

Aula 16 – Anuidade Contínua

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \rightarrow \infty$, então:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right) = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{m}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right) = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{m}}{1 - e^{\frac{1}{m} \ln(v)}} \right]$$

Usando a regra de L' Hopital

$$f(m) = \frac{1}{m} \quad \mapsto \quad f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - e^{\frac{1}{m} \ln(v)} \quad \mapsto \quad g'(m) = -e^{\frac{1}{m} \ln(v)} \left[-\frac{\ln(v)}{m^2} \right] = \frac{v^{\frac{1}{m}} \ln(v)}{m^2},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}} \ln(v)} \right] = \frac{(1 - v^n)}{\ln v} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \rightarrow \infty$, então:

$$\dots$$
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{(1 - v^n)}{\ln v} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1 - v^n)}{\ln(v)} = -\frac{(1 - v^n)}{\ln(e^{-\delta})}$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{(1 - v^n)}{\delta}$$

Anuidade Contínua

Entregar

Prova que $a_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \rightarrow \infty$, leva a $\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{(1-v^n)}{\delta}$

Anuidade Vitalícia Contínua

➤ Assim para um T_x aleatório:

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T_x})}{\delta}$$

➤ O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu(x + t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Anuidade Vitalícia Contínua

➤ Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)} \right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- a variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \text{var} \left[\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \right]$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{\text{var}(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{\text{var}(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^n e^{-\delta^2 t} f_T(t) dt$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$(\bar{A}_x)^2 = \left(\int_0^n e^{-\delta t} f_T(t) dt \right)^2$$

EXEMPLO 16

Suponha que :

$$S_T(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ , calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\bar{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x .

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt - \left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt \right)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 16

➤ (i)

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

➤ (ii)

$$S_T(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha(t)})$$

$$S_{T_x}(t) = P(T > t + x | T > x) = \frac{1 - (1 - e^{-\alpha(x+t)})}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

➤ (i)

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

➤ (ii)

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & \text{c.c} \end{cases}$$

➤ (iii)

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}}$$

$$\mu(x+t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

EXEMPLO 16

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|t} p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t}) e^{-\alpha t} \alpha}{\delta} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

EXEMPLO 16

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{var(e^{-\delta t})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta + \alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \boxed{\frac{\alpha}{\delta + \alpha}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu(x + t) dt = \int_0^\infty e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(2\delta + \alpha)e^{t(2\delta + \alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \boxed{\frac{\alpha}{2\delta + \alpha}}$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\alpha}{2\delta + \alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha} \right)^2 \right] = \boxed{\frac{\alpha}{(2\delta + \alpha)(\delta + \alpha)^2}}$$

Anuidade Contínua Vitalícia

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade exceda o valor presente esperado, para o caso $T_x \sim \text{Exp}(\alpha)$?

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} > \frac{1}{\delta + \alpha}\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(-e^{-\delta T} > \frac{\delta}{\delta + \alpha} - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} < \frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(-\delta T < \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)$$

Anuidade Vitalícia Contínua

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

EXEMPLO 17

Considerando que o que tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x seja modelado por uma função de densidade exponencial, $T_x \sim \text{Exp}(0,016)$, dado que $\delta = 0,10$, calcule $P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x)$.

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = e^{-\alpha \left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{\alpha}{\delta + \alpha} \right)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = \left(\frac{0,016}{0,016 + 0,10} \right)^{\frac{0,016}{0,1}} = 0,7283$$

➤ Considerando $\delta = 0,01$ e $\alpha = 0,033$:

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = \left(\frac{0,033}{0,033 + 0,10} \right)^{\frac{0,033}{0,1}} = 0,4174$$

EXEMPLO 17

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln \frac{\mu(x+t)}{\delta + \mu(x+t)}\right) = e^{-\mu(x+t)\left(-\frac{1}{\delta} \ln \frac{\mu(x+t)}{\delta + \mu(x+t)}\right)} = \left(\frac{\mu(x+t)}{\delta + \mu(x+t)}\right)^{\frac{\mu(x+t)}{\delta}}$$

➤ Considerando $\delta = 0,10$ e a força de mortalidade igual a 0,016

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = \left(\frac{0,016}{0,016 + 0,10}\right)^{\frac{0,016}{0,1}} = 0,7283$$

➤ Considerando $\delta = 0,01$ e $\mu(x+t) = 0,033$:

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = \left(\frac{0,033}{0,033 + 0,10}\right)^{\frac{0,033}{0,1}} = 0,4174$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dado valor Π_x ?

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi_x\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x) = P(1 - e^{-\delta T} \leq \delta \Pi_x)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x) = P(-e^{-\delta T} \leq \delta \Pi_x - 1) = P(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta \Pi_x)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta \Pi_x)]$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right]$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi_x) = P\left[T \leq -\frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right] = F_T\left(-\frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right)$$

EXEMPLO 18

Suponha que :

$$S_T(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ , calcule o prêmio puro único imediato para comprar anuidades vitalícias a tempo contínuo para uma pessoa de idade x . Utilize $\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x dt$.

$$S_T(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

$$S_{T_x}(t) = P(T > t + x | T > x) = \frac{1 - [1 - e^{-\alpha(x+t)}]}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\alpha t} dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\alpha)} dt$$

$$\bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

Anuidades Temporária contínua

➤ Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n .

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{T}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}|} & \text{se } T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\bar{n}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Anuidades Temporária contínua

➤ Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n .

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{T}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}|} & \text{se } T \geq n \end{cases}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}_x|}) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^2}{\delta^2}$$

Anuidade vitalícia contínua, Diferida

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T-m}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$${}_m|\bar{a}_x = \int_m^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_m^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$${}_m|\bar{a}_x = v^m {}_m p_x \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_{x+m} \mu_{x+m+t} dt$$

$${}_m|\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

Anuidade vitalícia contínua, Diferida

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T-m}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{2}{\delta} v^{2m} {}_t p_x (\bar{a}_{x+m} - {}^2 \bar{a}_{x+m}) - ({}_m | \bar{a}_x)^2$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

Dado que:

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\bar{t}|} + e^{-\delta t} = 1$$

➤ Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E(\delta \bar{a}_{\bar{T}|} + e^{-\delta t})$$

$$1 = E(\delta \bar{a}_{\bar{T}|}) + E(e^{-\delta t})$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

A Relação entre anuidades e seguros também é satisfeita para o caso temporário.

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|}$$

Aula 15 – Anuidade com pagamentos certos

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente m parcelas para o segurado ou outrem e, a partir desse ponto, a seguradora pagará 1 u.m. caso o segurado esteja vivo.
- Caso o segurado morra antes do tempo m a seguradora precisa ter o valor presente necessário a m pagamentos .
- Caso o segurado morra após m anos, a seguradora deverá ter o necessário a pagar os m pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

➤ Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\bar{m}|} + (\bar{a}_{\bar{t}|} - \bar{a}_{\bar{m}|}), & T > m \end{cases}$$

Ou

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\bar{t}|}, & T > m \end{cases}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

➤ O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t) dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_T(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_m^\infty \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

➤ O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \int_0^m \bar{a}_{\bar{m}|} f_T(t) dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\bar{t}|} f_T(t) dt$$

$$\int_0^m \bar{a}_{\bar{m}|} f_T(t) dt = \bar{a}_{\bar{m}|} \int_0^m f_T(t) dt = \bar{a}_{\bar{m}|} {}_m q_x$$

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \bar{a}_{\bar{m}|} {}_m q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} {}_m q_x + \int_m^\infty \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

EXEMPLO 19

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora pagará 1 u.m. caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adicional modelado por:

$$f_{T(x)}(t) = 0,016e^{-0,016t} \text{ para } t > 0$$

E considere também $\delta = 0,10$

EXEMPLO 19

Lembrando que ${}_m q_x = F_{T_x}(m)$, temos que:

$${}_m q_x = 1 - e^{-0,016m}$$

Assim a partir de

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \frac{(1 - e^{-\delta m})}{\delta} {}_m q_x + \int_m^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Tem-se:

$$\bar{a}_{x,\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + \int_{30}^{\infty} \frac{(1 - e^{-0,1t})}{0,1} 0,016 e^{-0,016t} dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + 0,16 \int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

EXEMPLO 19

...

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + 0,16 \int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = (9,502)(0,3812) + 0,16 \left[-\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}} \right]_{30}^{\infty}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = (9,502)(0,3812) + 0,016 \left(\frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}} \right)$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = 9,7675$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$