Teoria do Risco
Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

Princípios de cálculos de prêmios

- A defesa, da utilização de um princípio em detrimentos aos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis..

Propriedades

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$\Pi_X \geq E(X)$$

  - O prêmio não deve ser menor o valor esperado a ser pago.
  - No caso de uma única apólice esse princípio seria inviável de se manter...

- *Aditividade.*
  - Se X_1 e X_2 são independentes, o prêmio para o risco combinado, $\Pi_{X_1+X_2}$, é igual a $\Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$.

$$\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

Propriedades

- *Escala invariante.*

Se $\mathrm{Z} = \mathrm{aX}$, em que $\mathrm{a} > 0$, então $\Pi_Z = a\Pi_X$.

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

- *Consistência.*

Se $Y = X + c$, em que $c > 0$, então $\Pi_Y = \Pi_X + c$

- Perda máxima.

Seja $\mathrm{r_X}$ o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição X, então $\Pi_\mathrm{X} \leq \mathrm{r_X}$.

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_X = E(X)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_X = E(X)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

  $\Pi_X \geq E(X)$

- *Aditividade.*

  $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

- *Escala invariante.*

  Se $Z = aX$, em que $a > 0$, então $E(Z) = aE(X)$

- *Consistência.*

  Se $Y = X + c$, em que $c > 0$, então $E(Y) = E(X) + c$

- Perda máxima

  $\Pi_X \leq r_X$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_X = E(X)(1+\theta)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$E(X)(1+\theta) \geq E(X).$$

- *Aditividade.*

$$E(X_1 + X_2)(1+\theta) = E(X_1)(1+\theta) + E(X_2)(1+\theta)$$

- *Escala invariante.*

$$\Pi_Z = (1+\theta)E(Z) = (1+\theta)E(aX),$$
$$\Pi_z = a(1+\theta)E(X),$$
$$\Pi_z = a\Pi_X.$$

- Consistência
- Perda máxima

Princípio do prêmio carregado $\Pi_X = E(X)(1+\theta)$

- Consistência.

Dado $Y = X + c$, em que $c > 0$, então

$$\Pi_Y = (1+\theta)E(X+c) = (1+\theta)[E(X)+c],$$
$$\Pi_Y > \Pi_X + c.$$

Como $\Pi_Y \neq \Pi_X + c$, o princípio do prêmio carregado não é consistente.

- Perda máxima

Uma forma de mostrar que o princípio do prêmio puro não satisfaz essa propriedade é através de um exemplo hipotético, em que dado um valor b correspondente a r_X (maior valor pago por X) e supondo que $P(X=b)=1$, com $b > 0$ e $\theta > 0$, tem-se que

$$\Pi_X = (1+\theta)E(X) = (1+\theta)b > b.$$

Como $\Pi_X > r_X$, essa propriedade não é satisfeita.

Princípio da variância $\Pi_X = E(X) + var(X)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(X) + var(X)\alpha \geq E(X)$$

- *Aditividade*

$$E(X_1 + X_2) + var(X_1 + X_2)\,\alpha = E(X_1) + E(X_2) + \alpha\, var(X_1) + \alpha\, var(X_2),$$

$$E(X_1 + X_2) + var(X_1 + X_2)\alpha = E(X_1) + \alpha\, var(X_1) + E(X_2) + \alpha\, var(X_2),$$

$$\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}.$$

- *Escala invariante*
- *Consistência*
- *Perda máxima*

Princípio da variância $\Pi_X = E(X) + var(X)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aX$, em que $a > 0$, então

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha\, var(Z) = E(aX) + \alpha\, var(aX),$$
$$\Pi_Z = aE(X) + a^2\alpha\, var(X),$$
$$\Pi_z \neq a\Pi_X.$$

- *Consistência*

Dado $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + \mathrm{c}$, em que $\mathrm{c} > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \alpha\, var(Y),$$
$$\Pi_Y = E(X + c) + \alpha\, var(X + c),$$
$$\Pi_Y = E(X) + c + \alpha\, var(X),$$
$$\Pi_Y = \Pi_X + c.$$

Princípio da variância $\Pi_X = E(X) + var(X)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Perda máxima*

Dado $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 8) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 12) = 0{,}5$ então:

$$E(X) = 10,$$
$$var(X) = 4,$$
$$\Pi_X = 10 + 4\alpha.$$

em que excede 12 quando $\alpha > 0{,}5$.

Princípio do desvio padrão $\Pi_X = E(X) + \sigma_X \beta; \quad \beta > 0$

- *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(X) + \beta\sigma_X \geq E(X).$$

- *Aditividade*

$$E(X_1 + X_2) + \sqrt{var(X_1 + X_2)}\beta = E(X_1) + E(X_2) + \beta\sqrt{var(X_1) + var(X_2)}$$

$$E(X_1) + E(X_2) + \beta\sqrt{var(X_1) + var(X_2)} \neq \left[E(X_1) + \sigma_{X_1}\beta\right] + \left[E(X_2) + \sigma_{X_2}\beta\right]$$

- *Escala invariante*
- *Consistência*
- *Perda máxima*

Princípio do desvio padrão $\Pi_X = E(X) + \sigma_X\beta; \quad \beta > 0$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aX$, em que $a > 0$, então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta\sigma_Z = E(aX) + \beta\sqrt{var(aX)},$$
$$\Pi_Z = aE(X) + \beta\sqrt{a^2 var(X)},$$
$$\Pi_Z = aE(X) + a\beta\sigma_X,$$
$$\Pi_z = a\Pi_X.$$

- *Consistência*

Dado $Y = X + c$, em que $c > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \beta\sqrt{var(Y)},$$
$$\Pi_Y = E(X + c) + \beta\sqrt{var(X + c)},$$
$$\Pi_Y = E(X) + c + \beta\sqrt{var(X)},$$
$$\Pi_Y = \Pi_X + c.$$

Princípio do desvio padrão $\Pi_X = E(X) + \sigma_X\beta; \quad \beta > 0$

- *Perda máxima*

Dado $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 8) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 12) = 0{,}5$ então:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 8 \times 0{,}5 + 12 \times 0{,}5 = 10$$
$$var(X) = (8^2 \times 0{,}5 + 12^2 \times 0{,}5) - 10^2 = 104 - 100 = 4$$

$$\sigma = 2$$
$$\Pi_X = 10 + 2\beta.$$

Como na prática o valor de β varia entre 1 e 2, Π_X excede 12 quando $\beta > 1$.

A propriedade de perda máxima não é satisfeita.

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Carregamento de segurança não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$E[\mu(W + \Pi_X - X)] \le \mu(E(W + \Pi_X - X))$$

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{W}) = E[\mu(W + \Pi_X - X)] \le -\boldsymbol{\alpha e}^{-\boldsymbol{\alpha}[\mathbf{W}+\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{X}}-\mathbf{E}(\boldsymbol{X})]}$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \le -\alpha e^{-\alpha[W+\Pi_X-E(X)]}$$

$$\ln\left(e^{-\alpha W}\right) \ge \ln\left(e^{-\alpha[W+\Pi_X-E(X)]}\right)$$

$$\ln\left(e^{-\alpha W}\right) \ge \ln\left(e^{-\alpha[W+\Pi_X-E(X)]}\right)$$

$$-\alpha W \ge -\alpha[W + \Pi_X - E(X)]$$

$$-W \ge -W - \Pi_X + E(X)$$

$$\Pi_X \ge E(X)$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Aditividade*

Em geral o principio da utilidade zero não é aditivo, mas o principio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{X_1+X_2} = \frac{\ln\left[E\left(e^{\alpha(X_1+X_2)}\right)\right]}{\alpha} = \frac{\ln\left\{E\left(e^{\alpha X_1}\right)E\left(e^{\alpha X_2}\right)\right\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{X_1+X_2} = \frac{\ln\left(E\left(e^{\alpha X_1}\right)\right)}{\alpha} + \frac{\ln\left(E\left(e^{\alpha X_2}\right)\right)}{\alpha} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escalava invariante. Suponha que e $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $\mathrm{Z} = \mathrm{aX}$, em que $\mathrm{a} > 0$.

Logo

$$\Pi_X = \frac{lnM_X(\alpha)}{\alpha} = \frac{\ln\left(e^{\frac{\delta^2\alpha^2}{2}+\mu\alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 \alpha \neq a\Pi_X$$

➢ *Consistência*

Seja $Y = X + c$, então Π_Y é dada por:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_Y - Y)]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + (\Pi_X + c) - (X + c))\ ]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + \Pi_X - X)]$$

Considerando $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$\mu(W + \Pi - E(Y)\ ) = \mu(W + \Pi_X - E(X)\ )$$

$$e^{-\alpha(W+\Pi_Y-E(Y)\ )} = e^{-\alpha(W+\Pi_X-E(X)\ )}$$

$$-\alpha(W + \Pi_Y - E(Y)\ ) = -\alpha(W + \Pi_X - E(X)\ )$$

$$\Pi_Y - E(Y)\ = \Pi_X - E(X)$$

$$\Pi_Y\ = \Pi_X - E(X) + E(X) + c,$$

$$\boldsymbol{\Pi_Y\ = \Pi_X + c.}$$

➢ *Perda máxima.*

Considerando que r_X é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W + \Pi_X - X)] \geq E[\mu(W + \Pi_X - r_X)]$$

Como $\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_X - r_X)$, então:

$$\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_X - r_X)$$

Como $\mu'(X) > 0$, tem-se que:

$$W \geq W + \Pi_X - r_X$$
$$\Pi_X - r_X \leq 0$$
$$\Pi_X \leq r_X$$