Teoria do Risco
Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

- Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. Funções Geradora de Momentos. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_TR.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Momentos

- Valor esperado de X

$$\mu_X = E(X)$$

- Variância probabilística de X

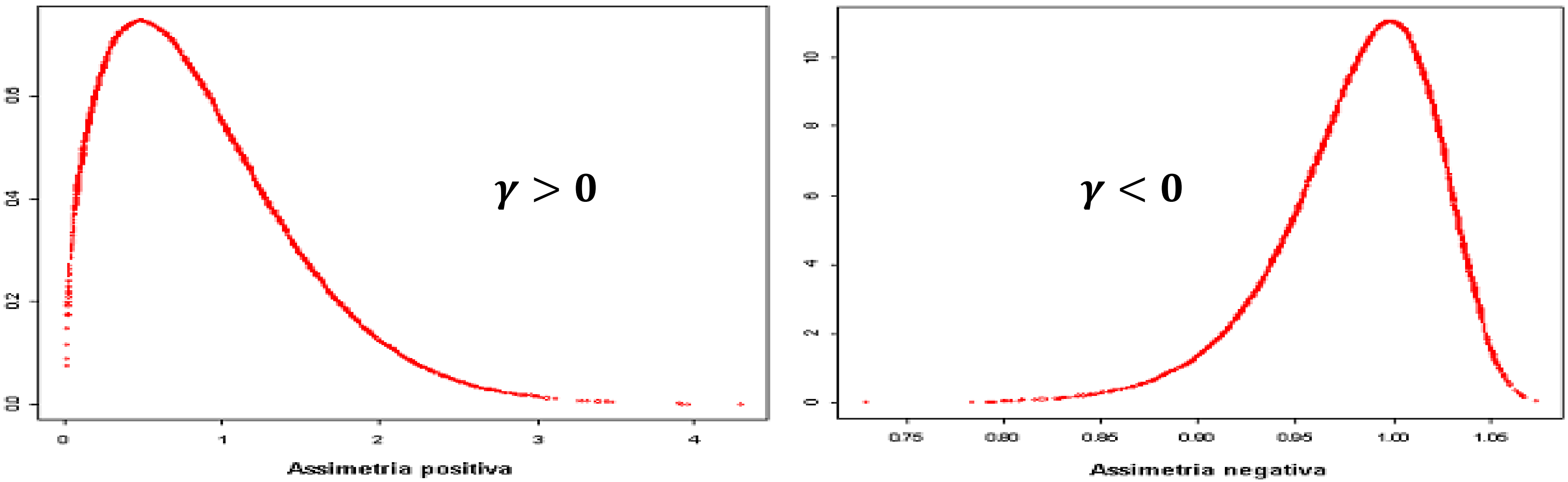
$$\sigma_X^2 = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - E(X)^2$$

- Assimetria de X

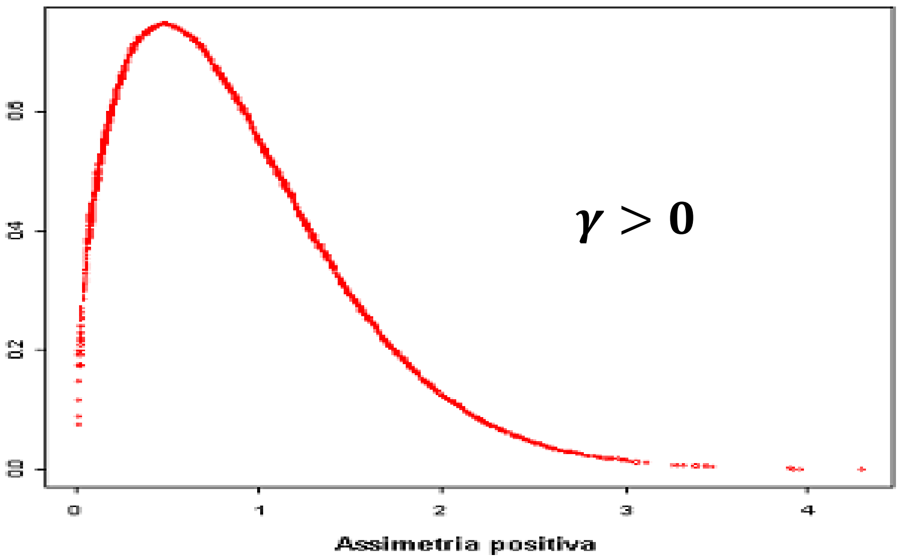
$$\gamma = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^3\right] = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{[E(X^2) - E(X)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

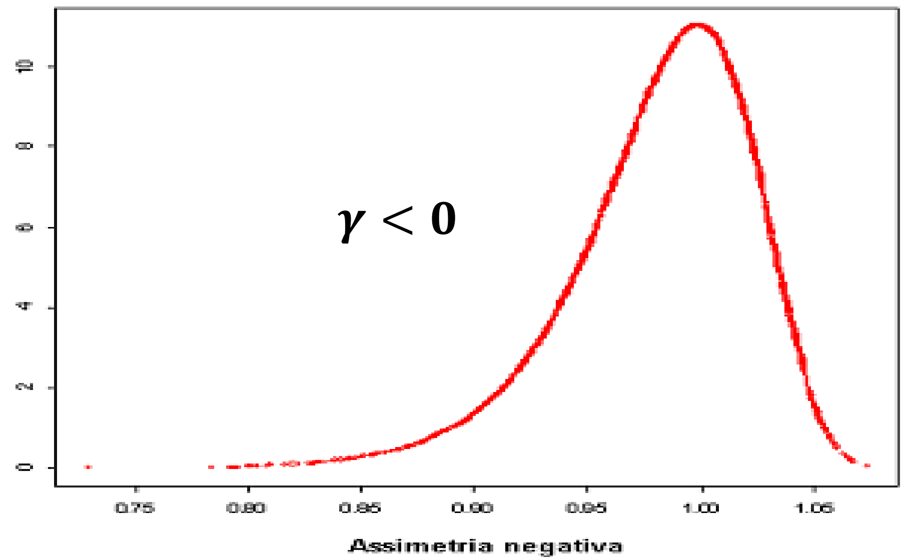
- Curtose de X

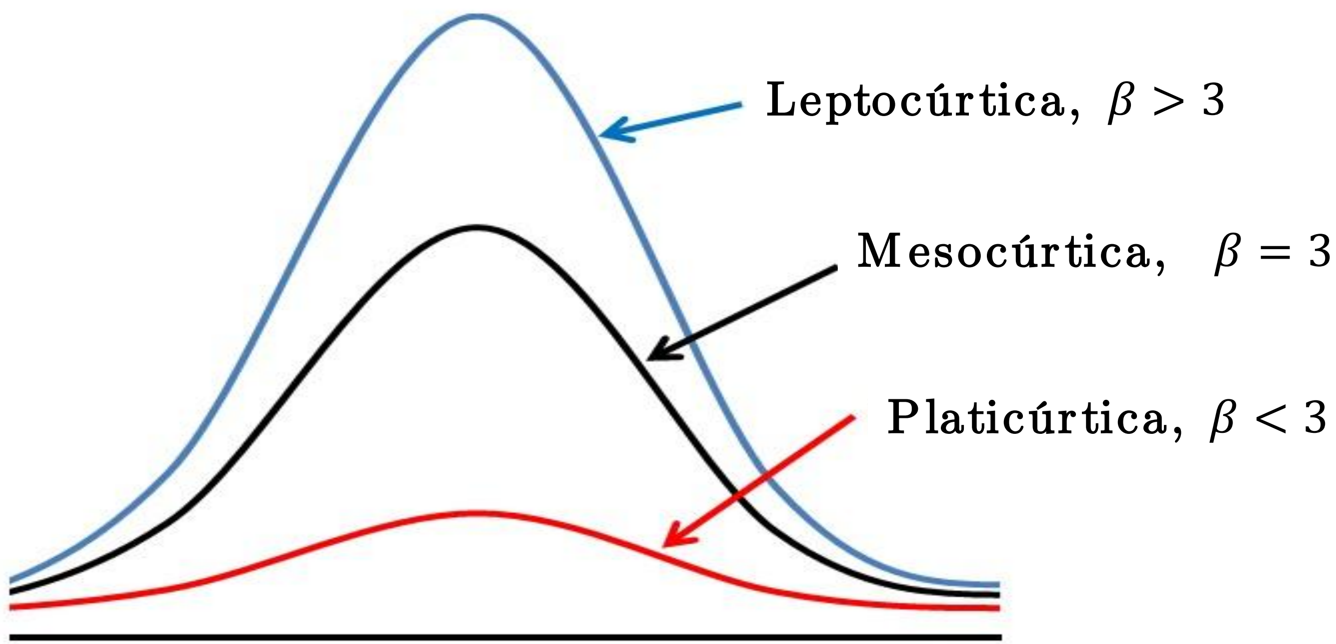
$$\beta = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^4\right] = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4}{[E(X^2) - E(X)^2]^2}$$

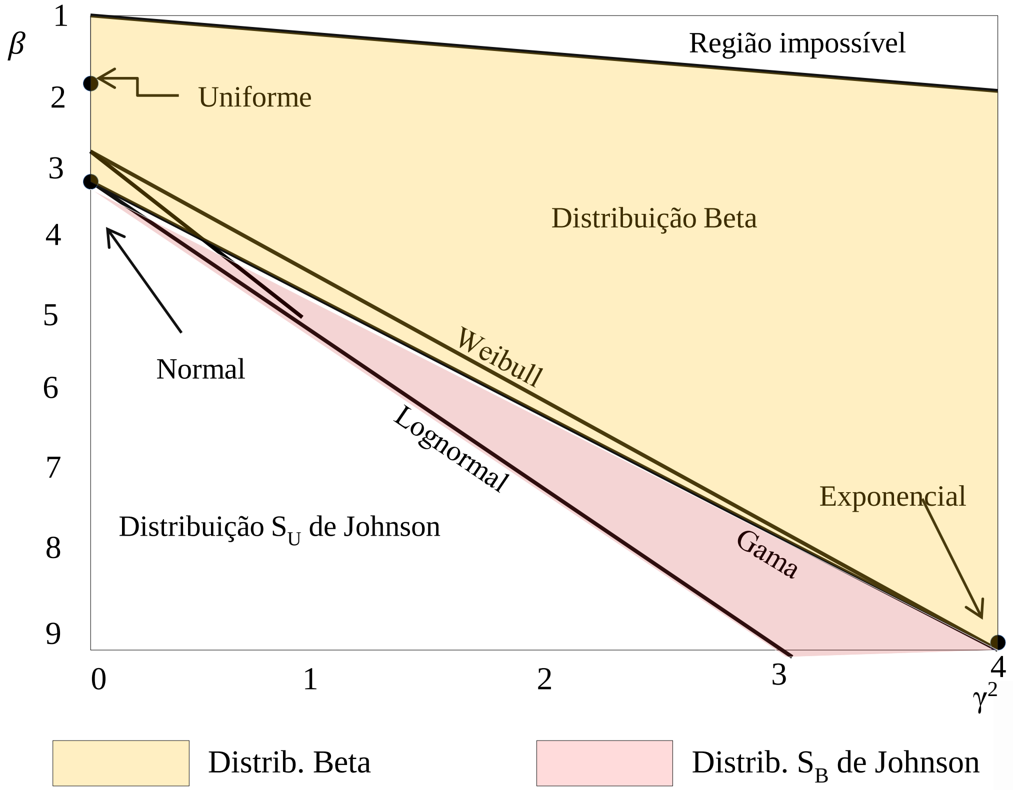


Em seguros, é comum que sinistros de baixo valor ocorram com maior frequência do que sinistros de alto valor, o que gera assimetria positiva


0.0
0.2
0.4
0.6
0
1
2
3
4
$\gamma > 0$
Assimetria positiva


0
2
4
6
8
10
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
$\gamma < 0$
Assimetria negativa


Leptocúrtica, $\beta > 3$
Mesocúrtica, $\beta = 3$
Platicúrtica, $\beta < 3$



HAFLEY, W.; SCHREUDER, H. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. **Canadian Journal of Forest Research**, NRC Research Press, v. 7, n. 3, p. 481–487, 1977.

Momentos

Momento de ordem k ou momentos ordinários de ordem k de uma variável Y (sendo k um inteiro positivo) como:

$$m_k = E\left(Y^k\right)$$

Momentos

$$m_k = E\left(Y^k\right) = \begin{cases} \sum_i y_i^k P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)dy \end{cases}$$

- $m_1 = E(Y)$
- $m_2 = E(Y^2)$
- $m_3 = E(Y^3)$

Função Geradora de Momentos

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \begin{cases} \sum_i e^{ty_i} P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y)dy \end{cases}$$

Função Geradora de Momentos

1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.

2) <u>A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.</u>

3) <u>Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.</u>

4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.

....se duas v.a. possuem funções geradoras de momentos iguais, então elas têm a mesma função de distribuição (teorema de unicidade).

2) A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.

Seja $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, tal que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right]$$

$$M_Y(t) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \ldots . e^{tX_n}) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \ldots E(e^{tX_n})$$

$$M_Y(t) = M_Y(t) = \prod_{i=i}^{n} M_{X_i}(t)$$

3) Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right] = E\left[1 + tX + \frac{(tX)^2}{2} + \frac{(tX)^3}{6} + \frac{(tX)^4}{24} + \cdots\right]$$

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2} + \frac{t^3E(X^3)}{6} + \frac{t^4E(X^4)}{24} + \cdots$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2E(X^3)}{2} + \frac{t^3E(X^4)}{6} + \cdots \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E(X)$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = E(X^2) + tE(X^3) + \frac{t^2E(X^4)}{2} + \cdots \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E(X^2)$$

$$\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3} = E(X^3) + tE(X^4) + \cdots \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3}\right|_{t=0} = E(X^3)$$

4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

- Em muitas situações, é mais fácil mostrar a convergência de funções geradoras do que provar a convergência das distribuições diretamente.

- Sob hipótese de existência em um intervalo comum em torno de 0, a convergência de FGM implica convergência em distribuição.

Exemplo 1: Seja $Y \sim B(n,q)$ e $X \sim Exp(\lambda)$ vamos obter as respectivas funções geradoras de momentos.

$$P(Y=y) = \binom{n}{y} q^{y}(1-q)^{n-y}, \qquad y = 0, \dots, n$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

Seja $Y \sim B(n, q)$, $0 \leq Y \leq n$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y}$$

Lembrando que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ e $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^{n} e^{ty} \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} = \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} (e^t q)^y (1 - q)^{n-y}$$

$$M_Y(t) = [e^t q + (1 - q)]^n$$

Seja $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ , } 0 \leq x \leq \infty.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\boldsymbol{x(\lambda - t)}} dx$$

$$M_X(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda - t)e^{x(\lambda - t)}}\Bigg|_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

Exemplo 2: Usando a função geradora de momentos da distribuição exponencial, tal que $X \sim Exp(\lambda)$. Calcule $E(X)$ e $var(X)$.

Exemplo 2: Usando a função geradora de momentos da distribuição exponencial, tal que $X \sim Exp(\lambda)$. Calcule $E(X)$ e $var(X)$.

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = \lambda(-1)(\lambda - t)^{-2}(-1) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

$$\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exemplo 2: Usando a função geradora de momentos da distribuição exponencial, tal que $X \sim Exp(\lambda)$. Calcule $E(X)$ e $var(X)$.

$$\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = \lambda(-2)(\lambda - t)^{-3}(-1) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$\left.\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Logo

$$var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Repare que

$$\ln\left(M_X(t)\right) = \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \ln(\lambda) - \ln(\lambda - t)$$

Assim

$$\frac{d\ln\left(M_X(t)\right)}{dt} = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} = -\frac{1}{\lambda - t}(-1) = \frac{1}{\lambda - t}$$

Logo

$$\frac{d^2\ln\left(M_X(t)\right)}{dt^2} = (-1)(\lambda - t)^2(-1) = \frac{1}{(\lambda - t)^2}$$

$$\left.\frac{d^2\ln\left(M_X(t)\right)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda^2} = var(X)$$

Exemplo 3: Seja uma dada variável aleatória $X \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $Y = g(X) = X^2$, pela técnica da função geradora de momentos.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} \, dx$$

$$M_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} \, dx$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,dx \quad \rightarrow \quad X \sim N(0,(1-2t)^{-1})$$

Logo

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,dx} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{M_Y(t)} = (1-2\mathrm{t})^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\mathrm{t}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ para } \mathrm{t} < \frac{1}{2}$$

$$Y \sim Gama\left(\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}\right)$$

Seja $X_j \sim Ber(q)$, $j = 1,2,\dots,n$ sendo X_j independentes. Então a distribuição de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ é?

$$M_{X_j}(t) = qe^t + 1 - q$$

Função Geradora de Momentos

Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.as definidas num mesmo espaço de probabilidade, com $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n)$ então a função geradora de momentos multidimensional dessas variáveis é definida por:

$$M_{Y_1,\ldots,Y_n}(t_1, \ldots, t_n) = E(e^{t_1Y_1+\cdots+t_nY_n})$$

ou

$$M_{Y_1,\ldots,Y_n}(t_1, \ldots, t_n) = \int \ldots \int e^{t_1y_1+\cdots+t_ny_n} f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) \prod_{j=1}^{n} dy_j$$

Obs.:

$$M_{Y_1}(t_1) = M_{Y_1,\ldots,Y_n}(t_1, 0,0,0, \ldots, 0) = \lim_{t_s \neq t_1 \to 0} M_{Y_1,\ldots,Y_n}(t_1, \ldots, t_n)$$

Função Geradora de Momentos

Propriedade:

Dada as constantes a e b , então se $Y = aX + b$, então:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Essa propriedade é útil para encontrar a FGM de distribuições deslocadas ou escaladas.

Se $X \sim Bernoulli(q)$ ➔ $M_X(t) = qe^t + 1 - q; \quad 0 \le q \le 1$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ➔ $M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}; \; -\infty \le \mu \le \infty, \;\; \sigma^2 > 0$

Se $X \sim Po(\lambda)$ ➔ $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}; \quad \lambda > 0$

Se $X \sim Exp(\alpha)$ ➔ $M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}; \quad \alpha > 0$

Se $X \sim Geo(q)$ ➔ $M_X(t) = \frac{qe^t}{1-(1-q)e^t}; \quad 0 \le q \le 1$

Se $X \sim Uni_C(a, b)$ ➔ $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}; \quad a < b$

Se $X \sim Gama(\lambda, r)$ ➔ $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r; \quad \lambda > 0, \;\; \mathrm{r} > 0, \;\; t < \lambda$

Exemplo 4: Seja $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, Sendo X e Y independentes. Seja $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ e $\mathrm{Y}_2 = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$. Encontre as distribuições de Y_1 e Y_2.

Entregar!!

Função Geradora de Momentos

- $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$$\left.\frac{d^n M_Y(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E(Y^n)$$

Função Característica

- $\psi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right)$

$$\left.\frac{d^n \psi_Y(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = i^n E(Y^n)$$

$$\boldsymbol{\psi_Y(t) = M_Y(it)}$$

Fórmula de Inversão

Seja Y uma variável aleatória, e $\psi_Y(t)$ sua função característica, tal que $|\psi_Y(t)| = 1$ para algum $t = 0$ se ela for discreta, ou $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_Y(t)| dt < \infty$ se for contínua. Então:

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}\, \psi_Y(t) dt$$

Exemplo 5: Considere a função geradora de momentos abaixo

$$M_X(t) = e^{\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

Determine a função de densidade de X.

Exemplo 5: Como $\psi_Y(t) = M_Y(it)$, então $\psi_Y(t) = e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$. Aplicando a fórmula de inversão.

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}\, e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-\frac{(t^2+2ity)}{2}\right]} dt$$

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[t^2+2ity+(iy)^2\right]}{2}}\, e^{\frac{(iy)^2}{2}} dt$$

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t+iy)^2}{2}}\, dt$$

Exemplo 5

....

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t+iy)^2}{2}} dt$$

$N(-iy, 1)$

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 1$$

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$Y \sim N(0,1)$

Referências

- Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística,** Editora USP: SAO Paulo, 2001.
- JAMES,B. R.; **Probabilidade: Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba, CRV 2020.