

Aula 12

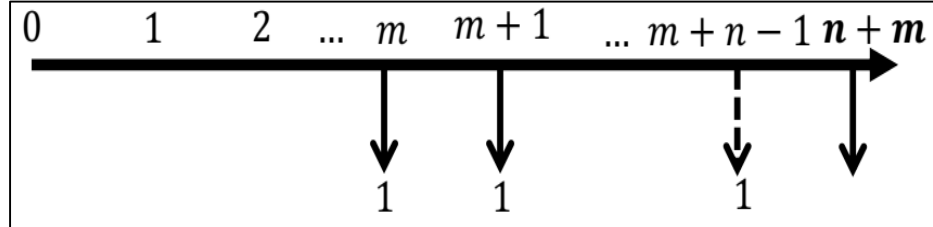
Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

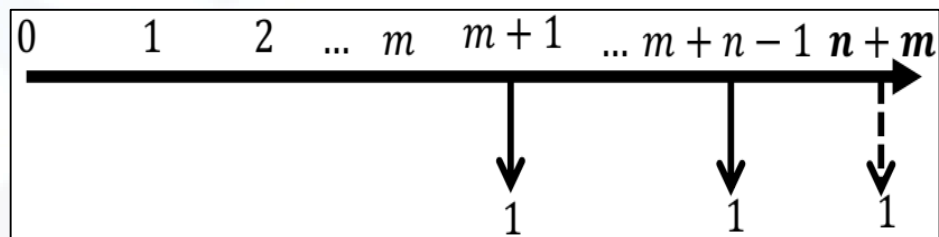
➤ Fluxo Antecipado



$$m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + v^{m+1} + v^{m+2} + \dots + v^{m+n-1}$$

$$m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

➤ Fluxo Postecipado



$$m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \dots + v^{m+n}$$

$$m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v} \right)$$

➤ Fluxo Antecipado

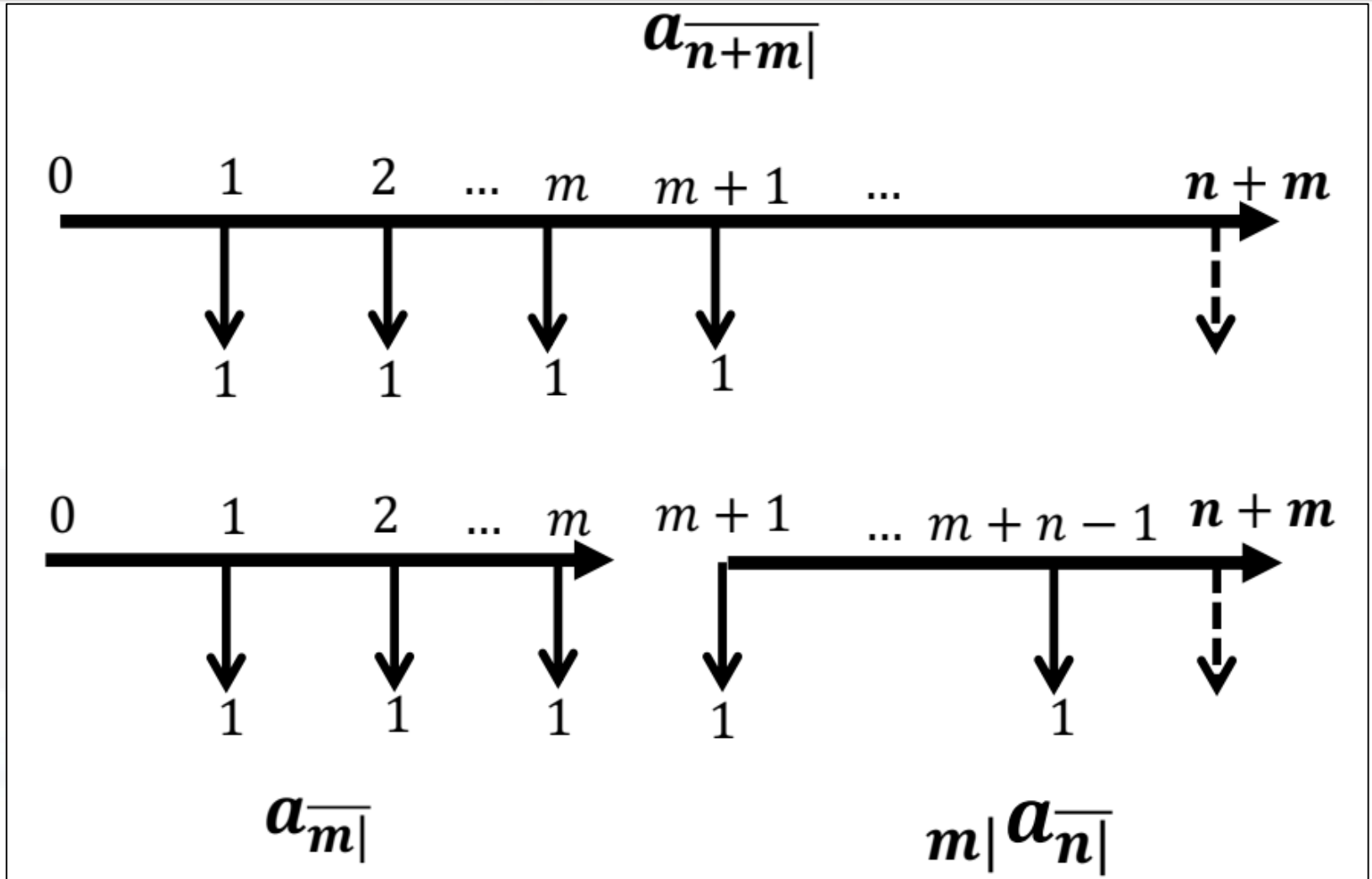
$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1-v^n}{1-v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \quad (m = 1) \rightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

➤ Fluxo Postecipado

$${}_m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} \left(\frac{1-v^n}{1-v} \right) = v^m a_{\overline{n}|} \quad (m = 1) \rightarrow a_{\overline{n}|} = v \left(\frac{1-v^n}{1-v} \right)$$

$${}_{m+1}|\ddot{a}_{\overline{n}|} = {}_m|a_{\overline{n}|}$$

Anuidades



➤ FLUXO ANTECIPADO

➤ FLUXO POSTECIPADO

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1 - v^n}{1 - v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad {}_m|a_{\overline{n}|} = v^{m+1} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v} \right) = v^m a_{\overline{n}|}$$

$${}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} \qquad {}_m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}$$

EXEMPLO 9

Uma loja de departamentos está vendendo um determinado modelo de micro-ondas. A forma de pagamento proposta pela loja consiste 8 prestações de R\$ 60,00 e só começa a pagar a partir do início do 4º mês após adquirir o produto, considerando uma taxa de juros de 1,25% a.m., em regime de juros compostos. Determine o quanto custaria esse micro-ondas caso fosse pago a vista.

SOLUÇÃO

$${}_4|\ddot{a}_{\overline{8}|} = v^4 \frac{1 - v^8}{1 - v} \approx 7,29127$$

Assim o valor do micro-ondas a vista é dado por:

$$60 \times {}_4|\ddot{a}_{\overline{8}|} = R\$437,48.$$

SOLUÇÃO (Caso Postecipado)

$${}_4|a_{\overline{8}|} = v^5 \left(\frac{1 - v^8}{1 - v} \right) \approx 7,201254$$

$$60 \times {}_4|a_{\overline{8}|} = R\$432,07.$$

Anuidades Diferidas

- Na prática, planos de aposentadoria são comprado anos antes do início dos recebimentos dos benefícios.
- Anuidades diferidas são pagas passado um determinado prazo, diferentemente das anuidades imediatas.
- Caso o participante faleça antes do início do recebimento da anuidade (antes de aposentadoria) a seguradora não terá que pagar nada ao segurado (considerando que não existe reversão para pensão).

Anuidades vitalícias Diferidas, Antecipado

$$E\left({}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}\right) = \sum_{t=m}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+m} {}_{t+m} p_x$$

➤ Lembrando que ${}_{t+m} p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$$E\left({}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \textcolor{red}{v^m} \textcolor{red}{{}_m p_x} {}_t p_{m+x}$$

$$E\left({}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}\right) = \textcolor{red}{v^m} \textcolor{red}{{}_m p_x} \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{m+x}$$

$$E\left({}_m|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}\right) = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Postecipado

$$E\left(m|a_{\overline{T_x-m}|}\right) = \sum_{t=m+1}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^{t+m} {}_{t+m} p_x$$

➤ Lembrando que ${}_{t+m} p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$$E\left(m|a_{\overline{T_x-m}|}\right) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t v^m {}_m p_x {}_t p_{x+m}$$

$$E\left(m|a_{\overline{T_x-m}|}\right) = v^m {}_m p_x \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{x+m}$$

$$E\left(m|a_{\overline{T_x-m}|}\right) = {}_m E_x a_{x+m}$$

$${}_m|a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

➤ FLUXO ANTECIPADO

$$Y = \begin{cases} m| \ddot{a}_{\overline{T_x+1-m}|}; & T_x \geq m \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

$$m| \ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^t {}_t p_x$$

$$m| \ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$m| \ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^m \frac{1 - v^{t-m+1}}{1 - v} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$m| \ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\bar{m}|}$$

➤ FLUXO POSTECIPADO

$$Y = \begin{cases} m| a_{\overline{T_x-m}|}; & T_x \geq m \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

$$m| a_x = \sum_{t=m+1}^{\infty} v^t {}_t p_x$$

$$m| a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$$m| a_x = \sum_{t=m}^{\infty} v^{m+1} \left(\frac{1 - v^{t-m}}{1 - v} \right) {}_t p_x q_{x+t}$$

$$m| a_x = a_x - a_{x:\bar{m}|}$$

EXEMPLO 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 20 anos, que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$${}_{20|}\ddot{a}_{40} = \sum_{t=20}^{\infty} v^t {}_t p_{40}$$

$${}_{20|}\ddot{a}_{40} = {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60} = v^{20} {}_{20}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{60} \right)$$

EXEMPLO 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{m+x}$$

$${}_{19|}a_{40} = {}_{19}E_{40} a_{59} = v^{19} {}_{19}p_{40} \left(\sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{59} \right)$$

$${}_{19|}a_{40} = v^{19} {}_{19}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1}p_{59} \right) = v^{19} {}_{19}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t v^1 {}_1p_{59} {}_t p_{59+1} \right)$$

$${}_{19|}a_{40} = v^{19} {}_{19}p_{40} v^1 {}_1p_{59} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{59+1} \right) = v^{20} {}_{19}p_{40} {}_1p_{40+19} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{59+1} \right)$$

$${}_{19|}a_{40} = v^{20} {}_{20}p_{40} \left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{59+1} \right) = {}_{20|}\ddot{a}_{40}$$

EXEMPLO 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$${}_{19|}a_{40} = \sum_{t=19+1}^{\infty} v^t {}_t p_{40} = \sum_{t=20}^{\infty} v^t {}_t p_{40} = {}_{20|}\ddot{a}_{40}$$

Anuidades Diferidas Temporárias

- VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento **antecipado**, $b = 1$ u.m.

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} = {}_mE_x \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{x+m}$$

- VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento **postecipado**, $b = 1$ u.m.

$${}_m|a_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x a_{x+m:\overline{n}|} = {}_mE_x \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_{x+m}$$

EXEMPLO 11

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. no período de 3 anos. No entanto essa anuidade é diferida por 3 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., Calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido, **antecipado** e **postecipado**.

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |

SOLUÇÃO Pagamento **Antecipado**, $b = 1u.m$, $m = 3$, $n = 3$, $i = 0,05$

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = {}_3 E_{40} \ddot{a}_{43:\overline{3}|}$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^3 {}_3 p_{40} \sum_{t=0}^{3-1} v^t {}_t p_{43}$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^3 {}_3 p_{40} (1 + v {}_1 p_{43} + v^2 {}_2 p_{43})$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}_3 p_{40} {}_1 p_{41} {}_1 p_{42} \left[1 + \left(\frac{1}{1,05}\right) {}_1 p_{43} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}_1 p_{43} {}_1 p_{44}\right]$$

$${}_3|\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = 2,457604$$

SOLUÇÃO Pagamento Postecipado, $b = 1 \text{ u.m.}$, $m = 3, n = 3, i = 0,05$

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |

$${}_m|a_{x:\bar{n}}| = {}_mE_x a_{x+m:\bar{n}}|$$

$${}_3|a_{40:\bar{3}}| = {}_3E_{40} a_{43:\bar{3}}|$$

$${}_3|a_{40:\bar{3}}| = v^3 {}_3p_{40} \sum_{t=1}^3 v^t {}_tp_{43}$$

$${}_3|a_{40:\bar{3}}| = v^3 {}_3p_{40} (v {}_1p_{43} + v^2 {}_2p_{43} + v^3 {}_3p_{43})$$

$${}_3|a_{40:\bar{3}}| = \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}_3p_{40} {}_1p_{41} {}_1p_{42} \left[\left(\frac{1}{1,05}\right) {}_1p_{43} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}_2p_{43} {}_1p_{44} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}_3p_{43} {}_1p_{44} {}_1p_{45} \right]$$

$${}_3|a_{40:\bar{3}}| = 0,8591533 \times 2,71444$$

$${}_3|a_{40:\bar{3}}| = 2,33212$$

EXEMPLO 12 : Mostre um exemplo que verifica-se a relação:

$${}_{m+1}| \ddot{a}_{x:\bar{n}}| = {}_m| a_{x:\bar{n}}|$$

| x | qx | px | lx |
|----|----------|----------|----------|
| 35 | 0,000792 | 0,999208 | 978890,5 |
| 36 | 0,000794 | 0,999206 | 978115,2 |
| 37 | 0,000823 | 0,999177 | 977338,6 |
| 38 | 0,000872 | 0,999128 | 976534,2 |
| 39 | 0,000945 | 0,999055 | 975682,7 |
| 40 | 0,001043 | 0,998957 | 974760,7 |
| 41 | 0,001168 | 0,998832 | 973744 |
| 42 | 0,001322 | 0,998678 | 972606,7 |
| 43 | 0,001505 | 0,998495 | 971320,9 |
| 44 | 0,001715 | 0,998285 | 969859 |
| 45 | 0,001948 | 0,998052 | 968195,7 |
| 46 | 0,002198 | 0,997802 | 966309,7 |
| 47 | 0,002463 | 0,997537 | 964185,7 |
| 48 | 0,00274 | 0,99726 | 961810,9 |
| 49 | 0,003028 | 0,996972 | 959175,6 |
| 50 | 0,00333 | 0,99667 | 956271,2 |
| 51 | 0,003647 | 0,996353 | 953086,8 |
| 52 | 0,00398 | 0,99602 | 949610,9 |
| 53 | 0,004331 | 0,995669 | 945831,5 |
| 54 | 0,004698 | 0,995302 | 941735,1 |
| 55 | 0,005077 | 0,994923 | 937310,8 |