Aula 18 Comutação- Anuidades e Seguros

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Funções de comutação

- **Renda vitalícia imediata antecipada:** é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga imediatamente a este beneficiário.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Funções de comutação

- **Renda vitalícia imediata antecipada:** é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga imediatamente a este beneficiário.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} l_{x+t} v^x v^t}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} l_{x+t} v^{x+t}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{(x+t)}}{l_x v^x}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

Funções de comutação

- **Renda vitalícia postecipada**: é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga no tempo t seguinte (no próximo ano, trimestre, mês).

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Funções de comutação

- **Renda vitalícia postecipada**: é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga no tempo t seguinte (no próximo ano, trimestre, mês).

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} v^{x+t}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{(x+t)}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{(x+1+t)}}{l_x v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Funções de comutação

- **Renda Vitalícia diferida antecipada e postecipada:**

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = E_x \ddot{a}_{x+m} = v^m \, {}_m p_x \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_{x+m} $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = v^m \left(\frac{l_{x+m}}{l_x}\right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{(x+m)+t}}{l_{(x+m)}} $$

$$ v^m \left(\frac{l_{x+m}}{l_x}\right) = \frac{l_{x+m} v^{x+m}}{l_x v^x} = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right) $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}} $$

Funções de comutação

➢ **Renda Vitalícia diferida antecipada e postecipada:**

$$_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right)\sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} l_{(x+m)+t} v^{(x+m)+t}}{l_{x+m} v^{x+m}} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{(x+m+t)}}{l_{x+m} v^{x+m}} = \left(\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}\right)$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right)\left(\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}\right) = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x}\right)$$

Adicionalmente

$$_{m|}a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x}\right)$$

Funções de comutação

- **Renda temporária imediata antecipada e postecipada:**

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Logo

$$\boxed{a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$$

Funções de comutação

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x}\right)$$

$$_{m|n}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$_{m|}a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x}\right)$$

$$_{m|n}a_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

- Exemplo

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação.

a) calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato antecipados, sendo a taxa de juros 5% $a.a$.

b) calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato postecipado, sendo a taxa de juros 5% $a.a$.

c) Refaça os exercícios (a) e (b) usando a taxa de juros de 3%.

Funções de comutação

- O acréscimo das colunas C_x e M_x são úteis para seguros que pagam benefícios em caso de morte, isto é, seguros de vida.

- **Seguro de vida inteiro que** paga um benefício unitário no final do ano de morte.

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\right)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{x+t+1}}{v^x}\left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}\right)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{x+t+1}(l_{x+t} - l_{x+t+1})}{l_x v^x} = \frac{1}{l_x v^x}\sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+1}(l_{x+t} - l_{x+t+1})$$

$$\boxed{A_x = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} = \frac{M_x}{D_x}}$$

Funções de comutação

- Seguro de vida inteiro diferido por m anos.

$$ {}_{n|}A_x = v^n \, {}_{n}p_x A_{x+n} = v^n \, {}_{n}p_x \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t}p_{x+n} q_{x+n+t} $$

$$ {}_{n|}A_x = v^n \left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right) \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t}p_{x+n} q_{x+n+t} $$

$$ {}_{n|}A_x = v^n \left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right) \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} $$

$$ {}_{n|}A_x = \frac{v^n (l_{x+n})}{l_x} \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{v^{n+x} (l_{x+n})}{v^x l_x} \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} $$

$$ \boxed{ {}_{n|}A_x = \left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\left(\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}}\right) = \left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) } $$

Funções de comutação

- Seguro de vida temporário.

$$_{n|}A_x = A_x - A_{x^1:\overline{n|}}$$

$$\left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) = \frac{M_x}{D_x} - A_{x^1:\overline{n|}}$$

$$\boxed{A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_x}{D_x} - \left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) = \left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right)}$$

Funções de comutação

- Dotal Puro.

$$A_{x:\overline{n|}}{}^{1} = v^n \; {}_n p_x$$

$$A_{x:\overline{n|}}{}^{1} = v^n \left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)$$

$$A_{x:\overline{n|}}{}^{1} = \frac{v^{n+x}(l_{x+n})}{v^x l_x}$$

$$\boxed{A_{x:\overline{n|}}{}^{1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

Funções de comutação

- Dotal Misto.

$$A_{x:\overline{n|}} = A_{x^1:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^1}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}$$

Funções de comutação

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Funções de comutação

- **Vantagens:**
  - Facilidade de cálculo de produtos atuariais.

- **Desvantagens**:
  - Os produtos atuariais nascem de variáveis aleatórias e devem ser tratadas como tal. Ao utilizar a comutação perde-se a noção da natureza aleatória da variável aleatória em questão, além da incapacidade de cálculo de variâncias.