

# Teoria do Risco

## Aula 8

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley/index.html>



## Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para $S_{ind}$ .

- Encontrar a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes por convolução pode ser um processo bastante penoso.
- Uma alternativa bastante interessante está relacionada com a função geradora de momentos.

## Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para $S_{ind}$ .

- Uma função geradora de momentos é o valor esperado de uma transformação da variável aleatória e sob algumas condições determina completamente a distribuição de probabilidade.

$$g(X) = e^{tX}$$

$$E[g(X)] = E(e^{tX}) = M_X(t)$$

## Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para $S_{ind}$ .

- Teorema: Unicidade

Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias cujas funções geradoras de momentos,  $M_X(t)$  e  $M_Y(t)$ , existem e são iguais para todo  $t$  em um intervalo  $-h < t < h$ , para algum  $h > 0$ , então, as distribuições de probabilidades de  $X$  e de  $Y$  são iguais.

## Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para $S_{ind}$ .

Considere  $S_{ind} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  com  $M_{X_i}(t_i)$ , então

$$M_{S_{ind}}(t) = E(e^{tS_{ind}}) = E[e^{t(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}]$$

$$M_{S_{ind}}(t) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n})$$

$$M_{S_{ind}}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

## ➤ Exemplo 1

Considere três variáveis aleatórias independentes  $X_1, X_2, X_3$ . Para  $i = 1, 2, 3$ ,  $X_i$  tem distribuição exponencial e  $E(X_i) = \frac{1}{i}$ . Encontre a função densidade de probabilidade de  $S = X_1 + X_2 + X_3$  pelo método da função geradora de momentos,

➤ Obs.:

A distribuição exponencial tem parâmetro  $\alpha > 0$ , com f.d.p dada por

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \text{ e } E(X) = \frac{1}{\alpha} \text{ e } \text{var}(X) = \frac{1}{\alpha^2} \text{ e } M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}$$



$$M_{X_1}(t) = \frac{1}{1-t} \quad M_{X_2}(t) = \frac{2}{2-t} \quad M_{X_3}(t) = \frac{3}{3-t}$$

Logo

$$M_{S_{ind.}}(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right) \left(\frac{2}{2-t}\right) \left(\frac{3}{3-t}\right) = \frac{6}{(1-t)(2-t)(3-t)}$$

Coincidindo com a função geradora de momentos encontrada para:

$$f_S(s) = 3e^{-3s}(e^s - 1)^2, \quad s > 0$$

Sendo  $S = X_1 + X_2 + X_3$

## Cálculo de $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$

### ➤ Exemplo 2

Seja a distribuição do valor total das indenizações na carteira em 1 ano com função geradora de momentos conforme abaixo:

$$M_{S_{ind}}(t) = (1 - 2t)^{-9}$$

Calcule  $E(S_{ind})$  e  $var(S_{ind})$ .



## ➤ Exemplo 2

Seja a distribuição do valor total das indenizações na carteira em 1 ano com função geradora de momentos conforme abaixo:

$$M_{S_{ind}}(t) = (1 - 2t)^{-9}$$

$$\left. \frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(S_{ind})$$

$$\frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt} = -9(1 - 2t)^{-10}(-2) = 18(1 - 2t)^{-10}$$

$$\frac{dM_{S_{ind}}(0)}{dt} = \mathbf{R\$18,00}$$

$$\text{var}(S_{ind}) = E(S_{ind}^2) - E(S_{ind})^2$$

$$\text{var}(S_{ind}) = \frac{d^2 M_{S_{ind}}(0)}{dt^2} - (18)^2 = -180(1 - 2t)^{-11}(-2) \Big|_{t=0} - 18^2$$

$$\text{var}(S_{ind}) = 360 - 324 = \mathbf{R\$236,00}$$

## Cálculo de $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$ em função de $I$ e $B$

Considerando  $X_i = I_i B_i$  com a variável aleatória  $I_i$  independente de  $B_i$ . Pode-se obter  $E(S_{ind})$  como:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n E(I_i B_i)$$

ou

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(I_i) E(B_i) = \sum_{i=1}^n E(B_i) q_i$$

## Cálculo de $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$ em função de $I$ e $B$

A variância de  $S_{ind}$ , é obtida por:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(X_i)$$

ou

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

## Demonstração:

$$\text{var}(X) = E[\text{var}(X|Y)] - \text{var}[E(X|Y)].$$

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E[\text{var}(X_i|I_i)] + \text{var}[E(X_i|I_i)]$$

$$\text{var}(X_i|I_i) = \begin{cases} \sum_x x^2 P(x|I=0) - \left[ \sum_x x P(x|I=0) \right]^2 = 0 \\ \sum_x x^2 P(x|I=1) - \left[ \sum_x x P(x|I=1) \right]^2 = \text{var}(B_i) \neq 0 \end{cases}$$

Vale ressaltar que:

$$\sum_x x P(x|I=0) = (x_1 = 0) \times 1 + x_2 \times 0 + x_3 \times 0 \dots = 0$$

Consequentemente

$$\sum_x x^2 P(x|I=0) = (x_1 = 0)^2 \times 1 + x_2^2 \times 0 + x_3^2 \times 0 \dots = 0.$$

Demonstração:

$\text{var}(X_i I_i)$	$P[\text{var}(X_i I_i)]$
0	$P(I_i = 0) = 1 - q_i$
$\text{var}(B_i)$	$P(I_i = 1) = q_i$

- Dessa forma tem-se que:

$$E[\text{var}(X_i|I_i)] = \text{var}(X_i|I_i = 0)P(I_i = 0) + \text{var}(X_i|I_i = 1)P(I_i = 1)$$

$$E[\text{var}(X_i|I_i)] = 0(1 - q_i) + \text{var}(X_i|I_i = 1)q_i = \text{var}(B_i)q_i$$

- Porém é sabido que quando  $I_i = 1$ ,  $X_i = B$ , logo:

$$E[\text{var}(X_i|I_i)] = \text{var}(B_i)q_i$$

## Demonstração:

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E[\text{var}(X_i | I_i)] + \text{var}[E(X_i | I_i)]$$

...

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n \text{var}(B_i)q_i + \text{var}[E(X_i | I_i)]$$



## Demonstração:

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n \text{var}(B_i)q_i + \text{var}[E(X_i|I_i)]$$

$$E(X_i|I_i) = \begin{cases} \sum_x xP(x|I = 0) = 0 \\ \sum_x xP(x|I = 1) = E(B_i) \neq 0 \end{cases}$$

Vale ressaltar que:

$$\sum_x xP(x|I = 0) = (x_1 = 0)1 + x_2 0 + x_3 0 \dots = 0$$

## Demonstração:

$E(X_i I_i)$	$P[E(X_i I_i)]$
0	$P(I_i = 0) = 1 - q_i$
$E(B_i)$	$P(I_i = 1) = q_i$

$$\text{var}[E(X_i|I_i)] = E[E(X_i|I_i)^2] - E[E(X_i|I_i)]^2$$

$$\text{var}[E(X_i|I_i)] = [0^2(1 - q_i) + E(B_i)^2 q_i] - E(X_i)^2$$

$$\text{var}[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 q_i - [E(B_i)E(I_i)]^2$$

$$\text{var}[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 q_i - [E(B_i)q_i]^2$$

$$\text{var}[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 (q_i - q_i^2) = E(B_i)^2 \text{var}(I_i)$$

Demonstração:

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E[\text{var}(X_i|I_i)] + \text{var}[E(X_i|I_i)]$$

Logo:

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n \text{var}(B_i)q_i + E(B_i)^2 \text{var}(I_i)$$

### ➤ Exemplo 3

Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de R\$10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de R\$ 5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Obtenha  $E(X_1) = 11$  e  $var(X_1) = 104879$

$X_1 =$		$I_1.$		$B_1$	
R\$0,00	0,9988	0	0,9988		
R\$5000,00	0,0002			R\$5000,00	0,1667
R\$10000,00	0,001	1	0,0012	R\$10000,00	0,833

$$E(I_1) = 0,0012; E(B_1) = R\$9166,67; var(I_1) = 0,001199; var(B_1) = 3497768$$

### ➤ Exemplo 3

Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de R\$10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de R\$ 5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Obtenha  $E(X_1) = 11$  e  $var(X_1) = 104879$

$X_1 =$		$I_1.$		$B_1$	
R\$0,00	0,9988	0	0,9988		
R\$5000,00	0,0002			R\$5000,00	0,1667
R\$10000,00	0,001	1	0,0012	R\$10000,00	0,833

$$E(I_1) = 0,0012; E(B_1) = R\$9166,67; \quad var(I_1) = 0,001199; var(B_1) = 3497768$$

**Solução:**

Considerando  $S_{ind} = X_1$

$$E(S_{ind}) = E(B_1)q_1$$

$$var(S_{ind}) = var(B_1)q_1 + E(B_1)^2 var(I_1)$$

#### ➤ Exemplo 4

Dado que a probabilidade de ocorrer sinistros é de 0,01, calcule os valores de  $E(X_1)$  e  $var(X_1)$  sendo que a densidade do valor de 1 sinistro é:

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{2000} & \text{se } 0 < b \leq 2000 \\ 0 & \text{cc} \end{cases} :$$



## ➤ Exemplo 4

Dado que a probabilidade de ocorrer sinistros é de 0,01, calcule os valores de  $E(X_1)$  e  $var(X_1)$  sendo que a densidade do valor de 1 sinistro é :

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{2000} & \text{se } 0 < b \leq 2000 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$$E(B) = \frac{2000}{2} \qquad var(B) = \left(\frac{2000^2}{12}\right)$$

$$E(X_1) = E(I_1)E(B_1) = 0,01 \left(\frac{2000}{2}\right) = R\$10,00$$

$$var(X_1) = var(B_1)E(I_1) + E(B_1)^2 var(I_1)$$

$$var(X_1) = \left(\frac{2000^2}{12}\right) 0,01 + \left(\frac{2000}{2}\right)^2 0,01(0,99) = R\$^213233,33$$

# Modelos de risco Individual

O valor esperado de  $S_{ind}$ , é obtida por:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n q_i B_i$$

A variância de  $S_{ind}$ , é obtida por:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 var(I_i)$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i^2 q_i (1 - q_i)$$