w la macchina T non accetterà alcun x.

Una R_f che calcola f ad alto livello è così definita:

input: $< M, w >$

output: $< T >$ così definita:

> *input*: x
>
> *descrizione*:
>
> 1. se $x \neq 010$, allora rifiuta x (non necessario se associamo $L(T) = \Sigma^\star$ alla istanza sì di A_{TM})
> 2. esegui M su w
> 3. se M accetta w, allora accetta x
> 4. se M rifiuta w, allora rifiuta x

Prova di correttezza Vediamo se R_f così costruita rispetta la proprietà voluta:

- Se M accetta w, allora $L(T) = \{010\}$ (oppure $\Sigma^\star$) ed evidentemente $010 \in L(T)$.
- se M *non* accetta w, allora abbiamo due casi:
  1. se M rifiuta w, allora $L(T) = \varnothing$ ed evidentemente $010 \notin L(T)$
  2. se M non si ferma su w, allora T che esegue M su w a maggior ragione non si ferma, su nessun x, per cui $L(T_2) = \varnothing$, di conseguenza di nuovo $L(T) = \varnothing$ ed evidentemente $010 \notin L(T)$

Quindi in entrambi i casi la conseguenza è che $010 \notin L(T)$.

17 Lezione 17

17.1 Teoria della complessità

Ha senso parlare di complessità solo riguardo quei linguaggi che sono decisi da MdT. Per questi, a parità di lunghezza della stringa di input, l'esecuzione può richiedere tempi molto diversi.

esempio:

1. data la macchina T_1 per il linguaggio $L(T_1) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
2. per un input ben formato $0^n 1^n$ la distanza tra uno 0 e il suo 1 corrispondente sarà al più n. L'algoritmo risolutivo compie approssimativamente n passi per ogni coppia di 0 e 1 da marcare, quindi siamo nell'ordine di $O(n^2)$
3. per un input mal formato, ad esempio 10^n, termina in $O(1)$

Funzione tempo di T Data una $T \in DTM$ che si ferma sempre definiamo la funzione tempo di T

$$t_T(n) = \max\{\text{numero di mosse eseguite da T su un input di dimensione n}\}$$

esempio: in riferimento al problema T_1 visto in precedenza, $t_{T_1}(n) = O(n^2)$

Possiamo quindi definire la classe dei linguaggi decisi da una DTM in tempo $O(n^k)$ come

$$TIME(n^k) = \{L \mid T \in DTM \ e \ L(T) = L \ e \ t_T(n) = O(n^k)\}$$

Funzione spazio di T Data una $T \in DTM$ che si ferma sempre definiamo la funzione spazio utilizzato (calcolato nel numero di celle di nastro) di T

$$S_T(n) = max\{\text{numero di celle del nastro impiegate in una computazione su un input di lunghezza } n\}$$

esempio: in riferimento al problema T_1 visto in precedenza, $S_{T_1}(n) = O(n)$

$t_T(n)$ limita superiormente $S_T(n)$ Sotto l'ipotesi che almeno in un caso tutto l'input sia letto, possiamo limitare superiormente lo spazio $S_T(n)$ con il tempo $t_T(n)$, infatti ad ogni passo posso scrivere al più una cella.

$$n \leq S_T(n) \leq t_T(n)$$

$S_T(n)$ **limita superiormente** $t_T(n)$ Conoscendo $S_T(n)$ posso limitare superiormente $t_T(n)$ analizzando le configurazioni. Il numero delle configurazioni ottenibili, sotto l'ipotesi che in ogni computazione la porzione di nastro impegnata è proprio $S_T(n)$ è definito come segue:

$$\text{Hyp: } |\alpha a \beta| = S_T(n)$$

Le possibili configurazioni sono quindi

$$S_T(n)|\Gamma|^{S_T(n)}|Q|$$

dove $S_T(n)$ sono le possibili posizioni della testina; $|\Gamma|^{S_T(n)}$ sono tutte le possibili stringhe scrivibili su nastro e $|Q|$ il numero degli stati della MdT.

$$2^{\log|Q|}\left(2^{\log|\Gamma|}\right)^{S_T(n)}2^{\log S_T(n)} = 2^{\log|Q|+\log|\Gamma|S_T(n)+\log S_T(n)} = 2^{O(S_T(n))}$$

$$t_T(n) \leq 2^{O(S_T(n))}$$

17.2 Tempi di calcolo su diversi modelli di MdT

Data $T \in TM_k$ cosa possiamo dire delle funzioni $t_T(n)$ e $S_T(n)$? La definizione di $t_T(n)$ resta invariata. Cambia invece $S_T(n)$:

$$S_T(n) = \{\text{somma dei massimi, per ognuno dei k nastri,}$$

del numero di celle del nastro impiegate in una computazione su un input di lunghezza n}

esempio: Avendo $T \in TM_k$ con un $t_T(n)$ definito, e data una $T^1 \in TM$ tale che $L(T) = L(T^1)$, cosa possiamo dire di $t_{T^1}(n)$ e $S_{T^1}(n)$?

1. $S_{T^1}(n) = O(t_T(n))$
2. Per definire $t_T(n)$ devo simulare ogni mossa di T in T^1, il che richiede un numero costante $t_T(n)$ di scansioni del nastro, e ogni scansione richiede al più $t_T(n)$ passi. Ne segue che $t_{T^1}(n) = O(t_T^2(n))$

17.3 La classe P

Definisco P, la classe di tutti i linguaggi decisi in tempo polinomiale (e che sono definiti quindi "trattabili") da una TM.

$$P = \{L \mid \exists T \in TM, L(T) = L \text{ e } t_T(n) = O(n^k)\ \forall k \geq 0\}$$

$$P = \bigcup_{k \geq 0} TIME(n^k)$$

P è importante in quanto:

1. E' invariante per tutti i modelli di computazione polinomiali equivalenti alla MdT deterministica a singolo nastro, e

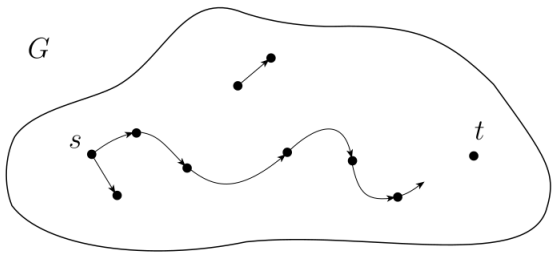
2. P corrisponde alla classe di problemi che sono realisticamente risolvibili da un computer.

Tesi Cobham-Edmonds Definiamo **trattabili** tutti i problemi polinomialmente risolvibili. E **intrattabili** tutti i problemi che si risolvono con algoritmi esponenziali. Non tutti i problemi cadono in queste due categorie, infatti esistono problemi per i quali non si conosce un algoritmo polinomiale ma non è stato dimostrato che siano intrattabili.
A sostegno di questa tesi abbiamo la stabilità di P, ossia che un problema in P è polinomiale in qualsiasi modello di calcolo. Contro questa tesi abbiamo il fatto che quando il grado del polinomio supera il quarto grado i problemi non sono più trattabili.

17.4 Esempi di problemi in P

$PATH$ **è in P**

$PATH = \{< G, s, t > \mid$ G è un grafo diretto (orientato) e s e t sono due suoi vertici, trai i quali esiste un cammino$\}$



algoritmo: input $< G, s, t >$ output *si* se $< G, s, t > \in PATH$, *no* altrimenti

1. $M = \{s\}$
2. cicla fin quando non aggiungo più vertici:
3. $\quad M \cup \{V \mid (x, V) \in E,\ x \in M\}$
4. se $t \in M$, rispondo *si*, *no* altrimenti

complessità: Analizziamo l'algoritmo e mostriamo che ha complessità polinomiale. Il punto 1 e 4 sono eseguiti una sola volta. Il passo 3 è eseguito al

più $|V|$ volte. Il numero di esecuzioni delle fasi è quindi al più $1 + 1 + |V|$, quindi polinomiali nella grandezza di G. I passi 1 e 4 sono facilmente implementabili in tempo polinomiale. Il passo 3 involve una scansione dell'input e un test per vedere se un vertice è già stato marcato, il che è facilmente implementabile in tempo polinomiale. Quindi $PATH \in P$.

E_{DFA} è in P

$$E_{DFA} = \{< A > | A \in DFA \; e \; L(A) = \emptyset\}$$

Per $A \in DFA$ si ha $L(A) = \emptyset$ quando non vi è un cammino dal suo stato di inizio q_0 ad un suo stato di accettazione q_F. Potendo determinare in tempo polinomiale l'insieme $PATH$ dei nodi per i quali esiste un cammino in G, ne concludiamo che potremo calcolare l'insieme $\overline{E_{DFA}}$ in tempo polinomiale, riducendolo al problema $PATH$.

$$\overline{E_{DFA}} \leq_m PATH$$

17.5 Determinare il rifiuto di una NTM

Data una $T \in NTM$ che si ferma sempre, definisco una strategia che verifica il rifiuto da parte di T di un dato input x. Come nell'algoritmo studiato per dimostrare l'equivalenza tra TM e NTM, simuliamo la macchina non deterministica T, che per ipotesi diciamo avere come grado di non determinismo 2 (e quindi un albero delle configurazioni binario), con una deterministica $T' \in TM$ utilizzando i tre nastri: input, lavoro, guida. Aggiungo questa volta un ulteriore nastro, detto di conteggio. Questo nastro terrà il conto del numero di foglie nell'albero delle configurazioni di T che hanno una configurazione di rifiuto o per cui la configurazione è bloccata. Al termine della simulazione di T, se il valore numerico nel nastro di conteggio è uguale a 2^h, con h altezza dell'albero, allora tutte le foglie sono o di rifiuto o bloccate. Di conseguenza possiamo dire che T non accetta x.

18 Lezione 18

18.1 Complessità di una TM che simula una NTM

Precedentemente si è indagata l'equivalenza tra macchine di Turing TM e macchine di Turing non deterministiche NTM. In particolare sappiamo che

$$T \in NTM \implies \exists\, T' \in TM \text{ tale che } L(T) = L(T')$$

Cosa possiamo dire dal punto di vista della complessità? Ovvero data $T \in NTM$ e $t_T(n)$ e una $T' \in TM$ equivalente, cosa possiamo dire di $t_{T'}(n)$?

Senza perdere di generalità, assumiamo che T abbia un massimo grado di non determinismo pari a 2, in quanto il ragionamento vale per qualsiasi k. Con questa assunzione, l'albero delle configurazioni della NTM è binario. Per definizione di $t_T(n)$, essa è il massimo numero di mosse che la macchina T compie su input di dimensione n; di conseguenza per una NTM essa coincide con l'altezza dell'albero, in quanto ogni cammino radice foglia è costituito da al massimo $t_T(n)$ mosse che una "copia" della macchina compie sull'input.

L'albero ha quindi al massimo $2^{t_T(n)}$ foglie, ovvero la TM che simula ha $2^{t_T(n)}$ cammini radice foglia da simulare. Ognuna di queste simulazioni richiede al più $t_T(n)$ mosse. Da queste considerazioni discende che

$$t_{T'}(n) = t_T(n) \cdot 2^{t_T(n)} = 2^{log(t_T(n))} \cdot 2^{t_T(n)} = 2^{t_T(n)+log(t_T(n))} = 2^{O(t_T(n))}$$

ovvero una macchina di Turing impiega tempo esponenziale per simulare il non determinismo.

18.2 La classe NP

Definiamo $NTIME(n^k)$ l'insieme dei linguaggi per cui esiste una NTM che ne accetta le parole di dimensione n in un numero di passi $O(n^k)$:

$$NTIME(n^k) = \{L \mid \exists\, T \in NTM \text{ tale che } L(T) = L \text{ e } t_T(n) = O(n^k)\}$$

Sulla base di questa definizione introduciamo la classe dei linguaggi (o equivalentemente dei *problemi*) NP:

$$NP = \bigcup_{k \geq 0} \{NTIME(n^k)\}$$

Essa *non* è composta dai problemi non risolvibili polinomialmente, in quanto quella descrizione individua la classe $\overline{P}$.
Invece di NP fanno parte problemi che si è in grado di risolvere in tempo polinomiale tramite *non determinismo*. Della maggior parte di essi non si ha la certezza che

non sia possibile costruire una macchina di Turing, ovvero un algoritmo, che deterministicamente li risolva in tempo polinomiale. Semplicemente un tale algoritmo non è ancora stato trovato.

18.3 Problemi NP

18.3.1 Problema del Cammino hamiltoniano

$$HAMPATH = \{< G, s, t > \mid G \text{ è un grafo diretto con un c.h. da } s \text{ a } t\}$$

Indichiamo con *c.h.* per brevità un *cammino hamiltoniano*, ovvero una sequenza di nodi $v_1, ..., v_n$, dove $n = |V_G|$, con le seguenti proprietà:

- $v_1 = s$ e $v_n = t$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E_G$ per $i = 1, ..., n-1$

Per mostrare che $HAMPATH \in NP$, esibiamo una NTM che lo decide in tempo polinomiale.

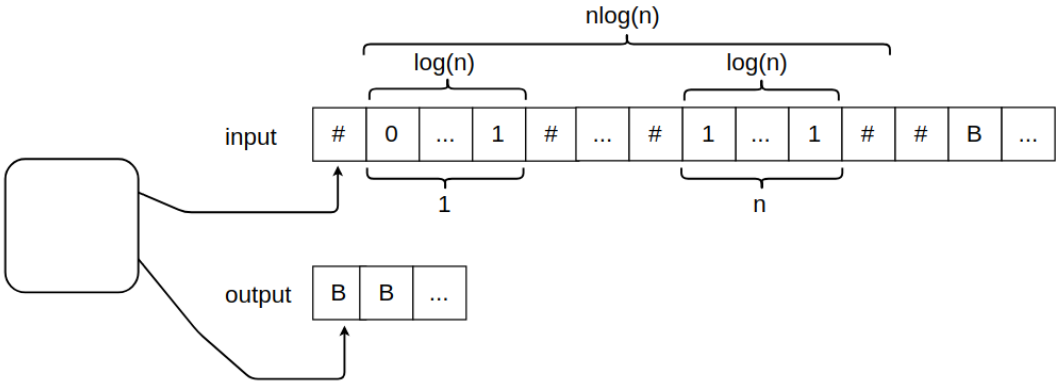
T_{HP}

input $< G, s, t >$

output SÌ se $< G, s, t > \in HAMPATH$, NO altrimenti

descrizione
1. Genera *non deterministicamente* una permutazione $v_1, ..., v_n$ dei nodi di G
2. Verifica che la permutazione generata sia effettivamente un c.h. nel seguente modo:
   - 2.1. Verifica che v_1 sia uguale a s e che v_n sia uguale a t
   - 2.2. Per ogni v_i, v_{i+1} nella permutazione, verifica che vi sia l'arco $(v_i, v_{i+1}) \in E_G$

Complessità Prima di tutto, vediamo come costruire una NTM che genera permutazioni su $\{1, ..., n\}$. Modificando leggermente la macchina che descriveremo, si potranno generare permutazioni anche sui vertici $\{v_1, ..., v_n\}$ di un grafo.



Assumiamo che la macchina abbia a disposizione due nastri, uno da cui legge e uno su cui scrive la permutazione; come sappiamo, questa assunzione non è vincolante, ma solo comoda per una descrizione ad alto livello. Assumiamo inoltre che i numeri siano memorizzati sul nastro come si vede in figura. Ogni numero occupa $log(n)$ celle in quanto codificato in binario, ed è separato dal successivo da un separatore #. L'insieme è terminato da un doppio separatore ##.

Fase di generazione La generazione *non deterministica* della permutazione procede come segue:

1. se la testina del primo nastro si trova su un separatore (non di fine input) decide se copiare il numero che segue sul secondo nastro o meno:
   - 1.1. se decide di copiarlo:
     - 1.1.1. marca il primo separatore per ricordarsi che ha copiato il numero
     - 1.1.2. avanza entrambe le testine scrivendo sul secondo nastro tutto ciò che legge sul primo
     - 1.1.3. quando incontra il separatore successivo, si ferma
   - 1.2. se decide di non copiarlo:
     - 1.2.1. avanza la testina sul primo nastro fino al separatore successivo, senza fare nulla
2. se l'input è finito (doppio separatore), riporta la testina del primo nastro all'inizio
3. torna al punto 1, ma se incontra un separatore marcato, avanza al separatore successivo senza toccare il secondo nastro

Vediamo qual è la complessità di questa NTM. Assumendo che in ogni scansione decida di copiare almeno un numero (facilmente implementabile), questa effettua al massimo n scansioni del nastro. Come evidenziato in figura, l'input è codificato su $nlog(n)$ celle, per cui ogni "copia" della macchina effettua $n^2log(n)$ mosse nel generare una permutazione. La macchina quindi non deterministicamente le genera tutte in tempo polinomiale.

Sostituendo le codifiche di $\{1, ..., n\}$ con le codifiche di $\{v_1, ..., v_n\}$ si ottiene un automa che calcola le permutazioni dei nodi necessarie per T_{HP}.

Fase di verifica Le due verifiche possono essere effettuate in tempo polinomiale anche deterministicamente:

1. 1.1. copia la codifica di s sul secondo nastro

   1.2. porta la testina del primo nastro all'inizio di v_1, la testina del secondo nastro all'inizio di s

   1.3. avanza contemporaneamente le due testine, verificando l'uguaglianza cella per cella

   1.4. ripeti per t e v_n

   Complessità logaritmica in n, ovvero polinomiale.

2. Assumendo che gli archi siano codificati sul nastro come una sequenza di coppie di vertici (u, w), si procede così:

   2.1. ripeti per ogni v_i, v_{i+1} nella permutazione:

      2.1.1. ripeti per ogni arco $(u, w) \in E$:

         2.1.1.1. copia la codifica di $(v_i, v_{i+1}) \in$ *permutazione* all'inizio del secondo nastro, come se fosse un arco

         2.1.1.2. porta la prima testina all'inizio della codifica di (u, w)

         2.1.1.3. porta la seconda testina all'inizio della codifica di (v_1, v_2)

         2.1.1.4. confronta cella per cella le codifiche di (u, w) e (v_i, v_{i+1}) finché non arrivi alla fine della codifica

         2.1.1.5. riporta la testina sul secondo nastro all'inizio del nastro

   Al più gli archi possono essere n^2, perciò la porzione da scandire è lunga n^2logn. Si effettuano n scansioni, per cui la complessità è $n \cdot n^2log(n) = n^3log(n)$, ovvero polinomiale.

Notiamo quindi che l'unica *fase non deterministica* è la *fase di generazione*, mentre la *fase di verifica* può essere effettuata deterministicamente in tempo polinomiale.

18.3.2 Problema del Clique

Dato un grafo qualsiasi G, un k-clique è un sottoinsieme C dei suoi vertici tale che ogni vertice è connesso con ogni altro

$$v_i, v_j \in C \implies \{v_i, v_j\} \in E$$

Il problema del Clique consiste, dato un grafo, nel trovare il clique di cardinalità massima. Esso non è dunque un problema di *decisione*, bensì un problema di *ottimizzazione*. Consideriamo tuttavia il problema di decisione associato, parametrizzando per la cardinalità k del clique cercato:

$$CLIQUE(k) = \{< G, k > \mid G \text{ è un grafo con un } k\text{-clique}\}$$

Il problema di ottimizzazione può quindi essere risolto sfruttando il problema di decisione, nel seguente modo:

```
   input  : Un grafo G
   output: La cardinalità della clique di cardinalità massima
1  for i = n → 1 do
2  |  if < G, i >∈ CLIQUE(k) then
3  |  |  return i;
4  |  end
5  end
```

Come prima, esibiamo una NTM che decide $CLIQUE(k)$ in tempo polinomiale:

T_C

input $< G, k >$

output SÌ se $< G, k > \in CLIQUE(k)$, NO altrimenti

descrizione
1. genera non deterministicamente un sottoinsieme S *qualunque* dei nodi di G
2. verifica che S sia un k-clique, ovvero:
   - 2.1. $|S| = k$
   - 2.2. $u, v \in S \implies \{u, v\} \in E$

Complessità Un automa che genera sottoinsiemi è molto simile a quello che genera permutazioni, descritto precedentemente: l'automa per ogni nodo sul primo nastro decide non deterministicamente se copiarlo o meno sul secondo nastro, in un'unica scansione. Così una "copia" dell'automa, andando con la testina su v_1, deciderà di copiarlo, decidendo invece di non copiare nessun altro nodo; un'altra invece deciderà di copiare ogni nodo, e così via.

Ogni copia della macchina effettua un'unica scansione del nastro, che per quanto detto prima richiede $nlog(n)$ mosse. Ne consegue che anche in questo la complessità della *fase non deterministica* è polinomiale. La *fase di verifica*, similmente al problema del cammino hamiltoniano, può essere eseguita *deterministicamente* in tempo polinomiale.

18.4 Verificatore polinomiale

Nei due esempi precedenti si è visto come la *fase di verifica* potesse essere eseguita *deterministicamente* e in tempo *polinomiale*. È quindi lecito chiedersi se questa sia una proprietà comune a tutti i problemi NP. Questo permetterebbe una definizione dei problemi NP che ignora completamente il concetto del non determinismo.

Introduciamo formalmente il concetto di *verificatore*:

$$V \in TM \; verifica \; A \text{ se}$$
$$A = \{w \mid (w, c) \in L(V) \text{ per un qualche } certificato \; c\}$$

L'aggiunta di *polinomiale* significa che il verificatore opera in una serie polinomiale di passi, cioè $t_V(n) = O(n^k)$.

Un *certificato* è una possibile soluzione di una istanza di un problema, un concetto meglio comprensibile tramite un esempio.
Forniamo a tale scopo un verificatore per il problema di decisione $CLIQUE(k)$.

V_{CLIQUE}:

input $(< G, k >, c)$

output SÌ se c è un k-clique di G, NO altrimenti

descrizione semplicemente effettua la verifica esposta in precedenza

Come si vede, è più comodo esibire un verificatore rispetto ad esibire una NTM che decide un problema. Vediamo un altro esempio.

18.4.1 Problema dei numeri composti

Istanze sì del problema sono tutti quei numeri *composti*, ovvero non primi, per cui si riesce a trovare un naturale diverso da 1 e da sè stesso che lo divide.

$$COMPOSITES = \{p \mid p \in \mathbb{N} \text{ e } \exists\ q, r \in \mathbb{N} \text{ con } p = q \cdot r \text{ con } q \neq 1, q \neq n\}$$

Esibiamo sia un $T_{COMP} \in NTM$ che lo decide, sia un verificatore V_{COMP} che lo verifica.

- T_{COMP}

  input $p \in \mathbb{N}$

  output SÌ se p è composto, NO altrimenti

  descrizione
  1. genera non deterministicamente tutti i naturali q con $1 < q < p$
  2. verifica se $p \ mod \ q \equiv 0$

- V_{COMP}

  input (p, c) con $p, c \in \mathbb{N}$

  output SÌ se c divide p, NO altrimenti

  descrizione
  1. verifica se $c \neq 1$ e se $c < p$
  2. verifica se $p \ mod \ c \equiv 0$

Anche questo problema sta in NP, e anche in questo caso siamo riusciti ad esibire un verificatore polinomiale. Come accennato precedentemente, questa è effettivamente una proprietà comune a tutti i problemi in NP.

18.5 Dimostrazione NP = VP

Definiamo $VP = \{L \mid \exists$ verificatore polinomiale V che verifica $L\}$. La dimostrazione, come di consueto, procede per *doppia inclusione*.

NP $\subseteq$ VP Vogliamo mostrare che $L \in NP \implies \exists V \in VP$ che lo verifica.

Se $L \in NP$ allora per definizione $\exists\ T \in NTM$ con $t_T(n) = O(n^k)$, per qualche k, tale che $L(T) = L$. Costruiamo un verificatore per L.

Supponiamo che l'albero di computazione di T abbia massimo grado di non determinismo uguale a 2. Inoltre, come visto in precedenza, esso sarà alto $t_T(n)$. Costruiamo allora un certificato $c \in \{0,1\}^\star$, con $|c| = t_T(n)$. Un certificato del genere è in grado di identificare univocamente ogni cammino radice foglia, ovvero un percorso di computazione. Il verificatore V_L è allora così composto:

input $< w, c >$

descrizione
1. esegui T su w seguendo il percorso di computazione identificato da c
2. se T accetta, allora accetta
3. se T rifiuta, allora rifiuta

La costruzione del verificatore è corretta perché possiamo esprimere $L(T)$ secondo la definizione di verificatore:

$$L(T) = \{w \mid\ < w, c > \in L(V_L) \text{ per qualche certificato } c\}$$

Infatti per ogni parola w accettata da T esiste almeno un cammino di accettazione per w, dunque per costruzione esiste un certificato c per cui V_L accetta.
Se invece w è rifiutata da T, allora nessun cammino è di accettazione, quindi nessun certificato identifica un cammino di accettazione, quindi V_L rifiuta w su qualsiasi certificato.
Inoltre la complessità è polinomiale perché la sequenza c è di lunghezza polinomiale, e quindi anche il numero di passi di T che V_L simula è polinomiale.

VP $\subseteq$ NP Vogliamo mostrare che $L \in VP \implies \exists T \in NP$ che lo decide.

Se $L \in VP$ allora per definizione $\exists\ V$ tale che $L = \{w \mid\ < w, c > \in L(V)\}$ con $t_V(n) = O(n^k)$. Costruiamo una $T_L \in NTM$ che decide L.

T_L

input w

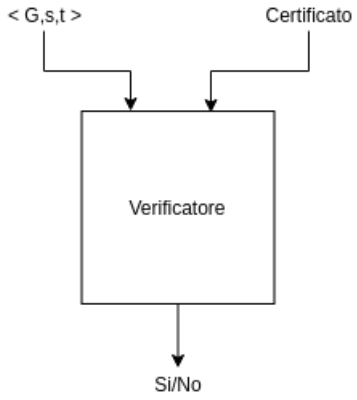
output SÌ se $w \in L$, NO altrimenti

descrizione
1. genera non deterministicamente tutti i certificati c con $|c| \leq t_V(n)$
2. esegui il verificatore su $< w, c >$
   - 2.1. se V accetta, allora accetta
   - 2.2. se V rifiuta, allora rifiuta

La costruzione è corretta in quanto se $w \in L$ allora esiste almeno un certificato c per cui V accetta $< w, c >$. Poiché T_L genera non deterministicamente *tutti* i certificati, necessariamente genera anche c, e un suo cammino di computazione esegue V su $< w, c >$, il quale per quanto detto prima accetta, e quindi esiste un cammino di accettazione di T_L per w.
Se invece $w \notin L$ allora non esiste un certificato c per cui V accetta $< w, c >$. Quindi per *nessun* certificato generato da T_L si avrà l'accettazione di V su $< w, c >$. Ne segue che non esiste un cammino di accettazione di T_L per w, ovvero T_L rifiuta w.

19 Lezione 19

19.1 $\overline{HAMPATH} \notin$ NP

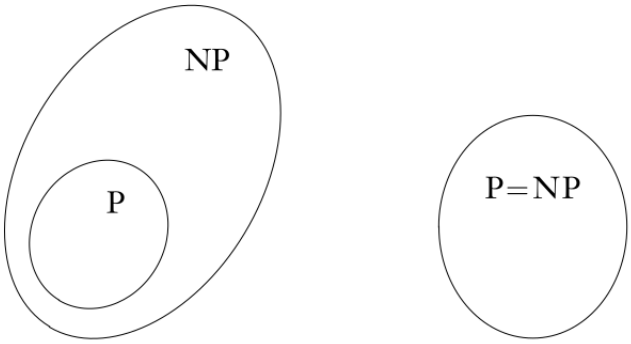


$\overline{HAMPATH} = \{< G, s, t > \mid G$ è un grafo diretto senza cammini hamiltoniani da s a $t\}$

Il problema $\overline{HAMPATH}$ non è in NP poiché non ammette un verificatore polinomiale, in quanto tale verificatore dovrebbe controllare che *nessuna* permutazione di nodi sia un cammino hamiltoniano. Quindi il certificato da dare al verificatore dovrebbe necessariamente contenere tutte le possibili permutazioni dei vertici ed avere quindi tale dimensione (esponenziale), mentre nel caso di $HAMPATH$ era sufficiente fornire una possibile permutazione dei vertici come certificato.

19.2 Relazione fra P e NP

Uno dei maggiori problemi irrisolti dell'informatica teorica è quello di stabilire quale relazione lega P ed NP, vi sono due possibilità:



Definiamo $EXPTIME = \bigcup_{k \geq 0} TIME(2^{O(n^k)})$, sappiamo che $NP \subseteq EXPTIME$ poiché si è visto che una TM simula una NTM con complessità di tempo $2^{O(t(n))}$, ma non sappiamo se esista una classe di complessità deterministica più piccola di $EXPTIME$ che contenga NP.

Per dimostrare $P = NP$ si è cercato senza successo un metodo alternativo polinomiale per convertire una NTM in una TM deterministica, mentre per dimostrare $P \subsetneq NP$ si è cercato un problema in NP con un limite inferiore non in P.

19.3 Riduzione Polinomiale

Un linguaggio A si *riduce polinomialmente* a un linguaggio B, ovvero in simboli $A \leq_p B$ se:

$$\exists\ f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star \text{ tale che}$$

1. f è calcolabile in tempo polinomiale
2. $x \in A \iff f(x) \in B$

19.4 I linguaggi CNFSAT e 3SAT

$$CNFSAT = \{\ \varphi \mid \varphi \in CNF\ \wedge \varphi \text{ è soddisfacibile}\}$$

Con CNF si intende la Forma Normale Congiuntiva di una formula booleana, ovvero formata solo da *clausole* in *and*. Una clausola è un insieme di letterali in *or*.

Si verifica facilmente l'appartenenza di CNFSAT ad NP esibendo un verificatore V:

input: $< \varphi, s >$, con $\varphi \in CNF$ e $s \in \{0,1\}^\star$ che rappresenta una assegnazione di verità ad ogni letterale (variabile o sua negazione) in φ

descrizione: verifica che ogni clausola valutata su tale assegnamento di letterali sia vera

Introduciamo ora il linguaggio $3SAT$, che in quanto sottoinsieme di $CNFSAT$, è in NP

$$3SAT = \{\ \varphi \mid \varphi \in CNF \text{ soddisfacibile}\ \wedge \text{ogni clausola è di 3 letterali}\}$$

La riduzione

$$\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_k \text{ con } C_i \text{ clausola}$$

Trasformiamo ogni clausola in una 3-clausola equivalente: sia

$$C = X_1 \vee \cdots \vee X_m$$

una generica clausola. La trasformazione è così descritta:

1. $m = 1 \quad C = X_1 \Rightarrow \varphi_C = X_1 \vee X_1 \vee X_1$
2. $m = 2 \quad C = X_1 \vee X_2 \Rightarrow \varphi_C = X_1 \vee X_2 \vee X_1$
3. $m = 3 \quad$ C è già una 3-clausola
4. $m \geq 4$

$$\varphi_C = (X_1 \vee X_2 \vee Z_1) \wedge \left(\overline{Z_1} \vee X_3 \vee Z_2\right) \wedge \cdots \wedge \left(\overline{Z_{i-2}} \vee X_i \vee Z_{i-1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\overline{Z_{m-3}} \vee X_{m-1} \vee X_m\right)$$

Nei primi tre casi è ovvio che C soddisfacibile $\Rightarrow \varphi_C$ soddisfacibile; nel quarto caso un po' meno, e lo mostreremo esplicitamente.

C è soddisfatta $\Rightarrow \varphi_C$ è soddisfatta

$$C \text{ soddisfatta} \Rightarrow \ \exists\, i \mid X_i = 1,\ 1 \leq i \leq m$$

$$\begin{array}{lll} i = 1, 2 & \Rightarrow Z_j = 0 & \forall\ 1 \leq j \leq m-3 \qquad (1) \\ i = m-1, m & \Rightarrow Z_j = 1 & \forall\ 1 \leq j \leq m-3 \qquad (2) \\ 2 < i < m-1 & \Rightarrow Z_j = 1 & \forall\ 1 \leq j \leq i-2 \qquad (3) \\ & \text{e} \quad Z_j = 0 & \forall\ \ i-1 \leq j \leq m-3 \end{array}$$

Se X_1 o X_2 sono vere, allora la prima clausola è vera: costruire una φ_C con tutte le $Z_j = 0$ fa sì che tutte le clausole intermedie siano vere, in quanto contengono la negazione di una qualche Z_k, e così anche l'ultima che contiene $\overline{Z_{m-3}}$.

Se X_{m-1} o X_m sono vere, allora l'ultima clausola è vera: costruire una φ_C con tutte le $Z_j = 1$ fa sì che tutte le clausole intermedie siano vere, similmente a prima, e così anche la prima che contiene Z_1.

Se infine è l'assegnamento di una qualche X_i intermedia a rendere soddisfatta C, allora l'i-esima clausola è vera, e bisogna far sì che lo siano anche tutte le altre. Costruendo φ_C con $Z_j = 1$ fino a $j = i - 2$, le clausole precedenti sono sicuramente vere, in quanto ogni clausola (inclusa la prima) contiene un letterale vero; se $Z_j = 0$ da $j = i - 1$ in poi, le clausole successive sono sicuramente vere, in quanto ogni clausola (inclusa l'ultima) contiene un letterale che è la negazione di una variabile falsa.

φ_C **soddisfatta** $\Rightarrow$ C **soddisfatta** Supponiamo per assurdo che C non sia soddisfatta dall'assegnamento che rende vera φ_C, cioè $X_i = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq m$.

Se $X_i = 0$ allora a rendere vere le clausole di φ_C dovrebbero essere le Z_i: se fosse $Z_i = 1$ per ogni i, allora l'ultima clausola sarebbe falsa; se fosse $Z_i = 0$ per ogni i, allora la prima clausola sarebbe falsa; in generale qualunque fosse l'assegnamento delle Z_i, ci sarebbe almeno una clausola di φ_C falsa, e quindi φ_C non sarebbe soddisfatta in contraddizione con l'ipotesi.

19.5 Teorema di Cook-Levin

NP-completezza Un linguaggio A è detto NP-completo se soddisfa due condizioni:

1. $\forall B \in NP,\ B \leq_p A$ (A è NP hard)
2. $A \in NP$

Cook e Levin introdussero il concetto di *NP-completezza*, ovvero la proprietà di un linguaggio per cui qualsiasi altro linguaggio in NP si può ridurre polinomialmente ad esso. Essi dimostrarono che SAT (e in particolare $CNFSAT$) è NP-completo, con una dimostrazione che non vediamo in quanto lunga, poiché deve prendere in esame un linguaggio L generico e mostrare che $L \leq_p SAT$.

Transitività della riduzione $A \leq_p B \leq_p C \implies A \leq_p C$

Dimostrazione Sia f la funzione di riduzione per $A \leq_p B$ e T_f una TM che la calcola in tempo polinomiale $O(n^k)$.

Sia inoltre g la funzione di riduzione per $B \leq_p C$ e T_g una TM che la calcola in tempo polinomiale $O(n^{k'})$.

Allora è possibile comporre T_f e T_g ottenendo una TM che, dato un $x \in A$, calcola $g(f(x)) \in C$ in un tempo polinomiale $O((n^k)^{k'}) = O(n^{k \cdot k'}) = O(n^{k''})$.

Grazie a questa proprietà, per mostrare che un linguaggio è NP-hard basta mostrare che sia possibile ridurre polinomialmente $CNFSAT$ ad esso. Infatti se $CNFSAT \leq_p A$, allora significa che per qualunque $B \in NP$ vale $B \leq_p CNFSAT \leq_p A$, ovvero $B \leq_p A$ ovvero A è NP-hard. Se si sa che $A \in NP$, allora A è anche NP-completo. Ad esempio, abbiamo mostrato che $CNFSAT \leq_p 3SAT$, e poiché $3SAT \in NP$, possiamo affermare che $3SAT$ è NP-completo.

Lemma Se un linguaggio è riducibile polinomialmente a un linguaggio in P, allora anche esso è in P.

$$B \in P \wedge A \leq_p B \implies A \in P$$

Enunciato

$$B \text{ è } NP\text{-completo } \wedge B \in P \implies P = NP$$

Dimostrazione Se B è NP-completo allora ogni altro linguaggio $A \in NP$ si riduce polinomialmente ad esso. Ma $B \in P$, allora per il lemma precedente qualsiasi A che si riduce polinomialmente a B è anch'esso in P. Dunque tutti i linguaggi in NP stanno anche in P, dimostrando che $NP \subseteq P$, ovvero l'inclusione mancante per dimostrare $P = NP$.

19.6 Esempi di riduzioni polinomiali

19.6.1 Clique

$$CLIQUE(k) = \{< G, s, t > \mid \text{ G ha un clique di k-elementi}\}$$

Per affermare che $CLIQUE(k)$ sia NP-completo bisogna mostrare che:

1. CLIQUE(k) $\in$ NP (vedi 18.3.2)
2. 3SAT $\leq_p$ CLIQUE

Dobbiamo quindi esibire una f di riduzione, calcolabile polinomialmente, tale che:

$$\varphi \overset{f}{\mapsto} < G, k > \text{ tale che } \varphi \text{ è soddisfacibile } \iff G_\varphi \text{ ha un clique di k-elementi}$$

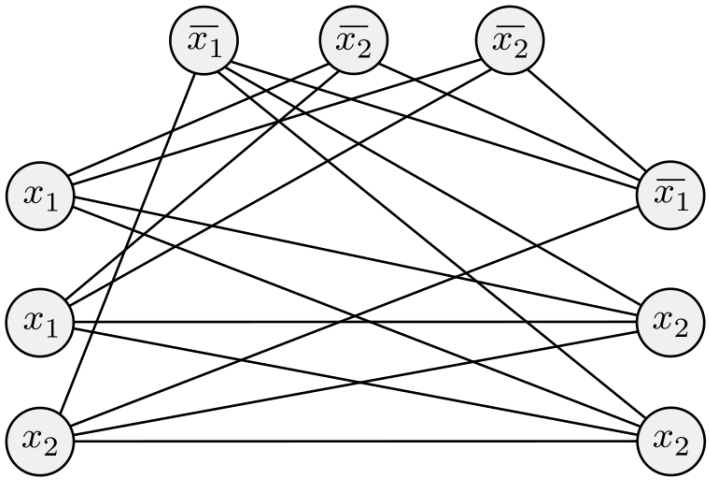
La f costruisce il grafo G nel seguente modo:

- ogni nodo nel grafo corrisponde a un letterale presente nelle clausole di φ
- i nodi corrispondenti a letterali nella stessa clausola non sono connessi
- i nodi corrispondenti a letterali contraddittori non sono connessi
- tutti gli altri nodi sono connessi

Esempio

$$\varphi = (X_1 \vee X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2} \vee \overline{X_2}) \wedge (\overline{X_1} \vee X_2 \vee X_2)$$

e il grafo che costruiamo è il seguente



φ soddisfacibile $\Rightarrow$ G_φ ha un k-clique Se φ è soddisfacibile, e $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \wedge \cdots \wedge C_n$, allora essa ha un qualche assegnamento di verità che la rende soddisfatta. Consideriamo tale assegnamento: in ogni C_i vi è almeno un letterale vero, che indichiamo con X_i. Costruiamo G_φ con la regola di cui sopra e consideriamo i nodi etichettati con i vari X_i: essi sono k, tanti quante le clausole, e inoltre sicuramente sono connessi tra loro poiché, considerati a coppie

1. non appartengono alla stessa clausola C_i
2. non sono contraddittori, poiché se lo fossero allora o uno dei due non sarebbe vero (contraddizione), oppure φ sarebbe contraddittoria (contraddizione)

Quindi il sottografo formato dai nodi etichettati con i vari X_i è una k-clique.

G_φ ha un k-clique $\Rightarrow$ φ è soddisfacibile Se G_φ ha un k-clique, nessun nodo nel clique corrisponde a letterali appartenenti alla stessa clausola, in quanto per costruzione essi non sono connessi. Di conseguenza ogni clausola contiene esattamente 1 letterale corrispondente a un nodo nel clique, perciò basta trovare un assegnamento di verità che rende vero ognuno di questi letterali per rendere soddisfatta φ.

Tale assegnamento esiste sicuramente, in quanto i letterali del clique non sono contraddittori, altrimenti per costruzione non sarebbero connessi, e quindi non potrebbero far parte del k-clique (contraddizione).

Quindi φ è soddisfacibile.

19.6.2 IndSet

$$INDSET = \{< G, k > \mid G \text{ ha un independet-set di k-elementi}\}$$

Con *independet-set* si indica un sottoinsieme S di nodi di G per cui $v, w \in S \implies \{v, w\} \notin E_G$.

Mostriamo che $INDSET$ è NP-completo:

1. INDSET $\in$ NP (si verifica facilmente)
2. 3SAT $\leq_p$ INDSET

Come al solito, dobbiamo esibire una f di riduzione per cui:

$$\varphi \overset{f}{\mapsto} < G_\varphi, k > \text{ tale che}$$

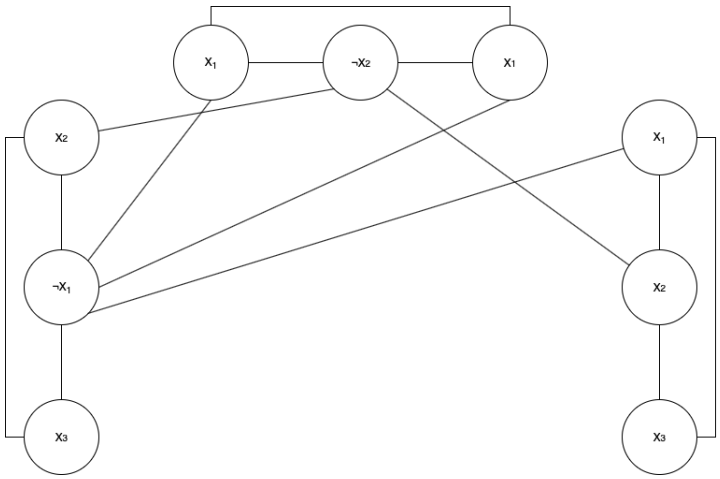
φ ha k clausole ed è soddisfatta $\iff$ G ha un independent-set di dimensione k

La f costruisce G nel seguente modo:

- ogni nodo nel grafo corrisponde a un letterale presente nelle clausole di φ
- i nodi corrispondenti a letterali nella stessa clausola sono connessi
- i nodi corrispondenti a letterali contraddittori sono connessi
- tutti gli altri nodi non sono connessi

Esempio

$$\varphi = (X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_1) \wedge (X_2 \vee \overline{X_1} \vee X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee X_3)$$



φ **soddisfacibile** $\Rightarrow$ G_φ **ha un independent-set di dimensione** k Se φ è soddisfacibile, e $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$, allora essa ha un qualche assegnamento di verità che la rende soddisfatta. Consideriamo tale assegnamento: in ogni C_i vi è almeno un letterale vero, che indichiamo con X_i. Costruiamo G_φ con la regola di cui sopra e consideriamo i nodi etichettati con i vari X_i: essi sono k, tanti quante le clausole, e inoltre sicuramente *non* sono connessi tra loro poiché, considerati a coppie

1. non appartengono alla stessa clausola C_i
2. non sono contraddittori, poiché se lo fossero allora o uno dei due non sarebbe vero (contraddizione), oppure φ sarebbe contraddittoria (contraddizione)

Quindi il sottografo formato dai nodi etichettati con i vari X_i è un independent-set di dimensione k.

G_φ **ha un independent-set di dimensione** k $\Rightarrow$ φ **è soddisfacibile** Se G_φ ha un independent-set di dimensione k, che chiamiamo S, allora nessun nodo in S corrisponde a letterali appartenenti alla stessa clausola, in quanto per costruzione essi sono connessi. Di conseguenza ogni clausola contiene esattamente 1 letterale corrispondente a un nodo in S, perciò basta trovare un assegnamento di verità che rende vero ognuno di questi letterali per rendere soddisfatta φ.

Tale assegnamento esiste sicuramente, in quanto i letterali in S non sono contraddittori, altrimenti per costruzione sarebbero connessi, e quindi non potrebbero far parte di S (contraddizione).

Quindi φ è soddisfacibile.

20 Lezione 20

20.1 Complessità di Spazio

Sia M una macchina di Turing deterministica che si arresta su tutti gli input. La *complessità di spazio* di M è la funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$f(n) = max\{$numero di celle del nastro che M scandisce su ogni input di lunghezza $n\}$

Se M è una macchina di Turing non deterministica in cui tutte le diramazioni si arrestano su tutti gli input, definiamo la sua complessità di spazio *f(n)* come il massimo numero di celle del nastro che M scandisce su qualsiasi diramazione della sua computazione per ogni input di lunghezza n.

20.2 Teorema di Savitch

Teorema. *Se $T \in NTM$ ha complessità di spazio $S_T(n) \geq n$, allora $\exists\ T' \in TM$ equivalente avente complessità di spazio $S_{T'}(n) = O(S_T^2(n))$.*

Dimostrazione. Il teorema si dimostra esibendo una TM deterministica che simula la NTM data in input, che ha complessità di spazio $S_T(n)$, usando spazio $O(S_T^2(n))$.

L'approccio utilizzato per simulare una NTM con una TM deterministica che conosciamo richiede tempo e spazio esponenziali, quindi si usa un approccio differente. Si consideri il problema più generale del *reach*, la cui formulazione è la seguente:

Date due configurazioni c, c' della NTM, determinare se essa può transitare da c a c' in al più t passi. Vediamo una implementazione ricorsiva di tale algoritmo.

CANYIELD

input: *(c,c',t)*

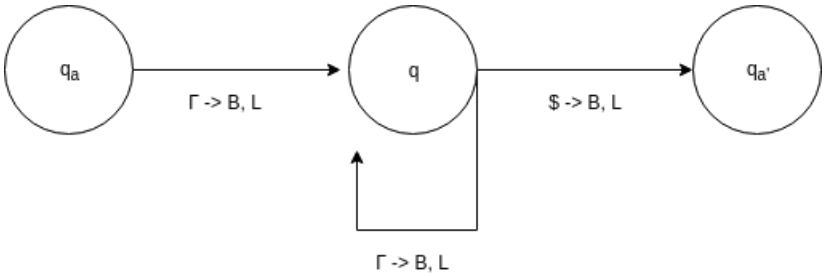
output: 1 se $c \Rightarrow^\star c'$ in al più t passi, 0 altrimenti

descrizione:

1. Se $t = 0$:
   1.1. Se $c = c'$, allora ritorna 1
   1.2. Altrimenti ritorna 0

2. Se $t = 1$:
   2.1. Se $c \Rightarrow c'$, allora ritorna 1
   2.2. Altrimenti ritorna 0
3. $\forall\ c''$ di T
   3.1. Ritorna *CANYIELD(c,c'',*$\frac{t}{2}$*)* $\wedge$ *CANYIELD(c'',c',*$\frac{t}{2}$*)*

Risolvere tale problema con input $(c_i, c_f, S_T(n))$, dove c_i, c_f e $S_T(n)$ sono rispettivamente la configurazione iniziale (q_0x), la configurazione finale (q_aB) e il numero massimo di passi che la NTM può effettuare, equivale a stabilire se la macchina T accetti o no l'input x.
Notare che esistono diverse possibili configurazioni finali ma per evitare di dover chiamare l'algoritmo per ogni configurazione accettante applichiamo una modifica alla NTM in modo che l'unica configurazione di accettazione sia proprio q_aB, ossia quella in cui il nastro è vuoto e la la testina è all'inizio del nastro.



Per capire quanto spazio richiede l'algoritmo analizziamo lo stack delle chiamate ricorsive. Ciascun livello della ricorsione usa spazio $O(S_T(n))$ per memorizzare una configurazione. La profondità della ricorsione è *log* t, dove t è il tempo massimo che la NTM può usare su ogni diramazione e che per semplicità assumiamo essere una potenza di 2. Quindi una volta che la ricorsione raggiunge il caso base nello stack delle chiamate ci saranno $O(lg\ t)$ chiamate, ognuna delle quali avrà memorizzato due configurazioni e il valore di t occupando uno spazio di $O(S_T(n)) + O(lg\ t)$.

Nel nostro caso ci interessa $t = 2^{O(S_T(n))}$, poiché esso è il tempo che la TM impiega a simulare la NTM; quindi $log\ t = O(S_T(n))$. Pertanto la simulazione deterministica usa spazio $O(S_T^2(n))$.
Dobbiamo ora dare la descrizione della macchina deterministica T' equivalente a T.

T':

input: x

descrizione:

1. Esegue *CANYIELD* su $(c_i, c_a, 2^{O(S_T(n))})$
   1.1. Se *CANYIELD* ritorna 1, accetta
   1.2. altrimenti rifiuta

L'algoritmo richiede tuttavia in input il parametro t che nel nostro caso è $2^{O(S_T(n))}$. Non sapendo $S_T(n)$ dobbiamo sfruttare il fatto che $2^{O(S_T(n))} = 2^{k \cdot S_T(n)}$, k dipende solo da $|\Gamma|$ e $|Q|$ ed è quindi nota, invece per trovare $S_T(n)$ dobbiamo provare tutti i possibili valori $i = 0, 1, \ldots$ finché non si ottiene l'$S_T(n)$ cercato.

Per far in modo che l'algoritmo si fermi sempre bisogna inoltre controllare ad ogni iterazione che vi sia una configurazione raggiungibile a distanza $i + 1$. □

20.3 PSPACE e NPSPACE

Per definire le classi $PSPACE$ e $NPSPACE$, ci serviamo di altri due linguaggi ovvero $SPACE$ e $NSPACE$:

$$NSPACE(n^k) = \{L \mid L \in NTM \wedge L(T) = L \wedge S_T(n) = O(n^k)\}$$

$$NPSPACE = \bigcup_{k \geq 0} NSPACE(n^k)$$

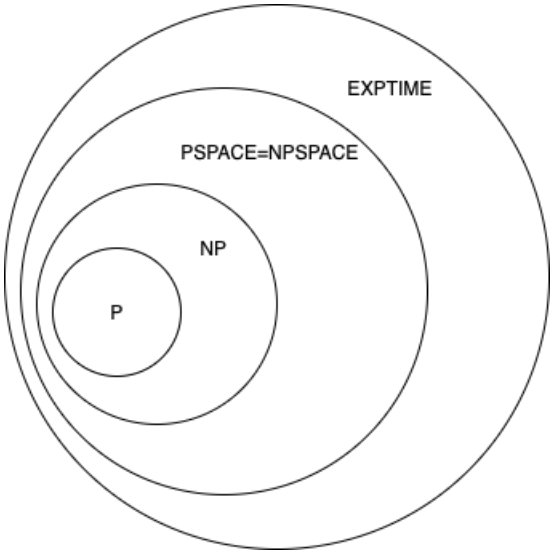
$$SPACE = \{L \mid L \in TM \wedge L(T) = L \wedge S_T(N) = O(n^k)\}$$

$$PSPACE = \bigcup_{k \geq 0} SPACE(n^k)$$

Dimostriamo l'uguaglianza tra i due linguaggi appena definiti sfruttando la doppia inclusione, banalmente possiamo vedere che $PSPACE \subseteq NPSPACE$ poiché ogni macchina deterministica è anche non deterministica, e per il *Teorema di Savitch* abbiamo che $NPSPACE \subseteq PSPACE$.

20.3.1 Relazione PSPACE e NP

Siccome il tempo utilizzato da una macchina limita la quantità di spazio che la macchina utilizzerà, allora $NP \subseteq NPSPACE$, e data l'uguaglianza tra NPSPACE e PSPACE, abbiamo anche che $NP \subseteq PSPACE$.
Inoltre sappiamo che una macchina che utilizza spazio $f(n)$ deve computare in tempo $f(n)2^{O(f(n))}$, e quindi $PSPACE \subseteq EXPTIME$.
A meno di qualche inclusione propria il diagramma seguente raffigura le suddette relazioni:



20.3.2 PSPACE-completezza

Un linguaggio B è PSPACE-completo se soddisfa due condizioni:

1. $B \in PSPACE$
2. $\forall$A in PSPACE, $A \leq_p B$

Notare che è necessario effettuare la riduzione in tempo polinomiale e non in spazio polinomiale, questo perché una macchina che usa spazio polinomiale può impiegare $2^{O(n^k)}$.

20.4 Esercizi

1. $L \in NSPACE(n^2)$, per quale $f(n)$ $L \in TIME(f(n))$
   Usando il teorema Savitch, abbiamo che:

$$L \in NSPACE(n^2) \Rightarrow L \in SPACE(n^4) \Rightarrow TIME(2^{O(n^4)})$$

Non usando il teorema Savitch, devo passare da NTM a TM usando la costruzione con l'albero, quindi $L \in TIME(2^{2^{O(n^2)}})$.

Bisogna controllare quale costruzione da NTM a TM restituisce il risultato migliore.

2. $L \in NTIME(n^2)$, per quale $f(n)$ $L \in SPACE(f(n))$

Usando il teorema di Savitch abbiamo che:

Sapendo che il tempo limita lo spazio $L \in NTIME(n^2) \Rightarrow L \in NSPACE(n^2)$, quindi:

$$L \in NTIME(n^2) \Rightarrow L \in NSPACE(n^2) \Rightarrow L \in SPACE(n^4)$$

Non usando il teorema di Savitch vedo quanto spazio occupano i nastri:

$$\left.\begin{array}{l} \text{nastro di input O(n)} \\ \text{nastro di lavoro } O(n^2) \\ \text{nastro guida } O(n^2) \end{array}\right\} \Rightarrow L \in SPACE(n^2)$$

Se si parte da NTIME è consigliato usare la costruzione tramite l'albero, se si parte da

NSPACE invece è consigliato usare il teorema di Savitch

3. $A \leq_m \overline{A}$ $A \in Turing - Riconoscibile$, cosa posso dire di $\overline{A}$

$$A \leq_m \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \leq_m A \Rightarrow \overline{A} \in Turing - Riconoscibile$$

4. $SAT \in SPACE(n) \rightarrow SAT \in TIME(2^{O(n)}$

20.5 Algoritmo ALL_{NFA}

$ALL_{NFA} = \{< A > \mid A \in NFA_\Sigma \text{ e } L(A) = \Sigma^\star\}$
$\overline{ALL_{NFA}} = \{< A > \mid A \in NFA_\Sigma \text{ e } L(A) \neq \Sigma^\star\}$

M: input $< A >$, $A \in NFA_\Sigma$
output: si se $L(A) \neq \Sigma^\star$
no altrimenti

1. $S = \varepsilon - closure$
2. Ripeti 2^q volte, dove $q = |Q|$ di A (q è il massimo numero di stati della macchina deterministica di A che simula la macchina non deterministica di A)
   2.1. se S non contiene uno stato finale, accetta

2.2. non deterministicamente prendi $a \in \Sigma$ e calcola $S' = \varepsilon - closure(\bigcup_{p \in S} \delta(p, a))$

2.3. poni $S = S'$ (e ricomincia)

Il più grande insieme S che considero ha q elementi, e occupa spazio O(n), dove n è la lunghezza della codifica di A: $n = | < A > | \quad n \geq q$

$\overline{ALL_{NFA}} \in NSPACE(n)$

21 Lezione 21

21.1 La classe *coNP*

21.1.1 Definizione

$$coNP = \{\ L \mid \overline{L} \in NP\}$$

Ossia *coNP* contiene tutti i linguaggi il cui complemento è in NP.
La classe *coNP* è interessante dal punto di vista teorico poiché dimostrare che *coNP* sia diversa da NP equivarrebbe a dimostrare la diversità di P ed NP.

$$P = NP \implies NP = coNP$$
$$NP \neq coNP \implies P \neq NP$$

21.1.2 *coNP*-Completezza

Definizione. *L è* coNP-*Completo se:*

1. $L \in coNP$
2. *L è* coNP-Hard*, ossia* $\forall A \in coNP, A \leq_p L$

21.1.3 Il problema $\overline{TAUT}$

$$TAUT = \{\ \varphi \mid \varphi \text{ è vera per ogni assegnamento }\}$$
$$\overline{TAUT} = \{\ \varphi \mid \exists \text{ un assegnamento che rende } \varphi \text{ falsa }\}$$

Dimostreremo ora che $TAUT$ è *coNP-Completo.*

Teorema. $TAUT \in coNP$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\overline{TAUT}$, il problema della falsificabilità di formule booleane, sta in NP. Siamo in grado di esibirne un algoritmo (i.e. una NTM) che lo decide: esso è analogo a quello che decide SAT, soltanto che invece di controllare che vi sia un assegnamento che soddisfi la formula si controlla che ve ne sia uno che la falsifichi. □

Teorema. $TAUT$ *è coNP-completo*

Dimostrazione. Abbiamo mostrato prima che $\overline{TAUT} \in NP \implies TAUT \in coNP$; ci resta da mostrare che $TAUT$ sia $coNP$-hard.

Sappiamo che $\forall A \in NP \quad A \leq_p SAT$ poiché SAT è *NP-Completo*, inoltre sappiamo che se un linguaggio A si riduce ad un linguaggio B allora anche il complemento di A si può ridurre al complemento di B, quindi $\overline{A} \leq_p \overline{SAT}$.
Basta quindi dimostrare che $\overline{SAT}$ si riduce polinomialmente a TAUT per dimostrare la *coNP-Hardness* di quest'ultimo. Essendo le istanze sì di $\overline{SAT}$ le formule insoddisfacibili basterà associare ad ogni formula accettata da SAT la sua negazione per avere una riduzione corretta.

$$\varphi \mapsto \neg\varphi$$
$$\varphi \in \overline{SAT} \iff \neg\varphi \in TAUT$$

□

21.1.4 Relazione fra P e coNP

Sappiamo che $P \subseteq NP$ e che $coP \subseteq coNP$, quindi dal momento che $P = coP$ possiamo affermare che:

$$P \subseteq NP \cap coNP$$

Problemi in questa intersezione si rivelano spesso di interesse per la ricerca.

21.2 Il problema FACTOR

21.2.1 FACTOR è in NP

$$FACTOR = \{(p, u) \mid p, u \in \mathbb{N} \; e \; p \text{ ha un divisore} < u\}$$

$FACTOR \in NP$ poichè possiamo esibire facilmente una macchina che lo verifica polinomialmente. Questa, preso (p, u) e un certificato q, risponde sì se q è un divisore di p minore di u, no altrimenti.

21.2.2 FACTOR è in coNP

Per mostrare che $FACTOR \in coNP$ dimostriamo, esibendo un verificatore, che $\overline{FACTOR} \in NP$.

$$\overline{FACTOR} = \{(p, u) \mid p, u \in \mathbb{N} \; e \; p \text{ non ha un divisore} < u\}$$

$\overline{FACTOR} \in NP$ poichè possiamo esibire facilmente una macchina che lo verifica polinomialmente. Il verificatore prende in input (p, u) e un certificato composto da una lista $p_1, p_2, ..., p_k$, con ciascun $p_i < u < p$. Esso risponde sì se tali numeri primi rappresentano una scomposizione in fattori primi di $p = p_1 p_2 ... p_k$, no altrimenti.

Nel peggiore dei casi, i numeri primi in $p_1, p_2, ..., p_k$ sono tutti 2, il più piccolo numero primo, e k è tale che $2^k < u$. Quindi $k = O(log\ u)$, con u non maggiore di p. Di conseguenza la lunghezza del certificato nel peggiore dei casi è uguale a $klog\ 2 = k \cdot 1 = O(log\ u) = O(log\ p)$, ossia polinomiale nella lunghezza della codifica di p.

Il verificatore deve semplicemente controllare che il prodotto dei primi sia uguale a p, una operazione banalmente polinomiale. Quindi il verificatore è effettivamente polinomiale.

21.2.3 Prova di NP = coNP (non verificata)

$$\text{FACTOR è NP-completo} \implies NP = coNP$$

Purtroppo l'ipotesi FACTOR è NP-completo non è verificata, ed è considerata altamente improbabile. Ci avrebbe permesso di dimostrare $NP = coNP$ per doppia inclusione come segue:

Prima inclusione.

$$NP \subseteq coNP$$

Dimostrazione.

$$L \in NP \implies L \leq_p FACTOR \implies \overline{L} \leq_p \overline{FACTOR}$$
$$\overline{FACTOR} \in NP \implies \overline{L} \in NP \implies L \in coNP$$

□

Seconda inclusione.

$$coNP \subseteq NP$$

Dimostrazione.

$$L \in coNP \implies \overline{L} \in NP$$
$$\overline{L} \leq_p FACTOR \iff L \leq_p \overline{FACTOR}$$
$$\overline{FACTOR} \in NP \land L \leq_p \overline{FACTOR} \implies L \in NP$$

□

21.3 Il problema del Grafo Isomorfo

Definizione (Grafi isomorfi)**.** Dati due grafi G, G' diciamo che essi sono *isomorfi* se esiste una funzione $f : V_G \to V_{G'}$ biettiva tale che

$$\{u, v\} \in E_G \iff \{f(u), f(v)\} \in E_{G'}$$

ovvero tale che, se due nodi in G' sono connessi, allora lo sono anche i nodi associati da f in G'.

Sulla base di questa definizione, ci chiediamo se stabilire l'isomorfismo tra grafi sia un problema contenuto in NP. Introduciamo quindi il linguaggio GI:

$$GI = \{\langle G, G' \rangle \mid G \text{ è isomorfo a } G'\}$$

Teorema. $GI \in NP$

Dimostrazione. Mostriamo un verificatore polinomiale per GI:

V_{GI}:

input $\langle G, G' \rangle$ e il certificato $c = (u_1, f(u_1)), ..., (u_k, f(u_k))$, che è la codifica "per esteso" di f

output sì se $\langle G, G' \rangle \in GI$, no altrimenti

descrizione Controlla che per ogni arco $\{u_i, u_j\} \in E_G$ l'arco $\{f(u_i), f(u_j)\}$ stia in $E_{G'}$.

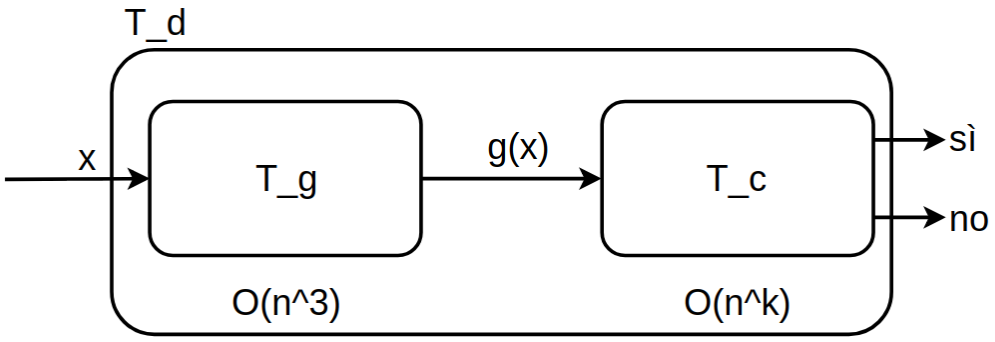
□

Sappiamo quindi che $GI \in NP$, ma purtroppo non possiamo dire se anche $GI \in P$ nè tantomeno se GI sia un problema NP-completo.

21.4 Esercizi

Esercizio 1. *Se $C \in TIME(n^3)$ e $D \leq_p C$ allora sappiamo che $D \in TIME(f(n))$ per qualche $f(n)$. Cosa possiamo dire su $f(n)$?*

Se $D \leq_p C$ allora esiste una qualche funzione di riduzione, che indichiamo con g, che è calcolabile polinomialmente. Sia $T_g \in TM$ la macchina che la calcola, allora per quanto detto vale $t_{T_g}(n) = O(n^k)$. Sia inoltre $T_c \in TM$ la macchina che decide C e $T_d \in TM$ la macchina che decide D. Essa sarà costruita nel seguente modo:



Sia $n = |x|$ la dimensione dell'input; poiché il tempo limita lo spazio, possiamo dire che $|g(x)| = O(n^k)$. Da ciò discende che T_c riceverà input di dimensione $O(n^k)$, e quindi $t_{T_d}(n) = t_{T_g}(n) + t_{T_c}(n^k) = O(n^k) + O((n^k)^3) = O(n^k) + O(n^{3k}) = O(n^{3k})$. Concludiamo quindi che $D \in TIME(n^{3k})$.

Esercizio 2. *Correggere le seguenti affermazioni:*

1. per dimostrare che $X \in NP$-completo si deve dimostrare:

   1. $X \in NP$,
   2. $X \leq_p Y$ per un $Y \in NP$-completo.

   In questa affermazione è sbagliato dire $X \leq_p Y$ per un $Y \in NP$-completo. X è NP-completo se un problema NP-completo può essere ridotto ad esso, quindi va corretta con $Y \leq_p X$ per un $Y \in NP$-completo.

2. Esiste un problema NP-completo che si risolve in tempo polinomiale deterministico ma questo non è vero per SAT.
   Se esistesse un problema NP-completo polinomiale allora tutti i problemi NP-completi si ridurrebbero a questo problema. Ma anche $SAT \in NP$-completo e quindi anche esso sarebbe riducibile a questo problema.

3. $X \leq_p SAT \; \forall X \in NP$-hard
   L'affermazione non è vera in generale, poiché NP-hard è una classe più estesa di NP, e poiché SAT è NP-completo, l'affermazione è vera per gli $X \in NP$.

Esercizio 3. *Siano $INDSET, VC$ i seguenti linguaggi:*

$$INDSET = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ ha un indipendent set di } k \text{ vertici}\}$$
$$VC = \{\langle G, k\rangle \mid \text{esiste un vertex cover di } k \text{ vertici per } G\}$$

Esibire una riduzione $INDSET \leq_p VC$, sapendo che VC è NP-completo

Vogliamo esibire una riduzione $\langle G, k\rangle \overset{f}{\mapsto} \langle G', k'\rangle$ tale che

G ha un indipendent set di k vertici $\iff$ G' ha un vertex cover di k' vertici

La f di riduzione costruisce una istanza $\langle G', k'\rangle$ con $G' = G$ e $k' = |V| - k$. Mostriamo che questa è una riduzione corretta:

$$A \subseteq V_G \text{ è un indipendent set di } k \text{ vertici}$$
$$\iff$$
$$V_G - A \text{ è un vertex cover di } |V| - k \text{ vertici}$$

$\Longrightarrow$: $\{u, w\} \in E$ allora certamente u e w non possono essere entrambi in A, quindi $u \in V - A$ oppure $w \in V - A$, allora per ogni arco uno degli estremi sta in $V - A$, che quindi è un vertex cover. Poiché $|A| = k$, $|V - A| = |V| - k$, quindi abbiamo dimostrato che $V - A$ è un vertex cover di $|V| - k$ vertici.
$\Longleftarrow$: Supponiamo per assurdo che $V_G - A$ sia un vertex cover, e che A non sia un independent set. Se A non fosse un independent set, allora $\exists u, w \in A$ tali che $\{u, w\} \in E$. Ma allora l'arco $\{u, w\}$ sarebbe "scoperto", in quanto nè u nè w stanno nel vertex cover, quindi $V_G - A$ non sarebbe un vertex cover (assurdo).