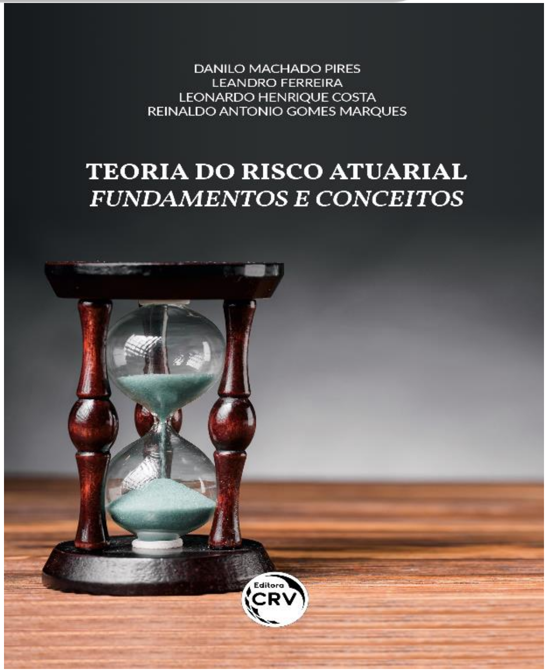
Teoria do Risco
Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



https://atuaria.github.io/portalhalley/

Modelos de risco Coletivo -A distribuição de S_{col}, os sinistros coletivos.

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N
  - Um método interativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado poder computacional,

- Método da função geradora de momentos.
  - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos.

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t))$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = E\left[e^{t(X_1+X_2+\ldots X_N)}\right] = E[e^{tX_1}e^{tX_2} \ldots e^{tX_N}] = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})$$

Como X_is são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

...

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E[M_X(t)^N]$$

$$M_{S_{col}}(t) = E\left[e^{\ln M_X(t)^N}\right] = E\left[e^{N \ln M_X(t)}\right]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

EXEMPLO

Calcule $E(S_{col})$ por meio de $M_{S_{col}}(t)$, dado que X possui distribuição Exponencial (α) e N possui distribuição de Poisson(λ).

Se $\mathrm{N} \sim \mathrm{poisson}(\lambda)$, então

$$\mathrm{M_N(t)} = E(e^{tN}) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e^t} - 1)}$$

Se $\mathrm{X} \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

$\mathrm{M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}}$ $M_X(t) = \frac{\alpha}{(\alpha-t)}$

Como $\mathrm{M_{S_{col}}(t)} = M_N(ln\, M_X(t)\ )$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda\left[e^{ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)}-1\right]} = e^{\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}-1\right)} = e^{(\alpha-t)^{-1}\lambda\alpha-\lambda}$$

$$M'_{scol}(t) = \frac{dM_{scol}(t)}{dt} = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-t)^2}e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-t}-\lambda}$$

$$M'_{scol}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-0)^2}e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-0}-\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

EXEMPLO 1

Seja N com distribuição $Binomial\,(n, q)$. Determine uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$ $\qquad$ $M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$

Assim:

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left[qe^{\ln M_X(t)} + 1 - q\right]^n}$$

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n}$$

EXEMPLO 2

Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro (sem dedução da franquia) obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos de momentos do total agregado de sinistros S_{col}, dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $B\ (n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col}.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n \qquad M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$\mathrm{M}_{S_{\mathrm{col}}}(\mathrm{t}) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^n$$

Assim:

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n} = [q\alpha^{r}(\alpha - t)^{-r} + 1 - q]^{n}}$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} q\alpha^{r}(-\boldsymbol{r})(\alpha - t)^{-r-1}(-\boldsymbol{1})$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^{r}}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - 0}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^{r}}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$\boldsymbol{E(S_{col})} = n(q + 1 - q)^{n-1}\frac{rq}{\alpha} = \boldsymbol{\frac{nqr}{\alpha}}$$

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$	$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t)\,)\,\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) \; = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = \frac{dM_{S_{col}}(0)}{dt} = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) = E(N)E(X)$$

$$\frac{d^2M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(\ln M_X(t))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(\ln M_X(t))\left[\frac{M''_X(t)M_X(t) - M'_X(t)M'_X(t)}{M_X(t)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(\ln M_X(0))\frac{M'_X(0)}{M_X(0)}\frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(\ln M_X(0))\left[\frac{M''_X(0)M_X(0) - M'_X(0)M'_X(0)}{M_X(0)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0)E(X)E(X) + E(N)[E(X^2) - E(X)^2]$$

$$E\left(S_{col}^2\right) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$var(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[var(X)] - E(N)^2E(X)^2$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\,[E(N^2) - E(N)^2] + E(N)var(X)$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\,var(N) + E(N)var(X)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(N)E(X)}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)}$$