Teoria do Risco
Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Momentos

Valor esperado de X

$$\mu_X = E(X)$$

Variância probabilística de X

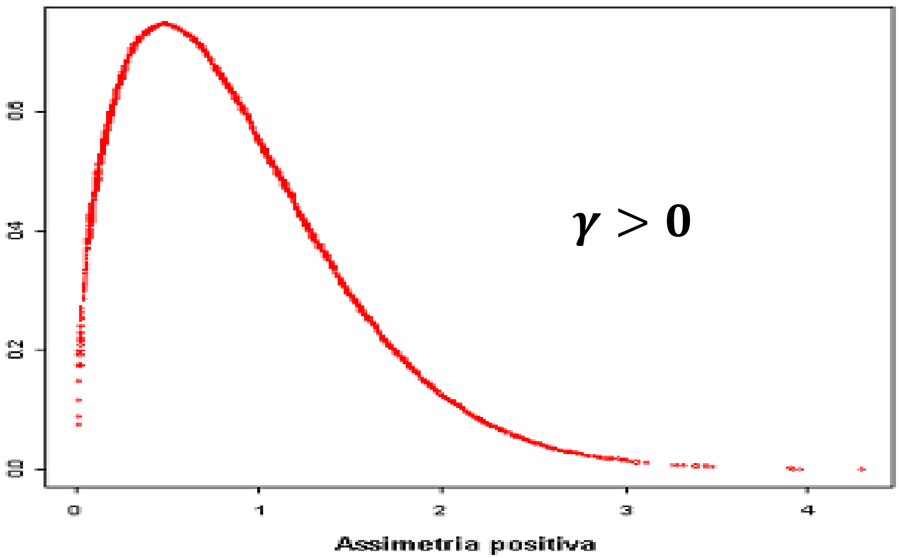
$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$

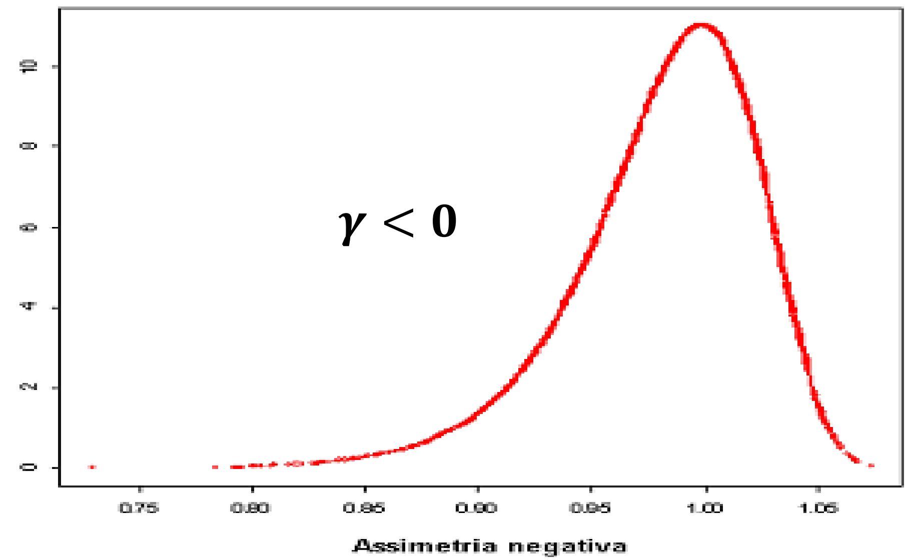
Curtose de X

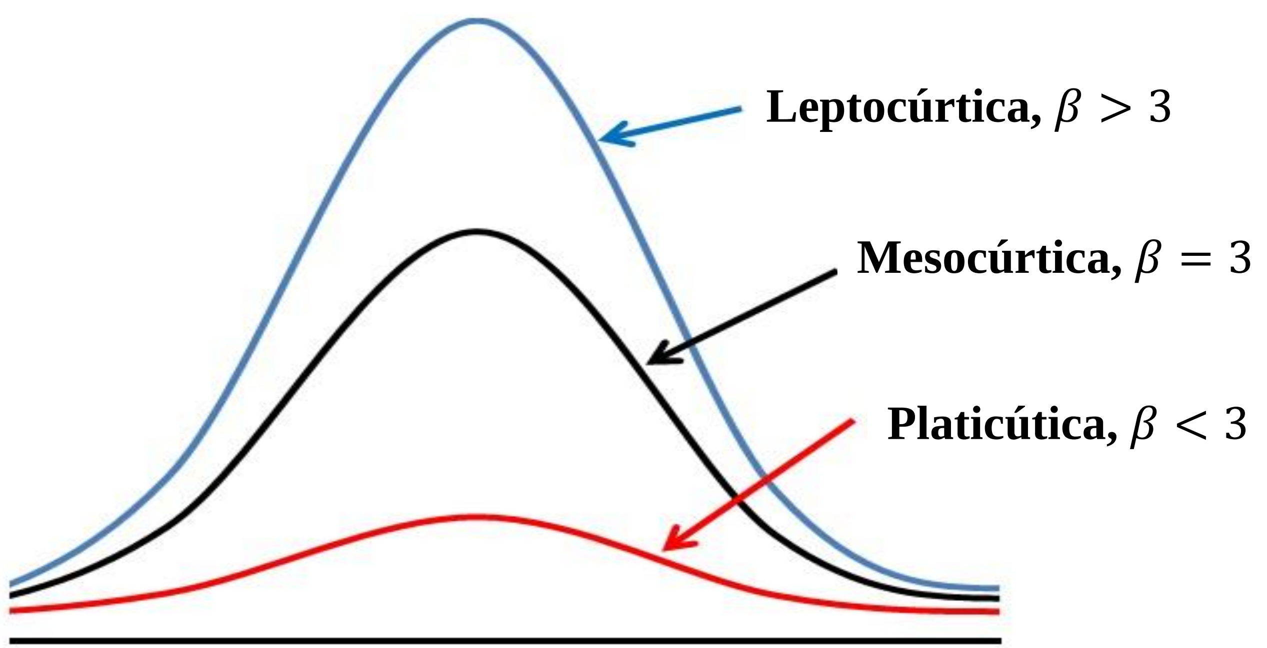
$$\beta = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^4\right] = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4}{[E(X^2) - E(X)^2]^2}$$

Assimetria de X

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^3\right] = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{[E(X^2) - E(X)^2]^3}$$


$\gamma > 0$
0.0
0.2
0.4
0.6
0
1
2
3
4
Assimetria positiva


$\gamma < 0$
0
2
4
6
8
10
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
Assimetria negativa


Leptocúrtica, $\beta > 3$
Mesocúrtica, $\beta = 3$
Platicútica, $\beta < 3$

Momentos

- Momento de ordem k ou momentos ordinários de ordem k de uma variável Y (sendo k um inteiro positivo) como:

$$m_k = E\left(Y^k\right)$$

Momentos

$$m_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y) dy \end{cases}$$

- $m_1 = E(Y)$
- $m_2 = E(Y^2)$
- $m_3 = E(Y^3)$

Função Geradora de Momentos

- $M_Y(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ty_i} P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy \end{cases}$

- $M_Y(t) = E(e^{tY})$

Função Geradora de Momentos

1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.

2) <u>A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.</u>

3) <u>Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.</u>

4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

Função Geradora de Momentos

Exemplo

Seja $Y \sim B(n, q)$ e $X \sim Exp(\lambda)$ vamos obter as respectivas funções geradoras de momentos e o seu primeiro momento.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1-q)^{n-y}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$0 \leq Y \leq n$ e $0 \leq x \leq \infty$.

Seja $Y \sim B(n, q)$, $0 \le Y \le n$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1-q)^{n-y}$$

Lembrando que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ e $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{i=1}^{n} e^{ti} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (\boldsymbol{e^t q})^i (1-q)^{n-i}$$

$$M_Y(t) = [e^t q + (1-q)]^n$$

$$E(Y) = nq$$

Seja $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ , 0 \leq x \leq \infty.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{t})}dx$$

$$M_X(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda - t)e^{x(\lambda-t)}}\Bigg|_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Função Geradora de Momentos

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as definidas num mesmo espaço de probabilidade, com $f_{X_1,\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ e dada as funções $Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n), i = 1, \ldots, k$.

A função geradora de momentos multidimensional dessas variáveis é definida por:

$$M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, \ldots, t_k) = E(e^{t_1 Y_1 + \cdots + t_k Y_k})$$

ou

$$M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, \ldots, t_k) = \int \ldots \int e^{t_1 g_1(X_1,\ldots,X_n) + \cdots + t_k g_k(X_1,\ldots,X_n)} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} dx_j$$

Obs.:

$$M_{Y_1}(t_1) = M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, 0,0,0, \ldots, 0) = \lim_{t_s' \neq t_1 \to 0} M_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1, \ldots, t_k)$$

Exemplo :

Seja uma dada variável aleatória $X \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $Y = g(X) = X^2$, pela técnica da função geradora de momentos.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)}\ dx$$

$$M_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)}\ dx$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2\frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,dx \quad \rightarrow \quad X \sim N(0,(1-2t)^{-1})$$

Logo

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2\frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\,dx} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{M_Y(t)} = (1-2\mathrm{t})^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\mathrm{t}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ para t} < \frac{1}{2}$$

$$Y \sim Gama\left(\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}\right)$$

Exemplo :

Seja $X_j \sim N(0,1)$, $j = 1,2, \dots, n$ sendo X_j independentes, então a distribuição de $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ é?

Função Geradora de Momentos

Seja $X_j \sim Bernoulli(q)$, $\mathrm{j} = 1,2, \dots , \mathrm{n}$ sendo $\mathrm{X_j}$ independentes. Então a distribuição de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ é?

$$M_{X_j}(t) = qe^t + 1 - q$$

Função Geradora de Momentos

Propriedade:

Dada as constantes a e b , então se $Y = aX + b$, então:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Se $X \sim Bernoulli(q)$ ➔ $M_X(t) = qe^t + 1 - q; \quad 0 \le p \le 1$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ➔ $M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}; \quad -\infty \le \mu \le \infty, \;\; \sigma^2 > 0$

Se $X \sim Po(\lambda)$ ➔ $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}; \quad \lambda > 0$

Se $X \sim Exp(\alpha)$ ➔ $M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}; \quad \alpha > 0$

Se $X \sim Geo(p)$ ➔ $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}; \quad 0 \le p \le 1$

Se $X \sim Uni_C(a, b)$ ➔ $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)t}; \quad a < b$

Se $X \sim Gama(\lambda, r)$ ➔ $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r; \quad \lambda > 0, \;\; \mathrm{r} > 0, \;\; t < \lambda$

Função Geradora de Momentos

- $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$$\left.\frac{d^n M_Y(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E(Y^n)$$

Função Característica

- $\psi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right)$

$$\left.\frac{d^n \psi_Y(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = i^n E(Y^n)$$

Exemplo:

Seja $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, Sendo X e Y independentes. Seja $Y_1 = X + Y$ e $Y_2 = X - Y$. Encontre as distribuições de Y_1 e Y_2.

Sendo que a função geradora de momentos de uma distribuição normal é $U \sim N(\mu, \sigma^2)$ é dada por: $M_U(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$