## Teoria do Risco Aula 19

Danilo Machado Pires danilo.pires@unifal-mg.edu.br



A probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte infinito contínuo, é definida por:

$$\varphi(u) = P(U(t) \ge 0 \text{ para todo } t \ge 0 | u = U(0)).$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo contínuo, analisada em um tempo t qualquer no intervalo  $[0,\infty)$ .



Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte finito em tempo contínuo, é definida por:

$$\varphi(u,\tau) = P(U(t) \ge 0 \text{ para todo } 0 \le t \le \tau | u = U(0)).$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo contínuo, analisada até um tempo específico, denotado por au.



Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte de tempo infinito discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \ge 0 \text{ para todo } n = 0,1,2,\dots | u = U(0))$$

Representa a probabilidade de sobrevivência de sobrevivência da seguradora em tempo discreto analisada em um tempo qualquer n no intervalo  $[0,1,2,\dots)$ .



Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte finito em tempo discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u,\tau) = P(U(n) \ge 0 \text{ para todo } n = 0,1,2,\ldots,\tau | u = U(0)).$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo discreto, analisada até um tempo específico, denotado por au.

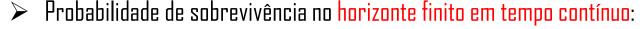


Probabilidade de sobrevivência no horizonte de tempo infinito discreto:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \ge 0 \text{ para todo } n = 0,1,2,\dots | u = U(0))$$

A probabilidade de sobrevivência no horizonte infinito contínuo:

$$\varphi(u) = P(U(t) \ge 0 \text{ para todo } t \ge 0 | u = U(0))$$



$$\varphi(u,\tau) = P(U(t) \ge 0 \text{ para todo } 0 \le t \le \tau | u = U(0))$$

Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u,\tau) = P(U(n) \ge 0 \text{ para todo } n = 0,1,2,...,\tau | u = U(0))$$



 $\blacktriangleright$  Uma ruína acontece em t se U(t) < 0, ou seja, quando a reserva da seguradora ficar negativa em algum instante, sendo que:

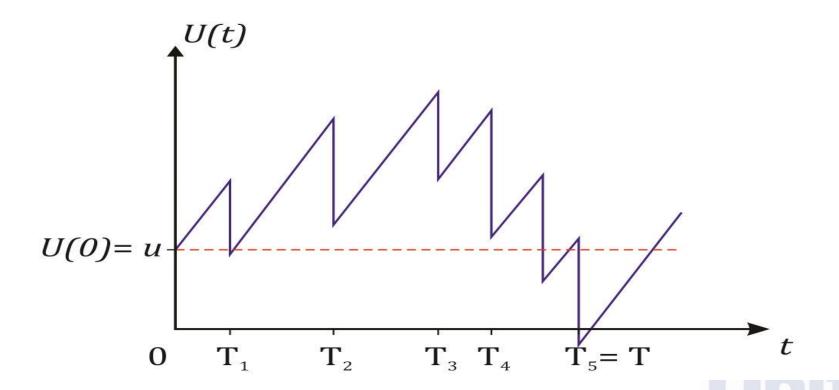
$$T_t = \begin{cases} \min\{t | t \ge 0 \ e \ U(t) < 0\} \\ \infty \ se \ U_t \ge 0 \ para \ todo \ t \end{cases}.$$

Dessa maneira, pode-se definir a probabilidade de ruína de uma seguradora.



> Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall \ t \ 0 \le t < \infty) = 1 - \varphi(u)$$



> Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall t \ 0 \le t < \infty) = 1 - \varphi(u)$$

> Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u,\tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall t, 0 \le t < \tau) = 1 - \varphi(u,\tau).$$

$$\psi(u,\tau) \leq \psi(u)$$



$$\widetilde{T_n} = \min\{n : U(n) < 0\}.$$

> Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo discreto é definida por:

$$\widetilde{\psi}(u) = P(\widetilde{T_n} < \infty | U(0) = u) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \le n < \infty) = 1 - \widetilde{\varphi}(u).$$

> Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo discreto é definido por:

$$\widetilde{\psi}(u,\tau) = P(\widetilde{T_n} < \tau) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \le n < \tau) = 1 - \widetilde{\varphi}(u,\tau).$$

$$\widetilde{\psi}(u,\tau) \leq \widetilde{\psi}(u)$$



 $\succ$  A probabilidade de ruína em 1 ano pode ser expressa por:

$$\psi(u,1) = P(T_t < 1)$$

$$\psi(u,1) = P(U(1) < 0) = P(S_1 > u + P_1)$$

- $ightharpoonup \acute{E}$  importante notar que  $P(T_t < 1) = P(U(1) < 0)$  não necessariamente é verdadeiro,
  - $ho P(T_t < 1)$  estabelece a probabilidade de ruína a qualquer momento menor que 1 ano.
  - ightharpoonup P(U(1) < 0) estabelece a probabilidade ruína ao final de 1 ano.

# > Exemplo 1

A carteira de um segurador tem distribuição de sinistros dada pela tabela a seguir:

X	R\$1500,00	R\$3000,00
P(x)	0,6	0,4

D excedente do segurador é dado pela expressão:

$$U(t) = 900 + 150t - S_t.$$

> Determine os possíveis intervalos que irão ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

Universidade Federal de Alfenas

Como, por hipótese, as únicas indenizações possíveis são no valor de R\$ 1500,00 e R\$ 3000,00 então a primeira ruína ocorrerá como resultado da menor indenização se:

$$900 + 150t - 1500 < 0$$
$$150t < 600$$
$$t < 4.$$

Caso ocorra sinistro no intervalo (0,4] este ocasionará em um caso de ruína, pois para qualquer sinistro que venha acontecer nesse intervalo não haverá solvência.



Após esse período, a seguradora não estará vulnerável ao evento de custo R\$ 1500,00 porém a seguradora ainda tem um risco de solvência caso a indenização seja igual a R\$ 3000,00. Nesse caso:

$$900 + 150t - 3000 < 0$$
  
 $150t < 2100$   
 $t < 14$ .

Caso o primeiro sinistro ocorra em t>14 a seguradora não se tornará insolvente. No entanto, se o sinistro ocorrer entre 4 e 14, a seguradora não terá recursos disponíveis para fazer frente à indenização caso o valor do sinistro seja igual a R\$ 3000,00.



# > Exemplo 2

Ainda para os dados do exemplo anterior. Considere que o tempo entre sinistros possa ser modelado pela distribuição exponencial  $T \sim Exp(0,1)$ .

Calcule a probabilidade de vir a ocorrer a sua ruína com o primeiro sinistro.



Dado que

$$\psi(u) = P(U(t) < 0)$$

Então:

$$P(U(t) < 0) = P(T < 4, X \neq 0) + P(4 \le T < 14, X = 3000)$$

$$P(U(t) < 0) = P(T < 4)P(X \ne 0|T < 4) + P(4 \le T < 14)P(X = 3000|4 \le T < 14).$$

$$P(U(t) < \mathbf{0}) = [1 - (e^{-0.1 \times 4})](0.6 + 0.4) + \{[1 - (e^{-0.1 \times 14})]0.4 - [1 - (e^{-0.1 \times 4})]0.4\}$$

$$P(U(t) < 0) = 0,3298 + 0,16948$$

$$P(U(t) < 0) = 0,49928 = \psi(900).$$



## Exemplo 3

Considere que a variável aleatória S esteja associada aos gastos com indenização no período de 1 ano, em uma carteira de seguros. Considere também que essa carteira tenha sido modelada segundo o modelo de risco coletivo com  $N \sim Po(200)$  e  $X \sim \text{Exp}(0,002)$ , ou seja,  $S = S_{col}$  é um modelo Poisson composto.

Utilizando a aproximação pela distribuição normal determine o valor do prêmio retido,  $\Pi$ , ao longo desse ano de forma que a probabilidade de que essa seguradora entre em ruína não exceda 5%, considere a reserva inicial igual a U(0)=5000.



## Solução

$$P(U(1) < 0) = 0.05$$
  
 $P(5000 + \Pi - S_{col} < 0) = 0.05$   
 $P(S_{col} > 5000 + \Pi) = 0.05$ 

Por considerar  $S = S_{col}$  tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) = 100000$$

$$\sqrt{var(S_{col})} = \sqrt{\lambda E(X^2)} = 10\ 000$$

Lembrando que 
$$Z=\frac{S_{col}-E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}}\sim N(0,1)$$
, tem-se

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10000}\right) = 0.05$$

Universidade Federal de Alfenas

## Solução

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10000}\right) = 0.05$$

$$\frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\ 000} = Z_{95\%}$$

$$\Pi = 100000 - 5000 + 10000(1,645) = 111450$$



### Exemplo 4

Ainda com os dados do exemplo anterior determine o valor do prêmio  $\Pi$  considerando um limite técnico para os valores de indenização por apólice de Li=550.

## Solução

Por considerar 
$$S=S_{col}$$
 e o limite técnico  $Li=550$ , tem-se que  $E(S_{col})=\lambda E(X;Li)$   $var(S_{col})=\lambda E(X^2,Li)$ 



## Solução

Por considerar 
$$S=S_{col}$$
 e o limite técnico  $Li=550$ , tem-se que  $E(S_{col})=\lambda E(X;Li)$   $var(S_{col})=\lambda E(X^2,Li)$ 

Logo

$$E(X;Li) = \int_{0}^{550} x \, 0,002e^{-0,002x} dx + 550S_X(550)$$

$$E(X;Li) = 150,485 + 183,079 = 333,564$$

$$E(X^2; Li) = \int_{0}^{550} x^2 \, 0,002e^{-0,002x} dx + 550^2 S_X(550)$$
  
$$E(X^2; Li) = 49791,9 + 1,00694 \times 10^5 = 1,50485 \times 10^5$$

## Solução

$$E(X; Li) = 150,485 + 183,079 = 333,564$$

$$E(X^2; Li) = 49791,9 + 1,00694 \times 10^5 = 1,50485 \times 10^5$$

Assim

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li) = 166782$$
  
 $var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li) = 7,52427 \times 10^7$ 

Lembrando que 
$$Z=rac{S_{col}-E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}}\sim N(0,1)$$
, tem-se

$$\frac{(5000 + \Pi) - 166782}{\sqrt{7,52427 \times 10^7}} = Z_{95\%}$$

$$\Pi = 166782 - 5000 + 8674,26(1,645) = 176051,1577$$



### Probabilidade de Ruína no horizonte infinito no caso Poisson Composto

ightharpoonup A probabilidade de ruína em período finito  $\psi(u)$  pode ser representada por:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}|T_t < \infty)}, u \ge 0$$

Onde R é o coeficiente de ajustamento.



• **Definição** Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento r=R é a menor solução não trivial da equação em r:

$$M_{S_t-ct}(r)=1$$

Em que 
$$M_{S_t-ct}(r) = E(e^{rS_t-ct})$$
, assim

$$M_{S_t-ct}(r) = E(e^{r(S_t-ct)}) = 1$$

$$e^{-rct}E(e^{rS_t}) = 1$$

$$e^{-rct}M_{S_t}(r) = 1$$

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$



Um caso especial amplamente abordado na literatura é o caso em que  $c=(1+\theta)E(S)$  e  $N\sim Po(\lambda t)$  , assim :

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t(M_X(r)-1)} = e^{r(1+\theta)E(S)t}$$

$$\lambda t(M_X(r) - 1) = r(1 + \theta)\lambda E(X)t$$

$$M_X(r) - 1 = r(1 + \theta)E(X)$$

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$

Universidade Federal de Alfena