

# Teoria do Risco

## Aula 19

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



# Processo de Ruína

- A teoria da ruína está relacionada com o estudo do nível de reserva de uma seguradora ao longo do tempo.
- O termo "ruína", no contexto atuarial está associado ao risco de uma instituição financeira ficar com **reservas** insuficientes ...
- A probabilidade com que a ruína ocorre em determinado cenário também é uma medida de risco.
- Fatores quantitativos, relacionados a ruína

i) Duração do processo;

ii) Carregamento de segurança ( compensação dos eventuais desvios aleatórios do risco);

iii) Distribuição do valor total dos sinistros retidos  $S$ ;

iv) Limite técnico de indenização;

v) Fundo inicial que a seguradora aloca para assumir o risco de ruína  $U_0$ .

# Processo de Ruína

- Pode-se descrever o processo de reserva através do modelo clássico, chamado de modelo de Cramér-Lundberg:

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

- $u = U(0)$  representa a reserva inicial da seguradora.
- $U(t)$  é o processo estocástico associado ao nível de reserva no tempo  $t$  (**montante de investimento/montante da seguradora no instante  $t$** ).
- $U(t) < 0$ , é dito então que ocorreu ruína.
- $\Pi_t$  prêmio recebido no intervalo de tempo  $(0, t]$  (Incremento a  $U(t)$ ).
- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$  Sinistro agregado, sendo  $N_t$  o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo ( processo estocástico).

# Processo de Ruína

- De maneira simplificada, serão adotados modelos de ruína que envolva os prêmios recebidos a uma taxa constante, isto é.

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

- $\Pi_t = ct$

- $c > E(S)$

- Na prática utilizam-se percentuais que variam de 25% a 50% patrimônio líquido,

- A utilização de um percentual do patrimônio líquido, como reserva de risco, se justifica pelo fato que a perda de uma porcentagem pode levar a falta de liquidez.

# Processo de Ruína

Demonstração: Considere  $N_t \sim Po(\lambda t)$

$$E[U(t)] = E(u + \Pi_t - S_t) = E(u + ct - S_t)$$

$$E[U(t)] = u + ct - E(S_t) = u + ct - tE(S)$$

$$E[U(t)] = u + t[c - E(S)]$$

Para que  $E[U(t)] > 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , precisamos  $c - E(S) > 0$ , Assim

$$c - E(S) > 0$$

$$c > E(S)$$

## Exemplo 1

Um segurador tem uma reserva de risco inicial de 100 e recebe prêmios a uma taxa constante de  $c = 40$  por **unidade** de tempo. O segurador deverá ter uma experiência de sinistros  $S$  relativa ao tempo  $t$ , com a distribuição expressa pela tabela a seguir.

$t$	0,8	1,4	2,3	3	4
$S$	30	40	70	60	$s_4$

Determine o valor de  $s_4$  para que o segurador não entre em processo de ruína no intervalo de tempo  $[0,4]$ .

De acordo com o modelo de Cramér-Lundberg  $U(t) = u + ct - S_t$  temos que:

$$U(0) = 100 = u$$

$$U(0,8) = 100 + 40(0,8) - 30 = \mathbf{102}$$

$$U(1) = \mathbf{102} + 40(1 - 0,8) - 0 = \mathbf{110}$$

$$U(1,4) = \mathbf{110} + 40(1,4 - 1) - 40 = \mathbf{86}$$

$$U(2) = \mathbf{86} + 40(2 - 1,4) - 0 = \mathbf{110}$$

$$U(2,3) = \mathbf{110} + 40(2,3 - 2) - 70 = \mathbf{52}$$

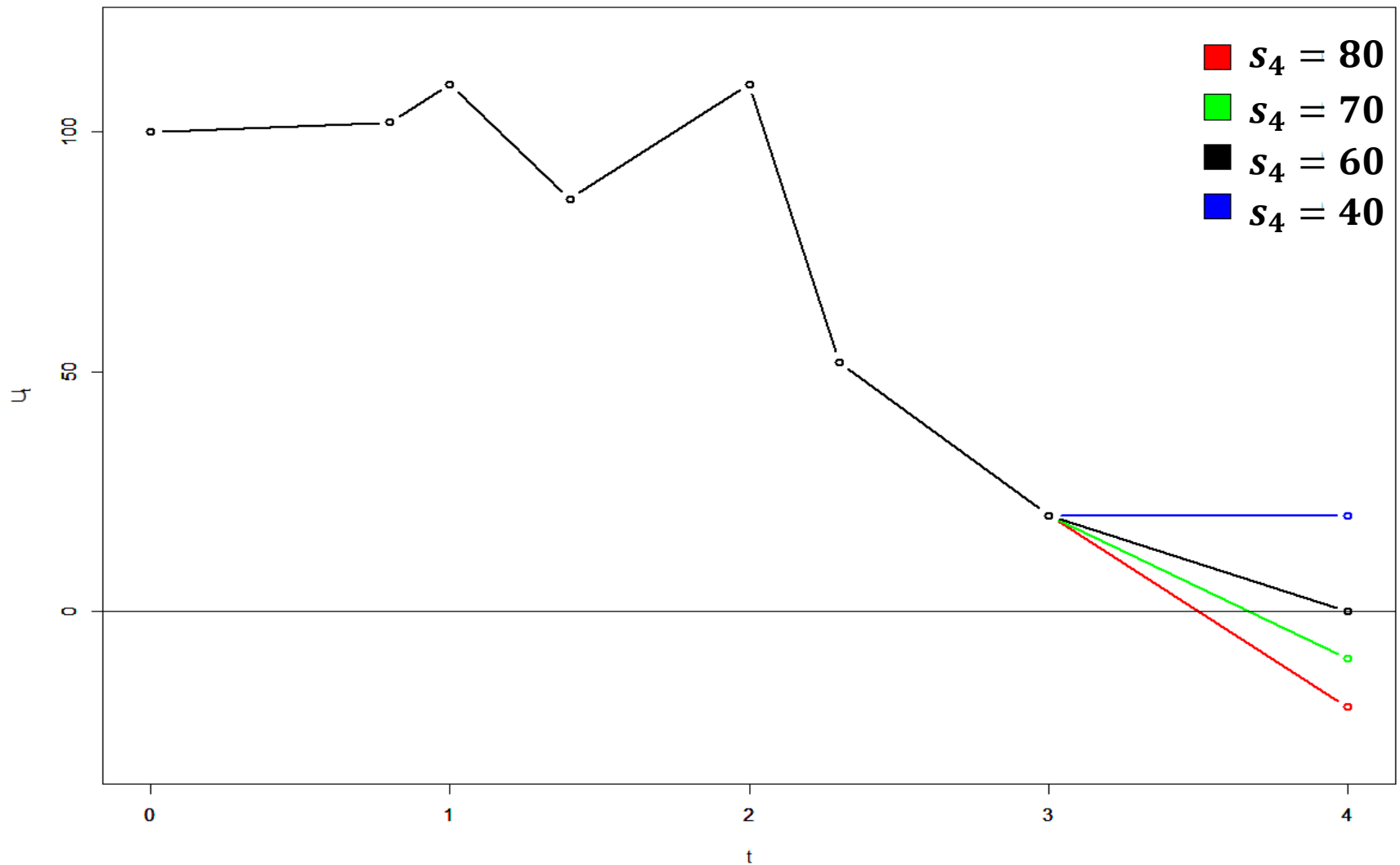
$$U(3) = \mathbf{52} + 40(3 - 2,3) - 60 = \mathbf{20}$$

Para que no tempo  $t = 4$ , tem-se:

$$U(4) = \mathbf{20} + 40(4 - 3) - s_4 = 60 - s_4$$

Haverá solvência relativa aos ganhos proporcionados por  $c$ , estando o segurador limitado a honrar sinistros inferiores a 60,00 (em  $s_4$ ) .

Evolução da reserva ao longo do tempo.



Comportamento do  $U(t)$  para diferentes valores de  $s_4$ .



### ➤ Tipos de Reserva.

#### ➤ Processo em tempo contínuo,

No processo em tempo contínuo, o interesse está no processo de reserva  $\{U(t): t \geq 0\}$ , em que  $U(t)$  representa a reserva da seguradora até o instante  $t$ .

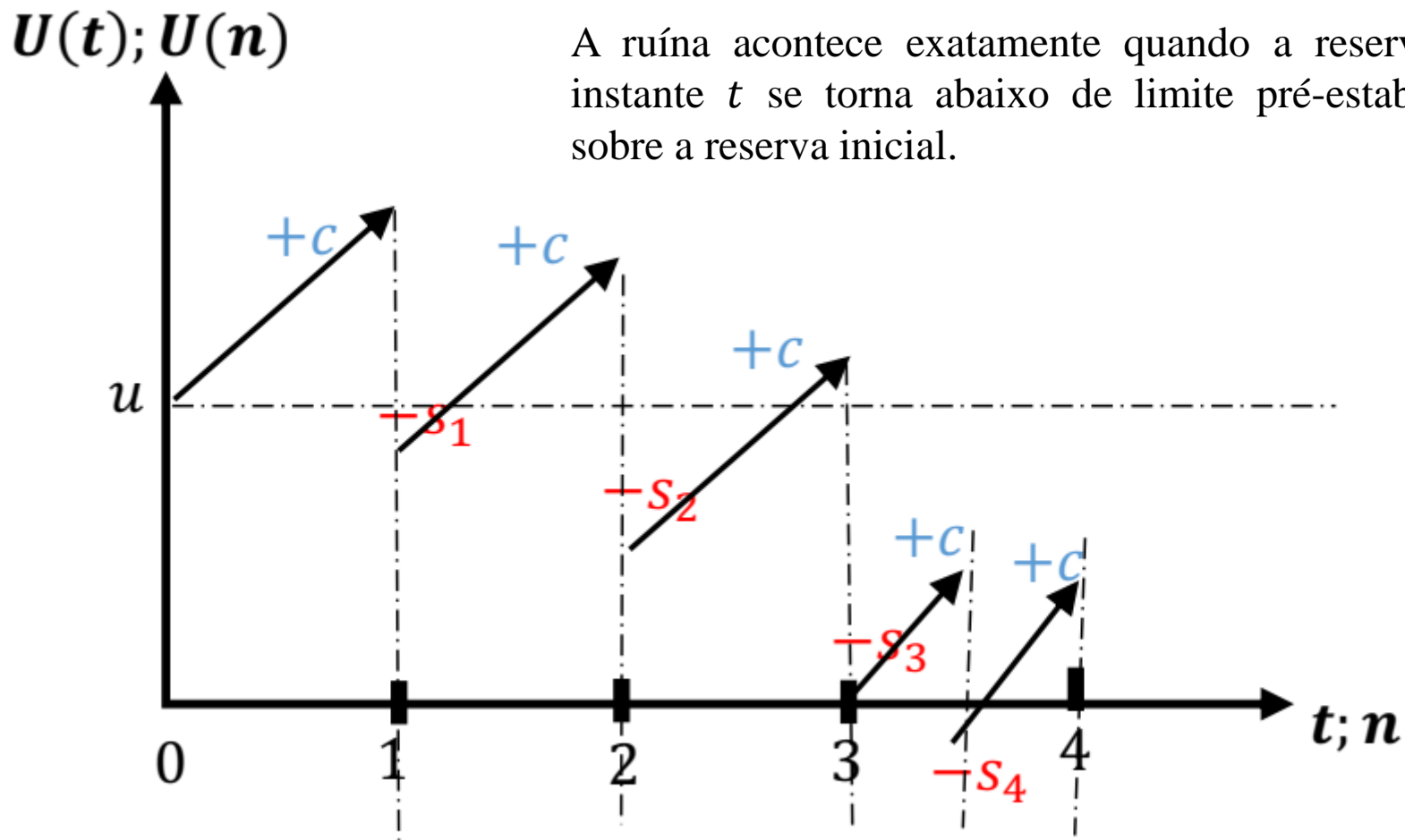
#### ➤ Processo em tempo discreto,

No processo em tempo discreto, o tempo  $t$  assume valores inteiros (geralmente anos) e o interesse está no processo de reserva  $\{U(n): n = 0, 1, \dots\}$ .

## Processo Clássico de Ruína ( Modelo de Cramér-Lundberg)

- A ruína de uma empresa (seguradora) acontece exatamente reserva num instante  $t$  se torna negativa ou abaixo de limite técnico pré-estabelecido sobre a reserva inicial.

# Processo Clássico de Ruína



**RUÍNA EM TEMPO DISCRETO:** A ruína não é percebida, pois somente é avaliada em  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**RUÍNA EM TEMPO CONTÍNUO:** A ruína é percebida no intervalo  $[3; 4]$

# PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Uma ruína acontece em  $t$  se  $U(t) < 0$ , ou seja, quando a reserva da seguradora ficar negativa em algum instante, sendo que:

$$T_t = \begin{cases} \min\{t | t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0\} \\ \infty \text{ se } U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \end{cases}$$

Variável aleatória contínua, "tempo para ruína".

- Dessa maneira, pode-se definir a probabilidade de ruína de uma seguradora.

## PROBABILIDADE DE RUÍNA-TAMBÉM É UMA MEDIDA DE RISCO

- A probabilidade de ruína **no horizonte infinito em tempo contínuo** é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall t \ 0 \leq t < \infty)$$

- A probabilidade de ruína no **horizonte finito em tempo contínuo** é definido por:

$$\psi(u, \tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall t, 0 \leq t < \tau)$$

$$\psi(u, \tau) \leq \psi(u)$$

## PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$\widetilde{T}_n = \min\{n : U(n) < 0\}.$$

- A probabilidade de ruína no horizonte infinito em **tempo discreto** é definida por:

$$\tilde{\psi}(u) = P(\widetilde{T}_n < \infty | U(0) = u) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \leq n < \infty)$$

- A probabilidade de ruína no horizonte finito em **tempo discreto** é definido por:

$$\tilde{\psi}(u, \tau) = P(\widetilde{T}_n < \tau) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \leq n < \tau)$$

$$\tilde{\psi}(u, \tau) \leq \tilde{\psi}(u)$$

# PROBABILIDADE DE RUÍNA

- A probabilidade de ruína em 1 ano pode ser expressa por:

$$\psi(u, 1) = P(T_t < 1)$$

ou

$$\psi(u, 1) = P(U(1) < 0) = P(S_1 > u + \Pi_1)$$

- É importante notar que não necessariamente  $P(T_t < 1) = P(U(1) < 0)$ 
  - $P(T_t < 1)$  estabelece a probabilidade de ruína a qualquer momento menor que 1 ano.
  - $P(U(1) < 0)$  estabelece a probabilidade de ruína ao final de 1 ano.

# PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- Probabilidade de sobrevivência **no horizonte em tempo infinito discreto**:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \geq 0 \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots | u = U(0)) = 1 - \tilde{\psi}(u)$$

- A probabilidade de sobrevivência **no horizonte infinito contínuo**:

$$\varphi(u) = P(U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \geq 0 | u = U(0)) = 1 - \psi(u)$$

- Probabilidade de sobrevivência **no horizonte finito em tempo contínuo**:

$$\varphi(u, \tau) = P(U(t) \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq t \leq \tau | u = U(0)) = 1 - \psi(u, \tau)$$

- Probabilidade de sobrevivência **no horizonte finito em tempo discreto**:

$$\tilde{\varphi}(u, \tau) = P(U(n) \geq 0 \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots, \tau | u = U(0)) = 1 - \tilde{\psi}(u, \tau)$$



## EXEMPLO 2

A carteira de um segurador tem distribuição de sinistros dada pela tabela a seguir:

$S$	\$1500,00	\$3000,00
$P(s)$	0,6	0,4

O excedente do segurador é dado pela expressão:

$$U(t) = 900 + 150t - S_t.$$

- Determine os possíveis intervalos que irão ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

Como, por hipótese, as únicas indenizações possíveis são no valor de \$1500,00 e \$3000,00 então a primeira ruína ocorrerá como resultado da menor indenização se:

$$\begin{aligned}900 + 150t - 1500 &< 0 \\150t &< 600 \\t &< 4.\end{aligned}$$

Caso ocorra sinistro no intervalo  $(0,4]$  este ocasionará em um caso de ruína, pois para qualquer sinistro que venha acontecer nesse intervalo não haverá solvência.

Após esse período, a seguradora não estará vulnerável ao evento de custo \$1500,00 porém a seguradora ainda tem um risco de solvência caso a indenização seja igual a \$3000,00. Nesse caso:

$$\begin{aligned}900 + 150t - 3000 &< 0 \\150t &< 2100 \\t &< 14\end{aligned}$$

Caso o primeiro sinistro ocorra em  $t > 14$  a seguradora não se tornará insolvente. No entanto, se o sinistro ocorrer entre 4 e 14, a seguradora não terá recursos disponíveis para fazer frente à indenização caso o valor do sinistro seja igual a \$3000,00.

Ainda para os dados do exemplo anterior. Considere que o tempo entre sinistros possa ser modelado pela distribuição exponencial  $T \sim \text{Exp}(0,1)$ . Calcule a probabilidade de ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

$$\begin{aligned} P(U(t) < 0) &= P(T < 4, S \neq 0) + P(4 \leq T < 14, S = 3000) \\ &= P(T < 4)P(S \neq 0|T < 4) + P(4 \leq T < 14)P(S = 3000|4 \leq T < 14) \\ &= [1 - (e^{-0,1 \times 4})](0,6 + 0,4) + \{[1 - (e^{-0,1 \times 14})]0,4 - [1 - (e^{-0,1 \times 4})]0,4\} \end{aligned}$$

$$P(U(t) < 0) = (0,3298) + 0,16948$$

$$P(U(t) < 0) = 0,49928$$

## EXEMPLO 3

Considere que a variável aleatória  $S$  esteja associada aos gastos com indenização no período de 1 ano, em uma carteira de seguros. Considere também que essa carteira tenha sido modelada segundo o modelo de risco coletivo com  $N_t \sim Po(200t)$  e  $X \sim Exp(0,002)$ .

Utilizando a aproximação pela distribuição normal determine o valor do prêmio retido,  $\Pi$ , ao longo desse ano de forma que a probabilidade de que essa seguradora entre em ruína não exceda 5%, considere a reserva inicial igual a  $U(0) = 5000$ .

# Solução

$$P(U(1) < 0) = 0,05$$

$$P(5000 + \Pi - S_{col} < 0) = 0,05$$

$$P(S_{col} > 5000 + \Pi) = 0,05$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) = 100000$$

$$\sqrt{\text{var}(S_{col})} = \sqrt{\lambda E(X^2)} = 10\,000$$

Lembrando que  $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{\text{var}(S_{col})}} \sim N(0,1)$ , tem-se

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000}\right) = 0,05$$

$$\Pi = 100000 - 5000 + 10000(1,645) = 111450$$

Ainda com os dados do exemplo anterior determine o valor do prêmio  $\Pi$  considerando um limite técnico para os valores de indenização por apólice de  $Li = 550$ .

### SOLUÇÃO

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li)$$
$$E(S_{col}) = 200 \left( \int_0^{550} x 0,002 e^{-0,002x} dx + 550 S_X(550) \right)$$
$$E(S_{col}) = 66712,8$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li)$$
$$var(S_{col}) = 200 \left( \int_0^{550} x^2 0,002 e^{-0,002x} dx + 550^2 S_X(550) \right)$$
$$var(S_{col}) = 30097000$$

# Solução

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li) = 66712,8$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li) = 30097000$$

Lembrando que  $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0,1)$ , tem-se

$$\frac{(5000 + \Pi) - 66712,8}{\sqrt{30097000}} = Z_{95\%}$$

$$\Pi = 66712,8 - 5000 + 5486,073(1,645) = \mathbf{70737,39}$$

Ao limitar o valor das indenizações, mantida as mesmas condições o valor do prêmio diminui, isso demonstra a influência no prêmio ao se alterar o limite técnico.



# Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora.** Deiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos.** Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

