# Teoria do Risco
# Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br


https://atuaria.github.io/portalhalley

## Exemplo 1

Considere uma carteira de seguros que no caso de ocorrência de sinistro, os valores gastos com indenização são modelados por distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}2$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no quanto esperam gastar com indenizações, porém esse valor não deve exceder $4{,}5$ . Calcule o valor esperado sujeito a esse limite técnico.

## Solução:

$$Y = \begin{cases} X\,, & X < 4{,}5 \\ 4{,}5\,, & X \geq 4{,}5 \end{cases}$$

...

**Solução:**

$$Y = \begin{cases} X\,, & X < 4{,}5 \\ 4{,}5\,, & X \geq 4{,}5 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = \int_0^{4{,}5} x f_X(x)dx + 4{,}5\, S_X(4{,}5)$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = \int_0^{4{,}5} x\; 0{,}2\; e^{-0{,}2\,x} dx + 4{,}5 \int_{4{,}5}^{\infty} 0{,}2\; e^{-0{,}2\,x} dx$$

$u = x$, e $dv = e^{-0{,}2x}dx$, ➔ $du = dx$ e $v = -\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}$

$$0{,}2 \int_0^{4{,}5} x e^{-0{,}2x} dx = 0{,}2\left( -x\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}\Bigg|_{x=0}^{x=4{,}5} + \int_0^{4{,}5} \frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2} dx \right)$$

$$= -xe^{-0{,}2x}\Big|_{x=0}^{x=4{,}5} + \left( -\frac{e^{-x0{,}2}}{0{,}2}\Bigg|_{x=0}^{x=4{,}5} \right) = 1{,}13759$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = 1{,}13759 + 4{,}5\,(e^{-0{,}2\times 4{,}5}) = 2{,}967152$$

# Exemplo 2

Considere a função de probabilidade:

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Considere que o limite de indenização para essa carteira seja de $R\$4000{,}00$, o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado pode ser obtido da seguinte forma.

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Seja $Y$, tal que:

$$Y = \begin{cases} S_{col}, & S_{col} < 4000 \\ 4000, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s\, p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000\, p(s) = R\$1956{,}8$$

# Exemplo 3

Considere a função de probabilidade :

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio puro de modo que a probabilidade de que o gasto total com sinistros não o exceda, seja de 95%. Utilizando aproximação pela distribuição normal.

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Solução: princípio do percentil

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688\ (1,645) = R\$5431,91$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0{,}36 & 0 \le s < 1000 \\ 0{,}384 & 1000 \le s < 2000 \\ 0{,}4564 & 2000 \le s < 3000 \\ 0{,}8428 & 3000 \le s < 4000 \\ 0{,}8592 & 4000 \le s < 5000 \\ 0{,}8976 & 5000 \le s < 6000 \\ 1 & s \ge 6000 \end{cases}$$

Solução:

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \le \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P(S_{col} \le \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P\left(Z \le \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = Z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964{,}688\,(1{,}645) = R\$5431{,}91$$

# Cálculo de prêmios

- Um prêmio de seguro é a importância paga por alguém em troca da transferência do risco a que ele está exposto para uma empresa especializada na gestão de risco....

- Para essa empresa, o valor do prêmio, ou do conjunto de sua carteira, deverá cobrir todos os custos com sinistros.

# Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação:

- **Julgamento ou subjetivo**

É um processo subjetivo, onde a tarifação é definida pelo underwriter através de comparação com riscos similares.

- **Prêmio Puro**

Começa com a estimativa do prêmio de risco $\mathrm{E}(S)$...

- **Prêmio carregado com margem de segurança**

O prêmio carregado com margem de segurança puro é igual ao prêmio de risco mais um carregamento de segurança estatístico.

- **Prêmio comercial**

O prêmio cobrado pela seguradora deve ter um carregamento suficientemente grande para fazer frente às despesas administrativas e comerciais da seguradora:

# Princípio de cálculo de prêmio

- O prêmio de uma seguradora é a função que associa a variável aleatória relacionada ao gasto da seguradora com o sinistro $(S)$ de uma determinada apólice com um número real $\Pi_S$, tal que:

$$\Pi_S = g(S)$$

  - $\Pi_S$ é o que o segurador recebe (Fixo).
  - $S$ está relacionado o quanto é pago ao segurado (indenização),
  - O ganho da seguradora é dado por $(\Pi_S - S)$ (Variável aleatória).

# Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio do prêmio de risco.**

$$\Pi_S = E(S)$$

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado**

$$\Pi_S = E(S)(1+\theta)$$

- **Princípio da variância**

$$\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- **Princípio do Desvio padrão**

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta \quad \beta > 0$$

# Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio da utilidade Zero ou nula.**

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)] \qquad \mu(W - G) = E[\mu(W - S)]$$

- **Princípio do percentil**

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha \qquad P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = \alpha.$$

# Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio do prêmio de risco.**

$$\Pi_S = E(S)$$

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado**

$$\Pi_S = E(S)(1+\theta)$$

- **Princípio da variância**

$$\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- **Princípio do Desvio padrão**

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- **Princípio da utilidade Zero ou nula.**

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu(W - S)]$$

- **Princípio do percentil**

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha.$$

# EXEMPLO 4

O determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio $\Pi_S$ para um risco S é dado por

$$\Pi_S = v^{-1}(E[v(S)])$$

Em que $v$ é uma função tal que $v'(x) > 0$ e $v''(x) \geq 0$ para $x > 0$ .

Calcule $\Pi_S$ quando $v(x) = x^2$ e $v^{-1}(x) = \sqrt{x},$ dado que $S \sim Gamma(2,2)$.

## SOLUÇÃO:

$$\Pi_S = \sqrt{E(S^2)} = \sqrt{var(S) + E(S)^2}$$

$S \sim Gamma(\alpha, \beta)$. → $E(S) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $var(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$, então:

$$\Pi_S = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = 1{,}225$$

# EXEMPLO 5

Seja um **segurado** com uma função de utilidade linear: $\mu(x) = 0{,}00005x - 1$, em que $S \sim Exp(0{,}001)$.

Qual o prêmio $G$ aceito pelo segurado de modo a não diminuir a utilidade de seu patrimônio. Considere a riqueza inicial do segurado igual a $W = \text{R\$}1000{,}00$.

**SOLUÇÃO**

Seja $a = 0{,}00005, b = -1$ e $W = 10000$, assim:

$$\mu(\mathrm{W} - G) = E[\mu(W - S)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aS + b]$$

$$G = E(S)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0{,}001} = R\$\,1000{,}00$$

O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

## EXEMPLO 6

Seja uma seguradora cuja utilidade é modelada pela função de utilidade exponencial, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$. Determine qual o prêmio $\Pi_S$ utilizando o princípio do cálculo de prêmio.

Seja, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$ e $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$-\alpha e^{-\alpha W} = E[-\alpha e^{-\alpha}(W + \Pi_S - S)],$$

$$e^{-\alpha W} = E\left(e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} e^{+\alpha S}\right),$$

$$e^{-\alpha W} = e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} E(e^{\alpha S}),$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha \Pi_S}} = E(e^{\alpha S}),$$

- Logo

$$ln\, e^{\alpha \Pi_S} = ln\, E(e^{\alpha S}),$$

$$\alpha \Pi_S = lnE(e^{\alpha S}),$$

$$\Pi_S = \frac{\boldsymbol{ln\, M_S(\alpha)}}{\boldsymbol{\alpha}}$$