Soit A une matrice symétrique d'ordre n et $J(x) = Ax \cdot x$. À l'aide du théorème (Multiplicateur de Lagrange), montrer que les points de minimum de J sur la sphère unité sont des vecteurs propres de A associés à la plus petite valeur propre.

Correction. On note K la sphère unité, définie par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\},$$

où $F(x) = 1 - \|x\|^2$. Les fonctions J et F sont toutes deux dérivables avec

$$J'(x) = 2Ax \quad \text{et} \quad F'(x) = -2x.$$

Comme $F'(x) \neq 0$ pour $x \in K$, d'après le théorème (Multiplicateur de Lagrange), si x est un point de minimum de J sur la sphère unité, il existe un multiplicateur de Lagrange λ tel que

$$J'(x) + \lambda F'(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$Ax - \lambda x = 0.$$

Toute solution optimale x est un vecteur propre de A de valeur propre λ. Notons que l'existence d'un minimiseur est évidente, K étant compact et J continue. Le problème de minimisation de J sur K est donc équivalent au problème de minimisation de J sur l'ensemble des vecteurs propres de A de norme un. Or, pour tout vecteur propre x de A (tel que $\|x\| = 1$) de valeur propre μ, on a

$$J(x) = \mu.$$

Le minimum de J est donc atteint pour les vecteurs propres de plus petite valeur propre.