

Teoria do Risco

Aula 13

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley/index.html>

Teoria da utilidade

“... a determinação do valor de um item não pode ser baseado no seu preço, mas sim na utilidade que ele fornece. O preço de um item depende somente do próprio item e é igual para todo mundo; a utilidade, contudo depende das circunstâncias particulares do indivíduo que faz a estimativa.” (Bernoulli, 1738)

Teoria da utilidade

- Teoria da utilidade lida com a medida de satisfação relativa.
- ..um valor subjetivo atribuído a um evento, de forma que sua unidade seja uma grandeza com dimensão ordinal.
- Exemplo:

Se atribuir valor 1 ao bem “lápiz” e valor 2 ao bem “caneta”, saberemos que o agente econômica que tem aquela função utilidade prefere caneta a lápis.

Função utilidade

- No que diz respeito a análise de riscos os fundamentos da teoria da utilidade dão um norte a tentativa de responder questões relacionadas ao problema de precificação do seguro.
- ...Fundamentos psicológicos da demanda e oferta de seguros de danos....
- Uma função que mede o valor (utilidade) que um indivíduo atribui a quantidade x (monetária).
 - Expressa em "bem-estar" um montante x de riqueza.

Função utilidade

- Seja X o conjunto de todas as alternativas disponíveis ao agente econômico uma função $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função utilidade se atribuir a cada elemento de X um valor numérico.
- Sendo assim a satisfação que um consumidor (agente de decisão) atribui a um bem de serviço é medida por uma função, $\mu(x)$, que faz uma ordenação dos benefícios ...

Função utilidade

- Existem diversas famílias de funções de utilidades com interessantes aplicações e propriedades como por exemplo:

Utilidade linear: $\mu(x) = x$

Utilidade quadrática: $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, \quad x \leq \alpha$

Utilidade logarítmica: $\mu(x) = \ln(\alpha + x), \quad x > -\alpha$

Utilidade exponencial: $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0$

Utilidade potencial fracionária: $\mu(x) = x^c, \quad x > 0, 0 < c \leq 1$

Função utilidade

➤ ..indivíduos avesso ao risco (agente conservador).

A perda devida a um “mau” resultado não é “compensada” pelo ganho advindo de um “bom” resultado de mesma magnitude.

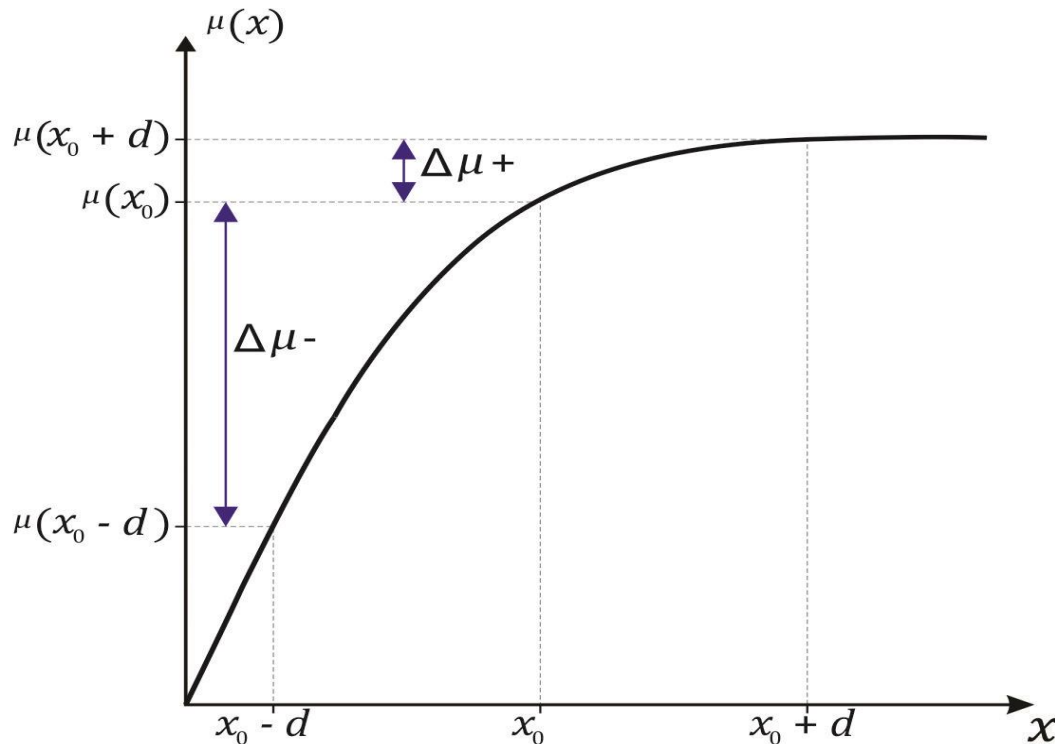
$\mu'(x) > 0$ A utilidade positiva indica que a satisfação aumenta com a riqueza.

$\mu''(x) \leq 0$ Indica a aproximação de ponto de saturação do indivíduo.

Função utilidade

➤ ..indivíduos avesso ao risco (agente conservador).

A perda devida a um "mau" resultado não é "compensada" pelo ganho advindo de um "bom" resultado de mesma magnitude.



$$\mu'(x) > 0$$

$$\mu''(x) < 0$$

Grau de aversão ao risco

- O grau de aversão ao risco ou coeficiente de aversão ao risco, $r(x)$, pode ser definido por:

$$r(x) = -\frac{\mu''(x)}{\mu'(x)}$$

Quanto maior for esse coeficiente, maior será aversão ao risco.

EXEMPLO 1

Considere as seguintes funções de utilidade

$$1) \mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$$

$$2) \mu(x) = \ln(\alpha + x), x > -\alpha$$

$$3) \mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$$

Obtenha o grau de aversão para cada uma dessas funções.

1) $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$

$$\mu'(x) = 2(\alpha - x) \quad \mu''(x) = -2$$

$$r(x) = -\frac{-2}{2(\alpha - x)} = \frac{1}{\alpha - x}$$

2) $\mu(x) = \ln(\alpha + x), x > -\alpha$

$$\mu'(x) = \frac{1}{(\alpha+x)} \quad \mu''(x) = -\frac{1}{(\alpha+x)^2}$$

$$r(x) = -\frac{-\frac{1}{(\alpha+x)^2}}{\frac{1}{(\alpha+x)}} = \frac{1}{\alpha+x}$$

3) $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$

$$\mu'(x) = \alpha^2 e^{-\alpha x} \quad \mu''(x) = -\alpha^3 e^{-\alpha x}$$

$$r(x) = -\frac{-\alpha^3 e^{-\alpha x}}{\alpha^2 e^{-\alpha x}} = \alpha$$

Seguro e utilidade

- Seja $\mu(x)$ como uma função utilidade associada a variável aleatória X , dessa forma a utilidade esperada para X é dada por:

$$E[\mu(X)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i)P(X = x_i), & \text{para } x \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x)f(x)dx, & \text{para } x \text{ contínua.} \end{cases}$$

Seguro e utilidade

- Seja $\mu(x)$ a função utilidade que **o segurado** associa a cada excedente x .
- X representa a variável aleatória associada ao risco (severidade).
- W a riqueza inicial do segurado.
- G o prêmio **aceito como bom pelo segurado** devido a sua utilidade.

$$\mu(W - G) = E[\mu(W - X)]$$

O valor de prêmio que o segurado está disposto a pagar, terá que ser inferior ou igual a utilidade esperada considerando as “perdas” que X pode assumir.

EXEMPLO 2

Seja um segurado com uma função utilidade potencial fracionária:

$$\mu(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Onde a ocorrência dos sinistros obedecem a função uma distribuição Uniforme, $X \sim U_c(0,10)$. Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua utilidade, dado a riqueza inicial do segurado de 10,00 *u.m.*

Solução

Usando $\mu(W - G) = E[\mu(W - X)]$, temos que

$$\mu(10 - G) = E[\mu(10 - X)],$$

$$\sqrt{10 - G} = E(\sqrt{10 - X}),$$

$$\sqrt{10 - G} = \int_0^{10} \frac{(\sqrt{10 - x})}{10} dx,$$

$$10\sqrt{10 - G} = \int_0^{10} (\sqrt{10 - x}) dx.$$

$$u = 10 - x \text{ e } du = -dx,$$

$$10\sqrt{10 - G} = - \int_0^{10} (\sqrt{u}) du$$

$$10\sqrt{10 - G} = -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}^{x=10},$$

$$10\sqrt{10 - G} = -\frac{2}{3} (10 - x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}^{x=10},$$

$$10\sqrt{10 - G} = \frac{2}{3} (10)^{\frac{3}{2}},$$

$$10\sqrt{10 - G} = \frac{2}{3} 10\sqrt{10},$$

$$10 - G = \frac{4}{9} 10,$$

$$-G = \frac{4}{9} 10 - 10,$$

$$\mathbf{G = 5,55.}$$

Seguro e utilidade

Um valor aproximado de G pode ser obtido por

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2} \text{var}(X) r(W - E(X))$$

ou

$$G \approx E(X) - \frac{1}{2} \text{var}(X) \frac{\mu''(W - E(X))}{\mu'(W - E(X))}$$

Demonstração

Usando $\mu(W - G) = E[\mu(W - X)]$, temos pela série de Taylor em torno de $(W - E(X))$ que

$$\mu(W - G) \approx \mu(W - E(X)) + \mu'(W - E(X))(W - G - W + E(X))$$

$$\mu(W - G) \approx \mu(W - E(X)) + \mu'(W - E(X))(E(X) - G)$$

Fazendo o mesmo para $\mu(W - X)$ temos:

$$\begin{aligned} &\mu(W - X) \\ &\approx \mu(W - E(X)) + \mu'(W - E(X))(W - X - W + E(X)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu''(W - E(X))(W - X - W + E(X))^2 \end{aligned}$$

Demonstração

...

$$\mu(W - G) \approx \mu(W - E(X)) + \mu'(W - E(X))(E(X) - G)$$

...

$$\mu(W - X) \approx \mu(W - E(X)) + \mu'(W - E(X))(E(X) - X) + \frac{1}{2}\mu''(W - E(X))(E(X) - X)^2$$

Calculando o valor esperado de $\mu(W - X)$, temos :

$$E[\mu(W - X)] \approx \mu(W - E(X)) + \frac{1}{2}\mu''(W - E(X))\text{var}(X)$$

Fazendo $\mu(W - G) = E[\mu(W - X)]$, temos:

$$\mu(W - E(X)) + \mu'(W - E(X))(E(X) - G) = \mu(W - E(X)) + \frac{1}{2}\mu''(W - E(X))\text{var}(X)$$

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2}\text{var}(X)r(W - E(X))$$

EXEMPLO 3

Resolva novamente o exemplo 1 usando a aproximação para G .

Solução

$$\mu(x) = \sqrt{x}, x > 0 \quad X \sim U_c(0,10) \quad \text{e} \quad W = 10$$

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2} \text{var}(X) r(W - E(X))$$

$$E(X) = \frac{10}{2} = 5; \quad \text{var}(X) = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3}; \quad \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{d^2\sqrt{x}}{dx^2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$G \approx 5 + \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} \right) \left(-\frac{1}{4\sqrt{5^3}} \right) (2\sqrt{5}) \approx 4,58$$

Solução

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2} var(X) r(W - E(X))$$

$$G = W - \left(-\frac{2}{30} [(W - 10)^{\frac{3}{2}} - W^{\frac{3}{2}}] \right)^2$$

$$E(X) = \frac{10}{2} = 5; \quad var(X) = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3};$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{d^2\sqrt{x}}{dx^2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$G = W - \frac{4}{900} \left([(W - 10)^{\frac{3}{2}} - W^{\frac{3}{2}}] \right)^2$$

$$G \approx 5 + \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} \right) \left(-\frac{1}{4\sqrt{(W - 5)^3}} \right) (2\sqrt{W - 5})$$

$$G \approx 5 - \left(\frac{25}{12(W - 5)} \right)$$

Seguro e utilidade

- Seja $\mu(x)$ a função utilidade associada ao **segurador** e Π , o prêmio proposto devido à sua função utilidade. Logo:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi - X)]$$

$\mu(W) \rightarrow$ utilidade do montante existente se o segurador não aceitar o seguro W (riqueza inicial).

$E[\mu(W + \Pi - X)] \rightarrow$ utilidade esperada após aceitar assumir o risco do segurado.

EXEMPLO 4

Se um **segurador** tem a função utilidade de riqueza dada por :

$$\mu(x) = 0,004(1 - e^{-0,004x})$$

E a severidade do dano segurável for probabilística regida por uma distribuição exponencial da seguinte forma particular:

$$f(x) = 0,02e^{-0,02x}, x > 0$$

Dado que a riqueza inicial do segurador é de $W = \text{R\$}20000,00$ qual deverá ser o prêmio cobrado pelo segurador de forma a não diminuir sua utilidade ao aceitar o risco do segurado?

Solução

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi - X)],$$

$$0,004(1 - e^{-0,004W}) = E\{0,004[1 - e^{-0,004(W+\Pi-X)}]\},$$

$$0,004(1 - e^{-0,004W}) = 0,004\{1 - E[e^{-0,004(W+\Pi-X)}]\},$$

$$e^{-0,004W} = E[e^{-0,004(W+\Pi-X)}],$$

$$e^{-0,004W} = e^{-0,004W} e^{-0,004\Pi} E(e^{0,004X}),$$

$$E(e^{0,004X}) = e^{0,004\Pi}.$$

Solução

...

Como $X \sim \text{Exp}(0,02)$, e $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$. É possível perceber que $E(e^{0,004X}) = M_X(0,004)$, logo

$$e^{0,004\Pi} = \frac{\lambda}{\lambda - 0,004},$$

$$e^{0,004\Pi} = \frac{0,02}{0,02 - 0,004} = 1,25.$$

Assim

$$\Pi = \frac{\ln(1,25)}{0,004} = \text{R\$}55,78.$$

Seguro e utilidade

- A literatura apresenta que a situação ideal em que ambas as partes envolvidas no seguro entraram em acordo, será aquela em que :

$$G \geq \Pi \geq E(X)$$

EXEMPLO 5

Seja um segurado com uma função de utilidade linear:

$$\mu(x) = 0,00005x - 1$$

em que a ocorrência dos sinistros segue a distribuição Exponencial, $X \sim \text{Exp}(0,001)$. Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua função de utilidade. Considere a riqueza inicial do segurado igual a $W = \text{R\$}1000,00$.

O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

Solução:

Seja $a = 0,00005$, $b = -1$ e $W = 10000$, assim:

$$\mu(W - G) = E[\mu(W - X)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aX + b]$$

$$G = E(X)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0,001} = R\$ 1000,00$$

EXEMPLO 6

Suponha um investidor com riqueza W , cuja utilidade atribuída ao seu patrimônio seja dada por $\mu(x) = -e^{-0,002x}$, e este investidor está escolhendo entre dois investimentos que levarão a perdas líquidas aleatórias de $X_1 \sim N(10^4, 500^2)$ e $X_2 \sim N(1.1 \times 10^4, 2000^2)$. Qual destes investimentos tem maior utilidade esperada para o investidor?

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$E[-e^{-0,002(W-X)}] = -E[e^{-0,002W+0,002X}] = -e^{-W0,002}E[e^{0,002X}]$$

→ *Investimento 1*

$$= -e^{-W0,002}e^{0,002(10^4) + \frac{500^2(0,002^2)}{2}} = -e^{-w0,002+20,5} = -\frac{e^{20,5}}{e^{w0,002}}$$

→ *Investimento 2*

$$= -e^{-W0,002}e^{0,002(1.1 \times 10^4) + \frac{2000^2(0,002^2)}{2}} = -e^{-w0,002+30} = -\frac{e^{30}}{e^{w0,002}}$$

- Investir em 1 garante uma utilidade esperada maior que o 2

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora.** Deiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos.** Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

