

# Matemática atuarial

## Anuidades Vitalícia (aula10)

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

Leonardo Henrique Costa

[Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

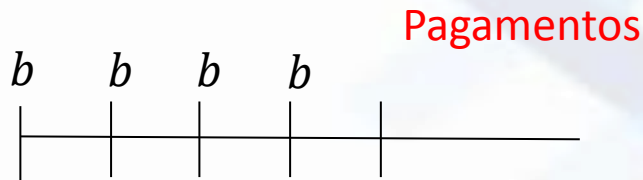
# Anuidades

- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras.
- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Sucessão de pagamentos equidistantes (1 ano), efetuados por uma dada entidade a outrem, no caso, **um segurado**.
    - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte
    - Cobertura: por período determinado.
  - A serie de Prêmios pagos pelo **segurado**, seja para financiar um seguro de vida, seja para financiar a aposentadoria, também podem ser reconhecidos como anuidades.
  - O valor pago em cada período é chamado de **termo**.

# Anuidades

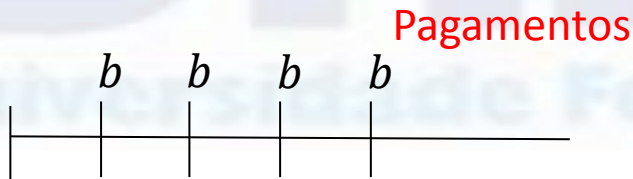
➤ Pagamentos Antecipados ( 4 pagamentos iguais ( $b$ ) ).

- Os pagamentos começam no primeiro período



➤ Pagamentos Postecipados ( 4 pagamentos iguais ( $b$ ) ).

- Os pagamentos começam no final de cada período



# Anuidades

## ➤ Relembrando:

- Soma finita de  $n^* + 1$  elementos de uma progressão geométrica, onde  $r \neq 1$ :

$$S_3 = a + ar + ar^2 + ar^3$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

Contagem começa em  $n = 0$

- Assim dado a progressão geométrica (1,3,9,27,81,243), temos:

$$S_5 = \overset{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243} = \frac{(1 - 3^{5+1})}{1 - 3} = 364$$

# Anuidades

## ➤ Anuidades vitalícia

➤ Apenas termina com a morte da pessoa segurada.

## ➤ Anuidades Temporária

➤ Termina no fim do prazo estipulado ou com a morte da pessoa segurada.

# Anuidades imediatas

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período, elas não têm período de carência.
- É suposto que a reserva necessária ao primeiro pagamento não teve tempo para capitalizar.
- É como se o contrato de “aposentadoria” fosse feito no momento em que a aposentadoria fosse começar.
  - Não é uma prática usual, na prática o valor presente necessário ao primeiro pagamento é menor que o benefício.
- São interrompidos em caso de morte.

➤ Os pagamentos começam no primeiro período.

➤ Os pagamentos começam no final de cada período.

➤ São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período. Não têm período de carência.

### Anuidades imediatas

Pagamentos Antecipados

Pagamentos Postecipados

Anuidades vitalícia

Anuidades Temporária

Anuidades vitalícia

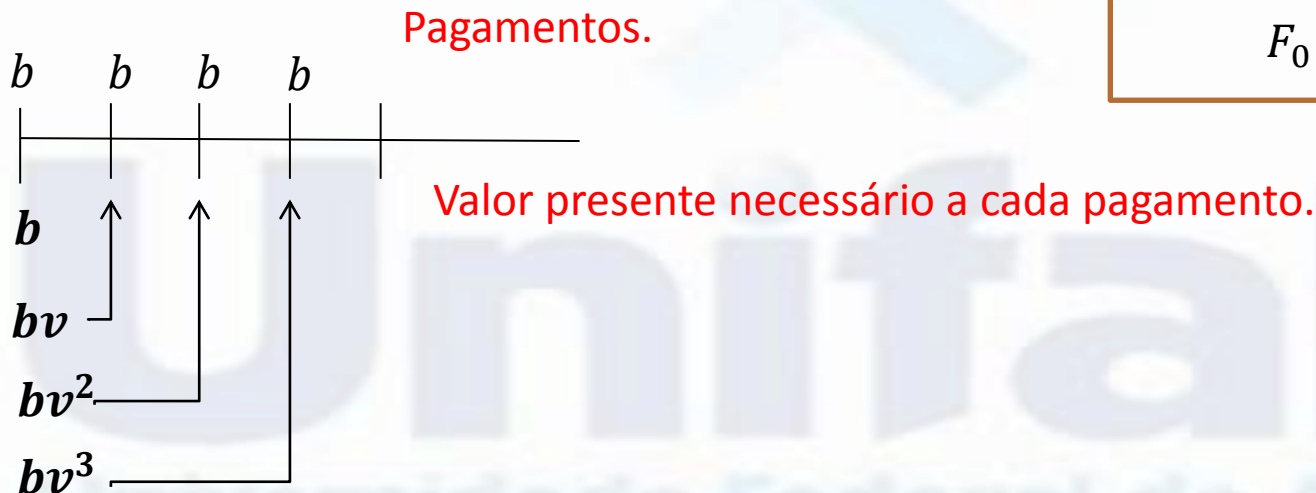
Anuidades Temporária

➤ Apenas termina com a morte da pessoa segurada.

➤ Termina no fim do prazo estipulado ou com a morte da pessoa segurada.

# Anuidades imediatas

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período, elas não têm período de carência.
- Pagamentos **Antecipados** (*4 pagamentos iguais a 'b'.*)
  - Os pagamentos começam no primeiro período.



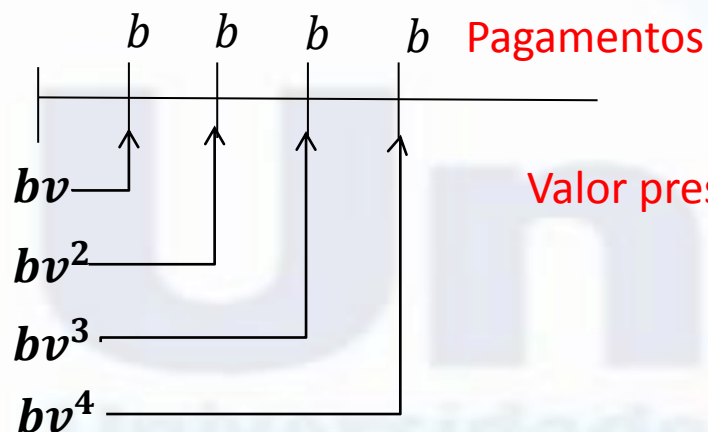
$$F_0 = b \left( \frac{1}{1+i} \right)^t$$

- No momento do primeiro pagamento o valor presente necessário tem que ser igual ao próprio benefício.



# Anuidades imediatas

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período, elas não têm período de carência.
- Pagamentos **Postecipados** (*4 pagamentos iguais a 'b'.*)
  - Os pagamentos começam no final de cada período



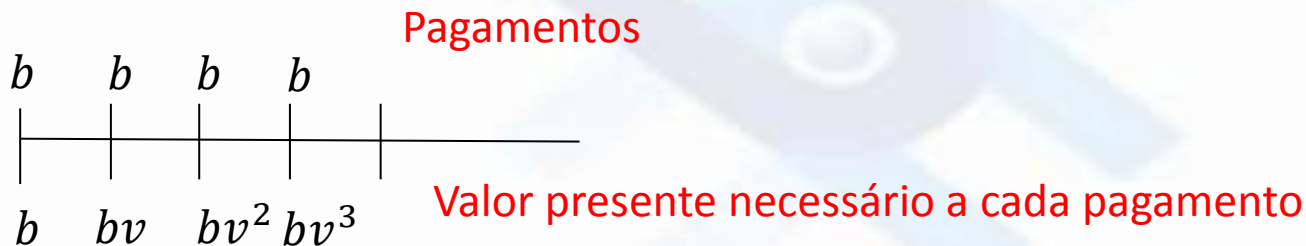
$$F_0 = b \left( \frac{1}{1+i} \right)^t$$

- Diferente do antecipado a seguradora tem carência de um ano.
  - É considerado que o valor presente necessário ao primeiro pagamento teve 1 ano de atualização, assim ele começa em  $bv$ .

# Anuidades imediatas

## ➤ Pagamentos **Antecipados** (4 *pagamentos*)

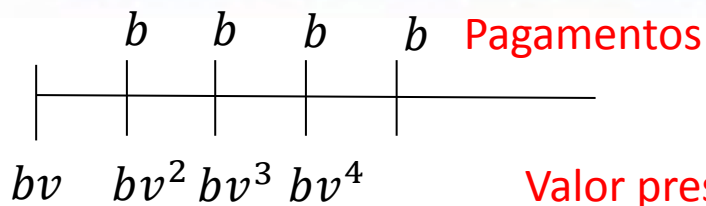
- Os pagamentos começam no primeiro período.



## ➤ Pagamentos **Postecipados** (4 *pagamentos*)

- Os pagamentos começam no final de cada período.

$$F_0 = b \left( \frac{1}{1+i} \right)^t$$



# Anuidades imediatas

- A soma de uma anuidade antecipada<sup>1</sup> composta por **4 pagamentos** com  $b = 1$ . será:

$$1 + v + v^2 + v^3 = \sum_{t=0}^{4-1} v^t$$

- A soma de uma anuidade antecipada<sup>1</sup> composta por  **$n$  pagamentos** com  $b = 1$ . será:

$$1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \frac{(1 - v^{(n-1)+1})}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

1) Os pagamentos começam no primeiro período.

# Anuidades imediatas

- A soma de uma anuidade postecipada<sup>2</sup> composta por **4 pagamentos** com  $b = 1$ . Será:

$$v + v^2 + v^3 + v^4 = \sum_{t=1}^4 v^t$$

- A soma de uma anuidade postecipada<sup>2</sup> composta por  **$n$  pagamentos** com  $b = 1$ . Será:

$$v + v^2 + v^3 + \dots + v^n = v(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1}) = v \sum_{t=0}^{n-1} v^t$$

$$v(1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1}) = v \frac{(1 - v^{(n-1)+1})}{1 - v} = v \frac{(1 - v^n)}{1 - v} = a_{\overline{n}|}$$

# Anuidades imediatas

- A soma de uma anuidade antecipada<sup>1</sup> composta por ***n* pagamentos** com  $b = 1$ . será:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

- A soma de uma anuidade postecipada<sup>2</sup> composta por ***n* pagamentos** com  $b = 1$ . Será:

$$a_{\overline{n}|} = v \frac{(1 - v^n)}{1 - v}$$

- 1) Os pagamentos começam no primeiro período.
- 2) Os pagamentos começam no final de cada .

# Anuidades imediatas

Anuidade  
Antecipada

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-1}|} = 1$$

Anuidade  
Postecipada

Pois :

$$\frac{1 - v^n}{1 - v} - \frac{v(1 - v^{n-1})}{1 - v} = 1$$

- Note que  $n$  representa o maior valor inteiro contido no tempo futuro de vida. Trata-se de uma variável discreta.

# Anuidades vitalícias imediatas

- Estamos trabalhando com o valor presente de uma série de pagamentos.
- Não existe, nos exemplos acima, o reconhecimento de uma variável como tendo “natureza” aleatória.
- De fato, as anuidades apresentadas são anuidades certas. Uma série de pagamentos sendo realizados ao longo do tempo.



# Anuidades vitalícias imediatas

- No processo de compra de um produto atuarial ou de concessão de benefício, existe risco.
  - A seguradora não sabe se vai receber todos os prêmios do segurado (este pode morrer antes do período de cobertura).
  - A seguradora não sabe ao certo quanto irá gastar com previdência uma vez que uma pessoa se aposentou e entrou em gozo de benefício.
- Reconhecer a anuidade como um produto atuarial é reconhecer que:
  - A seguradora (ou fundo de pensão) não saberá ao certo quanto que, o valor de hoje, um segurado irá custar.





# Anuidades vitalícias imediatas

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **ANTECIPADO** para uma pessoa de idade  $x$  corresponde ao valor esperado da anuidade imediata antecipada:

$$\ddot{a}_x$$

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **POSTECIPADO** para uma pessoa de idade  $x$  corresponde ao valor esperado da anuidade imediata postecipada:

$$a_x$$

# Anuidades vitalícias imediatas

- $T$  é a variável aleatória associada ao tempo adicional de vida, e determina a quantidade de pagamentos.
  - No caso vitalício, em tese não se sabe o número de pagamentos.
- O valor atuarial da anuidade pode ser calculada diretamente, com base nos valores das anuidades e na distribuição de  $T$ .

Imagine que um segurado deseja comprar uma anuidade (**antecipada**) que paga 1 u.m. ao segurado até que ele faleça. Qual deverá ser o valor a ser pago (Prêmio Puro Único) pelo segurado por essa anuidade (suponha o tempo discreto)?

$$\ddot{a}_{\overline{t}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{t-1} = \frac{1 - v^t}{1 - v}$$

$\ddot{a}_{\overline{t}|}$  corresponde a reserva total que a “seguradora” deve ter no início dos pagamentos para uma pessoa que viva por um período fixo  $t$ .

- Assim para o caso de uma pessoa de idade  $x$  viver somente 1 ano a reserva será de:

$$\ddot{a}_{\overline{1}|} = \frac{1 - v^{0+1}}{1 - v} = 1$$

- Viver por 2 anos:

$$\ddot{a}_{\overline{2}|} = \frac{1 - v^{1+1}}{1 - v} = 1 + v$$

- Viver por 3 anos:

$$\ddot{a}_{\overline{3}|} = \frac{1 - v^{2+1}}{1 - v} = 1 + v + v^2$$

...

# Anuidades vitalícias imediatas

- Ao se considerar o tempo de vida  $T$  como uma variável aleatória temos que para uma pessoa de idade  $x$  a probabilidade dela viver o primeiro de pagamento:

$$P(T = 0) = {}_0p_xq_x$$

- Viver por 2 anos:

$$P(T = 1) = p_xq_{x+1}$$

- Viver por 3 anos:

$$P(T = 2) = {}_2p_xq_{x+2}$$

...

# Anuidades temporária imediatas

Nº do Pagamentos	Tempo de vida adicional (anos)	Probabilidade do tempo de vida adicional.	Soma dos pagamentos necessários.
1	$t = 0$	$P(T = 0) = {}_0 p_x q_x$	$\ddot{a}_{\overline{1} } = \frac{1 - v^{0+1}}{1 - v} = 1$
2	$t = 1$	$P(T = 1) = p_x q_{x+1}$	$\ddot{a}_{\overline{2} } = \frac{1 - v^{1+1}}{1 - v} = 1 + v$
3	$t = 2$	$P(T = 2) = {}_2 p_x q_{x+2}$	$\ddot{a}_{\overline{3} } = \frac{1 - v^{2+1}}{1 - v} = 1 + v + v^2$
...	...	...	...
$n = t + 1$	$t$	$P(T = t) = {}_t p_x q_{x+t}$	$\ddot{a}_{\overline{n} } = \ddot{a}_{\overline{t+1} } = \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v}$

Assim vemos que cada termo  $\ddot{a}_{\overline{T+1}|}$  tem probabilidade associado de  ${}_t p_x q_{x+t}$ .

# Anuidades vitalícias imediatas

- Então para o caso do VPA pago por uma anuidade imediata vitalícia **antecipada**, para uma pessoa de idade  $x$ , será:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_x q_{x+t}$$

# Aula 11 - Anuidades

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

Leonardo Henrique Costa

[Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 1

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.





## ➤ Exemplo 1

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E(\ddot{a}_{\overline{T+1}|}) = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_{40} q_{40+t} = \ddot{a}_{\overline{1}|} {}_0 p_{40} q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2}|} {}_1 p_{40} q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3}|} {}_2 p_{40} q_{42} + \dots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1 - v^1}{1 - v} {}_0 p_{40} q_{40} + \frac{1 - v^2}{1 - v} {}_1 p_{40} q_{41} + \frac{1 - v^3}{1 - v} {}_2 p_{40} q_{42} + \dots$$

$$\ddot{a}_{40} = 17,67 u.m.$$

# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 1

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){  
  
  f.desconto <- 1/(1+i)  
  px         <- 1-qx  
  pxx        <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]) )  
  t          <- (0:(length(pxx)-1))  
  a          <- (1-f.desconto^(t+1))/(1-f.desconto)  
  ax         <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])  
  return(ax)  
}
```

# Anuidades vitalícias imediatas

- Outra alternativa para o cálculo do V.P.A. será dado por:

$$\ddot{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots$$

- Como vimos que  ${}_nE_x = v^n {}_np_x$ , então:

$$\ddot{a}_x = E(\ddot{a}_{\overline{T+1}|}) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_tp_x$$

# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 2

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{40} = 1 + v {}_1p_{40} + v^2 {}_2p_{40} + v^3 {}_3p_{40} +$$

$$\ddot{a}_{40} = 1 + v {}_1p_{40} + v^2 {}_1p_{40}{}_1p_{41} + v^3 {}_1p_{40}{}_1p_{41}{}_1p_{42} + \dots = 17,67u.m.$$

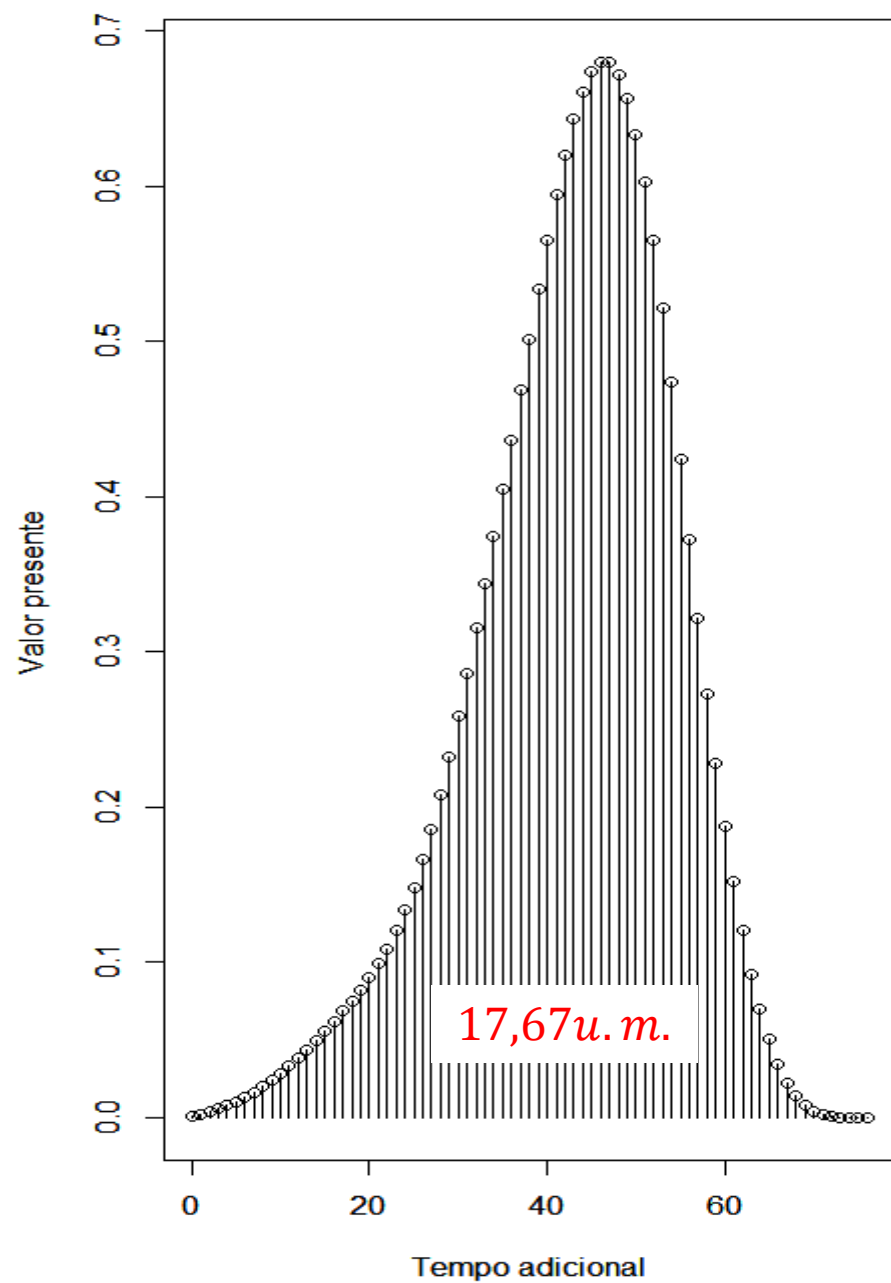
# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 2

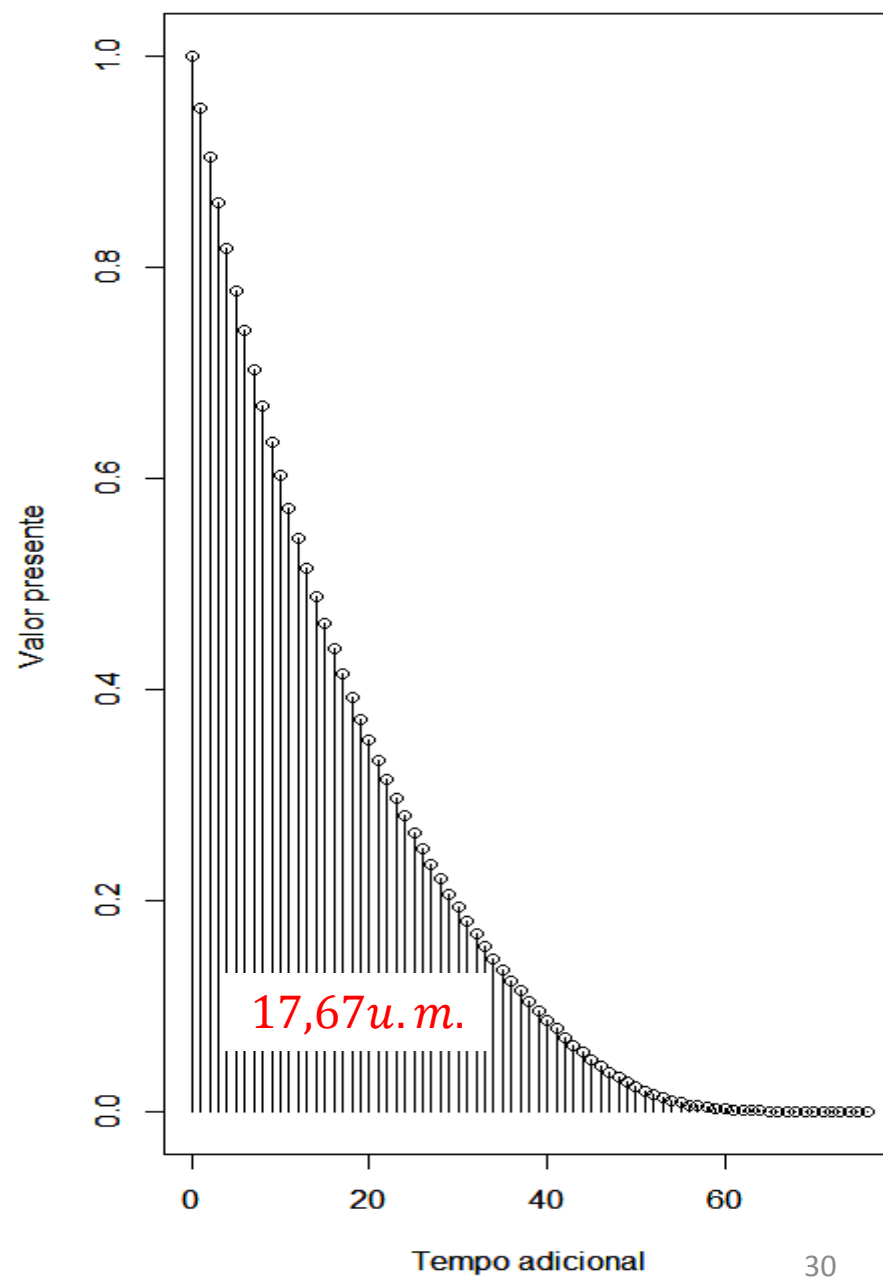
Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tabela de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){  
  
  f.desconto <- 1/(1+i)  
  px         <- 1-qx  
  pxx        <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )  
  t          <- (0:(length(pxx)-1))  
  bx         <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)  
  return(bx)  
}
```

**Exemplo 43**



**Exemplo 44**



# Anuidades vitalícias imediatas

- Então para o caso do VPA pago por uma anuidade imediata vitalícia **postecipado**, para uma pessoa de idade  $x$ , será:

$$a_x = E(a_{\overline{T|}}) = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t|}} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{v(1 - v^t)}{1 - v} {}_t p_x q_{x+t}$$

# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 3

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{t|} {}_t p_{40} q_{40+t} = a_{1|} {}_1 p_{40} q_{41} + a_{2|} {}_2 p_{40} q_{42} + a_{3|} {}_3 p_{40} q_{43} + \dots$$
$$a_{40} = \frac{v(1-v^1)}{1-v} {}_1 p_{40} q_{41} + \frac{v(1-v^2)}{1-v} {}_2 p_{40} q_{42} + \frac{v(1-v^3)}{1-v} {}_3 p_{40} q_{43} + \dots$$

$$a_{40} = 16,67 \text{ u.m.}$$



# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 3

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){  
  
  f.desconto <- 1/(1+i)  
  px      <- 1-qx  
  pxx     <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])  
  ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))  
  t       <- (1:(length(pxx)))  
  ## t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  a       <- f.desconto *(1-f.desconto^t)/(1-f.desconto)  
  ## a    <- (1-f.desconto^(t+1))/(1-f.desconto)  
  ax      <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])  
  ## ax   <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])  
  return(ax)  
}
```

# Anuidades imediatas-Vitalícia

- Para o caso do VPA pago por uma anuidade imediata vitalícia **Postecipada**:

$$a_x = v p_x + v^2 {}_2p_x + v^3 {}_3p_x + \dots$$

- Então:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_tp_x$$

# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 4

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_{40} = v {}_1p_{40} + v^2 {}_2p_{40} + v^3 {}_3p_{40} + \dots$$

$$a_{40} = v {}_1p_{40} + v^2 {}_1p_{40}{}_1p_{41} + v^3 {}_1p_{40}{}_1p_{41}{}_1p_{42} + \dots = 16,67u.m.$$

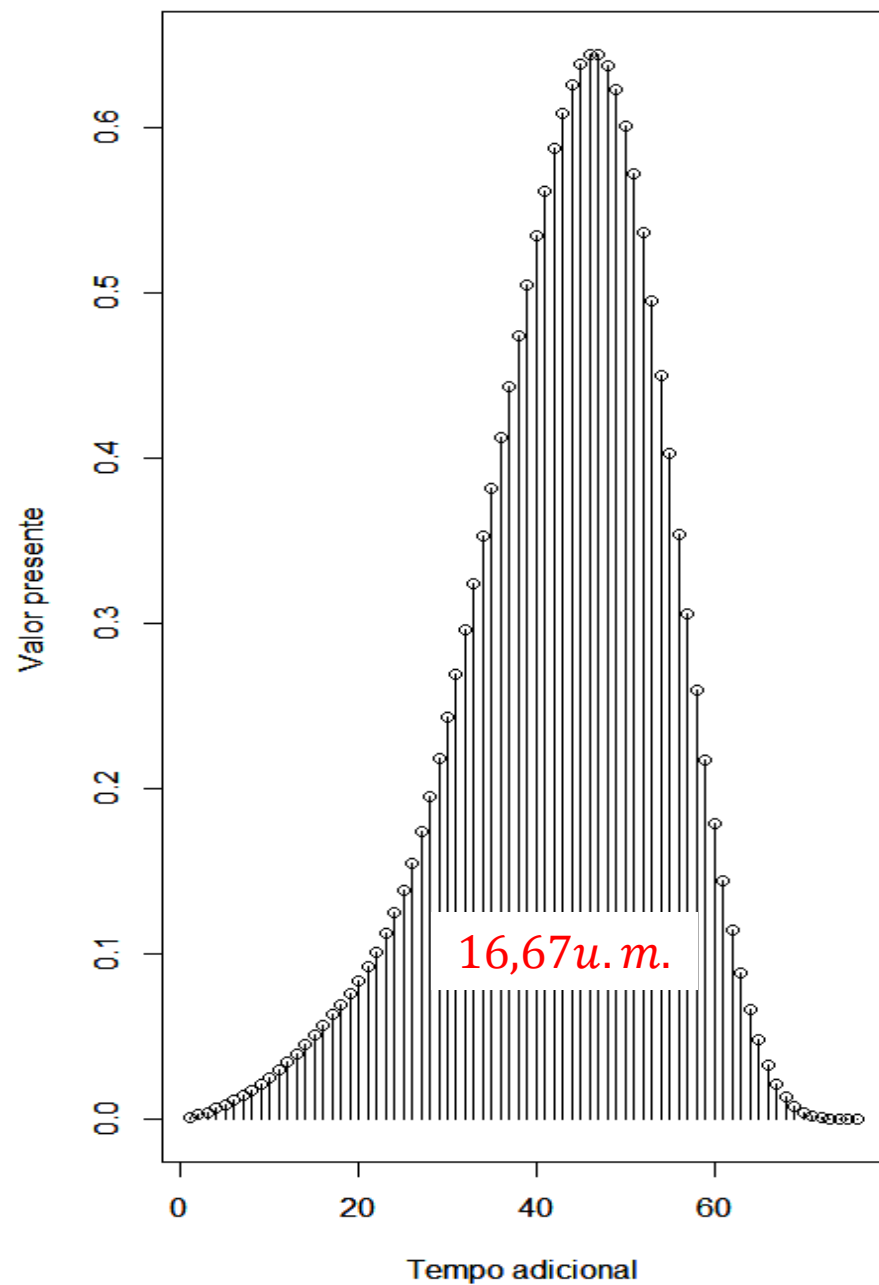
# Anuidades vitalícias imediatas

## ➤ Exemplo 4

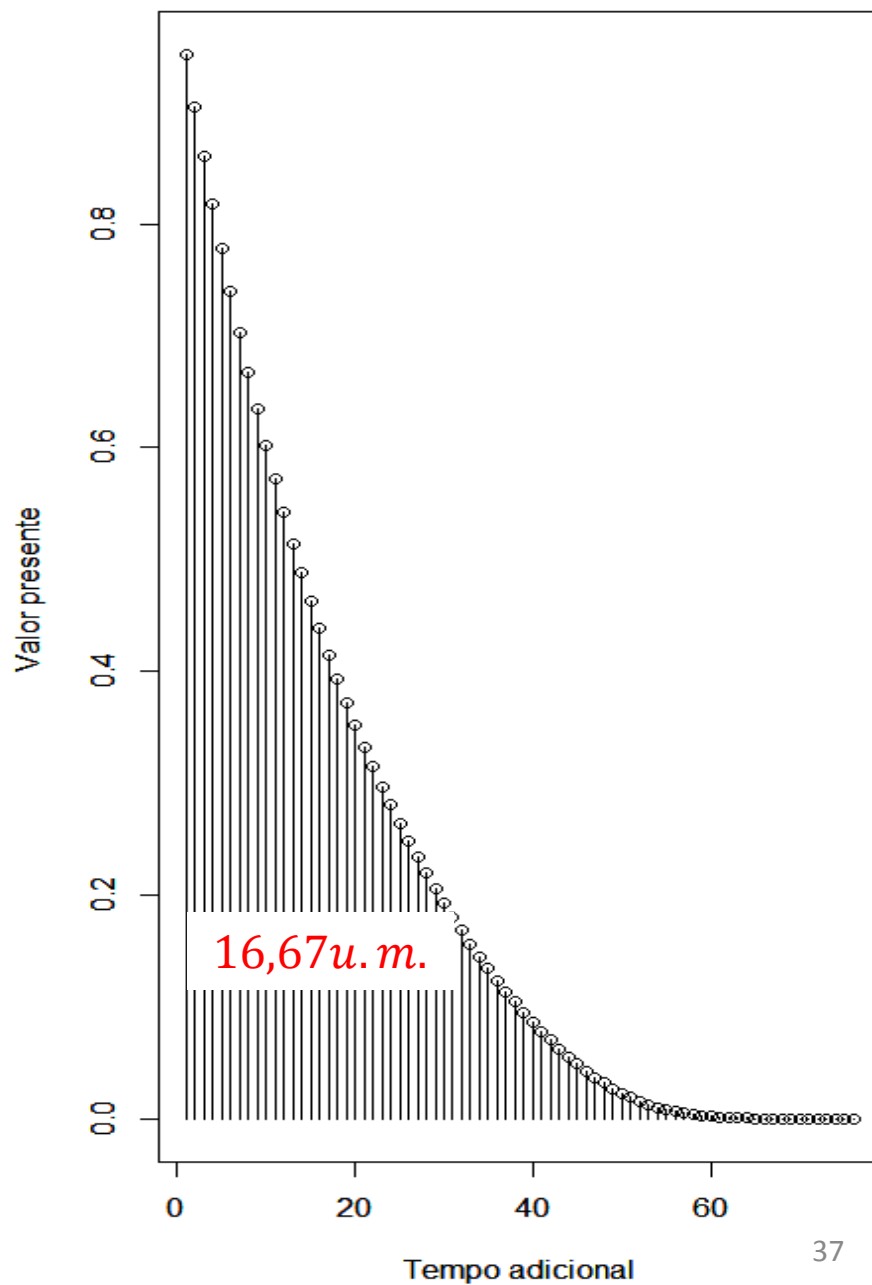
Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){  
  f.desconto <- 1/(1+i)  
  px         <- 1-qx  
  pxx        <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])  
  ## pxx      <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))  
  t          <- (1:(length(pxx)))  
  ## t        <- (0:(length(pxx)-1))  
  bx         <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)  
  return(bx)  
}
```

**Exemplo 45**



**Exemplo 46**



# Anuidades vitalícias imediatas

➤ Então, para o caso discreto, o V.P.A. será dado por:

➤ Anuidade **Antecipada** ( Variável aleatória discreta)

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_tp_x q_{x+t}$$

$(\omega - x) - 1$

➤ Anuidade **Postecipada** ( Variável aleatória discreta)

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t}|} {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v \left( \frac{1 - v^t}{1 - v} \right) {}_tp_x q_{x+t}$$

$(\omega - x)$

# Anuidades vitalícias imediatas

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Valor atuarial de uma  
anuidade vitalícia  
antecipada.

Valor atuarial de uma  
anuidade vitalícia  
Postecipada.