

Teoria do Risco

Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalhalley>



Exemplo 1

Considere uma carteira de seguros que no caso de ocorrência de sinistro, os valores gastos com indenização são modelos por distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 0,2$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no quanto esperam gastar com indenizações, porém esse valor não deve exceder 4,5. Calcule o valor esperado sujeito a esse limite.

Solução:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 4,5 \\ 4,5, & X \geq 4,5 \end{cases}$$

...

Solução:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 4,5 \\ 4,5, & X \geq 4,5 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = \int_0^{4,5} x f_X(x) dx + 4,5 S_X(4,5)$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = \int_0^{4,5} x \, 0,2 \, e^{-0,2x} dx + 4,5 \int_{4,5}^{\infty} 0,2 \, e^{-0,2x} dx$$

$$u = x, \quad \text{e} \quad dv = e^{-0,2x} dx, \quad \rightarrow \quad du = dx \quad \text{e} \quad v = -\frac{e^{-0,2x}}{0,2}$$

$$\begin{aligned} 0,2 \int_0^{4,5} x e^{-0,2x} dx &= 0,2 \left(-x \frac{e^{-0,2x}}{0,2} \Big|_{x=0}^{x=4,5} + \int_0^{4,5} \frac{e^{-0,2x}}{0,2} dx \right) \\ &= -x e^{-0,2x} \Big|_{x=0}^{x=4,5} + \left(-\frac{e^{-x0,2}}{0,2} \Big|_{x=0}^{x=4,5} \right) = 1,13759 \end{aligned}$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = 1,13759 + 4,5 (e^{-0,2 \times 4,5}) = 2,967152$$

Exemplo 2

Considere a função de probabilidade:

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Considere que o limite de indenização para essa carteira seja de $R\$4000,00$, o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado pode ser obtido da seguinte forma.

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} S_{col}, & S_{col} < 4000 \\ 4000, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000 p(s) = R\$1956,8$$

Exemplo 3

Considere a função de probabilidade :

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio puro de modo que a probabilidade do sinistro não exceda a 5% utilizando o princípio do percentil, utilizando aproximação pela distribuição normal.

Exemplo 3

Considere a função de probabilidade :

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio puro de modo que a probabilidade do sinistro não exceda a 5% utilizando o principio do percentil, utilizando aproximação pela distribuição normal.

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Solução:

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}} = Z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = R\$5431,91$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases} \quad F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,36 & 0 \leq s < 1000 \\ 0,384 & 1000 \leq s < 2000 \\ 0,4564 & 2000 \leq s < 3000 \\ 0,8428 & 3000 \leq s < 4000 \\ 0,8592 & 4000 \leq s < 5000 \\ \mathbf{0,8976} & 5000 \leq s < 6000 \\ 1 & s \geq 6000 \end{cases}$$

Solução:

$$F_{Scol}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \mathbf{0,95}$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{Scol}}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{Scol}} = Z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = R\$5431,91$$

Cálculo de prêmios

- Um prêmio de seguro é a importância paga por alguém em troca da transferência do risco a que ele está exposto para uma empresa especializada na gestão de risco....
- Para essa empresa, o valor do prêmio, ou do conjunto de sua carteira, deverá cobrir todos os custos com sinistros.

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação:

➤ Julgamento ou subjetivo

É um processo subjetivo, onde a tarifação é definida pelo underwriter através de comparação com riscos similares.

➤ Prêmio Puro

Começa com a estimativa do prêmio de risco $E(S)$...

Cálculo de prêmios

Considerando a metodologia do Prêmio Puro, podemos destacar três tipos de prêmio que são derivados dessa metodologia:

➤ **O prêmio puro de risco (supondo somente uma apólice): Π_P**

O prêmio é igual ao valor esperado pela seguradora a ser gasto com indenizações devido a concretização dos riscos .

$$\Pi_P = E(S)$$

Cálculo de prêmios

➤ Prêmio carregado com margem de segurança: Π_S

O prêmio carregado com margem de segurança puro é igual ao prêmio de risco mais um carregamento de segurança estatístico(θ).

$$\Pi_S = \Pi_P + \theta T(F_S)$$

Em que $T(F_S)$ é funcional de F_S , caso $T(F_S) = E(S)$:

$$\Pi_S = (1 + \theta)E(S).$$

O carregamento serve como uma margem de segurança para cobrir as flutuações estocástica do risco.

Cálculo de prêmios

➤ Prêmio comercial: Π_c

O prêmio cobrado pela seguradora deve ter um carregamento suficientemente grande para fazer frente às despesas administrativas e comerciais da seguradora:

$$\text{Prêmio comercial} = \text{Prêmio Carregado} + \text{Despesas} + \text{Impostos} + \text{Lucro esperado}$$

Para composição do Prêmio comercial é importante identificar a natureza da despesa, os impostos que incidem sobre o prêmio e o lucro esperado pela seguradora.

Cálculo de prêmios

➤ Prêmio comercial: Π_c

A natureza de cada uma das componentes das despesas poderão modificar o método de precificação do prêmio comercial.

O prêmio comercial também pode ser obtido baseado no método de rateio.

$$\text{Prêmio comercial}(\Pi_c) = \text{Prêmio carregado}(\Pi_s) + \text{carregamento comercial}(\alpha\Pi_c)$$

O prêmio comercial corresponde ao prêmio carregado com margem de segurança acrescido do carregamento para as demais despesas da seguradora (α), incluída uma margem para lucro.

$$\Pi_c = \Pi_s + \alpha\Pi_c$$

$$\Pi_c = \frac{\Pi_s}{1 - \alpha}$$

Princípio de cálculo de prêmio

- O prêmio de uma seguradora é a função que associa a variável aleatória relacionada ao gasto da seguradora com o sinistro (S) de uma determinada apólice com um número real Π_S , tal que:

$$\Pi_S = g(S)$$

- Π_S é o que o segurador recebe (Fixo).
- S está relacionado o quanto é pago ao segurado (indenização).
- O ganho da seguradora é dado por $(\Pi_S - S)$ (Variável aleatória).

Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio do prêmio de risco.

$$\Pi_S = E(S)$$

- Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

Princípio de cálculo de prêmio

➤ Princípio da utilidade Zero ou nula.

➤ Este princípio consiste no prêmio Π_S solução da equação:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu(W - G) = E[\mu(W - S)]$$

➤ Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha.$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio do prêmio de risco.

$$\Pi_S = E(S)$$

- Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- Princípio da utilidade Zero ou nula.

$$\mu_{S.a.}(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{S.o.}(W - G) = E[\mu(W - S)]$$

- Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha.$$

EXEMPLO 4

O determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio Π_S para um risco S é dado por

$$\Pi_S = v^{-1}(E[v(S)])$$

Em que v é uma função tal que $v'(x) > 0$ e $v''(x) \geq 0$ para $x > 0$.

Calcule Π_S quando $v(x) = x^2$ e $v^{-1}(x) = \sqrt{x}$, dado que $S \sim \text{Gamma}(2,2)$.

SOLUÇÃO:

$$\Pi_S = \sqrt{E(S^2)} = \sqrt{\text{var}(S) + E(S)^2}$$

$$\Pi_S = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = 1,225$$

EXEMPLO 5

Seja um **segurado** com uma função de utilidade linear: $\mu(x) = 0,00005x - 1$, em que a ocorrência dos sinistros segue a distribuição Exponencial, $S \sim \text{Exp}(0,001)$.

Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a utilidade de seu patrimônio. Considere a riqueza inicial do segurado igual a $W = \text{R\$}1000,00$.

SOLUÇÃO

Seja $a = 0,00005$, $b = -1$ e $W = 10000$, assim:

$$\mu(W - G) = E[\mu(W - S)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aS + b]$$

$$G = E(S)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0,001} = R\$ 1000,00$$

O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

EXEMPLO 6

Seja uma seguradora cuja utilidade é modelada pela função de utilidade exponencial, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$. Determine qual o prêmio Π_S utilizando o princípio do cálculo de prêmio.

Seja, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$ e $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$-\alpha e^{-\alpha W} = E[-\alpha e^{-\alpha(W + \Pi_S - S)}],$$

$$e^{-\alpha W} = E(e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} e^{+\alpha S}),$$

$$e^{-\alpha W} = e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} E(e^{\alpha S}),$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha \Pi_S}} = E(e^{\alpha S}),$$

■ Logo

$$\ln e^{\alpha \Pi_S} = \ln E(e^{\alpha S}),$$

$$\alpha \Pi_S = \ln E(e^{\alpha S}),$$

$$\Pi_S = \frac{\ln M_S(\alpha)}{\alpha}$$