Matemática atuarial

Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Juros e inflação

- Inflação
  - Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.
    - FIPE
    - FGV
    - DIEESE
  - É a elevação generalizada dos preços de uma economia.
    - Excesso de gastos
    - Aumento de salários mais rápido do que da produtividade
    - Aumento dos lucros
    - Aumento nos preços das matérias primas
    - Inércia

- Taxa real de juros (t_r)
  - Essa taxa elimina o efeito da inflação
  - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva (i) a taxa de inflação no período (j) e a taxa real (t_r) é dada por:

$$(1+i) = (1+t_r)(1+j)$$

Juros e inflação

- EXEMPLO 17

Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Juros e inflação

- EXEMPLO 17

Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36%. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$\mathrm{i} = \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42{,}58\% a.a.$$

$$(1 + 0{,}4258) = (1 + t_r)(1 + 0{,}15)$$

$$t_r \approx 23{,}98\% a.a.$$

O ganho real do banco terá sido de $23{,}98\% a.a.$

Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1+i)^n$$

➢O capital P também é chamado de valor presente, $\mathrm{F}_0, (V.P.)$ e o montante M de valor futuro, F $(V.P.)$, assim:

$$F = F_0(\boldsymbol{i}+\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}$$

Logo:

$$F_0 = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}} F$$

➢$FCC(i,n) = (1+i)^n$: fator de capitalização (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

➢ $\mathbf{FAC(i,n)} = \boldsymbol{v^n} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}$ é chamado de fator de atualização do capital, ou fator de desconto (O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

Juros Compostos- Depósitos em série

➢Série é a generalização do conceito de soma para uma sequencia de infinitos termos.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

➢Denota-se por sequencia de somas parciais de um séria os seguintes termos:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

Juros Compostos - Depósitos em série

➢Se a é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

É chamada, **série geométrica de razão r**

➢Neste caso a sequencia de somas parciais da série é:

$$S_0 = a$$

$$S_1 = a + ar$$

$$S_2 = a + ar + ar^2$$

$$\ldots$$

Juros Composto - Depósitos em série

- A n-ésima soma parcial de uma séria geométrica $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ é

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}}$$

para $r \neq 1$

Demonstração:

$$S_n = a + ar + \ldots + ar^n \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão r:

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1} \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \ldots + ar^n) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1})$$

$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^{n+1})$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{(1 - r)}}$$

Juros Compostos- Depósitos em série

- Série de pagamentos é um conjunto de pagamentos de valores $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ distribuidos ao longo do tempo (n períodos).

  - Pagamentos (ou recebimentos) constantes.

  - Pagamentos (ou recebimentos) distintos.

Juros Compostos - Depósitos em série

- O conjunto de pagamentos ao longo dos n períodos, constitui-se num fluxo de caixa.

  - Fluxo Antecipado: Pagamentos (ou recebimentos) no início dos períodos, ou seja, os depósitos ou pagamentos ocorrem na data zero.
    - **No caso de depósitos o montante é resgatado UM PERÍODO APÓS o último depósito.**

  - Fluxo Postecipado: Pagamentos (ou recebimentos) no final dos períodos, ou seja, os depósitos ocorrem um período após a data zero.
    - **No caso de depósitos o montante é resgatado com O ÚLTIMO DEPÓSITO.**

Juros Compostos - Depósitos em série

- EXEMPLO 18: (Pagamentos constantes.)

Faz-se 24 depósito mensal de $R\$\,50$ em uma conta de poupança que paga juros $0{,}5\%$, composto mensalmente. Qual é o montante na conta ao fim de dois anos? **Considere o fluxo antecipado.**

➢Depois de 24 meses o dinheiro depositado no primeiro mês montara á:

$$M_{24} = 50(1 + 0{,}005)^{24} = 50(1{,}005)^{24}$$

➢Após 23 meses, o dinheiro depositado no segundo mês montará á:

$$M_{23} = 50(1 + 0{,}005)^{23} = 50(1{,}005)^{23}$$

➢O último deposito renderá por um único período,

$$M_1 = 50(1 + 0{,}005)$$

	Montante para o depositado no mês 1	Montante para o depositado no mês 2	Montante para o depositado no mês 3	
Mês 0	\$50 depositado			
Mês 1	M_1	\$50 depositado		
Mês 2	M_2	M_1	\$50 depositado	
Mês 3	M_3	M_2	M_1	
...	...	..	..	...
Mês 24	M_{24}	M_{23}	M_{22}	...

Prosseguindo desta maneira, vemos que o montante resultante dos 24 depois será:

$$F_{24} = M_{24} + M_{23} + M_{22} + \ldots + M_1 = \sum_{n=1}^{24} M_n$$

$$F_{24} = R(1+i)^{24} + R(1+i)^{23} + R(1+i)^{22} + \cdots + R(1+i) = \sum_{n=1}^{24} R(1+i)^n$$

$$\boldsymbol{F_{24} = \sum_{n=1}^{24} 50(1,005)^n} = -50 + \sum_{n=0}^{24} 50(1{,}005)^n$$

Repare que trata-se de um série geometria de razão: $r = 1{,}005 = 1 + i$, e constantes iguais a: $a = 50 = R$

Como

$$S = S_{24} + S_{23} + S_{22} + \ldots + S_0 = \frac{\boldsymbol{a}(\mathbf{1} - \boldsymbol{r}^{\mathbf{24+1}})}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{r})}$$

temos

$$R + F_{24} = \frac{\boldsymbol{R}[\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\mathbf{24+1}}]}{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})} = \frac{-R[1 - (1+i)^{24+1}]}{i} = \frac{R[(1+i)^{24+1} - 1]}{i}$$

$$F_{24} = \frac{R[(1+i)^{24+1} - 1]}{i} - R = \frac{R(1+i)^{24}(1+i) - R - Ri}{i}$$

$$F_{24} = \frac{R[(1+i)^{24}(1+i) - (1+i)]}{i} = \frac{R(1+i)[(1+i)^{24} - 1]}{i}$$

Logo:

$$F_{24} = \frac{50(1{,}005)(1{,}005^{24} - 1)}{0{,}005} \approx \$1277{,}956$$

$$\boldsymbol{F_n} = \frac{\boldsymbol{R}(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})[(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}]}{\boldsymbol{i}}$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de pagamentos variáveis tem-se que (fluxo antecipado *).
  - Fluxo antecipado porém o modelo considera deposito no mês de resgate, dai é um fluxo genérico na verdade.

- Após o primeiro mês o primeiro deposito (F_0) montara á:

$$F_1 = F_0(1 + i) + R_1$$

- Após o segundo mês o primeiro deposito (F_0) acrescido de R_1 montara á:

$$F_2 = F_1(1 + i) + R_2$$

Sucessivamente temos que:

$$F_3 = F_2(1 + i) + R_3$$
$$F_4 = F_3(1 + i) + R_4$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{F_n = F_{n-1}(i + 1) + R_n}$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Note também que:

$$F_1 = F_0(1+i) + \mathrm{R}_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + \mathrm{R}_2 = [F_0(1+i) + \mathrm{R}_1](1+i) + R_2$$

$$F_2 = F_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [F_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$

$$F_3 = F_0(1+i)^3 + (1+i)^2 R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + \mathrm{R}_4 = [F_0(1+i)^3 + (1+i)^2 R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = F_0(1+i)^4 + (1+i)^3 R_1 + (1+i)^2 R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

$$\dots$$

$$F_n = F_0(i+1)^{\mathrm{n}} + \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$$

Acumulação do capital inicial.

Soma dos valores acumulados nos depósitos intermediários.

Juros Compostos - Depósitos em série

- Modelo genérico

$$F_n = F_0(i+1)^{\mathrm{n}} + \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$$

- Fluxo antecipado

$$F_n = F_0(i+1)^{n} + \sum_{j=1}^{\boldsymbol{n-1}} (1+i)^{n-j} \mathrm{R}_j$$

- Fluxo postecipado

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \dfrac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \dfrac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$

- EXEMPLO 19:

Faz-se um depósito mensal de $R\$\,100{,}00$ em uma conta de poupança que paga juros de $0{,}6\%$ a.m. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo antecipado e postecipado.

➢Fluxo antecipado:

$$F_3 = \frac{100(1+0{,}006)[(1+0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = R\$303{,}6144$$

ou

$$F_3 = 100(1+0{,}006)^3 + \sum_{j=1}^{2}(1+0{,}006)^{3-j}100 = 100(1{,}006)^3 + (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100$$
$$= R\$303{,}6144$$

➢Fluxo postecipado:

$$F_3 = \frac{100[(1+0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = R\$301{,}8036$$

ou

$$F_3 = \sum_{j=1}^{3}(1+0{,}006)^{3-j}100 = (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100 + 1\,00 = \mathrm{R}\$301{,}8036$$

	Montante final	
	Fluxo Antecipado	Fluxo postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \dfrac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \dfrac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$

➢Determinar o principal P que deve ser aplicada a uma taxa i para que se possa retirar o valor R em cada um dos n períodos.

➢ Qual valor P que financiado à taxa i por período, pode ser amortizado em n pagamentos iguais a R.

	Capital investido	
	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$P = \dfrac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$	$P = \dfrac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$

➢ EXEMPLO 20:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **<u>paga no ato da liberação dos recursos</u>**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$P = 15000$

$i = 0{,}02$

$n = 4$

$$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$$

➢ EXEMPLO 18:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000,00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **<u>paga no ato da liberação dos recursos</u>**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$$

$$R = \frac{P[i(1+i)^{n-1}]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0,02(1,02^3)]}{[(1,02^4) - 1]} = R\$3862,11$$

➢ EXEMPLO 19:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000,00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 30 dias após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

$$R = \frac{P[i(1+i)^n]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0{,}02(1{,}02^4)]}{[(1{,}02^4) - 1]} = R\$3939{,}356$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de pagamentos variáveis tem-se que (fluxo antecipado *).
  - Fluxo antecipado porém o modelo considera deposito no mês de resgate, dai é um fluxo genérico na verdade.

- Após o primeiro mês o primeiro deposito (F_0) montara á:

$$F_1 = F_0(1+i) + R_1$$

- Após o segundo mês o primeiro deposito (F_0) acrescido de R_1 montara á:

$$F_2 = F_1(1+i) + R_2$$

Sucessivamente temos que:

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3$$
$$F_4 = F_3(1+i) + R_4$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{F_n = F_{n-1}(i+1) + R_n}$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Note também que:

$$F_1 = F_0(1+i) + \mathrm{R}_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + \mathrm{R}_2 = [F_0(1+i) + \mathrm{R}_1](1+i) + R_2$$

$$F_2 = F_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [F_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$

$$F_3 = F_0(1+i)^3 + (1+i)^2 R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + \mathrm{R}_4 = [F_0(1+i)^3 + (1+i)^2 R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = F_0(1+i)^4 + (1+i)^3 R_1 + (1+i)^2 R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

$$\ldots$$

$$F_n = F_0(i+1)^{\mathrm{n}} + \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$$

Acumulação do capital inicial.

Soma dos valores acumulados nos depósitos intermediários.

Juros Compostos - Depósitos em série

- Modelo genérico

$$F_n = F_0(i+1)^{\mathrm{n}} + \sum_{j=1}^{n}(1+i)^{n-j}R_j$$

- Fluxo antecipado

$$F_n = F_0(i+1)^{n} + \sum_{j=1}^{\boldsymbol{n-1}}(1+i)^{n-j}\mathrm{R}_j$$

- Fluxo postecipado

$$F_n = \sum_{j=1}^{n}(1+i)^{n-j}R_j$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Pagamento Variável	$F_n = F_0(i+1)^{\mathrm{n}} + \sum_{j=1}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$	$F_n = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$

- EXEMPLO 20:

Faz-se um depósito mensal de $R\$\,100{,}00$ em uma conta de poupança que paga juros de $0{,}6\%$ a.m. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo antecipado e postecipado.

➢Fluxo antecipado:

$$F_3 = \frac{100(1 + 0{,}006)[(1 + 0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = R\$303{,}6144$$

ou

$$F_3 = 100(1 + 0{,}006)^3 + \sum_{j=1}^{2}(1 + 0{,}006)^{3-j}100 = 100(1{,}006)^3 + (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100$$
$$= R\$303{,}6144$$

➢Fluxo postecipado:

$$F_3 = \frac{100[(1 + 0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = R\$301{,}8036$$

ou

$$F_3 = \sum_{j=1}^{3}(1 + 0{,}006)^{3-j}100 = (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100 + 1\,00 = \text{R\$301,8036}$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$	$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$
Pagamento Variável	$P = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$	$P = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$

- EXEMPLO 21:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga no ato da liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

EXEMPLO 21:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **<u>paga no ato da liberação dos recursos</u>**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$$

$$R = \frac{P[i(1+i)^{n-1}]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0{,}02(1{,}02^3)]}{[(1{,}02^4) - 1]} = R\$3862{,}11$$

- Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$\mathrm{P} = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j = R + \left(\frac{1}{1+i}\right)R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 R$$

$$R = \frac{P}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3\right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}0404} + \frac{1}{1{,}0612}} = R\$3862{,}11$$

- EXEMPLO 22:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000,00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 30 dias após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

➢ EXEMPLO 22:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 30 dias após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

$$R = \frac{P[i(1+i)^n]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0{,}02(1{,}02^4)]}{[(1{,}02^4) - 1]} = R\$3939{,}356$$

➢ Pagamento 30 dias após a liberação dos recursos

$$P = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j = \left(\frac{1}{1+i}\right) R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 R \left(\frac{1}{1+i}\right)^4 R$$

$$R = \frac{P}{\left[\left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 \left(\frac{1}{1+i}\right)^4\right]} = \frac{15000}{\left[\left(\frac{1}{1{,}02}\right) + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^2 + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^3 + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^4\right]}$$

$$R = R\$3939{,}35$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Pagamento Variável	$F_n = F_0(i+1)^n + \sum_{j=1}^{n-1}(1+i)^{n-j}R_j$	$F_n = \sum_{j=1}^{n}(1+i)^{n-j}R_j$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$	$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$
Pagamento Variável	$P = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$	$P = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$