

Matemática atuarial

AULA 22- Prêmios Carregados

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ Ciências atuariais da Universidade federal de Alfenas- Campus Varginha.

PIRES, M.D. COSTA, L.H. Prêmios carregados. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portahalley/notas_MatAtuarial1.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).
- Para incorporar as despesas administrativas no cálculo atuarial, é necessário classificá-las de acordo com o momento em que incidem sobre o contrato.
- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
 - Comissão de corretagem,
 - Despesas com médicos examinadores,
 - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

Prêmios Carregados

- Em contrapartida, existem despesas que ocorrem enquanto o segurado mantiver ligação com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
 - salários de funcionários,
 - despesas com informática,
 - correspondência,
 - aluguel,
 - impostos, etc.
- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurança, destinados a formar uma margem de solvência, conforme previsto pela Teoria do Risco de Ruína.

Prêmios Carregados

➤ Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário .

Além do gasto com indenizações, também é incluso as despesas administrativas com o seguro (durante o período de vigência do contrato).

b) Prêmio “Zillmerado” (Zilmer, 1863).

O segurado irá pagar um prêmio durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e em seguida pagará um prêmio relativo ao risco.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas.

Prêmio de Inventário

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

Π^{γ} : O prêmio único de inventário

Π : Corresponde ao prêmio puro único de um dado produto atuarial

V_{γ} : O valor atuarial correspondente ao carregamento de gestão

Prêmio de Inventário.

Como exemplo considere um seguro de vida vitalício feito por x em que a seguradora tem um gasto anual a gestão dessa apólice igual a γ , então:

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|}, T \geq 0$$

$$E(Z_{T_x}) = \Pi^v = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

γ : Carregamento de inventário

Prêmio de Inventário

Assim:

$$L = Z_{T_x} - Y$$

$$E(P^\gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|}) = E(v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|})$$

$$P^\gamma = \frac{A_x + \gamma \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$$

$$P^\gamma = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \gamma$$

EXEMPLO 1: Qual o valor cobrado por um seguro de vida vitalício com pagamento unitário ao final do ano de morte do segurado, dado que ao prêmio está incluso um gasto anual, fixo em 0,005 relativos a tarifa de serviços? Considere $x = 40$, $i = 0,03$ e o tempo de vida adicional de x modelado pela tábua de vida AT-49.



EXEMPLO 1: Solução :

$$\Pi^{\gamma} = A_{40} + \gamma \ddot{a}_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} + 0,005 \left(\frac{N_{40}}{D_{40}} \right) \approx 0,48113$$

$$p^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40}} = \frac{\frac{M_{40}}{D_{40}} + 0,005 \left(\frac{N_{40}}{D_{40}} \right)}{\frac{N_{40}}{D_{40}}} \approx 0,0227$$

EXEMPLO 2: Se considerarmos um seguro temporário com cobertura de 30 anos, qual seria o valor do prêmio comercial, incluindo as despesas?

Considere $x = 40$, $i = 0,03$, tábua de vida AT-49 e $\gamma = 0,005$



EXEMPLO 2

$$\Pi^{\gamma} = A_{40:1:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0,005 \left(\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \right) \approx 0,26564$$

$$p^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40:\overline{30}|}} = \frac{0,26564}{\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}} \approx 0,014236$$

EXEMPLO 3: Uma pessoa de 20 anos decide pagar por uma renda vitalícia com benefício anual unitário. Os pagamentos dos benefícios começam caso o segurado chegue viva à idade de 60 anos. Quanto a seguradora deve cobrar por esse produto, considerando um gasto anual de 0,005 além dos gastos com o benefício? Suponha $i = 3\%$, tábua de vida AT-49 e fluxo de caixa antecipado.



EXEMPLO 3

$$Y_p = \begin{cases} P^\gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < 40 \\ P^\gamma \ddot{a}_{\overline{40}|} & T \geq 40 \end{cases}$$

$$Y_b = Y_1 + Y_2 \text{ em que } Y_1 = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 40 \\ {}_{40|}\ddot{a}_{\overline{T+1-40}|} & t \geq 40 \end{cases} \text{ e } Y_2 = \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|} \quad T \geq 0$$

$$\Pi^\gamma = E(Y_b) = {}_{40|}\ddot{a}_{20} + \gamma \ddot{a}_{20}$$

$$\Pi^\gamma = \frac{N_{60}}{D_{20}} + 0,005 \left(\frac{N_{20}}{D_{20}} \right) \approx 3,78983$$

$$P^\gamma = \frac{\Pi^\gamma}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{3,78983}{\frac{N_{20} - N_{60}}{D_{20}}} \approx 0,16325$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

Este prêmio tem esse nome graças as ideias de August Zillmer (1831-1893).

Zillmer propôs incluir no cálculo do prêmio puro uma amortização das despesas iniciais, sem comprometer o equilíbrio atuarial do contrato. Ele ajusta o valor dos prêmios para refletir o impacto dessas despesas(carregamento de aquisição), evitando que o prêmio seja subestimado nos primeiros períodos.

O prêmio único de Zillmerado é representado por:

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

V_{α} : valor atuarial correspondente ao carregamento de aquisição.

Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

- No caso de um **seguro de vida vitalício** (com benefício unitário pago ao final do ano de morte) feito por x , o valor presente relativo as despesas é

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \alpha, \quad T \geq 0$$

Em que α é o carregamento de aquisição. Logo $E(Z_{T_x}) = \textcolor{red}{\Pi^\alpha} = \textcolor{red}{A_x} + \alpha$

- O compromisso do **segurado** é $\textcolor{red}{Y} = \textcolor{red}{P^\alpha}Y_1 + \textcolor{red}{P_x}Y_2$

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & 0 \leq T < s \\ \ddot{a}_{\overline{s}|}, & T \geq s \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} s|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-s}|}, & T \geq s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

P^α : é o prêmio considerando as despesas de aquisição que devem ser pagas durante o período s

P_x : é o prêmio anual nivelado

Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

$$E(Y) = E(Z_{T_x})$$

$$E(P^\alpha Y_1 + P_x Y_2) = E(v^{T+1} + \alpha)$$

$$(P^\alpha) \ddot{a}_{x:\overline{s}|} + (P_x)_{s|} \ddot{a}_x = A_x + \alpha$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{(P_x)_{s|} \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x (\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x = \frac{A_x - P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

Como $A_x - P_x \ddot{a}_x = 0$

$$P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

O termo $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$ corresponde as parcelas de α

Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

Este tipo de prêmio considera despesas de aquisição, quando esta é cara o suficiente para que o segurado deseje pagá-la em um período bem menor do que o período de vigência do contrato.

No cálculo atuarial, mantemos o prêmio constante para facilitar administração e cálculos, apesar de o carregamento ser referente a um período limitado.

EXEMPLO 4: Considere uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida **inteiro** que paga 1 *u.m.* ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua $AT - 49$ e uma taxa de juros $i = 0,03$? Considere, para o cálculo do prêmio um carregamento de aquisição de \$0,005 **que deve ser pago em um período de 10 anos.**

EXEMPLO 4 Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + P_{22}$$

$$P^{\alpha} = \frac{0,005}{\frac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + \frac{M_{22}}{N_{22}} = \frac{0,005}{8,757679} + 0,00868206 \approx 0,00925$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

k pagamentos

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha} &= \Pi + \alpha \\ P^{\alpha} &= P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} \end{aligned}$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é aquele que considera todas as cargas ao prêmio puro, no nosso caso o carga de aquisição e a carga de gestão,

$$\Pi^c = \Pi + V_\gamma + V_\alpha$$

Π : Prêmio puro periódico de uma dada modalidade

EXEMPLO 5: Qual o valor do prêmio anual a ser cobrado de um segurado de 22 anos, que deseja adquirir um dotal misto com 10 anos de cobertura e benefício unitário? Utilize a tábua de vida AT-49 e considere que a seguradora trabalha com uma taxa de juros de 3% ao ano. Considere que esse produto requer um gastos anual de 0,005 com despesas administrativas e um gasto com despesas médicas de 0,002 que deve ser pago nos dois primeiros anos.

EXEMPLO 5

$$P^c = P_{x:\bar{n}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}},$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0,005 + \frac{0,002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}} \approx 0,09107441.$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} + P$$

k pagamentos

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^c = \Pi + V_{\gamma} + V_{\alpha}$$

$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS, N.L. et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

