Teoria do Risco
Aula 19

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Universidade Federal de Alfenas

https://atuaria.github.io/portalhalley

Probabilidade de sobrevivência da seguradora

- A probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte infinito contínuo, é definida por:

$$\varphi(u) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; t \geq 0 | u = U(0)) \, .$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo contínuo, analisada em um tempo t qualquer no intervalo $[0, \infty)$.

Probabilidade de sobrevivência da seguradora

- Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte finito em tempo contínuo, é definida por:

$$\varphi(u,\tau) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; 0 \leq t \leq \tau | u = U(0)).$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo contínuo, analisada até um tempo específico, denotado por τ.

Probabilidade de sobrevivência da seguradora

- Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte de tempo infinito discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2,\ldots | u = U(0))$$

Representa a probabilidade de sobrevivência de sobrevivência da seguradora em tempo discreto analisada em um tempo qualquer n no intervalo $[0,1,2,\ldots)$.

Probabilidade de sobrevivência da seguradora

- Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte finito em tempo discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u,\tau) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2,\ldots,\tau | u = U(0)).$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo discreto, analisada até um tempo específico, denotado por τ.

Probabilidade de sobrevivência da seguradora

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte de tempo infinito discreto:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2, \dots | u = U(0))$$

- A probabilidade de sobrevivência no horizonte infinito contínuo:

$$\varphi(u) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; t \geq 0 | u = U(0))$$

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo contínuo:

$$\varphi(u, \tau) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; 0 \leq t \leq \tau | u = U(0))$$

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u, \tau) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2, \dots, \tau | u = U(0))$$

Probabilidade de Ruína

- Uma ruína acontece em t se $U(t) < 0$, ou seja, quando a reserva da seguradora ficar negativa em algum instante, sendo que:

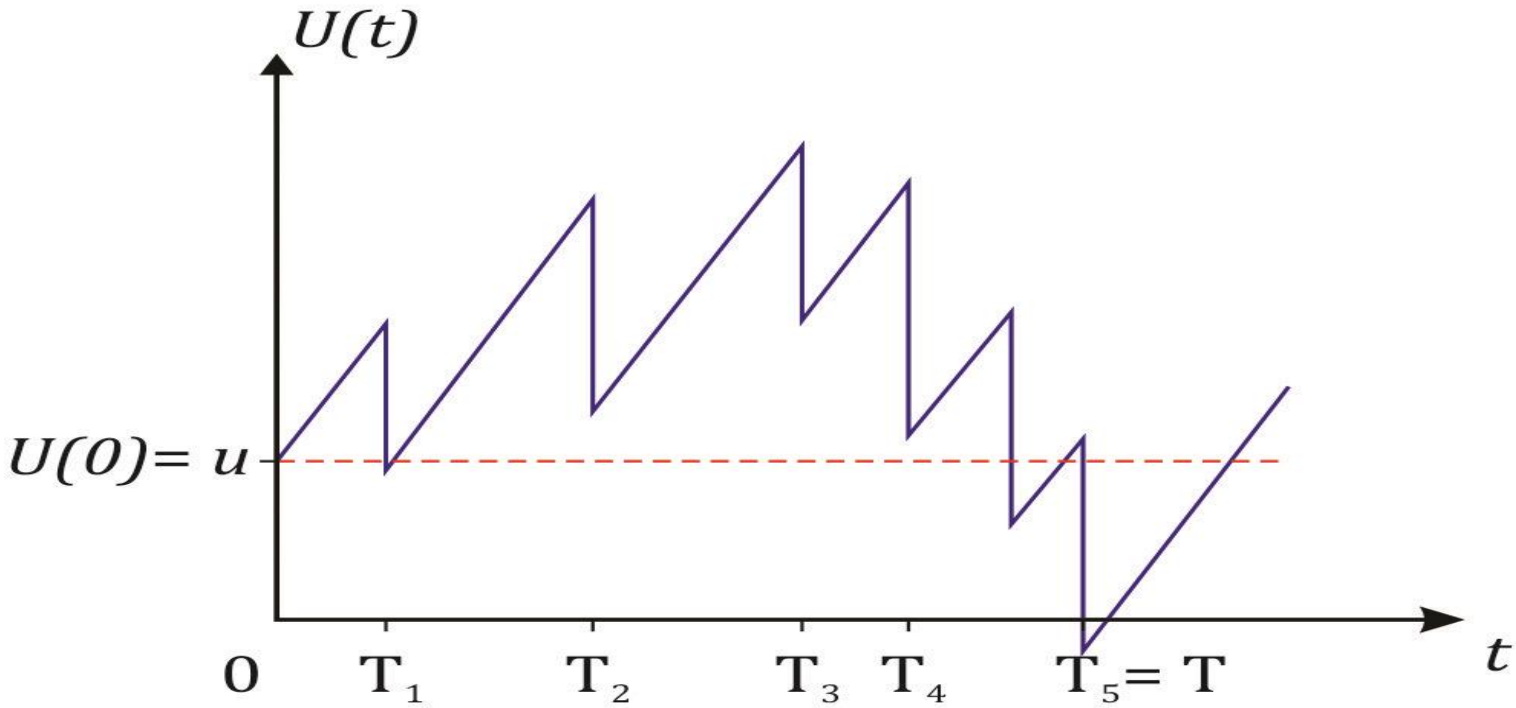
$$T_t = \begin{cases} \min\{t|t \geq 0 \ e \ U(t) < 0\} \\ \infty \ se \ U_t \geq 0 \ para \ todo \ t \end{cases}.$$

- Dessa maneira, pode-se definir a probabilidade de ruína de uma seguradora.

Probabilidade de Ruína

- Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall\, t \;\; 0 \le t \; < \infty) = 1 - \varphi(u)$$



Probabilidade de Ruína

- Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall\, t \;\; 0 \leq t \; < \infty) = 1 - \varphi(u)$$

- Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u,\tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall\, t\, , 0 \leq t < \tau) = 1 - \varphi(u,\tau).$$

$$\boldsymbol{\psi(u,\tau) \leq \psi(u)}$$

Probabilidade de Ruína

$$\widetilde{T_n} = \min\{n \ : \ U(n\ ) < 0\}\,.$$

- Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo discreto é definida por:

$$\tilde{\psi}(u) = P\left(\widetilde{T_n} < \infty | U(0) = u\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n\,, 0 \leq n < \infty) = 1 - \tilde{\varphi}(u).$$

- Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo discreto é definido por:

$$\tilde{\psi}(u,\tau) = P\left(\widetilde{T_n} < \tau\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n, 0 \leq n < \tau) = 1 - \tilde{\varphi}(u,\tau).$$

$$\boldsymbol{\tilde{\psi}(u,\tau) \leq \tilde{\psi}(u)}$$

Probabilidade de Ruína

- A probabilidade de ruína em 1 ano pode ser expressa por:

$$\psi(u,1) = P(T_t < 1)$$

ou

$$\psi(u,1) = P(U(1) < 0) = P(S_1 > u + P_1)$$

- É importante notar que $P(T_t < 1) = P(U(1) < 0)$ não necessariamente é verdadeiro,
  - $P(T_t < 1)$ estabelece a probabilidade de ruína a qualquer momento menor que 1 ano.
  - $P(U(1) < 0)$ estabelece a probabilidade ruína ao final de 1 ano.

➢ Exemplo 1

A carteira de um segurador tem distribuição de sinistros dada pela tabela a seguir:

X	$R\$1500,00$	$R\$3000,00$
$P(x)$	$0,6$	$0,4$

➢ O excedente do segurador é dado pela expressão:

$$U(t) = 900 + 150t - S_t.$$

➢ Determine os possíveis intervalos que irão ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

Como, por hipótese, as únicas indenizações possíveis são no valor de R$ 1500,00 e R$ 3000,00 então a primeira ruína ocorrerá como resultado da menor indenização se:

$$900 + 150t - 1500 < 0$$
$$150t < 600$$
$$t < 4.$$

Caso ocorra sinistro no intervalo $(0,4]$ este ocasionará em um caso de ruína, pois para qualquer sinistro que venha acontecer nesse intervalo não haverá solvência.

Após esse período, a seguradora não estará vulnerável ao evento de custo R$ 1500,00 porém a seguradora ainda tem um risco de solvência caso a indenização seja igual a R$ 3000,00. Nesse caso:

$$900 + 150t - 3000 < 0$$
$$150t < 2100$$
$$t < 14.$$

Caso o primeiro sinistro ocorra em $t > 14$ a seguradora não se tornará insolvente. No entanto, se o sinistro ocorrer entre 4 e 14, a seguradora não terá recursos disponíveis para fazer frente à indenização caso o valor do sinistro seja igual a $R\$ \ 3000{,}00$.

➢ Exemplo 2

Ainda para os dados do exemplo anterior. Considere que o tempo entre sinistros possa ser modelado pela distribuição exponencial $T \sim \mathrm{Exp}(0{,}1)$.

Calcule a probabilidade de vir a ocorrer a sua ruína com o primeiro sinistro.

Dado que

$$\psi(u) = P(U(t) < 0)$$

Então:

$$P(U(t) < 0) = P(T < 4, X \neq 0) + P(4 \leq T < 14, X = 3000)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}) < \mathbf{0}) = P(T < 4)P(X \neq 0|T < 4) + P(4 \leq T < 14)P(X = 3000|4 \leq T < 14).$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}) < \mathbf{0}) = [1 - (e^{-0,1\times 4})](0,6 + 0,4) + \{[1 - (e^{-0,1\times 14})]0,4 - [1 - (e^{-0,1\times 4})]0,4\}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}) < \mathbf{0}) = \mathbf{0,3298} + \mathbf{0,16948}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}) < \mathbf{0}) = \mathbf{0,49928} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{900}).$$

Exemplo 3

Considere que a variável aleatória S esteja associada aos gastos com indenização no período de 1 ano, em uma carteira de seguros. Considere também que essa carteira tenha sido modelada segundo o modelo de risco coletivo com $N \sim Po(200)$ e $X \sim \text{Exp}(0{,}002)$, ou seja, $S = S_{col}$ é um modelo Poisson composto.

Utilizando a aproximação pela distribuição normal determine o valor do prêmio retido, Π, ao longo desse ano de forma que a probabilidade de que essa seguradora entre em ruína não exceda 5%, considere a reserva inicial igual a $U(0) = 5000$.

Solução

$$P(U(1) < 0) = 0{,}05$$

$$P(5000 + \Pi - S_{col} < 0) = 0{,}05$$

$$P(S_{col} > 5000 + \Pi) = 0{,}05$$

Por considerar $S = S_{col}$ tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) = 100000$$

$$\sqrt{var(S_{col})} = \sqrt{\lambda E(X^2)} = 10\,000$$

Lembrando que $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0{,}1)$, tem-se

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000}\right) = 0{,}05$$

Solução

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000}\right) = 0{,}05$$

$$\frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000} = Z_{95\%}$$

$$\Pi = 100000 - 5000 + 10000(1{,}645) = 111450$$

Exemplo 4

Ainda com os dados do exemplo anterior determine o valor do prêmio Π considerando um limite técnico para os valores de indenização por apólice de $Li = 550$.

Solução

Por considerar $S = S_{col}$ e o limite técnico $Li = 550$, tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li)$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li)$$

Solução

Por considerar $S = S_{col}$ e o limite técnico $Li = 550$, tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li)$$
$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li)$$

Logo

$$E(X; Li) = \int_0^{550} x\,0{,}002e^{-0{,}002x}dx + 550S_X(550)$$
$$E(X; Li) = 150{,}485 + 183{,}079 = 333{,}564$$

$$E(X^2; Li) = \int_0^{550} x^2\,0{,}002e^{-0{,}002x}dx + 550^2S_X(550)$$
$$E(X^2; Li) = 49791{,}9 + 1{,}00694 \times 10^5 = 1{,}50485 \times 10^5$$

Solução

$$E(X; Li) = 150{,}485 + 183{,}079 = 333{,}564$$

$$E(X^2; Li) = 49791{,}9 + 1{,}00694 \times 10^5 = 1{,}50485 \times 10^5$$

Assim

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li) = 166782$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li) = 7{,}52427 \times 10^7$$

Lembrando que $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0{,}1)$, tem-se

$$\frac{(5000 + \Pi) - 166782}{\sqrt{7{,}52427 \times 10^7}} = Z_{95\%}$$

$$\Pi = 166782 - 5000 + 8674{,}26(1{,}645) = \mathbf{176051{,}1577}$$

Probabilidade de Ruína no horizonte infinito no caso Poisson Composto

- A probabilidade de ruína em período finito $\psi(u)$ pode ser representada por:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}|T_t < \infty)}, u \geq 0$$

Onde R é o coeficiente de ajustamento.

- **Definição** Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$M_{S_t - ct}(r) = 1$$

Em que $M_{S_t-ct}(r) = E(e^{rS_t - ct})$, assim

$$M_{S_t-ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right) = 1$$

$$e^{-rct} E(e^{rS_t}) = 1$$

$$e^{-rct} M_{S_t}(r) = 1$$

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$