

# Matemática atuarial

## Seguros Aula 9

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

# SEGUROS DIFERIDOS

- Produtos atuariais.
  - Seguros de vida vitalício, seguro de vida temporário, seguro dotal puro e seguro dotal.
- Em alguns casos o segurado pode querer que a vigência se inicie alguns anos após a assinatura do contrato de seguro.
- O valor que a seguradora deverá gastar, em média, com o segurado cujo produto começará a vigorar daqui a “ $m$ ” anos.

# SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

- Pensemos, inicialmente, no seguro de vida vitalício que paga 1  $u.m.$  Ao final do momento de morte do segurado.
- Porém, esse seguro de vida começará a vigorar daqui a “ $m$ ” anos.

$$b = \begin{cases} 0, & t = 0, 1, 2, \dots, m \\ 1, & t = m, m + 1, m + 2, \dots \end{cases}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & t = m, m + 1, m + 2, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

➤ Caso em que  $T$  é discreto:

$$b = \begin{cases} 0, & t < m \\ 1, & t \geq m \end{cases} \quad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T \geq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_m|A_x = E(Z_T) = \sum_{j=m}^{\omega-x-m} v^{j+1} {}_j p_x q_{x+j}$$

# SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

➤ Fazendo  $j = m + t$ , tem-se:

$${}_m|A_x = \sum_{j=m}^{\omega-x-m} v^{j+1} {}_j p_x q_{x+j} = \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^{m+t+1} ({}_{m+t} p_x) q_{x+m+t}$$

Lembrando que  $({}_{m+t} p_x) = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$ , então

$${}_m|A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^{m+t+1} {}_m p_x {}_t p_{x+m} q_{x+m+t}$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^{t+1} {}_t p_{(x+m)} q_{(x+m)+t}$$

$${}_m|A_x = A_{x:\overline{m}|}^1 A_{x+m}$$

# SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

Valor presente diferido por  $m$  anos

Seguro de vida total puro para uma pessoa de  $x$  anos ( $A_{x:\overline{m}|^1}$ )

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

Seguro de vida **vitalício** para uma pessoa de idade  $x + m$

- É, na verdade, o seguro de vida vitalício trazido a valor presente atuarial a data de hoje.

$${}_m|A_x = {}_m E_x A_{x+m}$$

# SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

Outra forma de cálculo do mesmo seguro seria:

Valor presente diferido por  $m$  anos



Seguro de vida **vitalício** para uma pessoa de idade  $x$



$$m|A_x = A_x - A_{x:1:\overline{m}|}$$



Seguro temporário por  $m$  anos, para uma pessoa de idade  $x$ .

*Demonstração:*

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{m-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} + \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_x = A_{x^{1:\overline{m}|}} + {}_m|A_x$$

$${}_m|A_x = A_x - A_{x^{1:\overline{m}|}}$$



## EXEMPLO 1

Pensemos no caso de uma pessoa (mulher) de 25 anos que deseja fazer um seguro vitalício, com 3 anos de carência. Considere a taxa de juros de 4% ao ano, o benefício unitário e as seguintes probabilidade de morte e então calcule o prêmio puro:

$x$	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00037	0,99963	100000
26	0,00039	0,99961	99963
27	0,00040	0,99960	99924,01
28	0,00042	0,99958	99884,04
29	0,00044	0,99956	99842,09
30	0,00045	0,99955	99798,16
31	0,00046	0,99954	99753,25
32	0,00048	0,99952	99707,37
33	0,00049	0,99951	99659,51
34	0,00050	0,99950	99610,67
35	0,00052	0,99948	99560,87

$$A_{25} \approx 0,1079694$$

$${}_3|A_{25} = v^3 {}_3p_{25} A_{28}$$

## EXEMPLO 1

Pensemos no caso de uma pessoa (mulher) de 25 anos que deseja fazer um seguro vitalício, com 3 anos de carência. Considere a taxa de juros de 4% ao ano, o benefício unitário e as seguintes probabilidade de morte e então calcule o prêmio puro:

$x$	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00037	0,99963	100000
26	0,00039	0,99961	99963
27	0,00040	0,99960	99924,01
28	0,00042	0,99958	99884,04
29	0,00044	0,99956	99842,09
30	0,00045	0,99955	99798,16
31	0,00046	0,99954	99753,25
32	0,00048	0,99952	99707,37
33	0,00049	0,99951	99659,51
34	0,00050	0,99950	99610,67
35	0,00052	0,99948	99560,87

$$A_{25} = 0,1079694$$

$${}_3|A_{25} = A_{25} - A_{25^{1:\overline{3}|}}$$

$$A_{25^{1:\overline{3}|}} = \sum_{t=0}^2 v^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0,0010715$$

$${}_3|A_{25} \approx 0,1079694 - 0,0010715$$

$${}_3|A_{25} \approx 0,106978$$

$${}_3|A_{25} = v^3 {}_3p_{25} A_{28}$$

# SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

➤ Para o caso em que  $T$  é discreto:

$$b = \begin{cases} 0, & t < m \\ 1, & t \geq m \end{cases} \quad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T \geq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_m|A_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m|A_x = A_x - A_{x:\overline{m}|}$$

Para um seguro de uma pessoa de  $x$  anos, seja diferido por “ $m$ ” anos como será o valor presente atuarial caso o seguro também seja:

a) Temporário por “ $n$ ” anos.

b) Seguro dotal puro.

Dado que  $b = 1$  e  $T_x$  discreto.

Para um seguro de uma pessoa de  $x$  anos, seja diferido por “ $m$ ” anos como será o valor presente atuarial caso o seguro também seja:

a) Temporário por “ $n$ ” anos.

Dado que  $b = 1$  e  $T$  discreto.

Resp.:

O seguro temporário por  $n$  para uma pessoa de  $x$  anos (caso discreto)

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

➤ Temporário

$${}_m | A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=m}^{(m+n)-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

Fazendo  $t = m + l$ , então:

$$m|A_{x^1:\overline{n}} = \sum_{l=0}^{n-1} v^{m+l+1} (m+l)p_x q_{x+(m+l)} = v^m \sum_{l=0}^{n-1} v^{l+1} (m+l)p_x q_{x+(m+l)}$$

$$m|A_{x^1:\overline{n}} = v^m \sum_{l=0}^{n-1} v^{l+1} {}_m p_x {}_l p_{x+m} q_{x+m+l}$$

$$m|A_{x^1:\overline{n}} = v^m {}_m p_x \sum_{l=0}^{n-1} v^{l+1} {}_l p_{(x+m)} q_{(x+m)+l}$$

$$m|A_{x^1:\overline{n}} = v^m {}_m p_x A_{(x+m)^1:\overline{n}}$$

$${}_m|A_{x^1:\overline{n}} = A_{x^1:\overline{m+n}} - A_{x^1:\overline{m}}$$

Para um seguro de uma pessoa de  $x$  anos, seja diferido por “ $m$ ” anos como será o valor presente atuarial caso o seguro também seja:

b) Seguro dotal puro.

Dado que  $b = 1$  e  $T$  discreto.

Resp.:

O dotal puro por  $n$  para uma pessoa de  $x$  anos (caso discreto) .

$$A_{x:\overline{n}|^1} = v^n {}_n p_x$$

➤ Dotal Puro

$${}_m | A_{x:\overline{n}|^1} = v^m {}_m p_x A_{x+m:\overline{n}|^1} = v^m {}_m p_x (v^n {}_n p_{x+m})$$

$${}_m | A_{x:\overline{n}|^1} = v^{m+n} {}_m p_x {}_n p_{x+m} = v^{m+n} {}_{m+n} p_x$$

$$A_{x:\overline{n+m}|^1}$$

## SEGUROS Vida vitalícios DIFERIDOS

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T \geq m \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$${}_m|A_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m|A_x = A_x - A_{x^{1:\overline{m}|}}$$

## SEGUROS Vida temporários DIFERIDOS

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}|}} = v^m {}_m p_x A_{(x+m)^{1:\overline{n}|}}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}|}} = A_{x^{1:\overline{m+n}|}} - A_{x^{1:\overline{m}|}}$$



## EXEMPLO 2

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro com benefício unitário que tenha cobertura de 5 anos, com 3 anos de carência. Considere a taxa de juros de 4% ao ano e a tábua AT-49 e então calcule o prêmio puro único.

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

Logo queremos calcular  ${}_3|A_{25^1:\bar{5}|}$

$$Z_T = \begin{cases} \left( \frac{1}{1 + 0,04} \right)^{T+1}, & 3 \leq T < 8 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Idade	${}_0q_x = {}_1q_x$	${}_1p_x = 1 - {}_1q_x$	${}_1l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$${}_m|A_{x^1:\bar{n}|} = \sum_{t=m}^{(m+n)-1} v^{t+1} {}_tp_x q_{x+t}$$

$${}_3|A_{25^1:\bar{5}|} = \sum_{t=3}^{(3+5)-1} \left( \frac{1}{1,04} \right)^{t+1} {}_tp_{25} q_{25+t}$$

$${}_m|A_{x^1:\bar{n}|} = v^m {}_mp_x A_{x^1+m:\bar{n}|}$$

$${}_3|A_{25^1:\bar{5}|} = \left( \frac{1}{1,04} \right)^3 {}_3p_{25} \sum_{t=0}^{5-1} \left( \frac{1}{1,04} \right)^{t+1} {}_tp_{28} q_{28+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:1:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}} = A_{x:1:\overline{n}} + A_{x:\overline{n}|1}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq m$$

$${}_m A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m A_x = A_x - A_{x:1:\overline{m}}|$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = v^m {}_m p_x A_{x:1+m:\overline{n}}|$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = A_{x:1:\overline{m+n}} - A_{x:1:\overline{m}}|$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1, \dots \\ 0, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|1} = Z_T {}_n p_x$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0, T < n \end{cases} \quad \bar{A}_{x:\overline{n}|1} = Z_T {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x:1:\overline{n}} = \int_0^n Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, & T < n \\ e^{-\delta n}, & T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}} = \bar{A}_{x:1:\overline{n}} + \bar{A}_{x:\overline{n}|1}$$

## SEGUROS VIDA DIFERIDOS – pago no momento da morte

- O valor presente atuarial vitalício diferido é :

$$b = \begin{cases} 0, & t < m \\ 1, & t \geq m \end{cases} \quad Z_T = e^{-\delta T}, T \geq m$$

$${}_m|\bar{A}_x = \int_m^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt$$

- O valor presente atuarial temporário diferido é

$$b = \begin{cases} 0, & t < m \\ 1, & m \leq t \leq m+n \end{cases} \quad Z_T = e^{-\delta T}, m \leq T \leq m+n$$

$${}_m|\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt$$

### EXEMPLO 3

Determine o valor do prêmio puro único a ser cobrado por um segurado que deseja contratar um seguro que pague 1 *u.m.* no momento da morte, após 10 anos de carência. Considere que o tempo de vida adicional desse segurado tenha a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = 0,04e^{-0,04t}, t > 0$$

Considere também  $\delta = 0,06$ .

### EXEMPLO 3

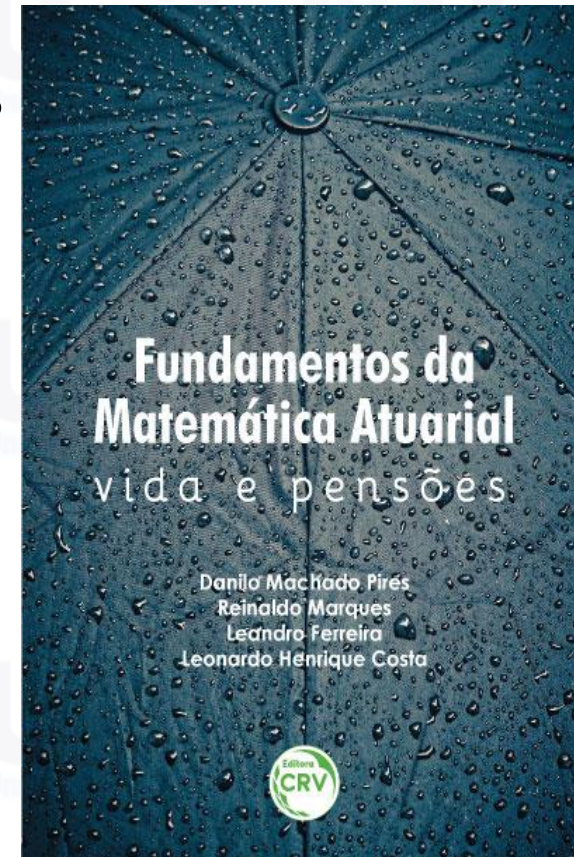
$${}_{10|\bar{A}}_x = \int_{10}^{\infty} e^{-0,06t} 0,04 e^{-0,04T} dt$$

$${}_{10|\bar{A}}_x = \int_{10}^{\infty} e^{-0,06t} 0,04 e^{-0,04t} dt = \int_{10}^{\infty} 0,04 e^{-0,1t} dt$$

$${}_{10|\bar{A}}_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{0,04}{0,1} e^{-0,1t} \right) + \frac{0,04}{0,1} e^{-0,1(10)}$$

$${}_{10|\bar{A}}_x = 0,147$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.





# Matemática atuarial

## Seguros Aula 10

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)



# EXEMPLO 1:

Pensemos no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro temporário por 5 anos, com 3 anos de carência. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte e calcule o prêmio puro:

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

$${}_3|A_{25^{1:\overline{5}|}} = \sum_{j=3}^{(5+3)-1} v^{j+1} {}_j p_{25} q_{25+j}$$

$${}_3|A_{25^{1:\overline{5}|}} = v^3 {}_3 p_{25} A_{28^{1:\overline{5}|}}$$

$${}_3|A_{25^{1:\overline{5}|}} = A_{25^{1:\overline{5+3}|}} - A_{25^{1:\overline{3}|}}$$

```

premio<- function( i, idade, n,b) {
  pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
  qxx <- c(qx[(idade+1):(idade+n)])
  v    <- (1/(i+1)) ^(1:n)
  Ax   <- b* sum(v*pxx*qxx)
  return (Ax)  }

```

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

```

dotal<-function(i,idade,n,b){
  v    <- 1/(i+1)^n
  npx  <- prod( px[(idade+1):(idade+n)])
  Dt   <- v*npx*b
  return(Dt)  }

```

# EXEMPLO 1:

Pensemos no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro temporário por 5 anos, com 3 anos de carência. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte e calcule o prêmio puro:

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

$${}_3|A_{25^{1:\overline{5}}}| = v^3 {}_3p_{25}A_{28^{1:\overline{5}}}|$$

$\text{dotal}(0.04,25,3,1) \times \text{premio}(0.04,28,5,1)$

$${}_3|A_{25^{1:\overline{5}}}| = A_{25^{1:\overline{5+3}}}| - A_{25^{1:\overline{3}}}|$$

$\text{premio}(0.04,25,8,1) - \text{premio}(0.04,25,3,1)$

# EXEMPLO 2:

Pensemos no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro vitalício, com 3 anos de carência. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte e calcule o prêmio puro:

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

????

????

$${}_3|A_{25} = v^3 {}_3p_{25}A_{28}$$

$${}_3|A_{25} = A_{25} - A_{25:1:\overline{3}|}$$

## EXEMPLO 2:

Pensemos no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro vitalício, com 3 anos de carência. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte e calcule o prêmio puro:

$${}_3|A_{25} = v^3 {}_3p_{25}A_{28}$$

$$\text{dotal}(0.04, 25, 3, 1) \times \text{premio}(0.04, 28, \max(\text{Idade}) - 28, 1)$$

$${}_3|A_{25} = A_{25} - A_{25:1:\overline{3}|}$$

$$\text{premio}(0.04, 25, \max(\text{Idade}) - 25, 1) - \text{premio}(0.04, 25, 3, 1)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:1:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}} = A_{x:1:\overline{n}} + A_{x:\overline{n}}^1$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq m$$

$${}_m A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m A_x = A_x - A_{x:1:\overline{m}}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = v^m {}_m p_x A_{x:1+m:\overline{n}}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = A_{x:1+m:\overline{n}} - A_{x:1:\overline{m}}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1, \dots \\ 0, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}}^1 = Z_T {}_n p_x$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0, T < n \end{cases} \quad \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 = Z_T {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x:1:\overline{n}} = \int_0^n Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, T \leq n \\ e^{-\delta n}, T > n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}} = \bar{A}_{x:1:\overline{n}} + \bar{A}_{x:\overline{n}}^1$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq m$$

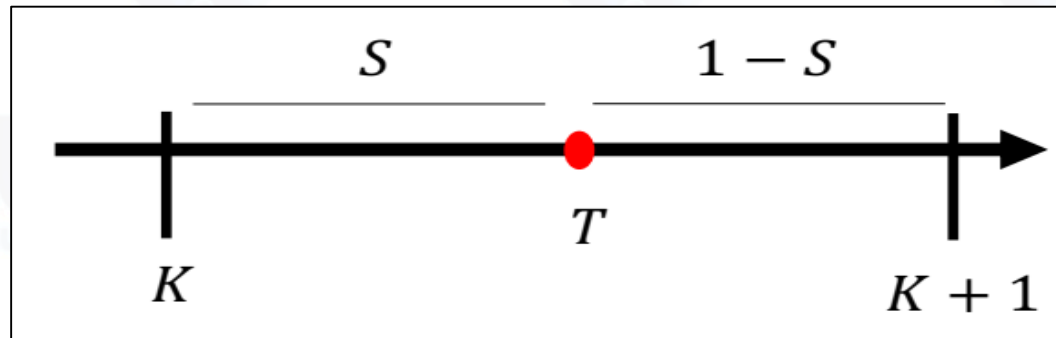
$${}_m \bar{A}_x = \int_m^{\infty} Z_T f_{T_x}(t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, m \leq T \leq m+n$$

$${}_m \bar{A}_{x:1:\overline{n}} = \int_m^{m+n} Z_T f_{T_x}(t) dt$$

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

Suposição



$$T = (K + 1) - (1 - S)$$

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

- Assumindo que  $T$  é independente de  $S$  e que  $S \sim U_c(0,1)$ .
- Considere o seguro de vida inteira pago no momento de morte:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = E(e^{-\delta T})$$

$$\bar{A}_x = E\{e^{-\delta[(K+1)-(1-S)]}\} = E[e^{-\delta(K+1)} e^{\delta(1-S)}]$$



# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = E[v^{(K+1)}]E[e^{\delta(1-S)}]$$

$$\bar{A}_x = A_x \int_0^1 e^{\delta(1-s)} ds$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{e^{\delta} - 1}{\delta}$$

Substituindo  $e^{\delta} = 1 + i$ ,

$$\bar{A}_x = A_x \frac{(1 + i) - 1}{\delta}$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

$i$ : Taxa de juros discreta

$\delta$ : Taxa de juros constante

## EXEMPLO 4

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de **vida inteiro** que paga 1 *u.m.* no momento da morte. Calcule o valor aproximado desse prêmio considerando que o prêmio pago para esse mesmo seguro com benefício pago ao final do ano de morte é de  $A_{25} \approx 0,11242$ .

Considere que o tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano.

# Seguro de vida Inteiro

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left( \frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0,11242$$

$$\bar{A}_{25} = A_{25} \frac{i}{\delta} = 0,11242 \left[ \frac{0,05}{\ln(1,05)} \right] \approx 0,1152076$$

## EXEMPLO 5

Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 *u.m.* ao final do ano de morte. Admita  $\bar{A}_{30} \approx 0,28317$  e que  $i = 5\%$ .

## EXEMPLO 5

Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 u.m. ao final do ano de morte. Admita  $\bar{A}_{30} \approx 0,28317$  e que  $i = 5\%$ .

$$A_{30} = \frac{\delta}{i} \bar{A}_{30} = \frac{\ln(1,05)}{0,05} 0,28317 \approx 0,2763182$$

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

➤ Vitalício

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

➤ Temporário

$$\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}|} = A_{x^{1:\bar{n}}|} \frac{i}{\delta}$$

➤ Misto

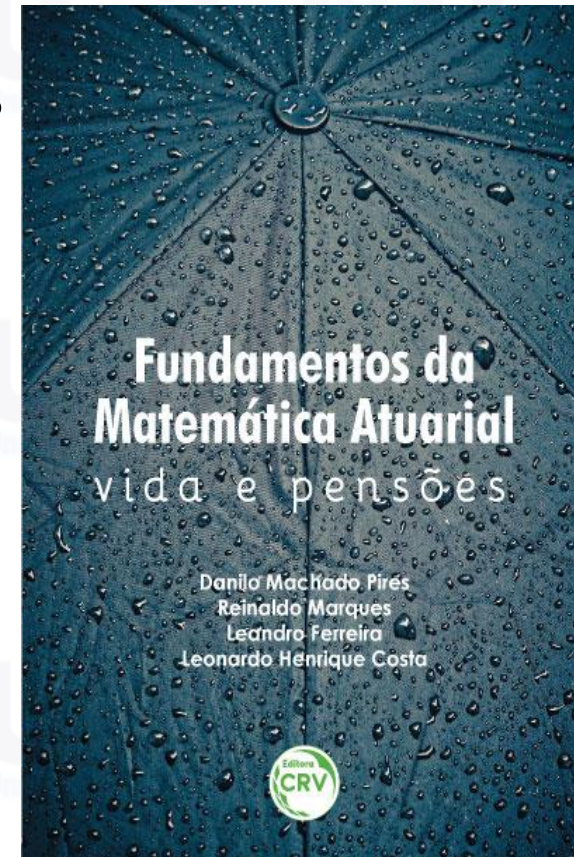
$$\bar{A}_{x:\bar{n}} = A_{x^{1:\bar{n}}|} \frac{i}{\delta} + A_{x:\bar{n}}^1$$

➤ Fracionado

$$A_x^{(m)} = \frac{i A_x}{i^{(m)}}$$

$$i^{(m)} = m \left[ 1 - (1 + i)^{-\frac{1}{m}} \right] v^{-\frac{1}{m}}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



# Seguros com benefício crescente

## Aula 11



# Seguros com benefício crescente

- Contratos de seguro com alta procura são aqueles em que o benefício pago pela seguradora varia conforme o tempo em relação a data do contrato.
- Algumas opções nesse sentido são aquelas em que ocorre um acréscimo ou decréscimo no benefício (anual) de acordo com uma progressão aritmética.
- A importância segurada aumenta segundo uma progressão aritmética.

# Produtos Atuariais com benefício crescente

Seguro de vida

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} t|A_x$$

$$(IA)_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} t|A_{x^{1:\overline{n-t}|}}$$

## EXEMPLO 1

Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

## EXEMPLO 1

Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

**Solução:**

$$(IA)_{110} = \sum_{t=0}^5 {}_t|A_{110} = A_{110} + {}_1|A_{110} + {}_2|A_{110} + {}_3|A_{110} + {}_4|A_{110} + {}_5|A_{110} \approx 1,4482.$$

$$(IA)_{110} \approx 1,4482.$$

## EXEMPLO 2

Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano,  $i = 4\%$  ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,003788.$$

**Solução:**

## EXEMPLO 2

Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano,  $i = 4\%$  ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,003788.$$

**Solução:**

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} = \sum_{t=0}^4 {}_t|A_{x^{1:\overline{5-t}|}} = A_{25^{1:\overline{5}|}} + {}_1|A_{25^{1:\overline{4}|}} + {}_2|A_{25^{1:\overline{3}|}} + {}_3|A_{25^{1:\overline{2}|}} + {}_4|A_{25^{1:\overline{1}|}}$$

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,01178.$$

# Produtos Atuariais com benefício crescente

A notação para os seguros de vida vitalício e temporário, ambos com crescimento limitado ao ano  $k$  são, respectivamente,  $(I_{\overline{k}|}A)_x$  e  $(I_{\overline{k}|}A)_{x^{1:\overline{n}|}}$ , sendo:

$$(I_{\overline{k}|}A)_x = (IA)_{x^{1:\overline{k}|}} + k \times {}_k|A_x$$

$$(I_{\overline{k}|}A)_{x^{1:\overline{n}|}} = (IA)_{x^{1:\overline{k}|}} + k \times {}_k|A_{x^{1:\overline{n-k}|}}$$

# Produtos Atuariais com benefício crescente

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} s | \bar{A}_x ds.$$

$$(I\bar{A})_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x \qquad (I\bar{A})_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{i}{\delta} (IA)_{x^{1:\overline{n}|}}$$



- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

