07/2024

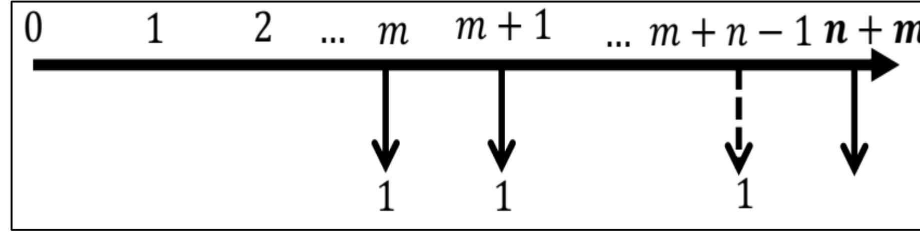
Matemática atuarial

Anuidade diferida (aula14)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

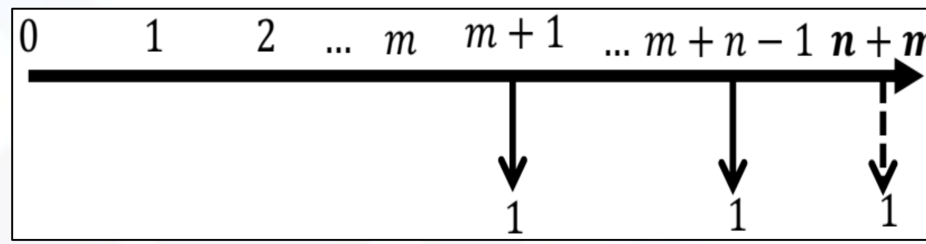
➢Fluxo Antecipado



$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{m} + v^{m+1} + v^{m+2} + \cdots + v^{m+n-1}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{m}\frac{1 - v^{n}}{1 - v}$$

➢Fluxo Postecipado



$$_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \cdots + v^{m+n}$$

$$_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m}v\left(\frac{1 - v^{n}}{1 - v}\right)$$

- Fluxo Antecipado

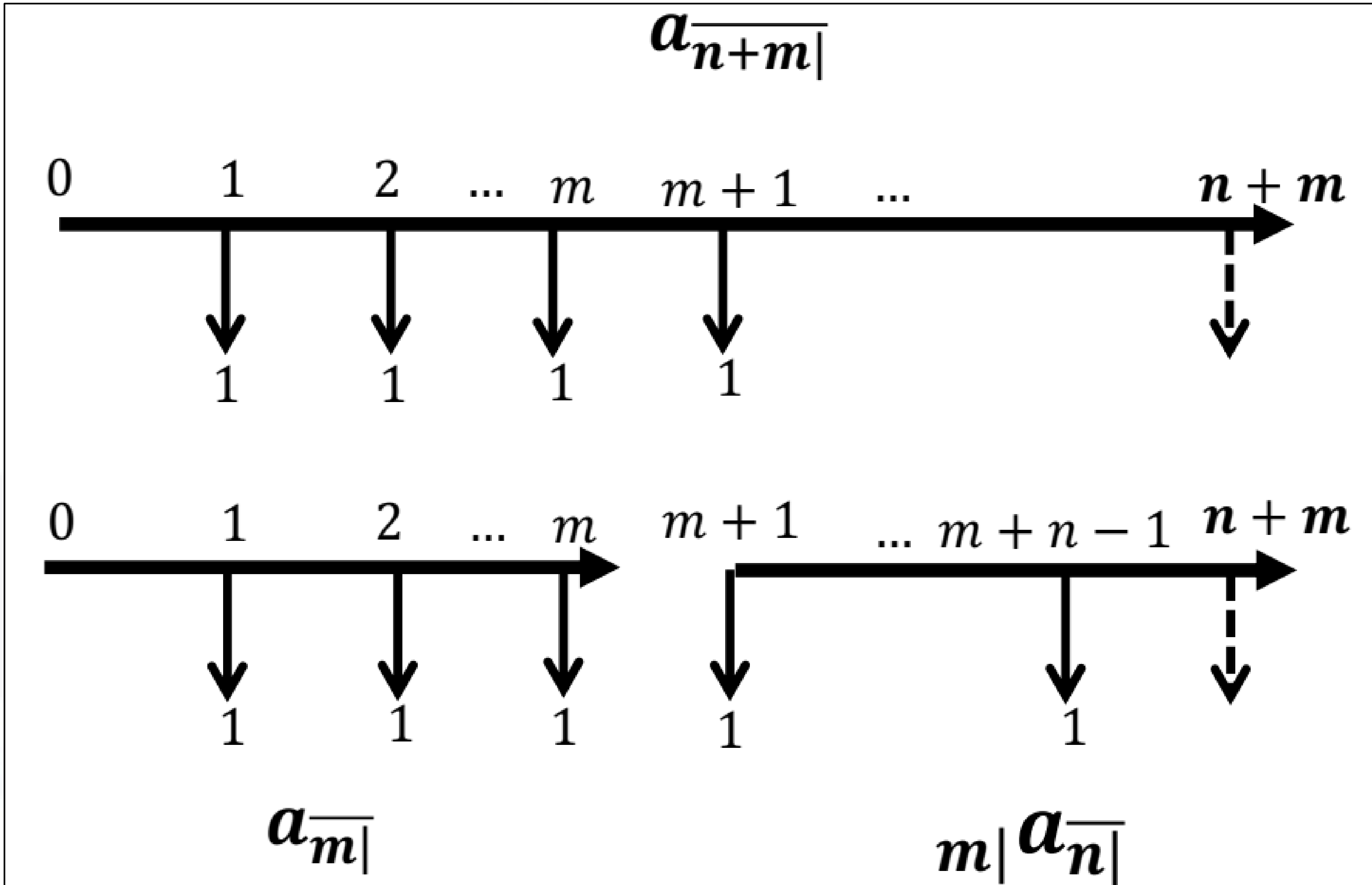
$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^m \frac{1-v^n}{1-v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n|}} \qquad (m=0) \rightarrow \qquad \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{1-v} $$

- Fluxo Postecipado

$$ {}_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1}\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right) = v^m a_{\overline{n|}} \qquad (m=0) \rightarrow \qquad a_{\overline{n|}} = v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right) $$

$$ \boldsymbol{{}_{m+1|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = {}_{m|}a_{\overline{n|}}} $$

Anuidades


$a_{\overline{n+m|}}$
0
1
2
...
m
$m+1$
...
$n+m$
1
1
1
1
0
1
2
...
m
$m+1$
...
$m+n-1$
$n+m$
1
1
1
1
1
$a_{\overline{m|}}$
$_{m|}a_{\overline{n|}}$

- FLUXO ANTECIPADO

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^m \frac{1-v^n}{1-v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n+m|}} - \ddot{a}_{\overline{m|}}$$

- FLUXO POSTECIPADO

$$_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1}\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right) = v^m a_{\overline{n|}}$$

$$_{m|}a_{\overline{n|}} = a_{\overline{n+m|}} - a_{\overline{m|}}$$

EXEMPLO 1: Uma loja de departamentos está vendendo um conjunto de cadeiras. A forma de pagamento proposta pela loja consiste 8 prestações de $\$\,6000{,}00$ e só comece a pagar a partir do início do 4° ano após adquirir o produto, considerando uma taxa de juros de $1{,}25\%$ ao ano, em regime de juros compostos. Determine o quanto custaria essas cadeiras caso o pagamento fosse a vista.

SOLUÇÃO

$$ {}_{4|}\ddot{a}_{\overline{8}|} = v^4 \frac{1 - v^8}{1 - v} \approx 7{,}29127 $$

Assim o valor das cadeiras a vista é dado por:

$$ 6000 \times {}_{4|}\ddot{a}_{\overline{8}|} \approx \$43747{,}62 $$

SOLUÇÃO (Caso Postecipado)

$$ {}_{4|}a_{\overline{8|}} = v^5\left(\frac{1-v^8}{1-v}\right) \approx 7{,}201254 $$

$$ 6000 \times {}_{4|}\, a_{\overline{8|}} \approx \$43207{,}52 $$

Anuidades Diferidas

Na prática, planos de aposentadoria são comprado anos antes do início dos recebimentos dos benefícios.

- Anuidades diferidas são pagas passado um determinado prazo, diferentemente das anuidades imediatas.

- Caso o participante faleça antes do início do recebimento da anuidade (antes de aposentadoria) a seguradora não terá que pagar nada ao segurado (considerando que não existe reversão para pensão).

Anuidades vitalícias Diferidas, Antecipado

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}} = v^m \ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E\left({}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}\right) = {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^m \frac{1-v^{t-m+1}}{1-v}\, {}_tp_x\, q_{x+t} = \sum_{t=m}^{\omega-m-x} v^t\, {}_tp_x$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Antecipado

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}} = v^m \ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-m-x} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\omega-m-x} v^{t+m} \, {}_{t+m}p_x$$

Lembrando que ${}_{t+m}p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-m-x} v^t v^m \, {}_mp_x \, {}_tp_{m+x} = v^m \, {}_mp_x \sum_{t=0}^{\omega-m-x} v^t \, {}_tp_{m+x}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Postecipado

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}} = v^m a_{\overline{T_x - m|}} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E\left({}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}}\right) = {}_{m|}\,a_x = \sum_{t=m}^{\omega - x - m} v^{m+1}\left(\frac{1 - v^{t-m}}{1 - v}\right){}_t p_x\, q_{x+t} = \sum_{t=m+1}^{\omega - m - x} v^t\, {}_t p_x$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Postecipado

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}} = v^m a_{\overline{T_x - m|}} & T_x \geq m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-m-x} v^t \, {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\omega-m-x} v^{t+m} \, {}_{t+m}p_x$$

Lembrando que ${}_{t+m}p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$${}_{m|}a_x = \sum_{t=1}^{\omega-m-x} v^t v^m \, {}_m p_x \, {}_t p_{m+x} = v^m \, {}_m p_x \sum_{t=1}^{\omega-m-x} v^t \, {}_t p_{m+x}$$

$${}_{m|}a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

- FLUXO ANTECIPADO

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}, & T_x \geq m \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^m \frac{1-v^{t-m+1}}{1-v}\; {}_tp_x\, q_{x+t}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t\; {}_tp_x = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

- FLUXO POSTECIPADO

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}a_{\overline{T_x-m|}}, & T_x \geq m \\ 0\,, & \text{caso contário} \end{cases}$$

$${}_{m|}a_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^{m+1} \left(\frac{1-v^{t-m}}{1-v}\right) {}_tp_x\, q_{x+t}$$

$${}_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t\; {}_tp_x = {}_mE_x a_{x+m}$$

$${}_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

EXEMPLO 2: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 20 anos, que paga 1 *u.m.* em fluxo de caixa **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$$_{20|}\ddot{a}_{40} = \sum_{t=20}^{\omega-60} v^t \, _tp_{40}$$

$$_{20|}\ddot{a}_{40} = {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60} = v^{20} \, _{20}p_{40}\left(\sum_{t=0}^{\omega-60} v^t \, _tp_{60}\right)$$

EXEMPLO 3: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. em fluxo de caixa **postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$$_{19|}a_{40} = v^{19}\ _{19}p_{40}\left(\sum_{t=1} v^t\ _tp_{59}\right)$$

$$_{19|}a_{40} = v^{19}\ _{19}p_{40}\left(\sum_{t=0} v^{t+1}\ _{t+1}p_{59}\right) = v^{19}\ _{19}p_{40}\left(\sum_{t=0} v^t v^1\ _1p_{59}\ _tp_{59+1}\right)$$

$$_{19|}a_{40} = v^{19}\ _{19}p_{40} v^1\ _1p_{59}\left(\sum_{t=0} v^t\ _tp_{59+1}\right) = v^{20}\ _{19}p_{40}\ _1p_{40+19}\left(\sum_{t=0} v^t\ _tp_{59+1}\right)$$

$$_{19|}a_{40} = v^{20}\ _{20}p_{40}\left(\sum_{t=0} v^t\ _tp_{59+1}\right) = {}_{20|}\ddot{a}_{40}$$

EXEMPLO 3: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. em fluxo de caixa **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado.

$$_{19|}a_{40} = \sum_{t=19+1} v^t \ _tp_{40} = \sum_{t=20} v^t \ _tp_{40} = \ _{20|}\ddot{a}_{40}$$

Anuidades Diferidas-Seguro misto

O produto atuarial apresentado como seguro dotal misto, pode ser combinado ao conceito de anuidades e gerar uma nova modalidade de seguros mistos, no qual o benefício pago em caso de sobrevivência do segurado pode ser substituído por anuidades certas ou vitalícias*.

EXEMPLO 4: Qual é o valor do prêmio puro único de um seguro feito por uma pessoa de 40 anos que em caso de morte dentro de um período de 25 anos deixará um benefício unitário, e caso sobreviva terá direito a uma **renda certa** também unitária em fluxo de caixa postecipado por 20 anos. Considere a tábua de mortalidade AT-49 masculina e uma taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 4

$$z_{T_{40}} = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0,1,2\ldots,24 \\ v^{25+1}\left(\dfrac{1-v^{20}}{1-v}\right) & T \geq 25 \end{cases}$$

$$\Pi = E\left(z_{T_{40}}\right) = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1}\, P(T_{40}=t) + \sum_{t=25}^{\omega-40} v^{25+1}\left(\frac{1-v^{20}}{1-v}\right) P(T_{40}=t)$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1}\; {}_{t}p_{40}\, q_{40+t} + v\left(\frac{1-v^{20}}{1-v}\right)\left(v^{25}\sum_{t=25}^{\omega-40} P(T_{40}=t)\right)$$

$$\Pi = A_{40^{1}:\overline{25|}} + a_{\overline{20|}}\left(A_{40:\overline{25|}^{1}}\right)$$

EXEMPLO 5: Considere que no exemplo 4 o segurado tenha interesse no dotal misto, porém em caso de sobreviver a cobertura (25 anos) ele terá direito a **renda vitalícia** (anuidade postecipada) unitária. Considere novamente a tábua de mortalidade AT-49 masculina e a taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 5: $x = 40 \;, n = 25$

$$z_{T_{40}} = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0,1,2\ldots,24 \\ {}_{25|}a_{\overline{T_{40}-25|}} & T \geq 25 \end{cases}$$

$$\Pi = E\left(z_{T_{40}}\right) = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1}\;{}_{t}p_{40}\,q_{40+t} + \sum_{t=25+1}^{\omega-40-25} v^{t}\;{}_{t}p_{40}$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1}\;{}_{t}p_{40}\,q_{40+t} + v^{25}\;{}_{25}p_{40}\left(\sum_{t=1}^{\omega-65} v^{t}\;{}_{t}p_{65}\right)$$

$$\Pi = A_{40^{1}:\overline{25|}} + {}_{25|}a_{40}$$

Anuidades Diferidas Temporárias

VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento antecipado, $b = 1\,u.m.$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = {}_{m}E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = {}_{m}E_x \sum_{t=0}^{n-1} v^t \; {}_{t}p_{x+m} $$

VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento postecipado, $b = 1\,u.m.$

$$ {}_{m|}a_{x:\bar{n}|} = {}_{m}E_x a_{x+m:\bar{n}|} = {}_{m}E_x \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_{t}p_{x+m} $$

EXEMPLO 6: Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 *u.m.* no período de 3 anos. No entanto essa anuidade é diferida por 3 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% ao ano. Calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido, antecipado e postecipado.

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = {}_{3}E_{40}\ddot{a}_{43:\overline{3}|}$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^3\ {}_{3}p_{40} \sum_{t=0}^{3-1} v^t\ {}_{t}p_{43}$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^3\ {}_{3}p_{40}(1 + v\ p_{43} + v^2\ {}_{2}p_{43})$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{40}p_{41}p_{42}\left[1 + \left(\frac{1}{1,05}\right) p_{43} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{43}p_{44}\right]$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} \approx 2,457604$$

SOLUÇÃO: Pagamento postecipado, $b = 1\,u.m,\quad m = 3, n = 3,\quad i = 0{,}05$

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = {}_3E_{40}\, a_{43:\overline{3}|}$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = v^3\, {}_3p_{40} \sum_{t=1}^{3} v^t\, {}_tp_{43}$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = v^3\, {}_3p_{40}(v\, p_{43} + v^2\, {}_2p_{43} + v^3\, {}_3p_{43})$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{40}p_{41}p_{42}\left[\left(\frac{1}{1{,}05}\right) p_{43} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 p_{43}p_{44} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{43}p_{44}p_{45}\right]$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} \approx 0{,}8591533 \times 2{,}71444$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} \approx 2{,}33212$$

EXEMPLO 7 Mostre um exemplo que verifica-se a relação:

$$_{m+1|}\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = {}_{m|}a_{x:\bar{n}|}$$

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_t p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_t p_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_t p_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t\ {}_t p_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$_{m+1|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{m|}a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\ {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_t p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_t p_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n}|}\ {}_n p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_t E_x = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_t p_x$$

$$_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t\ {}_t p_x$$

$$_{m|}a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$$_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, **Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.

- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.