

Teoria do Risco

Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio do prêmio de risco.

$$\Pi_S = E(S)$$

- Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- Princípio da utilidade Zero ou nula.

$$\mu_{S.a.}(W) = E[\mu_{S.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{S.o.}(W - G) = E[\mu_{S.o.}(W - S)]$$

- Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

A defesa, da utilização de um princípio em detrimento aos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis...

Propriedades

- Carregamento de segurança não-negativo.

$$\Pi_S \geq E(S)$$

- O prêmio não deve ser menor que o valor esperado a ser pago.
- No caso de uma única apólice esse princípio seria inviável de se manter...

- Aditividade.

- Se S_1 e S_2 são independentes, o prêmio para o risco combinado, $\Pi_{S_1+S_2}$, é igual a $\Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

A combinação de riscos tem que gerar um prêmio igual ao somatório dos prêmios quando se encaram os riscos individualmente.



Propriedades

➤ Escala invariante.

Se $Z = aS$, em que $a > 0$, então $\Pi_Z = a\Pi_S$.

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

➤ Consistência.

Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $\Pi_Y = \Pi_S + c$

➤ Perda máxima.

Seja r_S o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição S , então $\Pi_S \leq r_S$

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_S = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_S = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$\Pi_S \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

$$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

- *Escala invariante.*

$$\text{Se } Z = aS, \text{ em que } a > 0, \text{ então } E(Z) = aE(S)$$

- *Consistência.*

$$\text{Se } Y = S + c, \text{ em que } c > 0, \text{ então } E(Y) = E(S) + c$$

- *Perda máxima*

$$\Pi_S \leq r_S$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$

➤ *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$E(S)(1 + \theta) \geq E(S)$$

➤ *Aditividade.*

$$E(S_1 + S_2)(1 + \theta) = E(S_1)(1 + \theta) + E(S_2)(1 + \theta)$$

➤ *Escala invariante.*

$$\Pi_Z = (1 + \theta)E(Z) = (1 + \theta)E(aS)$$

$$\Pi_Z = a(1 + \theta)E(S)$$

$$\Pi_Z = a\Pi_S.$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$

➤ Consistência.

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= (1 + \theta)E(S + c) = (1 + \theta)[E(S) + c], \\ \Pi_Y &> \Pi_S + c.\end{aligned}$$

Como $\Pi_Y \neq \Pi_S + c$, o princípio do prêmio carregado não é consistente.

➤ Perda máxima

Uma forma de mostrar que o princípio do prêmio puro não satisfaz essa propriedade é através de um exemplo hipotético, em que dado um valor b correspondente a r_S (maior valor pago por S) e supondo que $P(S = b) = 1$, com $b > 0$ e $\theta > 0$, tem-se que

$$\Pi_S = (1 + \theta)E(S) = (1 + \theta)b > b.$$

Como $\Pi_S > r_S$, essa propriedade não é satisfeita.

➤ *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + \text{var}(S)\alpha \geq E(S)$$

➤ *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \text{var}(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + E(S_2) + \alpha \text{var}(S_1) + \alpha \text{var}(S_2),$$

$$E(S_1 + S_2) + \text{var}(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + \alpha \text{var}(S_1) + E(S_2) + \alpha \text{var}(S_2),$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

➤ *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que $a > 0$, então

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha \text{var}(Z) = E(aS) + \alpha \text{var}(aS),$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a^2\alpha \text{var}(S),$$

$$\Pi_Z \neq a\Pi_S$$

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

➤ *Consistência*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então:

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= E(Y) + \alpha \text{var}(Y), \\ \Pi_Y &= E(S + c) + \alpha \text{var}(S + c), \\ \Pi_Y &= E(S) + c + \alpha \text{var}(S), \\ \Pi_Y &= \Pi_S + c.\end{aligned}$$

➤ *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$ então:

$$\begin{aligned}E(S) &= 10, \\ \text{var}(S) &= 4, \\ \Pi_S &= 10 + 4\alpha.\end{aligned}$$

em que excede 12 quando $\alpha > 0,5$.

➤ *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + \beta \sigma_S \geq E(S)$$

➤ *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \sqrt{\text{var}(S_1 + S_2)}\beta = E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{\text{var}(S_1) + \text{var}(S_2)}$$

$$E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{\text{var}(S_1) + \text{var}(S_2)} \neq [E(S_1) + \sigma_{S_1}\beta] + [E(S_2) + \sigma_{S_2}\beta]$$

➤ *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que $a > 0$, então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta \sigma_Z = E(aS) + \beta \sqrt{\text{var}(aS)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + \beta \sqrt{a^2 \text{var}(S)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a\beta \sigma_S,$$

$$\Pi_Z = a\Pi_S$$

Princípio do desvio padrão $\Pi_s = E(S) + \sigma_s \beta$; $\beta > 0$

➤ *Consistência*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então:

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= E(Y) + \beta \sqrt{\text{var}(Y)}, \\ \Pi_Y &= E(S + c) + \beta \sqrt{\text{var}(S + c)}, \\ \Pi_Y &= E(S) + c + \beta \sqrt{\text{var}(S)}, \\ \Pi_Y &= \Pi_s + c.\end{aligned}$$

➤ *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$ então:

$$\begin{aligned}E(S) &= 8 \times 0,5 + 12 \times 0,5 = 10 \\ \text{var}(S) &= (8^2 \times 0,5 + 12^2 \times 0,5) - 10^2 = 104 - 100 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= 2 \\ \Pi_s &= 10 + 2\beta.\end{aligned}$$

Como na prática o valor de β varia entre 1 e 2, Π_s excede 12 quando $\beta > 1$. A propriedade de perda máxima não é satisfeita.

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➤ *Carregamento de segurança não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$E[g(x)] \geq g(E(x)) \rightarrow g''(x) > 0$$

$$E[g(x)] \leq g(E(x)) \rightarrow g''(x) < 0$$

Temos

$$E[\mu(W + \Pi_s - s)] \leq \mu(E(W + \Pi_s - S))$$

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_s - S)] \leq -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \leq -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$\ln(e^{-\alpha W}) \geq \ln(e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]})$$

$$-\alpha W \geq -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$-W \geq -W - \Pi_s + E(S)$$

$$\Pi_s \geq E(S)$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➤ *Aditividade*

Em geral o principio da utilidade zero não é aditivo, mas o principio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln[E(e^{\alpha(S_1+S_2)})]}{\alpha} = \frac{\ln\{E(e^{\alpha S_1})E(e^{\alpha S_2})\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln[E(e^{\alpha S_1})]}{\alpha} + \frac{\ln[E(e^{\alpha S_2})]}{\alpha} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➤ *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escala invariante.

Suponha que $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z = aS$, em que $a > 0$.

Logo

$$\Pi_S = \frac{\ln[M_S(\alpha)]}{\alpha} = \frac{\ln\left(e^{\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} + \mu \alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2} \sigma^2 a^2 \alpha \neq a \Pi_S$$

➤ *Consistência*

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

Seja $Y = S + c$, então Π_Y

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_Y - Y)]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

Considerando $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$\mu(W + \Pi - E(Y)) = \mu(W + \Pi_S - E(S))$$

$$e^{-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)]} = e^{-\alpha[W + \Pi_S - E(S)]}$$

$$-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)] = -\alpha[W + \Pi_S - E(S)]$$

$$\Pi_Y - E(Y) = \Pi_S - E(S)$$

$$\Pi_Y = \Pi_S - E(S) + E(S) + c,$$

$$\Pi_Y = \Pi_S + c$$

➤ *Perda máxima.*

Considerando que r_S é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W + \Pi_S - S)] \geq E[\mu(W + \Pi_S - r_S)]$$

Como $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_S - r_S)$$

Como $\mu'(x) > 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} W &\geq W + \Pi_S - r_S \\ \Pi_S - r_S &\leq 0 \\ \Pi_S &\leq r_S \end{aligned}$$

Princípio de cálculo de prêmio

- O princípio do prêmio puro de risco não é aplicável pois conduz a ruína.
- O princípio da variância leva valores de prêmios muito elevados
 - Pouco competitivo

...

- A opção por um princípio de cálculo de prêmio sobretudo é
 - Uma escolha subjetiva de quem decide
 - A importância a que se atribuiu a determinada propriedade