Matemática Atuarial II

Aula 18

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L.H. Múltiplos decrementos. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_MatAtuarial2.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Múltiplos decrementos

- O evento morte do segurado pode ser o fator mais importante que influencia no V.P.A. dos produtos atuariais, no entanto:

- Outros possíveis estudos relacionados à causa de "saída do plano" que pode influenciar no cálculo do V.P.A.
  - Saídas por doença do coração, câncer, acidente, entre outros.
  - Pode existir interseções entre as probabilidades de saídas

Múltiplos decrementos

Decrementos primários: Cada vida é observada até ser eliminada do grupo por qualquer uma das causas de saída.

Decrementos secundários: Refere-se à trajetória futura de uma vida após a saída do grupo original, quando essa saída não foi causada pela morte.

Múltiplos decrementos

- Seja as variáveis aleatória T (o tempo de vida adicional) e J (causa da falha do status), assim:

$$ {}_{t}q_{x}^{(j)} $$

- Corresponde a probabilidade (bruta) de uma pessoa de idade x, morrer antes de alcançar a idade $x+t$, devido a causa j (está variável é assumida como discreta)

Múltiplos decrementos

- A função de distribuição conjunta $f(t,j)$, pode ser usada para calculas as probabilidades de eventos definidos por T e J, tal que:

$$f_{T,J}(t,j)dt = P(t < T \leq t + dt, J = j)$$

Expressa a probabilidade de decremento pela causa j entre t e $\mathrm{t} + dt$, (dt ínfimo).

Múltiplos decrementos

- A função marginal de probabilidade de J é dada por $h_J(j)$, e a função marginal de probabilidade de T é dada por $f_T(t)$, tal que:

$$\sum_{j=1}^{m} h_J(j) = 1, \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

$$\int_0^{\infty} f_T(t)dt = 1$$

Lembrando que T pode ser uma v.a. contínua ou discreta, e v.a. J é sempre discreta.

Múltiplos decrementos

A probabilidade de uma pessoa de idade x, morrer antes de alcançar a idade $x+t$, devido a causa j.

$$ {}_tq_x^{(j)} = P(0 < T \leq t, J = j) = \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds \;\; t \geq 0 $$

A probabilidade de decremento por todas as causas entre os instantes a e b.

$$ P(a < T \leq b) = \sum_{j=1}^{m} \int_a^b f_{T,J}(t,j)dt $$

Múltiplos decrementos

A função marginal $h_J(j)$ representa a probabilidade de decremento pela causa j a qualquer tempo futuro, e é dada por:

$$h_J(j) = \int_0^{\infty} f_{T,J}(s,j)ds = {}_{\infty}q_x^{(j)} \quad j = 1,2, \dots, m$$

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{T,J}(t,j)$$

Múltiplos decrementos

Considerando o tempo de vida acional T_x acomando todas as causas de sinistro, temos:

$$ {}_{t}q_x^{(\tau)} = P(T_x \leq t) = \int_0^t f_{T_x}(s)ds $$

$$ {}_{t}p_x^{(\tau)} = P(T_x > t) = 1 - {}_{t}q_x^{(\tau)} $$

Em que o sobrescrito τ para representar o decremento por todas as causas, lembrando que $f_{T_x}(\mathrm{t})$ é a função marginal de probabilidade de T.

Múltiplos decrementos

$$ {}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \le t) = \int_0^t f_{T_x}(s)ds $$

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = P(T_x > t) = 1 - {}_t q_x^{(\tau)} $$

Importante notar que o ${}_t p_x^{(\tau)}$ representa a probabilidade de sobreviver a todas as causas (decrementos) e o ${}_t q_x^{(\tau)}$ é a probabilidade de morrer por alguma causa (não faz sentindo morrer por todas as causas)

Múltiplos decrementos

Adicionalmente

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}} \qquad\qquad {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)^{(\tau)} ds}$$

Outros resultados importantes:

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} f_{T,J}(t,j)}{{}_tp_x} = \sum_{j=1}^{m} \mu(x+t)^{(j)}$$

e

$$f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(j)}\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Exemplo 1: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, em que as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = \frac{t}{100} \qquad t \geq 0$$

$$\mu(x+t)^{(2)} = \frac{1}{100} \qquad t \geq 0$$

Para este modelo, calcule a função de densidade conjunta de T e J, e os modelos marginas.

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu(x+t)^{(j)} \qquad {}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)^{(\tau)} ds}$$

$$f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(j)}\, {}_t p_x^{(\tau)} \qquad h_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(s,j) ds$$

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{T,J}(t,j)$$

Exemplo 1: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, em que as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = \frac{t}{100} \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu(x+t)^{(2)} = \frac{1}{100} \quad t \geq 0$$

Para este modelo, calcule a função de densidade conjunta de T e J, e os modelos marginas.

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} \mu(x+t)^{(j)} = \frac{t}{100} + \frac{1}{100} = \frac{(t+1)}{100}$$

...

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} \mu(x+t)^{(j)} = \frac{t}{100} + \frac{1}{100} = \frac{(t+1)}{100}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)^{(\tau)} ds} = e^{-\int_0^t \frac{(s+1)}{100} ds} = e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

$$f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(j)}\ {}_tp_x^{(\tau)} = \begin{cases} \dfrac{t}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} & t \geq 0, \quad j = 1 \\ \dfrac{1}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} & t \geq 0, \quad j = 2 \end{cases}$$

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) = \frac{t}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} + \frac{1}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} = \frac{(t+1)}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

Repare que como $\mu(x+t)^{(\tau)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$, então poderíamos usar

$$f_T(t) = \mu(x+t)^{(\tau)} \; {}_tp_x^{(\tau)} = \frac{(t+1)}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

Ou

$$-\frac{\partial \; {}_tp_x^{(\tau)}}{\partial t} = \frac{(t+1)}{100} \; e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) = \frac{t}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} + \frac{1}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} = \frac{(t+1)}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

$$h_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(s,j)ds = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} dt & j = 1 \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} dt & j = 2 \end{cases}$$

$$h_J(2) = \int_0^\infty \frac{1}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} dt = \int_0^\infty \frac{1}{100} e^{-\frac{(t+1)^2-1}{200}} dt = \frac{e^{0,005}}{100} \int_0^\infty e^{-\frac{(t+1)^2}{200}} dt$$

$$h_J(2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{t^2+2t}{200}} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{(t+1)^2-1}{200}} dt = \frac{e^{0,005}}{100} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t+1)^2}{200}} dt$$

$$h_J(2) = \frac{10\sqrt{2\pi} e^{0,005}}{100} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t+1)^2}{200}}}{10\sqrt{2\pi}} dt$$

Considerando $z = \frac{t+1}{10} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{10}$ e os limites da integração vão para $z = 0,1$ e ∞

$$h_J(2) = \frac{e^{0,005}\sqrt{2\pi}}{10} \int_{0,1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$\ldots$$

$$h_J(2) = \frac{e^{0,005}\sqrt{2\pi}}{10} \int_{0,1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

Temos que Z tem uma forma semelhante a distribuição normal padrão, assim:

$$h_J(2) = \frac{e^{0,005}\sqrt{2\pi}}{10}[1 - \Phi(0,1)] = 0,1159$$

Assim

$$h_J(j) = \begin{cases} 0,8841 & j = 1 \\ 0,1159 & j = 2 \end{cases}$$

Exemplo 2: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = 0{,}0005t1{,}03^{x} \quad t \geq 0$$

$$\mu(x+t)^{(2)} = 0{,}001t1{,}04^{x} \quad t \geq 0$$

Para este modelo, obtenha ${}_tp_x^{(\tau)}$:

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu(x+t)^{(j)}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)^{(\tau)} ds}$$

Exemplo 2: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, em que as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = 0{,}0005t1{,}03^{x} \quad t \geq 0$$

$$\mu(x+t)^{(2)} = 0{,}001t1{,}04^{x} \quad t \geq 0$$

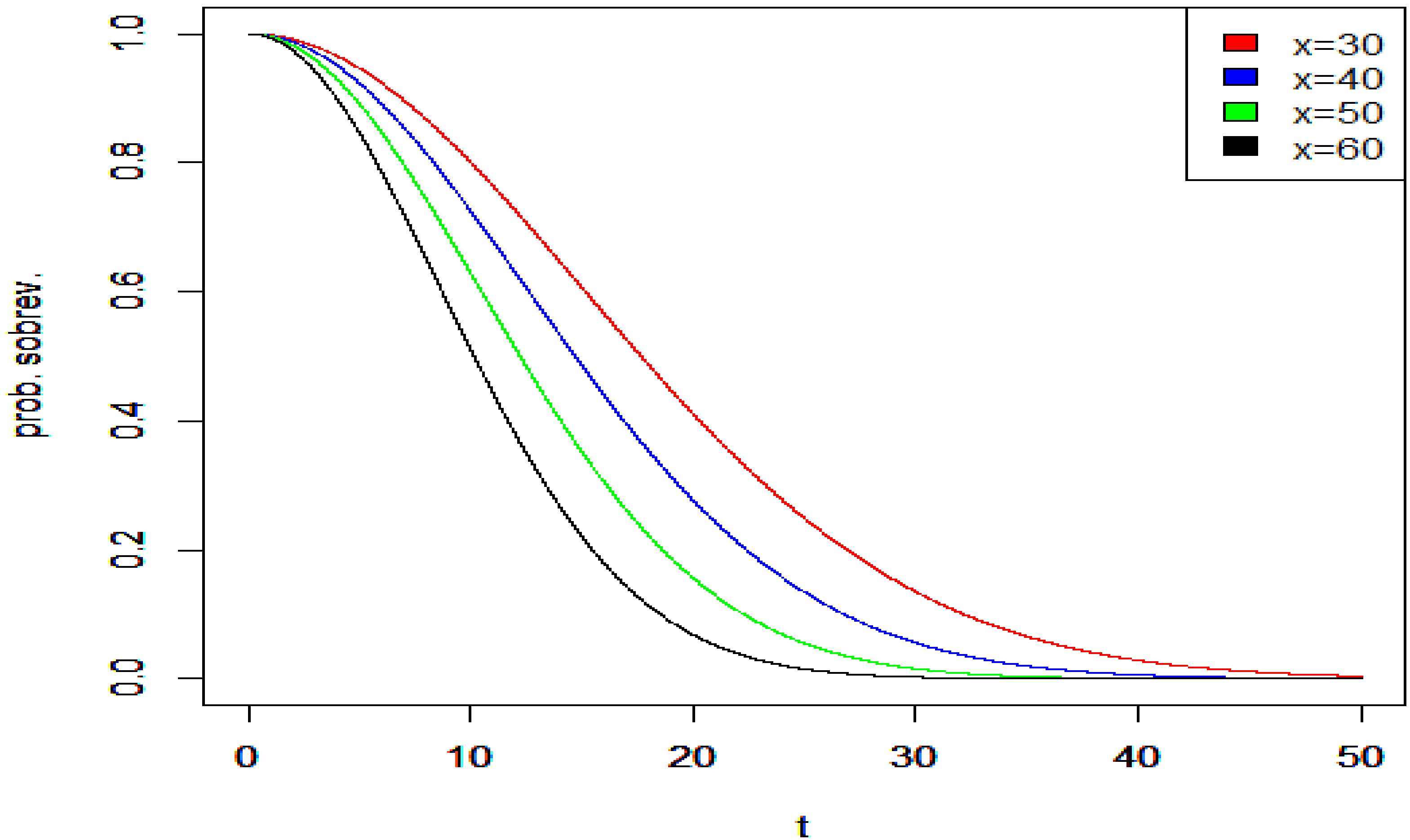
Para este modelo, obtenha ${}_{t}p_{x}^{(\tau)}$:

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = 0{,}0005t1{,}03^{x} + 0{,}001t1{,}04^{x} = 0{,}0005t(1{,}03^{x} + 2\times 1{,}04^{x})$$

$$\boldsymbol{{}_{t}p_{x}^{(\tau)} = e^{-\int_0^t 0{,}0005s(1{,}03^{x}+2\times 1{,}04^{x})ds} = e^{-0{,}00025t^{2}(1{,}03^{x}+2\times 1{,}04^{x})}}$$

Exemplo 2:

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t 0{,}0005s(1{,}03^x + 2\times 1{,}04^x)ds} = e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)} $$



Exemplo 3: Com os dados do exemplo 2 obtenha a densidade conjunta de T e J , e a função marginal $f_T(t)$.

$$\mu(x+t)^{(1)} = 0{,}0005t1{,}03^x \qquad t \geq 0$$

$$\mu(x+t)^{(2)} = 0{,}001t1{,}04^x \qquad t \geq 0$$

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu(x+t)^{(j)}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)^{(\tau)} ds}$$

$$f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(j)} \, {}_tp_x^{(\tau)}$$

Exemplo 3: Com os dados do exemplo 2 obtenha a densidade conjunta de T e J, e a função marginal $f_T(t)$.

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = 0{,}0005t1{,}03^x + 0{,}001t1{,}04^x = 0{,}0005t(1{,}03^x + 2 \times 1{,}04^x)$$

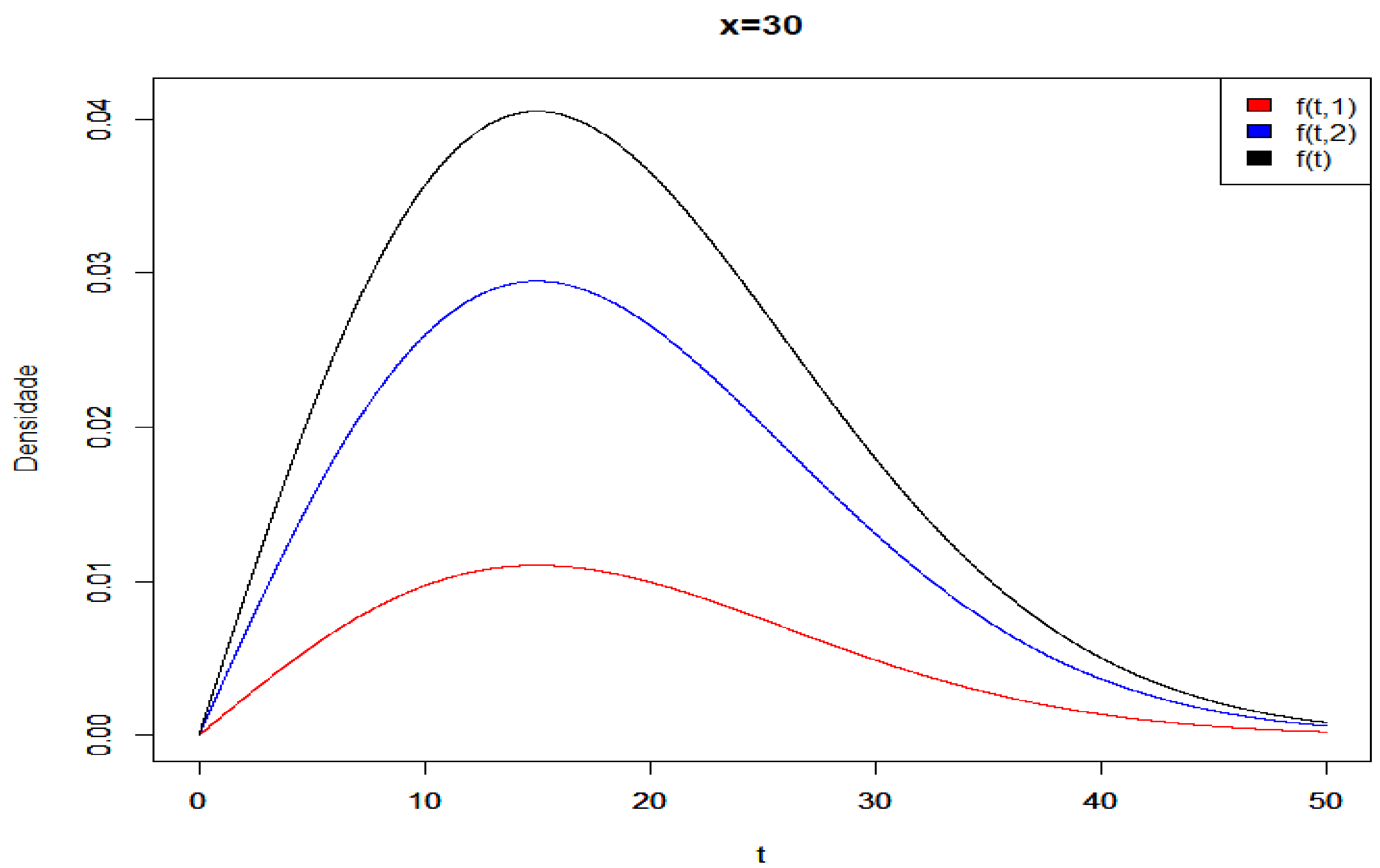
$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t 0{,}0005s(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)ds} = e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)}$$

$$f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} 0{,}0005t1{,}03^x e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)} & t \geq 0, \quad j=1 \\ 0{,}001t1{,}04^x e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)} & t \geq 0, \quad j=2 \end{cases}$$

$$f_T(t) = 0{,}0005t1{,}03^x e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)} + 0{,}001t1{,}04^x e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times 1{,}04^x)}$$

$$f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} 0{,}0005t1{,}03^{x}e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times1{,}04^x)} & t \geq 0, \quad j = 1 \\ 0{,}001t1{,}04^{x}e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times1{,}04^x)} & t \geq 0, \quad j = 2 \end{cases}$$

$$f_T(t) = 0{,}0005t1{,}03^{x}e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times1{,}04^x)} + 0{,}001t1{,}04^{x}e^{-0{,}00025t^2(1{,}03^x+2\times1{,}04^x)}$$



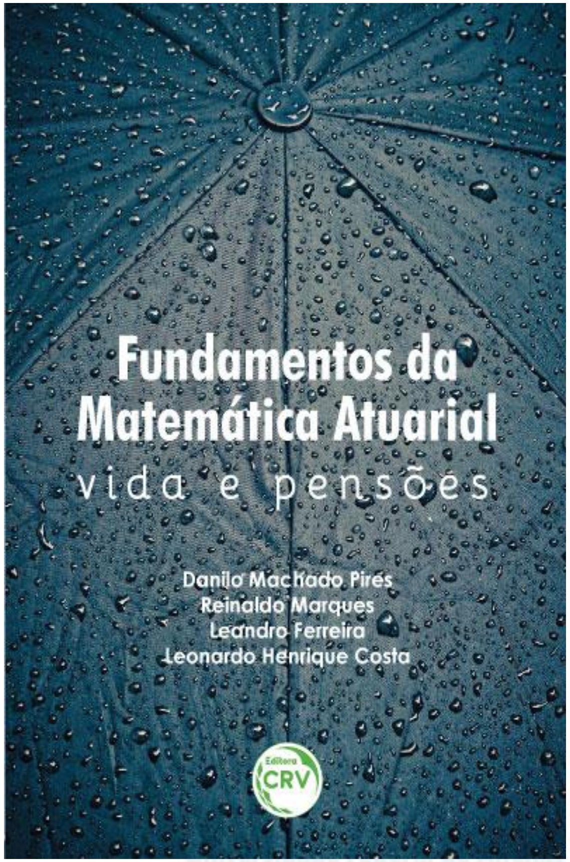
- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Matemática Atuarial II

Aula 19

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Múltiplos decrementos-resumos

$$f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(j)}\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

$$h_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(s,j)ds = {}_\infty q_x^{(j)}$$

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^m f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(\tau)}\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Em que

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x} = \frac{\sum_{j=1}^m f_{T,J}(t,j)}{{}_tp_x} = \sum_{j=1}^m \mu(x+t)^{(j)}$$

Múltiplos decrementos-resumos

Corresponde a probabilidade (bruta) de uma pessoa de idade x, morrer antes de alcançar a idade $x+t$, devido a causa j

$$ {}_t q_x^{(j)} = P(0 < T \leq t, J = j) = \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds \quad t \geq 0 $$

A probabilidade de decremento por todas as causas entre os instantes a e b.

$$ P(a < T \leq b) = \sum_{j=1}^{m} \int_a^b f_{T,J}(t,j)dt $$

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)} $$

Exemplo 1: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, em que as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = \frac{t}{100} \quad t \geq 0 \qquad\qquad \mu(x+t)^{(2)} = \frac{1}{100} \quad t \geq 0$$

Para este modelo, calcule o valor esperado de T_x, tal que:

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} \mu(x+t)^{(j)} = \frac{t}{100} + \frac{1}{100} = \frac{(t+1)}{100}$$

$$_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)^{(\tau)} ds} = e^{-\int_0^t \frac{(s+1)}{100} ds} = e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

Exemplo 1:

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(\tau)}\ {}_tp_x^{(\tau)} = \frac{(t+1)}{100}\ e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

$$E(T_x) = \int_0^\infty t\left[\frac{(t+1)}{100}\ e^{-\frac{t^2+2t}{200}}\right]dt$$

Exemplo 1:

$$E(T_x) = \int_0^\infty t\left[\frac{(t+1)}{100}\ e^{-\frac{t^2+2t}{200}}\right] dt$$ Integral muito elaborada

Alternativa

$$E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = -\int_0^{\omega-x} t\frac{d\left({}_t p_x\right)}{dt} dt = -\int_0^{\omega-x} t\, d\left({}_t p_x\right)$$

$$E(T_x) = -\int_0^{\omega-x} t\, d\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) = -\int_0^{\omega-x} t\frac{1}{l_x} d(l_{x+t})$$

Fazendo $u = t$ e $-\frac{1}{l_x} d(l_{x+t}) = dv$ logo $du = dt$ e $-\frac{l_{x+t}}{l_x} = v$, assim

...

Exemplo 1:

$$E(T_x) = -\int_0^{\omega-x} t\frac{1}{l_x}d(l_{x+t})$$

Fazendo $u = t$ e $-\frac{1}{l_x}d\,(l_{x+t}) = dv$ logo $du = dt$ e $-\frac{l_{x+t}}{l_x} = v$, assim

$$E(T_x) = -t\frac{l_{x+t}}{l_x}\bigg|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x}dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x}dt$$

$$E(T_x) = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt$$

Voltando ,

Exemplo 1:

$$E(T_x) = \int_0^{\infty} t\left[\frac{(t+1)}{100}\ e^{-\frac{t^2+2t}{200}}\right]dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2+2t}{200}}dt$$

$$E(T_x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t+1)^2-1}{200}}dt = e^{0,005}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(t+1)^2}{200}}dt = 10\sqrt{2\pi}e^{0,005}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t+1)^2}{200}}}{10\sqrt{2\pi}}dt$$

Exemplo 1:

$$E(T_x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t+1)^2-1}{200}} dt = e^{0,005} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t+1)^2}{200}} dt = 10\sqrt{2\pi} e^{0,005} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t+1)^2}{200}}}{10\sqrt{2\pi}} dt$$

Considerando $z = \frac{t+1}{10} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{10}$ e os limites inferior de integração de Z é $0,1$

$$E(T_x) = e^{0,005}\sqrt{2\pi} \int_{0,1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

Z tem uma forma semelhante a distribuição normal padrão, assim:

$$E(T_x) = e^{0,005}\sqrt{2\pi}[1 - \Phi(0,1)] = 11,59$$

Múltiplos decrementos-Aplicações

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t f_{T_x}(t)dt = \int_0^{\infty} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu(x+t)^{(\tau)} dt$$

Uma vez que a probabilidade de decremento por todas as causas entre os instantes a e b é dado por $\sum_{j=1}^{m} \int_a^b f_{T,J}(t,j)dt$, então:

$$\bar{A}_x = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} v^t f_{T,J}(t,j)dt$$

Ou

$$\bar{A}_x = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} v^t \mu(x+t)^{(j)} \ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$

Múltiplos decrementos-Aplicações

Pode-se aumentar a complexidade da estrutura do seguro apresentado considerando que o benefício depende da causa da morte, sendo assim tratado como uma variável aleatória de forma que o valor presente passa ser:

$$B_{x+t}^{(j)} e^{-\delta t}$$

Logo

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{\infty} B_{x+t}^{(j)} e^{-\delta t} \mu(x+t)^{(j)} \, {}_{t}p_{x}^{(\tau)} dt$$

Exemplo 2: Supondo que existam apenas 2 decrementos e que paga-se 2 $u.m.$ Caso a morte seja devido a acidente consideramos $J = 1$ e mortes por outros motivos consideramos o decremento $J = 2$, qual o valor do VPA para esse produto dado que $B_{x+t}^{(1)} = 2$ e $B_{x+t}^{(2)} = 1$?

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{\infty} B_{x+t}^{(j)} e^{-\delta t} \mu(x+t)^{(j)} \ {}_{t}p_{x}^{(\tau)} dt$$

Exemplo 2: Supondo que existam apenas 2 decrementos e que paga-se 2 $u.m.$ Caso a morte seja devido a acidente consideramos $J = 1$ e mortes por outros motivos consideramos o decremento $J = 2$, qual o valor do VPA para esse produto dado que $B_{x+t}^{(1)} = 2$ e $B_{x+t}^{(2)} = 1$?

$$\bar{A} = 2\int_0^\infty e^{-\delta t}\mu(x+t)^{(1)}\ {}_tp_x^{(\tau)}dt + \int_0^\infty e^{-\delta t}\mu(x+t)^{(2)}\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

Considerando os dados do exemplo 1, teríamos:

$$\mu(x+t)^{(1)} = \frac{t}{100} \qquad \mu(x+t)^{(2)} = \frac{1}{100} \qquad {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\frac{t^2+2t}{200}}$$

$$\bar{A} = 2\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{t}{100}e^{-\frac{t^2+2t}{200}}dt + \int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{1}{100}e^{-\frac{t^2+2t}{200}}dt$$

Múltiplos decrementos

Considerando T uma variável aleatória contínua, a função de distribuição condicional de J dado T é:

$$f_{J|T}(j|t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)}$$

Lembrando que

$$f_{T,J}(t,j) = \mu(x+t)^{(j)}\ {}_tp_x^{(\tau)} \qquad f_T(t) = {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu(x+t)^{(\tau)}$$

Então:

$$f_{J|T}(j|t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)} = \frac{\mu(x+t)^{(j)}\ {}_tp_x^{(\tau)}}{{}_tp_x^{(\tau)}\ \mu(x+t)^{(\tau)}} = \frac{\mu(x+t)^{(j)}}{\mu(x+t)^{(\tau)}}$$

Exemplo 3: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, em que as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = \frac{t}{100} \quad t \geq 0 \qquad\qquad \mu(x+t)^{(2)} = \frac{1}{100} \quad t \geq 0$$

Para este modelo, calcule a função a função de distribuição condicional de J dado T é:

Exemplo 3: Considere um modelo de múltiplo decremento com duas causas de decremento, em que as forças mortalidade por cada causa são:

$$\mu(x+t)^{(1)} = \frac{t}{100} \quad t \geq 0 \qquad \mu(x+t)^{(2)} = \frac{1}{100} \quad t \geq 0$$

Para este modelo, calcule a função a função de distribuição condicional de J dado T é:

$$\mu(x+t)^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{2} \mu(x+t)^{(j)} = \frac{t}{100} + \frac{1}{100} = \frac{(t+1)}{100}$$

$$f_{J|T}(1|t) = \frac{\frac{t}{100}}{\frac{(t+1)}{100}} = \frac{t}{t+1} \qquad f_{J|T}(2|t) = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{(t+1)}{100}} = \frac{1}{t+1}$$

Múltiplos decrementos

Como a função de distribuição condicional de J dado T é dada por:

$$f_{J|T}(j|t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)} = \frac{\mu(x+t)^{(j)}\ {}_tp_x^{(\tau)}}{{}_tp_x^{(\tau)}\ \mu(x+t)^{(\tau)}} = \frac{\mu(x+t)^{(j)}}{\mu(x+t)^{(\tau)}}$$

Consequentemente a função de T dado J é dada por:

$$f_{T|J}(t|j) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{h_J(j)}$$

Assim para o exemplo anterior teríamos

$$f_{T|J}(t|1) = \frac{f_{T,J}(t{,}1)}{h_J(1)} = \frac{\frac{t}{100}e^{-\frac{t^2+2t}{200}}}{0{,}8841} \qquad \text{e} \qquad f_{T|J}(t|2) = \frac{f_{T,J}(t{,}2)}{h_J(2)} = \frac{\frac{1}{100}e^{-\frac{t^2+2t}{200}}}{0{,}1159}$$

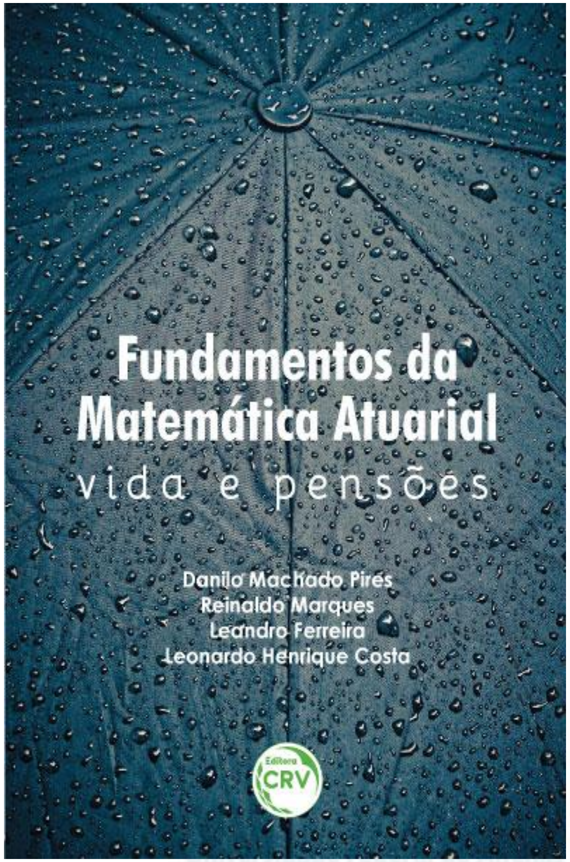
- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Matemática Atuarial II

Aula 20

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Múltiplos decrementos

- Seja as variáveis aleatória T (o tempo de vida adicional discreta) e J (causa da falha do status), então:

$$P(T = t, J = j) = P(t < T \leq t + 1, J = j) = {}_{t|}q_x^{(j)} = {}_t p_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(j)}$$

- A probabilidade de decremento por todas as causas entre as idades $x + t$ e $x + t + 1$, dado que sobreviveu até a idade x+t, é denotada por:

$$q_{x+\mathrm{t}}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} q_{x+\mathrm{t}}^{(\mathrm{j})}$$

Exemplo 1: Seja a tabela atuarial abaixo considerando mais de um decremento, e então calcule $q_x^{(\tau)}$ e $p_x^{(\tau)}$.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0,02	0,05
66	0,03	0,06
67	0,04	0,07
68	0,05	0,08
69	0,06	0,09
70	0,00	1

Exemplo 1: Seja a tabela atuarial abaixo considerando mais de um decremento, e então calcule $q_x^{(\tau)}$ e $p_x^{(\tau)}$.

$$q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)}$$

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$
65	0,02	0,05	$0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}07$	$1 - 0{,}07 = 0{,}93$
66	0,03	0,06	0,09	0,91
67	0,04	0,07	0,11	0,89
68	0,05	0,08	0,13	0,87
69	0,06	0,09	0,15	0,85
70	0,00	1	1	0

Acrescente as colunas $l_x^{(\tau)}$, $d_x^{(\tau)}$, $d_x^{(1)}$ e $d_x^{(2)}$

Exemplo 1.... Acrescente as colunas $l_x^{(\tau)}$, $d_x^{(\tau)}$,$d_x^{(1)}$ e $d_x^{(2)}$

Como $l_{x+1} = p_x l_x$ e $dx = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$ então:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	$1000 - 930 = 70$
66	0,03	0,06	0,09	0,91	$1000 \times 0{,}93 = 930$	87,3
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29
70	0,00	1	1	0	557	557

Exemplo 1.... Acrescente as colunas $l_x^{(\tau)}$, $d_x^{(\tau)}$,$d_x^{(1)}$ e $d_x^{(2)}$

Como $l_{x+1} = p_x l_x$ e $dx = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$ então:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	70	$1000 \times 0{,}02 = 20$	$1000 \times 0{,}05 = 50$
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930	83,7	27,9	55,8
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29	39,32	58,98
70	0,00	1	1	0	557	557	0	557

Exemplo 1.... Acrescente as colunas $l_x^{(\tau)}$, $d_x^{(\tau)}$,$d_x^{(1)}$ e $d_x^{(2)}$

Como $l_{x+1} = p_x l_x$ e $dx = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$ então:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	70	20	50
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930	83,7	27,9	55,8
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29	39,32	58,98
70	0,00	1	1	0	557	557	0	557

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

$$d_x^{(\tau)} = d_x^{(1)} + d_x^{(2)}$$

Múltiplos decrementos

Obs.: Aprendemos em matemática atuarial I que ${}_tq_x$ é definido por:

$${}_tq_x = P(T_x \leq t) = 1 - {}_tp_x$$

Logo

$${}_tq_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

Repare que:

$${}_tq_x = P(T_x \leq 1) + P(1 < T_x \leq 2) + \cdots + P(t - 1 < T_x \leq t)$$

Múltiplos decrementos

$$ {}_t q_x = P(T_x \le 1) + P(1 < T_x \le 2) + \cdots + P(t-1 < T_x \le t) = \frac{\boldsymbol{l_x - l_{x+t}}}{\boldsymbol{l_x}} $$

Exemplo

$$ {}_2 q_{40} = P(T_{40} \le 1) + P(1 < T_{40} \le 2) $$

$$ {}_2 q_{40} = q_{40} + P(T_{40} = 2) = q_{40} + p_{40} q_{41} $$

Pois $P(t < T_x \le t+1) = P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$

$$ \boldsymbol{{}_2 q_{40}} = \frac{l_{40} - l_{41}}{l_{40}} + \frac{l_{41}}{l_{40}} \left(\frac{l_{41} - l_{42}}{l_{41}} \right) = \frac{l_{40} - l_{41} + l_{41} - l_{42}}{l_{40}} = \frac{\boldsymbol{l_{40} - l_{42}}}{\boldsymbol{l_{40}}} $$

Múltiplos decrementos

Consequentemente,

$$ {}_3q_{40} = P(T_{40} \leq 1) + P(1 < T_{40} \leq 2) + P(2 < T_{40} \leq 3) $$

$$ {}_3q_{40} = q_{40} + p_{40}q_{41} + {}_2p_{40}q_{42} $$

$$ {}_4q_{40} = P(T_{40} \leq 1) + P(1 < T_{40} \leq 2) + P(2 < T_{40} \leq 3) + P(3 < T_{40} \leq 4) $$

$$ {}_4q_{40} = q_{40} + p_{40}q_{41} + {}_2p_{40}q_{42} + {}_3p_{40}q_{43} $$

Exemplo 2 Usando a tábua abaixo calcule ${}_4p_{65}^{(\tau)}$, ${}_{3|}q_{66}^{(1)}$, ${}_3q_{67}^{(2)}$

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	70	20	50
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930	83,7	27,9	55,8
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29	39,32	58,98
70	0,00	1	1	0	557	557	0	557

Exemplo 2 Usando a tábua abaixo calcule $_4p_{65}^{(\tau)}$, $_{3|}q_{66}^{(1)}$, $_3q_{67}^{(2)}$

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	70	20	50
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930	83,7	27,9	55,8
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29	39,32	58,98
70	0,00	1	1	0	557	557	0	557

$$_4p_{65}^{(\tau)} = P(T_{65} > 4) = p_{65}^{(\tau)}p_{66}^{(\tau)}p_{67}^{(\tau)}p_{65}^{(\tau)} = \frac{l_{69}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} \approx 0{,}6553$$

Exemplo 2 Usando a tábua abaixo calcule ${}_4p_{65}^{(\tau)}$, ${}_{3|}q_{66}^{(1)}$, ${}_3q_{67}^{(2)}$

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	70	20	50
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930	83,7	27,9	55,8
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29	39,32	58,98
70	0,00	1	1	0	557	557	0	557

$$ {}_4p_{65}^{(\tau)} = P(T_{65} > 4) = p_{65}^{(\tau)} p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} p_{65}^{(\tau)} = \frac{l_{69}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} \approx 0{,}6553 $$

$$ {}_{3|}q_{66}^{(1)} = P(3 < T_{66} \leq 4, J = 1) = {}_3p_{66}^{(\tau)} q_{69}^{(1)} = p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} p_{65}^{(\tau)} q_{69}^{(1)} = \frac{l_{69}^{(\tau)}}{l_{66}^{(\tau)}} q_{69}^{(1)} \approx 0{,}04227 $$

Exemplo 2 Usando a tábua abaixo calcule ${}_4p_{65}^{(\tau)}$, ${}_{3|}q_{66}^{(1)}$, ${}_3q_{67}^{(2)}$

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
65	0,02	0,05	0,07	0,93	**1000**	70	20	50
66	0,03	0,06	0,09	0,91	930	83,7	27,9	55,8
67	0,04	0,07	0,11	0,89	846,3	93,09	33,85	59,24
68	0,05	0,08	0,13	0,87	753,21	97,92	37,66	60,26
69	0,06	0,09	0,15	0,85	655,29	98,29	39,32	58,98
70	0,00	1	1	0	557	557	0	557

$${}_4p_{65}^{(\tau)} = P(T_{65} > 4) = p_{65}^{(\tau)} p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} p_{65}^{(\tau)} = \frac{l_{69}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} \approx 0{,}6553$$

$${}_{3|}q_{66}^{(1)} = P(3 < T_{66} \leq 4, J = 1) = {}_3p_{66}^{(\tau)} q_{69}^{(1)} = p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} p_{65}^{(\tau)} q_{69}^{(1)} = \frac{l_{69}^{(\tau)}}{l_{66}^{(\tau)}} q_{69}^{(1)} \approx 0{,}04227$$

$${}_3q_{67}^{(2)} = q_{67}^{(2)} + p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(2)} + {}_2p_{67}^{(\tau)} q_{69}^{(2)} \approx 0{,}197$$

Exemplo 3: Imagine um indivíduo com idade $x = 65$ anos que contrate um seguro de vida temporário por um período de 3 anos, com as seguintes características:

- Caso o segurado morra devido a acidentes de carro, o benefício a ser pago será de **100**.
- Caso a morte ocorra por outras causas, o benefício será de **50**.

Calcule o Valor Presente Atuarial (VPA)

Exemplo 3: Imagine um indivíduo com idade $x = 65$ anos que contrate um seguro de vida temporário por um período de 3 anos, com as seguintes características:

- Caso o segurado morra devido a acidentes de carro, o benefício a ser pago será de 100.
- Caso a morte ocorra por outras causas, o benefício será de 50.

Calcule o Valor Presente Atuarial (VPA)

Vamos chamar a morte devido a acidentes de causa 1 e as demais de causa 2, assim:

	$J = 1$			$J = 2$		
T_x	VP	${}_tp_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	VP	${}_tp_x^{(\tau)}$	$q_x^{(2)}$
0	$100v$	${}_0p_{65}^{(\tau)}$	$q_{65}^{(1)}$	$50v$	${}_0p_{65}^{(\tau)}$	$q_{65}^{(2)}$
1	$100v^2$	$p_{65}^{(\tau)}$	$q_{66}^{(1)}$	$50v^2$	$p_{65}^{(\tau)}$	$q_{66}^{(2)}$
2	$100v^3$	${}_2p_{65}^{(\tau)}$	$q_{67}^{(1)}$	$50v^3$	${}_2p_{65}^{(\tau)}$	$q_{67}^{(2)}$

Exemplo 3:

- Caso o segurado morra devido a acidentes de carro, o benefício a ser pago será de 100 ($J = 1$).
- Caso a morte ocorra por outras causas, o benefício será de 50 ($J = 2$).

	$J=1$			$J=2$		
T_x	VP	${}_tp_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	VP	${}_tp_x^{(\tau)}$	$q_x^{(2)}$
0	$100v$	${}_0p_{65}^{(\tau)}$	$q_{65}^{(1)}$	$50v$	${}_0p_{65}^{(\tau)}$	$q_{65}^{(2)}$
1	$100v^2$	$p_{65}^{(\tau)}$	$q_{66}^{(1)}$	$50v^2$	$p_{65}^{(\tau)}$	$q_{66}^{(2)}$
2	$100v^3$	${}_2p_{65}^{(\tau)}$	$q_{67}^{(1)}$	$50v^3$	${}_2p_{65}^{(\tau)}$	$q_{67}^{(2)}$

Sendo assim o valor presente atuarial devido a causa 1 é:

$$VPA_1 = 100vq_{65}^{(1)} + 100v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(1)} + 100v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(1)}$$

Logo

$$VPA_2 = 50vq_{65}^{(2)} + 50v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(2)} + 50v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(2)}$$

Exemplo 3:

$$VPA_1 = 100vq_{65}^{(1)} + 100v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(1)} + 100v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(1)}$$

$$VPA_2 = 50vq_{65}^{(2)} + 50v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(2)} + 50v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(2)}$$

Repare que:

$$VPA_1 = 50vq_{65}^{(1)} + 50vq_{65}^{(1)} + 50v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(1)} + 50v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(1)} + 50v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(1)} + 50v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(1)}$$

Ao somar VPA_1 com VPA_2, temos VPA

$$\begin{aligned} VPA &= 50v\left(q_{65}^{(1)} + q_{65}^{(2)}\right) + 50v^2p_{65}^{(\tau)}\left(q_{66}^{(1)} + q_{66}^{(2)}\right) + 50v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}\left(q_{67}^{(1)} + q_{67}^{(2)}\right) \\ &+ 50\left(vq_{65}^{(1)} + v^2p_{65}^{(\tau)}q_{66}^{(1)} + v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}q_{67}^{(1)}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 3:

$$VPA = 50v\left(q_{65}^{(1)} + q_{65}^{(2)}\right) + 50v^2 p_{65}^{(\tau)}\left(q_{66}^{(1)} + q_{66}^{(2)}\right) + 50v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)}\left(q_{67}^{(1)} + q_{67}^{(2)}\right) + 50\left(vq_{65}^{(1)} + v^2 p_{65}^{(\tau)} q_{66}^{(1)} + v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)} q_{67}^{(1)}\right)$$

$$VPA = 50\left(vq_{65}^{(\tau)} + v^2 p_{65}^{(\tau)} q_{66}^{(\tau)} + v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)} q_{67}^{(\tau)}\right) + 50\left(vq_{65}^{(1)} + v^2 p_{65}^{(\tau)} q_{66}^{(1)} + v^3\ {}_2p_{65}^{(\tau)} q_{67}^{(1)}\right)$$

Na prática temos um seguro normal (incluindo todas as causas) com benefício igual a 50 e caso a morte seja por acidente temos mais um seguro com benefício também igual a 50, ambos com cobertura de 3 anos.

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.