Aula 16 - Anuidade Contínua

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Exemplo 1: Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a $\$500{,}00$ caso fosse fracionada em: $12, 365, 8760$ ou 525600 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado e a taxa de juros de 2% ao ano.

Solução

$$\ddot{a}_{\overline{\boldsymbol{n}}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1 - v^{n}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Exemplo 1: Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a $\$500{,}00$ caso fosse fracionada em: $12, 365, 8760$ ou 525600 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado e a taxa de juros de 2% ao ano.

Solução

Pagamento por:	m	$500\ddot{a}_{\overline{6}|}^{(m)}$
Ano	1	$ 2856,7297
Mês	12	$ 2830,9647
Dia	365	$ 2828,7069
hora	8760	$ 2828,6334
minuto	525600	$ 2828,6302

Anuidade Contínua

- A medida que se aumenta o número de partes ao qual a anuidade foi fracionada, o seu valor converge.

  - Caso a anuidade fosse fracionada em infinitas partes, os pagamentos seriam feitos continuamente ao longo do ano.

  - Na prática, serve como uma abstração sobre comportamento de pagamentos contínuos.

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{m}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{m}}{1-e^{\frac{1}{m}ln(v)}}\right]$$

Usando a regra de L’ Hopital

$$f(m) = \frac{1}{m} \quad \longmapsto \quad f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - e^{\frac{1}{m}ln(v)} \longmapsto \quad g'(m) = -e^{\frac{1}{m}ln(v)}\left[-\frac{ln(v)}{m^2}\right] = \frac{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}{m^2}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}\right] = \frac{(1-v^n)}{ln(v)}\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \rightarrow \infty$, então:

$$\ldots$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{(1 - v^n)}{ln(v)} \lim_{m\to\infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1 - v^n)}{ln(v)} = -\frac{(1 - v^n)}{ln(e^{-\delta})}$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Anuidade Contínua

Outra forma de encontrar a anuidade contínua pode ser vista a seguir:

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \int_0^n v^t \, dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt \,,$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = -\left.\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\right|_{t=0}^{t=n} = \frac{-e^{-\delta n} + 1}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Exemplo 2: Quanto custaria uma anuidade anual no valor de $\$500$ pagável continuamente por 6 anos, considerando a taxa de juros anual de 2%?

Solução

Exemplo 2: Quanto custaria uma anuidade anual no valor de $\$500$ pagável continuamente por 6 anos, considerando a taxa de juros anual de 2%?

Solução

$$\bar{a}_{\overline{6}|} = \frac{1 - v^6}{\delta} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^6}{ln(1{,}02)} \approx 5{,}6572$$

$$500\bar{a}_{\overline{6}|} \approx 2828{,}6$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Assim para um T_x aleatório:

$$\bar{a}_{\overline{T_x|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

$$E\left(\bar{a}_{\overline{T_x|}}\right) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T_x|}} f_T(t)dt$$

- O <u>valor presente atuarial </u>de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Anuidade Vitalícia Contínua

Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)}\right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq \bar{a}_x \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

Anuidade Vitalícia Contínua

A variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = var\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right) = \frac{var(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{var(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta 2t} f_{T_x}(t)dt$$

$$(\bar{A}_x)^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right)^2$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 3: Suponha que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ, calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\overline{T_x}|}$ considerando uma pessoa de idade x.

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$var\left(\bar{a}_{\bar{T}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t) dt - \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t) dt\right)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 3

(i)

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}$$

(ii)

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}}$$

EXEMPLO 3

(i)

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

(ii)

$$P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

(iii)

$$\mu(x+t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}}$$

$$\mu(x+t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

EXEMPLO 3

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)e^{-\alpha t}\alpha}{\delta}dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\int_0^\infty e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)}\,dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)} + \frac{1}{\alpha}\right]$$

$$\boldsymbol{\bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha}}$$

- ***Observação**

$$ {}_tp_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} $$

$$ \bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \; {}_tp_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, e^{-\alpha t} dt $$

$$ \bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\alpha)} \, dt $$

$$ \bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty} $$

$$ \bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha} $$

EXEMPLO 3

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{var\left(e^{-\delta t}\right)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha\left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{\delta+\alpha}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha\left[-\frac{1}{(2\delta+\alpha)e^{t(2\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{2\delta+\alpha}}$$

$$\boxed{var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\alpha}{2\delta+\alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)^2\right]}$$

Anuidade Vitalícia Contínua

Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dado valor Π_x?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(1 - e^{-\delta T} \leq \delta\Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} \leq \delta\Pi_x - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta\Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta\Pi_x)]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[T \leq -\frac{ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right] = F_{T_x}\left(-\frac{ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right)$$

EXEMPLO 4: Considerando que o tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x seja modelado por uma função de densidade exponencial, $T_x \sim Exp(0{,}016)$, dado que $\delta = 0{,}10$, calcule $P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right)$.

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = P\left[T_x \leq -\frac{ln(1-\delta\bar{a}_x)}{\delta}\right] = P\left[T_x \leq -\frac{ln\left(1-\frac{\delta}{\delta+\alpha}\right)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = P\left[T_x \leq -\frac{ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = 1 - e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta}ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x\right) = 1 - \left(\frac{0{,}016}{0{,}016+0{,}10}\right)^{\frac{0{,}016}{0{,}1}} \approx 0{,}27164$$

Anuidade Vitalícia Contínua

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq y\right) = F_{T_x}\left(-\frac{ln(1-\delta y)}{\delta}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq y\right) = 1 - \frac{S_{T_0}\left(x + \left(-\frac{ln(1-\delta y)}{\delta}\right)\right)}{S_{T_0}(x)}, \qquad 0 < y \leq \frac{1-e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta}.$$

EXEMPLO 5 : Considere a função de sobrevivência dada por:

$$S_{T_0}(\mathrm{t}) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - \mathrm{t})^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq 115.$$

Dado $x = 40$ e $i = 4\%$ determine $P\left(\bar{a}_{\overline{T_{40}}|} \leq y\right)$.

EXEMPLO 5 :

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_{40}}|} \leq y\right) = 1 - \frac{S_{T_0}\left(40 - \frac{ln(1-0{,}04y)}{0{,}04}\right)}{S_{T_0}(40)}$$

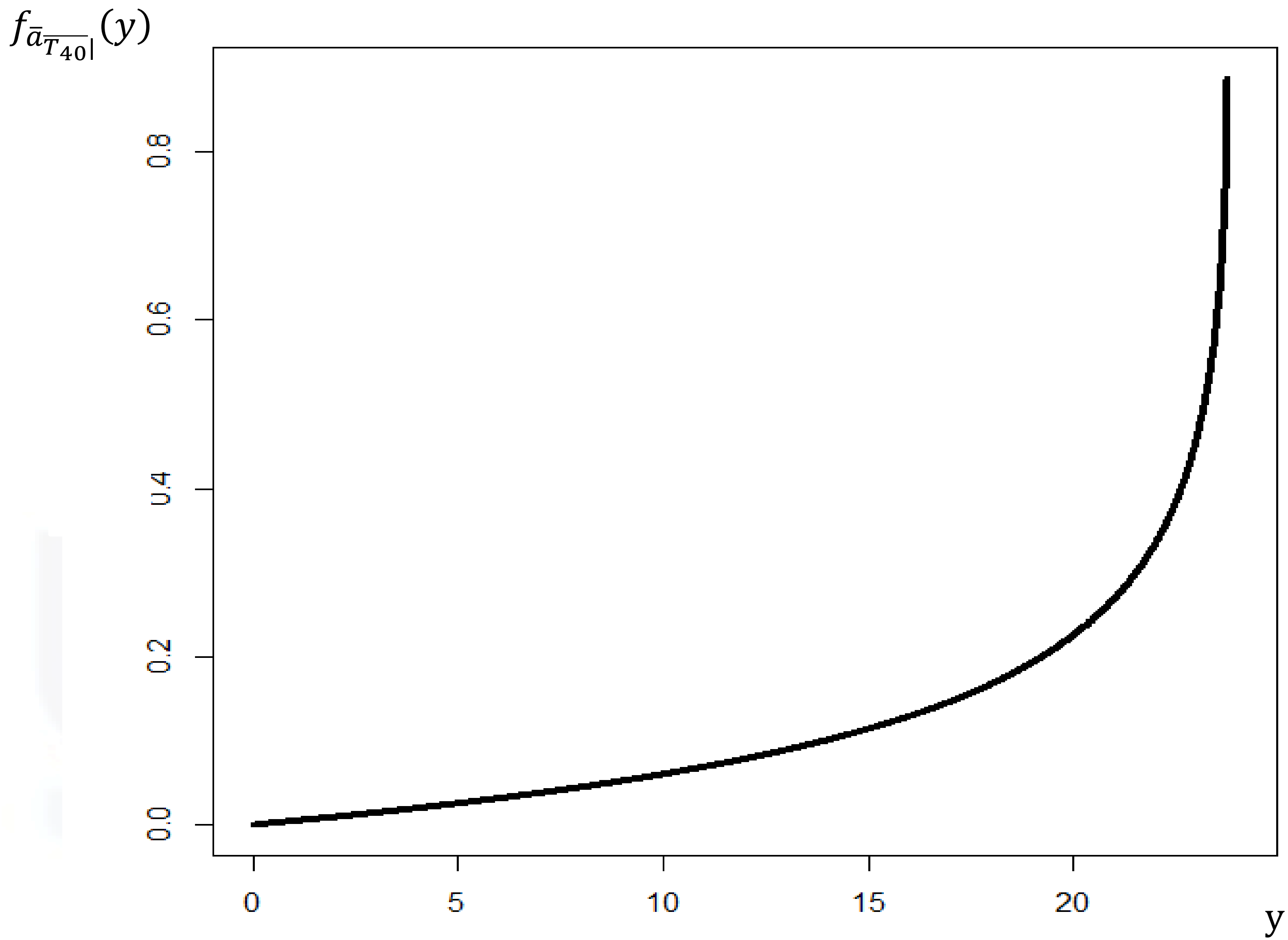
,

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_{40}}|} \leq y\right) = 1 - \frac{115^{-\frac{1}{3}}\left(115 - \left(40 - \frac{ln(1-0{,}04y)}{0{,}04}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{115^{-\frac{1}{3}}(115-40)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_{40}}|} \leq y\right) = 1 - \frac{\left(75 + \frac{ln(1-0{,}04y)}{0{,}04}\right)^{\frac{1}{3}}}{(75)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_{40}}|} \leq y\right) = 1 - \left(\frac{3 + ln(1-0{,}04y)}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, 0 < y \leq \frac{1-e^{-3}}{0{,}04}$$

$$f_{\bar{a}_{\overline{T_{40}}|}}(y) = \frac{0{,}00924482}{(1-0{,}04y)(3+\ln(1-0{,}04y))^{\frac{2}{3}}}, 0 < y \leq 23{,}75532$$



$f_{\bar{a}_{\overline{T_{40}}|}}(y)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
5
10
15
20
y

Anuidades Temporária contínua

Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se } \quad T \geq n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(Y) = \bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

Anuidades Temporária contínua

Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se } \quad T \geq n \end{cases}$$

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^2}{\delta^2}$$

Anuidade contínua, Diferida

$$ {}_{m|}\bar{a}_x = \int_m^\infty v^m \bar{a}_{\overline{t-m}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_m^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt $$

$$ {}_{m|}\bar{a}_x = {}_m E_x\ \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|} $$

$$ {}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt $$

$$ {}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x\ \bar{a}_{x+m:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|} $$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

Dado que:

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T} = 1$$

Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) + E\left(e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

				Fracionadas	Contínuas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$\bar{a}_x$
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	$\ddot{a}_{x:\bar{n}\vert}^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\bar{n}\vert}$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n}\vert}$	$a_{x:\bar{n}\vert}^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_x$	${}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}$	${}_{m\vert}\bar{a}_x$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_x$	${}_{k\vert}a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	${}_{m\vert}\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}a_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics,** 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.