Matemática atuarial

Aula 2-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Universidade Federal de Alfenas

Juros

- Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades constatou-se que:
  - Bens e os serviços poderiam ser consumidos e guardados para o consumo futuro.
    - Consumo → Falta
    - Acúmulo → Estoque (..Gerar novos bens através do processo produtivo)
- Estoques
  - Bens
  - Valores monetários
    - Podem aumentar gradativamente conforme a utilidade temporal.

Juros

- As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira:

- Capital $(\boldsymbol{P})$ **:** Todo acúmulo de valores monetários em um determinado período de tempo, a riqueza, também chamado de principal.

- Unidade de tempo $(\boldsymbol{n})$: é a unidade temporal geralmente expressa anos, trimestres, meses ...

- Taxa de juros $(\boldsymbol{i})$: é a taxa de incremento que o capital sobre por unidade de tempo.

- Juros $(\boldsymbol{J})$: rendimento sobre o principal.

Juros

- A existência de Juros decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

  - **Inflação:** A diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo...;

  - **Riscos:** Eventos que podem causar desequilíbrio ao patrimônio.

  - **Outros:** Aquisição ou oferta de empréstimo a terceiros.

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

Juros Simples

- Quando o juro incide no decorrer do tempo sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples.

Juros simples

$$J = P \times i \times n$$

- Juros produzidos depois de n períodos, do capital P Aplicado a uma taxa de juros i.

Montante$(\boldsymbol{M})$

$$M = P(1 + i \times n)$$

- Capital inicial adicionado aos juros produzidos no período.

- EXEMPLO 1

Faz-se um deposito de R$1000 em uma conta que paga 0,5% de juros simples, mensalmente. Determine uma sequência que represente os saldos mensais.

$\boldsymbol{n}$	Juros Simples por período (J)	Montante (M)
1	$1000(0{,}005) = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 1) = 1005$
2	$1000(2 \times 0{,}005) = 10$	$1000(1 + 0{,}005 \times 2) = 1010$
3	$1000(3 \times 0{,}005) = 15$	$1000(1 + 0{,}005 \times 3) = 1015$
4	$1000(4 \times 0{,}005) = 20$	$1000(1 + 0{,}005 \times 4) = 1020$

Juros Simples

- EXEMPLO 2

Calcule o montante ao final de dez anos de um capital $R\$10000,00$ aplicada à taxa de juros simples de 18% ao semestre $(18\%\ a.s)$.

Juros Simples

- EXEMPLO 2

Calcule o montante ao final de dez anos de um capital $R\$10000{,}00$ aplicada à taxa de juros simples de 18% ao semestre $(18\%\ a.s)$.

Resp.:

Em 10 anos existem 20 semestres, logo:

$$M = 10000(1 + 0{,}18 \times 20) = R\$46000{,}00$$

O juro produzido nesse período foi de:

$$J = 10000(0{,}18 \times 20) = R\$36000{,}00$$

Juros Compostos

- Quando a taxa de juros incide sobre o montante obtido do rendimento do período anterior, tem-se um sistema de **capitalização composta** também chamado “**juros sobre juros**”.

  - Considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando um montante, capital mais juros, do período.

  - Cada montante formado é constituído do capital inicial, juros acumulados e dos juros sobre juros formados em período anteriores.

Juros Composto

- EXEMPLO 3

Faz-se um deposito de \$1000 em uma conta que paga 0,5% de juros, composto mensalmente. Determine uma sequência que represente os saldos mensais.

1° mês→ $M_1 = 1000 + 1000 \times \; 0{,}005 = \mathbf{1000(1,005)}$

2° mês→ $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_1 0{,}005 = M_1(1{,}005) = \mathbf{1000(1,005)}(1{,}005) = 1000(1{,}005)^2$

3° mês→ $\mathrm{M}_3 = M_2 + \mathrm{M}_2 0{,}005 = M_2(1{,}005) = [1000(1{,}005)^2](1{,}005) = 1000(1{,}005)^3$

4° mês→ $\mathrm{M}_4 = M_3 + \mathrm{M}_3 0{,}005 = M_3(1{,}005) = [1000(1{,}005)^3](1{,}005) = 1000(1{,}005)^4$

...

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1000(1,005)}^{\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{M = P(1+i)^n}$$

Juros Compostos

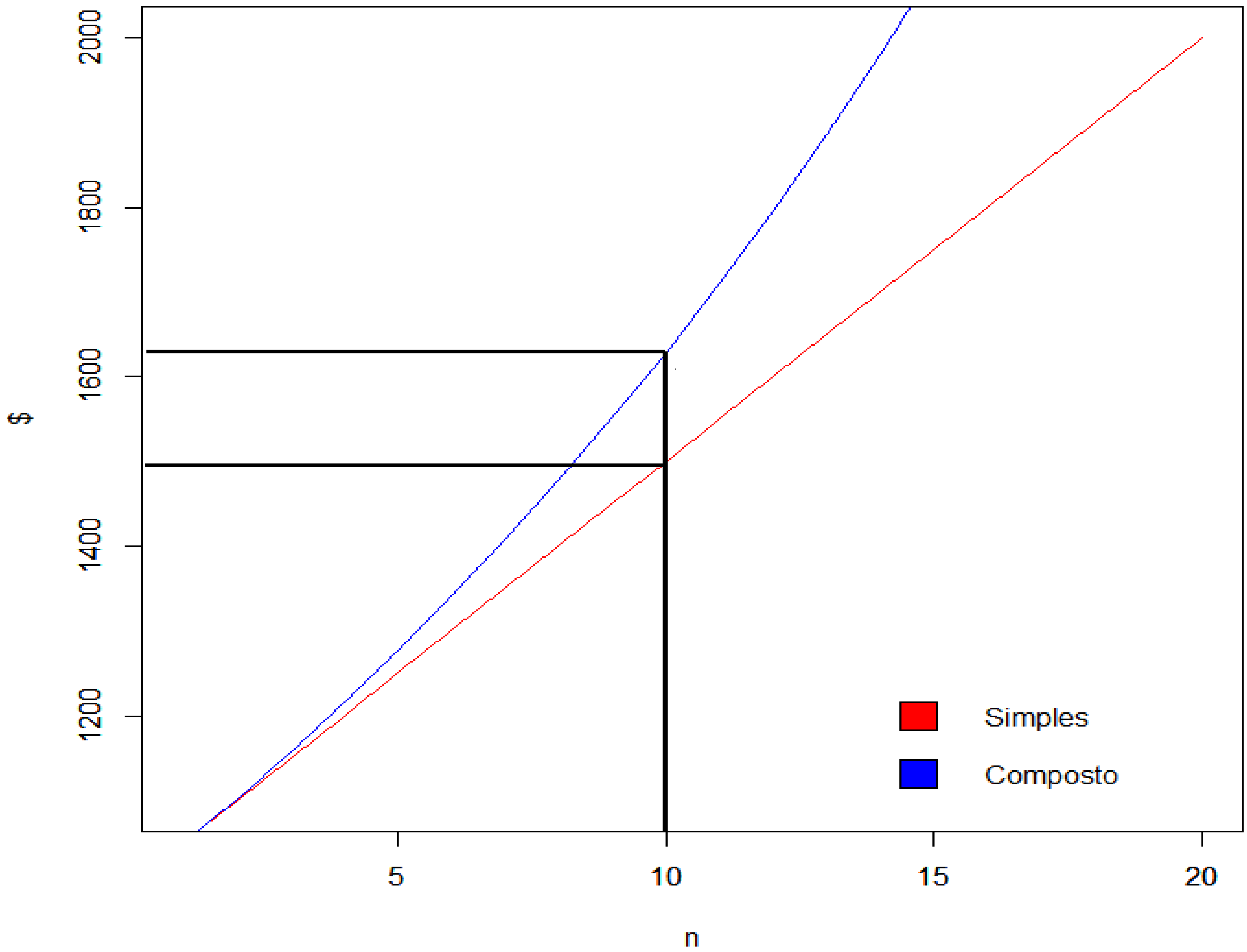
- EXEMPLO 4

Faz-se um deposito de $1000 em uma conta que paga 0,5% de juros , mensalmente. Determine uma sequência que represente os saldos mensais (juros por período e montante) pelo capitalização simples e composta.

n	Juros Simples (J)	Montante (M)	Juros compostos (J)	Montante (M)
1	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 1) = 1005$	$1000(0{,}005) = 5$	$1000(1 + 0{,}005)^1 = 1005$
2	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 2) = 1010$	$1005(0{,}005) = 5{,}025$	$1000(1 + 0{,}005)^2 = 1010{,}025$
3	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 3) = 1015$	$1010{,}025(0{,}005) = 5{,}0501$	$1000(1 + 0{,}005)^3 = 1015{,}075$
4	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 4) = 1020$	$1015{,}075(0{,}005) = 5{,}0753$	$1000(1 + 0{,}005)^4 = 1020{,}151$
	$J = Pi$	$M_n = P(1 + in)$	$J_n = \mathrm{M}_{n-1}\, i$	$\mathrm{M}_n = P(1 + i)^n$

Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores utilizam os juros compostos.

Montantes obtidos pelo sistema de juros simples e compostos, para um capital inicial de $\$\mathbf{1000,00}$ a $\mathbf{0,5}\%$ ao mês.



- EXEMPLO 5

João teve seu carro roubado. Ao comunicar o sinistro para a seguradora, recebeu a seguinte proposta como indenização: $R\$20000,00$ agora ou $R\$21211,92$ daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1 + i)^n$$

$$M = 21211,91 \;\; P = 20000 \;\; n = 60dias \rightarrow 2mês$$

Unifal-MG Universidade Federal de Alfenas

Juros Compostos

- EXEMPLO 5

João teve seu carro roubado. Ao comunicar o sinistro para a seguradora, recebeu a seguinte proposta como indenização: $R\$20000{,}00$ agora ou $R\$21211{,}92$ daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1+i)^n$$

$$M = 21211{,}91 \quad P = 20000 \quad n = 60dias \rightarrow 2mês$$

$$21211{,}92 = 20000(1+i)^2$$

$$1{,}0606 = (1+i)^2$$

$$(1{,}0606)^{\frac{1}{2}} = 1 + i$$

$$1{,}03 \approx 1 + i$$

$$i \approx 0{,}03 \rightarrow 3\%\ ao\ mês$$

Juros Compostos

➢Taxas proporcionais

São taxas que se relacionam linearmente **(juros simples).**

Exemplo 6:

Fulano empresta $R\$2000{,}00$ a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0{,}04(12)) = R\$2960{,}00$$

Essa taxa é proporcional a $(0{,}04 \times 2)$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000\big(1 + 0{,}08(6)\big) = R\$2960{,}00$$

➢Taxas equivalente

As taxas não se relacionam de forma linear **(juros compostos).**

Exemplo 7a:

Fulano empresta $R\$2000{,}00$ a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0{,}04)^{12} = R\$3202{,}06$$

Diferente de:

$$M = 2000(1 + 0{,}08)^{6} = R\$3173{,}74$$

Juros Compostos

➢ **Taxas equivalente**

As taxas equivalente são chamadas assim pois apesar de serem diferentes, se aplicadas a um mesmo capital, produzem e uma mesma data o mesmo montante.

Exemplo 7b:

Fulano empresta $R\$2000{,}00$ a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$(1+0{,}04)^{12} = (1+i)^{6}$$

$$i = 0{,}0816$$

Essa taxa é equivale a $0{,}0816$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000(1+0{,}0816)^{6} = R\$3202{,}06$$

Relações equivalentes

- *Taxas de Juros podem ser representadas em diferentes unidades de tempo (ao ano, ao mês, etc.) e são ditas equivalentes se produzem o mesmo efeito quando aplicadas em um mesmo período de tempo.*

$$\boldsymbol{(1+i_d)^{360} = (1+i_m)^{12} = (1+i_b)^{6} = (1+i_t)^{4} = \left(1+i_q\right)^{3} = (1+i_s)^{2} = (1+i_a)}$$

$\boldsymbol{i_d}$, $\boldsymbol{i_m}$, $\boldsymbol{i_b}$, $\boldsymbol{i_t}$, $\boldsymbol{i_q}$, $\boldsymbol{i_s}$ e $\boldsymbol{i_a}$ correspondem as taxas de juros diária, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual, respectivamente.

Taxas de Juros

- Taxa nominal

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida, logo **não** pode ser empregada diretamente no cálculo de juros compostos.

-340% ao semestre com capitalização mensal.

-1150% ao ano com capitalização mensal.

- Taxa Efetiva

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquela a que a taxa está referida, e podem ser usadas diretamente no cálculo de juros compostos.

- *140% ao mês com capitalização mensal.*
- *250% ao semestre com capitalização semestral.*

- EXEMPLO 8

Uma empresa contrai um empréstimo de R$100000,00 em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, **capitalizados mensalmente**. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

Taxas de Juros

- EXEMPLO 8

Uma empresa contrai um empréstimo de R$100000,00 em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, capitalizados mensalmente. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

A taxa nominal corresponde a 36% $a.a.$

Pois:

$$i = \frac{36}{12} = 3\% \text{ ao mês } (\text{nominal})$$

A capitalização mensal indica que os 36% corresponde a soma das taxas mensais ao longo de um ano.

Assim:

$$\mathrm{M} = 100000(1+0{,}03)^{12} \approx R\$142576{,}1$$

$$(1+0{,}03)^{12} = (1+i)$$

$$i \approx 42{,}58\% a.a.$$

A taxa efetiva será de 42,25% $a.a.$

Logo

$$M = 100000(1+0{,}4258) \approx R\$142580{,}00$$

Taxas de Juros

- Dada a taxa nominal, se quiser saber a taxa efetiva basta descapitalizar a juros simples (divisão) e capitalizar a juros compostos.

Em que i_n é a taxa nominal, com n períodos de conversão e i é a taxa efetiva anual.

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

Ou seja a taxa nominal i_n é o resultado da soma da taxa verificada em n períodos.

Taxas de Juros

➢ EXEMPLO 9

Sendo as taxas com capitalizações mensais, 340% ao semestre e 300% ao ano, qual será as taxas de juros efetivas ?

Taxas mensais

$i = \frac{340}{6} \approx 56{,}67\%$ $\quad$ $i = \frac{300}{12} = 25\%$

Taxas efetivas

$(1 + 0{,}5667)^6 - 1 = i$ → $i \approx 1378\%$ a.a

$(1 + 0{,}25)^{12} - 1 = i$ → $i \approx 1355\%$ a.a

- EXEMPLO 10

Sendo a taxas de juros de 6% anual com capitalizações trimestral, qual será as taxas de juros efetiva ao final de uma ano?

Taxa trimestral: $i = \frac{6}{4} = 1{,}5\%$

Taxas efetivas: $(1 + 0{,}015)^4 - 1 = i$ → $i \approx 6{,}136\%$ a.a.

Taxas de Juros

- EXEMPLO 11

Admitindo-se uma de juros nominal de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitação: diário, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual.

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

Unifal MG Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 11

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado anualmente, a taxa acaba é a própria taxa efetiva.

$$i = (1 + 0{,}72\ )^1 - 1 = 0{,}72$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado semestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos dois semestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}8496$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado quadrimestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos 3 quadrimestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{3}\right)^3 - 1 \approx 0{,}906624$$

...

EXEMPLO 11

Admitindo-se uma taxa de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitação: diário, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual.

$$i = (1 + 0{,}72\,)^1 - 1 = 0{,}72$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}8496$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{3}\right)^3 - 1 \approx 0{,}906624$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{4}\right)^4 - 1 \approx 0{,}9387778$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{6}\right)^6 - 1 \approx 0{,}9738227$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{12}\right)^{12} - 1 \approx 1{,}012196$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{360}\right)^{360} - 1 \approx 1{,}05295$$

OBS.:

Ao se afirmar que a taxa de juros é de 72% ao ano , capitalizado diariamente. Isso equivale em dizer que esse valor foi obtido pela soma das taxa de juros ao longo de 360 dias. Assim a taxa diária é $\frac{0{,}72}{360} = 0{,}002$ *e o equivalente a esse valor em um ano corresponde a :*

$$\mathbf{1 + i = (1 + 0{,}002)^{360}}$$

$$\mathbf{i \approx 1{,}05295}$$

Taxas de Juros

- Taxa instantânea de juros

  - A taxa nominal corresponde a soma das taxas cobradas em todas os períodos. Ou seja, 12% ao mês corresponde nominalmente em 144% ao ano.
  - Se o número de períodos dos quais se compõem a taxa nominal crescem muito, dizemos que essa taxa é uma soma contínua, também chamada de taxa de juros instantânea.

  - De acordo com Hull[1], " taxas de juros capitalizados continuamente são bastante utilizadas quando as opções e outros derivativos complexos estão sendo precificados. E para fins práticos a capitalização contínua pode ser considerada equivalente à diária"

[1] Hulll, John. Introdução aos mercados futuros e de opões. 2. ed. São Paulo: Bolsa Mercantil e de Futuros, Cultura editores Associados, p. 52-54,1996

Taxas de Juros

- Taxa instantânea de juros e taxa de juros efetiva

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

- A partir desse ponto usamos o símbolo δ para mostra que a taxa nominal trata-se de uma taxa instantânea.

$$\lim_{n \to \infty} i = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^n - \lim_{n \to \infty} 1$$

$$i = e^{\delta} - 1$$

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$ke^r = \lim_{n \to \infty} \left(k\left(1 + \frac{r}{n}\right)\right)^n$$

Taxas de Juros

- Taxa instantânea de juros e taxa de juros efetiva

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$\delta = \ln(1 + i)$$

Em que $\boldsymbol{\delta}$, é a taxa de juros instantânea e $\boldsymbol{i}$ é a taxa de juros efetiva.

- Assim o cálculo do montante (valor futuro) em um regime de capitalização contínua é dado por:

$$M = P(1 + i\,)^{n} = Pe^{\delta n}$$

Ou

$$P = M\left(\frac{1}{1 + i}\right)^{n} = Me^{-\delta n}$$

- Importante lembrar que por se tratar de período contínuo é comum representar n como sendo t.

- EXEMPLO 12

Um certo banco paga juros de 15% ao mês, em um regime de capitalização contínua. Quanto um cidadão deve investir para que daqui a dois anos possa retirar $R\$1000000{,}00$?

$$P = Me^{-\delta n}$$

$$P = 1000000e^{-0{,}15\times 24} = \text{R\$}27323{,}72$$

- EXEMPLO 13

Calcule o tempo de aplicação de um capital de $R\$120\,000{,}00$ que aplicado a uma taxa contínua de 3% ao mês com capitalização contínua produz um montante de $R\$200\,000{,}00$.

$$t = \ln\left(\frac{M}{P}\right)\frac{1}{\delta}$$

$$t = 17{,}02 \text{ meses}$$