Teoria do Risco
Aula 14

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial para N

- N é o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes.

$$N \sim B(n, q)$$

$$P(N = k) = \binom{n}{k} q^k (1 - k)^{n-k} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(k)$$

$$\boldsymbol{E(N) = nq\,;} \qquad \boldsymbol{var(N) = nq(1-q)\,;} \qquad \boldsymbol{M_N(t) = (1 - q + qe^t)^n}$$

$$E(N) > var(N)$$

Quando N tem distribuição de Binomial, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = nqE(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 nq(1-q) + nqvar(X) = nq[E(X^2) - E(X)^2 q]$$

$$M_{S_{col}}(t) = [1 - q + qM_X(t)]^n$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) \binom{n}{k} q^k (1-k)^{n-k}$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

- A variável aleatória N é definida como sendo igual ao número de fracassos requeridos para que ocorra o $\mathrm{r} - \text{ésimo}$ sucesso,

  - Nota-se que ocorrem k fracassos e $\mathrm{r} - 1$ sucessos antes do $\mathrm{r} - \text{ésimo}$ sucesso no **último ensaio**
  - ..Representa o número de falhas que podem ocorrer numa sequência de ensaios de Bernoulli antes um número de sucessos **alvo** for atingido.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

$N \sim BN(r, q)$ é dita variável aleatória discreta de tempo de espera.

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} q^r (1 - q)^k$$

$k = 0,1,2,3 \ldots$ representa o número de falhas até a ocorrência do $r - ésimo$ sucesso, $r > 0$ e $0 < q < 1$,

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \qquad var(N) = \frac{r(1-q)}{q^2} \qquad M_N(t) = \left[\frac{q}{1-(1-q)e^t}\right]^r$$

$$\boldsymbol{var(N) > E(N)}$$

Quando N tem distribuição binomial negativa, dizemos que S_{col} tem distribuição binomial negativa composta, sendo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{r(1-q)}{q}E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X) = E(X)^2\left[\frac{r(1-q)^2}{q^2}\right] + E(X^2)\left[\frac{r(1-q)}{q}\right].$$

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left[\frac{q}{1-(1-q)M_X(t)}\right]^r}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\binom{k+r-1}{k} q^r (1-q\ )^k$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

- ...expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo (espaço, região...) se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.

- ...surge como um modelo adequado para descrição de frequência de eventos de baixa probabilidade de ocorrência, porém sujeitos a um grande número de experimentos.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} I_{\{0,1,\dots\}}(k)$$

N expressa a ocorrência de um dado número de eventos.

λ (intensidade da distribuição Poisson), é um parâmetro que indica a taxa de ocorrência desses eventos.

$$E(N) = \lambda \qquad var(N) = \lambda \qquad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$E(N) = var(N)$$

Quando N tem distribuição de Poisson, dizemos que S_{col} tem distribuição de Poisson composta, em que $\lambda > 0$, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X) = \lambda E(X^2)$$

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

- Para fenômenos com a mesma esperança matemática de frequência, o ajuste de um modelo binomial apresentaria menor variância que a do modelo de Poisson e este último apresentaria menor variância do que o ajuste com um modelo binomial negativo.

$$\sigma_B^2 < \sigma_P^2 < \sigma_{NB}^2$$

- As distribuições Binomial , Poisson e Binomial negativa podem ser satisfatoriamente aproximadas pela distribuição normal..

$$N \sim N\big(nq, nq(1-q)\big)$$

$$N \sim N(\lambda, \lambda)$$

$$N \sim N\left(\frac{r(1-q)}{q}, \frac{r(1-q)}{q^2}\right)$$

Exemplo 1

Considere que uma carteira de seguros em que o número de sinistros obedeça a uma **distribuição binomial negativa**, cuja probabilidade de ocorrência de cada sinistro seja de $0{,}8$ e tenha como **número esperado de sinistros** igual a 500 sinistros. Considere também que os sinistros individuais tenham distribuição exponencial com $\alpha = 0{,}01$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \frac{r(1-q)^2}{q^2} + E(X^2) \frac{r(1-q)}{q}$$

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \qquad 500 = \frac{r(1-0{,}8)}{0{,}8}$$

$r = 2000$ logo $N \sim BN(2000;\ \ 0{,}8)$

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q}E(X) = 500\frac{1}{0{,}01} = 50000$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\frac{r(1-q)^2}{q^2} + E(X^2)\frac{r(1-q)}{q}$$

$$var(S_{col}) = 10000 \times 125 + \left[\frac{1}{0{,}01^2} + \frac{1}{0{,}01^2}\right]500 = 11250000$$

Exemplo 2

Considere que os sinistros de uma carteira tenham distribuição Poisson Composta com $\lambda = 150$ (número médio de sinistros por ano) e que o montante dos sinistros individuais tenham distribuição de Pareto com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2000$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \qquad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$f(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, x > 0\ (\alpha, \beta > 0) \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{\beta}{(\alpha-1)}$$

$$var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \qquad \alpha > 2$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \quad \text{e} \quad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}; \quad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$$

- Assim

$$E(S_{col}) = \lambda \frac{\beta}{(\alpha - 1)} = 150 \frac{2000}{2} = 150000$$

$$var(S_{col}) = \lambda \left\{ \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} + \left[\frac{\beta}{(\alpha - 1)}\right]^2 \right\} = 150 \left[\frac{3 \times 2000^2}{4} + \left(\frac{2000}{2}\right)^2\right]$$

$$var(S_{col}) = 150 \left(\frac{3 \times 2000^2}{4} + \frac{2000^2}{4}\right) = 600\,000\,000$$

Exemplo 3

Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,99 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Qual a probabilidade de que a segunda falha de freios ocorra no **décimo** carro testado?

r = número de falhas

K = número de casos que não tiveram falhas

$$N \sim BN(2, \ 0{,}99)$$

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} q^r (1 - q)^k$$

Exemplo 3

Pelo enunciado tem-se que o número de carros testados será 10, e a pergunta pode ser lida como, qual a probabilidade de se encontrar 2 falhas em 10 carros. Assim $r = 2$ sucessos (sucesso pois o escopo do estudo é o número de falhas encontradas.) e $k = 8$ fracassos. Logo :

$$P(N = 8) = \binom{8+2-1}{8} 0{,}01^2 (0{,}99\,)^8 \approx 0{,}00083$$

A probabilidade de se encontrar o segundo carro com freios defeituosos antes de 8 carros passarem no teste é de $0{,}083\%$.