

Teoria do Risco

Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html>

Modelos de risco Individual-A distribuição de S_{ind}

- Dentre várias técnicas de se encontrar a distribuição de S_{ind} . (soma de variáveis aleatórias), destacam-se duas:
 - Técnica da convolução.
 - Técnica da função geradora do momentos.

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

...A convolução é um operador linear que, a partir de duas funções, obtém-se uma terceira que mede a área subentendida pela superposição das mesmas em função do deslocamento existente entre elas...

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

Considere: $S = X + Y$, sendo X e Y como duas variáveis aleatórias contínuas e independentes (não negativas).

A convolução da função de distribuição de S será dada por:

$$f_S(s) = \int_0^s f_Y(s-x)f_X(x)dx$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int_0^s F_Y(s-x)f_X(x)dx$$

E para o caso de variáveis serem discretas.

$$P(s) = P_X * P_Y(s) = \sum_{x \leq s} P_Y(s-x)P_X(x)$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \sum_{x \leq s} F_Y(s-x)P_X(x)$$

O operador $(*)$ tem as mesmas propriedades do operador de adição $+$.

Demonstração

Considere: $S = X + Y$ assim:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X + Y \leq s)$$

Lembrando da lei da probabilidade total $P(B) = \sum_{i=1} P(B|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1} P(B, A_i)$

$$F_S(s) = P(X + Y \leq s) = \sum_{y \leq s} P[(X + Y \leq s) \cap (Y = y)]$$

$$= \sum_{y \leq s} P(X + Y \leq s, Y = y)$$

$$F_S(s) = \sum_{y \leq s} F_X(s - y_j)P(Y = \textcolor{red}{y})$$

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

A convolução pode ser feita por um processo recursivo...

Para $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, (X_{is} v.a.s. Independentes),

F_i é a função de distribuição de X_i

$F^{(k)}$ a função de distribuição de $X_1 + X_2 + \dots + X_k$.

$$F^{(2)} = F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1$$

$$F^{(3)} = F_3 * F^{(2)} \quad (X_1 + X_2)$$

$$F^{(4)} = F_4 * F^{(3)} \quad (X_1 + X_2 + X_3)$$

...

$$F^{(k)} = F_k * F^{(k-1)} \quad (X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1})$$

Considerando funções de densidade, temos:

$$f^{(n)} = f_n * f^{(n-1)}$$

EXEMPLO 1: Sejam X , Y e Z variáveis aleatórias independentes, cada uma com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = e^{-t}, \quad t > 0$$

Obtenha a distribuição de S sendo que $S = X + Y + Z$.

SOLUÇÃO

Supondo $S_1 = X + Y$, temos:

$$f(s_1) = \int_0^{s_1} f_X(s_1 - y)f_Y(y)dy$$

$$f(s_1) = \int_0^{s_1} e^{-(s_1-y)}e^{-y}dy$$

$$f(s_1) = \int_0^{s_1} e^{-s_1}dy = e^{-s_1}y \Big|_{y=0}^{y=s_1}$$

$$f(s_1) = s_1 e^{-s_1}, \quad s > 0$$

SOLUÇÃO

Agora vamos calcular $S = S_1 + Z$

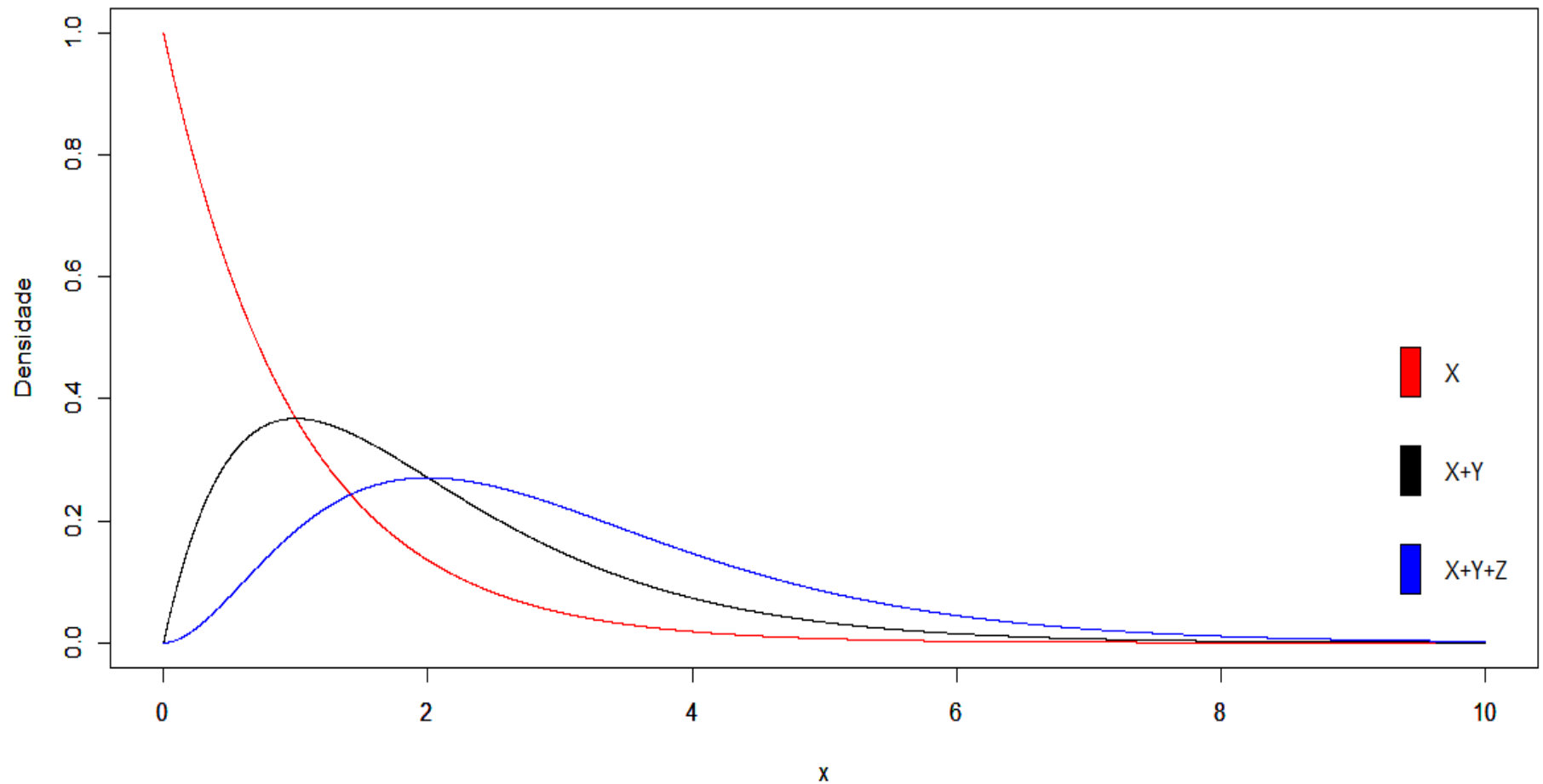
$$f(s) = \int_0^s f_{S_1}(s-z)f_Z(z)dz$$

$$f(s) = \int_0^s (s-z)e^{-(s-z)}e^{-z}dz$$

$$f(s) = \int_0^s se^{-s} - ze^{-s}dz = se^{-s}z - z^2 \frac{e^{-s}}{2} \Big|_{z=0}^{z=s}$$

$$f(s) = \frac{s^2 e^{-s}}{2}, \quad s > 0$$

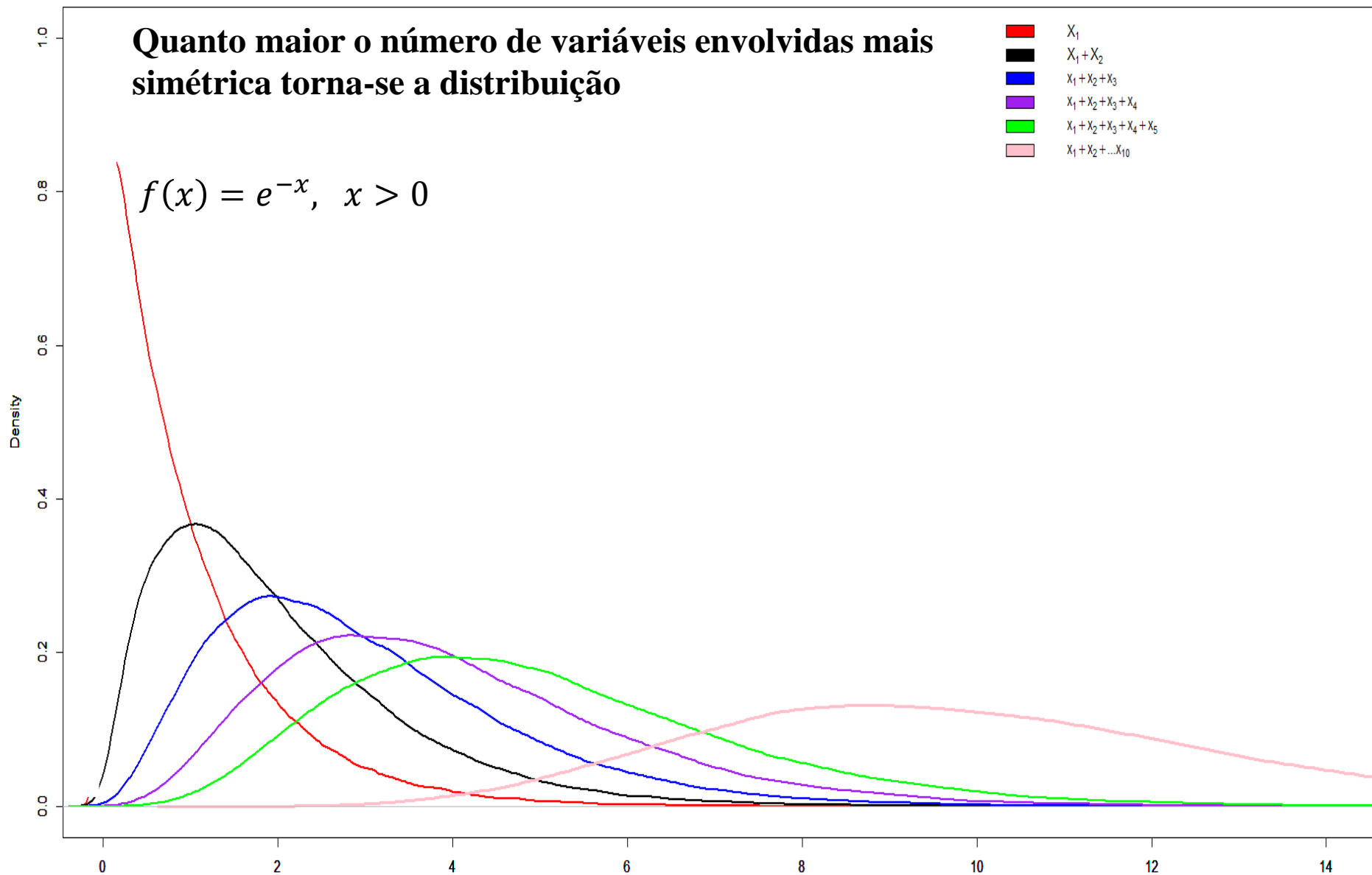
$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0 \qquad f(s_1) = s_1 e^{-s_1}, \quad s_1 > 0 \qquad f(s) = \frac{s^2 e^{-s}}{2}, \quad s > 0$$



Quanto maior o número de variáveis envolvidas mais simétrica torna-se a distribuição

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

- X_1
- $X_1 + X_2$
- $X_1 + X_2 + X_3$
- $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
- $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$
- $X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$



EXEMPLO 2: Considere três variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, X_3 . Para $i = 1, 2, 3$, X_i tem distribuição exponencial e $E(X_i) = \frac{1}{i}$. Encontre a função densidade de probabilidade de $S = X_1 + X_2 + X_3$ pelo processo de convolução.

Obs.:

A distribuição exponencial tem parâmetro $\alpha > 0$, com *f.d.p* dada por $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ e $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e $var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$.

SOLUÇÃO

A distribuição exponencial tem parâmetro $\alpha > 0$, com *f.d.p* dada por $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ e $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e $\text{var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$, então:

$$\begin{aligned}f_1(x_1) &= e^{-x_1}, & x_1 > 0 \\f_2(x_2) &= 2e^{-2x_2}, & x_2 > 0 \\f_3(x_3) &= 3e^{-3x_3}, & x_3 > 0\end{aligned}$$

Queremos obter $f^{(3)} = f_S(s)$, sendo:

$$\begin{aligned}f^{(3)} &= f_3 * f^{(2)} \\f^{(2)} &= f_2 * f^{(1)}\end{aligned}$$

SOLUÇÃO

Devemos obter primeiramente $f^{(2)}$, supondo $S_1 = X_1 + X_2$, temos:

$$f^{(2)}(s_1) = f_2 * f^{(1)} = f_2 * f_1$$

$$f^{(2)}(s_1) = \int_0^{s_1} f_{X_1}(s_1 - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2$$

SOLUÇÃO

Devemos obter primeiramente $f^{(2)}$, supondo $S_1 = X_1 + X_2$, temos:

$$f^{(2)}(s_1) = f_2 * f^{(1)} = f_2 * f_1$$

$$f_2 * f_1 = f^{(2)}(s_1) = \int_0^{s_1} f_{X_1}(s_1 - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2$$

$$f^{(2)}(s_1) = \int_0^{s_1} e^{(x_2 - s_1)} 2e^{-2x_2} dx_2$$

$$\dots$$
$$f^{(2)}(s_1) = 2e^{-s_1} - 2e^{-2s_1} = f_{s_1}(s_1)$$

SOLUÇÃO

Dessa maneira, temos, $S = S_1 + X_3$:

$$f^{(3)} = f_3 * f^{(2)}$$

$$f_S(s) = f^{(3)} = f_3 * f^{(2)} = \int_0^s f_{s_1}(s - x_3) f_{X_3}(x_3) dx_3$$

SOLUÇÃO

Dessa maneira, temos, $S = S_1 + X_3$:

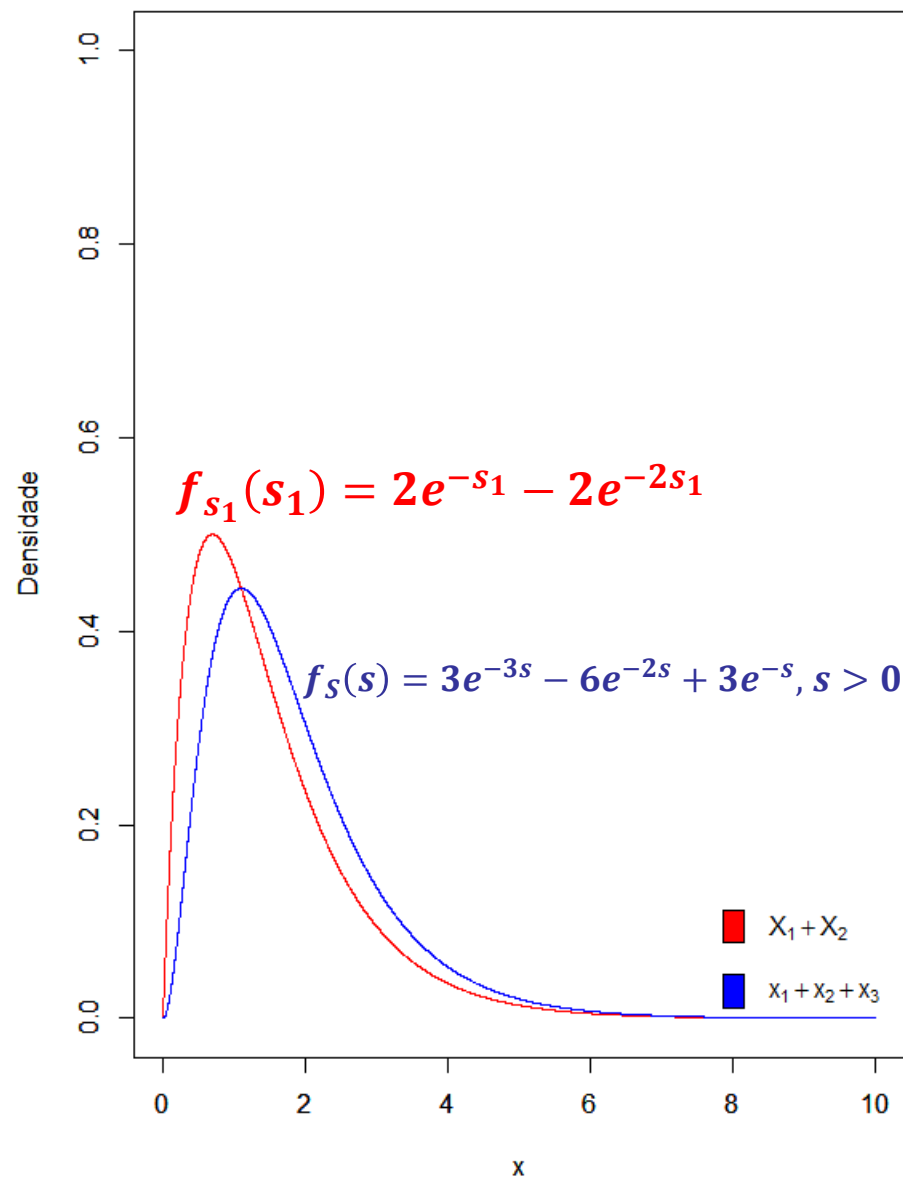
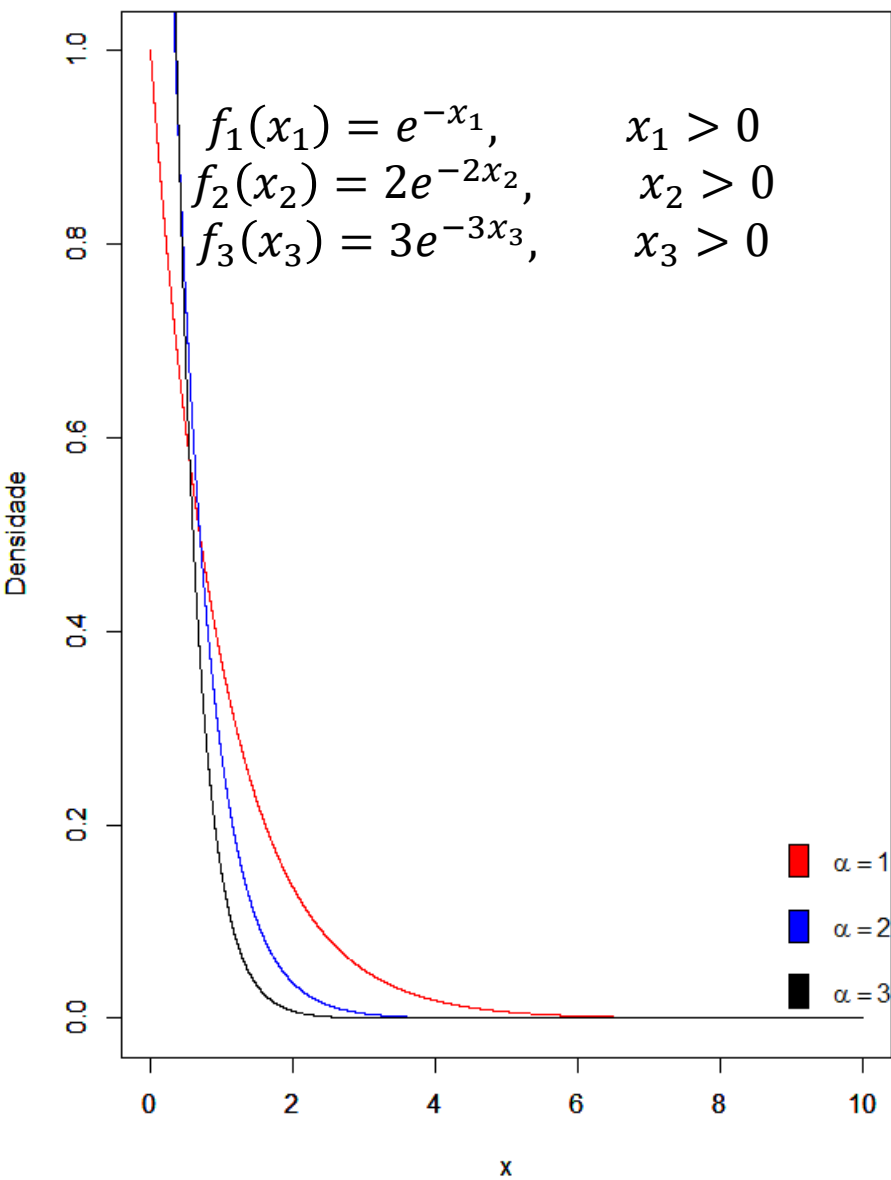
$$f^{(3)} = f_3 * f^{(2)}$$

$$f_S(s) = f^{(3)} = f_3 * f^{(2)} = \int_0^s f_{S_1}(s - x_3) f_{X_3}(x_3) dx_3$$

$$f_S(s) = \int_0^s [2e^{-(s-x_3)} - 2e^{-2(s-x_3)}] 3e^{-3x_3} dx_3$$

...

$$f_S(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}, s > 0$$



$$f_S(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}, s > 0$$

$$M_S(t) = \int_0^{\infty} 3e^{st-s} - 6e^{-2s+st} + 3e^{-3s+st} ds$$

$$M_S(t) = \int_0^{\infty} 3e^{-s(1-t)} ds - \int_0^{\infty} 6e^{-s(2-t)} ds + \int_0^{\infty} 3e^{-s(3-t)} ds$$

$$M_S(t) = \frac{6}{(1-t)(2-t)(3-t)}$$

Bibliografia

- BOWERS, N. et al. Actuarial mathematics. 2. ed. Illinois: The Society Of Actuaries, 1997.
- DICKSON, D. C. M. Insurance risk and ruin. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- BUHLMANN, H. Mathematical methods in risk theory. Berlin: "Springer Verlag, 1970.
- KAAS, R. et al. Modern Actuarial Risk Theory: using R. 2. ed. New York: Springer Verlag, 2008.
- KLUGMAN, S. A.; PANJER, H. H.; WILLMOT, G. E. Loss models: from data to decisions. 4. ed. New Jersey: Wiley, 2012

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.



EXEMPLO 3: Considere uma carteira com as seguintes distribuições de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1
X_1	0	1	2	3
p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_2	0	1	2	3

De acordo com o enunciado os “valores pagos por cada sinistro” são dados pelos valores assumidos em X_1 e X_2 .

Devemos encontrar a distribuição de $S_1 = X_1 + X_2$

S_1 pode assumir os seguintes valores $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ correspondente a soma entre os valores de X_1 e X_2 .

Utilizando a definição,

$$P_{S_1}(s_1) = P_{X_1} * P_{X_2}(s_1) = \sum_{x_1 \leq s} P_{X_2}(s_1 - x_1) P_{X_1}(x_1)$$

é possível calcular as probabilidade de associadas a todos esses valores assumidos por S_1 , logo:

$X_1 \leq s_1$ indica que deve-se variar X_1 até s_1 .

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow (X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(0) = P_{X_1} * P_{X_2}(0) = \sum_{x_1=0}^0 P_{X_2}(0 - x_1)P_{X_1}(x_1)$$

$$S_1 = 1 \Leftrightarrow (X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 1 \text{ ou } X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P_{X_1} * P_{X_2}(1) = \sum_{x_1=0}^1 P_{X_2}(1 - x_1)P_{X_1}(x_1)$$

$$S_1 = 2 \Leftrightarrow (X_1 = 2 \text{ e } X_2 = 0 \text{ ou } X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \text{ ou } X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 2)$$

$$P_{S_1}(2) = P_{X_1} * P_{X_2}(2) = \sum_{x_1=0}^2 P_{X_2}(2 - x_1)P_{X_1}(x_1)$$

...

E dessa forma o processo vai se repetindo até $S_1 = 6$, a tabela abaixo apresenta os resultados dessa convolução entre X_1 e X_2 :

$S_1 = X_1 + X_2$	p_{X_1}	p_{X_2}	P_{S_1}	(X_1, X_2)
0	0,5	0,7	0,35	(0,0)
1	0,3	0,2	0,31	(0,1) (1,0)
2	0,1	0,05	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,01	(2,3)(3,2)
6			0,005	(3,3)

Caso deseja acrescentar mais uma variável (X_3) a S_1 , fazendo assim $S = X_1 + X_2 + X_3$, deve-se fazer a convolução de $S_1 = X_1 + X_2$ com X_3 , tal que $S = S_1 + X_3$.

X_1	P_{X_1}	X_2	P_{X_2}	X_3	P_{X_3}
0	0,5	0	0,7	0	0,4
1	0,3	1	0,2	1	0,3
2	0,1	2	0,05	2	0,15
3	0,1	3	0,05	3	0,05
				4	0,04
				5	0,02
				6	0,02
				7	0,02

A convolução de S_1 com X_3 , tal que $S = S_1 + X_3 = X_1 + X_2 + X_3$ é dada por meio de:

$$P_S(s) = \sum_{S_1 \leq s} P_{X_3}(s - s_1) P_{S_1}(s_1)$$

S pode assumir os valores $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ correspondente a soma entre os valores de X_1 , X_2 e X_3 .

$$P_S(0) = P_{S_1} * P_{X_3}(0) = \sum_{s_1=0}^0 P_{X_3}(0 - s_1)P_{S_1}(s_1)$$

$$P_S(1) = P_{S_1} * P_{X_3}(1) = \sum_{s_1=0}^1 P_{X_3}(1 - s_1)P_{S_1}(s_1)$$

...

$$P_S(4) = P_{S_1} * P_{X_3}(4) = \sum_{s_1=0}^4 P_{X_3}(4 - s_1)P_{S_1}(s_1)$$

...

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S = S_1 + X_3$.

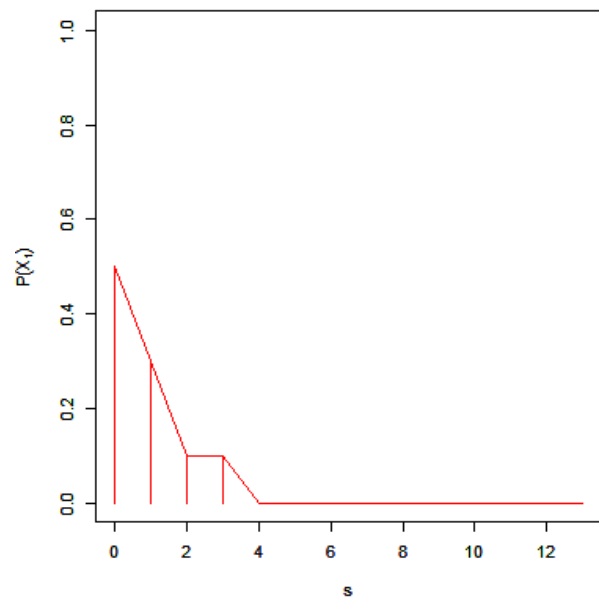
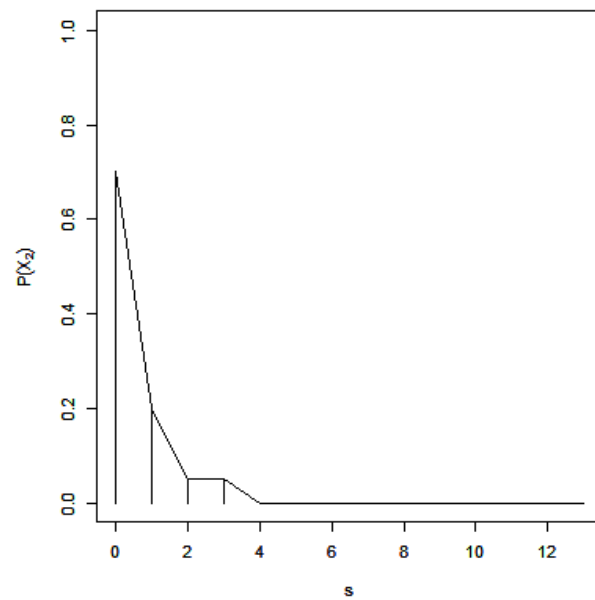
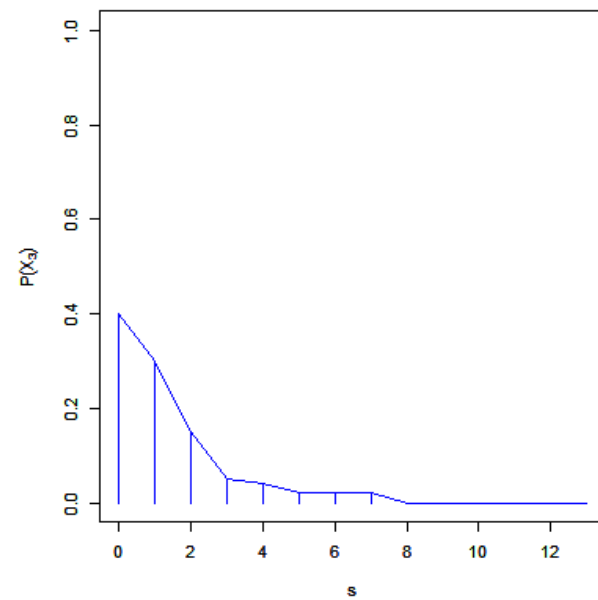
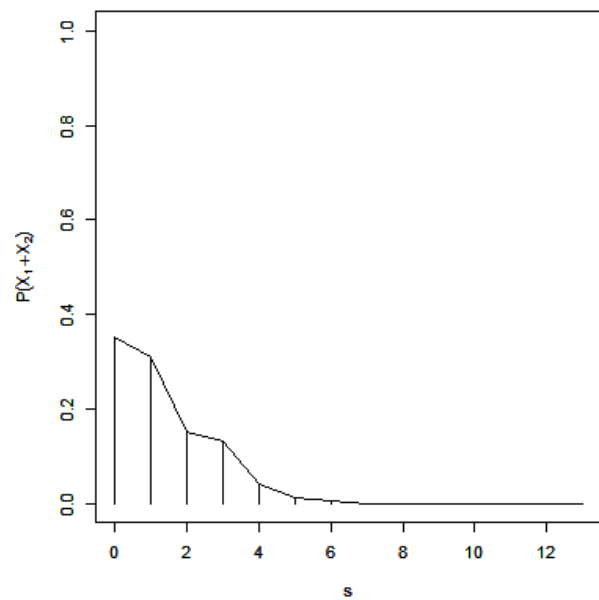
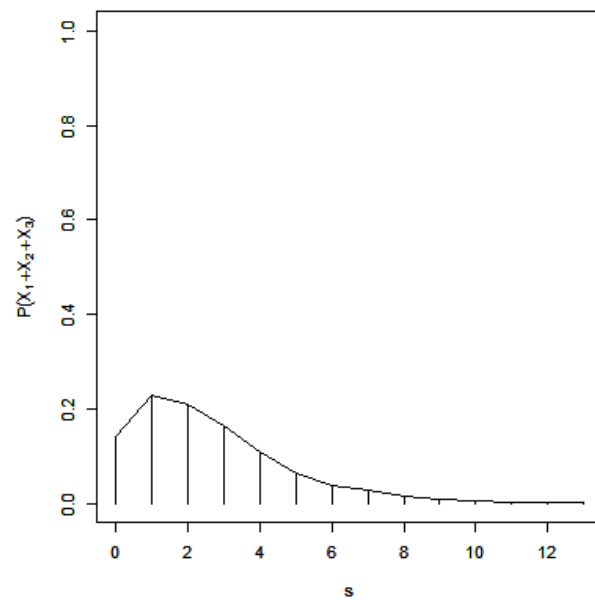
s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	p_s	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,1078	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,0627	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,0148	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,0072	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,001	(6,7)

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S = S_1 + X_3$.

s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	p_s	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,1078	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,0627	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,0148	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,0072	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,001	(6,7)

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S = S_1 + X_3$.

s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	p_s	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,1078	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,0627	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,0148	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,0072	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,001	(6,7)

X_1  X_2  X_3  X_1+X_2  $X_1+X_2+X_3$ 

$S_1 = X_1 + X_2$	p_{X_1}	p_{X_2}	P_{S_1}	(X_1, X_2)
0	0,5	0,7	0,35	(0,0)
1	0,3	0,2	0,31	(0,1) (1,0)
2	0,1	0,05	0,155	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	(4,0)(3,1)(2,2)(1,3)(0,4)
5			0,01	(5,0)(4,1)(3,2)(2,3)(1,4)(0,5)
6			0,005	(6,0)(5,1)(4,2)(3,3)(2,4)(1,5)(0,6)

```
convolucao<-function(x,y,px,py){
```

```
  s <- rep(0,(length(x)*length(y)))  # Gerando o vetor S como múltiplo de  $X_1 * X_2$ 
```

```
  Ps<-s*0  # Gerando o vetor P(S) como múltiplo de  $P(X_1)*P(x_2)$ 
```

```
  cont<-1
```

```
  for(i in 1:length(x)){  # Percorrendo o vetor x
```

```
    for(j in 1:length(y)){  # Percorrendo o vetor y
```

```
      s[cont]<-x[i]+y[j]  #  $S[1]<-x[1]+y[1]$  ( $S<-0+0$ ,  $S<-0+1$ ) ( gerando todas as combinações)
```

```
      Ps[cont]<-px[i]*py[j]
```

```
      cont<-cont+1
```

```
    }
```

```
  }
```

.....

```
convolucao<-function(x,y,px,py){
```

```
  s <- rep(0,(length(x)*length(y)))
```

```
  Ps<-s*0
```

```
  cont<-1
```

```
  for(i in 1:length(x)){
```

```
    for(j in 1:length(y)){
```

```
      s[cont]<-x[i]+y[j]
```

```
      Ps[cont]<-px[i]*py[j]
```

```
      cont<-cont+1
```

```
    }
```

```
  }
```

```
.....
```

s	Ps
0	0,35
1	0,1
2	0,025
3	0,025
1	0,210
2	0,06
3	0,015
4	0,015
2	0,07
3	0,02
4	0,005
5	0,005
3	0,070
4	0,020
5	0,005
6	0,005

```

convolucao<-function(x,y,px,py){
  s <- rep(0,(length(x)*length(y)))  # Gerando o vetor S como múltiplo de X1* X2
  Ps<-s*0                             # Gerando o vetor P(S) como múltiplo de P(X1)*P(x2)
  cont<-1
  for(i in 1:length(x)){               # Percorrendo o vetor x
    for(j in 1:length(y)){            # Percorrendo o vetor y
      s[cont]<-x[i]+y[j]              # S[1]<-x[1]+y[1] (S<-0+0, S<-0+1) ( gerando todas as combinações)
      Ps[cont]<-px[i]*py[j]
      cont<-cont+1
    }
  }
  auxs <- unique(s)
  auxPs <- auxs*0
  cont <- 1
  for(u in auxs){
    auxPs[cont]<-sum(Ps[which(s==u)]) # Para casa valor de s está sendo somado todos os valores possíveis de
    cont<-cont+1
  }
  fdp<-cbind(auxs,auxPs)
  colnames(fdp)<-c('s','Ps')

  return(fdp)
}

```

Para chamar a função

Exemplo :

```

x <-c(0,1,2,3); Px<-c( 0.7,0.2,0.05,0.05)
y <-c(0,1,2,3,4,5,6,7); Py<-c( 0.4,0.3,0.15,0.05,0.04,0.02,0.02,0.02)
convolucao(x,y,px,py)

```

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S = S_1 + X_3$.

s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	p_s	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,155	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,10775	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,06265	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,01475	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,00715	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,0001	(6,7)

X_1	P_{X_1}	X_2	P_{X_2}
0	0,5	0	0,7
1	0,3	1	0,2
2	0,1	2	0,05
3	0,1	3	0,05

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$

$$P_{S_1}(2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$

$$P_{S_1}(2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$$

$$P_{S_1}(3) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$

$$P_{S_1}(2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$$

$$P_{S_1}(3) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$$

$$P_{S_1}(4) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$

$$P_{S_1}(2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$$

$$P_{S_1}(3) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$$

$$P_{S_1}(4) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$$

$$P_{S_1}(5) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$$

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 2$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)$
$X_1 = 3$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 0)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 2)$	$P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$

$$P_{S_1}(0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$P_{S_1}(1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$$

$$P_{S_1}(2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2)$$

$$P_{S_1}(3) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 3)$$

$$P_{S_1}(4) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 3)$$

$$P_{S_1}(5) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$$

$$P_{S_1}(6) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 3)$$

S_1	P_{S_1}	X_3	P_{X_3}
0	0,35	0	0,4
1	0,31	1	0,3
2	0,155	2	0,15
3	0,13	3	0,05
4	0,04	4	0,04
5	0,01	5	0,02
6	0,005	6	0,02
		7	0,02

	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$	$X_3 = 2$	$X_3 = 3$	$X_3 = 4$	$X_3 = 5$	$X_3 = 6$	$X_3 = 7$
$S_1 = 0$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 1$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 2$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 3$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 4$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 5$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 6$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(7)$

	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$	$X_3 = 2$	$X_3 = 3$	$X_3 = 4$	$X_3 = 5$	$X_3 = 6$	$X_3 = 7$
$S_1 = 0$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(0)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 1$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(1)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 2$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(2)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 3$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(3)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 4$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(4)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 5$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(5)P_{X_3}(7)$
$S_1 = 6$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(0)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(1)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(2)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(3)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(4)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(5)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(6)$	$P_{S_1}(6)P_{X_3}(7)$

$$P_S(0) = P(S_1 = 0)P(X_3 = 0)$$

$$P_S(1) = P(S_1 = 1)P(X_3 = 0) + P(S_1 = 0)P(X_3 = 1)$$

$$P_S(2) = P(S_1 = 2)P(X_3 = 0) + P(S_1 = 1)P(X_3 = 1) + P(S_1 = 0)P(X_3 = 2)$$

$$P_S(3) = P(S_1 = 3)P(X_3 = 0) + P(S_1 = 2)P(X_3 = 1) + P(S_1 = 1)P(X_3 = 2) + P(S_1 = 0)P(X_3 = 3)$$

$$P_S(4) = P(S_1 = 4)P(X_3 = 0) + P(S_1 = 3)P(X_3 = 1) + P(S_1 = 2)P(X_3 = 2) + P(S_1 = 1)P(X_3 = 3) + P(S_1 = 0)P(X_3 = 4)$$

...

$$P_S(13) = P(S_1 = 6)P(X_3 = 7)$$

EXEMPLO 4: Considere para o exercício anterior que, 8 seja o limite de indenização para essa carteira. Assim, seria o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado.

s	P_s
0	0,14
1	0,229
2	0,2075
3	0,1625
4	0,10775
5	0,06265
6	0,0369
7	0,0265
8	0,01475
9	0,00715
10	0,0038
11	0,0011
12	0,0003
13	0,0001

EXEMPLO 4: Considere para o exercício anterior que, 8 seja o limite de indenização para essa carteira. Assim, seria o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado.

s	P_s
0	0,14
1	0,229
2	0,2075
3	0,1625
4	0,10775
5	0,06265
6	0,0369
7	0,0265
8	0,01475
9	0,00715
10	0,0038
11	0,0011
12	0,0003
13	0,0001

$$E(S) = \sum_{s=0}^{13} s P(s) = 2,52$$

Solução:

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} S, & S < 8 \\ 8, & S \geq 8 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S; 8)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^7 s P(s) + \sum_{s=8}^{13} 8 P(s) = 2,49945$$

Bibliografia

- BOWERS, N. et al. Actuarial mathematics. 2. ed. Illinois: The Society Of Actuaries, 1997.
- DICKSON, D. C. M. Insurance risk and ruin. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- BUHLMANN, H. Mathematical methods in risk theory. Berlin: "Springer Verlag, 1970.
- KAAS, R. et al. Modern Actuarial Risk Theory: using R. 2. ed. New York: Springer Verlag, 2008.
- KLUGMAN, S. A.; PANJER, H. H.; WILLMOT, G. E. Loss models: from data to decisions. 4. ed. New Jersey: Wiley, 2012

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora.** Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos.** Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

