

Aula 15 – Anuidades Contínuas

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Anuidades Contínuas

- Se imaginarmos que numa anuidade fracionada o número de frações cresce infinitamente, passamos a ter o que se pode designar por uma anuidade contínua.
- Pagamentos por hora, por minuto, por segundo,...etc.
- Infinitos pagamentos ao longo do ano, $m \rightarrow \infty$
- Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)} \right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

Anuidades Contínuas

- Começemos por calcular o valor atuarial de uma anuidade contínua, considerando uma taxa de capitalização constante:

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$v = (1 + i)^{-1}$$

$$e^{\delta} = \frac{1}{v}$$

- Considere uma anuidade com duração n pagamentos fracionados em m partes a taxa de rentabilidade i .

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{1}{m} v^{\left(\frac{1}{m}\right)^3} \dots + \frac{1}{m} v^{\left(\frac{1}{m}\right)^{mn-1}} = \frac{1}{m} \left(\frac{1 - \left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Cada ano “ n ” tem “ m ” partes, assim $m * n$ atualizações

Anuidades Contínuas

➤ Pensemos no que ocorre quando $m \rightarrow \infty$.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right) = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{m}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Por L' Hopital: $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{f(m)}{g(m)} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(m)}{g'(m)} \right)$, então:

$$f(m) = \frac{1}{m} \mapsto f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - v^{\frac{1}{m}} \mapsto g'(m) = -e^{\frac{1}{m} \ln(v)} \left(-\frac{\ln(v)}{m^2} \right) = \frac{v^{\frac{1}{m}} (\ln(v))}{m^2}$$

$$v^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \ln(v)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}} (\ln(v))} \right) = \frac{(1 - v^n)}{\ln(v)} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Anuidades Contínuas

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1-v^n)}{\ln(v)} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right) = -\frac{(1-v^n)}{\ln(v)} \left(\frac{1}{v^0} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1-v^n)}{\ln(v)} = -\frac{(1-v^n)}{\ln(e^{-\delta})} = \frac{(1-v^n)}{\delta}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = \frac{(1-v^n)}{\delta}$$

➤ Assim para um T aleatório :

$$\ddot{a}_{\bar{T}|} = \frac{(1-e^{-\delta T})}{\delta} = \bar{a}_{\bar{T}|}$$

➤ Que é o valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos entre $[0, t]$.

Anuidades Contínuas

- O valor presente atuarial contínuo de anuidades vitalícias por ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T(x)}(t) dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

- Considerando que :

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta}$$

$$f_T(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

Anuidades Contínuas

- a variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \text{var}\left[\frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}\right]$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{\text{var}(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{\text{var}(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$e^{-\delta T} \equiv v^T$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\text{var}(v^T) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

$$\text{var}(v^T) = \int_0^n w^t f_T(t) dt - \left[\int_0^n v^t f_T(t) dt \right]^2$$

Anuidades Contínuas

➤ Exemplo 1

Suponha que :

$$S_{T(0)}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha(t)})$$

Usando a taxa de juros δ , calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\bar{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x .

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{t}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt - \left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \right)^2}{\delta^2}$$

Exemplo 1

➤ (i)

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

➤ (ii)

$$S_{T(0)}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha(t)})$$

$$S_{T(x)}(t) = P(T > t + x | T > x) = \frac{1 - (1 - e^{-\alpha(x+t)})}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & \text{c.c} \end{cases}$$

➤ (i)

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

➤ (ii)

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & \text{c.c} \end{cases}$$

➤ (iii)

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{f(x+t)}{1 - F(x+t)} = -\frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{1 - (1 - e^{-\alpha(x+t)})}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

➤ Exemplo 1

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|t} p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t}) e^{-\alpha t} \alpha}{\delta} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^{\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

$$\mu_{x+t} = \alpha$$

➤ Exemplo 1

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{t}|}) = \frac{\text{var}(e^{-\delta t})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta + \alpha)}} \right]_0^{\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{\delta + \alpha}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(2\delta + \alpha)e^{t(2\delta + \alpha)}} \right]_0^{\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{2\delta + \alpha}}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{t}|}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\alpha}{2\delta + \alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha} \right)^2 \right] = \boxed{\frac{\alpha}{(2\delta + \alpha)(\delta + \alpha)^2}}$$

Anuidades Contínuas

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade exceda o valor presente esperado?

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(\frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta} > \frac{1}{\delta + \mu_{x+t}}\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(-e^{-\delta T} > \frac{\delta}{\delta + \mu_{x+t}} - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} < \frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(-\delta T < \ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right)$$

Anuidades Contínuas

➤ Exemplo 2

Com $T(x) \sim \exp(\alpha)$, então $\alpha = \mu_{x+t}$, logo:

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

Anuidades Contínuas

➤ Exemplo 2

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right) = e^{-\mu_{x+t}\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right)} = \left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)^{\frac{\mu_{x+t}}{\delta}}$$

➤ Considerando $\delta = 0,10$ e a força de mortalidade igual a 0,016

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = \left(\frac{0,016}{0,016 + 0,10}\right)^{\frac{0,016}{0,1}} = 0,7283$$

➤ Considerando $\delta = 0,01$ e $\mu_{x+t} = 0,033$:

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x) = \left(\frac{0,033}{0,033 + 0,10}\right)^{\frac{0,033}{0,1}} = 0,4174$$

Anuidades Contínuas

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dado valor " Pr "?

$$F(Pr) = P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi\right)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi) = P(1 - e^{-\delta T} \leq \delta \Pi)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi) = P(-e^{-\delta T} \leq \delta \Pi - 1) = P(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta \Pi)$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta \Pi)]$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta \Pi)}{\delta}\right]$$

$$P(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi) = P\left[T \leq -\frac{\ln(1 - \delta \Pi)}{\delta}\right] = F_T\left(-\frac{\ln(1 - \delta \Pi)}{\delta}\right)$$

Anuidades Contínuas

- O valor presente atuarial contínuo de vitalícia por ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Anuidades Contínuas

➤ Exemplo 3

Suponha que :

$$S_{T(0)}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha(t)})$$

Usando a taxa de juros δ , calcule $\bar{a}_{\bar{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x . Utilize $\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$.

$$S_{T(0)}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha(t)})$$

$$S_{T(x)}(t) = P(T > t + x | T > x) = \frac{1 - (1 - e^{-\alpha(x+t)})}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\alpha t} dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\alpha)} dt$$

$$\bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^{\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{(\delta + \alpha)}$$

Anuidades cont  ua

➤ Pr  mio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n .

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{T}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}|} & \text{se } T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\bar{n}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\bar{n}|} {}_n p_x$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$