Teoria do Risco
Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Modelos de Risco

- Na teoria do Risco aplicada ou matemática de seguros não-vida há questões de importância central e de grande implicância para um segurador, das quais destacam-se as seguintes:

  - Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações?

  - Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma da margem de segurança?

Modelos de Risco

- ...A teoria do risco busca estabelecer um modelo de tarifação eficiente para a seguradora frente aos sinistros.

  - Modelo de Risco Individual Anual.

  - Modelo de Risco Coletivo Anual

Modelo de Risco Individual

- O modelo de Risco individual estabelece um modelo de probabilidade para o valor total das indenizações de uma carteira,

  - Baseado na soma das diferentes distribuições dos sinistros individuais no intuito de se obter uma distribuição de probabilidades para os danos agregados.

Modelo de Risco Individual

- Para fins de simplificação deste modelo é estabelecida as seguintes premissas:

  - Em cada **apólice** ocorrerá somente um **sinistro** no ano de avaliação.

  - A ocorrência de um sinistro não influência em qualquer outro risco do conjunto segurado.

Modelo de Risco Individual

- Este modelo considera que para $i = 1,2,3,\ldots,n$ apólices, os sinistros sob forma agregada serão denominados:

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\boldsymbol{S_{ind.}}$ → Valor total das indenizações na carteira em 1 ano.

$\boldsymbol{X_{is}}$ → V.a. associada ao sinistro da apólice i em 1 ano (chamada de montante de sinistro).

$\boldsymbol{n}$ → Número fixo de apólices independentes mas não identicamente distribuídas.

Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

Modelo de Risco Individual

- A relevância do modelo reside fundamentalmente no fato de que as apólices têm abordagens independentes.

$\boldsymbol{q_i}$ ⇒A probabilidade de ocorrência de um sinistro em um ano de vigência da apólice i.

$\boldsymbol{B_i}$ ⇒Variável aleatória relativa ao valor da indenização de cada apólice i.

Modelo de Risco Individual

A fim de simplificar os conceitos, X_i será definido como:

$$X_i = I_i B_i$$

Em que I_i é uma variável dicotômica indicadora da ocorrência de um sinistro com distribuição $Bernoulli(q_i)$.

$$I_i = \begin{cases} 1, & com\ probabilidade\ q_i \\ 0, & com\ probabilidade\ (1 - q_i) \end{cases}$$

A variável aleatória B_i é mais bem definida por $(\mathrm{X_i} | \mathrm{I_i} = 1)$.

$$E(I_i) = q_i \qquad var(I_i) = q_i(1 - q_i)$$

Modelo de Risco Individual

- Um seguro de veículos cuja cobertura é apenas o furto ou o microsseguro que cobre perdas de pequenos objetos em viagens como malas, máquinas fotográficas entre outros, são exemplos simples para o caso em que $\mathrm{B_i}$ assume apenas um único valor.
- Dessa forma também podem-se estabelecer outras relações:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - q & (x = 0) \\ q & (x = B) \\ 0 \ (x = valores\ não\ cobertos) & \end{cases}$$

$$E(X) = \boldsymbol{Bq}$$

$$var(X) = \boldsymbol{B^2 q(1 - q)}$$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - q & (0 \leq x < \mathrm{B}) \\ 1 & (x \geq \mathrm{B}) \end{cases}$$

Modelo de Risco Individual

Exemplo 1.

Calcule o valor do Prêmio de Risco através do princípio do desvio padrão, para um seguro que paga $R\$\,30.000,00$ caso o veículo seja furtado. Considere a probabilidade de furto do veículo igual a 0,007 e o *β=0,7.*

Nesse caso, o prêmio é calculado por meio de $\Pi_X = E(X) + \sigma_X \beta$,

Modelo de Risco Individual

Resposta

$$E(X) = 30000(0{,}007) = R\$\ 210{,}00$$

$$var(X) = 30000^2(0{,}007)(0{,}993) = R\$\ 6255900{,}00$$

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} = 2501{,}18$$

- Logo

$$\Pi_X = 210 + 2501{,}18 \times 0{,}7 = R\$1960{,}83$$

Modelo de Risco Individual

Pode-se estabelecer S_{ind} como:

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i B_i$$

Sendo $P(I_i = 1) = q_i$ e $P(I_i = 0) = 1 - q_i$.

Logo:

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i B_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(I_i B_i)$$

No modelo de risco individual , N será definido como:

$$N = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Logo :

$$N \sim Binomial(n, q)$$

$$E(N) = nq$$

$$var(N) = nq(1-q)$$

Exemplo 2:

Seja uma carteira de seguros com 10000 apólices, onde cada apólice possui uma probabilidade não nula de sinistros de $0{,}01$.

Calcular o número esperado de sinistros em 1 ano e o respectivo desvio padrão.

Resp.:

$$N \sim Binomial(10000; 0{,}01)$$

$$E(N) = 10000 \times 0{,}01 = 100$$

$$\sigma_N = \sqrt{10000 \times 0{,}01 \times 0{,}99} \approx 9{,}94$$

- Uma boa aproximação da distribuição de N pode ser feita através de:
    - Da distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = nq$ ou
    - Normal com parâmetros $\mu_N = nq$ e $var(N) = nq(1-q)$,

para o caso de n suficientemente grande.

➢ Exemplo 3

Para os dados do exemplo anterior calcule a probabilidade de que em 10000 apólices verificadas ocorra no máximo 120 sinistros. Para este calcule utilize o modelo binomial e suas aproximações pelo modelo de Poisson e Normal.

$\mathbf{N \sim B(n = 1000, q = 0.01)}$
$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \binom{100000}{k} 0{,}01^{k} (0{,}99)^{10000-k} = \mathbf{0{,}9778855}$$
$\mathbf{N \sim Po(nq = 100)}$
$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \frac{100^{k} e^{-100}}{k!} = \mathbf{0{,}9773307}$$
$\mathbf{N \sim N(nq = 100, nq(1-q) = 99)}$
$$P(N \leq 120) = \int_{0}^{120} \frac{e^{\frac{(n-100)^2}{198}}}{\sqrt{198\pi}} dn = \mathbf{0{,}9777884}$$

Modelos de risco Individual –A distribuição de $\boldsymbol{X_i}$

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \sum_{k=0}^{1} P(X_i \leq x_i, I_i = k)$$

Assim:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i | I = 1) P(I_i = 1) + P(X_i \leq x_i | I_i = 0) P(I_i = 0)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i) q_i + (1 - q_i) I_{[0,\infty)}(x_i)$$

em que x_i corresponde a um possível valor de X_i e representa o valor da indenização paga em caso de ocorrência do sinistro

Exemplo 4

Seja um seguro que cobre morte com indenização fixa de R$10000,00, e invalidez total e permanente com indenização fixa de R$ 5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Determinar os modelos probabilísticos de I_i, B_i e X_i.

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}.$	$\mathbf{B_1}$
$R\$0{,}00$	0,9988		
$R\$5000{,}00$	0,0002		
$R\$10000{,}00$	0,001		

$$E(X_1) = 0 \times 0{,}9988 + 5000 \times 0{,}0002 + 10000 \times 0{,}001 = \text{R\$}11{,}00$$

$$var(X_1) = (0^2 \times 0{,}9988 + 5000^2 \times 0{,}0002 + 10000^2 \times 0{,}001) - 11{,}00^2 = \text{R\$}^2 104879{,}00$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}.$		$\mathbf{B_1}$
$R\$0{,}00$	$0{,}9988$	0	$0{,}9988$	
$R\$5000{,}00$	$0{,}0002$			
$R\$10000{,}00$	$0{,}001$	1	$0{,}0012$	

$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{R\$}11{,}00$

$\mathrm{E}(I_1) = 0{,}0012$

$var(X_1) = \mathrm{R\$}^2 104879{,}00$

$var(I_1) = 0{,}0012 \times 0{,}9988 = 0{,}001199$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}.$		$\mathbf{B_1} = \boldsymbol{X_1} \vert \boldsymbol{I_1} = \mathbf{1}$
$R\$0{,}00$	$0{,}9988$	0	$0{,}9988$	
$R\$5000{,}00$	$0{,}0002$	1	$0{,}0012$	$\frac{0{,}0002}{0{,}0012} = 0{,}167$
$R\$10000{,}00$	$0{,}001$			$\frac{0{,}001}{0{,}0012} = 0{,}833$

$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{R\$}11{,}00$

$var(X_1) = \mathrm{R\$}^2 104879{,}00$

$\mathrm{E}(I_1) = 0{,}0012$

$var(I_1) = 0{,}001199$

$$\mathrm{E}(B_1) = (0{,}833\ )\mathrm{R\$}10000{,}00 + (0{,}167\ )\mathrm{R\$}5000{,}00 = \mathrm{R\$}9166{,}67$$

$$var(B_1) = [0{,}833(R\$10000{,}00)^2 + 0{,}167(R\$5000{,}00)^2] - \mathrm{R\$}9166{,}67^2 = \mathrm{R\$}^2 3497768$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}.$		$\mathbf{B_1}$
$R\$0{,}00$	0,9988	0	0,9988	
$R\$5000{,}00$	0,0002	1	0,0012	$\frac{0{,}0002}{0{,}0012} = 0{,}167$
$R\$10000{,}00$	0,001			$\frac{0{,}001}{0{,}0012} = 0{,}833$

$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{R\$}11{,}00$

$var(X_1) = \mathrm{R\$}^2 104879{,}00$

$\sigma_{X_1} = R\$\ 323{,}85$

$\mathrm{E}(\mathrm{I}_1) = 0{,}0012$

$var(I_1) = 0{,}001199$

$\sigma_{I_1} = 0{,}034$

$\mathrm{E}(B_1) = \mathrm{R\$}9166{,}67$

$var(B_1) = R\$^2 3497768$

$\sigma_{B_1} = \mathrm{R\$}\ 1870{,}232$

$CV_{X_1} = 29{,}44$

$CV_{I_1} = 0{,}9991667$

$CV_{B_1} = 0{,}2040252$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		$I_1.$		B_1	
$R\$0{,}00$	0,9988	0	0,9988		
$R\$5000{,}00$	0,0002	1	0,0012	$R\$5000{,}00$	$\frac{0{,}0002}{0{,}0012} = 0{,}167$
$R\$10000{,}00$	0,001			$R\$10000{,}00$	$\frac{0{,}001}{0{,}0012} = 0{,}833$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x < 0 \\ 0{,}9988, \text{se } 0 \leq x < 5000 \\ 0{,}999, \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, \text{se } x \geq 10000. \end{cases}$$

$$F_{B_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 5000 \\ 0{,}167, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000 \end{cases}$$

$$F_{X_i}(\boldsymbol{x_i}) = F_{B_i}(\boldsymbol{x_i})q_i + (1 - q_i)I_{[0,\infty)}(\boldsymbol{x_i})$$

$$F_{X_i}(x) = \left(\begin{cases} 0, & \text{se } x < 5000 \\ 0{,}167, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000 \end{cases}\right) 0{,}0012 + 0{,}9988 I_{(0,\infty]}(x)$$

Exemplo 5

Um seguro agrícola cobre a perda de uma plantação em caso de geada e seca prolongada. Considere que esses eventos ocorrem com 1% de probabilidade, e que a o valor das indenizações paga pela seguradora seja modelado tenha a seguinte função densidade

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99 & se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i} & se\ x_i > 0 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

Encontre a distribuição de X_i, no caso da ocorrência do sinistro (em milhões de reais). Encontre a função de distribuição de X_i, obtenha também o modelo probabilístico de I_i.

- Resposta:

Observe que $X_i = 0$ se $I_i = 0$, o que implica que $P(X_i = 0) = P(I = 0) = 0,99$, e de imediato temos que $I_i \sim Bernoulli(0,01)$.

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \int_0^{x_i} 0,002e^{-0,2z}dz$$

- Resposta:

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \int_0^{x_i} 0{,}002e^{-0{,}2z}dz$$

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \left[-\frac{0{,}002}{0{,}2}e^{-0{,}2x_i} - \left(-\frac{0{,}002}{0{,}2}e^{-0{,}2\times 0}\right)\right]$$

$$F_{X_i}(x_i) = 1 - 0{,}01e^{-0{,}2x_i}$$

Resposta:

A partir das informações dadas no enunciado do exemplo temos que:

$$f_{\mathrm{B}_i}(x_i) = f_{X_i|I_i=1}(x_i|I_i = 1) = \frac{f_{X_i,I_i=1}(x_i, I_i = 1)}{P(I_i = 1)}$$

$$f_{\mathrm{B}_i}(x_i) = \frac{0{,}002e^{-0{,}2x_i}}{0{,}01} = 0{,}2e^{-0{,}2x_i}, \qquad x_i > 0$$

Assim

$$F_{\mathrm{B}_i}(x_i) = \int_0^{x_i} 0{,}2e^{-0{,}2z}dz = \left[-\frac{0{,}2}{0{,}2}e^{-0{,}2x_i} - \left(-\frac{0{,}2}{0{,}2}e^{-0{,}2\times 0}\right)\right]$$

$$F_{\mathrm{B}_i}(x_i) = 1 - e^{-0{,}2x_i}$$

$$B_i \sim Exp(0{,}2)$$

- Resposta:

X	I	B
$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99\,, se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i}, se\ x_i > 0 \\ 0\,,\ \ c.c. \end{cases}$	$P(I_i = 0) = 0{,}99$ $P(I_i = 1) = 0{,}01$	$f_{\mathrm{B}_i}(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x_i}, x_i > 0$
$E(X_i) = 0{,}05$ $var(X_i) \approx 0{,}4950$	$E(I_i) = 0{,}01$ $var(I_i) = 0{,}0099$	$E(\mathrm{B}_i) = 5$ $var(\mathrm{B}_i) = 25$

$$F_{X_i}(x_i) = (1 - e^{-0{,}2x_i})0{,}01 + 0{,}99I_{(0,\infty]}(x_i)$$

Modelos de risco Individual – A distribuição de X_i

É fácil perceber pelo exemplo que:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 - q_i)\ , se\ x_i = 0 \\ q_i f_{B_i}(x), se\ x_i > 0 \end{cases}.$$

Pois,

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99 \quad ; & (1 - 0{,}01) \quad ;\ se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i}\ ; & 0{,}01 \times 0{,}2e^{-0{,}2x};\ se\ x_i > 0 \\ \quad 0 & caso\ contrário \end{cases}$$