Teoria do Risco
Aula 14

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

https://atuaria.github.io/portalhalley

Cálculo de prêmios

Seja L um valor limite para dentro do domínio de X, e seja Y uma variável aleatória " Valor de X sujeito ao limite L. Então:

$$Y = \begin{cases} X, & X \leq L \\ L, & X > L \end{cases}$$

Logo, para o caso de X se contínuo tem-se que:

$$E(Y) = E(X; L) = \int_0^L x f_X(x) dx + \int_L^\infty L f_X(x) dx = \int_0^L x f_X(x) dx + L\, S_X(L)$$

No caso de X se discreto, tem-se:

$$E(Y) = E(X; L) = \sum_{x=0}^{L} x P_x(x) + \sum_{x=L}^{\infty} L P_x(x) = \sum_{x=0}^{L} x P_x(x) + L\, S_X(L)$$

Exemplo: Considere uma carteira de seguros que no caso de ocorrência de sinistro, os valores gastos com indenização são modelos por distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 0{,}2$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no quanto esperam gastar com indenizações, porém esse valor não deve exceder $4{,}5$. Calcule o valor esperado sujeito a esse limite.

Solução:

$$Y = \begin{cases} X\,, & X \leq 4{,}5 \\ 4{,}5\,, & X > 4{,}5 \end{cases}$$

...

Solução:

$$Y = \begin{cases} X\,, & X \leq 4{,}5 \\ 4{,}5\,, & X > 4{,}5 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = \int_0^{4{,}5} x f_X(x)dx + 4{,}5\; S_X(4{,}5)$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = \int_0^{4{,}5} x\;0{,}2\;e^{-0{,}2\,x}dx + 4{,}5\int_{4{,}5}^{\infty} 0{,}2\;e^{-0{,}2\,x}dx$$

$u = x,$ e $dv = e^{-0{,}2x}dx\,,$ ➔ $du = dx$ e $v = -\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}$

$$0{,}2\int_0^{4{,}5} xe^{-0{,}2x}dx = 0{,}2\left(-x\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}\Bigg|_{x=0}^{x=4{,}5} + \int_0^{4{,}5}\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}dx\right)$$

$$= -xe^{-0{,}2x}\Big|_{x=0}^{x=4{,}5} + \left(-\frac{e^{-x0{,}2}}{0{,}2}\Bigg|_{x=0}^{x=4{,}5}\right) = 1{,}13759$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = 1{,}13759 + 4{,}5\left(e^{-0{,}2(4{,}5)}\right) = 2{,}967152$$

Cálculo de prêmios

Considere a função de probabilidade, encontrada na aula anterior:

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Considere que o limite de indenização para essa carteira seja de $R\$4000{,}00$, o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado pode ser obtido da seguinte forma.

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Seja Y, tal que:

$$Y = \begin{cases} S_{col}\,, & S_{col} \leq 4000 \\ 4000\,, & S_{col} > 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{4000} s\, p(s) + \sum_{s=5000}^{6000} 4000\, p(s) = R\$1986{,}8$$

Cálculo de prêmios

Considere a função de probabilidade encontrada na aula anterior:

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio puro de modo que a probabilidade do sinistro não exceda a 5% utilizando o principio do percentil, utilizando aproximação pela distribuição normal.

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Solução:

$$F_X(\Pi_X) = P(X \leq \Pi_X) = 0{,}95$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}} = Z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964{,}688\ (1{,}645) = R\$5431{,}91$$

Cálculo de prêmios

- Um prêmio de seguro é a importância paga por alguém em troca da transferência do risco a que ele está exposto para uma empresa especializada na gestão de risco....

- Para essa empresa, o valor do prêmio, ou do conjunto de sua carteira, deverá cobrir todos os custos com sinistros.

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação

- **Julgamento ou subjetivo**

É um processo subjetivo, onde a tarifação é definida pelo underwriter através de comparação com riscos similares.

- **Prêmio Puro**

Começa com a estimativa do premio de risco $E(X)$...

Cálculo de prêmios

Considerando a metodologia do Prêmio Puro, podemos destacar três tipos de prêmio que são derivados dessa metodologia:

- **O prêmio puro de risco (supondo somente uma apólice): $\boldsymbol{\Pi_P}$**

O prêmio é igual ao valor esperado pela seguradora a ser gasto com indenizações devido a concretização dos riscos .

$$\Pi_P = E(X)$$

Cálculo de prêmios

➢ **Prêmio carregado com margem de segurança:** Π_S

O prêmio carregado com margem de segurança puro é igual ao prêmio de risco mais um carregamento de segurança estatístico(θ).

$$\Pi_S = \Pi_P + \theta\, T(F_X)$$

Em que $T(F_X)$ é funcional de F_X $\left(T(F_X) = E(X)\right)$, portanto:

$\Pi_S = (1 + \theta)E(X)$.

O carregamento serve como uma margem de segurança para cobrir as flutuações estocástica do risco.

Cálculo de prêmios

- **Prêmio comercial: Π_C**

O prêmio cobrado pela seguradora deve ter um carregamento suficientemente grande para fazer frente às despesas administrativas e comerciais da seguradora:

Prêmio comercial = Prêmio Carregado + Despesas + Impostos + Lucro esperado

Para composição do Prêmio comercial é importante identificar a natureza da despesa, os impostos que incidem sobre o prêmio e o lucro esperado pela seguradora.

Cálculo de prêmios

- **Prêmio comercial: $\boldsymbol{\Pi_C}$**

A natureza de cada uma das componentes das despesas poderão modificar o método de precificação do prêmio comercial.

O prêmio comercial também pode ser obtido baseado no método de rateio.

Prêmio comercial(Π_c)= Prêmio carregado (Π_S)+ carregamento comercial($\alpha\Pi_c$)

O prêmio comercial corresponde ao prêmio carregado com margem de segurança acrescido do carregamento para as demais despesas da seguradora (α), incluída uma margem para lucro.

$$\Pi_c = \Pi_S + \alpha\Pi_c$$

$$\Pi_c = \frac{\Pi_S}{1-\alpha}$$

Princípios de cálculos de prêmios

- O prêmio de uma seguradora é a função que associa a variável aleatória relacionada ao gasto da seguradora com o sinistro (X) de uma determinada apólice com um número real P, tal que:

$$\Pi_{\mathrm{X}} = \mathrm{g}(\mathrm{X})$$

  - Π_X é o que o segurador recebe (Fixo).
  - X está relacionado o quanto é pago ao segurado (indenização),
  - O ganho da seguradora é dado por $(P_X - X)$ (Variável aleatória).

Princípios de cálculos de prêmios

- **Princípio do prêmio de risco.**

$$\Pi_X = E(X)$$

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado**

$$\Pi_X = E(X)(1+\theta)$$

- **Princípio da variância**

$$\Pi_X = E(X) + var(X)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- **Princípio do Desvio padrão**

$$\Pi_X = E(X) + \sigma_X \beta \quad \beta > 0$$

Princípios de cálculos de prêmios

- **Princípio da utilidade Zero ou nula.**

  - Este principio consiste no premio Π_X solução da equação:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_X - X)]$$

$$\mu(W - G) = E[\mu(W - X)]$$

- **Princípio do percentil**

$$F_X(\Pi_X) = P(X \leq \Pi_X) = \alpha.$$

EXEMPLO

O determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio Π_X para um risco X é dado por

$$\Pi_X = v^{-1}(E[v(X)])$$

Em que v é uma função tal que $v'(x) > 0$ e $v''(x) \geq 0$ para $x > 0$.

Calcule Π_X quando $v(x) = x^2$ e $v^{-1}(x) = \sqrt{x}$, dado que $X \sim Gamma(2,2)$.

EXEMPLO

O determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio Π_X para um risco X é dado por

$$\Pi_X = v^{-1}(E[v(X)])$$

Em que v é uma função tal que $v'(x) > 0$ e $v''(x) \geq 0$ para $x > 0$.

Calcule Π_X quando $v(x) = x^2$ e $v^{-1}(x) = \sqrt{x}$, dado que $X \sim Gamma(2,2)$.

Solução:

$$\Pi_X = v^{-1}\big(E(X)\big) = \sqrt{E[v(X)]}$$

$$\Pi_X = \sqrt{E(X^2)} = \sqrt{var(X) + \{E(X)\}^2}$$

$$\Pi_X = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = 1{,}225$$

EXEMPLO.

Seja um **segurado** com uma função de utilidade linear: $\mu(x) = 0{,}00005x - 1$, em que a ocorrência dos sinistros segue a distribuição Exponencial, $X \sim Exp(0{,}001)$.

Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua função de utilidade. Considere a riqueza inicial do segurado igual a $W = \text{R\$}1000{,}00$.

EXEMPLO.

Seja um **segurado** com uma função de utilidade linear: $\mu(x) = 0{,}00005x - 1$, em que a ocorrência dos sinistros segue a distribuição Exponencial, $X \sim Exp(0{,}001)$.

Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua função de utilidade. Considere a riqueza inicial do segurado igual a $W = \text{R\$}1000{,}00$.

Solução:

Seja $a = 0{,}00005, b = -1$ e $W = 10000$, assim:

$$\mu(\mathrm{W} - G) = E[\mu(W - X)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aX + b]$$

$$G = E(X)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0{,}001} = R\$\ 1000{,}00$$

O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

EXEMPLO.

Seja uma seguradora cuja utilidade é modelada pela função de utilidade é a exponencial, $\mu(x) = (-\alpha e^{-\alpha x})$. Determine qual o prêmio Π_X utilizando o princípio do calculo de prêmio.

Seja, $\mu(x) = (-\alpha e^{-\alpha x})$ e $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_X - X)]$, então:

$$-\alpha e^{-\alpha W} = E\left[-\alpha e^{-\alpha(W+\Pi_X-X)}\right],$$

$$e^{-\alpha W} = E\left(e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_X} e^{+\alpha X}\right),$$

$$e^{-\alpha W} = e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_X} E(e^{\alpha X}),$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha \Pi_X}} = E(e^{\alpha X}),$$

- Logo

$$ln\left(e^{\alpha \Pi_X}\right) = ln\, E(e^{\alpha X}),$$

$$\alpha \Pi_X = lnE(e^{\alpha X}),$$

$$\boldsymbol{\Pi_X = \frac{ln\left(M_X(\alpha)\right)}{\alpha}}$$