Matemática atuarial

AULA 23- Prêmios Carregados

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).

- Para incluirmos as despesas da seguradora no prêmio puro deve-se inicialmente dividir as despesas no que diz respeito à incidência.

- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
  - Comissão de corretagem,
  - Despesas com médicos examinadores,
  - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

Prêmios Carregados

- Em contrapartida, existem despesas que ocorrem enquanto o segurado estiver ligação com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
  - salários de funcionários,
  - despesas com informática,
  - correspondência,
  - aluguel,
  - impostos, etc.

- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurabilidade para diminuir o risco de insolvência da seguradora a partir da Teoria do Risco de Ruína.

Prêmios Carregados

- Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário.

Além do gasto com indenizações, também é incluso as despesas administrativas com o seguro (durante o período de vigência do contrato).

b) Prêmio “Zillmerado” (Zilmer,1863).

O segurado irá pagar um prêmio durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e em seguida pagará um prêmio relativo ao risco.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

Prêmio de Inventário

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

Π^{γ}: O prêmio único de inventário

Π: Corresponde ao prêmio puro único de um dado produto atuarial

V_{γ}: O valor atuarial correspondente ao carregamento de gestão

Prêmio de Inventário.

Como exemplo considere um seguro de vida vitalício feito por x em que a seguradora tem um gasto anual a gestão dessa apólice igual a γ, então:

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1|}} \ , T \geq 0$$

$$E\left(Z_{T_x}\right) = \Pi^{\gamma} = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

γ: Carregamento de inventário

Prêmio de Inventário

Assim:

$$L = Z_{T_x} - Y$$

$$E\left(P^{\gamma}\,\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = E\left(v^{T+1} + \gamma\,\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right)$$

$$P^{\gamma} = \frac{A_x + \gamma\,\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$$

$$P^{\gamma} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \gamma$$

EXEMPLO 1: Qual o valor cobrado por um seguro de vida vitalício com pagamento unitário ao final do ano de morte do segurado, dado que ao prêmio está incluso um gasto anual, fixo em $0{,}005$ relativos a tarifa de serviços? Considere $x = 40$, $i = 0{,}03$ e o tempo de vida adicional de x modelado pela tábua de vida AT-49.

EXEMPLO 1: Solução :

$$\Pi^{\gamma} = \mathrm{A}_{40} + \gamma \ddot{a}_{40} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right) \approx 0{,}48113$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40}} = \frac{\frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}} \approx 0{,}0227$$

EXEMPLO 2: Se no exemplo 1, o segurado opta-se por um seguro temporário com cobertura de 30 anos, qual seria o valor do prêmio?

EXEMPLO 2

$$\Pi^{\gamma} = A_{40^1:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}\right) \approx 0{,}26564$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40:\overline{30}|}} = \frac{0{,}26564}{\dfrac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}} \approx 0{,}014236$$

EXEMPLO 3: Uma pessoa de 20 anos decide pagar por uma renda vitalícia com benefício anual unitário. Os pagamentos dos benefícios começam caso o segurado chegue viva à idade de 60 anos. Quanto a seguradora deve cobrar por esse produto, considerando um gasto anual de $0{,}005$ além dos gastos com o benefício? Suponha $i = 3\%$, tábua de vida AT-49 e fluxo de caixa antecipado.

EXEMPLO 3

$$Y_p = \begin{cases} P^{\gamma}\ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < 40 \\ P^{\gamma}\ddot{a}_{\overline{40}|} & T \geq 40 \end{cases}$$

$Y_b = Y_1 + Y_2$ em que $\boxed{Y_1 = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 40 \\ {}_{40|}\ddot{a}_{\overline{T+1-40}|} & t \geq 40 \end{cases}}$ e $\boxed{Y_2 = \gamma\ddot{a}_{\overline{T+1}|} \quad T \geq 0}$

$$\Pi^{\gamma} = E(Y_b) = {}_{40|}\ddot{a}_{20} + \gamma\ddot{a}_{20}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{N_{60}}{D_{20}} + 0{,}005\left(\frac{N_{20}}{D_{20}}\right) \approx 3{,}78983$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{3{,}78983}{\frac{N_{20} - N_{60}}{D_{20}}} \approx 0{,}16325$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

Este prêmio tem esse nome graças as ideias de August Zillmer (1831-1893)

Incialmente descreveu um processo para que a seguradora mantenha uma reserva de capital inicial superior ao pagamento dos primeiros prêmios.

...o prêmio resultante ao acréscimo de um carregamento de aquisição...

O prêmio único de Zillmerado é representado por:

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

V_{α}: valor atuarial correspondente ao carregamento de aquisição.

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- No caso de um **seguro de vida vitalício** (com benefício unitário pago ao final do ano de morte) feito por x, o valor presente relativo as despesas é

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \alpha, \qquad T \geq 0$$

Em que α é o carregamento de aquisição. Logo $E(Z_{T_x}) = \boldsymbol{\Pi^{\alpha} = A_x + \alpha}$

- O compromisso do segurado é $\boldsymbol{Y = P^{\alpha} Y_1 + P_x Y_2}$

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & 0 \leq T < s \\ \ddot{a}_{\overline{s}|}, & T \geq s \end{cases} \qquad Y_2 = \begin{cases} {}_{s|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-s}|}, & T \geq s \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

P^{α}: é o prêmio considerando as despesas de aquisição que devem ser pagas durante o período s

P_x: é o prêmio anual nivelado

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

$$E(Y) = E(Z_{Tx})$$

$$E(P^{\alpha}Y_1 + P_x Y_2) = E(v^{T+1} + \alpha)$$

$$(P^{\alpha})\ddot{a}_{x:\overline{s}|} + (P_x)\ {}_{s|}\ddot{a}_x = A_x + \alpha$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{(P_x)\ {}_{s|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x = \frac{A_x - P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

Como $A_x - P_x \ddot{a}_x = 0$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

O termo $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$ corresponde as parcelas de α

EXEMPLO 4: Considere uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio um carregamento de aquisição de $\$0{,}005$, **que o segurado deve ser pago em um** durante 10 anos.

EXEMPLO 4 Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + P_{22}$$

$$P^{\alpha} = \frac{0{,}005}{\frac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + \frac{M_{22}}{N_{22}} = \frac{0{,}005}{8{,}757679} + 0{,}00868206 \approx 0{,}00925$$

Prêmios Carregados

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

k pagamentos

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + \alpha$$

$$P^{\alpha} = P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é aquele que considera todas as cargas ao prêmio puro, no nosso caso o carga de aquisição e a carga de gestão,

$$\Pi^c = \Pi + V_\gamma + V_\alpha$$

Π: Prêmio puro periódico de uma dada modalidade

EXEMPLO 5: Qual o valor do prêmio anual a ser cobrado de um segurado de 22 anos, que deseja adquirir um dotal misto com 10 anos de cobertura e benefício unitário? Utilize a tábua de vida AT-49 e considere que a seguradora trabalha com uma taxa de juros de 3% ao ano. Considere que esse produto requer um gastos anual de $0{,}005$ com despesas administrativas e um gasto com despesas médicas de $0{,}002$ que deve ser pago nos dois primeiros anos.

EXEMPLO 5

$$P^c = P_{x:\overline{n}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}},$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}} \approx 0{,}09107441.$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

b) Prêmio "Zillmerado".

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$
$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

k pagamentos

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^{c} = \Pi + \mathrm{V}_{\gamma} + V_{\alpha}$$
$$P^{c} = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.