

# **KALKULUS I**

## **MUG1A4**

**Program Perkuliahan Dasar dan Umum  
(PPDU)  
Telkom University**



- **Limit dan Kekontinuan**

# TUJUAN PEMBELAJARAN

- Menentukan apakah suatu fungsi mempunyai limit di satu titik
- Menghitung limit menggunakan sifat sifat limit
- Menghitung limit fungsi trigonometri
- Menghitung limit fungsi dengan prinsip apit
- Menentukan limit tak hingga dan limit di tak hingga
- Menentukan kekontinuan fungsi di satu titik

# TUJUAN PEMBELAJARAN

- Menentukan selang kekontinuan
- Menentukan limit dan kekontinuan fungsi komposisi

## 3.1 Limit Fungsi di Satu Titik

Pengertian limit secara intuitif

Perhatikan fungsi

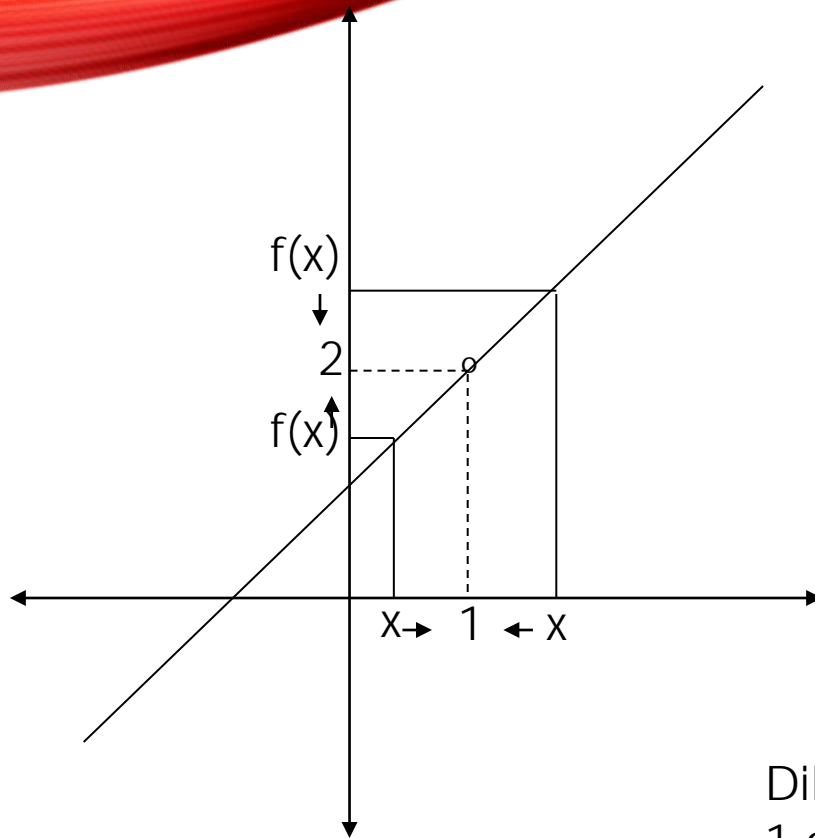
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di  $x=1$ , karena di titik tersebut  $f(x)$  berbentuk  $0/0$ . Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai  $f(x)$  jika  $x$  mendekati 1

Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai  $f(x)$  bila  $x$  mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	→ 1 ←	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	→ 2 ←	2.0001	2.001	2.01	2.1

Secara grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa  $f(x)$  mendekati 2 jika  $x$  mendekati 1

Secara matematis dapat dituliskan Sebagai berikut

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca " limit dari  $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$  untuk  $x$  mendekati 1 adalah 2

**Definisi(limit secara intuitif).** Untuk mengatakan bahwa  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  berarti bahwa bilamana  $x$  dekat, tetapi berlainan dengan  $c$ , maka  $f(x)$  dekat ke  $L$

## Contoh

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} 3x + 5 = 8$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 1 = 5$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} + 3 = 6$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$$

Ambil nilai  $x$  yang mendekati 0, seperti pada tabel berikut

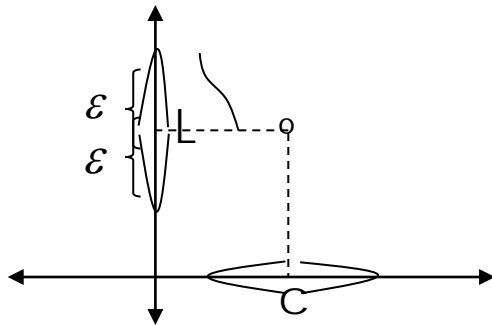
$x$	$2/\pi$	$2/2\pi$	$2/3\pi$	$2/4\pi$	$2/5\pi$	$2/6\pi$	$2/7\pi$	$2/8\pi$	$\rightarrow 0$
$\sin(1/x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	$\rightarrow ?$

Dari tabel terlihat bahwa bila  $x$  menuju 0,  $\sin(1/x)$  tidak menuju ke satu nilai tertentu sehingga limitnya tidak ada

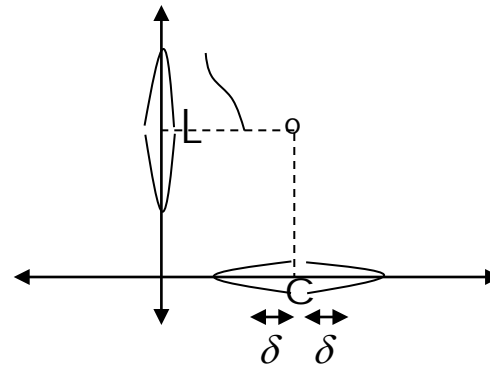


# Definisi limit

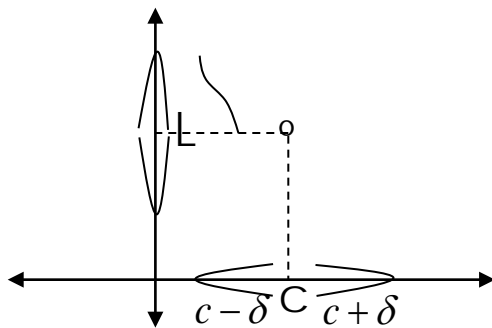
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



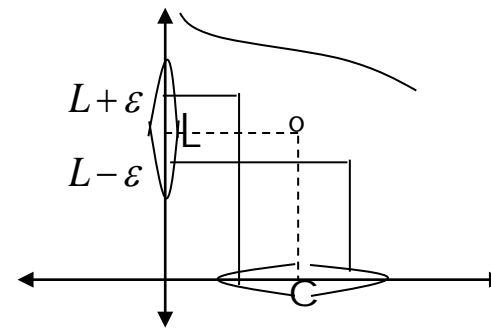
Untuk setiap  $\varepsilon > 0$



Terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga



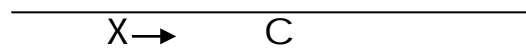
$$0 < |x - c| < \delta$$



$$|f(x) - L| < \varepsilon$$



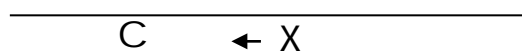
# Limit Kiri dan Limit Kanan



Jika  $x$  menuju  $c$  dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari  $c$ ), limit disebut limit kiri,

notasi

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$



Jika  $x$  menuju  $c$  dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari  $c$ ), limit disebut limit kanan,

notasi

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan)

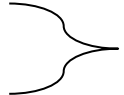
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Jika  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  maka  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  tidak ada

Contoh Diketahui

1. 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

a. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   Jika ada

c. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d. Gambarkan grafik  $f(x)$

Jawab

a. Karena aturan fungsi berubah di  $x=0$ , maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di  $x=0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

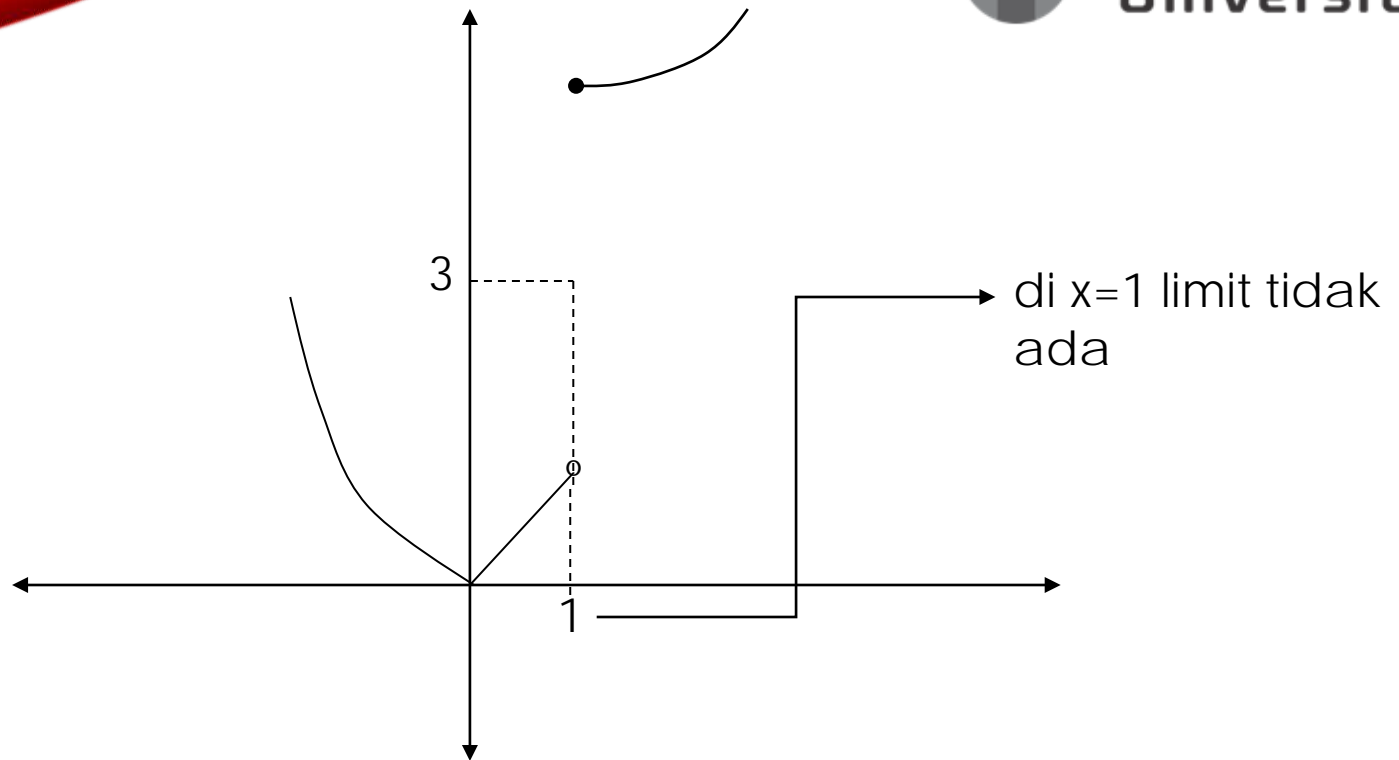
- b. Karena aturan fungsi berubah di  $x=1$ , maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di  $x=1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 + x^2 = 3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} \right\} \text{ Karena } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ Tidak ada}$$

- c. Karena aturan fungsi **tidak berubah** di  $x=2$ , maka **tidak perlu** dicari limit kiri dan limit kanan di  $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 + x^2 = 6$$

Grafik  $f(x)$



Untuk  $x \leq 0$

$$f(x) = x^2$$

Grafik: parabola

Untuk  $0 < x < 1$

$$f(x) = x$$

Grafik: garis lurus

Untuk  $x \geq 1$

$$f(x) = 2 + x^2$$

Grafik: parabola

2. Tentukan konstanta  $c$  agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 3 - cx, & x < -1 \\ x^2 - c, & x \geq -1 \end{cases}$$

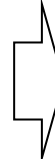
mempunyai limit di  $x = -1$

Jawab

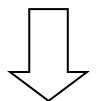
Agar  $f(x)$  mempunyai limit di  $x = -1$ , maka limit kiri harus sama dengan limit kanan

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3 - cx = 3 + c$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - c = 1 - c$$

Agar limit ada 

$$3 + c = 1 - c$$



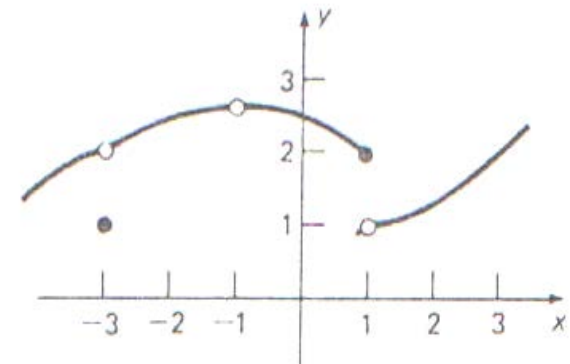
$$C = -1$$

## Soal Latihan

A. Diberikan grafik suatu fungsi  $f$  seperti gambar berikut .

Cari limit /nilai fungsi berikut, atau nyatakan bahwa limit /nilai fungsi tidak ada.

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  | 5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  | 6. $f(-3)$                         |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   | 7. $f(-1)$                         |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | 8. $f(1)$                          |



## Soal Latihan

B.

1. Diketahui :  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$

a. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  dan  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b. Selidiki apakah  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ada, jika ada hitung limitnya

2. Diketahui  $g(x) = |x - 2| - 3x$ , hitung ( bila ada ) :

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

3. Diketahui  $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$ , hitung ( bila ada

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



## Sifat limit fungsi

Misal

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  (limit dari  $f$ ,  $g$  ada dan berhingga)

maka

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm G$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LG$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}, \text{ bila } G \neq 0$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n, n \text{ bilangan bulat positif}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad \text{bila } n \text{ genap } L \text{ harus positif}$$

## Prinsip Apit


Misal  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  untuk  $x$  disekitar  $c$  dan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ serta } \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

maka

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

Contoh Hitung  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}$

Karena  $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$    $-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} \leq (x-1)^2$

dan

$$\lim_{x \rightarrow 1} -(x-1)^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$$

maka

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} = 0$$

# Limit Fungsi Trigonometri

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Contoh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 4x}{5x - \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{5 - \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{5 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2}$$

$$= \frac{3 + \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{5 - \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{7}{3}$$

$x \rightarrow 0$  ekuivalen dgn  $4x \rightarrow 0$

## Soal Latihan

### Hitung

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3t}{2t}$

2.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cot \pi t \sin t}{2 \sec t}$

3.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t}$

4.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t + 4t}{t \sec t}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$

## Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

### Limit Tak Hingga

Misal  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

(i)  $+\infty$ , jika  $L > 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah atas

(ii)  $-\infty$ , jika  $L > 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah bawah

(iii)  $+\infty$ , jika  $L < 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah bawah

(iv)  $-\infty$ , jika  $L < 0$  dan  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah atas

Ctt :  $g(x) \rightarrow 0$  dari arah atas maksudnya  $g(x)$  menuju 0 dari nilai  $g(x)$  positif.

$g(x) \rightarrow 0$  dari arah bawah maksudnya  $g(x)$  menuju 0 dari nilai  $g(x)$  negatif.

## Contoh Hitung

a.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x}{\sin x}$

Jawab

- a.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$  ,  $g(x) = x - 1$  akan menuju 0 dari arah bawah, karena  $x \rightarrow 1$  dari kiri berarti  $x$  lebih kecil dari 1, akibatnya  $x - 1$  akan bernilai negatif

Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$$

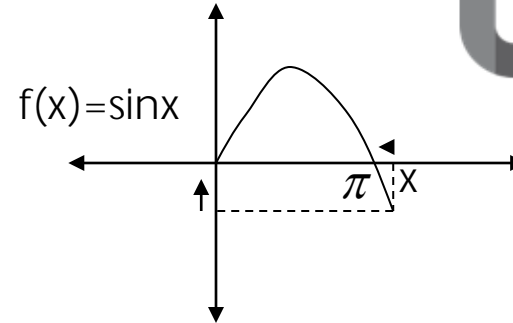
- b.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$   $g(x) = x^2 - 1$  akan menuju 0 dari arah atas, karena  $x \rightarrow -1$  dari kiri berarti  $x$  lebih kecil dari -1, tapi bilangan negatif yang lebih kecil dari -1 jika dikuadratkan lebih besar dari 1 sehingga  $x^2 - 1$  bernilai positif

Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

c. Karena

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} x = \pi > 0 \quad \text{dan}$$



Jika  $x$  menuju  $\pi$  dari arah kanan maka nilai  $\sin x$  menuju 0 dari arah bawah (arah nilai  $\sin x$  negatif)

sehingga

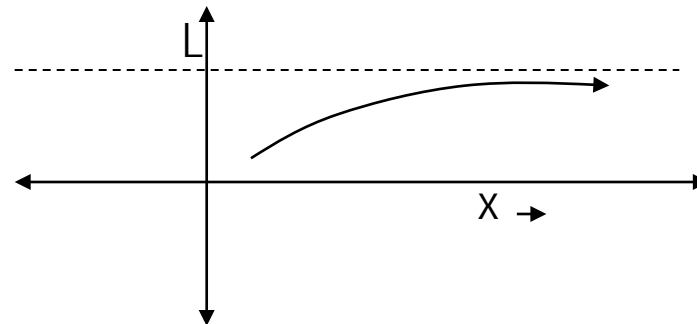
$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x}{\sin x} = -\infty$$



## Limit di Tak Hingga

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  jika  $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau  $f(x)$  mendekati  $L$  jika  $x$  menuju tak hingga



Contoh Hitung

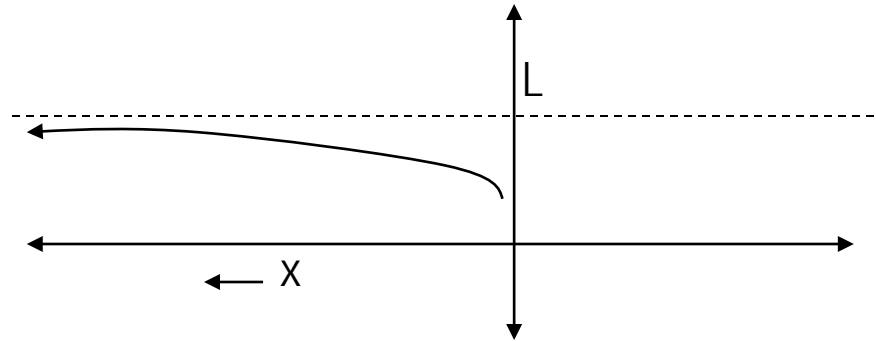
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2(2 + \frac{4}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 1/2$$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  jika  $\forall \varepsilon > 0 \exists M < 0 \ni x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau  $f(x)$  mendekati  $L$  jika  $x$  menuju minus tak hingga



Contoh Hitung

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left( \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{x^2 \left( 2 + \frac{4}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{\left( 2 + \frac{4}{x^2} \right)} = 0$$

## Contoh Hitung

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x$$

Jawab :

Jika  $x \rightarrow \infty$  , limit diatas adalah bentuk  $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x \left( \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - x}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{-(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1)} = -\frac{1}{2}$$

## Soal Latihan

Hitung

1.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3+x}{3-x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x^2 - 4}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x+1}$

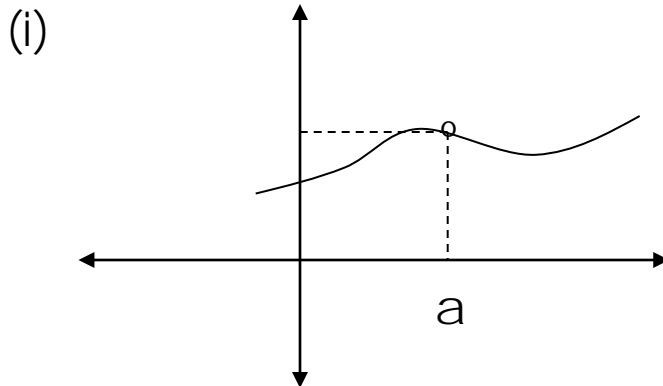
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x-1}$

## Kekontinuan Fungsi

Fungsi  $f(x)$  dikatakan **kontinu** pada suatu titik  $x = a$  jika

- (i)  $f(a)$  ada
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika paling kurang salah satu syarat diatas tidak dipenuhi maka  $f$  dikatakan tidak kontinu di  $x=a$

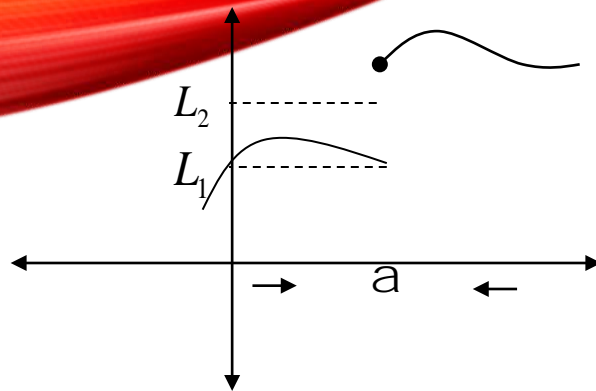


$f(a)$  tidak ada



$f$  tidak kontinu di  $x=a$

(ii)

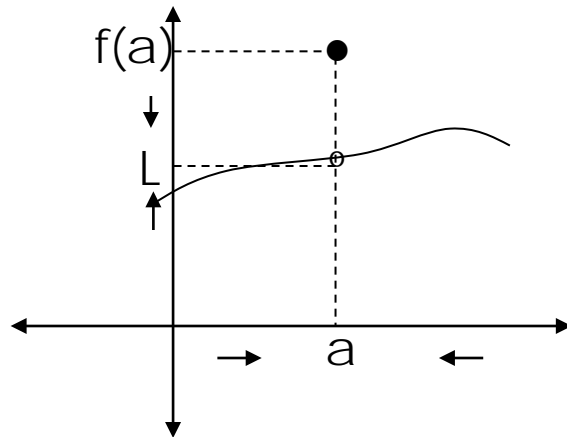


Karena limit kiri( $L_1$ ) tidak sama dengan limit kanan( $L_2$ ) maka  $f(x)$  tidak mempunyai limit di  $x=a$



Fungsi  $f(x)$  tidak kontinu di  $x=a$

(iii)



$f(a)$  ada

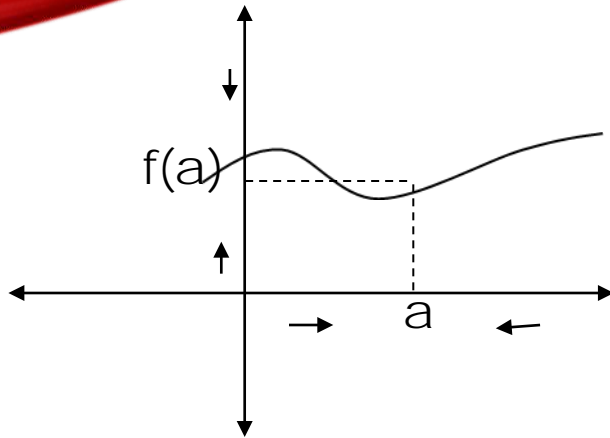
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada

Tapi nilai fungsi tidak sama dengan limit fungsi



Fungsi  $f(x)$  tidak kontinu di  $x=a$

(iv)



$f(a)$  ada

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada

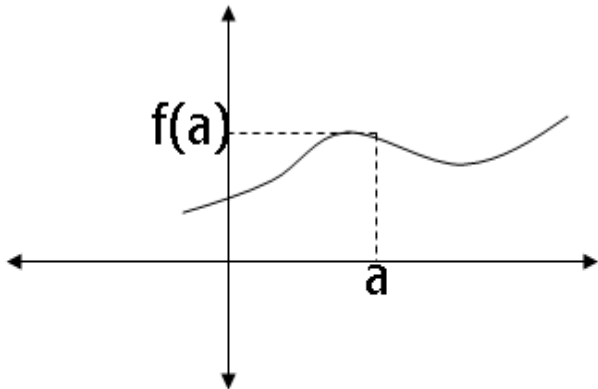
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



$f(x)$  kontinu di  $x=a$

Ketakkontinuan terhapus

Ketakkontinuan kasus (i) bisa dihapus dengan cara mendefinisikan nilai fungsi di titik tersebut = limit fungsi





contoh

Periksa apakah fungsi berikut kontinu di  $x=2$ , jika tidak sebutkan alasannya

$$\begin{array}{lll} \text{a. } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases} & \text{c. } f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

Jawab :

a. Fungsi tidak terdefinisi di  $x=2$  (bentuk  $0/0$ )



$f(x)$  tidak kontinu di  $x=2$

b. -  $f(2) = 3$

$$- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$



Karena limit tidak sama dengan nilai fungsi, maka  $f(x)$  **tidak kontinu di  $x=2$**

C. -  $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

-  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1 = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 1 = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

-  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Karena semua syarat dipenuhi  $\rightarrow f(x)$  kontinu di  $x=2$

## Kontinu kiri dan kontinu kanan

Fungsi  $f(x)$  disebut kontinu kiri di  $x=a$  jika

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Fungsi  $f(x)$  disebut kontinu kanan di  $x=a$  jika

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Fungsi  $f(x)$  kontinu di  $x=a$  jika kontinu kiri dan kontinu kanan di  $x=a$

Contoh : Tentukan konstanta  $a$  agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 2 \\ ax^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Kontinu di  $x=2$

Jawab :

Agar  $f(x)$  kontinu di  $x=2$ , haruslah

$f$  kontinu kiri di  $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + a = 2 + a \qquad f(2) = a2^2 - 1 = 4a - 1$$

$$\begin{aligned} 2 + a &= 4a - 1 \\ -3a &= -3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$f$  kontinu kanan di  $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(2) &= a2^2 - 1 = 4a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 - 1 = 4a - 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} \right\} \text{Selalu dipenuhi}$$

## Soal Latihan

1. Diketahui  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \leq -1 \\ 2x + 2, x > -1 \end{cases}$

selidiki kekontinuan fungsi  $f(x)$  di  $x = -1$

2. Agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ ax+b, & 1 \leq x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu pada  $\mathbf{R}$ , maka berapakah  $a + 2b$  ?

3. Tentukan  $a$  dan  $b$  agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ 2 - 4x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di  $x = 2$

## KEKONTINUAN PADA INTERVAL

- Fungsi  $f(x)$  dikatakan **kontinu pada interval buka**  $(a, b)$  bila  $f(x)$  kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut.
- Sedangkan  $f(x)$  dikatakan **kontinu pada interval tutup**  $[a, b]$  bila :
  1.  $f(x)$  kontinu pada  $(a, b)$
  2.  $f(x)$  kontinu kanan di  $x = a$
  3.  $f(x)$  kontinu kiri di  $x = b$

Bila  $f(x)$  kontinu untuk setiap nilai  $x \in \mathbf{R}$  maka dikatakan  $f(x)$  kontinu (dimana-mana).

- **Teorema 3.2**
- Fungsi Polinom kontinu dimana-mana
- Fungsi Rasional kontinu pada Domainnya
- Misalkan  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , maka
  - $f(x)$  kontinu di setiap titik di  $\mathbf{R}$  jika  $n$  ganjil
  - $f(x)$  kontinu di setiap  $\mathbf{R}$  positif jika  $n$  genap.

Contoh : tentukan selang kekontinuan  $f(x) = \sqrt{x-4}$

Dari teorema diatas diperoleh  $f(x)$  kontinu untuk  $x-4 > 0$  atau

$$x > 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = 0 = f(4)$$



$f(x)$  kontinu kanan di

$$x=4$$

Sehingga  $f(x)$  kontinu pada  $[4, \infty)$



## Soal Latihan

A. Carilah titik diskontinu dari fungsi

$$1. f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$$

$$3. f(x) = \frac{x - 2}{|x| - 2}$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

B. Tentukan dimana  $f(x)$  kontinu

$$1. f(x) = \frac{x - 1}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$2. f(x) = \sqrt{4x - x^2}$$

# LIMIT DAN KEKONTINUAN FUNGSI KOMPOSISI

- **Teorema Limit Fungsi Komposisi:**

Jika  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  dan  $f(x)$  kontinu di  $L$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(L)$$

- **Teorema kekontinuan fungsi komposisi:**

Jika  $g(x)$  kontinu di  $a$ ,  $f(x)$  kontinu di  $g(a)$ , maka fungsi  $(f \circ g)(x)$  kontinu di  $a$ .

$$\begin{aligned} \text{Bukti} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) \end{aligned}$$

karena  $f$  kontinu di  $g(a)$

$$= f(g(a))$$

karena  $g$  kontinu di  $a$

$$= (f \circ g)(a)$$

Contoh Tentukan dimana fungsi

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 4}\right)$$

kontinu

Jawab :

Fungsi  $f(x)$  dapat dituliskan sebagai komposisi dua fungsi atau

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

dengan

$$h(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 4} \quad \text{dan} \quad g(x) = \cos x$$

Karena  $h(x)$  kontinu di  $\mathbb{R} - \{-4, 1\}$  dan  $g(x)$  kontinu dimana-mana maka fungsi  $f(x)$  kontinu di  $\mathbb{R} - \{-4, 1\}$

**Terima Kasih**



**Telkom**  
**University**

