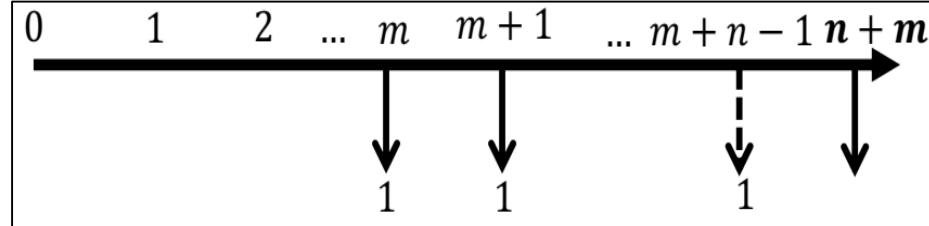


Matemática atuarial

Anuidade diferida (aula14)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

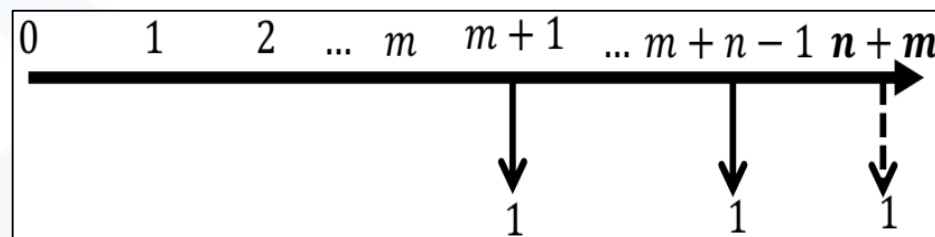
➤ Fluxo Antecipado



$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + v^{m+1} + v^{m+2} + \dots + v^{m+n-1}$$

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

➤ Fluxo Postecipado



$${}_m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \dots + v^{m+n}$$

$${}_m|a_{\overline{n}|} = v^m v \left(\frac{1 - v^n}{1 - v} \right)$$

➤ Fluxo Antecipado

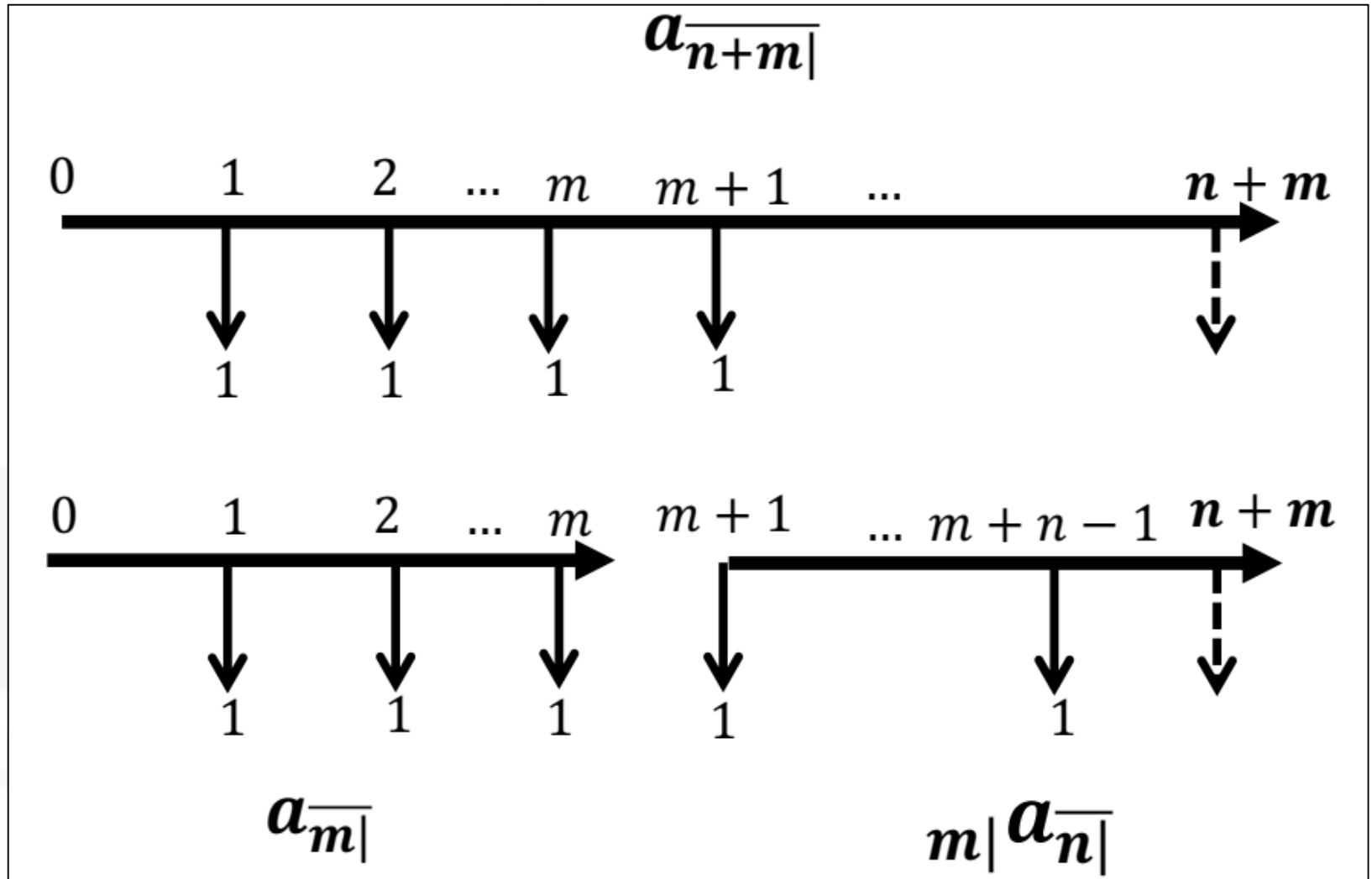
$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1-v^n}{1-v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \quad (m = 0) \rightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

➤ Fluxo Postecipado

$${}_m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} \left(\frac{1-v^n}{1-v} \right) = v^m a_{\overline{n}|} \quad (m = 0) \rightarrow a_{\overline{n}|} = v \left(\frac{1-v^n}{1-v} \right)$$

$${}_{m+1}|\ddot{a}_{\overline{n}|} = {}_m|a_{\overline{n}|}$$

Anuidades



➤ FLUXO ANTECIPADO

➤ FLUXO POSTECIPADO

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1 - v^n}{1 - v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \quad {}_m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v} \right) = v^m a_{\overline{n}|}$$

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} \quad {}_m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}$$

EXEMPLO 1: Uma loja de departamentos está vendendo um conjunto de cadeiras. A forma de pagamento proposta pela loja consiste 8 prestações de \$ 6000,00 e só comece a pagar a partir do início do 4º ano após adquirir o produto, considerando uma taxa de juros de 1,25% ao ano, em regime de juros compostos. Determine o quanto custaria essas cadeiras caso o pagamento fosse a vista.

SOLUÇÃO

$${}_4|\ddot{a}_{\overline{8}|} = v^4 \frac{1 - v^8}{1 - v} \approx 7,29127$$

Assim o valor das cadeiras a vista é dado por:

$$6000 \times {}_4|\ddot{a}_{\overline{8}|} \approx \$43747,62$$

SOLUÇÃO (Caso Postecipado)

$${}_4|a_{\overline{8}|} = v^5 \left(\frac{1 - v^8}{1 - v} \right) \approx 7,201254$$

$$6000 \times {}_4|a_{\overline{8}|} \approx \$43207,52$$

Anuidades Diferidas

Na prática, planos de aposentadoria são comprado anos antes do início dos recebimentos dos benefícios.

- Anuidades diferidas são pagas passado um determinado prazo, diferentemente das anuidades imediatas.
- Caso o participante faleça antes do início do recebimento da anuidade (antes de aposentadoria) a seguradora não terá que pagar nada ao segurado (considerando que não existe reversão para pensão).

Anuidades vitalícias Diferidas, Antecipado

$$Y = \begin{cases} {}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E({}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}) = {}_m|\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^m \frac{1 - v^{t-m+1}}{1 - v} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Antecipado

$$Y = \begin{cases} {}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\omega-m-x} v^{t+m} {}_{t+m} p_x$$

Lembrando que ${}_{t+m} p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$${}_m|\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-m-x} v^t v^m {}_m p_x {}_t p_{x+m} = v^m {}_m p_x \sum_{t=0}^{\omega-m-x} v^t {}_t p_{x+m}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Postecipado

$$Y = \begin{cases} {}_m|a_{\overline{T_x-m}|} = v^m a_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E({}_m|a_{\overline{T_x-m}|}) = {}_m|a_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^{m+1} \left(\frac{1 - v^{t-m}}{1 - v} \right) {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=m+1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Postecipado

$$Y = \begin{cases} m|a_{\overline{T_x-m}|} = v^m a_{\overline{T_x-m}|} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$m|a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^{t+m} {}_{t+m} p_x$$

Lembrando que ${}_{t+m} p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$$m|a_x = \sum_{t=1}^{\omega-m-x} v^t v^m {}_m p_x {}_t p_{x+m} = v^m {}_m p_x \sum_{t=1}^{\omega-m-x} v^t {}_t p_{x+m}$$

$$m|a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

➤ FLUXO ANTECIPADO

$$Y = \begin{cases} m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}, & T_x \geq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$m|\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^m \frac{1-v^{t-m+1}}{1-v} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$m|\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^t {}_t p_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$m|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\bar{m}|}$$

➤ FLUXO POSTECIPADO

$$Y = \begin{cases} m|a_{\overline{T_x-m}|}, & T_x \geq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$m|a_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^{m+1} \left(\frac{1-v^{t-m}}{1-v} \right) {}_t p_x q_{x+t}$$

$$m|a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$$m|a_x = a_x - a_{x:\bar{m}|}$$

EXEMPLO 2: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 20 anos, que paga 1 *u.m.* em fluxo de caixa **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$${}_{20|}\ddot{a}_{40} = \sum_{t=20}^{\omega-60} v^t {}_t p_{40}$$

$${}_{20|}\ddot{a}_{40} = {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60} = v^{20} {}_{20}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\omega-60} v^t {}_t p_{60} \right)$$

EXEMPLO 3: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. em fluxo de caixa **postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$${}_{19|}a_{40} = v^{19} {}_{19}p_{40} \left(\sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{59} \right)$$

$${}_{19|}a_{40} = v^{19} {}_{19}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1}p_{59} \right) = v^{19} {}_{19}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t v^1 {}_1p_{59} {}_t p_{59+1} \right)$$

$${}_{19|}a_{40} = v^{19} {}_{19}p_{40} v^1 {}_1p_{59} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{59+1} \right) = v^{20} {}_{19}p_{40} {}_1p_{40+19} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{59+1} \right)$$

$${}_{19|}a_{40} = v^{20} {}_{20}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{59+1} \right) = {}_{20|}\ddot{a}_{40}$$

EXEMPLO 3: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. em fluxo de caixa **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado.

$${}_{19|}a_{40} = \sum_{t=19+1} v^t {}_t p_{40} = \sum_{t=20} v^t {}_t p_{40} = {}_{20|}\ddot{a}_{40}$$

Anuidades Diferidas-Seguro misto

O produto atuarial apresentado como seguro dotal misto, pode ser combinado ao conceito de anuidades e gerar uma nova modalidade de seguros mistos, no qual o benefício pago em caso de sobrevivência do segurado pode ser substituído por anuidades certas ou vitalícias*.

EXEMPLO 4: Qual é o valor do prêmio puro único de um seguro feito por uma pessoa de 40 anos que em caso de morte dentro de um período de 25 anos deixará um benefício unitário, e caso sobreviva terá direito a uma **renda certa** também unitária em fluxo de caixa postecipado por 20 anos. Considere a tábua de mortalidade AT-49 masculina e uma taxa de juros de 3% ao ano.



EXEMPLO 4

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0, 1, 2, \dots, 24 \\ v^{25+1} \left(\frac{1 - v^{20}}{1 - v} \right) & T \geq 25 \end{cases}$$

$$\Pi = E(Z_{T_{40}}) = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1} P(T_{40} = t) + \sum_{t=25}^{\omega-40} v^{25+1} \left(\frac{1 - v^{20}}{1 - v} \right) P(T_{40} = t)$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1} {}_t p_{40} q_{40+t} + v \left(\frac{1 - v^{20}}{1 - v} \right) \left(v^{25} \sum_{t=25}^{\omega-40} P(T_{40} = t) \right)$$

$$\Pi = A_{40:1:\overline{25}|} + a_{\overline{20}|} (A_{40:\overline{25}|^1})$$

EXEMPLO 5: Considere que no exemplo 4 o segurado tenha interesse no dotal misto, porém em caso de sobreviver a cobertura (25 anos) ele terá direito a **renda vitalícia** (anuidade postecipada) unitária. Considere novamente a tábua de mortalidade AT-49 masculina e a taxa de juros de 3% ao ano.



EXEMPLO 5: $x = 40$, $n = 25$

$$z_{T_{40}} = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0, 1, 2, \dots, 24 \\ {}_{25|}a_{\overline{T_{40}-25|}} & T \geq 25 \end{cases}$$

$$\Pi = E(z_{T_{40}}) = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1} {}_t p_{40} q_{40+t} + \sum_{t=25+1}^{\omega-40-25} v^t {}_t p_{40}$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1} {}_t p_{40} q_{40+t} + v^{25} {}_{25} p_{40} \left(\sum_{t=1}^{\omega-65} v^t {}_t p_{65} \right)$$

$$\Pi = A_{40:1:\overline{25|}} + {}_{25|}a_{40}$$

Anuidades Diferidas Temporárias

VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento **antecipado**, $b = 1 u.m.$

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} = {}_mE_x \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{x+m}$$

VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento **postecipado**, $b = 1 u.m.$

$${}_m|a_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x a_{x+m:\overline{n}|} = {}_mE_x \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_{x+m}$$

EXEMPLO 6: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 *u.m.* no período de 3 anos. No entanto essa anuidade é diferida por 3 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% ao ano. Calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido, **antecipado** e **postecipado**.

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = {}_3E_{40}\ddot{a}_{43:\overline{3}|}$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^3 {}_3p_{40} \sum_{t=0}^{3-1} v^t {}_tp_{43}$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^3 {}_3p_{40}(1 + v {}_1p_{43} + v^2 {}_2p_{43})$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{40}p_{41}p_{42} \left[1 + \left(\frac{1}{1,05}\right) p_{43} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{43}p_{44}\right]$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} \approx 2,457604$$

SOLUÇÃO: Pagamento **postecipado**, $b = 1 \text{ u.m}$, $m = 3$, $n = 3$, $i = 0,05$

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |

$${}_3|a_{40:\overline{3}|} = {}_3E_{40}a_{43:\overline{3}|}$$

$${}_3|a_{40:\overline{3}|} = v^3 {}_3p_{40} \sum_{t=1}^3 v^t {}_tp_{43}$$

$${}_3|a_{40:\overline{3}|} = v^3 {}_3p_{40} (v {}_1p_{43} + v^2 {}_2p_{43} + v^3 {}_3p_{43})$$

$${}_3|a_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}_3p_{40} {}_1p_{41} {}_1p_{42} \left[\left(\frac{1}{1,05}\right) {}_1p_{43} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}_2p_{43} {}_1p_{44} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}_3p_{43} {}_2p_{44} {}_1p_{45} \right]$$

$${}_3|a_{40:\overline{3}|} \approx 0,8591533 \times 2,71444$$

$${}_3|a_{40:\overline{3}|} \approx 2,33212$$

EXEMPLO 7 Mostre um exemplo que verifica-se a relação:

$${}_{m+1}| \ddot{a}_{x:\bar{n}}| = {}_m| a_{x:\bar{n}}|$$

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | \ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | \ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$${}_m | \ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_m | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$${}_{m+1} | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m | a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t E_x = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_x$$

$${}_m | a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$${}_m | a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m | a_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_m | a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

