Matemática atuarial

Seguros Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros..
  - Avaliar riscos.
  - Avaliar sistemas de investimentos.

- A matemática atuarial atua fornecendo meios para apuração de prêmios de seguros ligados à vida...
  - Produtos atuariais do ramo vida
    - Seguros,
    - Planos de previdência,
    - Planos de beneficio

Seguros

- *Seguro é todo contrato pelo qual uma das partes, **segurador**, se obriga a indenizar a outra, **segurado**, em caso de ocorrência de **sinistro**, em troca do recebimento de um **prêmio** seguro.*

- Características do contrato de seguros
  - Aleatório: Depende de elementos futuros e incertos;
  - Bilateral: Há obrigações para as duas partes;
  - Oneroso: Segurado e segurador possuem ônus e vantagens econômicas;
  - Solene: Há uma formalidade materializada na forma de apólice;

Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte .
  - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
  - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
  - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.
  - Refletem uma característica única nos seres humanos.

Seguro de vida

- Para a apuração dos prêmios ligados à vida é necessário uma avaliação do risco de morte:

- Como o risco é uma Probabilidade de ocorrência de eventos desfavoráveis, logo:

  - É necessário identificar e caracterizar a variável aleatória trabalhada.
    - **Tempo de vida restante.**

- Diferente do risco de danos, no risco de vida a seguradora com certeza terá que pagar algum dia o valor de indenização.

Seguro de vida

- Suponha que a seguradora deseja guardar hoje o valor presente do gasto que ela terá com o segurado no futuro. Qual deverá ser esse valor?

Lembrando da matemática financeira temos que

$$F_0 = F\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

ou

$$F_0 = Fv^n$$

Como é usual chamar de b o beneficio pago ao segurado temos:

$$F_0 = bv^n$$

n nesse caso corresponde ao tempo de vida do segurado, e quanto é esse tempo?

Seguro de vida

- Seja x o individuo de idade x que faz seguro de vida inteiro (vitalício).

- Seja T, o tempo de vida futuro (ou adicional) de x.
  - T é uma variável aleatório tal que $T \in (0, \infty)$

- Logo o tempo, n, que a seguradora irá guardar o dinheiro corresponde a variável aleatória T (tempo adicional do individuo), que pode ser caraterizada por.
  - Tabua de vida.
  - Função de distribuição.

- Exemplo 1

Para que um beneficiário receba um valor financeiro de $R\$100000,00$ ao final do ano de morte do segurado, daqui T anos. Qual deve ser o valor presente F_0 ou $V.P.$?

Resp.

$$V.P. = 100000\left(\frac{1}{1+i}\right)^{T+1} = 100000v^{T+1}$$

- EXEMPLO 1 (continuação)

Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então

$$v = \frac{1}{1 + 0{,}05} = 0{,}9524$$

Assim pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário à indenização de $R\$100000{,}00$ para os casos em que:

- O indivíduo x (segurado) morra em 4 anos.

$$V.P. =$$

- O indivíduo x (segurado) morra em 31 anos.

$$V.P. =$$

- O indivíduo x (segurado) morra em 49 anos.

$$V.P. =$$

➢ EXEMPLO 1 (continuação)

Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então

$$v = \frac{1}{1 + 0{,}05} = 0{,}9524$$

Assim pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário à indenização de $R\$100000{,}00$ para os casos em que:

➢ O indivíduo x (segurado) morra em 4 anos.

$$V.P. = 100000v^{4+1} = 100000(0{,}9524\,)^5 = \text{R\$}78360{,}45$$

➢ O indivíduo x (segurado) morra em 31 anos.

$$V.P. = 100000v^{31+1} = 100000(0{,}9524\,)^{32} = R\$21000{,}05$$

➢ O indivíduo x (segurado) morra em 49 anos.

$$V.P. = 100000v^{49+1} = 100000(0{,}9524\,)^{50} = R\$8720{,}37$$

Seguro de vida

- Em resumo temos que a uma taxa de 5% ao ano para um beneficiário poder ganhar $b = R\$100000{,}00$ reais depois de 4 , 31 e 49 anos, tempos que ter os seguintes valores presentes.

T(anos)	$V.P.$(R$)
4	R$78360,45
31	$R\$21000{,}05$
49	$R\$8720{,}37$

- Imagine que T é uma variável aleatória e esses são os únicos valores que ele pode assumir. Então que é o valor presente esperado que o individuo x deveria pagar hoje por este seguro de modo que a seguradora receba o necessário para pagar a indenização b de $R\$100000{,}00$?

Seguro de vida

- A resposta a essa questão está relacionada a esperança matemática (valor esperado ou média probabilística) de uma função de variável aleatória.

- Para o caso em questão seja T uma variável aleatória e $V.P = g(T) = bv^{T+1}$ então tem-se que

$$E[g(T)] = \begin{cases} \sum_j g(t_j)P(T = t_j),\ T\ discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f_T(t)dt\ , T\ contínuo \end{cases}$$

Seguro de vida

- Assim considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de bv^{T+1}, logo:

$$E(V.P.) = E(bv^{T+1}) = b\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}+\mathbf{1}}\right)$$

Seguro de vida

- Assim considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de bv^T, logo:

$$E(V.P.) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

$$E(V.P.) = 100000(0{,}9524)^5 P(T=5) + 100000(0{,}9524)^{32} P(T=32) + 100000(0{,}9524)^{50} P(T=50)$$

$$E(V.P.) = 100000[(0{,}9524)^5 P(T=5) + (0{,}9524)^{32} P(T=32) + (0{,}9524)^{50} P(T=50)]$$

$$E(V.P.) = 100000\boldsymbol{E(v^{T+1})}$$

- Também chamado de valor presente atuarial V.P.A.

Seguro de vida

- Para calcular o valor necessário que se deve ter **hoje** para pagar, em média, o benefício futuro, foi necessário entender o comportamento da variável aleatória T (tempo de vida adicional do segurado).

- Para prosseguirmos com a teoria até aqui apresentada, faz-se necessário a apresentação de alguns conceitos e definições que serão utilizados.

Seguro de vida

- Definição: Seja T a variável aleatória associada ao tempo de vida futuro, ou seja, o tempo entre a emissão da apólice do seguro e a morte do segurador, Então:

$$b_T = b(T)$$ → Função benefício;

$$v_T = v^{T+1}$$ → Função desconto;

$$\boldsymbol{Z(T)} = Z_T = b(T)v^{T+1}$$ → Função de valor presente.

Seguro de vida

- Chame de **Prêmio Puro** a parcela do prêmio, suficiente para pagar sinistros.
  - Neste sentido o Prêmio Puro é o prêmio que propõe o pagamento de despesas relacionadas ao risco que está sendo assumido pela seguradora.
  - O valor esperado de todas as indenizações que a seguradora compromete a pagar.
  - Em geral é estabelecido em um dado período, normalmente um ano.
  - O termo *puro* significa que ao valor considerado não foram adicionadas quaisquer cargas técnicas.
    - De gestão ou comerciais

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Como Calcular do V.P.A desse Benefício?

  - Calcular a esperança matemática da variável aleatória " quanto devo ter hoje para pagar o benefício devido em relação a um segurado?"

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- EXEMPLO 2

Pensemos no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro onde caso esse segurado faleça antes de completar 30 anos, o beneficiário receberá uma quantia de $1.u.m$ Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte e calcule o prêmio puro:

Idade	q_X
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

➢ Resp.:

$b_T = \begin{cases} 1 & t \leq 5 \\ 0 & c.c. \end{cases}$ → benefício (caso o tempo de vida adicional seja menor que o tempo de contrato, caso morra antes);

$v_T = v^{T+1} \quad t \geq 0$ → desconto (caso o tempo de vida adicional seja maior que zero, caso o segurado não morra no primeiro período do contrato);

$\boldsymbol{Z(T)} = \begin{cases} v^{T+1} & T \leq 5 \\ 0 & c.c. \end{cases}$ → valor presente atuarial(VPA) (o valor presente necessário para que a seguradora cubra a apólice contratada).

$b_T = 1.u.m, i = 4\%$

Idade	$q_x = _1q_x$	$p_x = _1p_x = 1 - q_x$	$_1l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$E(Z_T) = v^1P(T=0) + v^2P(T=1) + v^3P(T=2) + v^4P(T=3) + v^5P(T=4)$$

$$E(Z_T) = v^1P(T=0) + v^2P(T=1) + v^3P(T=2) + v^4P(T=3) + v^5P(T=4)$$

- **Importante** $P(T=t)$ corresponde a probabilidade do tempo de vida adicional ser exatamente no tempo t, no caso a probabilidade que individuo "morra" durante o intervalo t e $t+1$ é determinado

$$P(t < T \leq t+1) = P(T > t) - P(T \geq t+1)$$

$$P(t < T \leq t+1) = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x$$

Lembrando da relação ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$

$$P(t < T \leq t+1) = {}_t p_x - {}_t p_x \; {}_1p_{(x+t)}$$

$$P(t < T \leq t+1) = {}_t p_x\left(1 - p_{(x+t)}\right)$$

$$P(T=t) = ({}_t p_x)\,(q_{x+t}) = {}_{t|}\boldsymbol{q_x}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T=0) + v^2 P(T=1) + v^3 P(T=2) + v^4 P(T=3) + v^5 P(T=4)$$

$$E(Z_T) = v^1 \, {}_0p_{25} q_{25} + v^2 \, p_{25} q_{26} + v^3 \, {}_2p_{25} q_{27} + v^4 \, {}_3p_{25} q_{28} + v^5 \, {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T=0) + v^2 P(T=1) + v^3 P(T=2) + v^4 P(T=3) + v^5 P(T=4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 \left(\frac{l_{26}}{l_{25}}\right) q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T=0) + v^2 P(T=1) + v^3 P(T=2) + v^4 P(T=3) + v^5 P(T=4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\ p_{25} q_{26} + v^3\ {}_2p_{25} q_{27} + v^4\ {}_3p_{25} q_{28} + v^5\ {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 \left(\frac{l_{26}}{l_{25}}\right) q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) 0{,}00077 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 0{,}99923\ 0{,}00081 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 0{,}99842\ 0{,}00085 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 0{,}99757\ 0{,}00090 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 0{,}99667 0{,}00095$$

$$E(Z_T) \approx 0{,}003788\ \mathrm{u.m.}$$

- Outra opção seria:

$$b_T = \begin{cases} 1 & t \leq 5 \\ 0 & c.c. \end{cases} \qquad v_T = v^{T+1} \quad t \geq 0 \qquad \boldsymbol{Z_T} = \begin{cases} v^{T+1} & T \leq 5 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$V.P.A = E(Z_T)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

Como ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$, então:

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3 p_{25} p_{26} q_{27} + v^4 p_{25} p_{26} p_{27} q_{28} + v^5 p_{25} p_{26} p_{27} p_{28} q_{29}$$

$$E(Z_T) \approx 0{,}003788 \text{ u.m}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T=0) + v^2 P(T=1) + v^3 P(T=2) + v^4 P(T=3) + v^5 P(T=4)$$

$\boldsymbol{x}$	T. vida adicional	$\boldsymbol{Z(t)}$	$\boldsymbol{S_T(t) = {}_t p_x}$	$F_T(t) = {}_1 q_x$
25	$t=0$	v	$T(25) > 0$	$T(25) \leq 1$
26	$t=1$	v^2	$T(25) > 1$	$T(25) \leq 2$
27	$t=2$	v^3	$T(25) > 2$	$T(25) \leq 3$
28	$t=3$	v^4	$T(25) > 3$	$T(25) \leq 41$
29	$t=4$	v^5	$T(25) > 4$	$T(25) \leq 5$

$$E(Z_T) = \sum_{t=0}^{4} v^{t+1}\ {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0{,}003788\ \text{u. m}$$

$$\boldsymbol{A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_x}$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- O Seguro de **Vida Temporário por n anos** é o seguro que pagará uma unidade monetária (u.m.) somente se o segurado **morre dentro de n anos.**

Notação:

$$A_{x^1:\overline{n|}}$$

Lê-se: Seguro temporário por n anos após a idade x do individuo, somente será pago para o caso de morte dentre de n anos. Caso em que o tempo é contado de forma discreta.

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}}$$

Lê-se: Seguro temporário por n anos após a idade x do individuo, somente será pago para o caso de morte dentre de n anos. Caso em que o tempo é contado de forma contínua.

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$x \rightarrow \text{idade no m. do seguro}$

$n \rightarrow$ Tempo de cobertura do seguro

Barra indica que T é contínuo

"1" acima do "x" indica que o seguro é pago se "x" expirar antes que "n".

$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	caso discreto
$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	caso contínuo

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Observe que, no caso de Seguro de Vida Temporário:
  - Existe a incerteza sobre a ocorrência ou não da indenização.
  - Existe incerteza sobre o momento do pagamento.

Seguro de vida Inteiro

- Exemplo 3:

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de **vida inteiro** que paga $1\ u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser bem modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago por esse segurado?

Seguro de vida Inteiro

- Exemplo 3:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} \, {}_tp_{25} q_{25+t}$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{1} q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{3} {}_2p_{25} q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{91} {}_{90}p_{25} q_{115} = 0{,}11242$$

Seguro de vida Inteiro

- Exemplo 3:

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^1 q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \ p_{25}q_{26} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 \ {}_2p_{25}q_{27} + \cdots \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} \ {}_{90}p_{25}q_{115} = 0,11242$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^1 1q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \ p_{25}q_{26} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} \ (p_{25}p_{26}p_{27} \ldots p_{114})q_{115} = 0,11242$$

Exemplo 4

A seguradora irá pagar um benefício de 1 u.m. por um seguro temporário caso o segurado faleça $T(105)$ dentre um período de 4 anos. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e tabua at-2000 Masculina . Calcule o prêmio puro:

	x	q_x	p_x
106	105	0.37240	0.62760
107	106	0.40821	0.59179
108	107	0.44882	0.55118
109	108	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	**112**	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	**114**	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

$$A_{105^1:\overline{4}|}$$
$$= v^1\ {}_0p_{105}q_{105} + v^2 p_{105}q_{106} + v^3\ {}_2p_{105}q_{107} + v^4\ {}_3p_{105}q_{108}$$

$$A_{105^1:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1}\ {}_tp_{105}q_{105+t}$$

$$A_{105^1:\overline{4|}} = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1} \; {}_tp_{105} q_{105+t}$$

Função que recebe como entrada, a taxa de rentabilidade(i) anual, a idade do segurado (idade), o numero de anos de cobertura (n) e o valor do benefício (b).

	x	q_x	p_x
106	**105**	0.37240	0.62760
107	**106**	0.40821	0.59179
108	**107**	0.44882	0.55118
109	**108**	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	**112**	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	**114**	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

```
premio<- function( i, idade, n,b)  {
        v <-(1/(i+1))^(1:n)
        pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
```
$1, p_{105}, {}_2p_{105}, {}_3p_{105}$
```
        qxx <- c(qx[(idade+1):(idade+n)])
```
$q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}$
```
        Ax <- b* sum(v*pxx*qxx)
        return (Ax)
}
```

$A_{105^1:\overline{4|}}$= premio(0.04,105,4,1)

NOTAÇÃO: SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Caso discreto

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \ {}_tp_x q_{x+t}$$

$A_{x^1:\overline{n}|}$= premio(i,x,n,b)

NOTAÇÃO: SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

- Caso discreto

$(\omega - x) - 1$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \ {}_tp_x q_{x+t}$$

$A_{x^1:\overline{n}|}$= premio(i,x,max(x)-x,b)

Matemática atuarial

Seguros Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Seguro de vida pago no momento da morte

Seja T ou $T(0)$ a variável ser o tempo de vida adicional do individuo recém nascido (de idade 0). Então a função de sobrevivência, $S_{T(0)}\ (t)$, é a probabilidade de viver além da idade futura t.

$$S_{T(0)}(t) = 1 - F_{T(0)}(t) = p(T(0) > t)$$

Ou

$$S_T(t) = 1 - F_T(t) = p(T > t)$$

Seja $T(x)$ a variável ser o tempo de vida adicional do individuo de idade x. Então a função de sobrevivência, $S_{T(x)}\ (t)$, é a probabilidade de viver além da idade futura t.

$$S_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = p(T(x) > t)$$

Se T é a variável aleatória que representa o tempo de vida expresso em anos de um recém nascido, então nota-se que para $T(x) > t$, implica aceitar que $T(0) > x + t$ e $T(0) > x$.

- A probabilidade de uma pessoa de idade x atingir (viva) a idade $x + t$, tem-se:

$$_tp_x = S_{T(x)}(t) = p(T(x) > t) = P(T(0) > t + x | T(0) > x)$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A probabilidade de uma pessoa de idade x atingir (viva) a idade $x+t$, tem-se:

$$_tp_x = S_{T(x)}(t) = p(T(x) > t) = P(T(0) > t + x | T(0) > x)$$

$$_tp_x = \frac{S(x+t)}{s(x)} = \frac{P(T > t + x)}{P(T > x)}$$

- A probabilidade de uma pessoa de idade x morrer antes de atingir a idade $x+t$, é dado por:

$$_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{s(x)} = F_{T(x)}(t)$$

Logo:

$$_tq_x + {}_tp_x = 1$$

Exemplo 5

Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T(0)}(t) = \frac{1}{140} I_{(0,140]}(t)$$

- Calcule ${}_tp_x$ e ${}_tq_x$.

Exemplo 5

$$S_{T(x)}(t) = P(T(x) > t) = {}_t p_x$$

Contudo nota-se que para $T(x) > t$, implica aceitar que $T(0) > x + t$ e $T(0) > x$. Assim $S_{T(x)}(t) = P(T(x) > t) = P(T(0) > x + t | T(0) > x)$

$$S_{T(x)}(t) = \frac{P(T(0) > x + t, T(0) > x)}{P(T(0) > x)}$$

$$S_{T(x)}(t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{\frac{140 - (x + t)}{140}}{\frac{140 - (x)}{140}} = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$$_t p_x = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$$_t q_x = 1 - \frac{140 - x - t}{140 - x} = \frac{t}{140 - x}$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A força de mortalidade -transição instantânea de transição do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0} \frac{{}_{h}q_{x+t}}{h}$$

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0} \frac{P(T(x+t) < h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - P(T(x+t) > h)}{h} \right]$$

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - \frac{P(T(x) > t+h)}{P(T(x) > t)}}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - \frac{S_{T(x)}(t+h)}{s_{T(x)}(t)}}{h} \right]$$

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{s_{T(x)}(t) - S_{T(x)}(t+h)}{h \, s_{T(x)}(t)} \right]$$

Seguro de vida pago no momento da morte

...

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - \frac{P(T(x) > t + h)}{P(T(x) > t)}}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - \frac{S_{T(x)}(t+h)}{s_{T(x)}(t)}}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{s_{T(x)}(t) - S_{T(x)}(t+h)}{h \, . \, s_{T(x)}(t)} \right]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{s_{T(x)}(t)} \lim_{h \to 0} \left[\frac{S_{T(x)}(t+h) - s_{T(x)}(t)}{h} \right]$$

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = \frac{\boldsymbol{f_{T(x)}(t)}}{\boldsymbol{1 - F_{T(x)}(t)}}$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A força de mortalidade - transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$S(x) = S_{T(0)}(x) = p(T(0) > x)$$

$$\boxed{\mu_x = \frac{\boldsymbol{f_{T(0)}(x)}}{\boldsymbol{1 - F_{T(0)}(x)}}}$$

$$\boxed{\mu_{x+t} = \frac{\boldsymbol{f_{T(x)}(t)}}{\boldsymbol{1 - F_{T(x)}(t)}}}$$

- μ_x é uma medida relativa da mortalidade em que a idade x é atingida, enquanto q_x mede a mortalidade ao logo do ano.

Exemplo6

Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T(0)}(t) = \frac{1}{140} I_{(0,140]}(t)$$

- Calcule μ_{x+t}. Lembrando do exercício anterior que :

$$_{t}p_{x} = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

logo

$$_{t}q_{x} = \frac{t}{140 - x}$$

Exemplo6

$$\mu_{x+t} = \frac{\boldsymbol{f_{T(x)}(t)}}{\boldsymbol{1 - F_{T(x)}(t)}}$$

Como $\boldsymbol{1 - F_{T(x)}(t)} = {}_t p_x$, então :

$${}_t q_x = \frac{1}{140 - x}$$

Considerando que $\frac{d\boldsymbol{F_{T(x)}(t)}}{dt} = \boldsymbol{f_{T(x)}(t)}$, assim:

$$\frac{d\boldsymbol{F_{T(x)}(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{140 - x}\right) = \frac{1}{140 - x} = \boldsymbol{f_{T(x)}(t)}$$

Logo

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{1}{140 - x}}{\frac{140 - x - t}{140 - x}} = \boldsymbol{\frac{1}{140 - x - t}}$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A densidade de $F_{T(x)}(t)$ é obtida por meio de :

$$\mu_{x+t} = \frac{\boldsymbol{f_{T(x)}(t)}}{\boldsymbol{1 - F_{T(x)}(t)}}$$

$$f_{T(x)}(t) = \left(\boldsymbol{1 - F_{T(x)}(t)}\right)\mu_{x+t}$$

- Assim

$$f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

- O produto ${}_t p_x \mu_{x+t}$ pode ser interpretado como a probabilidade de uma pessoa que tem hoje a idade x estar viva daqui t anos, e falecer num intervalo de tempo infinitesimal..

Seguro de vida pago no momento da morte

- Assim considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de $be^{-\delta T}$, logo:

$$E(V.P.) = E\left(be^{-\delta T}\right) = bE\left(e^{-\delta T}\right)$$

Lembrando que $\delta = ln(1+i)$.

- Também chamado de valor presente atuarial V.P.A→ $\mathrm{E}(Z_T)$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO	SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

➢Caso Contínuo

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z(t) f_T(t) dt \qquad \bar{A}_x = \int_0^\infty Z(t) f_T(t) dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta T} \, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \qquad \bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta T} \, {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Exemplo 7

Considere a função de sobrevivencia e força de mortalidade de uma pessoa de idade 30 anos em dada população seja de:

$$ {}_tp_{30} = \frac{70-t}{70} \quad \text{e} \quad \mu_{30+t} = \frac{1}{70-t} \text{ para } t > 0 $$

Esse indivíduo decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que a taxa de rentabilidade constante, e suponha que $i = 5\%$ a.a.

Calculo o VPA (ou premio puro) que paga $1\,u.m.$ de beneficio no momento da morte do segurado.

- Exemplo 7

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \qquad i = 5\% \text{ a.a.} \qquad v = e^{-\ln(1{,}05)}$$

$b_T = 1 \ , 0 \leq t \leq 20$

$v_T = e^{-\delta t} \, , 0 \leq t \leq 20$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta t}; 0 \leq t \leq 20 \\ 0; \quad c.c. \end{cases}$$

- Exemplo 7

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}}\ ,\ v = e^{-\ln(1{,}05)}$$

$$V.P.A = E(Z_T) = \bar{A}_{30^1:\overline{20|}}$$

$b_T = 1\ ,0 \leq t \leq 20$ | $v_T = e^{-\delta t}\ ,0 \leq t \leq 20$ | $Z_T = e^{-\delta t}; 0 \leq t \leq 20$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-\delta t} f_T(t)dt = \int_0^{20} e^{-\delta T}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{20} e^{-0{,}04879t}\frac{1}{70}dt$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \left.\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}\right|_0^{20} = \frac{1}{-3{,}4153}\left[e^{20(-0{,}04879)} - e^{0(-0{,}04879)}\right]$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \frac{1}{-3{,}4153}\left[e^{-0{,}9758} - 1\right] \approx 0{,}182446$$

- Exemplo 7

- Veja que, é suficiente para o segurado pagar $0{,}182446\ u.m.$ hoje de forma a receber (o beneficiário) $1{,}00\ u.m.$ na ocorrência de sinistro.

O exemplo considerou que a indenização seria de $1\ u.m.$, e caso o segurado contratasse um seguro que paga R$ 250 mil reais no momento de morte? Quanto deveria ser o Prêmio Puro Único pago por ele???

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}}\,, T \sim U_c(0{,}70) \text{ e } i = 5\% \text{ a.a. } v = e^{-\ln(1{,}05)}$$

$$b = 2500000.$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = 0{,}182446$$

$$250000\,\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = 45611{,}53$$

Caso o valor do benefício seja $R\$\,250$ mil, o prêmio a ser pago pelo segurado deverá ser (arredondando no centavo) de $R\$\,45611{,}53$ (considerando a mesma taxa de juros).

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Exemplo 8

Para proteger seu filho de 5 anos, uma pessoa de 30 anos decide fazer um contrato de seguro de vida temporário com benefício variável no tempo (Considere distribuição $T(30) \sim U_c(0,70)$).
Considere $i = 5$ a.a.

I) Se morrer dentro de 10 anos o benefício será de $R\$ \, 100000{,}00$.

II) Se morrer entre 10 e 20 anos, o benefício será: $150000 - 5000t$.

- Exemplo 8

Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$Z_T = b(t)e^{-\delta T} = \begin{cases} 100000\, e^{-\ln(1{,}05)T}; & T \leq 10 \\ (150000 - 5000T)e^{-\ln(1{,}05)T}; & 10 < T \leq 20 \end{cases}$$

Portanto:

$$V.P.A = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1{,}05)t}}{70}\,dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1{,}05)t}}{70}\,dt$$

$$V.P.A = V.P.A_1 + V.P.A_2$$

$$V.P.A_1 = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1{,}05)t}}{70} dt$$

$$V.P.A_1 = \left[\frac{10000e^{-0{,}04879t}}{7(-0{,}04879)}\right]_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{t=10}} = \frac{10000e^{-0{,}4879} - 10000}{-0{,}34153}$$

$$V.P.A_1 \approx 11304{,}59$$

➢ Exemplo 8

$$V.P.A_2 = \int_{10}^{20} \frac{(\mathbf{150000 - 5000}\boldsymbol{t})e^{-\ln(1{,}05)t}}{\mathbf{70}} \boldsymbol{dt}$$

Por partes:

$$\int udr = ur - \int rdu$$

então

$$u = 150000 - 5000t; \quad \rightarrow \quad du = -5000dt$$

$$dr = \frac{e^{-\ln(1{,}05)t}}{70} dt \quad \rightarrow \quad r = \frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}$$

$$V.P.A_2 = (150000 - 5000t)\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}\Bigg|_{10}^{20} - \int_{10}^{20} - \frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)} 5000dt$$

- Exemplo 8

$$V.P.A_2 = \int_{10}^{20} \frac{(\mathbf{150000 - 5000}\boldsymbol{t})e^{-\ln(1{,}05)t}}{\mathbf{70}} \boldsymbol{dt}$$

...

$$V.P.A_2 = (150000 - 5000t)\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}\Bigg|_{10}^{20} + \int_{10}^{20} \frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)} 5000dt$$

$$V.P.A_2 = \left[(150000 - 5000t)\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}\right]_{t=10}^{t=20} + \left[\frac{e^{-0{,}04879t}}{7(-0{,}04879)^2} 500\right]_{t=10}^{t=20}$$

$$V.P.A_2 = \frac{5000e^{-0{,}04879(20)} - 10000e^{-0{,}04879(10)}}{7(-0{,}04879)} + \frac{500\left(e^{-0{,}04879(20)} - e^{-0{,}04879(10)}\right)}{7(-0{,}04879)^2}$$

$$V.P.A_2 \approx 12457{,}73 - 7112{,}165 \approx 5345{,}565$$

- Exemplo 8

Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$V.P.A = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

$$V.P.A = V.P.A_1 + V.P.A_2$$

$$V.P.A \approx 11304,59 + 5345,565 \approx R\$16650,15$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Caso Contínuo

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z(t) f_T(t) dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta T} \, {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

- Caso discreto

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z(t) P(T = t)$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

- Caso Contínuo

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z(t) f_T(t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta T} \, {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

- Caso discreto

$\omega - x$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z(t) P(T = t)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

$Z_T = \begin{cases} v^{T+1} & T \leq n \\ 0 & c.c. \end{cases}$ $\boldsymbol{A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}}$

$Z_T = \begin{cases} v^{T+1} & T \leq \infty \\ 0 & c.c. \end{cases}$ $\boldsymbol{A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}}$

$Z_T = e^{-\delta t};\ 0 \leq t \leq n$ $\boldsymbol{\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z_T \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt}$

$Z_T = e^{-\delta t};\ t \geq 0$ $\boldsymbol{\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt}$

$E(Z_T)$

$$\boldsymbol{b_T = 1}$$

$$\boldsymbol{P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}}$$

$$\boldsymbol{f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu_{x+t}}$$

Matemática atuarial

Seguros Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Uma característica importante de uma variável aleatória é sua variabilidade :
  - Em geral, é avaliada pela discrepância de seus valores em relação à média ou à mediana.
  - A média dos desvios é sempre zero e, portanto, nada informativa.

- Tomando o quadrado dos desvios e, então, calculando o valor esperado, chegamos a uma das mais importantes medidas de variabilidade.

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- A definição matemática da variância de uma variável aleatória Z é tal que:

$$var(Z) = E\left[\left(Z - E(Z)\right)^2\right] = \sigma_Z^2$$

- A raiz quadrada da variância é denominada de desvio-padrão e representado por σ.

- Pode se calcular a variância também por:

$$var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Lembrando que Z nesse caso é Z_T ou $Z(T)$, ou seja, uma função de variável aleatória e por consequência também uma variável aleatória.

$$\boldsymbol{var(Z)} = var(b(T)v^T) = \boldsymbol{b(T)^2 var\left(v^T\right)}$$

- Supondo $b(T) = 1$ a fim de simplificação, tem-se:

$$var(Z) = var(v^T) = E\left[\left(v^T - E(v^T)\right)^2\right]$$

$$var(Z) = var(v^T) = E(v^{2T}) - E(v^T)^2$$

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Caso de T contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{x^1:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x^1:\overline{n}|}\right)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T}) - E(v^T)^2 = \int_0^n w^t f_T(t)dt - \left[\int_0^n v^t f_T(t)dt\right]^2$$

- Caso de T discreto: $var(Z_T) = {}^2A_{x^1:\overline{n}|} - \left(A_{x^1:\overline{n}|}\right)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+2})^2 = \sum_{t=0}^{n-1} w^{t+1} \ {}_tp_x q_x - \left[\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \ {}_tp_x q_x\right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$ Chamado de fator de desconto

Cálculo da variância: Seguro de vida inteiro

- Caso de T contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_x - (\bar{A}_x)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T}) - E(v^T)^2 = \int_0^\infty w^t f_T(t)dt - \left[\int_0^\infty v^t f_T(t)dt\right]^2$$

- Caso de T discreto: $var(Z_T) = {}^2A_x - (A_x)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w^{t+1}\ {}_tp_x q_x - \left[\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x q_x\right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$ Chamado de fator de desconto

Exemplo de Cálculo da variância

- Exemplo 9

Calcule a variância de $E(Z_t)$.

$$b_T = 1\ , 0 \leq t \leq 5 \qquad v^{t+1}\,, t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} v^{t+1}; & 0 \leq t \leq 5 \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

Lembramos que $A_{25^{1}:\overline{5}|} = 0{,}0037888$ e $i = 4\%$.

➢ Dados do exemplo 9

$\mathrm{i} = 4\%$

Idade	$q_X =_1 q_x$	$p_X =_1 p_x = 1 - q_x$	${}_1l_x = \dfrac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

➢ Exemplo 9

$$var(Z_t) = \ {}^{2}A_{25^{1}:\overline{5}|} - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_t) = \sum_{t=0}^{4} \left[\left(\frac{1}{1{,}04} \right)^2 \right]^{t+1} {}_{t}p_{25} q_{25+t} - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_T\ ) = \left[\left(\frac{1}{1{,}04} \right)^2 q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04} \right)^4 {}_{1}p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04} \right)^6 {}_{2}p_{25} q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04} \right)^8 {}_{3}p_{25} q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04} \right)^{10} {}_{4}p_{25} q_{29} \right] - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_t) = 0{,}1224543$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Exemplo 10

Novamente vamos considerar uma pessoa de idade 30 anos que decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que o tempo de vida adicional T desta pessoa possa ser modelado pela distribuição uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja:

$$T \sim U_c(0{,}70).$$

Suponha que $i = 5\%$ a.a.

Sabemos pela resolução do problema que $\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \approx 0{,}182446$. A partir dessas informações obtenha a variância para esse seguro.

- Exemplo 10

$$b_T = 1 \ , 0 \leq t \leq 20 \qquad e^{\delta t} \ , t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} e^{\delta t}; & 0 \leq t \leq 20 \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

$$var(Z_T) = \int_0^{20} w^t f_T(t) dt - (0{,}182446)^2$$

$$var(Z_T) = \int_0^{20} e^{-2\delta t} \frac{1}{70} dt - (0{,}182446)^2 =$$

$$var(Z_T) = \frac{1 - e^{-40\delta}}{140\delta} - (0{,}182446)^2 = 0{,}09231757$$

$$\sigma_{Z_T} = \sqrt{0{,}09231757} = 0{,}3038381$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Exemplo 11

Imagine um carteira com 100 indivíduos (todos de mesma idade) que contratam hoje um seguro de vida inteiro. Seja a taxa instantânea de mortalidade, $\lambda = 0{,}04$ e a taxa instantânea de juros, $\delta = 0{,}06$

Seja ainda $T \sim \exp(0{,}04)$.

Qual o prêmio puro a ser cobrado de cada segurado, considerando um benefício de 1 u.m.? E o prêmio total da carteira?

- Exemplo 11

$$E(Z_t) = \int_0^{\infty} z_T f_T(t)dt = \bar{A}_x$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-0,06t} 0,04 e^{-0,04t} dt = \int_0^{\infty} 0,04 e^{-0,1t} dt$$

$$\bar{A}_x = -0,4e^{-0,1t}\Big|_0^{\infty} = \lim_{t\to\infty} 0,4e^{-0,1t} + 0,4e^0$$

$$\bar{A}_x = 0,4 \text{ u. m.}$$

- Veja que, o gasto médio com pagamento de sinistros será de 0,40 $u.m$ por segurado.

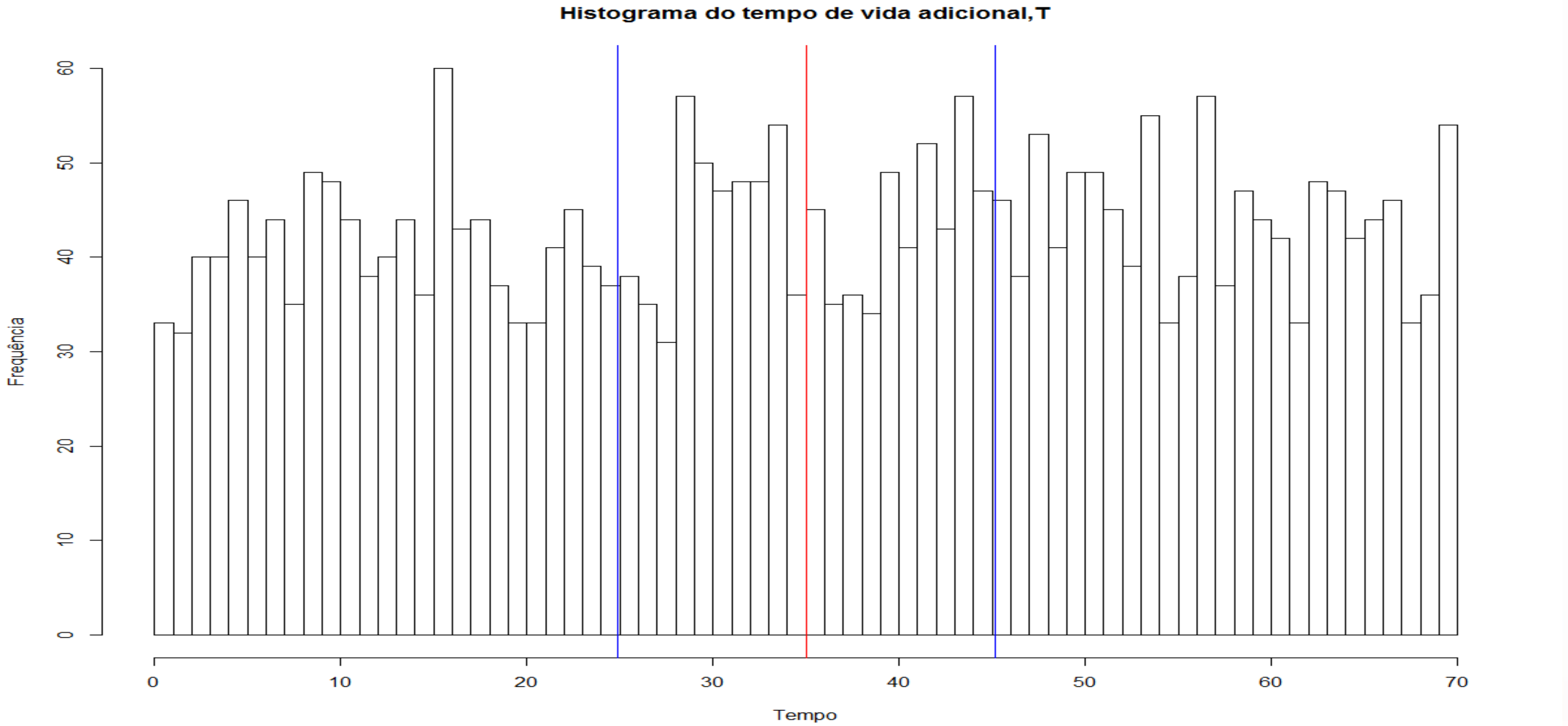
- Considerando que existem 100 pessoas na carteira, o prêmio total cobrado será de 40 $u.m$. para que a seguradora consiga honrar seus compromissos relativos à sinistros.

SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Para visualizar o que ocorre com os segurados individuais, vamos imaginar um conjunto de 3000 segurados, todos com tempos de vida futura modelados por $T \sim U_c(0{,}70)$ e independentes.

$$E(T) = 35$$
$$var(T) = 102{,}83$$

- Simulando cada um dos tempos de vida adicionais, $t_1, t_2, \dots, t_{3000}$, podemos imaginar 3000 segurados (ou 3000 cenários possíveis de sobrevida de um único segurado), ou seja, sabemos o tempo de vida de 3000 segurados.



➢ De 0 a 70 foram gerados 3000 valores de T, e para essa simulação em verificamos pelo histograma acima como os dados se distribuem.

```
T    <-runif(3000,0,70)
hist(T, breaks=70,main=c('Histograma do tempo de vida adicional,T'),ylab=('Frequência'))
```

SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Não sabemos qual é o tempo de vida adicional de cada segurado.
  - O valor total a ser pago pela seguradora para um beneficiário é uma variável aleatória.
  - Por isso a necessidade do calculo da estimativa do premio puro único.

$\bar{A}_{30}\ , T \sim U_c(0{,}70)$ $\quad i = 5\%$ a.a. $\quad b(t) = R\$200000{,}00$

$$V.P.A = \int_0^{70} z_T f_T(t)dt = \int_0^{70} 200000e^{-\ln(1{,}05)t}\frac{1}{70}dt$$

$$V.P.A = -\frac{200000e^{-\ln(1{,}05)t}}{70ln(1{,}05)}\Bigg|_0^{70} = \frac{200000}{70\ln(1{,}05)}\left[-e^{-\ln(1{,}05\,)70} + e^{-\ln(1{,}05\,)0}\right]$$

$$V.P.A = 58559{,}81[-e^{-3{,}415} + 1] \approx \mathbf{56634{,}57}$$

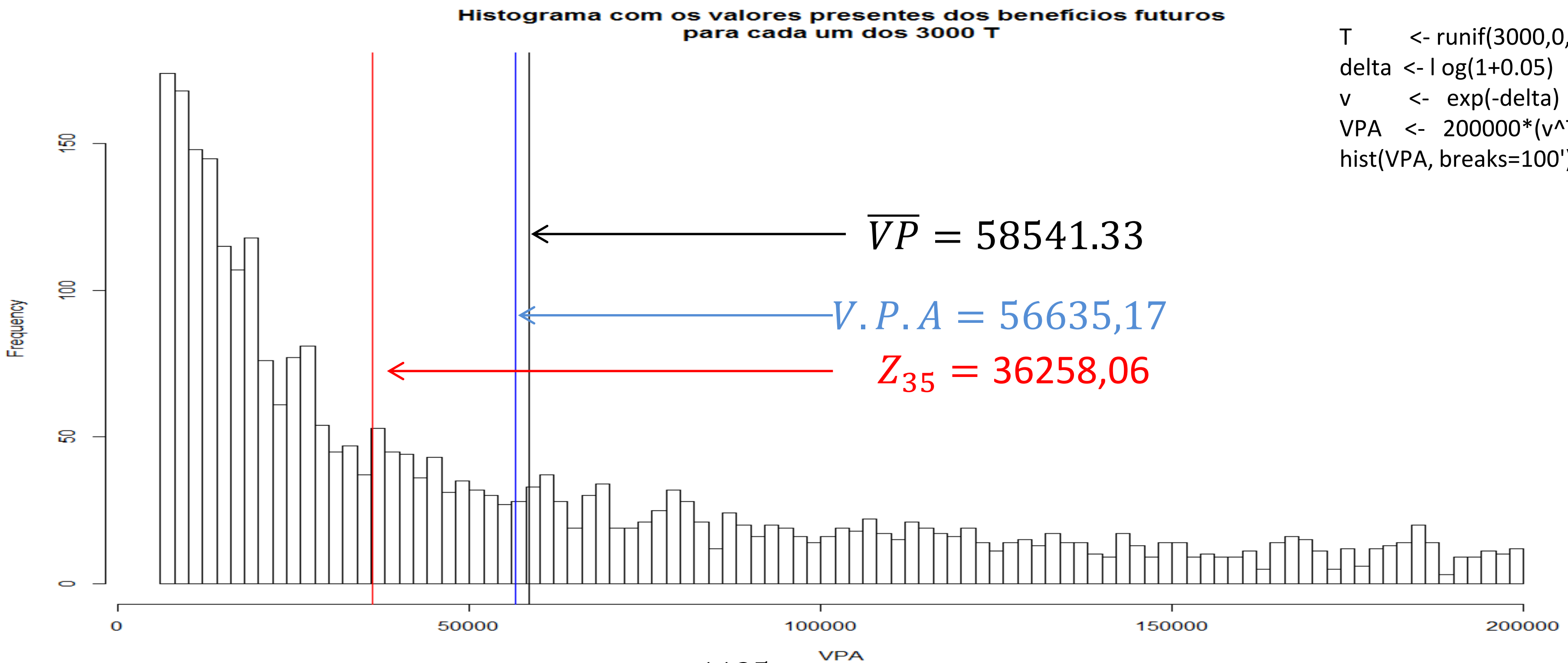
SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Caso soubéssemos com certeza o dia exato em que o segurado irá morrer. Então o valor que devemos ter hoje para pagar esse benefício futuro seria apenas o benefício do futuro trazido a valor presente.

- Levando em consideração que “sabemos” previamente a sobrevida de cada segurado (dados simulados). Os valores presentes necessários a indenização de cada segurado pode ser calculada.

- Assim:

$$Z_t = b(t)v^t = 200000e^{-\delta t} = 200000e^{-\ln(1,05)t}$$




```
T      <- runif(3000,0,70)
delta  <- l og(1+0.05)
v      <-  exp(-delta)
VPA    <-  200000*(v^T)
hist(VPA, breaks=100')
```

$n = 1865$	$n = 1135$
$n = 1838$	$n = 1162$
$n = 1459$	$n = 1541$

- *A distribuição Uniforme para modelar a sobrevida do segurado, leva a um valor de prêmio alto, pois essa supõem que chance da pessoa morrer "cedo" é igual a de morrer "tarde".*

- *Apesar das limitações estimativa se mostrou próxima da média verificada posteriori.*

SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Devido à variabilidade elevada, pode ser interessante calcular determinar o valor presente a partir de um quantil predeterminado.

- Ou seja, obter um valor presente de baseado nas probabilidades das indenizações futuras serem inferiores ao estipulado.

$$P(Z \leq \Pi) = \alpha$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Ou seja, obter um valor presente de baseado nas probabilidades das indenizações futuras serem inferiores ao estipulado.

$$P_{VP}(VP \leq \Pi) = \alpha$$

$$P\left(be^{-\delta T} \leq \Pi\right) = \alpha$$

$$P\left(e^{-\delta T} \leq \frac{\Pi}{b}\right) = \alpha$$

$$P(-\delta T \leq \ln(\Pi) - \ln(b)\ ) = \alpha$$

$$P_T\left(T \geq \frac{\ln(b) - \ln(\Pi)}{\delta}\right) = \alpha$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO

$$P\left(Z \leq \Pi_{t_\alpha}\right) = \alpha$$

$$P(T \geq t_\alpha) = \alpha$$

$$\Pi_{t_\alpha} = be^{-\delta t_\alpha}$$

Assim:

$$t_\alpha = \frac{\ln(b) - \ln(\Pi_{t_\alpha})}{\delta}$$

Como a variável aleatória de comportamento conhecido é o tempo (T), é mais conveniente lidar com sua distribuição do que com a distribuição dos valor presente atuarial.

SEGURO DE VIDA INTEIRO

Exemplo 12

- Seja um seguro de vida vitalício de uma pessoa de 30 anos que deseja receber um benefício de $b = R\$20000{,}00$. Onde o tempo de vida adicional T desta pessoa possa ser modelado como $T \sim U_c(0{,}70)$. Suponha que $i = 5\%$ a.a.

- Supondo que 90% das pessoas sobrevivem além do tempo t. Qual o valor presente mínimo necessário para cobrir 90% das apólices?

Exemplo 12

- $b = R\$20000{,}00.\ T \sim U_c(0{,}70).\ i = 5\%$ a.a. $\alpha = 0{,}9$

$$P(T \geq t_{90\%}) = 0{,}9$$

$$P(T \geq t_{90\%}) = 1 - F_T(t_{90\%}) = \mathbf{1} - \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t_{90\%}}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{70}}\,\boldsymbol{dt} = \boxed{\frac{70 - t_{90\%}}{70}} = 0{,}9$$

$$\frac{70 - t_{90\%}}{70} = 0{,}9$$

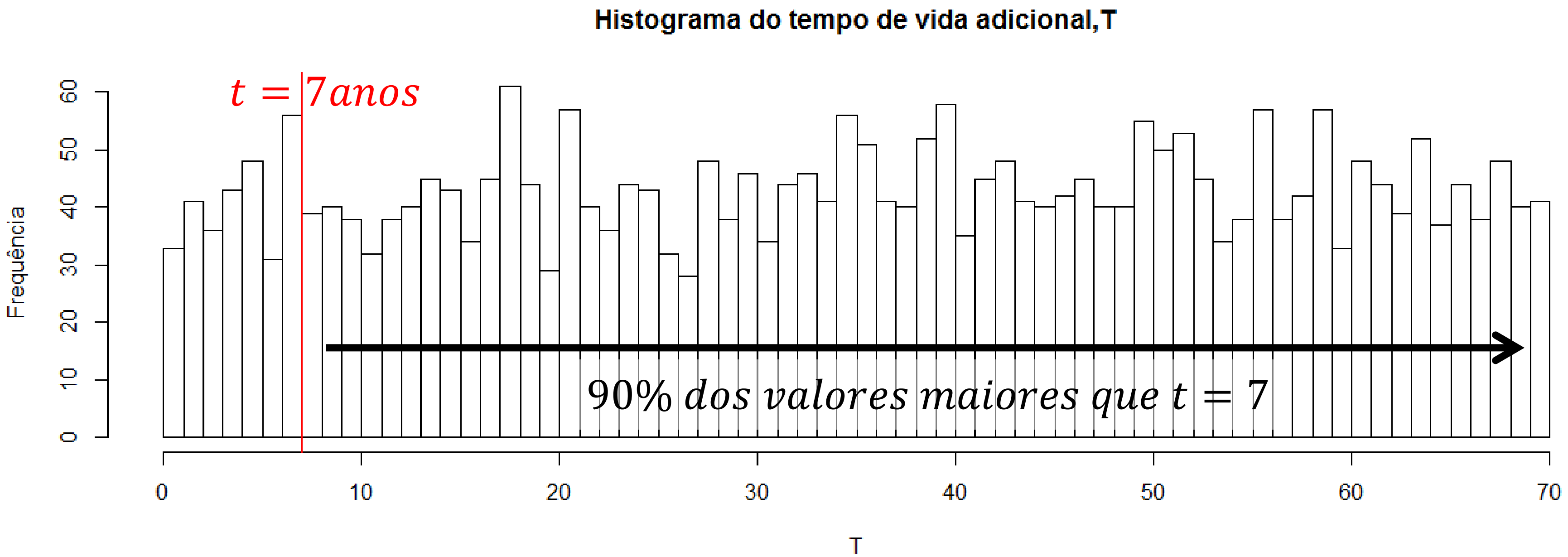
$$t_{90\%} = 7$$

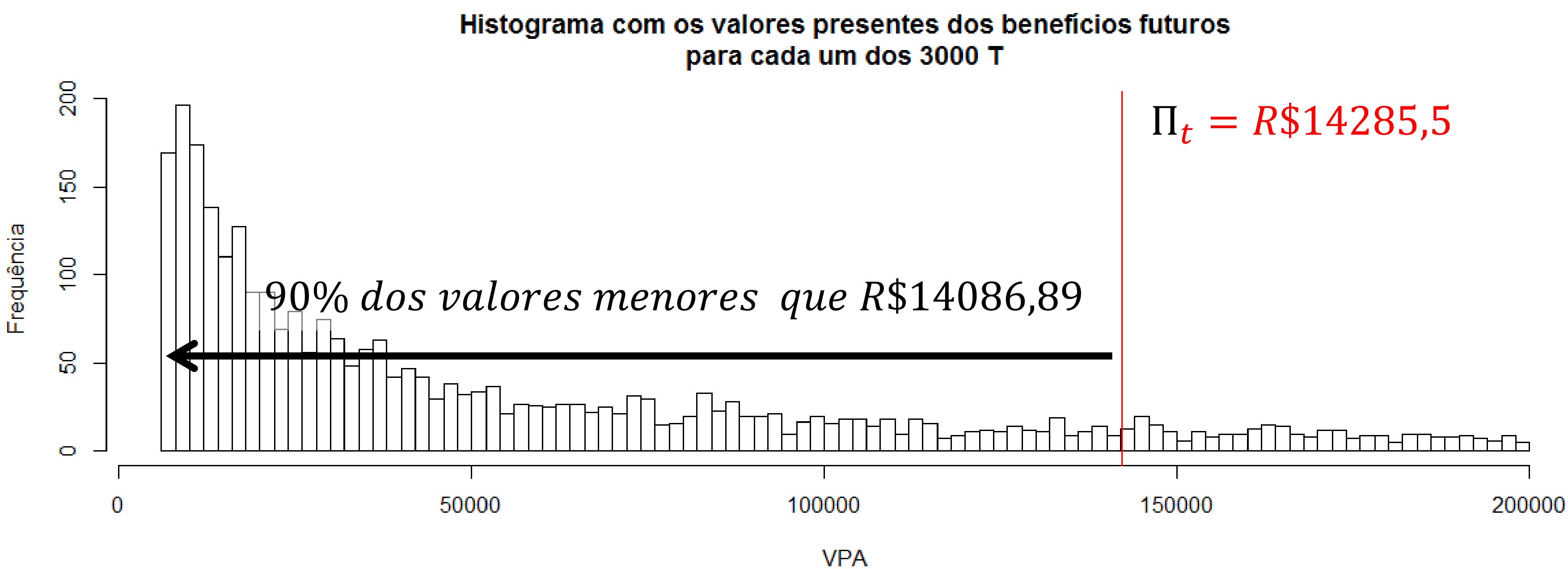
$$P(T \geq 7) = 0{,}9$$

$$P\left(T \geq \frac{\ln(b) - \ln(\Pi)}{\delta}\right) = P\left(T \geq \frac{ln(20000) - \ln(\Pi)}{0{,}048}\right) = 0{,}9$$

$$\frac{9{,}903 - \ln(\Pi)}{0{,}048} = 7$$

$$\Pi = R\$14285{,}5$$





- Quanto maior o tempo de vida adicional menor o valor presente.
  - Valores grandes de t se geram valores pequenos e próximos de VPA

SEGURO DE VIDA INTEIRO

- Exemplo 13

Imagine um carteira com 100 indivíduos, todos de mesma idade, que contratam hoje um seguro de vida inteira. Seja a taxa instantânea de mortalidade, $\lambda = 0{,}04$ e a taxa instantânea de juros, $\delta = 0{,}06$

Seja ainda $T \sim \exp(0{,}04)$

$$f_T(t) = 0{,}04e^{-0{,}04T}.$$

Determine o tempo de sobrevida do qual 90% das pessoas venham a falecer. E determine o valor presente mínimo necessário a cobrir 10% dessas apólices?

Lembrando que $E(Z_t) = 0{,}4\ \text{u.m.}$

- Exemplo 13

Determine o tempo de sobrevida do qual 90% das pessoas venham a falecer...

$$P(T < t) = 0{,}9 \rightarrow P(T > t) = 0{,}1$$

...E determine o valor presente mínimo necessário a cobrir essas 10% dessas apólices?

$$P(Z < \Pi) = 0{,}1$$

Logo $\alpha = 0{,}1$

SEGURO DE VIDA INTEIRO

Exemplo 13

- $b = 1\, u.m.$ (por indivíduo) $\quad T \sim \exp(0{,}04),\quad \delta = 0{,}06 \quad \alpha = 0{,}1$

$$P(T \geq t_{10\%}) = 0{,}1$$

$$P(T \geq t_{10\%}) = 1 - F_T(t_{10\%}) = 1 - \int_0^{t_{10\%}} 0{,}04e^{-0{,}04t}dt$$

$$P(T \geq t_{10\%}) = 1 - (1 - e^{-0{,}04t_{10\%}}) = 0{,}1$$

$$e^{-0{,}04t_{10\%}} = 0{,}1$$

$$0{,}04t_{10\%} = 2{,}3$$

$$t_{10\%} = 57{,}5$$

A probabilidade de que as pessoas venham a morrer no período de 57,5 anos é de 90%, ou seja, espera-se que somente 10% das pessoas superem esse tempo de vida adicional.

Exemplo 13

$b = 1\, u.m.$ (por indivíduo) $T \sim \exp(0{,}04),$ $\delta = 0{,}06$ $\alpha = 0{,}1.$

Considerando que :

$$P(T \geq 57{,}5\ ) = 0{,}1$$

Então

$$\frac{ln(0) - \ln(\Pi)}{0{,}06} = 57{,}5$$

$$\Pi = R\$\ 0{,}031$$

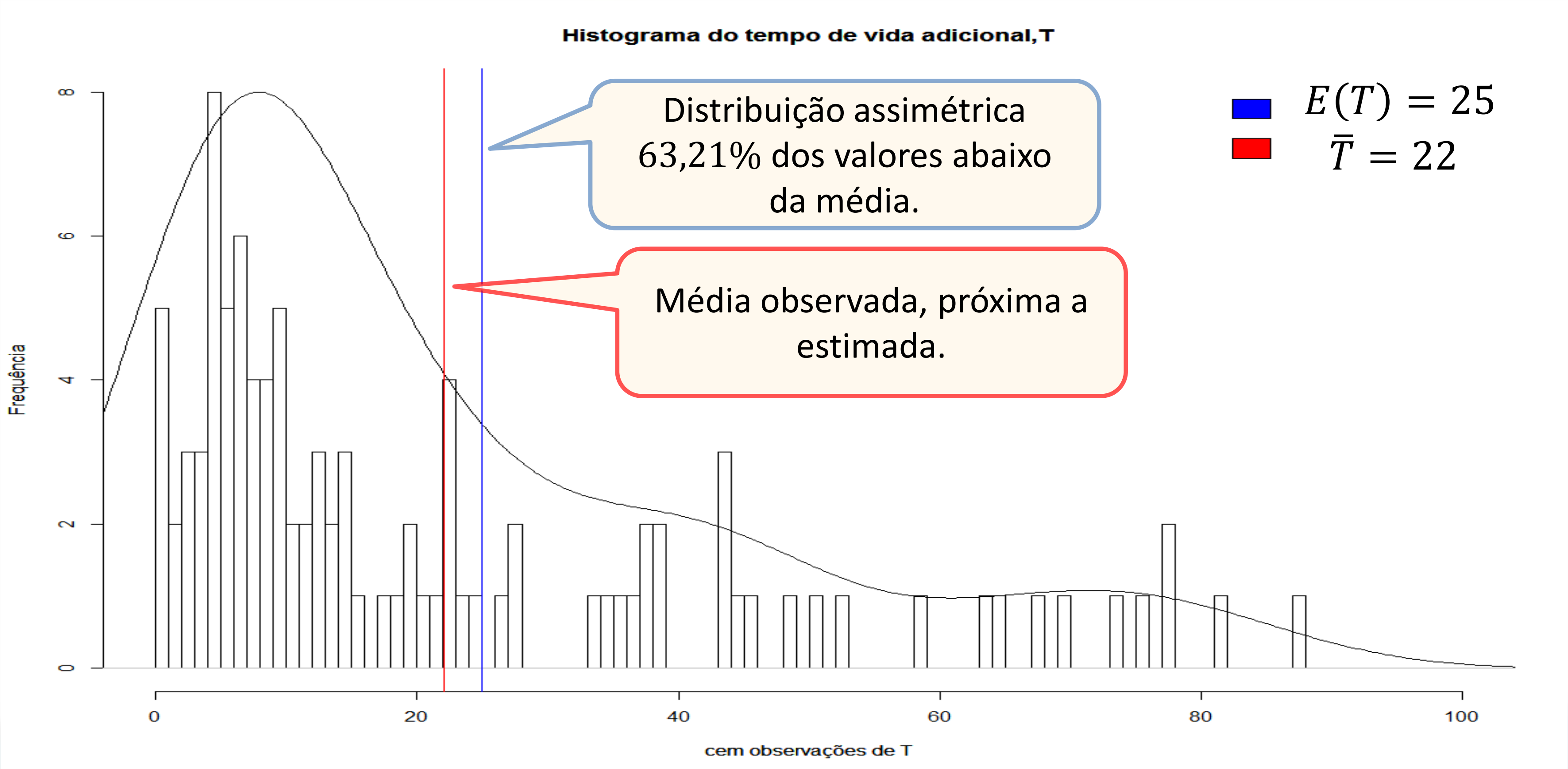
O valor presente mínimo necessário para cobrir as indenizações em 10% dos casos deve ser de $0{,}031\ u.m.$

Exemplo 13

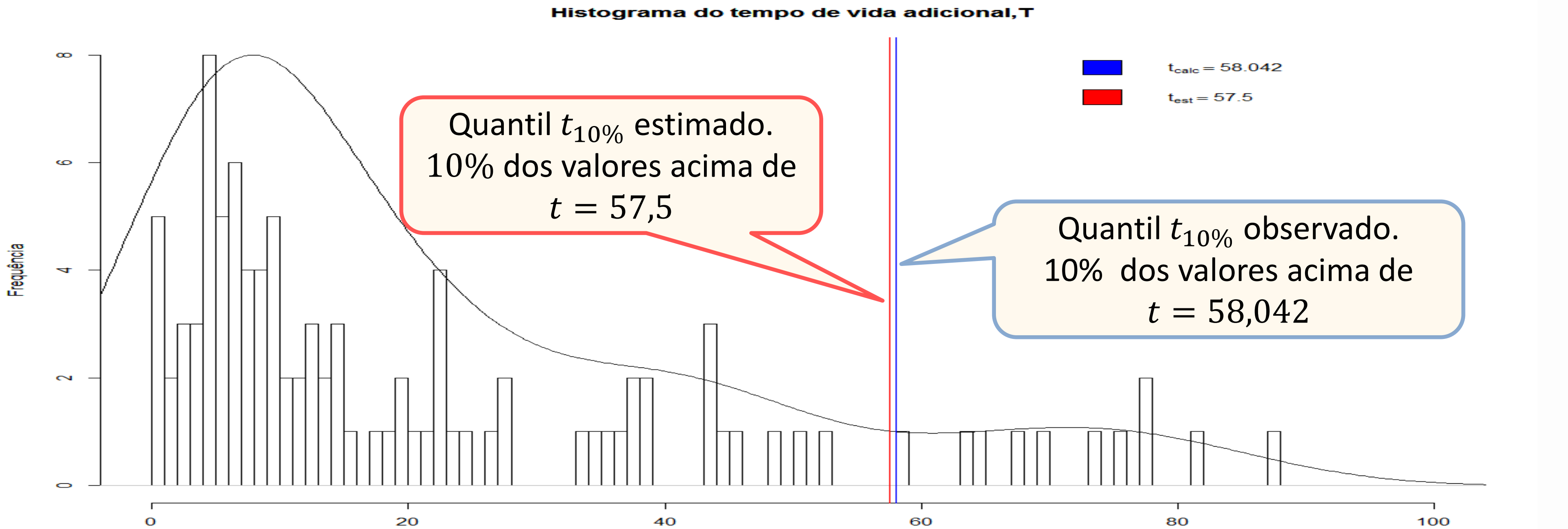
- Considerando que temos 100 indivíduos na carteira. O valor presente necessário mínimo necessário a essa condição deve ser de $3{,}1\ u.m$.

- Observe que o valor de $0{,}031\ u.m$ só diz respeito a uma reserva suficiente para cobrir 10% dos casos de indenizações.

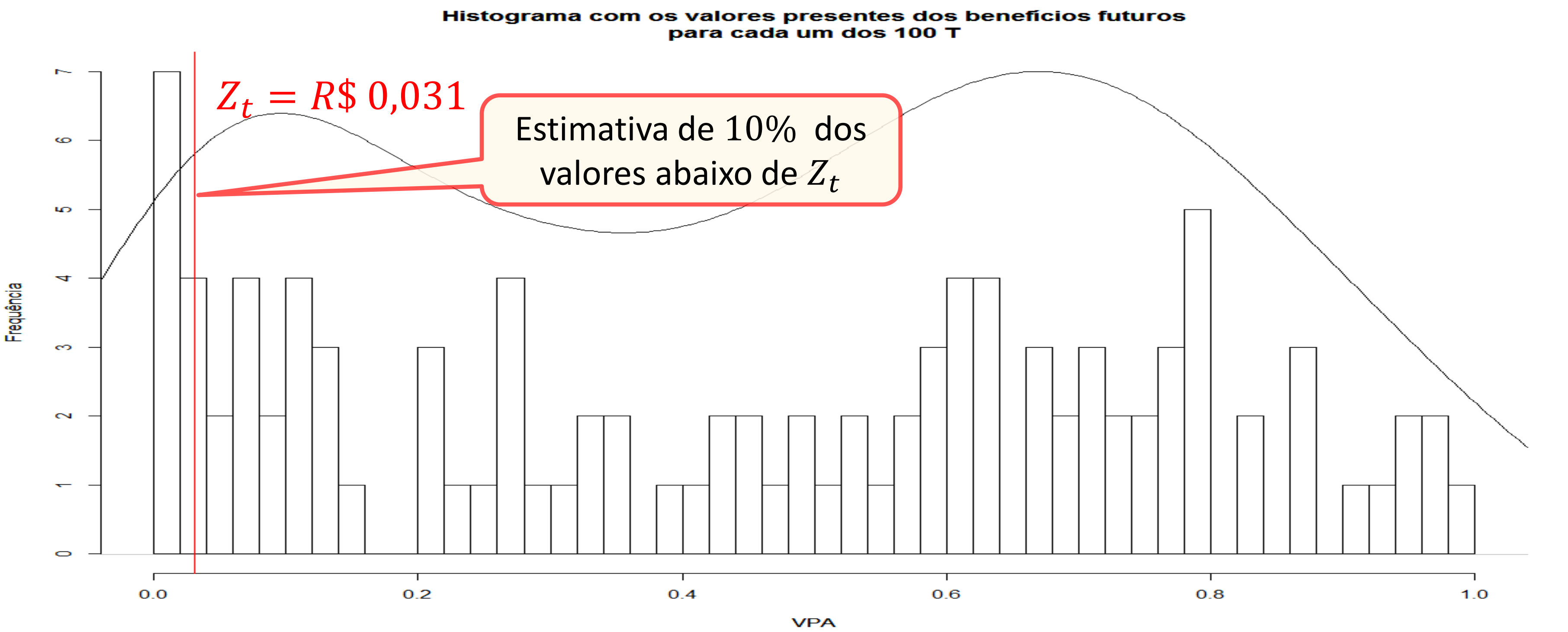
- Vimos anteriormente que o valor <u>médio</u> necessário a cobrir todas as indenizações seria de $0{,}40\ u.m$. por segurado.



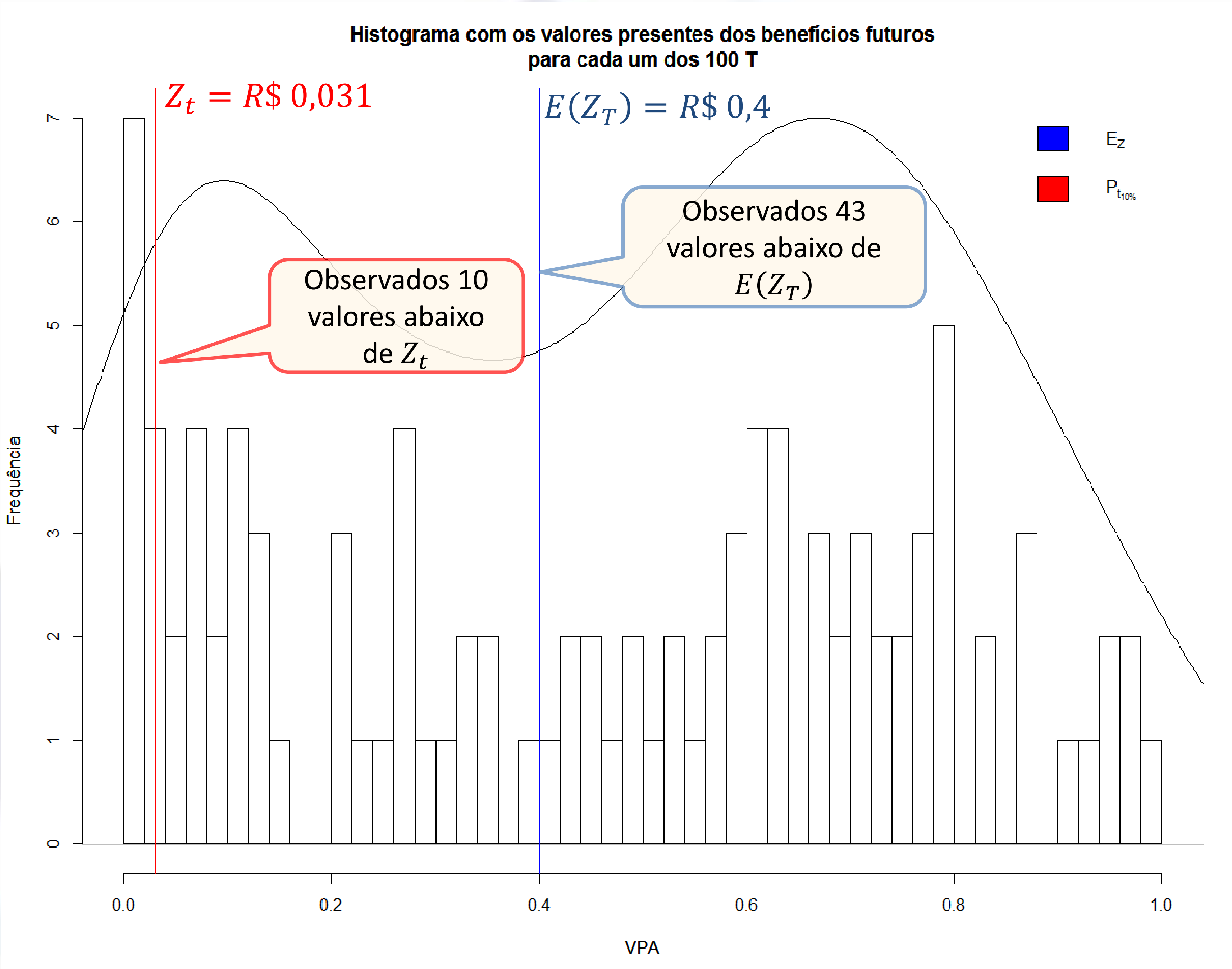
- Gráfico da simulação de 100 apólices (ou 100 cenários) com as condições do exemplo 33.
  - A distribuição exponencial é assimétrica, onde 63,21% das observações são menores que a média.



Histograma do tempo de vida adicional,T
Frequência
$t_{calc} = 58.042$
$t_{est} = 57.5$
Quantil $t_{10\%}$ estimado.
10% dos valores acima de
$t = 57{,}5$
Quantil $t_{10\%}$ observado.
10% dos valores acima de
$t = 58{,}042$
0 20 40 60 80 100
0 2 4 6 8



Histograma com os valores presentes dos benefícios futuros
para cada um dos 100 T
$Z_t = R\$ \ 0{,}031$
Estimativa de 10% dos
valores abaixo de Z_t
Frequência
VPA
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
0 1 2 3 4 5 6 7



Histograma com os valores presentes dos benefícios futuros
para cada um dos 100 T
$Z_t = R\$ \, 0{,}031$
$E(Z_T) = R\$ \, 0{,}4$
E_Z
$P_{t_{10\%}}$
Observados 43 valores abaixo de $E(Z_T)$
Observados 10 valores abaixo de Z_t
Frequência
VPA
0
1
2
3
4
5
6
7
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

- Pensemos o que aconteceria se 50 segurados morressem já no primeiro ano?
  - Certamente a seguradora não teria tempo suficiente para investir o dinheiro pago pelos segurados na forma de prêmio e, esta, ficaria insolvente.
  - Para se resguardar, pode-se dizer que o valor cobrado pela seguradora teria que ser diferente do prêmio calculado anteriormente.
    - De fato, o prêmio poderá ser (em alguns casos) bem maior que o valor calculado anteriormente.

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Pensemos o que aconteceria se 50 segurados morressem já no primeiro ano?
  - Certamente a seguradora não teria tempo suficiente para investir o dinheiro pago pelos segurados na forma de prêmio e, esta, ficaria insolvente.
  - Para se resguardar, pode-se dizer que o valor cobrado pela seguradora teria que ser diferente do prêmio calculado anteriormente.
    - De fato, o prêmio poderá ser (em alguns casos) bem maior que o valor calculado anteriormente.

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Seguindo essa linha de raciocínio, e dado que temos informações sobre a distribuição de T e consequentemente informações sobre a média e variância de Z_T.

  - Desejamos saber qual o valor que a seguradora deve ter hoje de modo que a probabilidade de que haja fundo para efetuar todos os pagamentos no momento de morte seja aproximadamente α.

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Definição: Teorema central do limite.

Seja S_{n} uma variável aleatória correspondente a uma soma de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança $\mu = \mathrm{E}(X)$, e variância $\sigma^2 = \mathrm{var}(Z)$. Então, se n tende ao infinito, a variável:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1)$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

$$Z_n = \frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{n}} \rightarrow \ Z \sim N(0,1)$$

Logo

$$S_n \sim N(nE(X), nvar(X))$$

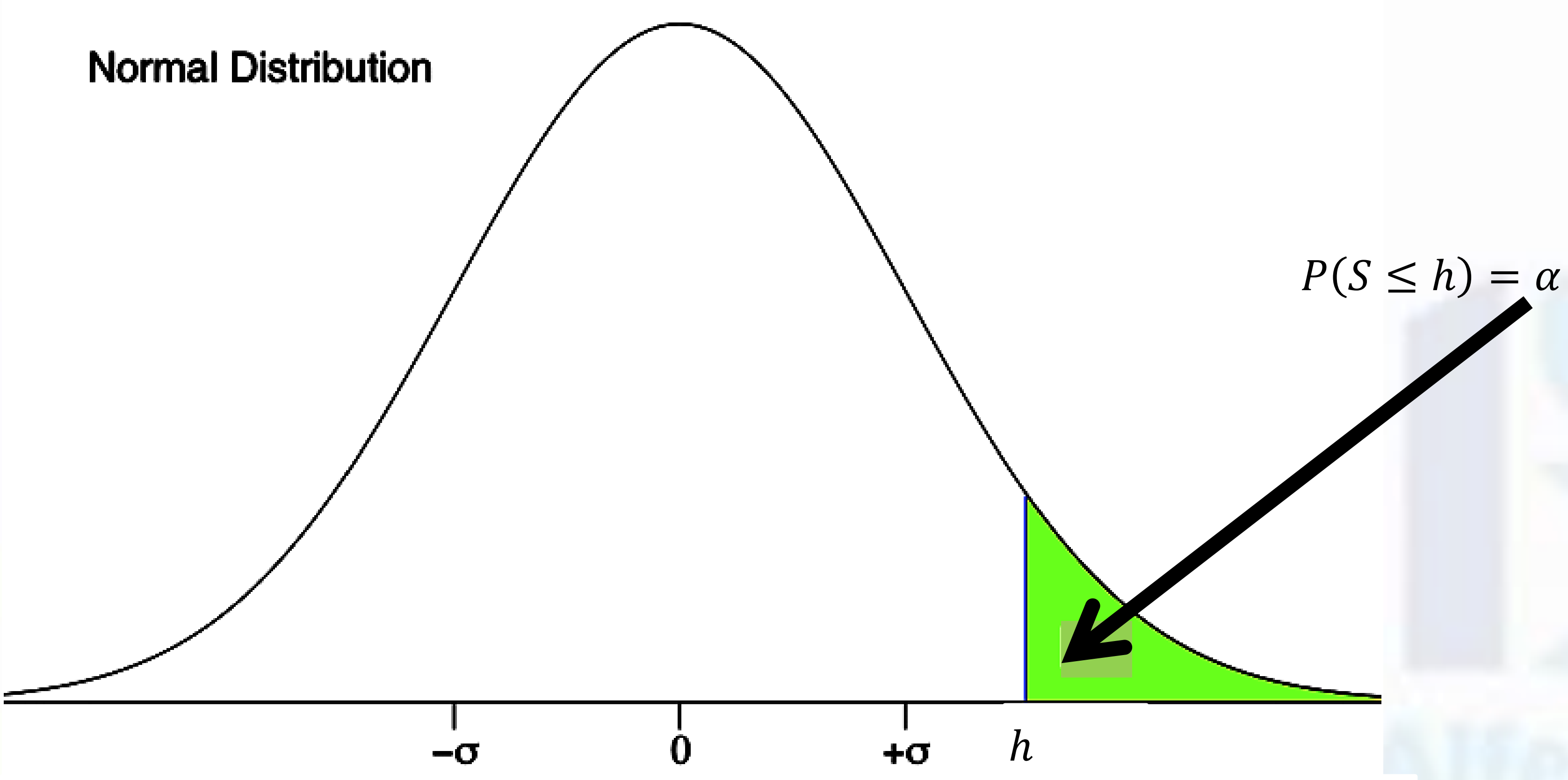
SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Então o Teorema central do limite sugere uma metodologia aproximada para a obtenção de valores para distribuição da soma de variáveis independentes, consequentemente também para a distribuição da média de variáveis aleatórias.

$$\bar{X} \sim N\left(E(X), \frac{var(X)}{n}\right)$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Chamando de S a soma dos valores presentes necessários a cobrir as indenizações dos sinistros ocorridos, queremos encontrar o valor h tal que:



SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

$$P(S \leq h) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} \leq \frac{h - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$P\left(Z \leq \frac{h - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$\frac{h - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} = z_\alpha$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Levando em conta que o $V.P.A = 0{,}4$ com variância $var(z_T) = 0{,}09$ por segurado, temos para os 100 segurados :

$$V.P.A = 40\ u.m. \qquad var(Z_t) = 9\ (u.m.)^2$$

- Pensemos o que aconteceria se 90% segurados morressem já no primeiro ano?
  - Certamente a seguradora não teria tempo suficiente para investir o dinheiro pago pelos segurados na forma de prêmio e, esta, ficaria insolvente.

$var(Z_T) = \int_0^\infty (v^t)^2 f_T(t)dt - \left[\int_0^\infty v^t f_T(t)dt\right]^2$ (Achar)

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Aproximação pela Normal

- Exemplo 14.

Fazendo uma aproximação para distribuição da variável aleatória S (exemplo 31) como sendo normal $S \sim N(40, \sqrt{9})$, podemos verificar o valor h cuja probabilidade do valor total a ser pago pela seguradora seja inferior, seja igual a 95% é dado por:

$$P(S \leq h) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{S - 40}{\sqrt{9}} \leq \frac{h - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}95$$

$\frac{S-40}{\sqrt{9}} = Z \sim N(0{,}1)$ $\qquad$ $\frac{h-40}{\sqrt{9}} = \mathrm{Z}_{0{,}95}$

SEGURO DE VIDA INTEIRO

$$\frac{h - 40}{\sqrt{9}} = Z_{0,95}$$

$$\frac{h - 40}{\sqrt{9}} = 1{,}645$$

$$h = 44{,}94$$

- Baseado no fato de que o valor presente esperado seja de $40\, u.m$ com desvio padrão de $3\, u.m$. o prêmio a cobrar de cada um deles deveria ser 44,94 é aquele que cuja chances de solvência sejam de 95%.