Teoria do Risco
Aula 3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Função de Distribuição

- Um fenômeno aleatório ou estocástico é descrito minimamente por uma distribuição de probabilidade.
  - Indexa parâmetros e campos de variação.

- O conhecimento do modelo e suas principais características permite ao pesquisador ter uma clara visão do uso adequado dos mesmos.

Importantes modelos discretos

Distribuição Uniforme discreta

$Y \sim U_d(E)$, com "E" sendo o conjunto de seus valores.

$$P(Y = y) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\ldots,N\}}(y)$$

Todos os possíveis valores da variável são equiprováveis.

$Y \sim U_d(1, N)$

$$E(Y) = \frac{N+1}{2} \qquad var(Y) = \frac{N^2-1}{12}$$

* *Modelagem de sorteios*

Distribuição de Bernoulli

$Y \sim Bernoulli(q)$

$$P(Y = y) = q^y (1 - q)^{1-y} I_{\{0,1\}}(y)$$

Uma variável aleatória que segue o modelo Bernoulli, assume apenas os valores 0 ou 1.

$$E(Y) = q \qquad var(Y) = q(1 - q)$$

- *Experimentos que admitem somente dois resultados*
- *Modelos de preferencia.*

Distribuição Binomial

Considerando uma sequência de n ensaios de Bernoulli, a observação conjunta de vários desses ensaios leva à definição da distribuição Binomial.

Exemplo:

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1-q$ (fracasso). Qual o modelo de probabilidade para o número de coroas?

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1-q)^4$	$\binom{4}{0}q^0(1-q)^4$
Coroa	Cara	Cara	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Coroa	Cara	Cara	1	$q^1(1-q)^3$	$\binom{4}{1}q^1(1-q)^3$
Cara	Cara	Coroa	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	Cara	Coroa		$q^1(1-q)^3$	
Coroa	Coroa	Cara	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Coroa	Cara	Coroa	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Coroa	Cara	Cara	Coroa	2	$q^2(1-q)^2$	$\binom{4}{2}q^2(1-q)^2$
Cara	Coroa	Cara	Coroa		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Cara	Coroa	Coroa		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Coroa		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	Cara	Coroa	Coroa	3	$q^3(1-q)^1$	$\binom{4}{3}q^3(1-q)^1$
Coroa	Coroa	Cara	Coroa		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Cara		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Coroa	4	$q^4(1-q)^0$	$\binom{4}{4}q^4(1-q)^0$

Distribuição Binomial

Seja Y o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes. Então é $Y \sim B(n, q)$.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y)$$

$$E(Y) = nq \qquad var(Y) = nq(1 - q)$$

- *Frequência de sinistros.*

Distribuição de Poisson

Sendo a ocorrência do evento em estudo um evento raro, o cálculo através do modelo binomial se torna extremamente laborioso

$Y \sim Po\ (\lambda)$.

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} I_{\{0,1,\dots\}}(y)$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

$$E(Y) = \lambda \qquad var(Y) = \lambda$$

- Eventos que ocorrem num dado período de tempo, independentemente de quando ocorreu o último evento.

Importantes modelos discretos

- **Distribuição Geométrica.** $Y \sim G(q)$

$$P(Y = y) = q(1-q)^{y-1}$$

$$E(Y) = \frac{1}{q} \qquad var(Y) = \frac{1-q}{q}$$

- **Distribuição Binomial Negativa** $Y \sim BN(r, q)$

$$P(Y = y) = \binom{y+r-1}{y} q^r (1-q)^y$$

$$E(Y) = \frac{r(1-q)}{q} \qquad var(Y) = \frac{r(1-q)}{q^2}$$

Importantes modelos discretos

$$
\begin{tikzcd}
Y \sim G(q) \arrow[r, shift left, "\sum Y"] & X \sim BN(r,q) \arrow[l, shift left, "r = 1"] \arrow[d, "\lambda = \frac{r}{q}" ', "r \to \infty"] \\
W \sim B(n,q) \arrow[r, "\lambda = nq", "n \to \infty" '] \arrow[d, "n = 1"] & Y \sim Po\ (\lambda) \\
W_1 \sim Bernoulli(q) &
\end{tikzcd}
$$

Importantes modelos contínuos

Distribuição Uniforme contínua

$Y \sim U_c(a,b)$

$$f(y) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(y)$$

No intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, todos os sub-intervalos com mesmo comprimento tem a mesma probabilidade.

$$E(Y) = \frac{a+b}{2} \qquad var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(y) = \frac{y-a}{b-a} I_{[a,b]}(y) + I_{[b,\infty)}(y).$$

Distribuição Exponencial

Importante função de distribuição utilizadas na modelagem de dados que representam o tempo até a ocorrência pela primeira vez de algum vento de interesse,

Tempo de falha de um componente eletrônico.

Tempo de ocorrência de indenização em uma seguradora.

Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas.

Intervalos entre chegadas de chamadas telefônicas a uma central.

Boas propriedades matemáticas.

Distribuição Exponencial

$Y \sim Exp(\lambda)$

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y} I_{[0,\infty)}(y)$$

O parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância ou volume, entre outras.

$$F(y) = \left(1 - e^{-\lambda y}\right) I_{(0,\infty)}(y)$$

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \qquad var(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuição Normal

→A grande maioria das técnicas empregadas é baseada na distribuição normal.

→Inúmeros fenômenos alheatórios podem ser descritos precisa ou aproximadamente por este modelo.

→Essa distribuição é a forma limitante de outras distribuições de probabilidade, como consequência do teorema centro do limite.

→Muitas estatísticas apresentam normalidade assintótica.

Distribuição Normal

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

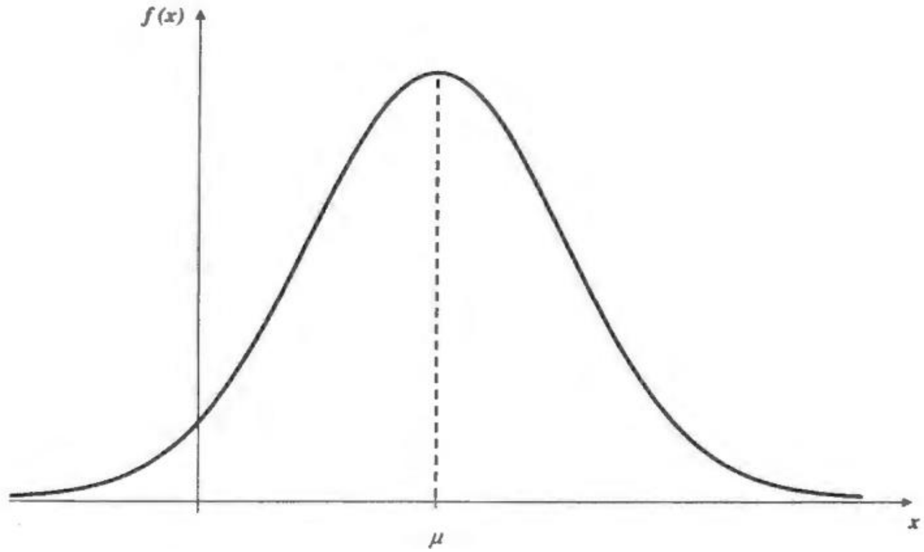
$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(-\infty,\infty)}(y)$$

com $\mu, \sigma, y \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Os parâmetros μ, σ^2 são respectivamente, a média e a variância da variável.

$$E(Y) = \mu \qquad var(Y) = \sigma^2$$

Distribuição Normal



Simétrica ao redor de μ e vai diminuindo a massa de probabilidade, à medida que seus valores se movem para as extremidades.

Adequado para várias quantidades envolvendo medidas populacionais:

Peso, Altura, Dosagem De Substâncias No Sangue, Entre Outras.

Distribuição Normal

- A função de distribuição da $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ não tem uma forma fechada.
  - Não possui primitiva.

- Os valores de probabilidade são obtidos por integração numérica e apresentados em tabela.

- Basta, tabelar as probabilidades para $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Uma transformação linear de Y é feita nesse sentido.

$$Y = \sigma Z + \mu$$

Sendo $Z \sim N(0,1)$

Distribuição Normal

Sendo $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ terá distribuição $N(0,1)$.

$$P(Y \leq y) = P\left(Z \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$$

A distribuição $N(0,1)$ é denominada Normal Padrão ou Normal Reduzida.

Distribuição Normal

$$P(a < Y < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < Y < b) = F_Y\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Y\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Pareto

- $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$

$$f(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0\ (\alpha, \beta > 0)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)} \qquad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$$

- Utilizada no seguro de incêndio vultoso, e resseguro de catástrofe.

Lognormal

- $Y \sim LN(\mu, \beta)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2y\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(y)$$

$$E(Y) = e^{\mu+\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \qquad var(Y) = e^{2(\mu+\sigma^2)}$$

- Utilizada nos seguros de automóveis e incêndio comum.