

# Teoria do Risco

## Aula 13

**Danilo Machado Pires**  
**danilo.pires@unifal-mg.edu.br**

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



## Modelo de Risco individual

$X_i$  Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$S_{ind}, X_i, B_i, I_i$

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i) q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 q_i (1 - q_i)$$

## Modelo de Risco coletivo

$X_i$  Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

$S_{col}, X_i, N$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

# Modelos de risco Coletivo- A distribuição de $S_{col}$ , os sinistros coletivos.

➤ O método da convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(s) p(N = k) \quad F^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p(N = k) \quad p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

# Modelos de risco Coletivo

O processo de convolução no modelo de risco coletivo leva em consideração a convolução entre os sinistros ocorridos dado que quantidade ocorrida também é uma variável aleatória.

Modelo de risco individual

$$F^{(k)} = F_k * F^{(k-1)}$$
$$F_{S_{\text{ind}}}^{(2)}(s) = \sum_{j=0}^s F_X(s - y_j) p_Y(y_j)$$

Modelo de risco coletivo

$$P^{(k)} = P_k * P^{(k-1)}$$
$$F_{S_{\text{col}}}^{(2)}(s) = \sum_{k=0}^2 F^{*k}(s) p_N(k)$$

$X$  (discreto)  $\rightarrow S_{\text{col}}$  (discreto)

$X$  (contínuo)  $\rightarrow S_{\text{col}}$  (contínuo)

# Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$F^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

$X$  contínuo.

$$F^{*k}(s) = \int_0^s F^{*k-1}(s-h)p(h)dh$$

$F^{*k-1} * F$

$$p^{*k}(s) = \int_0^s p^{*k-1}(s-h)p(h)dh$$

$p^{*k-1} * p$

# Exemplo 1

Calcular  $F_{S_{col}}(s)$ , quando  $X \sim Exp(\alpha)$  e  $N \sim Po(\lambda)$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p(N = k)$$

$$F^{*k}(s) = \int_0^s F^{*k-1}(s-h)p(h)dh$$

*Assim:*

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

## Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} ; x > 0$$

$$F^{*k}(s) = \int_h F^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$F^{*(2)}(s) = \int_0^s F^{*2-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s F(s-h) p(h) dh$$

$$F^{*(2)}(s) = \int_0^s [1 - e^{-\alpha(s-h)}] \alpha e^{-\alpha h} dh$$

$$F^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s} (1 + \alpha s)$$

$$F^{*3}(s) = \int_0^s F^{*3-1}(s-h)p(h)dh = \int_0^s F^{*2}(s-h)p(h)dh$$

$$F^{*3}(s) = \int_0^s \{1 - e^{-\alpha(s-h)}[1 + \alpha(s-h)]\}\alpha e^{-\alpha h}dh$$

...

$$F^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s} \left[ 1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!} \right]$$



- Desta forma, então, chega-se à seguinte formula de  $P^{*k}$

$$F(s) = 1 - e^{-\alpha s}$$

$$F^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s}(1 + \alpha s)$$

$$F^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s} \left[ 1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!} \right]$$

...

$$F^{*k}(s) = 1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!}$$

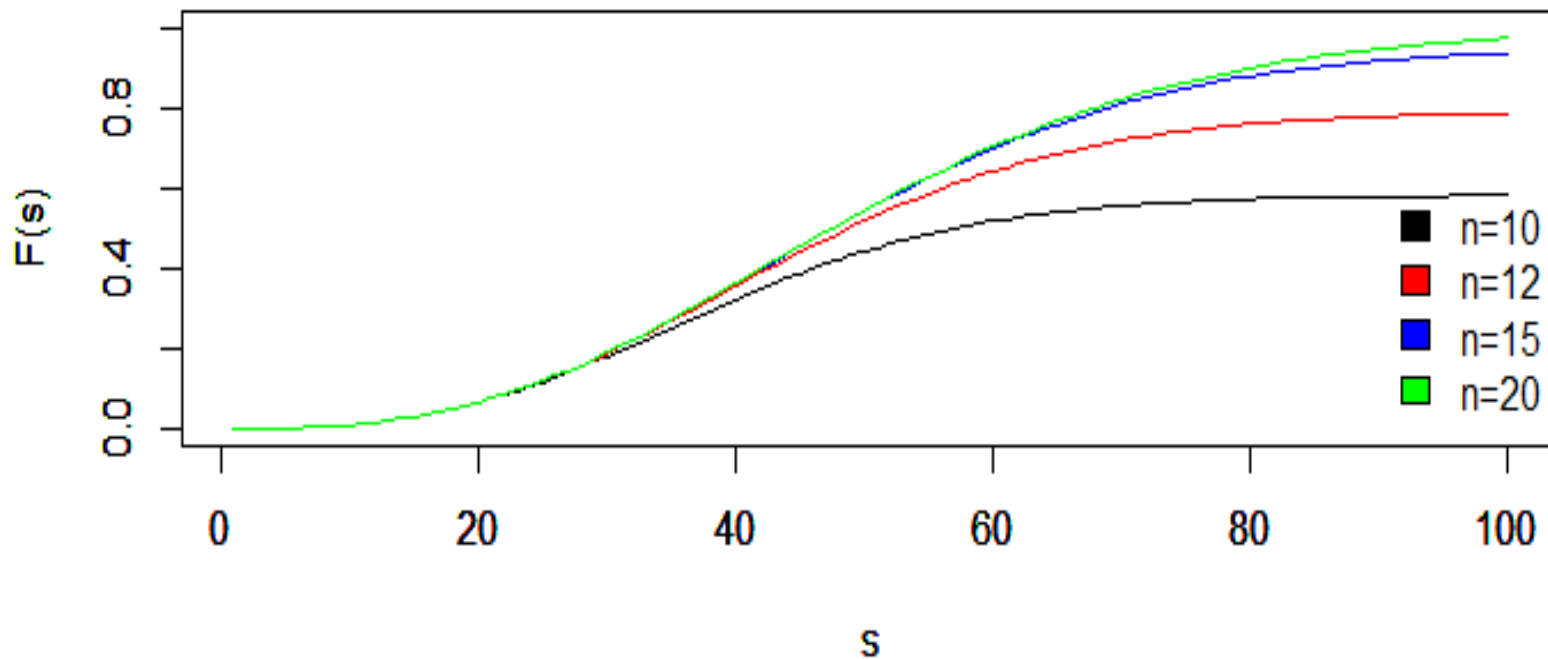
Como:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n F^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Tem-se que:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n \left[ 1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!} \right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n \left[ 1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!} \right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$



Comportamento de  $F_{s_{col}}(S)$  com  $\alpha = 0,2, \lambda = 10$  para diferentes quantidade de apólices  $n$ .

## Exemplo 2

Adicionalmente pode-se calcular  $p^{*k}$  e  $f_{S_{col}}(s)$ , quando  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$  e  $N \sim \text{Po}(\lambda)$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

## Cálculo de $p^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; x > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s p^{*2-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s p(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s [\alpha e^{-\alpha(s-h)}] \alpha e^{-\alpha h} dh = \alpha^2 s e^{-\alpha s},$$

## Cálculo de $p^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; x > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \alpha^2 s e^{-\alpha s}$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s p^{*3-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s p^{*2}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s \alpha^2 (s-h) e^{-\alpha(s-h)} \alpha e^{-\alpha h} dh = \frac{\alpha^3 s^2 e^{-\alpha s}}{2}$$

## Cálculo de $p^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; x > 0$$

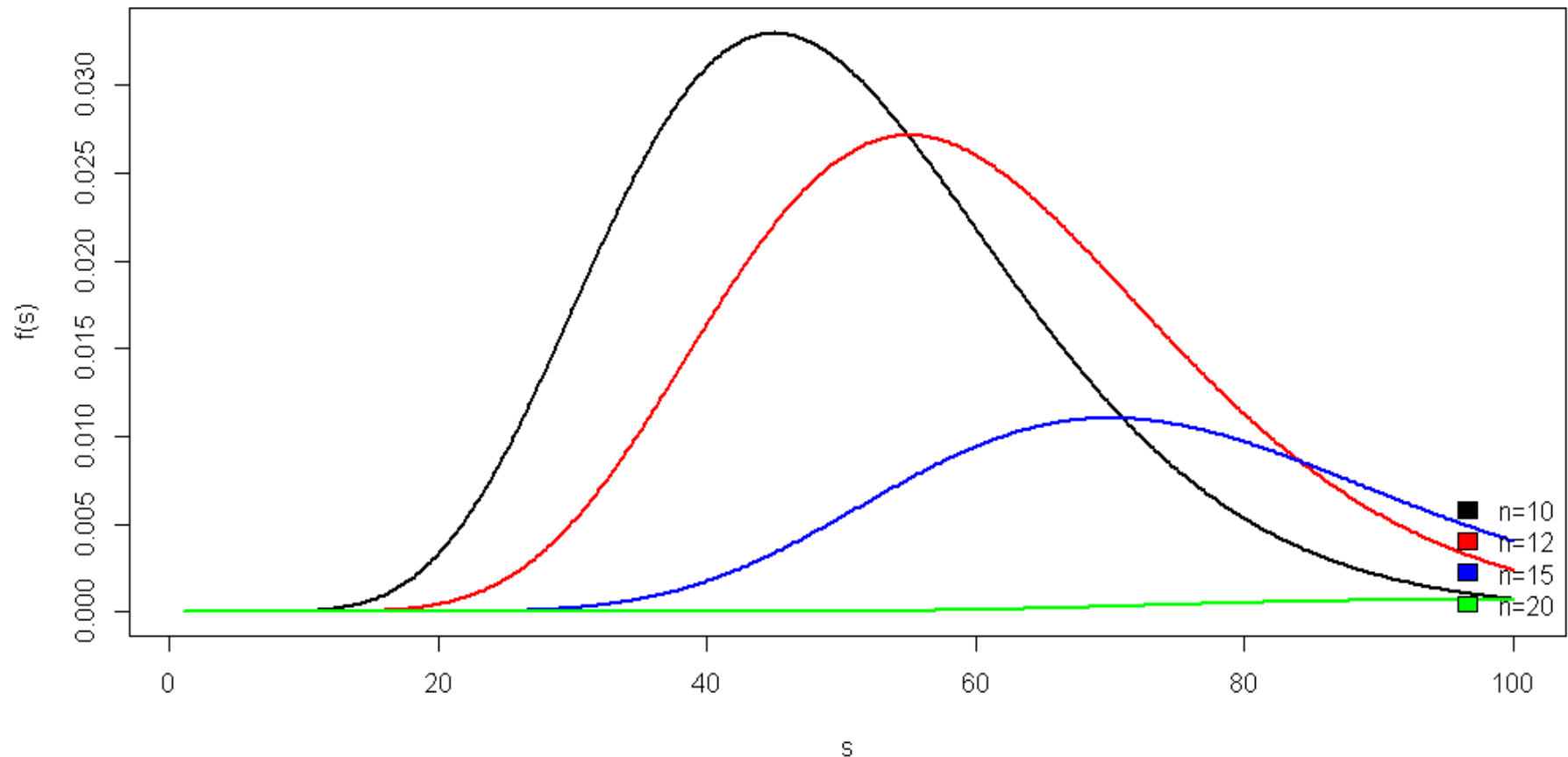
$$p^{*(2)}(s) = \alpha^2 s e^{-\alpha s},$$

$$p^{*3}(s) = \frac{\alpha^3 s^2 e^{-\alpha s}}{2}$$

...

$$p^{*k}(s) = \frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!}$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!} \right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$



**Comportamento de  $f_{s_{col}}(S)$  com  $\alpha = 0,2, \lambda = 10$  para diferentes quantidade de apólices  $n$ .**



# Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$\begin{array}{l|l} F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(s) p_N(k) & p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k) \\ F^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s) & p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s) \end{array}$$

# Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

Quando  $X$  é discreto tem-se

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h) p(h)$$

*Considere  $h$  como um dos valores possíveis para  $X$ .*

## Exemplo 3

Uma carteira de seguros produz 0,1 ou 2 sinistros com as respectivas probabilidades: 20%,50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores  $R\$100$ ,  $R\$200$  ou  $R\$300$ , com as respectivas probabilidades: 20%, 70% e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados  $S_{col}$ .

$X_i$	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

$N$	$P(N)$	$S_{col}$
0	0,2	$S_{col} = 0$
1	0,5	$S_{col} = X_1 \quad \{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2 \quad \{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$

Em primeiro lugar, computemos todas as combinações possíveis de frequência e severidades e assim explicitemos os valores possíveis de sinistros agregados e associados as probabilidades de ocorrência

Por definição tem-se que  $p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0 \end{cases}$

- Logo para  $k = 0$ :

$$p^{*0}(0) = 1$$

$$p^{*0}(100) = 0$$

$$p^{*0}(200) = 0$$

$$p^{*0}(300) = 0$$

$$p^{*0}(400) = 0$$

$$p^{*0}(500) = 0$$

$$p^{*0}(600) = 0$$

Para  **$k = 1$** :

Usando  $p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s - h)p(h)$  sendo  $k$  os possíveis valores assumidos por  $N$ .

$$p^{*1}(0) = \sum_{h=0}^0 p^{*1-1}(0 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(100) = \sum_{h=0}^{100} p^{*1-1}(100 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(200) = \sum_{h=0}^{200} p^{*1-1}(200 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(300) = \sum_{h=0}^{300} p^{*1-1}(300 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(400) = \sum_{h=0}^{400} p^{*1-1}(400 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(500) = \sum_{h=0}^{500} p^{*1-1}(500 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(600) = \sum_{h=0}^{600} p^{*1-1}(600 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(0) = p^{*0}(0)p(0) = 0$$

$$p^{*1}(100) = p^{*0}(100)p(0) + p^{*0}(0)p(100) = 0,2$$

$$p^{*1}(200) = p^{*0}(200)p(0) + p^{*0}(100)p(100) + p^{*0}(0)p(200) = 0,7$$

$$p^{*1}(300) = p^{*0}(300)p(0) + p^{*0}(200)p(100) + p^{*0}(100)p(200) + p^{*0}(0)p(300) = 0,1$$

$$p^{*1}(400) = p^{*0}(400)p(0) + p^{*0}(300)p(100) + p^{*0}(200)p(200) + p^{*0}(100)p(300) + p^{*0}(0)p(400) = 0$$

$$p^{*1}(500) = p^{*0}(500)p(0) + p^{*0}(400)p(100) + p^{*0}(300)p(200) + p^{*0}(200)p(300) + p^{*0}(100)p(400) + p^{*0}(0)p(500) = 0$$

$$p^{*1}(600) = p^{*0}(600)p(0) + p^{*0}(500)p(100) + p^{*0}(400)p(200) + p^{*0}(300)p(300) + p^{*0}(200)p(400) + p^{*0}(100)p(500) + p^{*0}(0)p(600) = 0$$

$S_{col}$	$N = 0$	$N = 1$
<b>0</b>	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$
<b>100</b>	$p^{*0}(100) = 0$	$p^{*1}(100) = 0, 2$
<b>200</b>	$p^{*0}(200) = 0$	$p^{*1}(200) = 0, 7$
<b>300</b>	$p^{*0}(300) = 0$	$p^{*1}(300) = 0, 1$
<b>400</b>	$p^{*0}(400) = 0$	$p^{*1}(400) = 0$
<b>500</b>	$p^{*0}(500) = 0$	$p^{*1}(500) = 0$
<b>600</b>	$p^{*0}(600) = 0$	$p^{*1}(600) = 0$

Para  **$k = 2$** :

$$p^{*2}(\mathbf{0}) = \sum_{h=0}^0 p^{*2-1}(0-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{100}) = \sum_{h=0}^{100} p^{*2-1}(100-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{200}) = \sum_{h=0}^{200} p^{*2-1}(200-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{300}) = \sum_{h=0}^{300} p^{*2-1}(300-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{400}) = \sum_{h=0}^{400} p^{*2-1}(400-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{500}) = \sum_{h=0}^{500} p^{*2-1}(500-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{600}) = \sum_{h=0}^{600} p^{*2-1}(600-h)p(h)$$



Para  **$k = 2$** :

$$p^{*2}(0) = p^{*1}(0)p(0) = 0$$

$$p^{*2}(100) = p^{*1}(100)p(0) + p^{*1}(0)p(100) = 0$$

$$p^{*2}(200) = p^{*1}(200)p(0) + p^{*1}(100)p(100) + p^{*1}(0)p(200) = 0,04$$

$$p^{*2}(300) = p^{*1}(300)p(0) + p^{*1}(200)p(100) + p^{*1}(100)p(200) + p^{*1}(0)p(300) = 0,28$$

$$p^{*2}(400) = p^{*1}(400)p(0) + p^{*1}(300)p(100) + p^{*1}(200)p(200) + p^{*1}(100)p(300) + p^{*1}(0)p(400) = 0,53$$

$$p^{*2}(500) = p^{*1}(500)p(0) + p^{*1}(400)p(100) + p^{*1}(300)p(200) + p^{*1}(200)p(300) + p^{*1}(100)p(400) + p^{*1}(0)p(500) = 0,14$$

$$p^{*2}(600) = p^{*1}(600)p(0) + p^{*1}(500)p(100) + p^{*1}(400)p(200) + p^{*1}(300)p(300) + p^{*1}(200)p(400) + p^{*1}(100)p(500) + p^{*1}(0)p(600) = 0,01$$

$s_{col}$	$P(N = 0) = 0,2$	$P(N = 1) = 0,5$	$P(N = 2) = 0,3$
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
<b>0</b>	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$	$p^{*2}(0) = 0$
<b>100</b>	$p^{*0}(100) = 0$	$p^{*1}(100) = 0,2$	$p^{*2}(100) = 0$
<b>200</b>	$p^{*0}(200) = 0$	$p^{*1}(200) = 0,7$	$p^{*2}(200) = 0,04$
300	$p^{*0}(300) = 0$	$p^{*1}(300) = 0,1$	$p^{*2}(300) = 0,28$
400	$p^{*0}(400) = 0$	$p^{*1}(400) = 0$	$p^{*2}(400) = 0,53$
500	$p^{*0}(500) = 0$	$p^{*1}(500) = 0$	$p^{*2}(500) = 0,14$
600	$p^{*0}(600) = 0$	$p^{*1}(600) = 0$	$p^{*2}(600) = 0,01$
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

Agora se faz necessário sumarizar todas as combinações que resultam no mesmo valor de sinistros.

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s)p_N(k)$$

Logo

$$P_{S_{col}}(\mathbf{0}) = p^{*0}(0)p_N(0) + p^{*1}(0)p_N(1) + p^{*2}(0)p_N(2) = 0,2$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{100}) = p^{*0}(100)p_N(0) + p^{*1}(100)p_N(1) + p^{*2}(100)p_N(2) = 0,1$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{200}) = p^{*0}(200)p_N(0) + p^{*1}(200)p_N(1) + p^{*2}(200)p_N(2) = 0,362$$

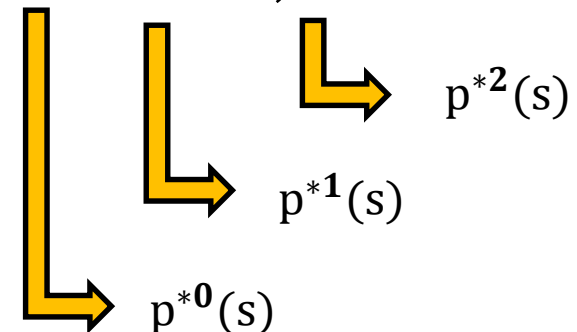
$$P_{S_{col}}(\mathbf{300}) = p^{*0}(300)p_N(0) + p^{*1}(300)p_N(1) + p^{*2}(300)p_N(2) = 0,134$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{400}) = p^{*0}(400)p_N(0) + p^{*1}(400)p_N(1) + p^{*2}(400)p_N(2) = 0,159$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{500}) = p^{*0}(500)p_N(0) + p^{*1}(500)p_N(1) + p^{*2}(500)p_N(2) = 0,042$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{600}) = p^{*0}(600)p_N(0) + p^{*1}(600)p_N(1) + p^{*2}(600)p_N(2) = 0,003$$

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,04 \\ 0 & 0,1 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,53 \\ 0 & 0 & 0,14 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow P_N(0) \\ \longrightarrow P_N(1) \\ \longrightarrow P_N(2) \end{matrix}$$



$$P_{S_{col}}(\mathbf{0}) = 1 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 0 \times 0,3 = 0,2$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{100}) = 0 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 + 0 \times 0,3 = 0,1$$

...

$$P_{S_{col}}(\mathbf{600}) = 0 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 0,01 \times 0,3 = 0,003$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,2 & s = 0 \\ 0,1 & s = 100 \\ 0,362 & s = 200 \\ 0,134 & s = 300 \\ 0,159 & s = 400 \\ 0,042 & s = 500 \\ 0,003 & s = 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,2 & 0 \leq s < 100 \\ 0,2 + 0,1 = 0,3 & 100 \leq s < 200 \\ 0,3 + 0,362 = 0,662 & 200 \leq s < 300 \\ 0,662 + 0,134 = 0,796 & 300 \leq s < 400 \\ 0,796 + 0,159 = 0,955 & 400 \leq s < 500 \\ 0,955 + 0,042 = 0,997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

# Teoria do Risco

**Danilo Machado Pires**  
**danilo.pires@unifal-mg.edu.br**

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



# Modelos de risco Coletivo-Convolução

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(s) p_N(k)$$

$$F^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

Quando  $X$  é discreto tem-se

$$F^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \\ 1 & \text{se } s > 0 \end{cases}$$

$$F^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} F^{*k-1}(s - h) p(h)$$

Considere  $h$  como um dos valores possíveis para  $X$ .

## Exemplo 4

Uma carteira de seguros produz 0,1 ou 2 sinistros com as respectivas probabilidades: 20%,50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores  $R\$100$ ,  $R\$200$  ou  $R\$300$ , com as respectivas probabilidades: 20%, 70% e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados  $S_{col}$ .

$X_i$	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

$N$	$P(N)$	$S_{col}$
0	0,2	$S_{col} = 0$
1	0,5	$S_{col} = X_1 \quad \{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2 \quad \{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$



Por definição tem-se que  $F^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \\ 1 & \text{se } s > 0 \end{cases}$

Logo para  $k = 0$ :

$$F^{*0}(0) = 0$$

$$F^{*0}(100) = 1$$

$$F^{*0}(200) = 1$$

$$F^{*0}(300) = 1$$

$$F^{*0}(400) = 1$$

$$F^{*0}(500) = 1$$

$$F^{*0}(600) = 1$$

Para  **$k = 1$** :

Usando  $F^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} F^{*k-1}(s - h)p(h)$  sendo  $k$  os possíveis valores assumidos por  $N$ .

$$F^{*1}(0) = \sum_{h=0}^0 F^{*1-1}(0 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(100) = \sum_{h=0}^{100} F^{*1-1}(100 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(200) = \sum_{h=0}^{200} F^{*1-1}(200 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(300) = \sum_{h=0}^{300} F^{*1-1}(300 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(400) = \sum_{h=0}^{400} F^{*1-1}(400 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(500) = \sum_{h=0}^{500} F^{*1-1}(500 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(600) = \sum_{h=0}^{600} F^{*1-1}(600 - h)p(h)$$

$$F^{*1}(\mathbf{0}) = F^{*0}(0)p(0) = 0$$

$$F^{*1}(\mathbf{100}) = F^{*0}(100)p(0) + F^{*0}(0)p(100) = 0$$

$$F^{*1}(\mathbf{200}) = F^{*0}(200)p(0) + F^{*0}(\mathbf{100})p(\mathbf{100}) + F^{*0}(0)p(200) = 0,2$$

$$F^{*1}(\mathbf{300}) = F^{*0}(300)p(0) + F^{*0}(\mathbf{200})p(\mathbf{100}) + F^{*0}(\mathbf{100})p(\mathbf{200}) + F^{*0}(0)p(300) = 0,9$$

$$F^{*1}(\mathbf{400}) = F^{*0}(400)p(0) + F^{*0}(\mathbf{300})p(\mathbf{100}) + F^{*0}(\mathbf{200})p(\mathbf{200}) + F^{*0}(\mathbf{100})p(\mathbf{300}) + F^{*0}(0)p(400) = \mathbf{1}$$

$$F^{*1}(\mathbf{500}) = F^{*0}(500)p(0) + F^{*0}(\mathbf{400})p(\mathbf{100}) + F^{*0}(\mathbf{300})p(\mathbf{200}) + F^{*0}(\mathbf{200})p(\mathbf{300}) + F^{*0}(\mathbf{100})p(\mathbf{400}) + F^{*0}(0)p(500) = \mathbf{1}$$

$$F^{*1}(\mathbf{600}) = F^{*0}(600)p(0) + F^{*0}(\mathbf{500})p(\mathbf{100}) + F^{*0}(\mathbf{400})p(\mathbf{200}) + F^{*0}(\mathbf{300})p(\mathbf{300}) + F^{*0}(\mathbf{200})p(\mathbf{400}) + F^{*0}(\mathbf{100})p(\mathbf{500}) + F^{*0}(0)p(\mathbf{600}) = \mathbf{1}$$

$S_{col}$	$N = 0$	$N = 1$
0	$F^{*0}(0) = 0$	$F^{*1}(0) = 0$
100	$F^{*0}(100) = 1$	$F^{*1}(100) = 0$
200	$F^{*0}(200) = 1$	$F^{*1}(200) = 0,2$
300	$F^{*0}(300) = 1$	$F^{*1}(300) = 0,9$
400	$F^{*0}(400) = 1$	$F^{*1}(400) = 1$
500	$F^{*0}(500) = 1$	$F^{*1}(500) = 1$
600	$F^{*0}(600) = 1$	$F^{*1}(600) = 1$

Para  **$k = 2$** :

$$F^{*2}(0) = \sum_{h=0}^0 F^{*2-1}(0-h)p(h)$$

$$F^{*2}(100) = \sum_{h=0}^{100} F^{*2-1}(100-h)p(h)$$

$$F^{*2}(200) = \sum_{h=0}^{200} F^{*2-1}(200-h)p(h)$$

$$F^{*2}(300) = \sum_{h=0}^{300} F^{*2-1}(300-h)p(h)$$

$$F^{*2}(400) = \sum_{h=0}^{400} F^{*2-1}(400-h)p(h)$$

$$F^{*2}(500) = \sum_{h=0}^{500} F^{*2-1}(500-h)p(h)$$

$$F^{*2}(600) = \sum_{h=0}^{600} F^{*2-1}(600-h)p(h)$$

Para  **$k = 2$** :

$$F^{*2}(0) = F^{*1}(0)p(0) = 0$$

$$F^{*2}(100) = F^{*1}(100)p(0) + F^{*1}(0)p(100) = 0$$

$$F^{*2}(200) = F^{*1}(200)p(0) + F^{*1}(100)p(100) + F^{*1}(0)p(200) = 0$$

$$F^{*2}(300) = F^{*1}(300)p(0) + \mathbf{F^{*1}(200)p(100)} + F^{*1}(100)p(200) + F^{*1}(0)p(300) = 0,04$$

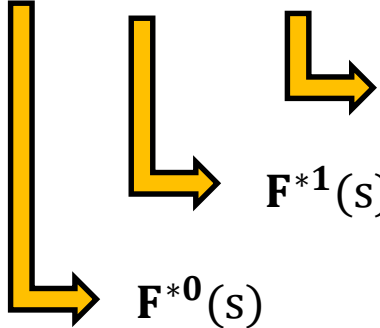
$$F^{*2}(400) = F^{*1}(400)p(0) + \mathbf{F^{*1}(300)p(100)} + \mathbf{F^{*1}(200)p(200)} + F^{*1}(100)p(300) + F^{*1}(0)p(400) = 0,32$$

$$F^{*2}(500) = F^{*1}(500)p(0) + \mathbf{F^{*1}(400)p(100)} + \mathbf{F^{*1}(300)p(200)} + \mathbf{F^{*1}(200)p(300)} + F^{*1}(100)p(400) + F^{*1}(0)p(500) = 0,85$$

$$F^{*2}(600) = F^{*1}(600)p(0) + \mathbf{F^{*1}(500)p(100)} + \mathbf{F^{*1}(400)p(200)} + \mathbf{F^{*1}(300)p(300)} + F^{*1}(200)p(400) + F^{*1}(100)p(500) + F^{*1}(0)p(600) = 0,99$$

$s_{col}$	$P(N = 0) = 0,2$	$P(N = 1) = 0,5$	$P(N = 2) = 0,3$
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
0	$F^{*0}(0) = 0$	$F^{*1}(0) = 0$	$F^{*2}(0) = 0$
100	$F^{*0}(100) = 1$	$F^{*1}(100) = 0$	$F^{*2}(100) = 0$
200	$F^{*0}(200) = 1$	$F^{*1}(200) = 0,2$	$F^{*2}(200) = 0$
300	$F^{*0}(300) = 1$	$F^{*1}(300) = 0,9$	$F^{*2}(300) = 0,04$
400	$F^{*0}(400) = 1$	$F^{*1}(400) = 1$	$F^{*2}(400) = 0,32$
500	$F^{*0}(500) = 1$	$F^{*1}(500) = 1$	$F^{*2}(500) = 0,85$
600	$F^{*0}(600) = 1$	$F^{*1}(600) = 1$	$F^{*2}(600) = 0,99$

$$F_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0,9 & 0,04 \\ 1 & 1 & 0,32 \\ 1 & 1 & 0,85 \\ 1 & 1 & 0,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow P_N(0) \\ \longrightarrow P_N(1) \\ \longrightarrow P_N(2) \end{matrix}$$



$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n F^{*k}(s) p_N(k)$$



$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,2 & 0 \leq s < 100 \\ 0,3 & 100 \leq s < 200 \\ 0,662 & 200 \leq s < 300 \\ 0,796 & 300 \leq s < 400 \\ 0,955 & 400 \leq s < 500 \\ 0,997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,2 & 0 \leq s < 100 \\ 0,2 + 0,1 = 0,3 & 100 \leq s < 200 \\ 0,3 + 0,362 = 0,662 & 200 \leq s < 300 \\ 0,662 + 0,134 = 0,796 & 300 \leq s < 400 \\ 0,796 + 0,159 = 0,955 & 400 \leq s < 500 \\ 0,955 + 0,042 = 0,997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

### ➤ Exemplo 5

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

$X_i$	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco individual**.  
Obtenha a função de probabilidade de  $S_{ind}$ .

$X_i$	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

$$p_S(s) = p_{X_1} * p_{X_2}(s) = \sum_{\forall x_1 \leq s} p_{X_2}(s - x_1) p_{X_1}(x_1)$$

$S$	$S(X_1, X_2)$	$P_S$
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

## ➤ Exemplo 6

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

$X_i$	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco coletivo**. Obtenha a função de probabilidade de  $S_{col}$ .

Solução:

$X_i$	$P(X_i = x_i)$	$I_i$	$P(I_i = i_i)$	$B_i = (X_i   I_i = 1)$	$P(B_i = b_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6		
R\$1000,00	0,02	1	0,4	R\$1000,00	$\frac{0,02}{0,4} = 0,05$
R\$2000,00	0,06			R\$2000,00	$\frac{0,06}{0,4} = 0,15$
R\$3000,00	0,32			R\$3000,00	$\frac{0,32}{0,4} = 0,8$

$N$	$P(N) = \binom{2}{n} 0,4^n 0,6^{2-n}$	$S_{col}$	Possíveis valores para $S_{col}$ .
0	0,36	$S_{col} = 0$	
1	0,48	$S_{col} = X_i \quad \forall i = 1,2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

**Quando X é discreto tem-se**

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h)p(h)$$

*Considere  $h$  como um dos valores possíveis para  $X$ .*

$S_{col}$	$P(N = 0) = 0,36$	$P(N = 1) = 0,48$	$P(N = 2) = 0,16$
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
0	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$	$p^{*2}(0) = 0$
1000	$p^{*0}(1000) = 0$	$p^{*1}(1000) = 0,05$	$p^{*2}(1000) = 0$
2000	$p^{*0}(2000) = 0$	$p^{*1}(2000) = 0,15$	$p^{*2}(2000) = 0,0025$
3000	$p^{*0}(3000) = 0$	$p^{*1}(3000) = 0,8$	$p^{*2}(3000) = 0,015$
4000	$p^{*0}(4000) = 0$	$p^{*1}(4000) = 0$	$p^{*2}(4000) = 0,1025$
5000	$p^{*0}(5000) = 0$	$p^{*1}(5000) = 0$	$p^{*2}(5000) = 0,24$
6000	$p^{*0}(6000) = 0$	$p^{*1}(6000) = 0$	$p^{*2}(6000) = 0,64$
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,04 \\ 0 & 0,1 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,53 \\ 0 & 0 & 0,14 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,48 \\ 0,16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow P_N(0) \\ \longrightarrow P_N(1) \\ \longrightarrow P_N(2) \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \text{L} \longrightarrow p^{*0}(s) & \text{L} \longrightarrow p^{*1}(s) & \text{L} \longrightarrow p^{*2}(s) \end{matrix}$

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$



$S$	$S(X_1, X_2)$	$P_S$
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^2 E(B_i)q_i$$

$$E(S_{ind}) = \mathbf{2200}$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^2 [var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)]$$

$$var(S_{ind}) = \mathbf{3860000}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = \mathbf{2200}$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$$

$$var(S_{col}) = \mathbf{3860000}$$

Calcule o valor de prêmio puro de modo que a probabilidade do sinistro o superar não exceda a 5% utilizando o princípio do percentil, (utilizando aproximação pela distribuição normal)

Calcule o valor de prêmio puro de modo que a probabilidade do sinistro o superar não exceda a 5% utilizando o princípio do percentil, (utilizando aproximação pela distribuição normal)

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}} = z_{0,95}$$

$$\Pi_S = E(S_{col}) + \sigma_{S_{col}} z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = R\$5431,91$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o prêmio puro de risco considerando que o limite de indenização para essa carteira seja de R\$4000,00.

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o prêmio puro de risco considerando que o limite de indenização para essa carteira seja de R\$4000,00.

$$Y = \begin{cases} S_{col} , & S_{col} < 4000 \\ 4000 , & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000 p(s) = R\$1956,8$$

# Fórmula recursiva de Panjer

Alguns modelos de probabilidade podem ser escritos como

$$P(n) = P(n - 1) \left( a + \frac{b}{n} \right), n = 1, 2, 3, \dots$$

A família de distribuição  $(a, b)$  de Panjer.

# Fórmula recursiva de Panjer

$$P(n) = P(n-1) \left( a + \frac{b}{n} \right), n = 1, 2, 3, \dots$$

- **Poisson**( $\lambda$ )

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

$$P(N = n) = \frac{\lambda}{n} P(N = n-1)$$

$$a = 0, \quad b = \lambda \quad \text{e} \quad P(N = 0) = e^{-\lambda}.$$

- **Binomial**( $k, q$ )

$$P(N = n) = \binom{k}{n} q^n (1-q)^{k-n}$$

$$P(N = n) = \frac{(k-n+1)q}{n(1-q)} P(N = n-1)$$

$$a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(k+1)q}{1-q} \quad \text{e} \quad P(N = 0) = (1-q)^k.$$

- **Binomial Negativa** ( $r, q$ )

$$P(N = n) = \binom{n+r-1}{n} q^r (1-q)^n$$

$$P(N = n) = \frac{r+n-1}{n} P(N = n-1)$$

$$a = 1-q, \quad b = \frac{r-1}{1-q} \quad \text{e} \quad P(N = 0) = (1-q)^n.$$

Considere que o número de sinistros  $N$  tal que  $N \sim Po(5)$ , calcule  $P(N = 3)$ ?

## SOLUÇÃO

$$P(N = 3) = \frac{e^{-5} 5^3}{3!} \approx 0,140$$

ou

$$P(N = n) = \frac{\lambda}{n} P(N = n - 1) \quad a = 0, \quad b = 3 \quad \text{e} \quad P(N = 0) = e^{-5}.$$

$$P(N = 3) = \frac{5}{3} P(N = 2)$$

$$P(N = 2) = \frac{5}{2} P(N = 1)$$

$$P(N = 1) = \frac{5}{1} P(N = 0) = 5e^{-5}$$

$$P(N = 3) = \frac{5}{3} \frac{5^2}{2} e^{-5} = \frac{5^3}{3!} e^{-5}$$

$$P(N = 2) = \frac{5}{2} 5e^{-5} = \frac{5^2}{2} e^{-5}$$



# Fórmula recursiva de Panjer

$$P(n) = P(n-1) \left( a + \frac{b}{n} \right), n = 1, 2, 3, \dots$$

- **Poisson**( $\lambda$ )

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

$$P(N = n) = \frac{\lambda}{n} P(N = n-1)$$

$$a = 0, \quad b = \lambda \quad \text{e} \quad P(N = 0) = e^{-\lambda}.$$

- **Binomial**( $k, q$ )

$$P(N = n) = \binom{k}{n} q^n (1-q)^{k-n}$$

$$P(N = n) = \frac{(k-n+1)q}{n(1-q)} P(N = n-1)$$

$$a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(k+1)q}{1-q} \quad \text{e} \quad P(N = 0) = (1-q)^k.$$

```
poi<-function(n,lambda){  
  if(n==0){  
    poi<-exp(-lambda)  
  } else{  
    poi<-(lambda /n)*poi(n-1,lambda)  
  }  
  return(poi)  
}
```

```
Bin<-function(n,k,q){  
  if(n==0){  
    Bin<-(1-q)^k  
  } else{  
    Bin<-((k-n+1)*q)/(n*(1-q))*Bin(n-1,k,q)  
  }  
  return(Bin)  
}
```

# Fórmula recursiva de Panjer para $P(S_{col})$

- Sendo  $S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$ , então:

$$P(S = s) = \frac{1}{1 - aP(X = 0)} \sum_{i \leq s} \left[ \left( a + \frac{bi}{s} \right) P(X = i) P(S = s - i) \right]$$

em que  $a$  e  $b$  vem da distribuição de  $N$ .

$N$	$P(N) = \binom{2}{n} 0,4^n 0,6^{2-n}$	$S_{col}$	Possíveis valores para $S_{col}$ .
0	0,36	$S_{col} = 0$	0,05   0,15   0,8
1	0,48	$S_{col} = X_i \forall i = 1,2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$P(S = s) = \frac{1}{1 - \textcolor{red}{a}P(X = 0)} \sum_{i \leq s} \left[ \left( \textcolor{red}{a} + \frac{\textcolor{blue}{bi}}{s} \right) P(X = i)P(S = s - i) \right]$$

$$P(S = s) = \frac{1}{1 + \frac{\textcolor{red}{q}}{\textcolor{red}{1} - \textcolor{red}{q}}P(X = 0)} \sum_{i < s} \left[ \left( -\frac{\textcolor{red}{q}}{\textcolor{red}{1} - \textcolor{red}{q}} + \frac{(\textcolor{blue}{k} + 1)\textcolor{blue}{qi}}{(\textcolor{blue}{1} - \textcolor{blue}{q})s} \right) P(X = i)P(S = s - i) \right]$$

$$P(S = s) = \sum_{i=1000}^s \left[ \left( -\frac{0,4}{0,6} + \frac{2i}{s} \right) P(X = i)P(S = s - i) \right]$$

$N$	$P(N) = \binom{2}{n} 0,4^n 0,6^{2-n}$	$S_{col}$	Possíveis valores para $S_{col}$ .
0	0,36	$S_{col} = 0$	0,05 0,15 0,8
1	0,48	$S_{col} = X_i \forall i = 1,2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$P(S = s) = \sum_{i=1}^s \left[ \left( -\frac{0,4}{0,6} + \frac{2x_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s_{i-1}) \right]$$

- $P(S = 0) = P(N = 0) = 0,36$
- $P(S = 1000) = \left( -\frac{0,4}{0,6} + \frac{2 \times 1000}{1000} \right) P(X = 1000) P(S = 0) = 0,024$
- $P(S = 2000) = \left( -\frac{0,4}{0,6} + \frac{2 \times 1000}{2000} \right) P(X = 1000) P(S = 1000) + \left( -\frac{0,4}{0,6} + \frac{2 \times 2000}{2000} \right) P(X =$