Aula 16 - Anuidade Contínua

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidade Contínua

- A medida que se aumenta o número de partes ao qual a anuidade foi fracionada, o seu valor converge.

  - Caso a anuidade fosse fracionada em infinitas partes, os pagamentos seriam feitos continuamente ao longo do ano.

  - Na prática, serve como uma abstração sobre comportamento de pagamentos contínuos.

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{m}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{m}}{1-e^{\frac{1}{m}ln(v)}}\right]$$

Usando a regra de L' Hopital

$$f(m) = \frac{1}{m} \quad \longmapsto \quad f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - e^{\frac{1}{m}ln(v)} \longmapsto \quad g'(m) = -e^{\frac{1}{m}ln(v)}\left[-\frac{ln(v)}{m^2}\right] = \frac{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}{m^2}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}\right] = \frac{(1-v^n)}{ln(v)}\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

$$\ldots$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{(1 - v^n)}{ln(v)} \lim_{m\to\infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1 - v^n)}{ln(v)} = -\frac{(1 - v^n)}{ln(e^{-\delta})}$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Anuidade Contínua

Outra forma de encontrar a anuidade contínua pode ser vista a seguir:

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \int_0^n v^t \, dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt \,,$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = - \left. \frac{e^{-\delta t}}{\delta} \right|_{t=0}^{t=n} = \frac{-e^{-\delta n} + 1}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Assim para um T_x aleatório:

$$\bar{a}_{\overline{T_x|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

$$E\left(\bar{a}_{\overline{T_x|}}\right) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x|}} f_T(t) dt$$

- O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \,{}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \,{}_t p_x dt$$

Anuidade Vitalícia Contínua

Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m \to \infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)} \right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq \bar{a}_x \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

Anuidade Vitalícia Contínua

A variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = var\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right) = \frac{var(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \frac{var(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^n e^{-\delta 2t} f_{T_x}(t)dt$$

$$(\bar{A}_x)^2 = \left(\int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right)^2$$

$$var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 1: Suponha que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ, calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\overline{T_x}|}$ considerando uma pessoa de idade x.

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$var\left(\bar{a}_{\bar{T}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt - \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt\right)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 1

- (i)

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

- (ii)

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

EXEMPLO 1

- (i)

$$\bar{a}_{\overline{T_x|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

- (ii)

$$P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

- (iii)

$$\mu(x + t) = -\frac{s'(x + t)}{s(x + t)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}}$$

$$\mu(x + t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

EXEMPLO 1

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)e^{-\alpha t}\alpha}{\delta}dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\int_0^\infty e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)}\,dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)} + \frac{1}{\alpha}\right]$$

$$\boldsymbol{\bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha}}$$

- ***Observação**

$$ {}_tp_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} $$

$$ \bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_tp_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-\alpha t} dt $$

$$ \bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\alpha)}\, dt $$

$$ \bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} $$

$$ \bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha} $$

EXEMPLO 1

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{var\left(e^{-\delta t}\right)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_tp_x\mu(x+t)dt = \int_0^{\infty} e^{-t\delta}e^{-\alpha t}\alpha\, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha\left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{\delta+\alpha}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t}\ {}_tp_x\mu(x+t)dt = \int_0^{\infty} e^{-t2\delta}e^{-\alpha t}\alpha\, dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha\left[-\frac{1}{(2\delta+\alpha)e^{t(2\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{2\delta+\alpha}}$$

$$\boxed{var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\alpha}{2\delta+\alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)^2\right]}$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dado valor Π_x?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(1 - e^{-\delta T} \leq \delta \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} \leq \delta \Pi_x - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta \Pi_x)]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[T \leq -\frac{ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right] = F_{T_x}\left(-\frac{ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right)$$

EXEMPLO 2: Considerando que o tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x seja modelado por uma função de densidade exponencial, $T_x \sim Exp(0{,}016)$, dado que $\delta = 0{,}10$, calcule $P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right)$.

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = P\left[T_x \leq -\frac{ln(1-\delta\bar{a}_x)}{\delta}\right] = P\left[T_x \leq -\frac{ln\left(1-\frac{\delta}{\delta+\alpha}\right)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = P\left[T_x \leq -\frac{ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = 1 - e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta}ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = 1 - \left(\frac{0{,}016}{0{,}016+0{,}10}\right)^{\frac{0{,}016}{0{,}1}} \approx 0{,}27164$$

Anuidade Vitalícia Contínua

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = F_{T_x}\left(-\frac{ln(1-\delta\Pi_x)}{\delta}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = 1 - \frac{S_{T_0}\left(x + \left(-\frac{ln(1-\delta\Pi_x)}{\delta}\right)\right)}{S_{T_0}(x)}, \qquad 0 < \Pi_x \leq \frac{1-e^{-\delta(\omega-x)}}{\delta}.$$

Anuidades Temporária contínua

Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se} \quad T \geq n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(Y) = \bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

Anuidades Temporária contínua

Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se } \quad T \geq n \end{cases}$$

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{{}^{2}\,\bar{A}_{x:n} - \left(\bar{A}_{x:n}\right)^2}{\delta^2}$$

Anuidade contínua, Diferida

$$ {}_{m|}\bar{a}_x = \int_m^\infty v^m \bar{a}_{\overline{t-m}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_m^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt $$

$$ {}_{m|}\bar{a}_x = {}_m E_x\ \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\bar{m}|} $$

$$ {}_{m|}\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt $$

$$ {}_{m|}\bar{a}_{x:\bar{n}|} = {}_m E_x\ \bar{a}_{x+m:\bar{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\bar{m}|} $$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

Dado que:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T} = 1$$

Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) + E\left(e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

				Fracionadas	Contínuas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$\bar{a}_x$
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	$\ddot{a}_{x:\bar{n}\rvert}^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\bar{n}\rvert}$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n}\rvert}$	$a_{x:\bar{n}\rvert}^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	${}_{m\rvert}\ddot{a}_x$	${}_{k\rvert}\ddot{a}_x^{(m)}$	${}_{m\rvert}\bar{a}_x$
		Postecipada	${}_{m\rvert}a_x$	${}_{k\rvert}a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	${}_{m\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	${}_{k\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}$	${}_{m\rvert}\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}$
		Postecipada	${}_{m\rvert}a_{x:\overline{n}\rvert}$	${}_{k\rvert}a_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}$	

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics,** 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.