Teoria do Risco
Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Modelos de risco Individual-A distribuição de S_{ind}

- Dentre várias técnicas de se encontrar a distribuição de $S_{ind.}$ (soma de variáveis aleatórias), destacam-se duas:

  - Técnica da convolução.

  - Técnica da função geradora do momentos.

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

- *...A convolução é um operador linear que, a partir de duas funções dadas, resulta numa terceira que mede a área subentendida pela superposição das mesmas em função do deslocamento existente entre elas...*

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

Considere: $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$

Sendo X e Y como duas variáveis aleatórias independentes, não negativas.

A convolução da função de distribuição de $\boldsymbol{S}$ será dada por:

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int_0^s f_Y(s-x) f_X(x) dx$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int_0^s F_Y(s-x) f_X(x) dx$$

Para variáveis continuas.

O operador $(*)$ tem as mesmas propriedades do operador de adição +.

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

Considere: $S = X + Y$

$$P_X * P_Y(s) = \sum_{\forall\, x \leq s} P_Y(s-x)P_X(x)$$

$$F_X * F_Y(s) = \sum_{\forall\, x \leq s} F_Y(s-x)P_X(x)$$

E para o caso de variáveis discretas.

O operador $(*)$ tem as mesmas propriedades do operador de adição +.

Demonstração

Considere: $S = X + Y$ assim:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X + Y \leq s)$$

Lembrando da lei da probabilidade total $P(B) = \sum_{i=1} P(B|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1} P(B, A_i)$

No caso discreto

$$F_S(s) = P(X + Y \leq s) = \sum_{j=0}^{s} P\left[(X + Y \leq s) \cap \left(Y = y_j\right)\right] = \sum_{j=0}^{s} P\left(X + Y \leq s, Y = y_j\right)$$

$$F_S(s) = \sum_{j=0}^{s} F_X\left(s - y_j\right)P\left(Y = y_j\right)$$

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

A convolução pode ser feita por um processo recursivo...

Para $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, ($X_{is}$ v.a$_{s.}$ Independentes),

F_i é a função de distribuição de X_i

$F^{(k)}$ a função de distribuição de $X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.

$$
\begin{aligned}
F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1 \\
F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \rightarrow \ (X_1 + X_2) \\
F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \rightarrow (X_1 + X_2 + X_3) \\
&\ldots \\
F^{(k)} &= F_k * F^{(k-1)} \rightarrow (X_1 + X_2 + \cdots + X_{k-1})
\end{aligned}
$$

Considerando funções de densidade, temos:

$$f^{(n)} = f_n * f^{(n-1)}$$

EXEMPLO 1

Sejam X , Y e Z variáveis aleatórias independentes, cada uma com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = e^{-t}, \qquad t > 0$$

Obtenha a distribuição de S sendo que $S = X + Y + Z$.

SOLUÇÃO

Supondo $S_1 = X + Y$, temos:

$$f(s_1) = \int_0^{s_1} f_X(s_1 - y) f_Y(y) dy$$

$$f(s_1) = \int_0^{s_1} e^{-(s_1 - y)} e^{-y} dy$$

$$f(s_1) = \int_0^{s_1} e^{-s_1} dy = e^{-s_1} y \Big|_{y=0}^{y=s_1}$$

$$f(s_1) = s_1 e^{-s_1}, \qquad s > 0$$

SOLUÇÃO

Agora vamos calcular $S = S_1 + Z$

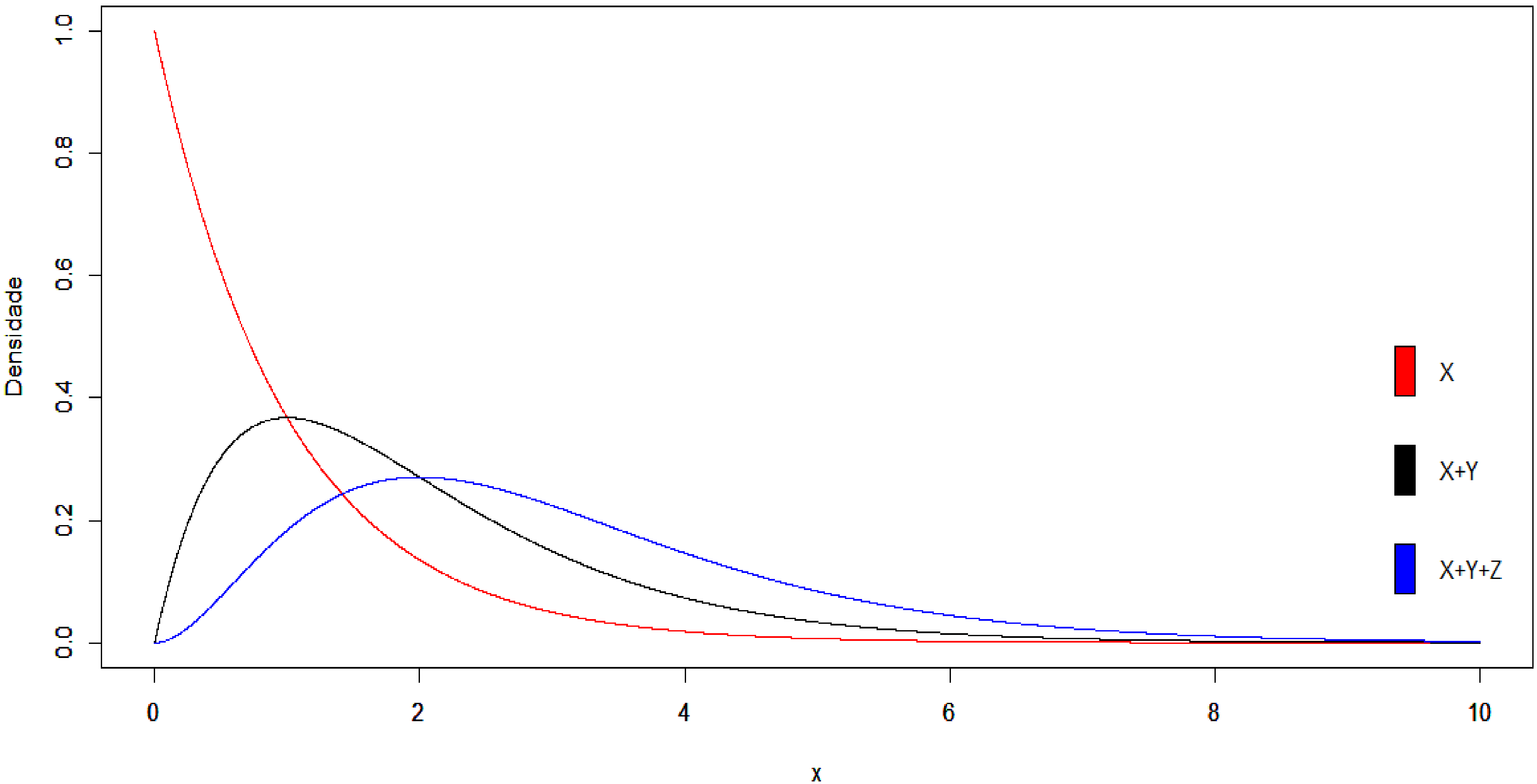
$$f(s) = \int_0^s f_{S_1}(s-z) f_Z(z) dz$$

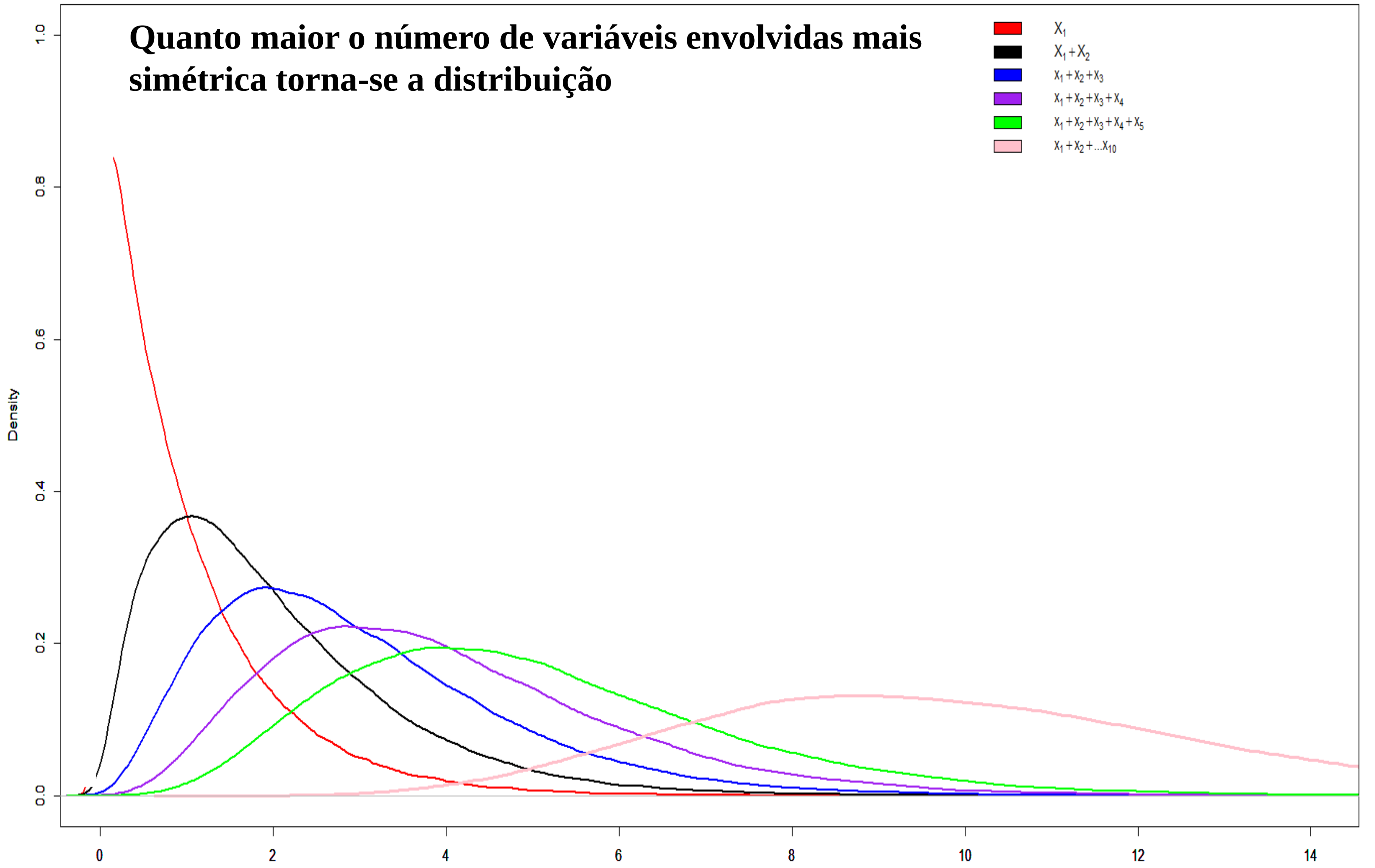
$$f(s) = \int_0^s (s-z) e^{-(s-z)} e^{-z} dz$$

$$f(s) = \int_0^s se^{-s} - ze^{-s} dz = se^{-s}z - z^2 \frac{e^{-s}}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=s}$$

$$f(s) = \frac{s^2 e^{-s}}{2}, \qquad s > 0$$

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0 \qquad f(s_1) = s_1 e^{-s_1}, \quad s_1 > 0 \qquad f(s) = \frac{s^2 e^{-s}}{2}, \quad s > 0$$





Quanto maior o número de variáveis envolvidas mais simétrica torna-se a distribuição
X_1
X_1+X_2
$X_1+X_2+X_3$
$X_1+X_2+X_3+X_4$
$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$
$X_1+X_2+...X_{10}$
Density
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
12
14

EXEMPLO 2

Considere três variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, X_3. Para $i = 1,2,3$, X_i tem distribuição exponencial e $E(X_i) = \frac{1}{i}$. Encontre a função densidade de probabilidade de $S = X_1 + X_2 + X_3$ pelo processo de convolução.

Obs.:

A distribuição exponencial tem parâmetro $\alpha > 0$, com f.d.p dada por $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ e $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e $var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$.

SOLUÇÃO

A distribuição exponencial tem parâmetro $\alpha > 0$, com f.d.p dada por $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ e $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e $var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$, então:

$$f_1(x_1) = e^{-x_1}, \qquad x_1 > 0$$
$$f_2(x_2) = 2e^{-2x_2}, \qquad x_2 > 0$$
$$f_3(x_3) = 3e^{-3x_3}, \qquad x_3 > 0$$

Queremos obter $f^{(3)} = f_S(s)$, sendo:

$$f^{(3)} = f_3 * f^{(2)}$$
$$f^{(2)} = f_2 * f^{(1)}$$

SOLUÇÃO

Devemos obter primeiramente $f^{(2)}$, supondo $S_1 = X_1 + X_2$, temos:

$$f^{(2)}(s_1) = f_2 * f^{(1)} = f_2 * f_1$$

$$f_2 * f_1 = f^{(2)}(s_1) = \int_0^{s_1} f_{X_1}(s_1 - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2$$

SOLUÇÃO

Devemos obter primeiramente $f^{(2)}$, supondo $S_1 = X_1 + X_2$, temos:

$$f^{(2)}(s_1) = f_2 * f^{(1)} = f_2 * f_1$$

$$f_2 * f_1 = f^{(2)}(s_1) = \int_0^{s_1} f_{X_1}(s_1 - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2$$

$$f^{(2)}(s_1) = \int_0^{s_1} e^{(x_2 - s_1)} 2e^{-2x_2} dx_2$$

…

$$\boldsymbol{f^{(2)}(s_1) = 2e^{-s_1} - 2e^{-2s_1} = f_{s_1}(s_1)}$$

SOLUÇÃO

Dessa maneira, temos, $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{X}_3$:

$$f^{(3)} = f_3 * f^{(2)}$$

$$f_S(s) = f^{(3)} = f_3 * f^{(2)} = \int_0^s f_{s_1}(s - x_3) f_{X_3}(x_3) dx_3$$

SOLUÇÃO

Dessa maneira, temos, $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{X}_3$:

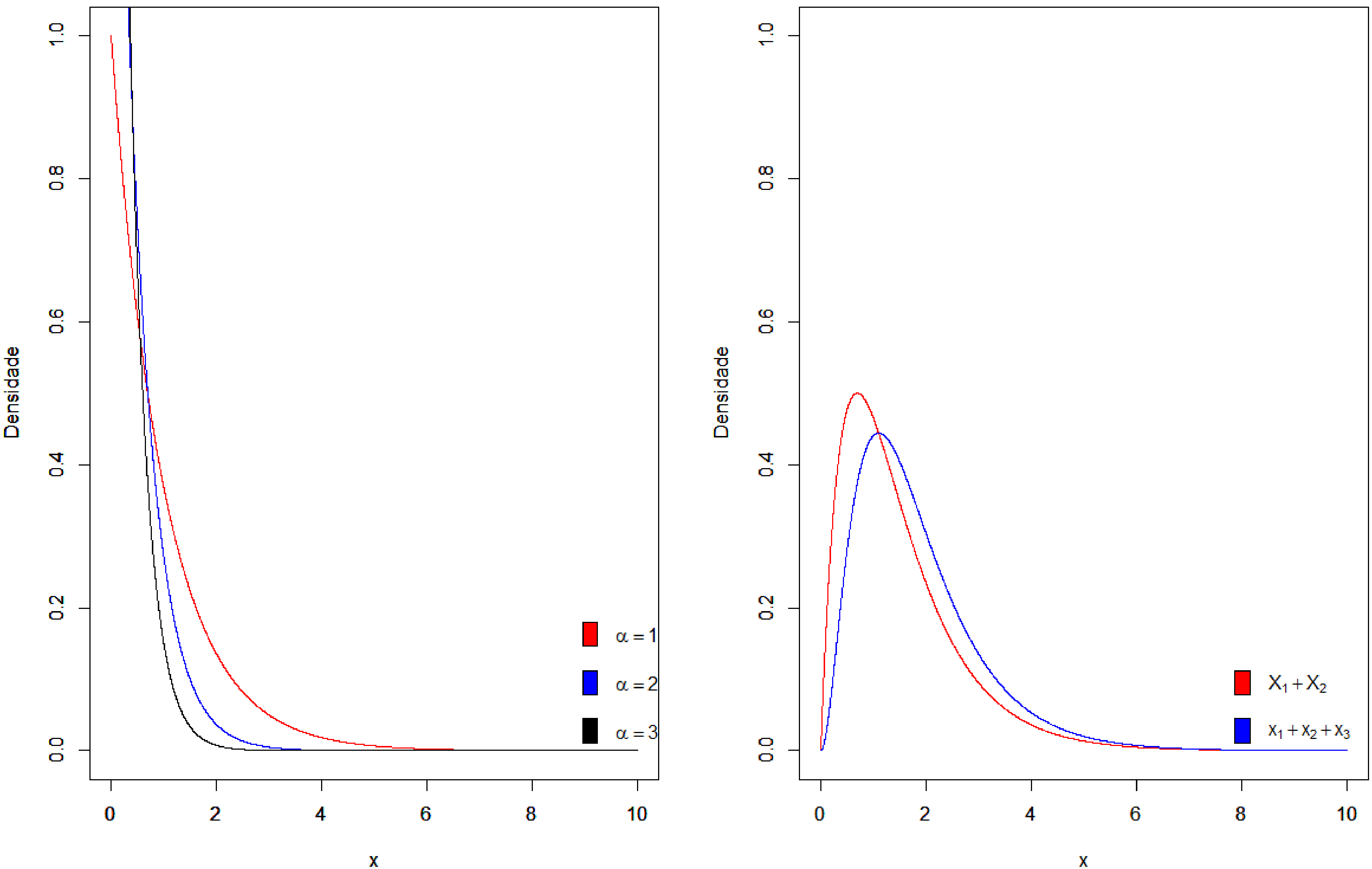
$$f^{(3)} = f_3 * f^{(2)}$$

$$f_S(s) = f^{(3)} = f_3 * f^{(2)} = \int_0^s f_{s_1}(s - x_3) f_{X_3}(x_3) dx_3$$

$$f_S(s) = \int_0^s \left(2e^{-(s-x_3)} - 2e^{-2(s-x_3)}\right) 3e^{-3x_3} dx_3$$

…

$$\boldsymbol{f_S(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}, s > 0}$$



Densidade
x
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$\alpha = 1$
$\alpha = 2$
$\alpha = 3$
$X_1 + X_2$
$X_1 + X_2 + X_3$

$$\boldsymbol{f_S(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}, s > 0}$$

$$M_S(t) = \int_0^{\infty} 3e^{st-s} - 6e^{-2s+st} + 3e^{-3s+st} ds$$

...

$$M_S(t) = \int_0^{\infty} 3e^{-s(1-t)} ds - \int_0^{\infty} 6e^{-s(2-t)} ds + \int_0^{\infty} 3e^{-s(3-t)} ds$$

...

$$M_S(t) = \frac{6}{(1-t)(2-t)(3-t)}$$

Modelos de risco Individual- A convolução para S_{ind}

Considere: $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$

$$P_S(s) = P_X * P_Y(s) = \sum_{\forall\, x \leq s} P_Y(s-x)P_X(x)$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \sum_{\forall\, x \leq s} F_Y(s-x)P_X(x)$$

E para o caso de variáveis discretas .

O operador $(*)$ tem as mesmas propriedades do operador de adição +.

EXEMPLO 3

Considere uma carteira com as seguintes distribuições de probabilidades:

p_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	p_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	1	2	3	X_2	0	1	2	3

De acordo com o enunciado os "valores pagos por cada sinistro" são dados pelos valores assumidos em X_1 e X_2.

Devemos encontrar a distribuição de $S_1 = X_1 + X_2$

Dessa forma tem-se que S_1 pode assumir os seguintes valores $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ correspondente a soma entre os valores de X_1 e X_2.

E utilizando a definição ,

$$P_{X_1} * P_{X_2}(s_1) = \sum_{\forall\, x_1 \leq s} P_{X_2}(s_1 - x_1) P_{X_1}(x_1)$$

é possível calcular as probabilidade de associadas a todos esses valores assumidos por S_1,logo:

$X_1 \leq s_1$ indica que deve-se variar X_1 até s_1

$\boldsymbol{S_1 = 0 \Leftrightarrow (X_1 = 0 \; e \; X_2 = 0)}$

$$P_{S_1}(0) = P_{X_1} * P_{X_2}(0) = \sum_{X_1=0}^{0} P_{X_2}(0 - x_1) P_{X_1}(x_1)$$

$\boldsymbol{S_1 = 1 \Leftrightarrow (X_1 = 0 \; e \; X_2 = 1 \; ou \; X_1 = 1 \; e \; X_2 = 0)}$

$$P_{S_1}(1) = P_{X_1} * P_{X_2}(1) = \sum_{X_1=0}^{1} P_{X_2}(1 - x_1) P_{X_1}(x_1)$$

$\boldsymbol{S_1 = 2 \Leftrightarrow (X_1 = 2 \; e \; X_2 = 0 \; ou \; X_1 = 1 \; e \; X_2 = 1 \; ou \; X_1 = 0 \; e \; X_2 = 2)}$

$$P_{S_1}(2) = P_{X_1} * P_{X_2}(2) = \sum_{X_1=0}^{2} P_{X_2}(2 - x_1) P_{X_1}(x_1)$$

...

E dessa forma o processo vai se repetindo até $S_1 = 6$, a tabela abaixo apresenta os resultados dessa convolução entre X_1 e X_2:

$S_{\mathbf{1}} = X_1 + \mathbf{X_2}$	p_{X_1}	p_{X_2}	$\boldsymbol{P_{s_1}}$	(X_1, X_2)
0	0,5	0,7	0,35	(0,0)
1	0,3	0,2	0,31	(0,1) (1,0)
2	0,1	0,05	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,01	(2,3)(3,2)
6			0,005	(3,3)

Caso deseja acrescentar mais uma variável (X_3) a S_1, fazendo assim $S_{ind} = X_1 + X_2 + X_3$, deve-se fazer a convolução de $S_1 = X_1 + X_2$ com X_3, tal que $S_{ind} = S_1 + X_3$.

X_1	$\boldsymbol{P_{X_1}}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{P_{X_2}}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{P_{X_3}}$
0	0,5	0	0,7	0	0,4
1	0,3	1	0,2	1	0,3
2	0,1	2	0,05	2	0,15
3	0,1	3	0,05	3	0,05
				4	0,04
				5	0,02
				6	0,02
				7	0,02

- A convolução de S_1 com X_3, tal que $S = S_1 + X_3$, $(S = X_1 + X_2 +$

$$P_S\,(0) = P_{S_1} * P_{X_3}(0) = \sum_{s_1=0}^{0} P_{X_3}(0 - s_1)P_{s_1}(s_1)$$

$$P_S(1) = P_{S_1} * P_{X_3}(1) = \sum_{S_1=0}^{1} P_{X_3}(1 - s_1)P_{S_1}(s_1)$$

...

$$P_S(4) = P_{S_1} * P_{X_3}(4) = \sum_{S_1=0}^{4} P_{X_3}(4 - s_1)P_{S_1}(s_1)$$

...

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S_{ind} = S_1 + X_3$.

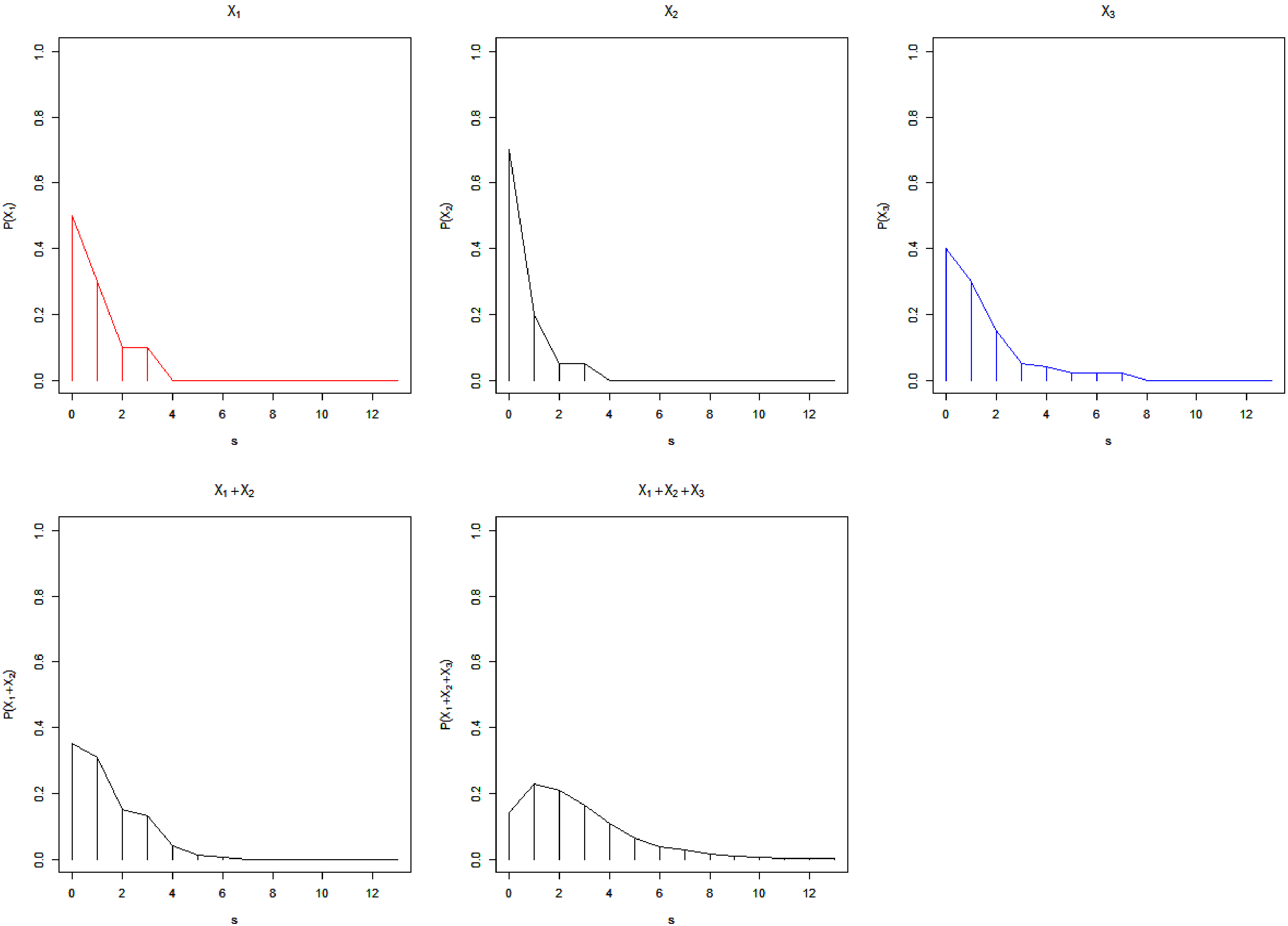
s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	$p_{S_{\mathbf{ind}}}$	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,1078	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,0627	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,0148	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,0072	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,001	(6,7)

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S_{ind} = S_1 + X_3$.

s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	$p_{S_{\text{ind}}}$	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,1078	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,0627	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,0148	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,0072	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,001	(6,7)

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S_{ind} = S_1 + X_3$.

s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	$p_{S_{\text{ind}}}$	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,15	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,1078	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,0627	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,0148	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,0072	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,001	(6,7)



X_1
$P(X_1)$
s
X_2
$P(X_2)$
s
X_3
$P(X_3)$
s
$X_1 + X_2$
$P(X_1+X_2)$
s
$X_1 + X_2 + X_3$
$P(X_1+X_2+X_3)$
s

EXEMPLO 4

Considere para o exercício anterior que, 8 seja o limite de indenização para essa carteira. Assim, seria o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado.

s	$p_{S_{\mathbf{ind}}}$
0	0,14
1	0,229
2	0,2075
3	0,1625
4	0,10775
5	0,06265
6	0,0369
7	0,0265
8	0,01475
9	0,00715
10	0,0038
11	0,0011
12	0,0003
13	0,0001

EXEMPLO 4

Considere para o exercício anterior que, 8 seja o limite de indenização para essa carteira. Assim, seria o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado.

s	$p_{S_{\text{ind}}}$
0	0,14
1	0,229
2	0,2075
3	0,1625
4	0,10775
5	0,06265
6	0,0369
7	0,0265
8	0,01475
9	0,00715
10	0,0038
11	0,0011
12	0,0003
13	0,0001

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{S}) = \sum_{s=0}^{\mathbf{13}} s\,P(s) = \mathbf{2,52}$$

Solução:

Seja Y, tal que:

$$Y = \begin{cases} S, & S < 8 \\ 8, & S \geq 8 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S;8)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{\mathbf{7}} s\,P(s) + \sum_{s=\mathbf{8}}^{13} 8\,P(s) = \mathbf{2,49945}$$

$S_1 = X_1 + \mathbf{X_2}$	p_{X_1}	p_{X_2}	$\boldsymbol{P_{s_1}}$	(X_1, X_2)
0	0,5	0,7	0,35	(0,0)
1	0,3	0,2	0,31	(0,1) (1,0)
2	0,1	0,05	0,155	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	(4,0)(3,1)(2,2)(1,3)(0,4)
5			0,01	(5,0)(4,1)(3,2)(2,3)(1,4)(0,5)
6			0,005	(6,0)(5,1)(4,2)(3,3)(2,4)(1,5)(0,6)

```
convolucao<-function(x,y,px,py){

  s <- rep(0,(length(x)*length(y)))     #     Gerando o vetor S como múltiplo de X1* X2
  Ps<-s*0                                #     Gerando o vetor P(S) como múltiplo de P(X1)*P(x2)
    cont<-1
    for(i in 1:length(x)){               # Percorrendo o vetor x
        for(j in 1:length(y)){           # Percorrendo o vetor y
            s[cont]<-x[i]+y[j]           # S[1]<-x[1]+y[1]  (S<-0+0, S<-0+1)   ( gerando todas as combinações)
        Ps[cont]<-px[i]*py[j]
        cont<-cont+1
                  }
             }

.....
```

```
convolucao<-function(x,y,px,py){

  s <- rep(0,(length(x)*length(y)))
  Ps<-s*0
    cont<-1
    for(i in 1:length(x)){
           for(j in 1:length(y)){
            s[cont]<-x[i]+y[j]
            Ps[cont]<-px[i]*py[j]
           cont<-cont+1
                                 }
                        }

  .....
```

s	Ps
0	0,35
1	**0,1**
2	0,025
3	0,025
1	**0,210**
2	0,06
3	0,015
4	0,015
2	0,07
3	0,02
4	0,005
5	0,005
3	0,070
4	0,020
5	0,005
6	0,005

```
convolucao<-function(x,y,px,py){
   s <- rep(0,(length(x)*length(y)))     #     Gerando o vetor S como múltiplo de X1* X2
  Ps<-s*0                                #     Gerando o vetor P(S) como múltiplo de P(X1)*P(x2)
    cont<-1
    for(i in 1:length(x)){               # Percorrendo o vetor x
            for(j in 1:length(y)){       # Percorrendo o vetor y
                s[cont]<-x[i]+y[j]       # S[1]<-x[1]+y[1]  (S<-0+0, S<-0+1)   ( gerando todas as combinações)
           Ps[cont]<-px[i]*py[j]
           cont<-cont+1
                              }
                         }
  auxs  <- unique(s)
  auxPs <- auxs*0
  cont  <- 1
    for(u in auxs){
         auxPs[cont]<-sum(Ps[which(s==u)])   #  Para casa valor de s está sendo somado todos os valores possíveis de probabilidade.
        cont<-cont+1
  }
    fdp<-cbind(auxs,auxPs)
  colnames(fdp)<-c('s','Ps')

  return(fdp)
  }
```

Para chamar a função

Exemplo :

```
x <-c(0,1,2,3);    Px<-c( 0.7,0.2,0.05,0.05)
y <-c(0,1,2,3,4,5,6,7);    Py<-c( 0.4,0.3,0.15,0.05,0.04,0.02,0.02,0.02)
convolucao(x,y,px,py)
```

Dessa forma temos $S_1 = X_1 + X_2$, e $S_{ind.} = S_1 + X_3$.

s	p_{X_1}	p_{X_2}	p_{X_3}	p_{S_1}	(X_1, X_2)	$p_{S_{\text{ind}}}$	(S_1, X_3)
0	0,5	0,7	0,4	0,35	(0,0)	0,14	(0,0)
1	0,3	0,2	0,3	0,31	(0,1) (1,0)	0,229	(0,1)(1,0)
2	0,1	0,05	0,15	0,155	(0,2)(2,0)(1,1)	0,2075	(0,2)(2,0)(1,1)
3	0,1	0,05	0,05	0,13	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)	0,1625	(0,3)(3,0)(1,2)(2,1)
4			0,04	0,04	(1,3)(3,1)(2,2)	0,10775	(4,0)(0,4)(1,3)(3,1)(2,2)
5			0,02	0,01	(2,3)(3,2)	0,06265	(5,0)(0,5)(4,1)(1,4)(3,2)(2,3)
6			0,02	0,005	(3,3)	0,0369	(6,0)(0,6)(5,1)(1,5)(4,2)(2,4)(3,3)
7			0,02			0,0265	(0,7)(6,1)(1,6)(5,2)(2,5)(4,3)(3,4)
8						0,01475	(1,7)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5)(4,4)
9						0,00715	(2,7)(6,3)(3,6)(5,4)(4,5)
10						0,0038	(3,7)(6,4)(4,6)(5,5)
11						0,0011	(4,7)(6,5)(5,6)
12						0,0003	(5,7)(6,6)
13						0,0001	(6,7)