

# Matemática atuarial

## Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

## ➤ Inflação

- Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.
  - FIPE
  - FGV
  - DIEESE
- É a elevação generalizada dos preços de uma economia.
  - Excesso de gastos
  - Aumento de salários mais rápido do que da produtividade
  - Aumento dos lucros
  - Aumento nos preços das matérias primas
  - ...

- Taxa real de juros ( $t_r$ )
  - Essa taxa elimina o efeito da inflação
  - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva ( $i$ ) a taxa de inflação no período ( $j$ ) e a taxa real ( $t_r$ ) é dada por:

$$(1 + i) = (1 + t_r)(1 + j)$$

**EXEMPLO 1:** Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?



**EXEMPLO 1 :** Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36%. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$i = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42,58\% \text{ ao ano.}$$

$$(1 + 0,4258) = (1 + t_r)(1 + 0,15)$$

$$t_r \approx 23,98\% \text{ ao ano.}$$

O ganho real do banco terá sido de 23,98% ao ano.

# Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1 + i)^n$$

➤ O capital  $P$  também é chamado de valor presente,  $F_0$ , ( $VP$ ) e o montante  $M$  de valor futuro,  $F$  ( $VF$ ), assim:

$$F = F_0(i + 1)^n$$

Logo:

$$F_0 = \frac{1}{(1 + i)^n} F$$

➤  $FCC(i, n) = (1 + i)^n$  : fator de capitalização (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

➤  $FAC(i, n) = v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$ : Fator de atualização do capital, ou fator de desconto ( O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

# Juros Compostos- Depósitos em série

➤ Série é a generalização do conceito de soma para uma **sequência** de **infinitos** termos.

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

# Juros Compostos - Depósitos em série

➤ Se  $a$  é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a + ar + ar^2 + \dots$$

É chamada, **série geométrica de razão  $r$**

**A sequência de elementos de uma série geométrica é chamada de progressão geométrica.**



## Juros Composto - Depósitos em série

➤ A soma de  $n$  termos de uma progressão geométrica é dada por  $S_n$ , tal que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

para  $r \neq 1$

### Demonstração:

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão  $r$ :

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \dots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

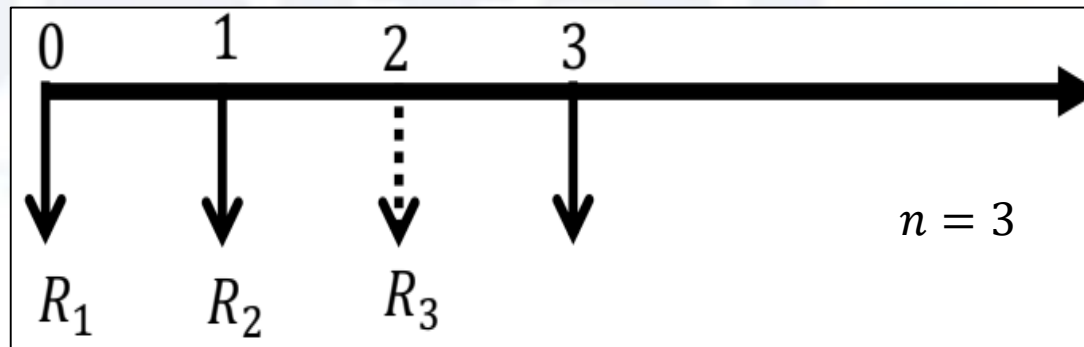
## Juros Compostos- Depósitos em série

- Depósitos em série correspondem a um conjunto de  $n$  depósitos de valores  $(R_j)$ , distribuídos ao longo do tempo.
- Depósitos constantes e distintos.



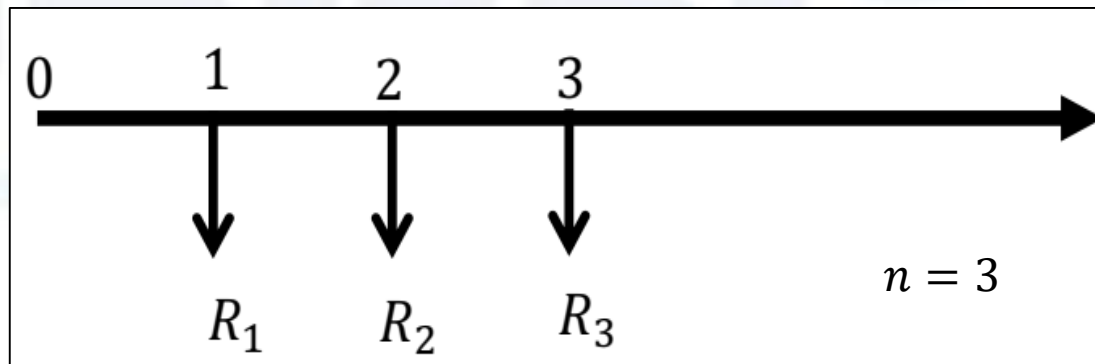
## Juros Compostos - Depósitos em série

- O movimento de dinheiro devido aos depósitos em série constitui o chamado fluxo de caixa.
- Fluxo Antecipado: Depósitos no início dos períodos, ou seja, iniciam-se na data zero.
  - Ao fazer  $n$  depósitos, o primeiro depósito começa na data 0, e o último é feito na data  $n - 1$



## Juros Compostos - Depósitos em série

- O conjunto de depósitos ao longo dos  $n$  períodos, constitui-se num fluxo de caixa.
- Fluxo Postecipado: Depósitos no final dos períodos, ou seja, iniciam-se na data um.
  - Ao fazer  $n$  depósitos, o primeiro depósito começa na data 1, e o último é feito na data  $n$ .



**EXEMPLO 2:** Qual é o montante após  $n$  depósitos mensais iguais a  $R$ , feitos em uma conta poupança que remunera a uma taxa de juros mensal igual a  $i$ ? **Considere o fluxo antecipado.**



# Juros Compostos - Depósitos em série

Data0	$R$					
Data1		$R$				
Data2			$R$			
Data3				$R$		
...					...	
Data(n-1)	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$	$R(1+i)^{n-3}$	$R(1+i)^{n-4}$		$R$
	$R(1+i)^n$	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$	$R(1+i)^{n-3}$		$R(1+i)$

$$S = F_0 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} F_j$$

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R(1+i) = \sum_{j=1}^n R(1+i)^j$$

$$S = \sum_{j=1}^n R(1+i)^j = (1+i) \sum_{j=1}^n R(1+i)^{j-1}$$

$\sum_{j=1}^n R(1+i)^{j-1}$  corresponde a soma de  $n$  elementos de uma progressão geométrica, o termo inicial ( $a$ ) é igual a  $R$  e a razão ( $r$ ) é igual a  $(1+i)$ . Assim:

$$S = \frac{R[1 - (1+i)^n]}{[1 - (1+i)]} (1+i)$$

$$S = -\frac{R[1 - (1+i)^n](1+i)}{i}$$

Como

$$S = - \frac{R[1 - (1 + i)^n](1 + i)}{i}$$

Logo:

$$S = \frac{R(1 + i)[(1 + i)^n - 1]}{i}$$





# Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de depósitos **variáveis** tem-se que (fluxo antecipado \*).
- Fluxo antecipado porém o modelo considera depósito no mês de resgate, daí é um fluxo genérico na verdade.
- Após o primeiro mês o primeiro depósito ( $F_0$ ) montara á:

$$F_1 = R_0(1 + i) + R_1$$

- Após o segundo mês temos:

$$F_2 = F_1(1 + i) + R_2$$

Logo,

$$F_3 = F_2(1 + i) + R_3$$

$$F_4 = F_3(1 + i) + R_4$$

...

# Juros Compostos - Depósitos em série

➤ Note também que:

$$F_1 = R_0(1+i) + R_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + R_2 = [R_0(1+i) + R_1](1+i) + R_2$$

$$F_2 = R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$

$$F_3 = R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + R_4 = [R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = R_0(1+i)^4 + (1+i)^3R_1 + (1+i)^2R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

➤ No tempo  $n$ , lembrando o resgate é feito após o último depósito, assim  $R_n$  não é depositado.

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$$

# Juros Compostos - Depósitos em série

## ➤ Fluxo Antecipado

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1 + i)^{n-j} R_j$$

## ➤ Fluxo Postecipado

$$S = \sum_{j=1}^n (1 + i)^{n-j} R_j$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Depósito de valor fixo	$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Depósito de valor variável	$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$	$S = \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} R_j$

**EXEMPLO 3:** Faz-se um depósito mensal de \$ 100,00 em uma conta de poupança que paga juros de 0,6% ao mês. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo Antecipado e também Postecipado.

## ➤ Fluxo Antecipado:

$$S = \frac{100(1 + 0,006)[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = \$303,6144$$

ou

$$S = \sum_{j=0}^2 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = 100(1,006)^3 + (1,006)^2 100 + (1,006) 100 = \$303,6144$$

## ➤ Fluxo Postecipado:

$$S = \frac{100[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = \$301,8036$$

ou

$$S = \sum_{j=1}^3 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = (1,006)^2 100 + (1,006) 100 + 100 = \$301,8036$$

Imagina agora que ao invés do interesse no montante ao fim de  $n$  depósitos, queremos saber o valor presente (VP) de todos esses depósitos.

Data0	$R$	$R \left( \frac{1}{1+i} \right)$	$R \left( \frac{1}{1+i} \right)^2$	$R \left( \frac{1}{1+i} \right)^3$	...	$R \left( \frac{1}{1+i} \right)^{n-1}$
Data1		$R$				
Data2			$R$			
Data3				$R$		
...					...	
Data(n-1)						$R$

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} R \left( \frac{1}{1+i} \right)^j = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v}$$

Em que  $v = \frac{1}{1+i}$

➤ O valor presente de uma série de pagamentos representa por exemplo um valor de financiamento a uma taxa  $i$  que será pago em  $n$  prestações

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v}$	$VP = \frac{Rv(1 - v^n)}{1 - v}$
Pagamento Variável	$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j$	$VP = \sum_{j=1}^n v^j R_j$

**EXEMPLO 4:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga no ato da liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?





**EXEMPLO 4:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga no ato da liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

**Resp.:**

$$VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v} \rightarrow R = \frac{VP(1 - v)}{1 - v^n}$$

Como  $v = \frac{1}{1+0,02}$  então

$$R = \frac{15000(1-v)}{1-v^4} = \$3862,11$$

➤ Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j = R + v R + v^2 R + v^3 R$$

$$R = \frac{VP}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3\right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,0404} + \frac{1}{1,0612}} = \$3862,11$$

**EXEMPLO 5:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga **1 ano após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?



**EXEMPLO 5:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 1 ano após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

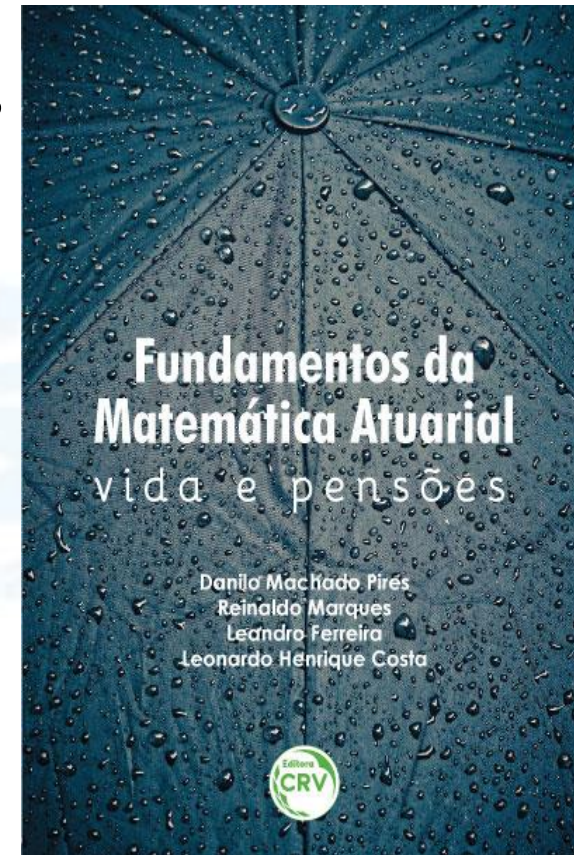
$$VP = \frac{Rv[1 - v^n]}{1 - v} \rightarrow R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \$3939,356$$

➤ Pagamento 30 dias após a liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{1+i} \right)^j R_j = vR + v^2R + v^3R + v^4R$$

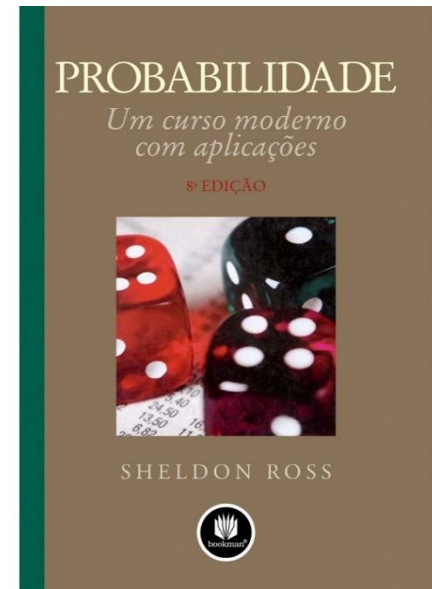
$$R = \frac{15000}{\left[ \left( \frac{1}{1,02} \right) + \left( \frac{1}{1,02} \right)^2 + \left( \frac{1}{1,02} \right)^3 + \left( \frac{1}{1,02} \right)^4 \right]} = \$3939,35$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.



# Bibliografia

JAMES,B. R.; Probabilidade: **Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004



Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001.

