

Teoria do Risco

Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

DANILO MACHADO PIRES
LEANDRO FERREIRA
LEONARDO HENRIQUE COSTA
REINALDO ANTONIO GOMES MARQUES

TEORIA DO RISCO ATUARIAL
FUNDAMENTOS E CONCEITOS



<https://atuaria.github.io/portahalley/>

Modelos de risco Coletivo

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

X_i, B_i, I_i

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

X_i, N

Modelos de risco Coletivo -A distribuição de S_{col} , os sinistros coletivos

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N
 - Um método iterativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado poder computacional,
- Método da função geradora de momentos.
 - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

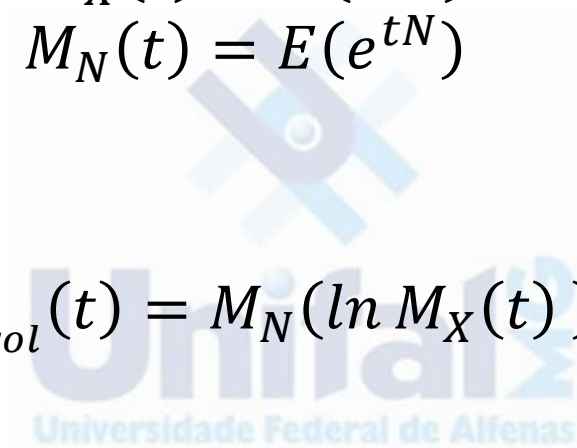
Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$



Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = E[e^{t(X_1+X_2+\dots+X_N)}] = E[e^{tX_1}e^{tX_2} \dots e^{tX_N}] = \prod_{i=1}^N E(e^{tX_i})$$

Como X_{i_s} são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^N E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^N E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E[M_X(t)^N]$$

$$M_{S_{col}}(t) = E[e^{\ln M_X(t)^N}] = E[e^{N \ln M_X(t)}]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

EXEMPLO 1

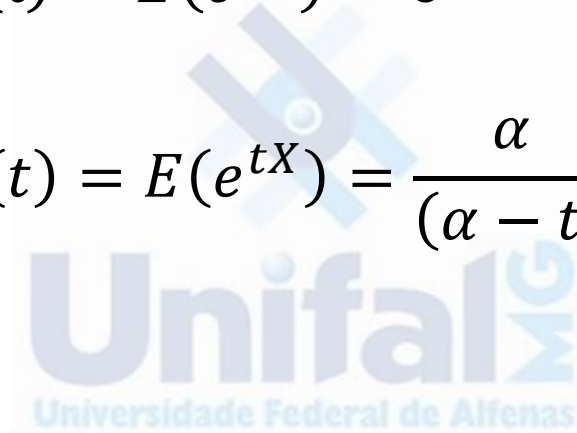
Calcule $E(S_{col})$ por meio de $M_{S_{col}}(t)$, dado que $X \sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$.

Se $N \sim Po(\lambda)$, então

$$M_N(t) = E(e^{tN}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Se $X \sim Exp(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$



$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{(\alpha-t)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda \left[e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)} - 1 \right]} = e^{\lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha-t} - 1 \right)} = e^{(\alpha-t)^{-1} \lambda \alpha - \lambda}$$

$$M'_{scol}(t) = \frac{dM_{scol}(t)}{dt} = \frac{\lambda \alpha}{(\alpha - t)^2} e^{\frac{\lambda \alpha}{\alpha-t} - \lambda}$$

$$M'_{scol}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda \alpha}{(\alpha - 0)^2} e^{\frac{\lambda \alpha}{\alpha-0} - \lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

EXEMPLO 2

Seja N com distribuição $B(n, q)$. Determine uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X .

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$



$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = [qe^{\ln M_X(t)} + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$



EXEMPLO 3

Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro (*sem dedução da franquia*) obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos do total agregado de sinistros S_{col} , dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $B(n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col} .

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$



Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n \qquad M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^n$$



Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^n = [q\alpha^r(\alpha - t)^{-r} + 1 - q]^n$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} q\alpha^r(-r)(\alpha - t)^{-r-1}(-1)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} \frac{rq\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - 0} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} \frac{rq\alpha^r}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$E(S_{col}) = n(q + 1 - q)^{n-1} \frac{rq}{\alpha} = \frac{nqr}{\alpha}$$

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

S_{ind}, X_i, B_i, I_i

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

S_{col}, X_i, N

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t)) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

Equação de Wald

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E(S_{col}^2) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t)) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$\frac{d^2 M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(\ln M_X(t)) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(\ln M_X(t)) \left[\frac{M''_X(t) M_X(t) - M'_X(t) M'_X(t)}{M_X(t)^2} \right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(\ln M_X(0)) \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(\ln M_X(0)) \left[\frac{M''_X(0) M_X(0) - M'_X(0) M'_X(0)}{M_X(0)^2} \right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0) E(X) E(X) + M'_N(0) [E(X^2) - E(X)^2]$$

$$E(S_{col}^2) = E(N^2) E(X)^2 + E(N) \text{var}(X)$$

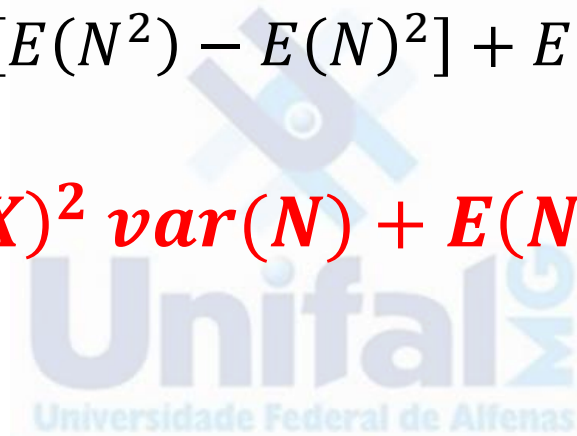
Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E(S_{col}^2) - E(S_{col})^2$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[\text{var}(X)] - E(N)^2E(X)^2$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 [E(N^2) - E(N)^2] + E(N)\text{var}(X)$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 \text{var}(N) + E(N)\text{var}(X)$$



Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

