Teoria do Risco
Aula1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Introdução

- Desde as antigas civilizações o ser humano sempre se preocupou com as incertezas do futuro ...

- O homem teve a necessidade de criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e para o seu patrimônio.

Introdução

- Os comerciantes mesopotâmicos, fenícios:

Criaram um sistema de reposição de cargas de navios, no caso de eventuais roubos ou naufrágio em suas viagens pelo Mar Mediterrâneo e Egeu

- Os hebreus:

Estabeleceram um acordo onde cada membro do grupo de pastores que perdia um animal tinha a garantia de receber um outro animal,..

Introdução

- Os primeiros contratos de seguro marítimo com emissão de apólice criados pelos italianos e espanhóis,

- Por volta de 1347, na cidade de Gênova as atividades de seguros começam a se popularizar dando início aos primeiros estudos de matemática atuarial e análise de riscos,

  - **"A apolizza" quer dizer "A promessa" .**

Introdução

- O risco é a probabilidade de acontecimento de um determinado evento futuro, capaz de alterar o equilíbrio econômico de um patrimônio.

- A teoria do risco é o processo que reside em estabelecer um modelo de tarifação eficiente frente aos sinistros que chegam ao segurador.

Introdução

- Busca garantir equilíbrio econômico em face das variações aleatórias do risco segurado e dar solvibilidade ao segurador ...

- Dessa forma a teoria do risco, tem como objetivo principal estabelecer para o "bem" sob análise um prêmio justo para um dado futuro mensurável,...

Conceitos Estatísticos

- A teoria do risco é inerente à teoria estatística, portanto a compreensão de determinados termos e conceitos estatísticos assim como algumas propriedades, se faz necessária ou até mesmo fundamental.

Variável Aleatória

- A variável aleatória pode ser entendida como uma função $X(.)$ que associa a cada evento do espaço de probabilidade um número real.

Exemplo:

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a p (sucesso) e q (fracasso). Caracterize a variável aleatória número de coroas.

Resp. $\mathrm{R} = \{0,1,2,3,4\}$, $R \subset \mathbb{R}$.

R é a imagem de $X(.)$.

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	$X = N° \; de \; coroas$	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$(q, q, q, q) = q^4$	q^4
Coroa	Cara	Cara	Cara		$(p, q, q, q) = p^1q^3$	
Cara	**Coroa**	Cara	Cara	1	$(q, p, q, q) = p^1q^3$	$4p^1q^3$
Cara	Cara	**Coroa**	Cara		$(q, q, p, q) = p^1q^3$	
Cara	Cara	Cara	**Coroa**		$(q, q, q, p) = p^1q^3$	
Coroa	**Coroa**	Cara	Cara		$(p, p, q, q) = p^2q^2$	
Coroa	Cara	**Coroa**	Cara		$(p, q, p, q) = p^2q^2$	
Coroa	Cara	Cara	**Coroa**	2	$(p, q, q, p) = p^2q^2$	$6p^2q^2$
Cara	**Coroa**	Cara	**Coroa**		$(q, p, q, p) = p^2q^2$	
Cara	Cara	**Coroa**	**Coroa**		$(q, q, p, p) = p^2q^2$	
Cara	**Coroa**	**Coroa**	Cara		$(q, p, p, q) = p^2q^2$	
Cara	**Coroa**	**Coroa**	**Coroa**		$(q, p, p, p) = p^3q$	
Coroa	Cara	**Coroa**	**Coroa**	3	$(p, q, p, p) = p^3q$	$4p^3q^1$
Coroa	**Coroa**	Cara	**Coroa**		$(p, p, q, p) = p^3q$	
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	Cara		$(p, p, p, q) = p^3q$	
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	**Coroa**	4	$(p, p, p, p) = p^4q^0$	p^4

Exemplo:

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a p (sucesso) e q (fracasso). Caracterize a variável aleatória número de coroas.

X ($n°$ de $coroas$)	$P(X)$
0	q^4
1	$4p^1q^3$
2	$6p^2q^2$
3	$4p^3q^1$
4	p^4

Variáveis aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

- $P(X = x)$ Função de probabilidade (fp)
- $P(X = x_i) \geq 0$ para todo i.
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Variáveis aleatórias Contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes aos $\mathbb{R}$, assim como para variáveis continuas em geral....

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Função de distribuição acumulada

Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

Em geral ela é representada por $F(x)$, ou $\Phi(x)$.

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_k} f_X(z)dz \\ \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada

- O conhecimento de tal função permite obter qualquer informação sobre a variável.

- A composição das funções de probabilidade faz parte da modelagem teórica das realizações das variáveis aleatórias...

Função Sobrevivência

Ao complementar da função acumulada se da o nome de função de sobrevivência, ou seja, a função de probabilidades acumulada acima de determinado valor:

$$\bar{F}_X(x) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x)$$

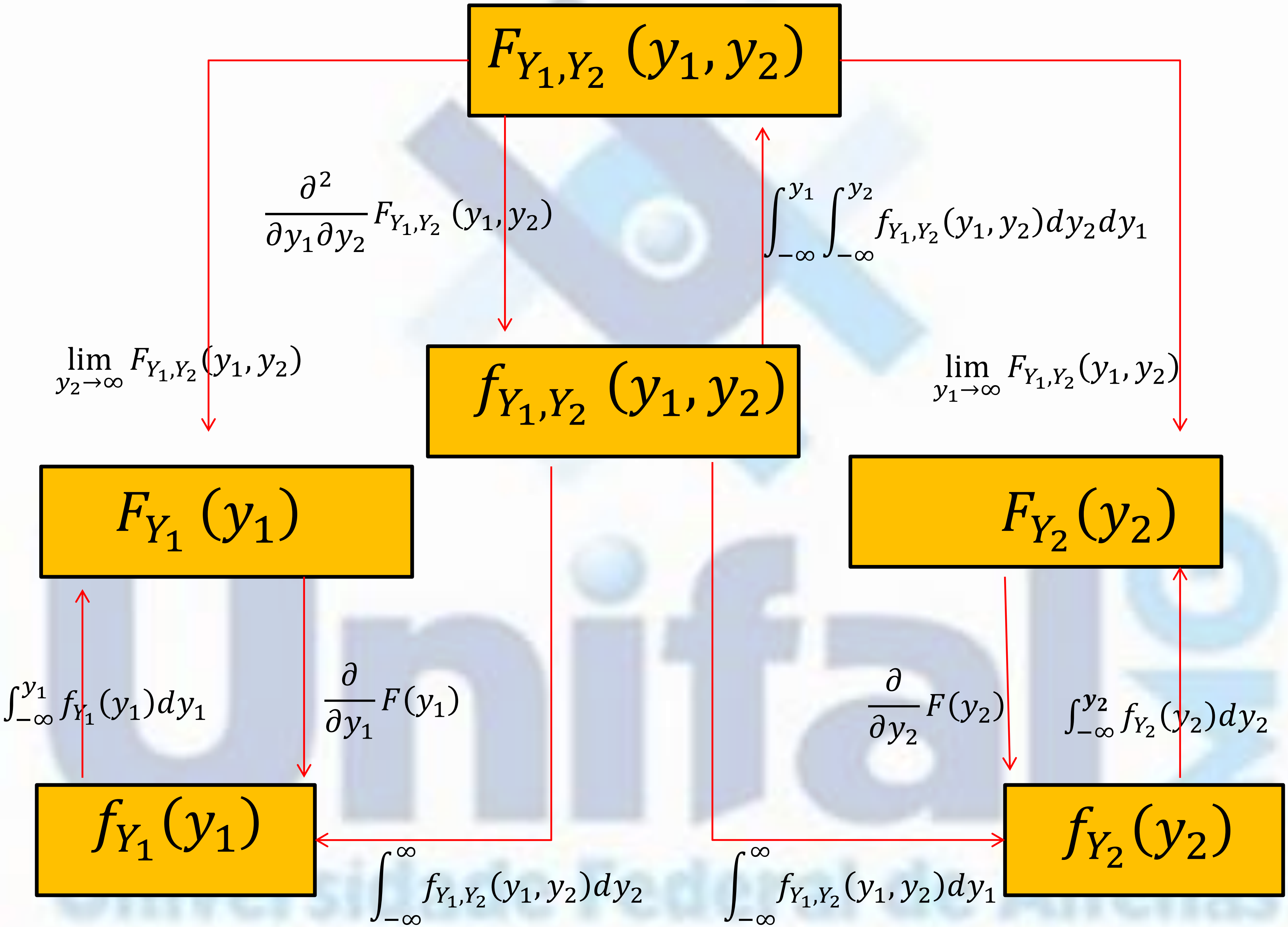
$$\bar{F}_X(x) = S_X(x)$$

Sempre que duas ou mais variáveis aleatórias são tidas em conta, três tipos de distribuição de probabilidade são definidas.

A distribuição conjunta, que descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

A distribuição marginal, descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

A distribuição condicional , que descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.


$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2dy_1$
$\lim_{y_2\to\infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\lim_{y_1\to\infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$F_{Y_1}(y_1)$
$F_{Y_2}(y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_1} f_{Y_1}(y_1)dy_1$
$\frac{\partial}{\partial y_1} F(y_1)$
$\frac{\partial}{\partial y_2} F(y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_2}(y_2)dy_2$
$f_{Y_1}(y_1)$
$f_{Y_2}(y_2)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1$

Probabilidade condicional

- Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidades. Definimos a distribuição condicional de X_1 dado X_2, por:

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)},$$

onde $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função de distribuição conjunta de X_1 e X_2.

Probabilidade condicional

- Podemos obter a função distribuição condicional de X_1, dado $X_2 = x_2$;

$$F_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2) = \frac{P([X_1 \leq x_1] \cap [X_2 = x_2])}{P(X_2 = x_2)}$$

- Como consequência, temos:

$$F_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} P(X_2 = x_2) F_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2).$$

Probabilidade condicional

- O condicionamento em variáveis contínuas é dado por:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

- Em que $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função densidade conjunta de X_1e X_2 e $f_{X_2}(x_2)$ é função densidade marginal de X_2.

Probabilidade condicional

- Dado duas variáveis aleatórias X_1 e X_2, segue que:

$$F_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2) = \int_{-\infty}^{y_1} f_{Y_1|Y_2}(\boldsymbol{x}|y_2)d\boldsymbol{x}$$

- Como consequência, as seguintes fórmulas são também válidas:

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_2}(x)F_{Y_1|Y_2}(y_1|x)dx$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_2}(y_2)F_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2)dy_2$$

Independência de variáveis aleatórias

A independência é um requisito importante que permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Independência entre variáveis aleatórias.

Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

- Para as discretas, pode-se escrever uma definição equivalente com o uso de funções de probabilidade:

X, Y independentes $\Leftrightarrow p_{X,Y}(x, y) \equiv p_X(x)p_Y(y), \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Para as continuas, a condição de independência usa as seguintes densidades:

X, Y independentes $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) \equiv f_X(x)f_Y(y), \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, Determine se as variáveis dadas nos dois modelos conjuntos, são independentes ou não.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y=y)$	2/8	3/8	3/8	

.

Determine se as variáveis dadas nos dois modelos conjuntos, são independentes ou não.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

$$f_Y(y) = 0{,}04e^{-0{,}04y} \qquad f_X(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_X(x)$$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	**3/8**	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y=y)$	2/8	3/8	3/8	

$$\boldsymbol{P_{X,Y}(2,2) \neq P_X(2)P_Y(2)}$$