

# Matemática atuarial

## AULA 25- Prêmios Carregados

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

Leonardo Henrique Costa

[leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

<https://atuaria.github.io/portahalley>

# Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).
- Para incluirmos as despesas da seguradora no prêmio puro deve-se inicialmente dividir as despesas no que diz respeito à incidência.
- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
  - Comissão de corretagem,
  - Despesas com médicos examinadores,
  - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

# Prêmios Carregados

- Em contrapartida, algumas despesas incidem enquanto o segurado estiver ligado com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
  - salários de funcionários,
  - despesas com informática,
  - correspondência,
  - aluguel,
  - impostos, etc.
- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurabilidade para diminuir o risco de insolvência da seguradora a partir da Teoria do Risco de Ruína.

# Prêmios Carregados

➤ Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário.

Além do gasto com indenizações, também é incluso as despesas administrativas com o seguro(durante o período de vigência do contrato).

b) Prêmio “Zillmerado” (Zilmer,1863).

Este caso, o segurado irá pagar um prêmio durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e, em seguida, pagará um prêmio relativo ao risco.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

# Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$\Pi^{\gamma}$  : O prêmio único de inventário

$\Pi$  : Corresponde ao prêmio puro único de um dado produto atuarial

$V_{\gamma}$ : O valor atuarial correspondente ao carregamento de gestão

# Prêmio de Inventário.

- Como exemplo considere um seguro de vida vitalício feito por  $x$  em que a seguradora tem um gasto anual a gestão dessa apólice igual a  $\gamma$ , então:

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|}, T \geq 0$$

$$E(Z_{T_x}) = \textcolor{red}{\Pi^\gamma} = \textcolor{red}{A_x} + \textcolor{red}{\gamma} \ddot{a}_x$$

$\gamma$ : Carregamento de inventário

# Prêmio de Inventário.

➤ Assim, para

$$L = Y - Z_{T_x}$$

$$E(P\ddot{a}_{\overline{T+1}|}) = E(v^{T+1} + \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|})$$

$$P = \frac{A_x + \gamma \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = P\gamma$$

$$P\gamma = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \gamma$$

## ➤ Exemplo 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de vida **inteiro** que paga \$ 1,00 ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua  $AT - 49$  e uma taxa de juros  $i = 0,03$ ? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de \$ 0,005** relativos a gastos administrativos.



## ➤ Exemplo 10

Solução :

$$\Pi^{\gamma} = A_{40} + \gamma \ddot{a}_{40}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{M_{40}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40}}{D_{40}} \right)$$

$$p^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40}} = \frac{\frac{M_{40}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40}}{D_{40}} \right)}{\frac{N_{40}}{D_{40}}} = \frac{M_{40}}{N_{40}} + 0,005$$

## ➤ Exemplo 11

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de temporário por 30 anos que paga  $R\$ 1,00$  ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua  $AT - 49$  e uma taxa de juros  $i = 0,03$ ? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de \$ 0,005** relativos a gastos administrativos.

## ➤ Exemplo 11

$$\Pi^{\gamma} = A_{40:1:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \right)$$

$$p^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40:\overline{30}|}} = \frac{\frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0,005 \left( \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \right)}{\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}} = \frac{M_{40} - M_{70}}{N_{40} - N_{70}} + 0,005$$

## ➤ Exemplo 12

Uma pessoa de 20 anos decide contratar uma **aposentadoria vitalícia que pagará \$1,00** ao ano até que este segurado faleça. Ele se aposentará caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado enquanto estiver ativo.

Considerando a tábua AT-49 a taxa de juros de 3% ao ano e considere **que o segurado deve pagar uma quantia anual de \$ 0,005** relativos a gastos administrativos ( gastos que ocorrem desde da assinatura do contrato)., qual será o valor do prêmio a ser pago pelo segurado?

## ➤ Exemplo 12

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1}|} & \text{se } 0 < t < 40 \\ P\ddot{a}_{\overline{40}|} & \text{se } t \geq 40. \end{cases} \quad Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T}|} & \text{se } T > 40 \\ \gamma \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 < T \leq 40. \end{cases}$$

$$\Pi^\gamma = {}_{40|}\ddot{a}_{20} + \gamma \ddot{a}_{20}$$

$$\Pi^\gamma = \frac{N_{60}}{D_{20}} + 0,005 \left( \frac{N_{20}}{D_{20}} \right)$$

$${}_P\gamma = \frac{\Pi^\gamma}{{}_{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}} + 0,005 \left( \frac{N_{20}}{D_{20}} \right)}{\frac{N_{20} - N_{60}}{D_{20}}}$$

# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$V_{\gamma} = \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

# Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Este prêmio tem esse nome graças as ideias de August Zillmer (1831-1893)
  - Inicialmente descreveu um processo para que a seguradora mantenha uma reserva de capital inicial superior ao pagamento dos primeiros prêmios.
- ...o prêmio resultante ao acréscimo de um carregamento de aquisição...
- O prêmio único de Zilmerado é representado por:

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

# Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

- No caso de um seguro de vida vitalício ( com benefício unitário pago ao final do ano de morte) feito por  $x$ , o valor presente relativo as despesas é

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \alpha, \quad T \geq 0$$

- $\alpha$  Carregamento de aquisição

$$E(Z_{T_x}) = \textcolor{red}{\Pi^\alpha} = \textcolor{red}{A_x} + \alpha$$

- O compromisso do segurado é

$$Y = P^\alpha Y_1 + P Y_2$$

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & 0 \leq T < s \\ \ddot{a}_{\overline{s}|}, & T \geq s \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} s|\ddot{a}_{\overline{T_x+1-s}|}; & T \geq s \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

$P^\alpha$  é o prêmio considerando as despesas do período  $s$

$P$  é o prêmio anual nivelado ( $P_x$ )



# Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

➤ Assim, para

$$E(Y) = E(Z_{Tx})$$

$$E(P^\alpha Y_1 + P Y_2) = E(v^{T+1} + \alpha)$$

$$P^\alpha \ddot{a}_{x:\overline{s}|} + P_{x:s|} \ddot{a}_x = A_x + \alpha$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_{x:s|} \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^\alpha = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x (\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

## Prêmio de Zillmerado (Zilmer, 1863)

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x = \frac{A_x - P_x \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

Como  $A_x - P_x \ddot{a}_x = 0$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

### ➤ Exemplo 13

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida **inteiro** que paga 1 *u.m.* ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua *AT* – 49 e uma taxa de juros  $i = 0,03$ ? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia de \$ 0,005** relativos a gastos administrativos, durante 10 anos.

### ➤ Exemplo 13

Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + P_{22}$$

$$P^{\alpha} = \frac{0,005}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + \frac{M_{22}}{N_{22}}$$

# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$V_\gamma = \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$\Pi^\gamma = \Pi + V_\gamma$$

$$P^\gamma = \frac{\Pi^\gamma}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$k$  pagamentos sendo

$$\Pi^\alpha = \Pi + V_\alpha$$

$$V_\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} \ddot{a}_{x:\bar{k}|} \rightarrow \ddot{a}_{x:\bar{k}|} \text{ depende do n}^\circ \text{ de pagamentos de } P$$

$$P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} + P$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

# Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é aquele que considera todas as cargas ao prêmio puro, no nosso caso o carga de aquisição e a carga de gestão,

$$\Pi^c = \Pi + V_\gamma + V_\alpha$$

- $\Pi$ : Prêmio puro periódico de uma dada modalidade

## ➤ Exemplo 14

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida **misto** por um período de 10 anos que paga 1 *u.m.* ao final do ano de morte caso o segurado morra no período de 10 anos, ou receba o mesmo valor caso, sobreviva a esse período. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tábua  $AT - 49$  e uma taxa de juros  $i = 0,03$ ? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de \$ 0,005** relativos a gastos administrativos, mais gastos adicionais de encargos de  $R\$ 0,002$  durante 2 anos.

➤ Exemplo 14

$$P^c = P_{22:\overline{10}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0,005 + \frac{0,002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}}$$

$$P^c = \frac{\frac{M_{22} - M_{32} + D_{32}}{D_{22}}}{\frac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + 0,005 + \frac{0,002}{\frac{N_{22} - N_{24}}{D_{22}}}$$



# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$$V_{\gamma} = \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

$$V_{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} \ddot{a}_{x:\overline{k}|} \rightarrow \ddot{a}_{x:\overline{k}|} \text{ depende do n}^{\circ} \text{ de pagamentos de } P$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

$k$  pagamentos sendo

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^c = \Pi + V_{\gamma} + V_{\alpha}$$