Matemática atuarial

AULA 24- Reservas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Reservas

- Uma reserva matemática é um fundo formado pelas seguradoras a partir de parte dos prêmios pagos, como garantia de suas operações.

- As reservas podem ser puras ou carregadas, a depender de quais despesas a reserva se relacionam, se são somente as despesas com benefícios ou com todos os gastos de gestão.

Reservas

- No ramo de seguros, geralmente os planos são com longos períodos de cobertura.

  - Por vezes o que se verifica é que no períodos iniciais ocorre um excedente de prêmios recebidos em relação a benefícios pagos.

Como exemplo considere que uma pessoa de 40 anos de idade deseja fazer um seguro de vida com benefício unitário pago ao final do ano de morte, em que possa pagar os prêmios anualmente durante toda a cobertura do seguro, que é de 5 anos.

Reservas

Assim ao considerar tábua AT-49 e uma taxa de juros $i = 0{,}05$ ao ano tem-se:

- **Opção 1**

$$P_{40^1:\overline{5}|} = \frac{A_{40^1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0{,}002395$$

- **Opção 2**

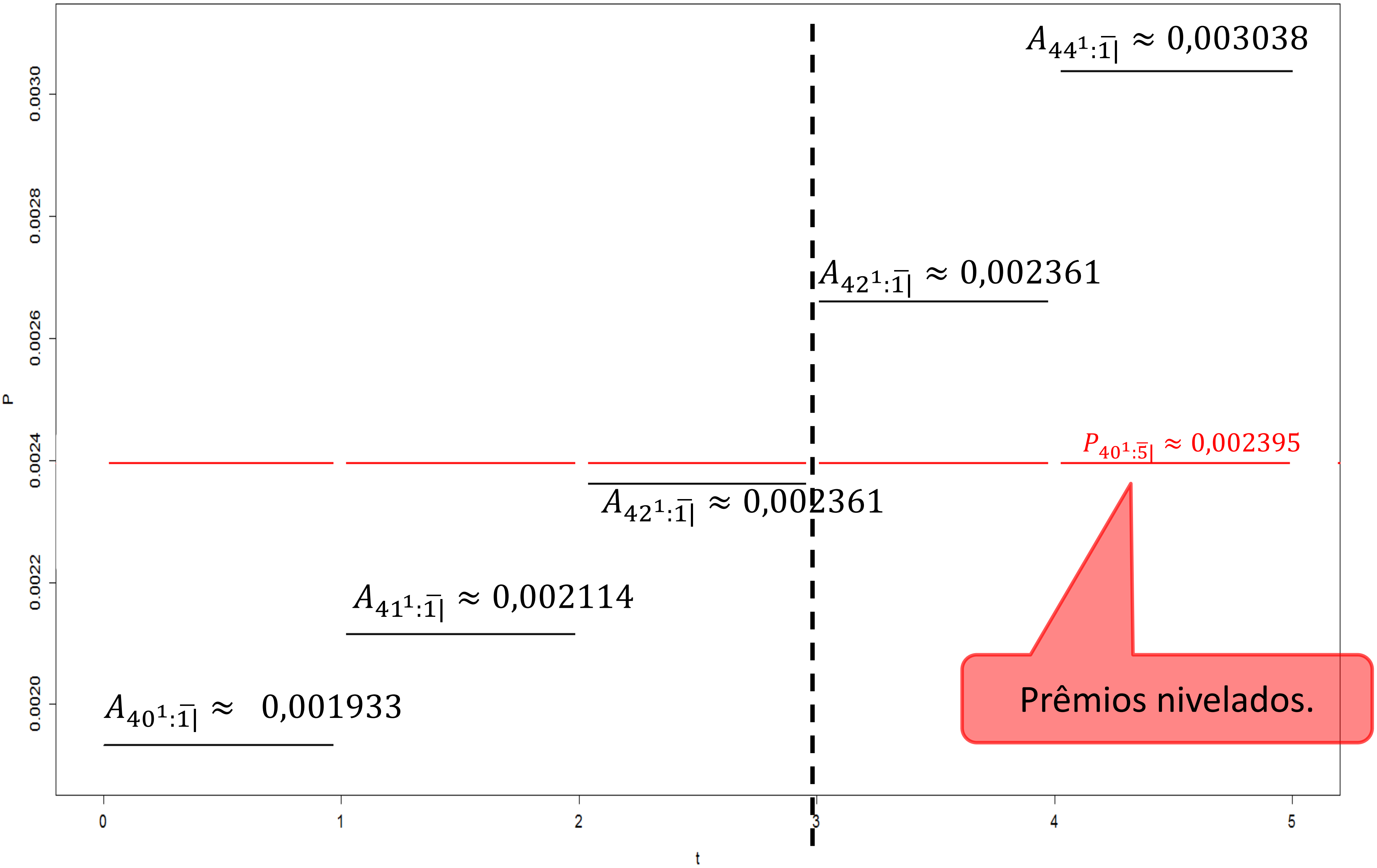
$$A_{40^1:\overline{1}|} = v^1 q_{40} \approx 0{,}001933$$

$$A_{41^1:\overline{1}|} = v^1 q_{41} \approx 0{,}002114$$

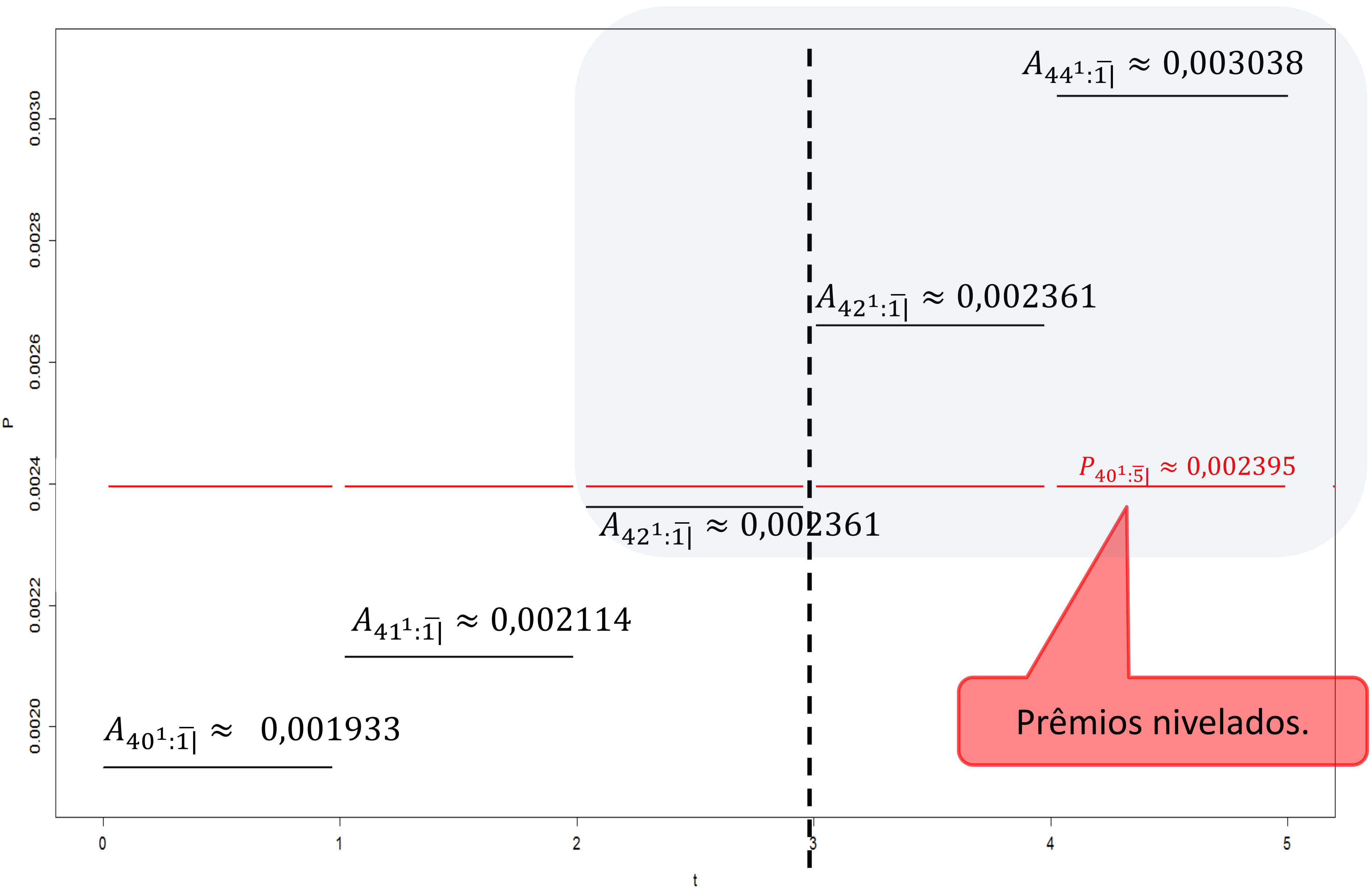
$$A_{42^1:\overline{1}|} = v^1 q_{42} \approx 0{,}002361$$

$$A_{43^1:\overline{1}|} = v^1 q_{43} \approx 0{,}00266$$

$$A_{44^1:\overline{1}|} = v^1 q_{44} \approx 0{,}003038$$



$A_{44^1:\overline{1}|} \approx 0,003038$
$A_{42^1:\overline{1}|} \approx 0,002361$
$P_{40^1:\overline{5}|} \approx 0,002395$
$A_{42^1:\overline{1}|} \approx 0,002361$
$A_{41^1:\overline{1}|} \approx 0,002114$
$A_{40^1:\overline{1}|} \approx 0,001933$
Prêmios nivelados.
P
0.0020
0.0022
0.0024
0.0026
0.0028
0.0030
0
1
2
3
4
5
t



$A_{40^1:\overline{1}|} \approx$ 0,001933
$A_{41^1:\overline{1}|} \approx 0{,}002114$
$A_{42^1:\overline{1}|} \approx 0{,}002361$
$A_{42^1:\overline{1}|} \approx 0{,}002361$
$A_{44^1:\overline{1}|} \approx 0{,}003038$
$P_{40^1:\overline{5}|} \approx 0{,}002395$
Prêmios nivelados.
P
t
0.0020
0.0022
0.0024
0.0026
0.0028
0.0030
0
1
2
3
4
5

Reservas

- Após determinado momento os prêmios cobrados são insuficientes para fazer frente aos benefícios.
  - As responsabilidades da seguradora não coincidem* com as responsabilidades do segurado até o final do contrato.
    - Responsabilidade da seguradora sempre superior ao do segurado....
- Então parte desse excedente obtido nos primeiros anos é vital para que se possa garantir o pagamento de benefícios que ainda estão por vir,
  - ....é necessário o uso da Reserva matemática (reserva).

Reservas

Resp. Segurado	Resp. Segurador		Equilíbrio na obrigação líquida do segurador
$P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{40:\overline{5}|}) =$	$A_{40^1:\overline{5}|}$	$\Rightarrow$	$A_{40^1:\overline{5}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{40:\overline{5}|}) = 0$
		$\downarrow \mathbf{1}\ \boldsymbol{ano}$	$P_{40^1:\overline{5}|} = \dfrac{A_{40^1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0{,}002395$
$P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{41:\overline{4}|}) =$	$A_{41^1:\overline{4}|}$	$\Rightarrow$	$A_{41^1:\overline{4}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{41:\overline{4}|}) - 0{,}000485 = 0$
		$\downarrow \mathbf{2}\ \boldsymbol{ano}$	$P_{41^1:\overline{4}|} = \dfrac{A_{41^1:\overline{4}|}}{\ddot{a}_{41:\overline{4}|}} \approx 0{,}002525$
$P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{42:\overline{3}|}) =$	$A_{42^1:\overline{3}|}$	$\Rightarrow$	$A_{42^1:\overline{3}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{42:\overline{3}|}) - 0{,}000806 = 0$
		$\downarrow \mathbf{3}\ \boldsymbol{ano}$	$P_{42^1:\overline{3}|} = \dfrac{A_{42^1:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{42:\overline{3}|}} \approx 0{,}002677$
$P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{43:\overline{2}|}) =$	$A_{43^1:\overline{2}|}$	$\Rightarrow$	$A_{43^1:\overline{2}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{43:\overline{2}|}) - 0{,}000883 = 0$
		$\downarrow \mathbf{4}\ \boldsymbol{ano}$	$P_{43^1:\overline{2}|} = \dfrac{A_{43^1:\overline{2}|}}{\ddot{a}_{43:\overline{2}|}} \approx 0{,}002847$
$P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{44:\overline{1}|}) =$	$A_{44^1:\overline{1}|}$	$\Rightarrow$	$A_{44^1:\overline{1}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{44:\overline{1}|}) - 0{,}000643 = 0$
			$P_{44^1:\overline{1}|} = \dfrac{A_{44^1:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{44:\overline{1}|}} \approx 0{,}003038$

Reservas

Reserva num determinado momento, é a diferença entre o valor atuarial das responsabilidades futuras da seguradora e o valor das responsabilidades futuras do segurado, a partir desse momento.

$$Rm_t = Rb_t - Rp_t$$

Rm_t:Reserva média ao tempo t.

Rb_t:O valor atuarial do compromisso da seguradora no instante t.

Rp_t:O valor atuarial do compromisso com os prêmios, vindos do segurado.

Reservas

Ao considerar o produto atuarial referente a uma pessoa de idade x cujo tempo de vida adicional é T_x.

$$Rm(T_x) = Rb(T_x) - Rp(T_x)$$

$Rb(T)$: variável aleatória valor presente dos benefícios futuros.

$Rp(\mathrm{T})$: variável aleatória valor presente dos prêmios futuros.

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)
Seguro vitalício

O método de reservas prospectivo consiste ao valor esperado de $Rm(T_x)$, levando em conta os compromissos futuros.

$$Rm(T) = v^{T+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{T+1|}}$$

$T > x + t$.

$$E[Rm(T)] = {}_t\boldsymbol{V}_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

P_x: ao prêmio periódico anual $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$.

EXEMPLO 1: Qual a reserva (pura) que deve ser formada depois de 2 anos de um seguro de vida vitalício comprado por um indivíduo com idade 40 de idade? Considere $b = 1$, $i = 5\%$ ao ano e a tábua de vida AT-2000 feminina.

Solução

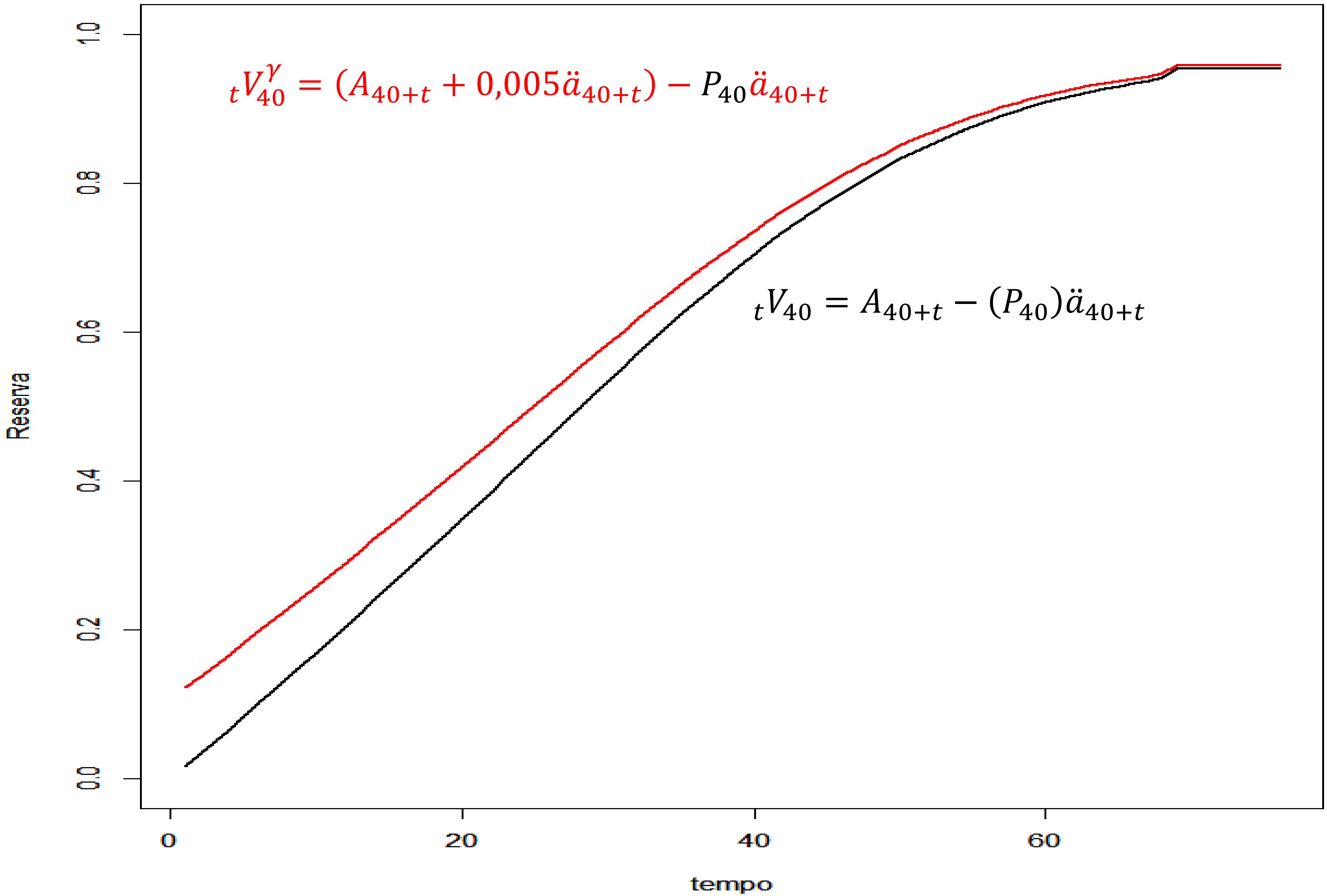
$$_{2}V_{40} = A_{42} - P_{40}\ddot{a}_{42}.$$

Logo

$$_{2}V_{40} \approx 0{,}01375.$$

EXEMPLO 2: Considere um contrato de seguro de vida vitalício (unitário) feito por uma pessoa de 40 anos de idade. Qual o comportamento da reserva matemática com o passar do tempo? Use a tábua de vida AT-49 masculina, $b = 1$ e $i = 3\%$ ao ano.

$$P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40}} \approx 0{,}01737153$$



Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t} $$

$$ {}_tV_{x^1:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t^1:\overline{n-t}|} - P_{x^1:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 0, & t = n \end{cases} $$

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|^1} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|^1} - P_{x:\overline{n}|^1}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases} $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

...

$$ {}_tV_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\bar{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases} $$

$$ {}_t^kV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_kP_x\, \ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|}, & t < k \\ A_{x+t}, & t \geq k \end{cases} $$

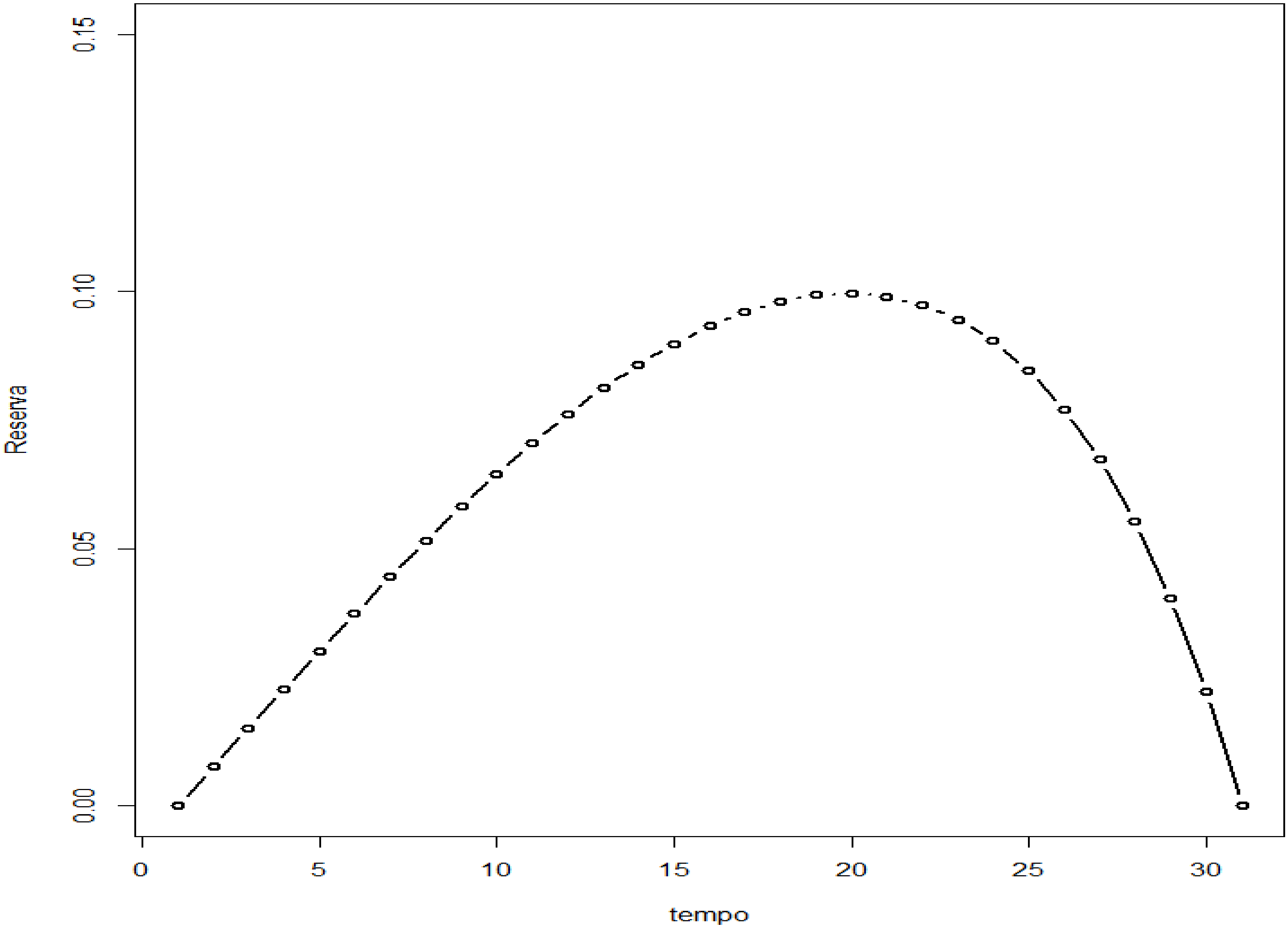
EXEMPLO 3: Considere um seguro temporário por 40 anos, para um segurado de 30 anos, qual seria a evolução da reserva com o tempo? Considere $i = 3\%$ e AT-49.

SOLUÇÃO

$$ {}_tV_{40^1:\overline{30}|} = A_{40+t^1:\overline{30-t}|} - P_{40^1:\overline{30}|}\,\ddot{a}_{40+t:\overline{30-t}|} $$

$$ {}_tV_{40^1:\overline{30}|} = \frac{(M_{40+t} - M_{70}) - P_{40^1:\overline{30}|}(N_{40+t} - N_{70})}{D_{40+t}} $$

EXEMPLO 3

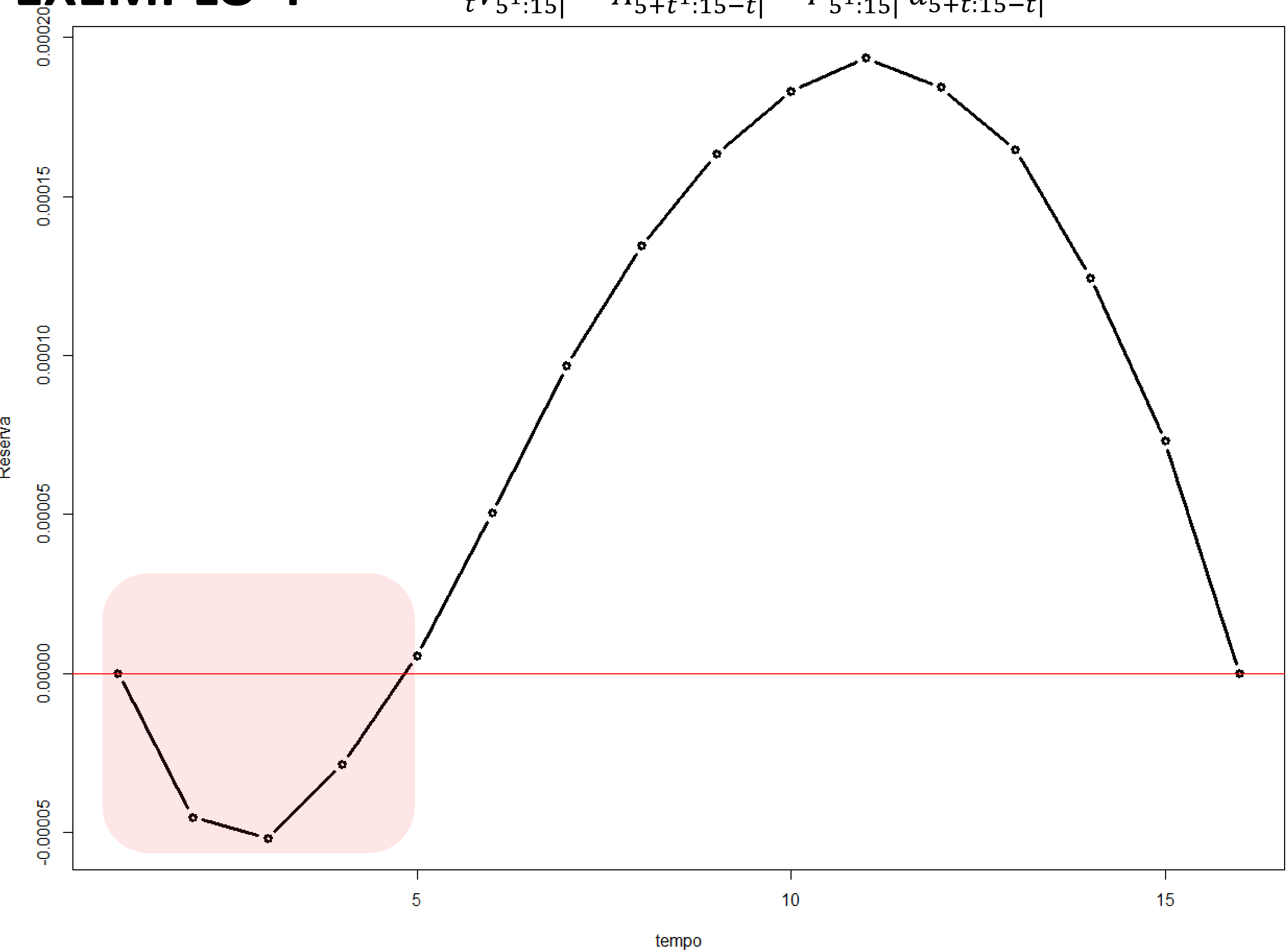


EXEMPLO 4: Considere um seguro temporário por 15 anos, para um segurado de 5 anos, qual seria a evolução da reserva com o tempo? Considere $i = 3\%$ e AT-49.

SOLUÇÃO

EXEMPLO 4

$${}_tV_{5^1:\overline{15}|} = A_{5+t^1:\overline{15-t}|} - P_{5^1:\overline{15}|}\,\ddot{a}_{5+t:\overline{15-t}|}$$



EXEMPLO 5: Qual o valor das reservas formadas depois de 5, 10 e 15 anos, de um seguro de vida vitalício? Considere que $x = 40$, $i = 3\%$, $b = 1$, tábua AT-49 e que os prêmios sejam pagos em 11 parcelas iguais.

SOLUÇÃO

$$ {}_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0{,}03974 $$

EXEMPLO 5: Qual o valor das reservas formadas depois de 5, 10 e 15 anos, de um seguro de vida vitalício? Considere que $x = 40$, $i = 3\%$, $b = 1$, tábua AT-49 e que os prêmios sejam pagos em 11 parcelas iguais.

SOLUÇÃO

$$ {}_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0{,}03974 $$

$$ {}^{11}_{5}V_{40} = A_{45} - {}_{11}P_{40}\left(\ddot{a}_{45:\overline{6}|}\right) \approx 0{,}2056 $$

$$ {}^{11}_{10}V_{40} = A_{50} - {}_{11}P_{40}\left(\ddot{a}_{50:\overline{1}|}\right) \approx 0{,}4953 $$

$$ {}^{11}_{15}V_{40} = A_{55} \approx 0{,}5350 $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo) T_x contínuo

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$ {}_m\bar{V}_x = \bar{A}_{x+m} - \bar{P}_x \bar{a}_{x+m} $$

$$ {}_m\bar{V}_{x^1:\bar{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m^1:\overline{n-m}|} - \bar{P}_n \bar{a}_{x+m:\overline{n-m}|}, & m < n \\ 0, & m = n \end{cases} $$

$$ {}_m\bar{V}_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|} - \bar{P}_{x:\bar{n}|} \bar{a}_{x+m:\overline{n-m}|}, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases} $$

EXEMPLO 6: Passados 2 anos de vigência do contrato, qual será a reserva $_2\bar{V}_{40}$ que a seguradora deverá ter formado? Considere $\delta = 0{,}06$ ao ano e que $T_0 \sim U_C(0{,}120)$.

SOLUÇÃO

$$ {}_2\bar{V}_{40} = \bar{A}_{42} - \bar{P}_{40}\,\bar{a}_{42} $$

$$ {}_tp_{42} = \frac{P(T>t+42)}{P(T>42)} = \frac{\int_{t+42}^{120}\frac{1}{120}dt}{\int_{42}^{120}\frac{1}{120}dt} = \frac{\frac{120-42-t}{120}}{\frac{120-42}{120}} = \frac{78-t}{78} \qquad {}_tq_{42} = 1 - \frac{78-t}{78} = \frac{t}{78} $$

Considerando que $\frac{\partial F_{T_x}(t)}{\partial t} = f_{T_x}(t)$, assim:

$$ f_{T_{42}}(t) = \frac{\partial F_{T_{42}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{78}\right) = \frac{1}{78} $$

Logo

$$ \mu(42+t) = \frac{f_{T_{42}}(t)}{1 - F_{T_{42}}(t)} = \frac{\frac{1}{78}}{\frac{78-t}{78}} = \frac{1}{78-t} $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}\mu(42+t)dt \qquad \bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}dt $$

SOLUÇÃO

$$ {}_2\bar{V}_{40} = \bar{A}_{42} - \bar{P}_{40}\bar{a}_{42} $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}\mu(42+t)dt = \int_0^{78} e^{-0,06t}\left(\frac{1}{78}\right)dt \approx 0,211693 $$

$$ \bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}dt = \int_0^{78} e^{-0,06t}\left(\frac{78-t}{78}\right)dt = \int_0^{78} \frac{(1-e^{-0,06t})}{0,06}\left(\frac{1}{78}\right)dt \approx 13,1385 $$

$$ {}_2\bar{V}_{40} = 0,211693 - \bar{P}_{40}13,1385 $$

SOLUÇÃO

$$ {}_2\bar{V}_{40} = 0{,}211693 - \bar{P}_{40}\ 13{,}1385 $$

$$ \bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\left(\frac{80-t}{80}\right)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{80-t}}\,dt = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\,\frac{1}{80}\,dt \approx 0{,}206619 $$

$$ \bar{a}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\left(\frac{80-t}{80}\right)dt = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\left(\frac{80-t}{80}\right)dt = \int_0^{80}\frac{(1-e^{-0{,}06t})}{0{,}06}\left(\frac{1}{80}\right)dt \approx 13{,}223 $$

$$ {}_2\bar{V}_{40} = 0{,}211693 - \left(\frac{0{,}206619}{13{,}223}\right)13{,}1385 \approx 0{,}006394374 $$

SOLUÇÃO

$$ {}_{2}\bar{V}_{40} = 0{,}211693 - \left(\frac{0{,}206619}{13{,}223}\right) 13{,}1385 \approx 0{,}006394374 $$

$$ \bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{80}} dt \approx 0{,}206619 $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0{,}06t} \left(\frac{1}{78}\right) dt \approx 0{,}211693 $$

$$ \boldsymbol{\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1} $$

$$ \bar{a}_{40} = \frac{1-0{,}206619}{0{,}06} \approx 13{,}22302 $$

$$ \bar{a}_{42} = \frac{1-0{,}211693}{0{,}06} \approx 13{,}3185 $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

…

$$ {}_tV\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) = \begin{cases} {}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, & t < m \\ \ddot{a}_{x+t}, & t \geq m \end{cases} $$

$$ {}_tV\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right) = \begin{cases} {}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n}|} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, & t < m \\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n+m-t}|}, & m \leq t < m+n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} $$

EXEMPLO 7: Qual reserva deve ser formada após 30 e 50 anos de uma anuidade vitalícia (antecipada) contratada por uma pessoa de 30 anos de idade que decida aposentar aos 70 anos? Considere que $b = 1$, tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

SOLUÇÃO:

EXEMPLO 7: Qual reserva deve ser formada após 30 e 50 anos de uma anuidade vitalícia (antecipada) contratada por uma pessoa de 30 anos de idade que decida aposentar aos 70 anos? Considere que $b = 1$, tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

SOLUÇÃO:

$$ {}_{30}V\left({}_{40|}\ddot{a}_{30} \right) = {}_{10|}\ddot{a}_{60} - P\left({}_{40|}\ddot{a}_{30} \right) \ddot{a}_{60:\overline{10|}} $$

$$ {}_{30}V\left({}_{40|}\ddot{a}_{30} \right) = \frac{N_{70}}{D_{60}} - \left(\frac{N_{70}}{N_{30} - N_{70}} \right) \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}} $$

$$ {}_{50}V\left({}_{40|}\ddot{a}_{30} \right) = \ddot{a}_{80} = \frac{N_{80}}{D_{80}} $$

EXEMPLO 8: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos e 21 anos?

EXEMPLO 8: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos e 21 anos?

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right) = {}_{10|}\ddot{a}_{30:\overline{30|}} - P\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right)\ddot{a}_{30:\overline{10|}} $$

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right) = \frac{N_{40}-N_{70}}{D_{20}} - \left(\frac{N_{40}-N_{70}}{N_{20}-N_{40}}\right)\frac{N_{30}-N_{40}}{D_{30}} $$

$$ {}_{21}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right) = \ddot{a}_{41:\overline{29|}} = \frac{N_{41}-N_{70}}{D_{41}} $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

A reserva pelo método **retrospectivo** é calculada a partir dos compromissos passados da seguradora.

- Para exemplificar, considere

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{A_{x^1:\overline{t|}} + {}_{t|}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + {}_{t|}\ddot{a}_x}$$

$$P_x = \frac{A_{x^1:\overline{t|}} + v^t\ {}_tp_xA_{x+t}}{\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + v^t\ {}_tp_x\ddot{a}_{x+t}}$$

$$0 = \left(A_{x^1:\overline{t|}} + v^t\ {}_tp_xA_{x+t}\right) - P_x\left(\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + v^t\ {}_tp_x\ddot{a}_{x+t}\right)$$

$$0 = A_{x^1:\overline{t|}} - P_x\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + v^t\ {}_tp_x(A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t})$$

Como ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t}$, então

$$0 = A_{x^1:\overline{t|}} - P_x\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + v^t\ {}_tp_x({}_tV_x),$$

Logo

$${}_tV_x = \frac{P_x\ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}}$$

EXEMPLO 9: Qual a reserva (pura) que deve ser formada depois de 2 anos de um seguro de vida vitalício comprado por um indivíduo com idade 40 de idade? Considere $b = 1$, $i = 5\%$ ao ano e a tábua de vida AT-2000 feminina.

EXEMPLO 9: A reserva pelo método retrospectivo

$$ {}_{2}V_{40} = \frac{P_{40}\ddot{a}_{40:\overline{2}|} - A_{40^{1}:\overline{2}|}}{A_{40:\overline{2}|^{1}}}, $$

$$ {}_{2}V_{40} = \frac{0{,}007053\ (1{,}951736) - 0{,}001308}{0{,}905752} \approx 0{,}01375. $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$${}_{t}V_{x} = \frac{P_{x}\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A_{x^{1}:\overline{t}|}}{A_{x:\overline{t}|^{1}}}$$

$${}_{t}V_{x^{1}:\overline{n}|} = \frac{P_{x^{1}:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A_{x^{1}:\overline{t}|}}{A_{x:\overline{t}|^{1}}}$$

$${}_{t}V_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A_{x^{1}:\overline{t}|}}{A_{x:\overline{t}|^{1}}}$$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

$$
{}_tV\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) = \begin{cases} \dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & t < m \\ \dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - {}_{m|}\,\ddot{a}_{x:\overline{t-m}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & t \geq m \end{cases}
$$

$$
{}_tV\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right) = \begin{cases} \dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & t < m \\ \dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - {}_{m|}\,\ddot{a}_{x:\overline{t-m}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & m \leq t < m+n \end{cases}
$$

DEMONSTRAÇÃO

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x:\bar{m}|} = 0 $$

$$ v^m\,{}_{m}p_x\ddot{a}_{x+m} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\left(\ddot{a}_{x:\bar{t}|} + {}_{t|}\ddot{a}_{x:\overline{m-t}|}\right) = 0 $$

$$ v^t\,{}_{t}p_x(v^{m-t}\,{}_{m-t}p_{x+t})\ddot{a}_{x+m} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\left(\ddot{a}_{x:\bar{t}|} + {}_{t|}\ddot{a}_{x:\overline{m-t}|}\right) = 0 $$

$$ v^t\,{}_{t}p_x\,{}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right){}_{t|}\ddot{a}_{x:\overline{m-t}|} = \ddot{a}_{x:\bar{t}|}P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) $$

$$ v^t\,{}_{t}p_x\,{}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)v^t\,{}_{t}p_x\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} = \ddot{a}_{x:\bar{t}|}P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) $$

$$ v^t\,{}_{t}p_x\left({}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right) = \ddot{a}_{x:\bar{t}|}P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) $$

$$ v^t\,{}_{t}p_x\left({}_{t}V\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\right) = \ddot{a}_{x:\bar{t}|}P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) $$

$$ {}_{t}V\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) = \frac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}{}^{1}} $$

Resultados importantes

$$ {}_{t}V_{x} = \frac{P\ddot{a}_{x:t} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\bar{t}|^1}} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{A_{x:\bar{t}|^1}} - \frac{A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\bar{t}|^1}} $$

P é o prêmio periódico de uma modalidade qualquer.

Considerando $t = n$.

$$ {}_{n}V_{x} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^1}} - \frac{A_{x^1:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^1}} $$

Resultados importantes

$$ {}_nV_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\overline{n|}^{1}}} - \frac{A_{x^1:\overline{n|}}}{A_{x:\overline{n|}^{1}}} $$

Anuidades “tontineira” (tontine).

A anuidade tontineira é o valor acumulado dos prêmios sujeitos a juros e sobrevivência.

$$ \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{v^n \; {}_np_x} $$

Custo acumulado do seguro.

Valor de um seguro temporário financiado pelos sobreviventes desse período.

$$ \frac{A_{x^1:\overline{n|}}}{v^n \; {}_np_x} $$

Resultados importantes

- A anuidades "tontineira" foi concebida para pagar benefícios a sobreviventes da seguinte forma:

- Um grupo de participantes se une e faz pagamentos regulares ao fundo. Os participantes que morrem ao longo do período deixam de contribuir, ...
  - o benefício que já foi pago por eles será dividido aos sobreviventes passados n anos

$$_{/n}\ddot{S}_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\overline{n|}^{1}}}$$

Resultados importantes

A anuidade tontineira é o valor acumulado dos prêmios sujeitos a juros e sobrevivência.

Este tipo de seguro pode ser um incentivo ao homicídio de pessoas próximo ao período final de contribuição e, por isso, não pode ser comercializado.

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.

- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.