Matemática atuarial

AULA 22- Prêmios periódicos (Seguros)

Danilo Machado Pires danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Prêmios

- O prêmio poderá ser pago de 3 formas:
 - Um único pagamento.
 - Valor esperado da função valor presente.
 - Valor atuarial.
 - Prêmios periódicos de valor constante no tempo (prêmios nivelados).
 - Prêmios periódicos de quantidade variável.

- \triangleright O contrato estipula que o <u>segurado</u> deverá pagar um prêmio constante P (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver.
 - ➤ O primeiro pagamento será uma fração do prêmio pois este será capitalizado pela seguradora e o último pagamento corresponderá ao próprio prêmio.

- ➢ O contrato estipula que o <u>segurado</u> deverá pagar um prêmio constante P (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver.
 - \triangleright O compromisso do <u>SEGURADO (Y)</u>, em valor presente (a data <u>0</u>) é igual a :

$$Y = Pv^{k} + \dots + Pv^{3} + Pv^{2} + Pv + P = P(v^{k} + v^{k-1} + \dots + v^{2} + v + 1)$$

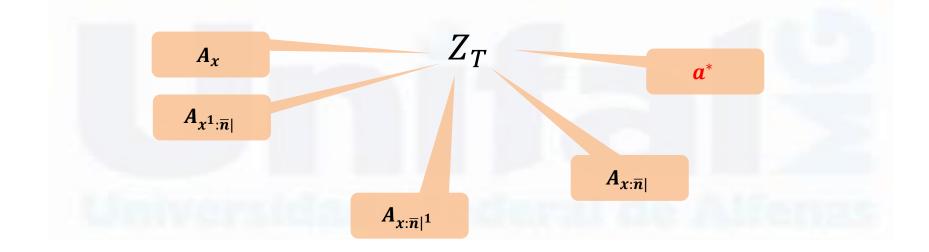
Referente ao primeiro dos **k+1** pagamentos

$$Y = P\left(\frac{1 - v^{k+1}}{1 - v}\right)$$

Referente ao último pagamento

$$Y = P\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$

Por outro lado o valor presente do benefício que será pago pela seguradora por uma dada modalidade de seguro é representado por Z_T . Então, o compromisso em valor presente do <u>SEGURADOR</u> é:



 \triangleright A ideia básica do cálculo do valor de P, está em igualar o compromisso do segurado ao compromisso do segurador, a data 0. Tal que

L = Compromissos segurado - Compromisso do segurador

$$L = Y - Z_T$$

Princípio da Equivalência, E(L) = 0

$$E(L) = 0 = E(Y - Z_T)$$

$$E(Y) = E(Z_T)$$

$$E(L) = 0 = E(Y - Z_T)$$

$$E(Y) = E(Z_T)$$

$$E(P\ddot{a}_{T_x+1}) = E(Z_{T_x})$$

$$P = \frac{E(Z_{T_x})}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

Prêmio Puro periódico Anual- A_χ

$$P_{x} = \frac{E(Z_{T_{x}})}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$$P_{x} = \frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x}}$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$
 e $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$P_{\mathcal{X}} = \frac{(1-v)A_{\mathcal{X}}}{1-A_{\mathcal{X}}}$$

Exemplo 1

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1 - v)A_{25}}{1 - A_{25}}$$

Exemplo 1

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}} = \mathbf{0}, \mathbf{2492899} \quad \ddot{a}_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} = \mathbf{25}, \mathbf{774389} \quad v = 0,9708738$$

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = 0,00967$$
 $P_{25} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}} = 0,00967$

Caso o segurado queira que o beneficiário receba R\$1000,00 neste seguro de vida inteira, então:

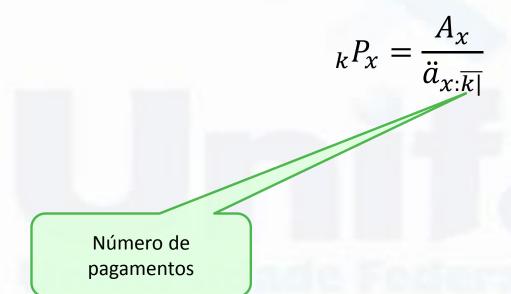
$$1000P_{25} = 1000(0,00967)$$

$$1000P_{25} = R\$ 9,67$$

Prêmio Puro periódico Anual- A_{χ}

pagamentos limitados

> No caso dos pagamentos estarem limitados a um período $k < \omega - x$, tem-se:



Exemplo 2:

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio a ser pago em 4 parcelas anuais?

$$_{k}P_{x} = \frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{4}|}}$$

Prêmio Puro periódico Anual- $A_{\chi^1:ar{n}|}$

$$P_{x^1:\overline{k}|} = \frac{bA_{x^1:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

> Exemplo 3:

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela AT-49 e uma taxa de juros i = 0,03?

Exemplo 3:

$$A_{40^{1}:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{T+1}{}_{t} p_{40} q_{40+t} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{t}_{t} p_{40} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}$$

$$P_{40^1:\overline{5}|} = rac{A_{40^1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}$$

0,00161 | 0,99839 | 0,11579 |

0,00222 | 0,99778 | 0,09172 |

0,01057 | 0,98943 | 0,04057 |

- > A teoria até agora nos levou ao cálculo do Prêmio nivelado a ser pago pelo segurado uma vez escolhido o valor do benefício.
- Pensemos agora na seguinte situação:
- Um segurado procura um fundo de pensão e sabe quanto ele, o segurado, poderá depositar no fundo de pensão anualmente para adquirir uma anuidade em sua aposentadoria (digamos, daqui a n anos).
 - Este segurado gostaria de saber qual o benefício ele receberá ser fizer os depósitos durante sua vida ativa.

- Neste caso, conhecemos o valor do Prêmio nivelado, porém, não conhecemos o valor do benefício a ser pago.
 - ...não estamos querendo calcular o prêmio que, em média seja o suficiente para pagamento de sinistros.
 - …queremos calcular o benefício tal que, em média, a seguradora não tenha nem ganho nem perda financeira.

Exemplo 4:

Um segurado de 40 anos quer comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado se propõe a pagar um prêmio de 0,00245194 em 5 parcelas começando imediatamente. Considerando-se a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano, qual deveria ser o benefício deste seguro considerando-se que recebe o benefício ao final do ano de morte?



> Exemplo -Solução

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} bv^{T+1} & se \ 0 \le T < 5 \\ 0 & se \ T > 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} 0,002518 \ \ddot{a}_{\overline{T}|} & se \ 0 \le T < 5 \\ 0,002518 \ \ddot{a}_{\overline{5}|} & se \ T \ge 5 \end{cases}$$

Valor de $P_{40^1:\overline{5}|}$ é conhecido. Então:

$$b = \frac{0,00245194\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{A_{40:\overline{5}|}} = \frac{0,00245194(4,696544)}{0,0115156} \approx 1$$

Aula 23

Danilo Machado Pires danilo.pires@unifal-mg.edu.br



Seja uma pessoa de 40 anos que queira pagar por um seguro que paga 1 u.m. Considerando a tábua de mortalidade AT-49 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação (3%).

- a) Calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado.
- b) Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante toda a vigência do seguro.
- c) Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante 15 anos.

- d) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado.
- e) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos com indenização de R\$50000,00. Qual o valor da da parcela do Prêmio puro único a ser pago pelo segurado, para o caso excepcional, do segurado poder pagar por 10 anos .
- f) Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga R\$ 250 mil se o segurado sobreviver durante o período de 3 anos. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago pelo segurado?

Prêmio Puro periódico Anual fracionado

Esses prêmios podem ser pagos de forma fracionadas ao longo do ano.

$$P_{\chi}^{(m)} = \frac{E(Z_{T_{\chi}})}{m \ddot{a}_{\chi:\bar{k}|}^{(m)}}$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 -_n p_x v^n) \left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

Exemplo 5:

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo mensal. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a Tábua AT-49 e uma taxa de juros i=0,03?



SOLUÇÃO

$$A_{40^{1}:\overline{5}|} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)} \approx \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - (1 - p_{40}v^5) \left(\frac{12 - 1}{2 \times 12}\right)$$

$$P_{40^{1}:\overline{5}|}^{(12)} = \frac{A_{40^{1}:\overline{5}|}}{12\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)}} \approx$$

Dlamas	Duâmia Duna
Planos	Prêmio Puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.	$P_{\chi} = \frac{A_{\chi}}{\ddot{a}_{\chi}}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	$_{k}P_{x}=\frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{k} }}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$P_{x^1:\bar{n} } = \frac{A_{x^1:\bar{n} }}{\ddot{a}_{x:\bar{n} }}$
Seguro Dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n} ^{1}} = \frac{A_{x:\overline{n} ^{1}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$
Seguro Dotal Misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\bar{n} } = \frac{A_{x:\bar{n} }}{\ddot{a}_{x:\bar{n} }}$

PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO.

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_{x} = \frac{\bar{A}_{x}}{\bar{a}_{x}}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	$_{k}\bar{P}_{x}=\frac{\bar{A}_{x}}{\bar{a}_{x:\overline{k} }}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^1:\bar{n} } = \frac{\bar{A}_{x^1:\bar{n} }}{\bar{a}_{x:\bar{n} }}$
Seguro Dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n} ^{1}} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} ^{1}}}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
Seguro Dotal Misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\bar{n} } = \frac{\bar{A}_{x:\bar{n} }}{\bar{a}_{x:\bar{n} }}$

Exemplo 6

Considere que x decida fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que pague um benefício unitário no momento de morte do segurado. Dado que o tempo de vida adicional (T_x) possa ser modelada pela distribuição exponencial com parâmetro igual a (0,02). Calcule o Prêmio $\bar{P}_{x^1:\overline{10}|}$ anual que deverá ser pago pelo segurado, considere δ =0,06.

Exemplo

$$\bar{P}_{\chi^1:\overline{10}|} = \frac{\bar{A}_{\chi^1:\overline{10}|}}{\bar{a}_{\chi:10|}},$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{(1 - e^{-\delta 10})}{\delta} e^{-\alpha 10}$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-\delta t} \, \alpha e^{-\alpha t} dt$$

Após resolver as integrais acima e substituir $\delta=0.06$ e $\alpha=0.02$.

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} \approx 6,8834$$

$$\bar{A}_{\chi^1:\overline{10}|} \approx 0.13766$$

$$\bar{P}_{\chi^1:\overline{10}|} \approx \frac{0.13766}{6.8834} \approx 0.01999$$

Relações importantes

$$\bar{P}_{x} = \frac{i}{\delta} P_{x},$$

$$\bar{P}_{x^1:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|,}$$

$$\bar{P}_{x:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|} + P_{x:\bar{n}|^1}.$$

A busca do valor da parcela do prêmio através do principio da equivalência, estabelece uma paridade entre os gatos do segurado e da seguradora. Contudo ...

$$P(L>0)=\alpha$$

$$P(Y > Z_{T_{Y}}) = \alpha$$

ightharpoonup Como $L=Y-Z_{T_{\chi}}$ par o caso em que trata-se do prêmio relacionado seguros de vida, tem-se:

$$P(L > 0) = \alpha$$

$$P\left(\overline{P}\left(\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta}\right) > bv^{T+1}\right) = \alpha$$

$$P(\bar{P}(1 - e^{-\delta T}) > \delta b e^{-\delta T}) = \alpha$$

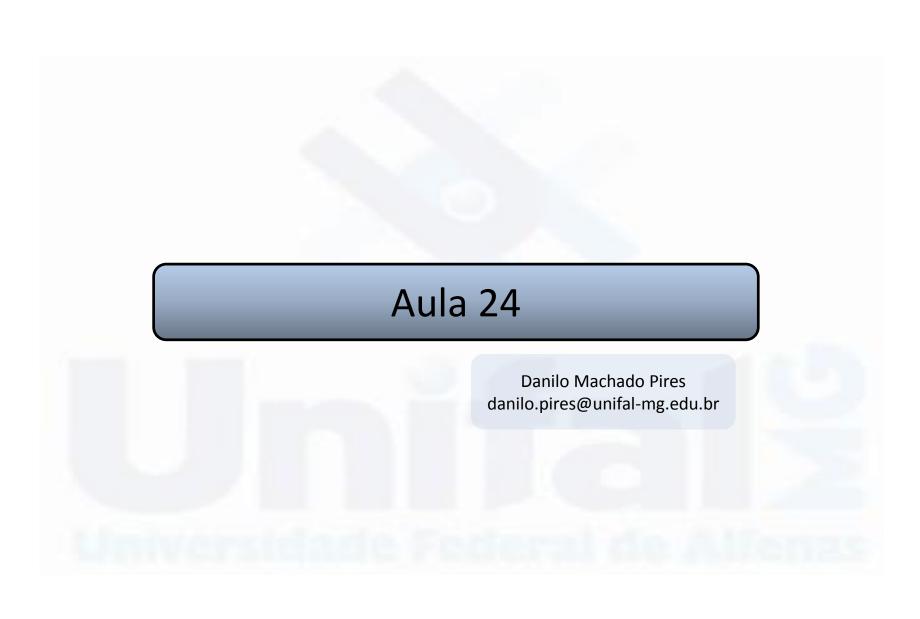
$$P\left(e^{\delta T}\left(1-e^{-\delta T}\right) > \frac{\delta b}{\overline{P}}\right) = \alpha$$

$$P\left(e^{\delta T} > \frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right) = \alpha$$

$$P\left(\delta T > \ln\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right)\right) = \alpha$$

$$P\left(T > \frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right)}{\delta}\right) = \alpha$$

Necessário a distribuição de T o benefício b e a taxa de juros i.



Prêmios Anuidades

Com exceção do seguro diferido, os prêmios de seguro serão pagos durante o período de cobertura do mesmo.

➤ No caso das anuidades em geral os prêmios são pagos antes do período de sua vigência.

Prêmios Anuidades

$$L = Y_p - Y_b$$

- $ightharpoonup Y_p = b\ddot{a}_{K+1}$ são os compromisso do segurado por k anos,
- $\succ Y_b$ o compromisso da seguradora (alguma modalidade de anuidade diferida).

$$E(L)=0$$

$$P(Y_b) = \frac{E(Y_b)}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Prêmios Anuidades

Planos	
--------	--

Prêmio puro

Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P(k_|\ddot{a}_x) = \frac{k_|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia diferida por n anos, com prêmios limitados a k anos. ($k \le n$)

$$P(n|\ddot{a}_x)_k = \frac{n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P(|k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{|k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P\left(\left| k \right| \ddot{a}_{x}^{(m)} \right) = \frac{\left| k \right| \ddot{a}_{x}^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}^{(m)}}$$

...

➤ Exemplo 7

Uma pessoa de 20 anos decide contratar uma aposentadoria vitalícia que pagará 1,00 ao ano até que este segurado faleça. Ele se aposentará caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado enquanto estiver ativo.

Considerando a tábua AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do prêmio a ser pago pelo segurado?

SOLUÇÃO:

Não se faz sentido adquiri rendas vitalícias imediatas a prêmios periódicos, todavia, é justificável adquirir rendas vitalícias diferidas. Assim:

➤ Exemplo 7

$$P\left(\left|\frac{\ddot{a}_{20}}{a_{20}}\right| = \frac{|a_{0}|\ddot{a}_{20}|}{\ddot{a}_{20}|\overline{a}_{0}|} = \frac{|v^{40}|_{40}p_{20}\ddot{a}_{60}|}{\ddot{a}_{20}|_{40}|} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}}}{\frac{(N_{20}-N_{60})}{D_{20}}} = \frac{N_{60}}{(N_{20}-N_{60})}$$

$$P(a_0|\ddot{a}_{20}) \approx 0.157468$$

Caso o segurado tenha interesse de receber R\$25000,00 ao ano, então:

 $25000P(a_0|\ddot{a}_{20}) \approx 25000(0,157468) \approx 3936,711$

Suponhamos que o salário do segurado no exemplo anterior seja insuficiente para pagar os prêmios durante o período em que ele está em idade ativa. O segurado pergunta ao atuário se é possível pagar um prêmio anual nivelado durante toda a sua vida (inclusive enquanto aposentado). Qual deveria ser o prêmio pago pelo segurado neste caso?

SOLUÇÃO:

Neste caso, o que o segurado está fazendo será diminuir o benefício que irá receber. De fato, o segurado irá receber um benefício como no exemplo anterior, porém parte deste benefício estará comprometido para pagamento do prêmio.

Compromisso do segurado = Compromisso do segurador $Y = Y_b$

Em que:

$$Y_p = \begin{cases} P\ddot{a}_{T_x+1|}, T \ge 0 \\ 0 \quad c. c \end{cases} \qquad Y_b = \begin{cases} 40|\ddot{a}_{T_x+1-40|}; T \ge 40 \\ 0; c. c. \end{cases}$$

$$E(L) = 0$$

$$E(\ddot{a}_{\overline{T|}} - P\ddot{a}_{\overline{T|}}) = 0$$

$$P = \frac{{}_{40|}\ddot{a}_{20}}{\ddot{a}_{20}} = \frac{v^{40} {}_{40}p_{20}\ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{20}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}}}{\frac{N_{20}}{D_{20}}} = \frac{N_{60}}{N_{20}}$$

$$P = 0.1360456$$

Suponha que uma pessoa de 18 anos que começa acabou de começar a trabalhar e pretende contribuir mensalmente para sua aposentadoria (que também será mensal e vitalícia) durante um período de 33 anos. Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de \$10000,00 e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 5% ao ano. (considere a Tábua AT_49)

SOLUÇÃO:

$$P\left(\begin{array}{c} 33 | \ddot{a}_{18}^{(12)} \right) = \frac{33 | \ddot{a}_{18}^{(12)}}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$$_{33}|\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33}\left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{22}\right) \approx 2,5516$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - (1 - {}_{33}p_{18}v^{33}) \left(\frac{11}{22}\right) \approx 16,1999$$

$$P\left(\left|\frac{\ddot{a}_{18}^{(12)}}{33}\right| \approx \frac{2,5516}{16,1999} \approx 0,1575071$$

Logo o valor pago mensalmente será de \$1575, 07

Lista (entregar)

1) Considere uma pessoa de idade 30 que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga R\$1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição Uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja, $T \sim U(0,70)$.

Suponha que i = 5% a. a., calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

2) Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de P = 0, 157468.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do benefício contratado pelo segurado?

3) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga R\$ 1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(\alpha)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

4) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que paga R\$ 1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(0,02)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado, considere $\delta=0.06$