Teoria do Risco
Aula 13

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial para N

- Seja uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso constante q para cada ensaio.

- Seja N o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes.

$$N \sim B(n, q)$$

$$P(N = k) = \binom{n}{k} q^k (1-k)^{n-k} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(k)$$

$$\boldsymbol{E(N) = nq} \quad ; \qquad \boldsymbol{var(N) = nq(1-q)} \; ; \qquad \boldsymbol{M_N(t) = (1 - q + qe^t)^n}$$

$$E(N) > var(N)$$

Quando N tem distribuição de Binomial, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = nqE(X)$$

$$var(S_{col}) = [E(X)]^2 nq(1-q) + nqvar(X) = nq[E(X^2) - E(X)^2 q]$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left(1 - q + qM_X(t)\right)^n$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) \binom{n}{k} q^k (1-k)^{n-k}$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

- Seja uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso constante q para cada ensaio.

- Considere a variável aleatória N definida como sendo igual ao número de fracassos requeridos para que ocorra o $r-\acute{e}simo$ sucesso,

  - *Nota-se que ocorrem k fracassos e $r-1$ sucessos antes do $r-\acute{e}simo$ sucesso no **último ensaio***
  - ..Representa o número de falhas que podem ocorrer numa sequência de ensaios de Bernoulli antes um número de sucessos **alvo** for atingido.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

$N \sim BN(r,q)$ (é dita variável aleatória discreta de tempo de espera).

$$P(N=k)=\binom{k+r-1}{k} q^{r}(1-q\ )^{k}$$

$k=0,1,2,3\ldots$ representa o número de falhas até a ocorrência do $r-ésimo$ sucesso, $r>0$ e $0<q<1$,

$$E(N)=\frac{r(1-q)}{q} \qquad var(N)=\frac{r(1-q)}{q^2} \qquad M_N(t)=\left(\frac{q}{1-(1-q)e^t}\right)^r$$

$$\boldsymbol{var(N)>E(N)}$$

Quando N tem distribuição binomial negativa, dizemos que S_{col} tem distribuição binomial negativa composta, sendo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{r(1-q)}{q}E(X)$$

$$var(S_{col}) = [E(X)]^2 var(N) + E(N)var(X) = E(X)^2\left[\frac{r(1-q)^2}{q^2}\right] + E(X^2)\left[\frac{r(1-q)}{q}\right].$$

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)M_X(t)}\right)^r}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\binom{k+r-1}{k}q^r(1-q\ )^k$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

- ...expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo (espaço, região..) se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.

- ...surge como um modelo adequado para descrição de frequência de eventos de baixa probabilidade de ocorrência, porém sujeitos a um grande número de experimentos.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} I_{\{0,1,\ldots\}}(k)$$

→Onde N expressa a ocorrência de um dado número de eventos

→ λ (intensidade da distribuição Poisson), é um parâmetro que indica a taxa de ocorrência desses eventos

$$E(N) = \lambda \qquad var(N) = \lambda \quad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$E(N) = var(N)$$

Quando N tem distribuição de Poisson, dizemos que S_{col} tem distribuição de Poisson composta, em que $\lambda > 0$, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = [E(X)]^2 var(N) + E(N)var(X) = \lambda E(X^2)$$

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

$$N \sim B(n, q)$$

Se $n = 1$, N tem distribuição $Bernoulli(q)$.

Se $n \to \infty$, e $\lambda = np$ então a Binomial tende para uma Poisson;

$$N \sim BN(r, q)$$

Se $r = 1$, N tem distribuição $geométrica(q)$.

Se $r \to \infty$, então a Binomial Negativa tende para uma Poisson;

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

- Para fenômenos com a mesma esperança matemática de frequência, o ajuste de um modelo binomial apresentaria menor variância que a do modelo de Poisson e este último apresentaria menor variância do que o ajuste com um modelo binomial negativo.

$$\sigma_B^2 < \sigma_P^2 < \sigma_{NB}^2$$

- As distribuições Binomial , Poisson e Binomial negativa podem ser satisfatoriamente aproximadas pela distribuição normal..

$$N \sim N\big(nq, nq(1-q)\big)$$

$$N \sim N(\lambda, \lambda)$$

$$N \sim N\left(\frac{r(1-q)}{q}, \frac{r(1-q)}{q^2}\right)$$

- Exemplo

Considere que uma carteira de seguros em que o número de sinistros obedeça a uma **distribuição binomial negativa**, cuja probabilidade de ocorrência de cada sinistro seja de $0{,}8$ e tenha como **número esperado de sinistros** igual a 500 sinistros. Considere também que os sinistros individuais tenham distribuição exponencial com $\alpha = 0{,}01$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \left(\frac{r(1-q)^2}{q^2} \right) + E(X^2) \left(\frac{r(1-q)}{q} \right)$$

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \qquad 500 = \frac{r(1-0{,}8)}{0{,}8}$$

$r = 2000$ logo $N \sim BN(2000{,}0.8)$

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q} E(X) = 500 \frac{1}{0{,}01} = 50000$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \left(\frac{r(1-q)^2}{q^2} \right) + E(X^2) \left(\frac{r(1-q)}{q} \right)$$

$$var(S_{col}) = 10000(125\ ) + \left[\frac{1}{0{,}01^2} + \frac{1}{0{,}01^2} \right] (500) = 11250000$$

- Exemplo

Considere que os sinistros de uma carteira tenham distribuição Poisson Composta com $\lambda = 150$ (número médio de sinistros por ano) e que o montante dos sinistros individuais tenham distribuição de Pareto com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2000$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

- Lembrando que:

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \qquad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$f(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, x > 0\ (\alpha, \beta > 0) \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{\beta}{(\alpha-1)}$$

$$var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \qquad \text{e} \qquad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}; \quad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \alpha > 2$$

$$CV(S_{col}) = \frac{\sigma_{S_{col}}}{E(S_{col})}$$

- Assim

$$E(S_{col}) = \lambda \frac{\beta}{(\alpha - 1)} = 150 \frac{2000}{2} = 150000$$

$$var(S_{col}) = \lambda \left(\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} + \left(\frac{\beta}{(\alpha - 1)} \right)^2 \right) = 150 \left(\frac{3.2000^2}{(2)^2(1)} + \left(\frac{2000}{(2)} \right)^2 \right)$$

$$var(S_{col}) = 150 \left(\frac{3.2000^2}{4} + \frac{2000^2}{4} \right) = 750000000$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

Exemplo.

Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,99, e que cada carro tenha seu desempenho independente. Qual a probabilidade de que a segunda falha de freios ocorra no **décimo** carro testado?

r = *número de falhas*

K = *número de fracassos.*

$$N \sim BN(2, 0.99)$$

$$P(N=k) = \binom{k+r-1}{k} q^r (1-q)^k$$

Exemplo.

Pelo enunciado tem-se que o número de carros testados será 10, e a pergunta pode ser lida como, qual a probabilidade de se encontrar 2 falhas em 10 lançamentos. Assim $r = 2$ sucessos (sucesso pois o escopo do estudo é o número de falhas encontradas.) e $k = 8$ fracassos. Logo :

$$P(N = 8) = \binom{8 + 2 - 1}{8} 0{,}01^2 (0{,}99\ )^8 \approx 0{,}00083$$

A probabilidade de se encontrar o segundo carro com freios defeituosos antes de 8 carros passarem no teste é de $0{,}083\%$.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

Exemplo **(Bombas de Londres)**

Durante a Segunda Guerra Mundial, a cidade de **Londres** foi bombardeada intensamente pelos aviões alemães. A discussão sobre a aleatoriedade dos alvos é feita com o auxílio da probabilidade e da estatística. Um possível interesse é saber se houve alguma tendência de concentrar as bombas em alguns alvos, ou se elas foram lançadas aleatoriamente.

..a parte sul da cidade foi repartida em 576 pequenas regiões com meio quilômetro quadrado de área cada uma. Foi contado o número de regiões que receberam k bombas, representado por n_k. O total de bombas na parte sul da cidade foi de 537, resultando numa taxa de $0,9323$ bombas por região.

$$\lambda = \frac{537}{576} = 0{,}9323$$

Exemplo **(Bombas de Londres)**

O modelo de Poisson, com a taxa acima, é considerado adequado para ajustar o número de bombas por região. Isto é, a probabilidade de uma região (hipotética) receber k bombas seria dada por:

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Vamos construir uma tabela de frequências esperadas, supondo que o modelo Poisson seja válido, e compará-la com a tabela das frequências observadas.

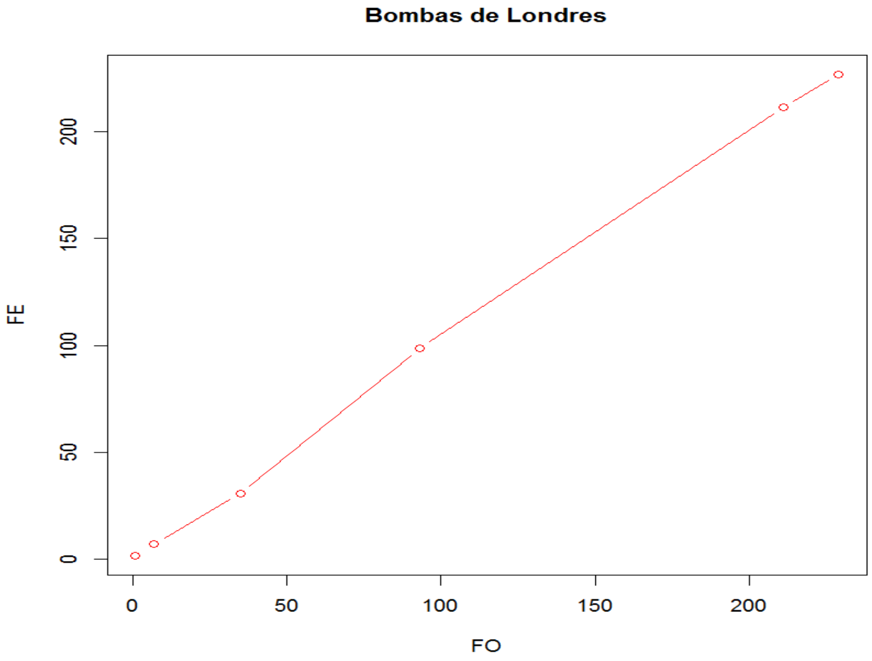
Para obter a frequência esperada do número de regiões com k bombas, denotada por e_k, multiplicamos o total de regiões pela probabilidade $p(k)$. Por exemplo, para a frequência esperada de regiões com 2 bombas, temos

$$e_2 = 576\, p(k) = (576)\,\frac{e^{-0,9323}0,9323^2}{2!} = 98,54$$

Exemplo **(Bombas de Londres)**

N° Bombas	0	1	2	3	4	5 ou mais
F. observada	229	211	93	35	7	1
F. Esperada	226,74	211,39	98.54	30,62	7,14	1,57

- ... os valores observados e esperados estão bastante próximos, servindo de indicação da adequação do modelo proposto.



Exemplo **(Bombas de Londres)**

- .. se houvesse tendência das bombas se agruparem, haveria alta frequência de regiões sem nenhuma bomba, bem como alta frequência de regiões com muitas bombas. Também, teríamos baixa frequência em valores intermediários.

- Pela tabela, percebe-se que isso não ocorre indício que o bombardeio foi feito aleatoriamente sobre essa região.