Teoria do Risco
Aula 8

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Modelos de risco Individual

Função geradora de momentos para S_{ind}

- Encontrar a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes por convolução, pode ser um processo bastante penoso.

- Uma alternativa bastante interessante está relacionada com a função geradora de momentos.

Modelos de risco Individual

Função geradora de momentos para S_{ind}

- Uma função geradora de momentos é o valor esperado de certa transformação da variável aleatória e sob algumas condições determina completamente a distribuição de probabilidade.

$$g(X) = e^{tX}$$

$$E[g(X)] = E(e^{tX}) = M_X(t)$$

- Teorema: Unicidade

Se X e Y são duas variáveis aleatórias cujas funções geradoras de momentos, $M_X(t)$ e $M_Y(t)$, existem e são iguais para todo t em um intervalo $-h < t < h$, para algum $h > 0$, então, as distribuições de probabilidades de X e de Y são iguais.

Modelos de risco Individual

Função geradora de momentos para S_{ind}

Seja $S_{\text{ind}} = X_1 + X_2 + .. + X_n$ com $M_{X_i}(t_i)$, assim $M_{S_{ind}}(t)$ é dada por:

$$M_{S_{ind}}(t) = E(e^{tS_{ind}}) = E\left[e^{t(X_1 + X_2 + .. + X_n)}\right]$$
$$M_{S_{ind}}(t) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n})$$
$$M_{S_{ind}}(t) = M_{X_i}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

➢ Exemplo

Considere três variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, X_3. Para $i = 1,2,3$, X_i tem distribuição exponencial e $E(X_i) = \frac{1}{i}$. Encontre a função densidade de probabilidade de $S = X_1 + X_2 + X_3$ pelo método da função geradora de momentos,

➢ Obs.:

A distribuição exponencial tem parâmetro $\alpha > 0$, com f.d.p dada por $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ e $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e $var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$ e $M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}$

$$M_{X_1}(t) = \frac{1}{1-t}$$
$$M_{X_2}(t) = \frac{2}{2-t}$$
$$M_{X_3}(t) = \frac{3}{3-t}$$

- Logo

$$M_{S_{ind}}(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)\left(\frac{2}{2-t}\right)\left(\frac{3}{3-t}\right) = \frac{6}{(1-t)(2-t)(3-t)}$$

- Coincidindo com a função geradora de momentos encontrada para:

$$f_S(s) = 3e^{-3s}(e^s - 1)^2$$

Sendo $S = X_1 + X_2 + X_3$

Calculo de $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$

- Exemplo

Seja a distribuição do valor total das indenizações na carteira em 1 ano com função geradora de momentos conforme abaixo:

$$M_{S_{ind}}(t) = (1-2t)^{-9}$$

Calcule $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$.

➢ Exemplo

Seja a distribuição do valor total das indenizações na carteira em 1 ano com função geradora de momentos conforme abaixo:

$$M_{S_{ind}}(t) = (1 - 2t)^{-9}$$

$$\left.\frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(S_{ind})$$

$$\frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt} = -9(1 - 2t)^{-10}(-2) = 18(1 - 2t)^{-10}$$

$$\left.\frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{R\$18{,}00}$$

$$var(S_{ind}) = E\left(S_{ind}^2\right) - (E[S_{ind}])^2$$

$$var(S_{ind}) = \left.\frac{d^2\, M_{S_{ind}}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} - (18)^2 = \left. -180(1 - 2t)^{-11}(-2)\right|_{t=0} - (18)^2$$

$$var(S_{ind}) = 360 - 324 = \boldsymbol{R\$^2 36{,}00}$$

Calculo de $\boldsymbol{E(S_{ind})}$ e $var(S_{ind})$

Considerando $\mathrm{X_i = I_i B_i}$ com a variável aleatória $\mathrm{I_i}$ independente de $\mathrm{B_i}$. Pode-se obter $E(S_{ind})$ como:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

ou

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i)\,E(B_i) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) q_i$$

Calculo de $\boldsymbol{E(S_{ind})}$ e $\boldsymbol{var(S_{ind})}$

A variância de S_{ind} , é obtida por:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

Ou

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 var(I_i)$$

Demonstração:

Lembrando que dado uma variável aleatória X condicionada a Y,

$$var(X) = E[var(X|Y)] - var[E(X|Y)].$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E[var(X_i|I_i)] + var[E(X_i|I_i)] = \sum_{i=1}^{n} E[var(X_i|I_i)] + \sum_{i=1}^{n} var[E(X_i|I_i)]$$

$$var(X_i|I_i) = \begin{cases} \sum_x x^2 P(x|I=0) - \left[\sum_x xP(x|I=0)\right]^2 = 0 \\ \sum_x x^2 P(x|I=1) - \left[\sum_x xP(x|I=1)\right]^2 = var(X_i|I=1) \neq 0 \end{cases}$$

Vale ressaltar que:

$\sum_x xP(x|I=0) = (\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0})1 + x_2 0 + x_3 0 \ldots = 0$

Consequentemente

$\sum_x x^2 P(x|I=0) = (\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0})^2 \times 1 + x_2^2 \times 0 + x_3^2 \times 0 \ldots = 0,$

Demonstração:

$var(X_i\|I_i)$	$P[var(X_i\|I_i)]$
0	$P(I_i = 0) = 1 - q_i$
$var(X_i\|I = 1)$	$P(I_i = 1) = q_i$

- Dessa forma tem-se que:

$$E[var(X_i|I_i)] = var(X_i|I_i = 0)P(I_i = 0) + var(X_i|I_i = 1)P(I_i = 1)$$

$$E[var(X_i|I_i)] = 0(1 - q_i) + var(X_i|I_i = 1)(q_i) = \boldsymbol{var(X_i|I_i = 1)(q_i)}$$

- Porém é sabido que quando $I_i = 1$, $X_i =$ B, logo:

$$E[var(X_i|I_i)] = var(B_i)q_i$$

Demonstração:

Lembrando que dado uma variável aleatória X condicionada a Y,

$$var(X) = E[var(X|Y)] + var[E(X|Y)].$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E[var(X_i|I_i)] + \sum_{i=1}^{n} var[E(X_i|I_i)]$$

...

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{var(B_i)q_i} + \sum_{i=1}^{n} var[E(X_i|I_i)]$$

Demonstração:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{var(B_i)q_i} + \sum_{i=1}^{n} var[E(X_i|I_i)]$$

$$E(X_i|I_i) = \begin{cases} \sum_x xP(x|I=0) = 0 \\ \sum_x xP(x|I=1) = E[X_i|I_i = 1] \neq 0 \end{cases}$$

Vale ressaltar que:

$\sum_x xP(x|I=0) = (\boldsymbol{x_1 = 0})1 + x_2 0 + x_3 0 \ldots = 0$

Demonstração:

$E(X_i \vert I_i)$	$P[E(X_i \vert I_i)]$
0	$P(I_i = 0) = 1 - q_i$
$E(X_i \vert I = 1)$	$P(I_i = 1) = q_i$

$$var[E(X_i|I_i)] = E\left[\left(E(X_i|I_i)\right)^2\right] - \left[E\left(E(X_i|I_i)\right)\right]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = \left[0^2(1-q_i) + \left(E(X_i|I=1)\right)^2 q_i\right] - [E(X_i)\,]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = E(X_i|I=1)^2 q_i - [E(B_i)E(I_i)]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 q_i - [E(B_i)q_i]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2\left(q_i - q_i^2\right) = E(B_i)^2 var(I_i)$$

Demonstração:

Logo:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E[var(X_i|I_i)] + \sum_{i=1}^{n} var[E(X_i|I_i)]$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{var(B_i)q_i} + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 var(I_i)$$

➢ Exemplo

Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de R$10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de R$ 5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Obtenha $E(X_1) = 11$ e $var(X_1) = 104879$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}.$		$\mathbf{B_1}$	
$R\$0{,}00$	0,9988	0	0,9988		
$R\$5000{,}00$	0,0002	1	0,0012	$R\$5000{,}00$	0,1667
$R\$10000{,}00$	0,001			$R\$10000{,}00$	0,833

$E(I_1) = 0{,}0012$; $E(B_1) = R\$9166{,}67$; $var(I_1) = 0{,}001199$; $var(\mathrm{B}_1) = 3497768$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^{n} [E(B_i)]^2 q_i(1 - q_i)$$

- Exemplo

Dado que a probabilidade de ocorrer sinistros é de $0{,}01$, calcule os valores de $E(X_i)$ e $var(X_i)$ sendo que a densidade do valor de 1 sinistro é:

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{1}{2000} & se\ 0 < b \leq 2000 \\ 0 & cc \end{cases}:$$

➢ Exemplo

Dado que a probabilidade de ocorrer sinistros é de 0,01, calcule os valores de $E(X_i)$ e $var(X_i)$ sendo que a densidade do valor de 1 sinistro é :

$$f_B(b) = \begin{cases} \dfrac{1}{2000} & se\ 0 < b \leq 2000 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$E(B) = \frac{2000}{2} \qquad\qquad var(B) = \left(\frac{2000^2}{12}\right)$$

$$E(X_i) = \mathrm{E(I_i)E(B_i)} = 0{,}01\left(\frac{2000}{2}\right) = R\$10{,}00$$

$$var(X_i) = var(B_i)\mathrm{E(I_i)} + (E[B_i])^2 var(I_i)$$

$$var(X_i) = \left(\frac{2000^2}{12}\right)0{,}01 + \left(\frac{2000}{2}\right)^2 0{,}01(0{,}99) = R\$^2 13233{,}33$$

Modelos de risco Individual

O valor esperado de S_{ind} , é obtida por:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} q_i B_i$$

A variância de S_{ind} , é obtida por:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^{n} [E(B_i)]^2 var(I_i)$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} B_i^2 q_i(1 - q_i)$$