Aula 15 (Parte 1)-Implementação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_tp_x$$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x$$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$ {}_{m+1|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{m|}a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_x$$

$$ {}_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x$$

$$ {}_{m|}a_x = {}_mE_x a_{x+m}$$

$$ {}_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$$ {}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$$ {}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n+m}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){
          v <- 1/(1+i)
px          <- 1-qx
pxx         <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]) )
t           <- (0:(length(pxx)-1))
a           <- (1-v^(t+1))/(1-v)
ax          <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
return(ax)
}
```

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} v^t \; {}_t p_x$$

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){
    v <- 1/(1+i)
px     <- 1-qx
pxx    <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
t      <- (0:(length(pxx)-1))
bx     <- b*sum(v^(t)*pxx)
return(bx)
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} a_{\overline{t|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){

        v  <- 1/(1+i)
  px      <- 1-qx
  pxx     <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])
              ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))
  t         <- (1:(length(pxx)))
              ## t      <- (0:(length(pxx)-1))
  a         <- v*(1-v^t)/(1-v)
              ## a    <- (1-v^(t+1))/(1-v)
  ax            <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])
              ## ax  <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
  return(ax)
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} v^t \; {}_t p_x$$

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){
  v          <- 1/(1+i)
  px         <- 1-qx
  pxx         <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
         ## pxx    <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
  t          <- (1:(length(pxx)))
         ## t     <- (0:(length(pxx)-1))
  bx         <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}
```

Anuidade imediata Temporária

```
AnuiAntTemp<-function(i,idade,n,b){
        v      <- 1/(1+i)
        px     <- 1-qx
        pxx    <- c(1, cumprod(px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
        t      <- (0:(length(pxx)-1))
        ax     <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_t p_x$$

```
AnuiPostTemp<-function(i,idade,n,b){
        v      <- 1/(1+i)
         px    <- 1-qx
        pxx    <- cumprod(px[(idade+1):(idade+n)])
        t      <- 1:length(pxx)
         ax    <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_t p_x$$

EXEMPLO 1

Seja uma pessoa $x = 25$ anos, e considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano. Calcule A_{25}, $\ddot{a}_{25}$ e a_{25}.

EXEMPLO 1

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t}$$

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25} q_{25+t} = 0{,}08320205$$

```
premio<-function(b,idade,i){
  v      <- (1/(1+i)) ^(1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax   <-  b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
}
```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 19{,}25276$$

```
AnuiAnt<-function(i,idade,b){
 v       <-  1/(1+i)
 px      <-  1-qx
 pxx     <-  c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t       <-  (0:(length(pxx)-1))
 bx      <-  b*sum(v^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 18{,}25276$$

```
AnuiPost<-function(i,idade,b){
 v      <- 1/(1+i)
  px    <- 1-qx
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  t      <- (1:(length(pxx)))
  bx     <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}
```

Exemplo de Cálculo de seguros

- PortalHalley

https://phalley.shinyapps.io/interface-atuarial/

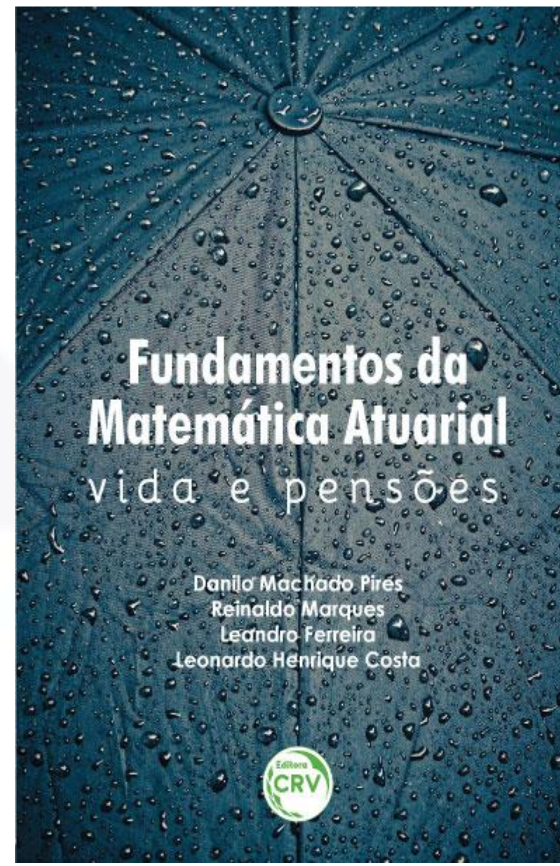
- AppCATU

https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt_BR

- R (Lifecontingencies)

https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, **Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.



Aula 15 (Parte 2)-Relações entre Anuidade e seguro pago ao final do ano de morte

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

EXEMPLO 1

Dada uma pessoa de 25 anos $(x = 25)$, calcule A_{25}, $\ddot{a}_{25}$ e a_{25}.

Considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano.

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1,05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} = 0,08320205$$

```
premio<-function(b,idade,i){
  v      <- (1/(1+i)) ^(1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax   <-  b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
 }
```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1,05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 19,25276$$

```
AnuiAnt<-function(i,idade,b){
 v        <-  1/(1+i)
 px       <-  1-qx
 pxx      <-  c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t        <-  (0:(length(pxx)-1))
 bx       <-  b*sum(v^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1,05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 18,25276$$

```
AnuiPost<-function(i,idade,b){
 v       <- 1/(1+i)
 px    <- 1-qx
 pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
 t       <- (1:(length(pxx)))
 bx      <- b*sum(v^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

Relações entre Seguros e Anuidades

- Consideramos um seguro de vida inteiro com tempo discreto (seguro pago no final do ano da morte):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x (1 - p_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} [v^{t+1}\ {}_tp_x - v^{t+1}\ {}_tp_x (p_{x+t})]$$

- Assim:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x p_{x+t}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x = v\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x \qquad a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

$$A_x = v\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

$$\boxed{A_x = v\ddot{a}_x - a_x}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$\boldsymbol{\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}}$$

$$1 + a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$\boldsymbol{a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1}:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$A_{x^{1}:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^{1}} + iA_{x^{1}:\overline{n}|} + i = 1$$

Aula 15 (Parte 3) Anuidades fracionadas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{mn-1} v^{\frac{t}{m}}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}}$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

EXEMPLO 1:

Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a $\$500{,}00$, caso fosse fracionada em 12 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado com efeito imediato e a taxa de juros de 2% ao ano.

EXEMPLO 1:

Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a $500,00, caso fosse fracionada em 12 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado com efeito imediato e a taxa de juros de 2% ao ano.

Solução:

$$\ddot{a}_{6|}^{(12)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1 - v^6}{1 - v^{\frac{1}{12}}}\right) \approx 5{,}6619$$

Portanto, $500\ddot{a}_{6|}^{(12)} \approx \$2830{,}96$ seria o valor presente referente a essa anuidade.

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{T+\frac{1}{m}}|} = \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^{T+\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 0$$

$$a^{(m)}_{\overline{T}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-v^{T}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 1$$

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}}\ {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$a^{(m)}_x = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}}\ {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a^{(m)}_x \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}^{(m)}_x \geq a^{(m)}_x \geq a_x$$

Anuidades vitalícias fracionadas

- Relação 1.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \,{}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \,{}_t p_x q_{x+t}$$

- Relação 2.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \,{}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_t p_x q_{x+t}$$

EXEMPLO 2:

Seja uma pessoa de 40 anos que queira adquirir uma anuidade que paga 1 $u.m.$ Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o Prêmio Puro fracionado em pagamentos mensais, a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato .

$$\ddot{a}_{40} \approx \$17{,}67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17{,}67 - \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$\ 17{,}21$$

Como $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$a_{40} \approx \$16{,}67$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16{,}67 + \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$17{,}12$$

Anuidades temporárias fracionadas

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

Anuidades diferidas fracionadas

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(\ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right) $$

$$ {}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} \approx {}_{k|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \left(\frac{m-1}{2m} \right) {}_k p_x v^k (1 - {}_n p_{x+k} v^n) $$

$$ {}_{k|}a_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(a_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \right) $$

$$ {}_{k|}a_{x:\overline{n|}}^{(m)} \approx {}_{k|}\,a_{x:\overline{n|}} + \left(\frac{m-1}{2m} \right) {}_k p_x v^k (1 - {}_n p_{x+k} v^n) $$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, **Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.