Teoria do Risco
Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Momentos

- Valor esperado de X

$$\mu_X = E(X)$$

- Variância probabilística de X

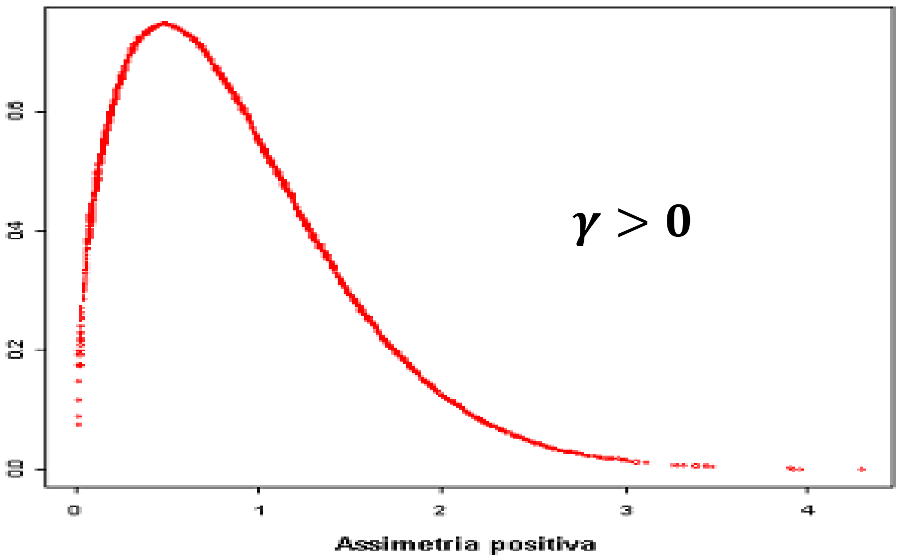
$$\sigma_X^2 = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - E(X)^2$$

- Curtose de X

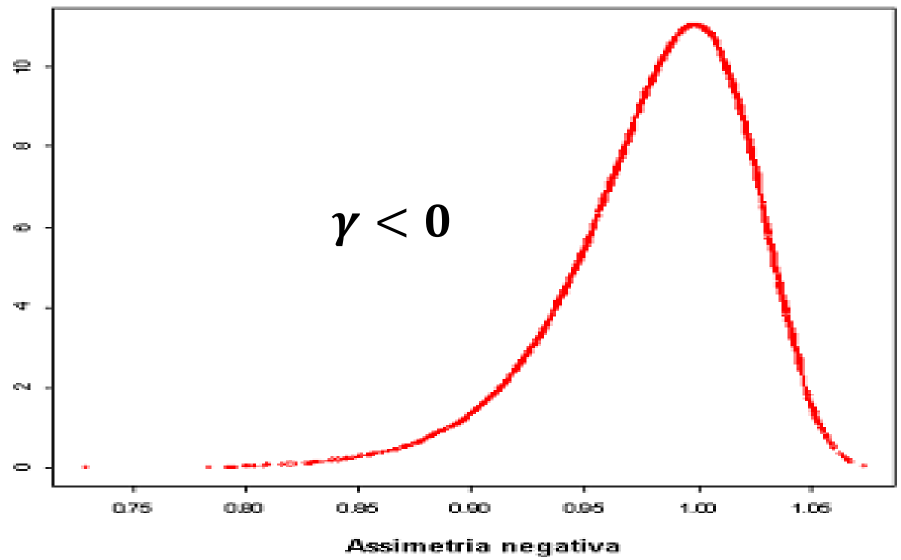
$$\beta = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^4\right] = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4}{[E(X^2) - E(X)^2]^2}$$

- Assimetria de X

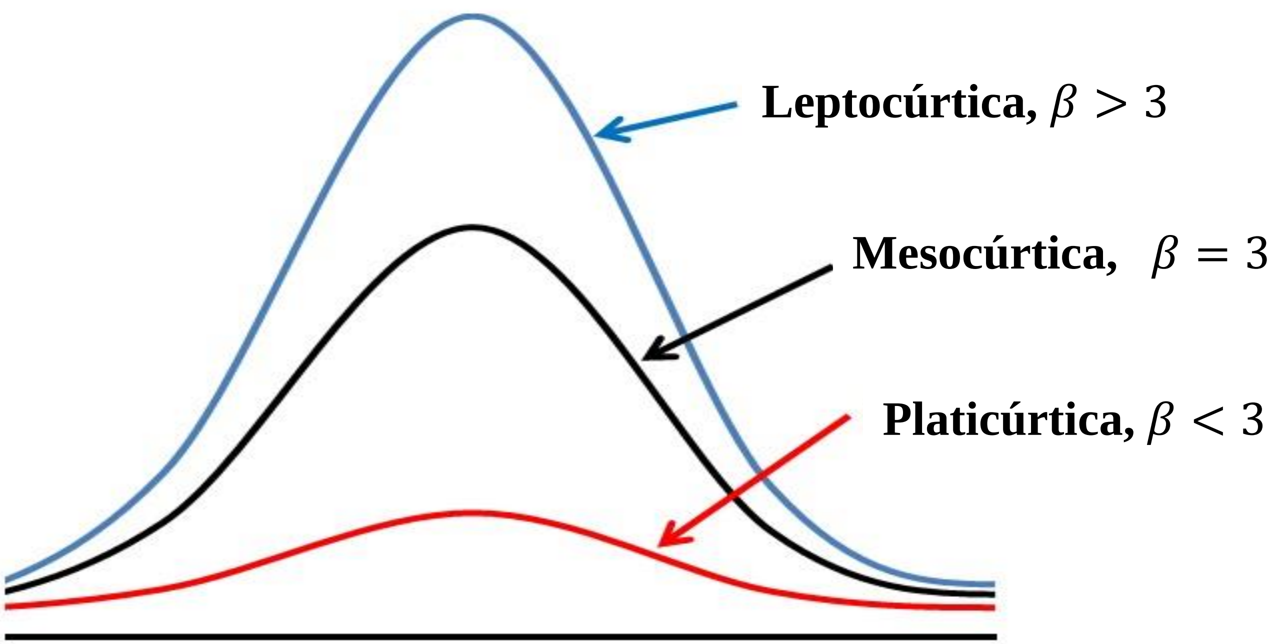
$$\gamma = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^3\right] = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{[E(X^2) - E(X)^2]^3}$$



$\gamma > 0$
0.0
0.2
0.4
0.6
0
1
2
3
4
Assimetria positiva



$\gamma < 0$
0
2
4
6
8
10
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
Assimetria negativa



Leptocúrtica, $\beta > 3$
Mesocúrtica, $\beta = 3$
Platicúrtica, $\beta < 3$

Momentos

- Momento de ordem k ou momentos ordinários de ordem k de uma variável Y (sendo k um inteiro positivo) como:

$$m_k = E\left(Y^k\right)$$

Momentos

$$m_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)dy \end{cases}$$

- $m_1 = E(Y)$
- $m_2 = E(Y^2)$
- $m_3 = E(Y^3)$

Função Geradora de Momentos

- $M_Y(t) = E(e^{tY}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ty_i} P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy \end{cases}$

Função Geradora de Momentos

1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.

2) <u>A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.</u>

3) <u>Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.</u>

4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.

....se duas v.a. possuem funções geradoras de momentos iguais, então elas têm a mesma função de distribuição (teorema de unicidade).

2) A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.

Seja $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_\mathrm{n}$, tal que $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ são variáveis aleatórias independentes.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right]$$

$$M_Y(t) = E(e^{tX_1}e^{tX_2} \ldots . e^{tX_n}) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \ldots E(e^{tX_n})$$

$$M_Y(t) = M_{\sum X}(t) = \prod_{i=i}^{n} M_{X_i}(t)$$

3) Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right] = E\left[1 + tX + \frac{(tX)^2}{2} + \frac{(tX)^3}{6} + \frac{(tX)^4}{24} + \cdots\right]$$

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2} + \frac{t^3E(X^3)}{6} + \frac{t^4E(X^4)}{24} + \cdots$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2E\left(X^3\right)}{2} + \frac{t^3E\left(X^4\right)}{6} + \cdots \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\boldsymbol{\partial M_X(t)}}{\boldsymbol{\partial t}}\right|_{\boldsymbol{t=0}} = E(X)$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = E(X^2) + tE(X^3) + \frac{t^2E\left(X^4\right)}{2} + \cdots \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\boldsymbol{\partial^2 M_X(t)}}{\boldsymbol{\partial t^2}}\right|_{\boldsymbol{t=0}} = E(X^2)$$

$$\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3} = E(X^3) + tE(X^4) + \cdots \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\boldsymbol{\partial^3 M_X(t)}}{\boldsymbol{\partial t^3}}\right|_{\boldsymbol{t=0}} = E(X^3)$$

4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

Em muitas situações, é mais fácil mostrar a convergência de funções geradoras do que provar a convergência das distribuições diretamente.

Exemplo 1

Seja $Y \sim B(n, q)$ e $X \sim Exp(\lambda)$ vamos obter as respectivas funções geradoras de momentos.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^{y}(1 - q)^{n-y}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$0 \leq Y \leq n$ e $0 \leq x \leq \infty$.

Seja $Y \sim B(n, q)$, $0 \leq Y \leq n$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y}$$

Lembrando que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ e $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^{n} e^{ty} \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} = \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} (e^t q)^y (1 - q)^{n-y}$$

$$M_Y(t) = [e^t q + (1 - q)]^n$$

Seja $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, 0 \leq x \leq \infty.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\boldsymbol{x(\lambda - t)}} dx$$

$$M_X(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda - t)e^{x(\lambda - t)}}\bigg|_{x=0}^{x \to \infty} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

Exemplo 2

Seja uma dada variável aleatória $X \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $Y = g(X) = X^2$, pela técnica da função geradora de momentos.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} \, dx$$

$$M_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} \, dx$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,dx \qquad \rightarrow \qquad X\sim N(0,(1-2t)^{-1})$$

Logo

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,dx} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{M_Y(t)} = (1-2\mathrm{t})^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\mathrm{t}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ para } \mathrm{t} < \frac{1}{2}$$

$$Y\sim Gama\left(\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}\right)$$

Seja $X_j \sim Bernoulli(q)$, $j = 1,2,\dots,n$ sendo X_j independentes. Então a distribuição de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ é?

$$M_{X_j}(t) = qe^t + 1 - q$$

Função Geradora de Momentos

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as definidas num mesmo espaço de probabilidade, com $f_{X_1,\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ e dada as funções $Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n), i = 1, \ldots, k$.

A função geradora de momentos multidimensional dessas variáveis é definida por:

$$M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, \ldots, t_k) = E(e^{t_1 Y_1 + \cdots + t_k Y_k})$$

ou

$$M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, \ldots, t_k) = \int \ldots \int e^{t_1 g_1(X_1,\ldots,X_n) + \cdots + t_k g_k(X_1,\ldots,X_n)} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} dx_j$$

Obs.:

$$M_{Y_1}(t_1) = M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, 0{,}0{,}0, \ldots, 0) = \lim_{t_s \neq t_1 \to 0} M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, \ldots, t_k)$$

Função Geradora de Momentos

Propriedade:

Dada as constantes a e b , então se $Y = aX + b$, então:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Se $X \sim Bernoulli(q)$ ➔ $M_X(t) = qe^t + 1 - q; \quad 0 \leq q \leq 1$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ➔ $M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}; \quad -\infty \leq \mu \leq \infty, \quad \sigma^2 > 0$

Se $X \sim Po(\lambda)$ ➔ $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}; \quad \lambda > 0$

Se $X \sim Exp(\alpha)$ ➔ $M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}; \quad \alpha > 0$

Se $X \sim Geo(q)$ ➔ $M_X(t) = \frac{qe^t}{1-(1-q)e^t}; \quad 0 \leq q \leq 1$

Se $X \sim Uni_C(a, b)$ ➔ $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)t}; \quad a < b$

Se $X \sim Gama(\lambda, r)$ ➔ $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r; \quad \lambda > 0, \quad \mathrm{r} > 0, \quad t < \lambda$

Exemplo 3

Seja $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, Sendo X e Y independentes. Seja $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ e $\mathrm{Y}_2 = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$. Encontre as distribuições de Y_1 e Y_2.

Sendo que a função geradora de momentos de uma distribuição normal é $U \sim N(\mu, \sigma^2)$ é dada por: $M_U(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$

Entregar!!

Função Geradora de Momentos

- $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$$\left.\frac{d^n M_Y(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E(Y^n)$$

Função Característica

- $\psi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right)$

$$\left.\frac{d^n \psi_Y(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = i^n E(Y^n)$$

$$\boldsymbol{\psi_Y(t) = M_Y(it)}$$

Fórmula de Inversão

Seja Y uma variável aleatória, e $\psi_Y(t)$ sua função característica, tal que $|\psi_Y(t)| = 1$ para algum $t = 0$, se ela for discreta, ou $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_Y(t)| dt < \infty$, se for contínua, então:

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \, \psi_Y(t) dt$$

Exemplo 4

Considere a função geradora de momentos abaixo

$$M_X(t) = e^{\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

Determine a função de densidade de X.

Exemplo 4

Como $\psi_Y(t) = M_Y(it)$, então $\psi_Y(t) = e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$. Aplicando a fórmula de inversão.

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}\, e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-\frac{(t^2+2ity)}{2}\right]} dt$$

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[t^2+2ity+(iy)^2\right]}{2}}\, e^{\frac{(iy)^2}{2}} dt$$

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t+iy)^2}{2}}\, dt$$

Exemplo 4

....

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t+iy)^2}{2}} dt$$

$N(-iy, 1)$

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 1$$

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$Y \sim N(0,1)$

Referências

- Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística,** Editora USP: SAO Paulo, 2001.
- JAMES,B. R.; **Probabilidade: Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba, CRV 2020.