Matemática atuarial

Seguros Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Seguros com benefício crescente

- Contratos de seguro com alta procura são aqueles em que o benefício pago pela seguradora varia conforme o tempo em relação a data do contrato.

- Algumas opções nesse sentido são aquelas em que ocorre um acréscimo ou decréscimo no benefício (anual) de acordo com uma progressão aritmética.

  - A importância segurada aumenta segundo uma progressão aritmética.

Produtos Atuariais com benefício crescente

Seguro de vida

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1+t)v^{t+1} \ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}A_x$$

$$(IA)_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t)v^{t+1} \ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}A_{x^1:\overline{n-t|}}$$

EXEMPLO 1: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0{,}9403557$$

EXEMPLO 1:Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0{,}9403557$$

Solução:

$$(IA)_{110} = \sum_{t=0}^{5} {}_{t|}A_{110} = A_{110} + {}_{1|}A_{110} + {}_{2|}A_{110} + {}_{3|}A_{110} + {}_{4|}A_{110} + {}_{5|}A_{110} \approx 1{,}4482.$$

$$(IA)_{110} \approx 1{,}4482.$$

EXEMPLO 2: Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano, $i = 4\%$ ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1}:\overline{5}|} \approx 0{,}003788.$$

Solução:

EXEMPLO 2: Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano, $i = 4\%$ ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^1:\overline{5|}} \approx 0{,}003788.$$

Solução:

$$(IA)_{25^1:\overline{5|}} = \sum_{t=0}^{4} {}_{t|}A_{x^1:\overline{5-t|}} = A_{25^1:\overline{5|}} + {}_{1|}A_{25^1:\overline{4|}} + {}_{2|}A_{25^1:\overline{3|}} + {}_{3|}A_{25^1:\overline{2|}} + {}_{4|}A_{25:\overline{1|}}$$

$$(IA)_{25^1:\overline{5|}} \approx 0{,}01178.$$

Seguro de vida com benefício crescente

```
Axc<- function( i, idade, n,b)  {
      v     <- (1+n)*(1/(i+1))^(1:n)
      pxx  <-  c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
      qxx  <- qx[(idade+1):(idade+n)]
      Axc  <- b* sum(v*pxx*qxx)
      return (Axc)
                              }
```

Produtos Atuariais com benefício crescente

A notação para os seguros de vida vitalício e temporário, ambos com crescimento limitado a k anos, são respectivamente, $\left(I_{\overline{k|}}A\right)_x$ e $\left(I_{\overline{k|}}A\right)_{x^1:\overline{n|}}$, tal que:

$$\left(I_{\overline{k|}}A\right)_x = (IA)_{x^1:\overline{k|}} + k \times \ {}_{k|}A_x$$

$$\left(I_{\overline{k|}}A\right)_{x^1:\overline{n|}} = (IA)_{x^1:\overline{k|}} + k \times \ {}_{k|}A_{x^1:\overline{n-k|}}$$

Produtos Atuariais com benefício crescente
benefício pago no momento da morte

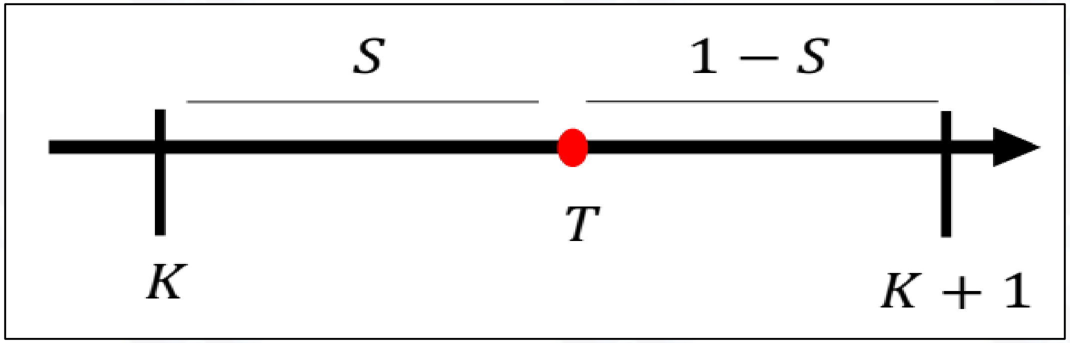
$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} te^{-\delta t}\ {}_tp_x\mu(x+t)dt = \int_0^{\infty} {}_{s|}\bar{A}_x\, ds.$$

$$(I\bar{A})_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^{n} te^{-\delta t}\ {}_tp_x\mu(x+t)dt$$

RELAÇÃO ENTRE SEGUROS DE VIDA

https://atuaria.github.io/portalhalley/

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO



$$T = (K + 1) - (1 - S)$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

Assumindo que T é independente de S e que $S \sim U_c(0,1)$.

Considere o seguro de vida inteira pago no momento de morte:

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt = E\left(e^{-\delta T}\right)$$

$$\bar{A}_x = E\left\{e^{-\delta[(K+1)-(1-S)]}\right\} = E\left[e^{-\delta(K+1)}e^{\delta(1-S)}\right]$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = E\left[v^{(K+1)}\right]E\left[e^{\delta(1-S)}\right]$$

$$\bar{A}_x = A_x \int_0^1 e^{\delta(1-s)} ds$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{e^{\delta}-1}{\delta}$$

Substituindo $e^{\delta} = 1 + i$,

$$\bar{A}_x = A_x \frac{(1+i)-1}{\delta}$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

i: *Taxa de juros discreta*

δ: *Taxa de juros constante*

EXEMPLO 3: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de **vida inteiro** que paga $1\,u.m.$ no momento da morte. Calcule o valor aproximado desse prêmio considerando que o prêmio pago para esse mesmo seguro com benefício pago ao final do ano de morte é de $A_{25} \approx 0{,}11242$.

Considere que o tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano.

Seguro de vida Inteiro

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} \approx 0{,}11242$$

$$\bar{A}_{25} = A_{25}\frac{i}{\delta} = 0{,}11242\left[\frac{0{,}05}{ln(1{,}05)}\right] \approx 0{,}1152076$$

EXEMPLO 4: Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 $u.m.$ ao final do ano de morte. Admita $\bar{A}_{30} \approx 0{,}28317$ e que $i = 5\%$.

EXEMPLO 4: Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 u.m. ao final do ano de morte. Admita $\bar{A}_{30} \approx 0{,}28317$ e que $i = 5\%$.

$$A_{30} = \frac{\delta}{i}\bar{A}_{30} = \frac{ln(1{,}05)}{0{,}05}0{,}28317 \approx 0{,}2763182$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{n}|} \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{n}|} \frac{i}{\delta} + A_{x:\overline{n}|^1}$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x$$

$$(I\bar{A})_{x^1:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} (IA)_{x^1:\overline{n}|}$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.