Teoria do Risco
Aula 20

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO NO CASO POISSON COMPOSTO

- A probabilidade de ruína em período finito $\psi(u)$ pode ser representada por:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}|T_t < \infty)}, u \geq 0$$

Onde R é o coeficiente de ajustamento.

- **Definição** Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$M_{S_t - ct}(r) = 1$$

Em que $M_{S_t - ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right)$, assim

$$M_{S_t - ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right) = 1$$

$$e^{-rct} E(e^{rS_t}) = 1$$

$$e^{-rct} M_{S_t}(r) = 1$$

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

Exemplo 1

Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$ e $N_t \sim Po(\lambda t)$.
Encontre o valor não trivial de R considerando o prêmio $c = \frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}$.

Solução:

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

$$X \sim Exp(\alpha) \quad N_t \sim Po(\lambda t) \quad c = \frac{ln\, M_S(\beta)}{\beta}$$

$$M_N(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t[M_X(r)-1]} = e^{r\frac{ln\, M_S(\beta)}{\beta}t}$$

$$\lambda(M_X(r) - 1) = r\frac{ln\, M_S(\beta)}{\beta}$$

$$\frac{\beta\lambda}{r}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = ln\, e^{\lambda(M_X(\beta)-1)}$$

$$\frac{\beta\lambda}{r}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \lambda(M_X(\beta) - 1)$$

$$\frac{\beta}{r}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - 1\right)$$

$$X \sim Exp(\alpha) \quad N_t \sim Po(\lambda t) \quad c = \frac{ln\, M_S(\beta)}{\beta}$$

...

$$\frac{\beta}{r}\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right)$$

$$\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = \left(\frac{r}{\alpha - \beta}\right)$$

$$r\alpha - r\beta = r\alpha - r^2$$

$$r^2 - r\beta = 0$$

- $r = 0$
- $\boldsymbol{R = \beta}$

Exemplo 2

Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$ e $N_t \sim Po(\lambda t)$. Encontre o valor de R considere o prêmio baseado no valor esperado, $c = E(S) + var(S)\theta$.

Solução:

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

$$X \sim Exp(\alpha) \qquad N_t \sim Po(\lambda t) \qquad c = E(S) + \theta\ var(S)$$

$$e^{\lambda t[M_X(r)-1]} = e^{r\left[\lambda E(X)+\theta\ \lambda E\left(X^2\right)\right]t}$$

$$\lambda t[M_X(r) - 1] = r[\lambda E(X) + \theta\ \lambda E(X^2)]t$$

$$M_X(r) - 1 = r[E(X) + \theta\ E(X^2)]$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 = r\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha^2}\right)$$

$$X \sim Exp(\alpha) \qquad N_t \sim Po(\lambda t) \qquad c = E(S) + \theta\, var(S)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 = r\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha^2}\right)$$

$$\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = r\left(\frac{\alpha + 2\theta}{\alpha^2}\right)$$

$$\alpha^2 = (\alpha + 2\theta)(\alpha - r)$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha\theta - \alpha r - 2\theta r$$

...

$$0 = 2\alpha\theta - r(\alpha + 2\theta)$$

$$R = \frac{2\alpha\theta}{\alpha + 2\theta}$$

Um caso especial amplamente abordado na literatura é o caso em que $c = (1+\theta)E(S)$ e $N_t \sim Po(\lambda t)$, assim :

$$M_N(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t(M_X(r)-1)} = e^{r(1+\theta)E(S)t}$$

$$\lambda t(M_X(r) - 1) = r(1+\theta)\lambda E(X)t$$

$$M_X(r) - 1 = r(1+\theta)E(X)$$

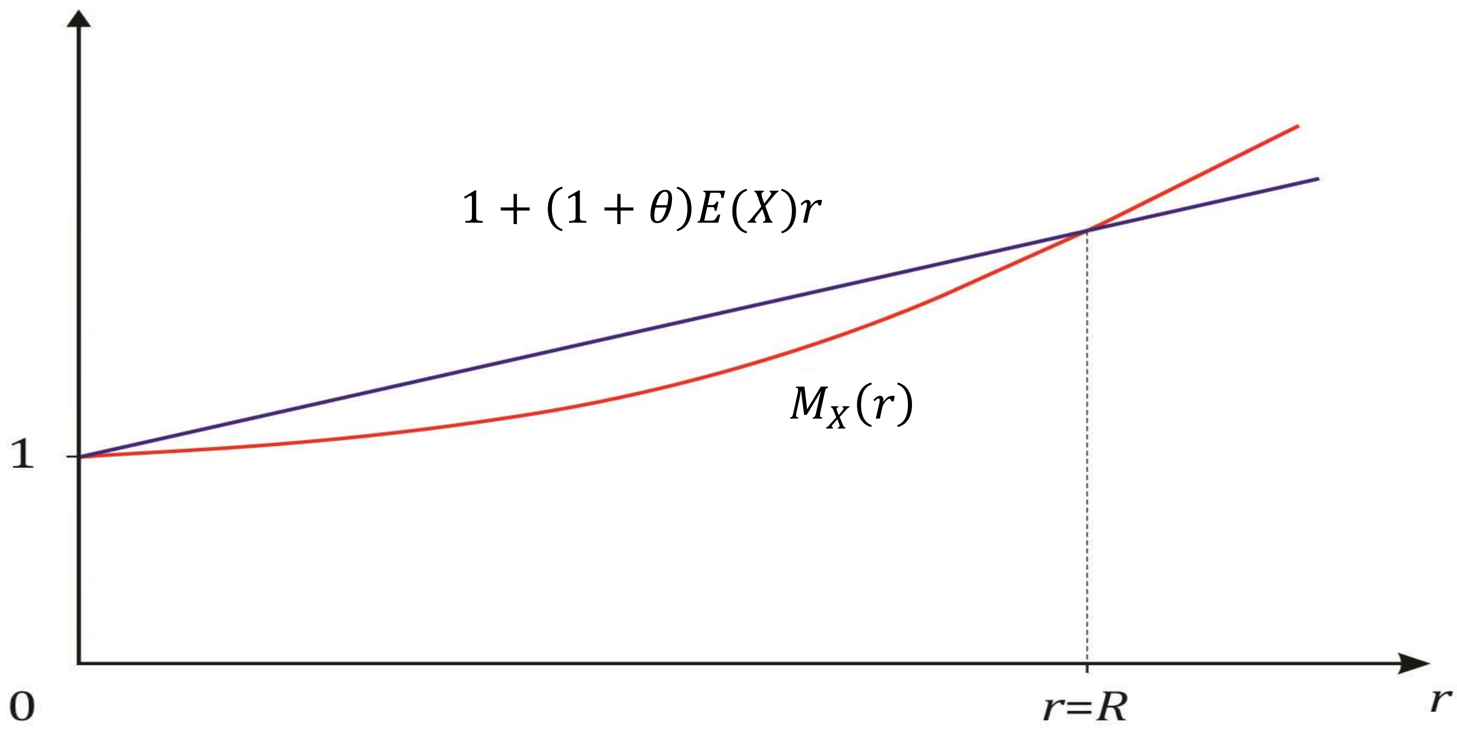
$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - CASO POISSON COMPOSTO

- Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r).$$

Em que $M_X(r) = E(e^{rX})$, função geradora de momentos de X.



EXEMPLO 3

Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$. Encontre o valor não trivial de r.

Solução:

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

...

EXEMPLO 3

Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$. Encontre o valor não trivial de r, tal que :

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

SOLUÇÃO:

$$1 + \frac{(1+\theta)}{\alpha} r = \frac{\alpha}{\alpha - r}$$

$$\alpha^2 + \alpha r + \alpha\theta r - \alpha r - r^2 - \theta r^2 - \alpha^2 = 0$$

$$(1+\theta)r^2 - \theta\alpha r = 0$$

$$R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - CASO POISSON COMPOSTO, $c = (1+\theta)E(S)$

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$

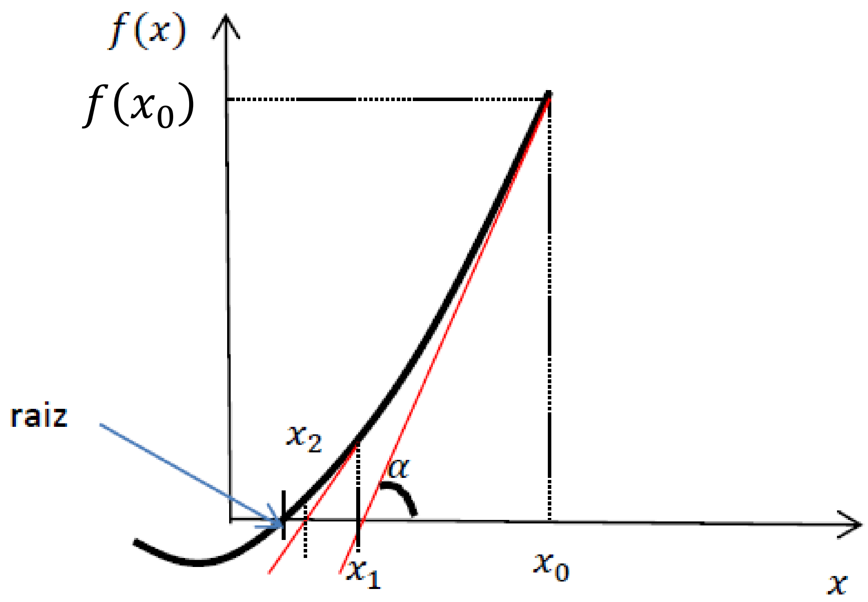
- Dependendo da distribuição de X, não é possível encontrar analiticamente o coeficiente de ajustamento R. Geralmente, **métodos numéricos são utilizados e um valor inicial para R é requerido.**

MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON

- Tem o objetivo estimas as raízes de uma função.
  - Escolhe-se uma aproximação inicial.
  - Calcula-se a equação da reta tangente da função neste ponto e a interseção dela com o eixo das abcissas, afim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

  - Repete-se o processo até a convergência para o valor de x.



$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Logo a reta tangente a $f(x)$ que passa no ponto x_2 é dada por:

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \rightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

De modo geral

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

EXEMPLO 4

Encontre a raiz quadrada de 5 usando o método de NEWTON-RAPHSON

SOLUÇAO

Considere $x = \sqrt{5}$, então $x^2 = 5$, logo $x^2 - 5 = 0$ logo iremos usar o método para achar a raiz da função $f(x) = x^2 - 5$.

Dessa forma, $f(x) = x^2 - 5$, então $f'(x) = 2x$, então:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

EXEMPLO 4

Considere $x = \sqrt{5}$, então $x^2 = 5$, logo $x^2 - 5 = 0$ logo iremos usar o método para achar a raiz da função $f(x) = x^2 - 5$. Dessa forma

$f(x) = x^2 - 5$, então $f'(x) = 2x$, então

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

É sensato supor que a raiz estará entre 2 e 3 pois $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, assim $x_0 = 2,5$

$$\boldsymbol{x_1 = 2,5 - \frac{f(2,5)}{f'(2,5)} = 2,25}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 2,25 - \frac{f(2,25)}{f'(2,25)} = 2,2361}$$

$$\boldsymbol{x_3 = 2,2361 - \frac{f(2,2361)}{f'(2,2361)} = 2,236068}$$

$$\boldsymbol{x_4 = 2,236068 - \frac{f(2,236068\ )}{f'(2,236068\ )} = 2,236068}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - CASO POISSON COMPOSTO, $c = (1 + \theta)E(S)$

- A velocidade da convergência (caso ocorra) é fortemente relacionada a escolha do valor inicial para x_0.

- No caso da utilização do método para determinar o valor do coeficiente de determinação R o valor indicado como melhor escolha é dado por:

$$\frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$$

- Uma vez que esse resultado corresponde ao valor máximo de R, conforme a desigualdade.

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

Exemplo 5

Suponha que o sinistro agregado S tem distribuição de Poisson composta, com parâmetro $\lambda = 4$. Considere que o prêmio recebido é igual a 7 $(c = 7)$ e que a distribuição de X é dada por:

$$P(X = 1) = 0{,}6 \;\; ; \;\; P(X = 2) = 0{,}4.$$

Determine o coeficiente de ajustamento.

Solução

Como o coeficiente de ajustamento é dado como a menor solução positiva da equação $1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$, definimos

$$H(r) = 1 + (1+\theta)E(X)r - M_X(r)$$

Sendo que o coeficiente de ajustamento $R > 0$ satisfaz $H(R) = 0.$ Para resolver tal equação, pode-se utilizar o método iterativo de Newton-Raphson .

SOLUÇÃO

Como o coeficiente de ajustamento é dado como a menor solução positiva da equação $1 + (1+\theta)\mu_X r = M_X(r)$, definimos

$$H(r) = 1 + (1+\theta)E(X)r - M_X(r)$$

Sendo que o coeficiente de ajustamento $R > 0$ satisfaz $H(R) = 0$. Para resolver tal equação, pode-se utilizar a fórmula de Newton-Raphson (Método iterativo de Newton-Raphson):

$$R_{j+1} = R_j - \frac{H(R_j)}{H'(R_j)}.$$

Considerando o valor inicial $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

Solução

Considerando o valor inicial $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

$$E(X) = 1(0{,}6) + 2(0{,}4) = 1{,}4$$

$$E(X^2) = 1(0{,}6) + 4(0{,}4) = 2{,}2$$

$$c = (1+\theta)E(S) = (1+\theta)E(N)E(X) = (1+\theta)\lambda E(X)$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1 = \frac{7}{4(1{,}4)} - 1 = 0{,}25$$

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \sum_x e^{rX} p(X = x) = 0{,}6e^r + 0{,}4e^{2r}.$$

SOLUÇÃO

$$H(r) = 1 + (1+\theta)E(X)r - M_X(r)$$

$$H(r) = 1 + 1{,}75r - 0{,}6e^{r} - 0{,}4e^{2r}$$

$$H'(r) = 1{,}75 - 0{,}6e^{r} - 0{,}8e^{2r}$$

$$R_{j+1} = R_j - \frac{1 + 1{,}75R_j - 0{,}6e^{R_j} - 0{,}4e^{2R_j}}{1{,}75 - 0{,}6e^{R_j} - 0{,}8e^{2R_j}}$$

$$R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)} = 0{,}3182$$

$$R_1 = 0{,}3182 - \frac{1 + 1{,}75(0{,}3182) - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}4e^{2(0{,}3182)}}{1{,}75 - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}8e^{2(0{,}3182)}}$$

$$R_1 = 0{,}3182 - \frac{1 + 1{,}75(0{,}3182) - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}4e^{2(0{,}3182)}}{1{,}75 - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}8e^{2(0{,}3182)}}$$

j	R_j	$H(R_j)$	$H'(R_j)$	R_{j+1}
0	0,3182	−0,0238	−0,5865	0,2776
1	0,2776	−0,0031	−0,4358	0,2705
2	0,2705	−0,0001	−0,4106	0,2703
3	0,2703	0,0000	−0,4098	0,2703

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Desigualdade de Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

$$\psi(u)_{max} = e^{-Ru}$$

Exemplo 6

Em um processo de reserva Poisson composto em tempo contínuo, os sinistros individuais são representados por $X \sim Exp(3)$.

Determine a máxima probabilidade de ruína com base no limite superior da desigualdade de Lundberg, sabendo que $\mathrm{U}(0) = u = 4$ e o carregamento de segurança relacionado ao cálculo do prêmio é $\theta = 0{,}2$.

Solução:

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad M_X(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r} = \frac{3}{3 - r}$$

$$1 + (1 + \theta)E(X)R = M_X(r)$$

$$R = \frac{\theta\alpha}{1 + \theta} = \frac{(0,2)3}{1 + 0,2} = 0,5$$

O limite superior da desigualdade de Lundberg são encontrados da seguinte maneira:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

$$\psi(4)_{max} = e^{-0,5 \times 4} = 0,1353353.$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Uma vez definido que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

então $\psi(u)_{max} = e^{-Ru} = \alpha^*$, é possível determinar o valor de θ com base em α^*, logo

$$\theta \approx \frac{u\left[M_X\left(-\ln\left(\frac{\alpha^*}{u}\right)\right) - 1\right]}{-E(X)\ln(\alpha^*)} - 1$$

em que $U(0) = u$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - CASO POISSON COMPOSTO, $c = (1+\theta)E(S)$

- Um de interesse especial é a quando o processo ruína no horizonte finito é Poisson composto em que $X \sim Exp(\alpha)$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T_t)}|T_t < \infty)} = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-Ru}$$

Como $R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta}$, então

$$\psi(u) = \frac{\alpha - \frac{\theta\alpha}{1+\theta}}{\alpha} e^{-\frac{\theta\alpha}{1+\theta}u} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\left[\frac{\theta u}{E(X)(1+\theta)}\right]}$$

Exemplo 7

Para os dados do exemplo 4, temos $X \sim Exp(3)$, $u = 4$, $\theta = 0{,}2$ e $R = 0{,}5$.

Então:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

$$\psi(4) \leq e^{-0{,}5\times 4} = 0{,}1353353.$$

$$\psi(u) = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-Ru}$$

$$\psi(4) = \frac{3 - 0{,}5}{3} e^{-(0{,}5)4} \approx 0{,}1128$$

Exemplo 8

Considere um processo de reserva em tempo contínuo, onde os sinistros individuais X seguem uma distribuição exponencial com $\alpha = 3$ e $N_t \sim Po(\lambda t)$. Então determine a probabilidade máxima de ruína com base no limite superior da desigualdade de Lundberg, para:

a) Uma reserva inicial igual a 4 e $c = \frac{ln(M_S(0,2))}{0,2}$.

b) Uma reserva inicial igual a 4 e $c = E(S) + var(S)0,2$.

Solução

$$X \sim Exp(3) \qquad\qquad N_t \sim Po(\lambda t).$$

a) Uma reserva inicial igual a 4 e $c = \frac{ln\left(M_S(0,2)\right)}{0,2}$.

Como já visto para essa situação $R = \beta = 0,2$ então

$$\psi(u)_{max} = e^{-Ru}$$

$$\psi(4)_{max} = e^{-0,2\times 4} = 0,4493.$$

Solução

$$X \sim Exp(3) \qquad\qquad N_t \sim Po(\lambda t).$$

b) Uma reserva inicial igual a 4 e $c = E(S) + var(S)0{,}2$.

Como já visto $R = \frac{2\alpha\theta}{\alpha+2\theta}$, então

$$R = \frac{2 \times 3 \times 0{,}2}{3 + 2 \times 0{,}2} = 0{,}3529412$$

$$\psi(u)_{max} = e^{-Ru}$$

$$\psi(4)_{max} = e^{-0{,}3529412 \times 4} = 0{,}2437128$$