

Teoria do Risco

Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Modelos de Risco

- No contexto da teoria do Risco aplicada, há questões de importância central e de grande implicância para um segurador, das quais destacam-se as seguintes:
 - Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?
 - Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma dada margem de segurança?

Modelos de Risco

- ...A teoria do risco busca estabelecer um modelo de tarifação eficiente para a seguradora frente aos sinistros.
- Modelo de Risco Individual Anual.
- Modelo de Risco Coletivo Anual

Modelo de Risco Individual

- O modelo de Risco individual estabelece um modelo de probabilidade para o valor total das indenizações de uma carteira,
- Baseado na soma das diferentes distribuições dos sinistros individuais no intuito de se obter uma distribuição de probabilidades para os danos agregados.

Modelo de Risco Individual

- Para fins de simplificação deste modelo é estabelecida as seguintes premissas:
 - Em cada **apólice** ocorrerá somente um **sinistro** no ano de avaliação.
 - A ocorrência de um sinistro não influi em qualquer outro risco do conjunto segurado.

Modelo de Risco Individual

➤ Este modelo considera que para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ apólices, os sinistros sob forma agregada serão denominados:

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$S_{ind.}$ \Rightarrow Valor total das indenizações na carteira em 1 ano.

X_{is} \Rightarrow V.a. associada ao sinistro da apólice i em 1 ano (montante de sinistro, sinistralidade da apólice i).

n \Rightarrow Número fixo de apólices independentes.

Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n var(X_i)$$

Modelo de Risco Individual

➤ A relevância do modelo reside fundamentalmente no fato de que as apólices têm abordagens independentes.

$q_i \Rightarrow$ A probabilidade de ocorrência de um sinistro em um ano de vigência da apólice i .

$B_i \Rightarrow$ Variável aleatória relativa ao valor da indenização de cada apólice i .

Modelo de Risco Individual

A fim de simplificar os conceitos, X_i será definido como:

$$X_i = I_i B_i$$

em que I_i é uma variável dicotômica indicadora da ocorrência de um sinistro com distribuição *Bernoulli*(q_i).

$$I_i = \begin{cases} 1, & q_i \\ 0, & 1 - q_i \end{cases}$$

A variável aleatória B_i é definida por $(X_i | I_i = 1)$.

$$E(I_i) = q_i \quad \text{var}(I_i) = q_i(1 - q_i)$$

Modelo de Risco Individual

- Um seguro de veículos cuja cobertura é apenas o furto ou o microsseguro que cobre perdas de pequenos objetos em viagens como malas, máquinas fotográficas entre outros, são exemplos simples para o caso em que B_i assume apenas um único valor.
- Dessa forma também podem-se estabelecer outras relações:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - q & x = 0 \\ q & x = B \end{cases}$$

$$E(X) = Bq \quad \text{var}(X) = B^2q(1 - q)$$

EXEMPLO 1: Calcule o valor do prêmio através do princípio do desvio padrão de um seguro que paga \$30000,00 caso o veículo seja furtado. Considere a probabilidade de furto do veículo igual a 0,007 e $\beta = 0,7$.

$$\Pi_X = E(X) + \sigma_X \beta.$$

Solução

$$E(X) = 30000(0,007) = \$ 210,00$$

$$var(X) = 30000^2(0,007)(0,993) = \$ 6255900,00$$

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} = \$2501,18$$

Logo

$$\Pi_X = 210 + 2501,18 \times 0,7 = \$1960,83$$

Modelo de Risco Individual

Pode-se estabelecer S_{ind} como:

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n I_i B_i$$

Sendo $P(I_i = 1) = q_i$ e $P(I_i = 0) = 1 - q_i$. Logo:

$$E(S_{ind.}) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n E(I_i B_i)$$

$$var(S_{ind.}) = \sum_{i=1}^n var(X_i) = \sum_{i=1}^n var(I_i B_i)$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

No modelo de risco individual, N será definido como:

$$N = \sum_{i=1}^n I_i$$

Logo :

$$N \sim \text{Binomial}(n, q)$$

$$E(N) = nq$$

$$\text{var}(N) = nq(1 - q)$$

EXEMPLO 2: Considere que em uma carteira de seguros exista 10000 apólices, onde cada uma possui uma probabilidade de sinistros de 0,01.

Calcule o número esperado de sinistros em 1 ano e o respectivo desvio padrão.

SOLUÇÃO

$$N \sim \text{Binomial}(10000; 0,01)$$

$$E(N) = 10000 \times 0,01 = 100$$

$$\sigma_N = \sqrt{10000 \times 0,01 \times 0,99} \approx 9,94$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

- A aproximação da distribuição de N :
 - Distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = nq$ ou
 - Normal com parâmetros $E(N) = nq$ e $var(N) = nq(1 - q)$,
- para o caso de n suficientemente grande.

EXEMPLO 3: Para os dados do exemplo anterior calcule a probabilidade de que em 10000 apólices verificadas ocorra no máximo 120 sinistros. Calcule utilizando o modelo binomial e suas aproximações pelo modelo de Poisson e Normal.

$$N \sim B(n = 10000, q = 0,01)$$

$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \binom{10000}{k} 0,01^k (0,99)^{10000-k} \approx \mathbf{0,9778855}$$

$$N \sim Po(nq = 100)$$

$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \frac{100^k e^{-100}}{k!} \approx \mathbf{0,9773307}$$

$$N \sim N(nq = 100, nq(1 - q) = 99)$$

$$P(N \leq 120) = \int_0^{120} \frac{e^{-\frac{(n-100)^2}{198}}}{\sqrt{198\pi}} dn \approx \mathbf{0,9777884}$$

Modelos de risco Individual –A distribuição de X_i

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \sum_{k=0}^1 P(X_i \leq x_i, I_i = k)$$

Assim:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i | I = 1)P(I_i = 1) + P(X_i \leq x_i | I_i = 0)P(I_i = 0)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0, \infty)}(x_i)$$

em que x_i corresponde a um possível valor de X_i e representa o valor da indenização paga em caso de ocorrência do sinistro

EXEMPLO 4: Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de \$10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de \$5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002 , respectivamente. Determinar os modelos probabilísticos de I_i, B_i e X_i .

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		I_1	B_1
\$0,00	0,9988		
\$5000,00	0,0002		
\$10000,00	0,001		

$$E(X_1) = 0 \times 0,9988 + 5000 \times 0,0002 + 10000 \times 0,001 = \$11,00$$

$$var(X_1) = (0^2 \times 0,9988 + 5000^2 \times 0,0002 + 10000^2 \times 0,001) - 11,00^2 = \2104879,00$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		B_1
\$0,00	0,9988	0	0,9988	
\$5000,00	0,0002			
\$10000,00	0,001	1	0,0012	

$$E(X_1) = \$11,00$$

$$E(I_1) = 0,0012$$

$$var(X_1) = \$^2 104879,00$$

$$var(I_1) = 0,0012 \times 0,9988 = 0,001199$$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		$B_1 = X_1 I_1 = 1$
\$0,00	0,9988	0	0,9988	
\$5000,00	0,0002			$\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$
\$10000,00	0,001	1	0,0012	$\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$

$$E(X_1) = \$11,00$$

$$E(I_1) = 0,0012$$

$$var(X_1) = \$^2 104879,00$$

$$var(I_1) = 0,001199$$

$$E(B_1) = (0,833) \$10000,00 + (0,167) R\$5000,00 = \$9166,67$$

$$var(B_1) = [0,833(\$10000,00)^2 + 0,167(\$5000,00)^2] - \$9166,67^2 = \$^2 3497768$$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		$B_1 = X_1 I_1 = 1$
\$0,00	0,9988	0	0,9988	
\$5000,00	0,0002			$\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$
\$10000,00	0,001	1	0,0012	$\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$

$$E(X_1) = \$11,00$$

$$E(I_1) = 0,0012$$

$$E(B_1) = \$9166,67$$

$$var(X_1) = \$^2 104879,00$$

$$var(I_1) = 0,001199$$

$$var(B_1) = \$^2 3497768$$

$$\sigma_{X_1} = \$ 323,85$$

$$\sigma_{I_1} = 0,034$$

$$\sigma_{B_1} = \$ 1870,232$$

$$CV_{X_1} = 29,44$$

$$CV_{I_1} = 0,9991667$$

$$CV_{B_1} = 0,2040252$$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		$B_1 = X_1 I_1 = 1$	
\$0,00	0,9988	0	0,9988		
\$5000,00	0,0002	1	0,0012	\$5000,00	$\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$
\$10000,00	0,001			\$10000,00	$\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0,9988, & \text{se } 0 \leq x < 5000 \\ 0,999, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000. \end{cases}$$

$$F_{B_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 5000 \\ 0,167, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000 \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0,\infty)}(x_i)$$

$$F_{X_i}(x) = \left(\begin{cases} 0, & \text{se } x < 5000 \\ 0,167, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000 \end{cases} \right) 0,0012 + 0,9988 I_{(0,\infty]}(x)$$

EXEMPLO 5: Um seguro agrícola cobre toda a perda de uma plantação em caso de geada e seca prolongada. Considerando que esses eventos ocorrem com 1% de probabilidade, e que o valor das indenizações paga pela seguradora seja modelado pela seguinte função de densidade:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0,99 & \text{se } x_i = 0 \\ 0,002e^{-0,2x_i} & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre a distribuição de X_i , no caso da ocorrência do sinistro (em milhões de reais). Encontre a função de distribuição de X_i , obtenha também o modelo probabilístico de I_i .

SOLUÇÃO

Observe que $X_i = 0$ se $I_i = 0$, o que implica que $P(X_i = 0) = P(I_i = 0) = 0,99$, e de imediato temos que $I_i \sim \text{Bernoulli}(0,01)$.

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \int_0^{x_i} 0,002e^{-0,2z} dz$$

SOLUÇÃO

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \int_0^{x_i} 0,002e^{-0,2z} dz$$

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \left[-\frac{0,002}{0,2} e^{-0,2x_i} - \left(-\frac{0,002}{0,2} e^{-0,2 \times 0} \right) \right]$$

$$F_{X_i}(x_i) = 1 - 0,01e^{-0,2x_i}$$

SOLUÇÃO

A partir das informações dadas no enunciado do exemplo temos que:

$$f_{B_i}(x_i) = f_{X_i|I_i=1}(x_i|I_i = 1) = \frac{f_{X_i,I_i=1}(x_i, I_i = 1)}{P(I_i = 1)}$$

$$f_{B_i}(x_i) = \frac{0,002e^{-0,2x_i}}{0,01} = 0,2e^{-0,2x_i}, \quad x_i > 0$$

Assim

$$F_{B_i}(x_i) = \int_0^{x_i} 0,2e^{-0,2z} dz = \left[-\frac{0,2}{0,2} e^{-0,2x_i} - \left(-\frac{0,2}{0,2} e^{-0,2 \times 0} \right) \right]$$

$$F_{B_i}(x_i) = 1 - e^{-0,2x_i}$$

$$B_i \sim \text{Exp}(0,2)$$

SOLUÇÃO

X	I	B
$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0,99, & \text{se } x_i = 0 \\ 0,002e^{-0,2x_i}, & \text{se } x_i > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$	$P(I_i = 0) = 0,99$ $P(I_i = 1) = 0,01$	$f_{B_i}(x) = 0,2e^{-0,2x_i}, x_i > 0$
$E(X_i) = 0,05$	$E(I_i) = 0,01$	$E(B_i) = 5$
$var(X_i) \approx 0,4950$	$var(I_i) = 0,0099$	$var(B_i) = 25$
$F_{X_i}(x_i) = (1 - e^{-0,2x_i})0,01 + 0,99I_{(0,\infty]}(x_i)$		

Modelos de risco Individual – A distribuição de X_i

É fácil perceber que:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 - q_i), & \text{se } x_i = 0 \\ q_i f_{B_i}(x), & \text{se } x_i > 0. \end{cases}$$

Pois,

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0,99 & ; & (1 - 0,01) & ; \text{ se } x_i = 0 \\ 0,002e^{-0,2x_i} & ; & 0,01 \times 0,2e^{-0,2x} & ; \text{ se } x_i > 0 \\ 0 & & & \text{c.c.} \end{cases}$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

