

Teoria do Risco

Aula 11

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

DANILO MACHADO PIRES
LEANDRO FERREIRA
LEONARDO HENRIQUE COSTA
REINALDO ANTONIO GOMES MARQUES

TEORIA DO RISCO ATUARIAL
FUNDAMENTOS E CONCEITOS



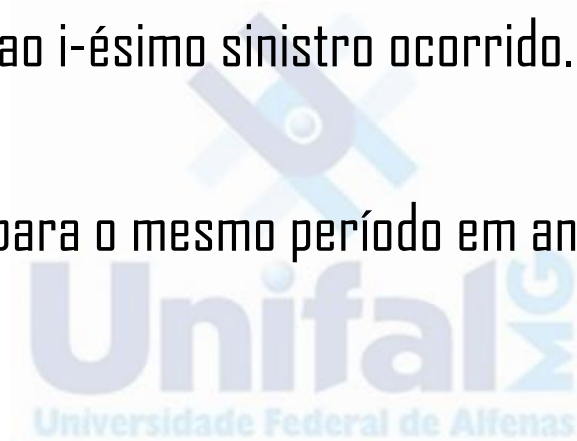
<https://atuaria.github.io/portahalley/>

Modelos de risco Coletivo

- Diferente da abordagem do modelo de risco individual, no modelo de risco coletivo o valor total das indenizações é calculado a partir de uma soma aleatória de variáveis aleatórias.
- O modelo de risco coletivo se diferencia do modelo de risco individual por modelar, de maneira conjunta, o número de sinistros e sua severidade.

Modelos de risco Coletivo

- O objetivo central da teoria do risco coletivo aplicada a seguros e danos é a modelagem matemática do comportamento probabilístico de S_{col} .
- S_{col} → é o montante agregado relativo aos sinistros ocorridos no ano.
- X_i → é o montante relativo ao i -ésimo sinistro ocorrido.
- N → o número de sinistros para o mesmo período em análise.



Modelos de risco Coletivo

➤ S_{col} é condicionado a X_i e a N .

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$S_{col} > 0 \text{ se } N > 0$$

$$S_{col} = 0 \text{ se } N = 0$$

Modelos de risco Coletivo

- O número de vezes que os sinistros ocorrem e seus valores serão expressos pelas ocorrências verificadas no conjunto das apólices que a compõem.
- Assumindo que $N = n$, então $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídos.
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ e N são mutualmente independentes.



Modelos de risco Coletivo

- ...qualquer sinistro ocorrido não pode sofrer interferência de outros eventos de mesma espécie e o número de sinistros (N) não tem efeito sobre o montante deles ($\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$).

$$E(S_{\text{col}}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

- $X_i \rightarrow$ é a variável aleatória que representa a sinistralidade da apólice i -ésima.
- $N \rightarrow$ variável aleatória que representa o número de sinistros na carteira em um dado intervalo de tempo.

Modelos de risco Coletivo

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

X_i, B_i, I_i

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

X_i, N

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E[E(S_{col}|N)]$$

$$E(S_{col}) = E[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)]$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n) p(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) p(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) p(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(X) p(N = n) = E(X) \sum_{n=0}^{\infty} n p(N = n)$$

- Logo

$$E(S_{col}) = E(X)E(N)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E[\text{var}(S_{col}|N)] + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

Primeiro iremos trabalhar $E[\text{var}(S_{col}|N)]$, assim:

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = E[\text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)]$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n) p(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) p(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) p(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \text{var}(X) p(N = n) = \text{var}(X) \sum_{n=0}^{\infty} n p(N = n)$$

$$\mathbf{E[\text{var}(S_{col}|N)] = \text{var}(X)E(N)}$$

Agora para $\text{var}(E(S_{col}|N))$, tem-se:

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E[\text{var}(S_{col}|N)] + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \text{var}(X)E(N)$$

Agora para $\text{var}[E(S_{col}|N)]$, tem-se:

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = \text{var}[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)] = \text{var}[NE(X)]$$

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 \text{var}(N)$$

Logo

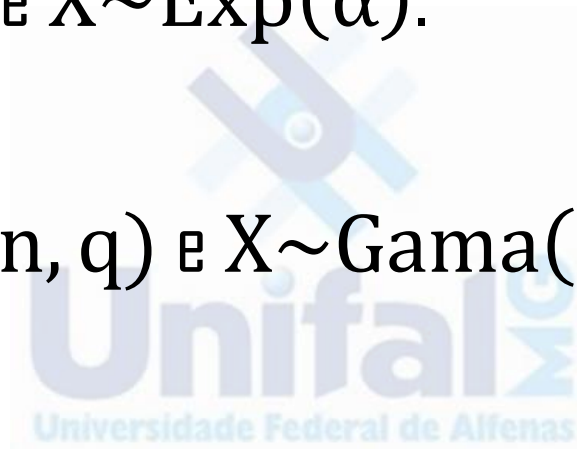
$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 \text{var}(N) + E(N) \text{var}(X)$$

Exemplo 1

Encontre os valores de $E(S_{col})$ e $var(S_{col})$ para as situações dos itens a seguir:

a) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X \sim \text{Exp}(\alpha)$.

b) $N \sim \text{Binomial}(n, q)$ e $X \sim \text{Gama}(r, \alpha)$.



Exemplo

a) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, então:

$$E(N) = \lambda \quad E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Logo:

$$E(S_{\text{col}}) = E(N)E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\text{var}(N) = \lambda \text{ e } \text{var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\text{var}(S_{\text{col}}) = \text{var}(X)E(N) + E(X)^2 \text{var}(N)$$

$$\text{var}(S_{\text{col}}) = \frac{1}{\alpha^2} \lambda + \frac{1}{\alpha^2} \lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Exemplo

b) $N \sim B(n, q)$ e $X \sim \text{Gama}(r, \alpha)$, então:

$$E(N) = nq \quad E(X) = \frac{r}{\alpha}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{nqr}{\alpha}$$

$$\text{var}(N) = nq(1 - q) \text{ e } \text{var}(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$\text{var}(S_{col}) = \frac{r}{\alpha^2} nq + \frac{r^2}{\alpha^2} nq(1 - q) = \frac{nqr[1 + r(1 - q)]}{\alpha^2}$$

Exemplo 2

Suponha uma carteira de seguros cuja número de sinistros seja caracterizada pela variável aleatória $N \sim Po(12)$ e os valores dos sinistros seja $X \sim U_c(0,1)$, calcule $P(S_{col} \leq 10)$ utilizando uma aproximação pela distribuição normal.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

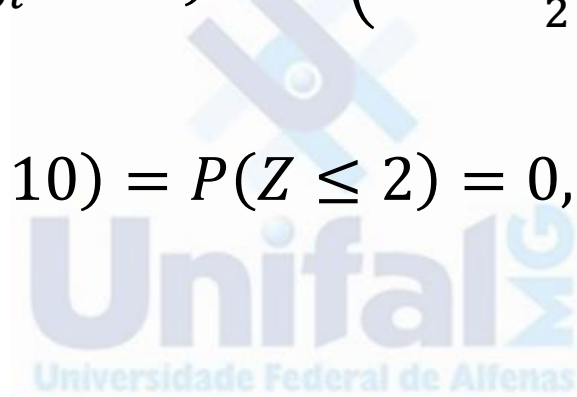
Exemplo

$$E(S_{col}) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{4} 12 + 12 \frac{1}{12} = 4$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-6}{2}\right)$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P(Z \leq 2) = 0,97725$$



Modelos de risco Coletivo -A distribuição de S_{col} , os sinistros coletivos.

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N
 - Um método iterativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado poder computacional,
- Método da função geradora de momentos.
 - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.