

# Teoria do Risco

## Aula 3

**Danilo Machado Pires**  
**danilo.pires@unifal-mg.edu.br**

<https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html>

# Função de Distribuição

- Um fenômeno aleatório ou estocástico é descrito minimamente por uma distribuição de probabilidade.
- Indexa parâmetros e campos de variação.
- O conhecimento do modelo e suas principais características permite ao pesquisador ter uma clara visão do uso adequado dos mesmos.

# **Importantes modelos discretos**

# Distribuição Uniforme discreta

$Y \sim U_d(E)$ , com “ $E$ ” sendo o conjunto de seus valores.

$$P(Y = y) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\dots,N\}}(y)$$

Todos os possíveis valores da variável são equiprováveis.

$$Y \sim U_d(1, N)$$

$$E(Y) = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{N^2-1}{12}$$

- *Modelagem de sorteios*
- *Casos em que há grandes incertezas sobre os valores de  $Y$ ...*

# Distribuição de Bernoulli

$$Y \sim \text{Bernoulli}(q)$$

$$P(Y = y) = q^y (1 - q)^{1-y} I_{\{0,1\}}(y)$$

Uma variável aleatória que segue o modelo Bernoulli, assume apenas os valores 0 ou 1.

$$E(Y) = q$$

$$\text{var}(Y) = q(1 - q)$$

- *Experimentos que admitem somente dois resultados*
- *Modelos de preferência.*

# Distribuição Binomial

Considerando uma sequência de  $n$  ensaios de Bernoulli, a observação conjunta de vários desses ensaios leva à definição da distribuição Binomial.

**Exemplo:** Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a  $q$  (sucesso) e  $1 - q$  (fracasso). Qual o modelo de probabilidade para o número de coroas?

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	N° de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1-q)^4$	$\binom{4}{0} q^0(1-q)^4$
<b>Coroa</b>	Cara	Cara	Cara	1	$q^1(1-q)^3$	$\binom{4}{1} q^1(1-q)^3$
Cara	<b>Coroa</b>	Cara	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	<b>Coroa</b>	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	Cara	<b>Coroa</b>		$q^1(1-q)^3$	
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara	Cara	2	$q^2(1-q)^2$	$\binom{4}{2} q^2(1-q)^2$
<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>	Cara		$q^2(1-q)^2$	
<b>Coroa</b>	Cara	Cara	<b>Coroa</b>		$q^2(1-q)^2$	
Cara	<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>		$q^2(1-q)^2$	
Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	3	$q^3(1-q)^1$	$\binom{4}{3} q^3(1-q)^1$
<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>		$q^3(1-q)^1$	
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>		$q^3(1-q)^1$	
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara		$q^3(1-q)^1$	
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	4	$q^4(1-q)^0$	$\binom{4}{4} q^4(1-q)^0$

# Distribuição Binomial

Seja  $Y$  o número total de sucessos obtidos, na realização de  $n$  ensaios de Bernoulli independentes. Então é  $Y \sim B(n, q)$ .

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y)$$

$$E(Y) = nq \quad \text{var}(Y) = nq(1 - q)$$

- *Frequência de sinistros.*



# Distribuição de Poisson

Sendo a ocorrência do evento em estudo um evento raro, o cálculo através do modelo binomial se torna extremamente laborioso

$$Y \sim Po(\lambda)$$

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} I_{\{0,1,\dots\}}(y)$$

O parâmetro  $\lambda$  indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

$$E(Y) = \lambda \qquad \text{var}(Y) = \lambda$$

- Eventos que ocorrem num dado período de tempo, independentemente de quando ocorreu o último evento.
- Eventos de baixa probabilidade de ocorrência ( raros).

# Importantes modelos discretos

- Distribuição Geométrica  $Y \sim G(q)$

$$P(Y = y) = q(1 - q)^{y-1}$$

$$E(Y) = \frac{1}{q} \quad \text{var}(Y) = \frac{1 - q}{q}$$

Distribuição de espera: Quantidade de tentativas que leva para ocorrência de um evento de interesse.

Falta de memória  $P(Y > s + t | Y > s) = P(Y > t)$

# Importantes modelos discretos

- Distribuição Binomial Negativa  $Y \sim BN(r, q)$

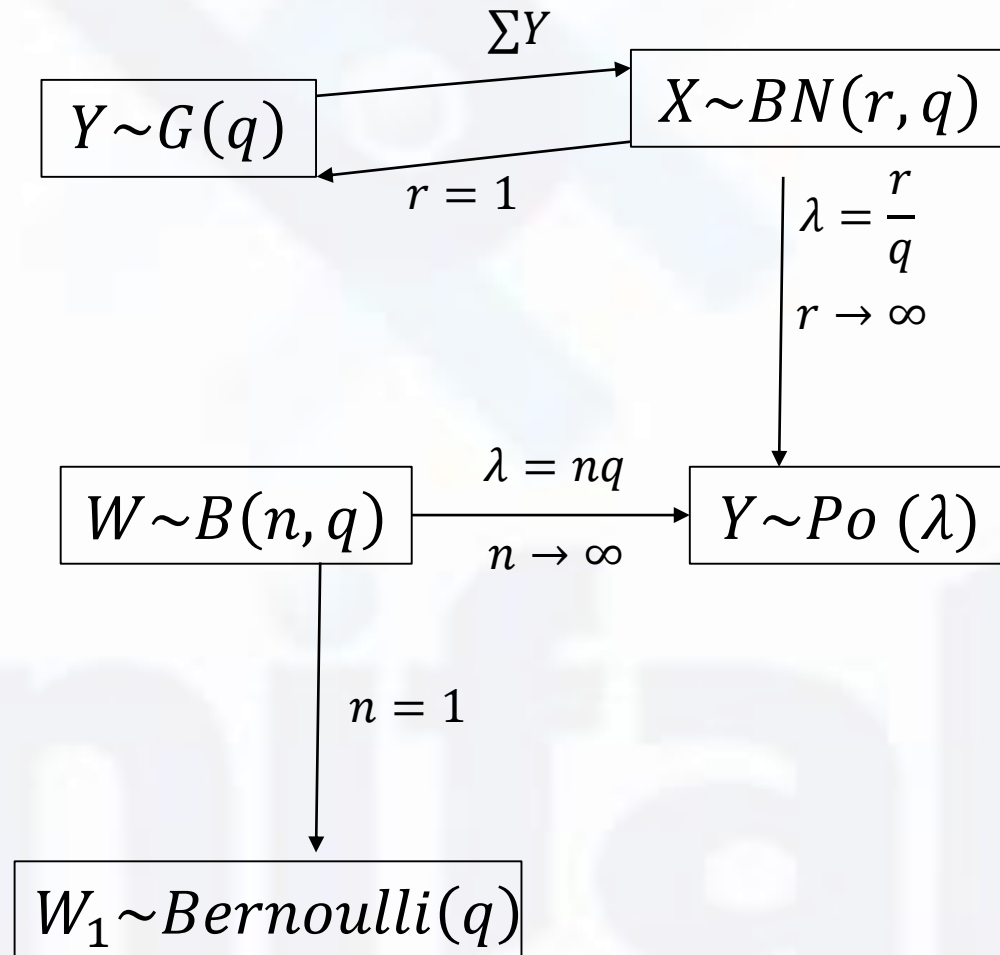
$$P(Y = y) = \binom{y + r - 1}{y} q^r (1 - q)^y$$

$$E(Y) = \frac{r(1 - q)}{q} \quad \text{var}(Y) = \frac{r(1 - q)}{q^2}$$

- É uma generalização da distribuição geométrica
  - Soma de variáveis aleatórias com distribuição geométrica.
- O número de tentativas é aleatório ( diferente da binomial)

Modelo adequado a frequência de eventos ocorridos em intervalos de tempos disjuntos não são independentes entre si.

# Importantes modelos discretos



# **Importantes modelos contínuos**



# Distribuição Uniforme contínua

$$Y \sim U_c(a, b)$$

$$f(y) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(y)$$

No intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , todos os sub-intervalos com mesmo comprimento tem a mesma probabilidade.

$$E(Y) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(y) = \frac{y-a}{b-a} I_{[a,b]}(y) + I_{[b,\infty)}(y).$$

# Distribuição Exponencial

Importante função de distribuição utilizadas na modelagem de dados que representam o tempo até a ocorrência pela primeira vez de algum evento de interesse,

- *Tempo de falha de um componente eletrônico.*
- *Tempo de ocorrência de indenização em uma seguradora.*
- *Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas.*

Boas propriedades matemáticas -Falta de memória

# Distribuição Exponencial

$$Y \sim \text{Exp}(\alpha)$$

$$f(y) = \alpha e^{-\alpha y} I_{[0, \infty)}(y)$$

O parâmetro  $\alpha$  indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância ou volume, entre outras.

$$F(y) = (1 - e^{-\alpha y}) I_{(0, \infty)}(y)$$

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha} \qquad \text{var}(Y) = \frac{1}{\alpha^2}$$



# Distribuição Normal

- A grande maioria das técnicas empregadas é baseada na distribuição normal.
- Inúmeros fenômenos aleatórios podem ser descritos precisamente ou aproximadamente por este modelo.
- Essa distribuição é a forma limitante de outras distribuições de probabilidade, como consequência do teorema central do limite.
- Muitas estatísticas apresentam normalidade assintótica.

# Distribuição Normal

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

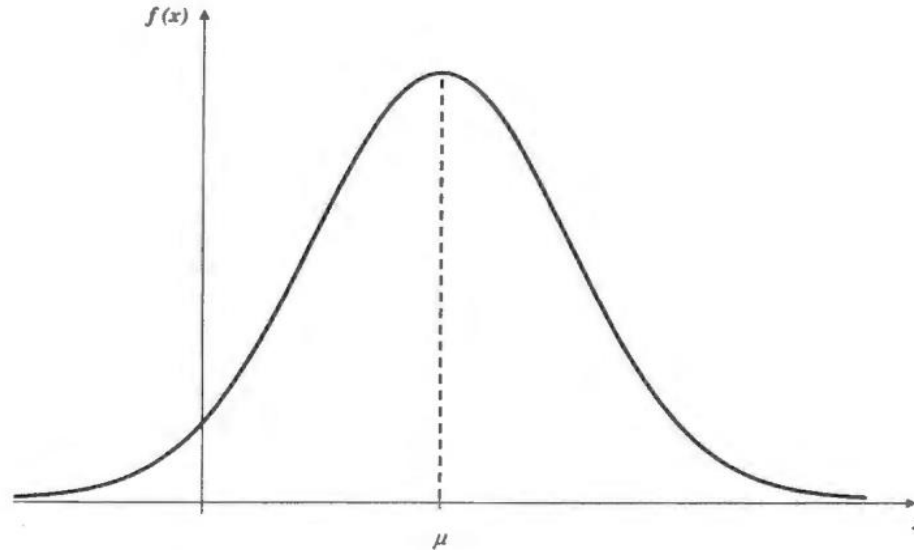
$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(-\infty, \infty)}(y)$$

com  $\mu, \sigma, y \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

Os parâmetros  $\mu, \sigma^2$  são respectivamente, a média e a variância da variável.

$$E(Y) = \mu \qquad \text{var}(Y) = \sigma^2$$

# Distribuição Normal



Simétrica ao redor de  $\mu$  e vai diminuindo a massa de probabilidade, à medida que seus valores se movem para as extremidades.

Adequado para várias quantidades envolvendo medidas populacionais:

*Peso, Altura, Dosagem de substâncias no sangue, ...*

# Distribuição Normal

- A função de distribuição da  $N(\mu, \sigma^2)$  não tem uma forma fechada.
  - Não possui primitiva.
- Os valores de probabilidade são obtidos por integração numérica e apresentados em tabela.
- Basta, tabelar as probabilidades para  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ . Uma transformação linear de  $Y$  é feita nesse sentido.

$$Y = \sigma Z + \mu$$

Sendo  $Z \sim N(0,1)$

# Distribuição Normal

Sendo  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$  terá distribuição  $N(0,1)$ .

$$P(Y \leq y) = P\left(Z \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$$

A distribuição  $N(0,1)$  é denominada Normal Padrão ou Normal Reduzida.

# Distribuição Normal

$$P(a < Y < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < Y < b) = F_Y\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F_Y\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

# Pareto

- $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$

$$f(X) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0 \ (\alpha, \beta > 0)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \alpha > 2$$

- Utilizada no seguro de incêndio vultoso, e resseguro de catástrofe.

# Lognormal

- $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(y)$$

$$E(Y) = e^{\mu + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

$$\text{var}(Y) = e^{2(\mu + \sigma^2)}$$

- Utilizada nos seguros de automóveis e incêndio comum.



# Referências

- Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001.
- JAMES,B.R.; **Probabilidade: Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba, CRV 2020.

