

# Matemática atuarial

## AULA 23- Prêmios Carregados

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br  
Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

# Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).
- Para incluirmos as despesas da seguradora no prêmio puro deve-se inicialmente dividir as despesas no que diz respeito à incidência.
- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
  - Comissão de corretagem,
  - Despesas com médicos examinadores,
  - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

# Prêmios Carregados

- Em contrapartida, existem despesas que ocorrem enquanto o segurado estiver ligado com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
  - salários de funcionários,
  - despesas com informática,
  - correspondência,
  - aluguel,
  - impostos, etc.
- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurabilidade para diminuir o risco de insolvência da seguradora a partir da Teoria do Risco de Ruína.

# Prêmios Carregados

➤ Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário.

Além do gasto com indenizações, também é incluso as despesas administrativas com o seguro (durante o período de vigência do contrato).

b) Prêmio “Zillmerado” (Zilmer, 1863).

O segurado irá pagar um prêmio durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e em seguida pagará um prêmio relativo ao risco.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

# Prêmio de Inventário

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$\Pi^{\gamma}$ : O prêmio único de inventário

$\Pi$ : Corresponde ao prêmio puro único de um dado produto atuarial

$V_{\gamma}$ : O valor atuarial correspondente ao carregamento de gestão

# Prêmio de Inventário.

Como exemplo considere um seguro de vida vitalício feito por  $x$  em que a seguradora tem um gasto anual a gestão dessa apólice igual a  $\gamma$ , então:

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|}, T \geq 0$$

$$E(Z_{T_x}) = \Pi^v = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

$\gamma$ : Carregamento de inventário

# Prêmio de Inventário

Assim:

$$L = Z_{T_x} - Y$$

$$E(P^\gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|}) = E(v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|})$$

$$P^\gamma = \frac{A_x + \gamma \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$$

$$P^\gamma = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \gamma$$

**EXEMPLO 1:** Qual o valor cobrado por um seguro de vida vitalício com pagamento unitário ao final do ano de morte do segurado, dado que ao prêmio está incluso um gasto anual, fixo em 0,005 relativos a tarifa de serviços? Considere  $x = 40$ ,  $i = 0,03$  e o tempo de vida adicional de  $x$  modelado pela tábua de vida AT-49.



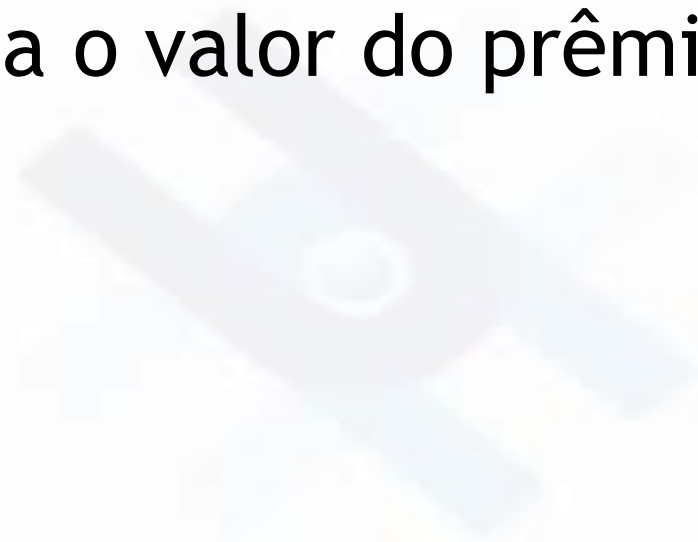


## EXEMPLO 1: Solução :

$$\Pi^{\gamma} = A_{40} + \gamma \ddot{a}_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40}}{D_{40}} \right) \approx 0,48113$$

$$p^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40}} = \frac{\frac{M_{40}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40}}{D_{40}} \right)}{\frac{N_{40}}{D_{40}}} \approx 0,0227$$

**EXEMPLO 2:** Se no exemplo 1, o segurado opta-se por um seguro temporário com cobertura de 30 anos, qual seria o valor do prêmio?



## EXEMPLO 2

$$\Pi^{\gamma} = A_{40:1:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \right) \approx 0,26564$$

$$p^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40:\overline{30}|}} = \frac{0,26564}{\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}} \approx 0,014236$$

**EXEMPLO 3:** Uma pessoa de 20 anos decide pagar por uma renda vitalícia com benefício anual unitário. Os pagamentos dos benefícios começam caso o segurado chegue viva à idade de 60 anos. Quanto a seguradora deve cobrar por esse produto, considerando um gasto anual de 0,005 além dos gastos com o benefício? Suponha  $i = 3\%$ , tábua de vida AT-49 e fluxo de caixa antecipado.

# EXEMPLO 3

$$Y_p = \begin{cases} P^\gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < 40 \\ P^\gamma \ddot{a}_{\overline{40}|} & T \geq 40 \end{cases}$$

$Y_b = Y_1 + Y_2$  em que  $Y_1 = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 40 \\ {}_{40|}\ddot{a}_{\overline{T+1-40}|} & t \geq 40 \end{cases}$  e  $Y_2 = \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|} \quad T \geq 0$

$$\Pi^\gamma = E(Y_b) = {}_{40|}\ddot{a}_{20} + \gamma \ddot{a}_{20}$$

$$\Pi^\gamma = \frac{N_{60}}{D_{20}} + 0,005 \left( \frac{N_{20}}{D_{20}} \right) \approx 3,78983$$

$$P^\gamma = \frac{\Pi^\gamma}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{3,78983}{\frac{N_{20} - N_{60}}{D_{20}}} \approx 0,16325$$

# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

# Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

Este prêmio tem esse nome graças as ideias de August Zillmer (1831-1893)

Inicialmente descreveu um processo para que a seguradora mantenha uma reserva de capital inicial superior ao pagamento dos primeiros prêmios.

...o prêmio resultante ao acréscimo de um carregamento de aquisição...

O prêmio único de Zillmerado é representado por:

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

$V_{\alpha}$ : valor atuarial correspondente ao carregamento de aquisição.

# Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

- No caso de um **seguro de vida vitalício** ( com benefício unitário pago ao final do ano de morte) feito por  $x$ , o valor presente relativo as despesas é

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \alpha, \quad T \geq 0$$

Em que  $\alpha$  é o carregamento de aquisição. Logo  $E(Z_{T_x}) = \Pi^\alpha = A_x + \alpha$

- O compromisso do **segurado** é  $Y = P^\alpha Y_1 + P_x Y_2$

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & 0 \leq T < s \\ \ddot{a}_{\overline{s}|}, & T \geq s \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} s|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-s}|}, & T \geq s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$P^\alpha$ : é o prêmio considerando as despesas de aquisição que devem ser pagas durante o período  $s$

$P_x$ : é o prêmio anual nivelado



# Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

$$E(Y) = E(Z_{T_x})$$

$$E(P^\alpha Y_1 + P_x Y_2) = E(v^{T+1} + \alpha)$$

$$(P^\alpha) \ddot{a}_{x:\overline{s}|} + (P_x)_{s|} \ddot{a}_x = A_x + \alpha$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{(P_x)_{s|} \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x (\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

## Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x = \frac{A_x - P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

Como  $A_x - P_x \ddot{a}_x = 0$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

O termo  $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$  corresponde as parcelas de  $\alpha$

**EXEMPLO 4:** Considere uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida **inteiro** que paga 1 *u.m.* ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua  $AT - 49$  e uma taxa de juros  $i = 0,03$ ? Considere, para o cálculo do prêmio um carregamento de aquisição de \$0,005 **que deve ser pago em um período de 10 anos.**

## EXEMPLO 4 Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + P_{22}$$

$$P^{\alpha} = \frac{0,005}{\frac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + \frac{M_{22}}{N_{22}} = \frac{0,005}{8,757679} + 0,00868206 \approx 0,00925$$

# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

$k$  pagamentos

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha} &= \Pi + \alpha \\ P^{\alpha} &= P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} \end{aligned}$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

## Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é aquele que considera todas as cargas ao prêmio puro, no nosso caso o carga de aquisição e a carga de gestão,

$$\Pi^c = \Pi + V_\gamma + V_\alpha$$

$\Pi$ : Prêmio puro periódico de uma dada modalidade

**EXEMPLO 5:** Qual o valor do prêmio anual a ser cobrado de um segurado de 22 anos, que deseja adquirir um dotal misto com 10 anos de cobertura e benefício unitário? Utilize a tábua de vida AT-49 e considere que a seguradora trabalha com uma taxa de juros de 3% ao ano. Considere que esse produto requer um gastos anual de 0,005 com despesas administrativas e um gasto com despesas médicas de 0,002 que deve ser pago nos dois primeiros anos.

## EXEMPLO 5

$$P^c = P_{x:\bar{n}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}},$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0,005 + \frac{0,002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}} \approx 0,09107441.$$



# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$
$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} + P$$

$k$  pagamentos

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^c = \Pi + V_{\gamma} + V_{\alpha}$$
$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.

