

# Teoria do Risco

## Aula 18

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>



## O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Através do modelo de Poisson é possível perceber que a probabilidade de que não ocorra sinistros dentro de um intervalo  $t$  é dado por:

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

- Considerando a propriedade de estacionaridade, ao se definir  $N_t$  e  $N_{t+s}$  como a frequência de sinistros ocorridos até os instantes  $t$  e  $t + s$ , tem-se:

$$P(N_{t+s} - N_t = 0) = P(N_s = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!}$$

- Esse resultado pode ser entendido como a probabilidade de espera entre um sinistro e outro (evento), neste caso, pode-se dizer que o tempo necessário para ocorrer um sinistro é maior que  $s$ .

## O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Ao se definir uma variável aleatória  $T$  como o intervalo de tempo entre dois sinistros, tem-se:

$$P(T > s) = P(N_s = 0) = P(N_{t+s} - N_t = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

- A probabilidade de que o tempo entre dois sinistros seja menor que um intervalo  $s$ , implica que o número de sinistros ocorridos nesse intervalo é maior que 0.

$$P(T < s) = P(N_s > 0) = 1 - e^{-\lambda s}$$

Portanto  $T$  possui distribuição exponencial com média  $\frac{1}{\lambda}$ ,  $t > 0$  e  $\lambda > 0$ .

## O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Portanto ao se definir  $\{N_t, t \geq 0\}$  como um processo de Poisson homogêneo com intensidade  $\lambda$ , é estabelecido que o tempo entre dois sinistros,  $T$ , possui distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$ , logo:

$$F_T(t) = 1 - e^{-t\lambda} \quad \text{Distribuição acumulada de } T.$$

$$\bar{F}_T(t) = e^{-t\lambda} \quad \text{Função de sobrevivência de } T.$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-t\lambda} \quad \text{Função densidade de } T.$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Valor esperado de } T.$$

$$\text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{Variância de } T.$$

$$M_T(r) = \frac{\lambda}{r - \lambda} \quad \text{Função geradora de momentos de } T.$$

## O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- O fato da distribuição do tempo entre dois sinistros ser dado por um modelo de distribuição exponencial implica em dizer que:
  - I) A probabilidade do tempo de espera entre dois sinistros decai exponencialmente com o passar do tempo.
  - II) A probabilidade de que seja necessário esperar mais  $s$  "anos" até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de  $t$  "anos", é a mesma de que esse evento ocorra depois dos  $s$  "anos" iniciais.

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

\*Propriedade da perda de memória: Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

## O processo de Poisson para frequência de Sinistros

III) A variável aleatória que representa a soma de durações exponencialmente distribuídas (idênticas) ,  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ , apresenta distribuição gama com parâmetros  $n$  e  $\lambda$ :

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$$

em que  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , uma vez que  $n$  é um inteiro positivo.

## EXEMPLO I

Denote por  $T$  como o tempo decorridos entre  $k - 1$  ésimo sinistro e do  $k$ -ésimo sinistro de uma carteira de seguros. Suponha que o tempo decorrido entre sinistros independentes e identicamente distribuídos seguindo a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_T(t) = 0,04861e^{-0,04861t}, t > 0.$$

Em que  $t$  é mensurado em lapsos de meia hora. Sendo assim calcule a probabilidade de que pelo **menos** um sinistro será processado nas próximas duas horas e trinta minutos.

## Solução:

Uma vez que a distribuição do tempo decorrido entre dois sinistros é uma exponencial, logo:

$$\lambda = 0,04861.$$

Como a função densidade de probabilidade está descrita em duas e trinta minutos, então deve-se calcular a probabilidade considerando-se essa ordem de medida. Dessa forma:

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - P(N_5 = 0)$$

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - e^{-0,04861 \times 5} = 1 - e^{-0,24305} \approx 0,2157 \approx 21,57\%.$$



## EXEMPLO 2

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.
- b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

## EXEMPLO

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036$$

## EXEMPLO

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja menor que 8 meses.

$$\overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036$$

- b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

$$10 \text{ meses} = \frac{5}{6} \text{ anos e } 2 \text{ meses} = \frac{1}{6} \text{ anos.}$$

$$P\left(T > \frac{5}{6} \mid T > \frac{1}{6}\right) = \frac{e^{-5\left(\frac{5}{6}\right)}}{e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}} = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036 = \overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right)$$

## Processo estocástico de sinistros agregados

$$S_{ind}(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + \cdots + X_n(t)$$

$$S_{Col}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$\{N(t), t \geq 0\}$  : processo de contagem (**Processo de Poisson**)

$\{S_{Col}(t), t \geq 0\}$  : Processo estocástico de sinistros agregados

$X_i$  : Representa a severidade do  $i$  — *ésimo* sinistro.

## Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Definindo-se  $S_{col.t}$  como a severidade acumulada no intervalo de tempo  $t$  de acordo como o modelo de risco agregado.

$$S_{col.t} = S_t$$

- O processo estocástico  $\{S_t, t > 0\}$  é dito ser um processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo da seguinte forma:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

## Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- $\{N_t, t > 0\}$  é um processo de Poisson homogêneo.
- $\{X_i, i > 0\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de  $\{N_t, t > 0\}$ .
- $S_t = 0$  se  $N_t = 0$

## Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

A função distribuição convoluta de  $S_t$  é será dada por:

$$F_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Em que  $P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k < s)$ .

Consequentemente temos que :

$$p_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Em que  $p^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$

## Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Sua esperança e variância são dadas por:

$$E(S_t) = \lambda t E(X)$$

$$\text{var}(S_t) = \lambda t E(X^2)$$

- Esperança matemática e variância do sinistro agregado para o intervalo de tempo  $t$  de um processo estocástico Poisson Homogêneo.

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t [M_X(r) - 1]}$$



## Exemplo 3

Considere uma carteira de  $n$  apólices idênticas de seguros de dano em que a frequência histórica relativa de ocorrência de sinistros é de 5 sinistros por ano obedecendo uma distribuição Poisson com valor de intensidade constante. Considere que a distribuição de probabilidades de severidades tem um comportamento descrito pela distribuição Gama com parâmetros  $\alpha = 100$  e  $\beta = 2$ ,  $X \sim Gama(100, 2)$ . Supondo que este comportamento se mantenha constante no período de análise e que todas as apólices são renovadas a cada ano. Obtenha a fórmula genérica da função geradora de momentos, esperança matemática e do desvio padrão da distribuição convoluta de sinistros agregados.

- Resp.:

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^\alpha \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Logo,

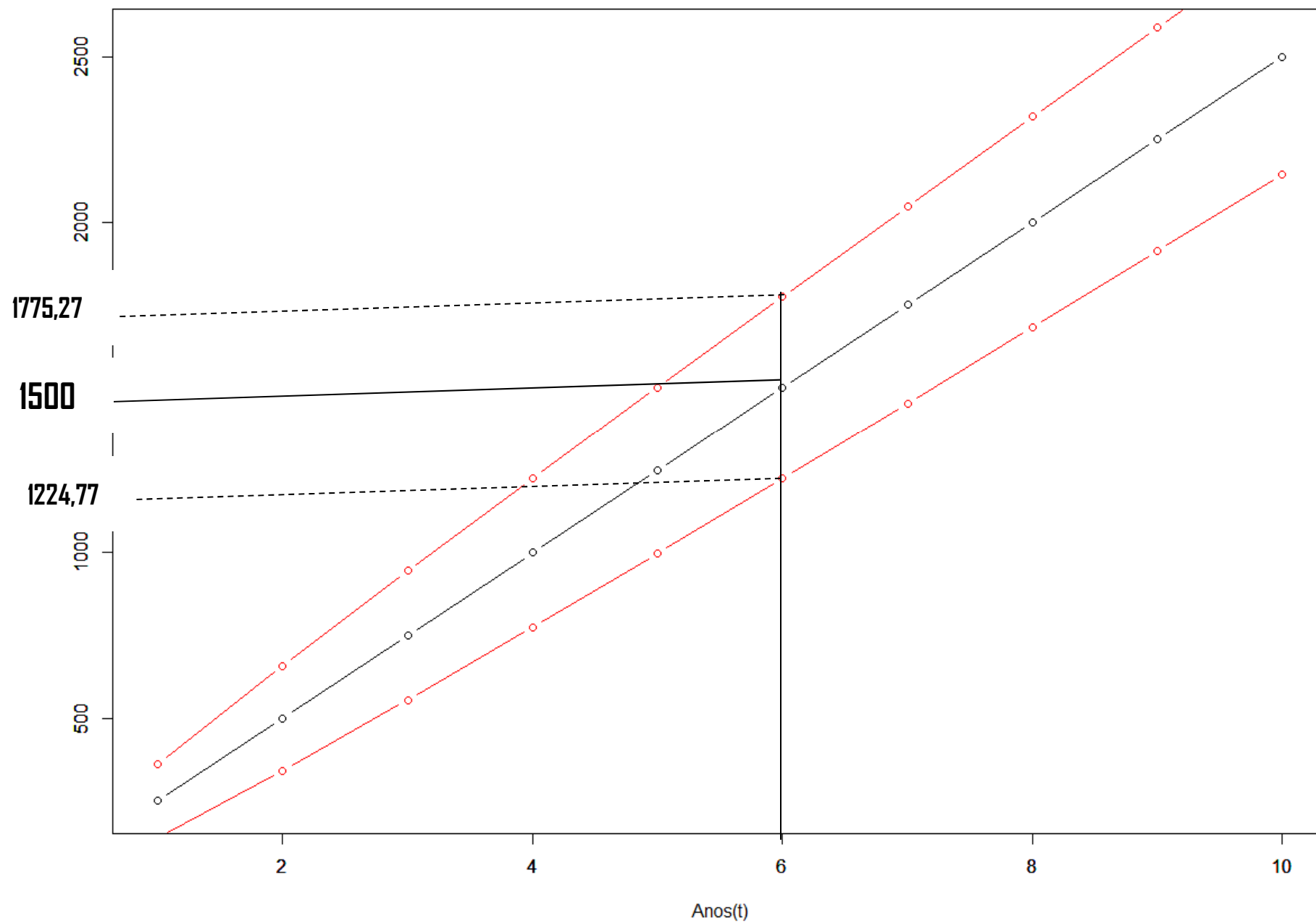
$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t \left[ \left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^\alpha - 1 \right]} = e^{5t \left[ \left(\frac{2}{2-r}\right)^{100} - 1 \right]}$$

$$E(S_t) = \frac{\lambda t \alpha}{\beta} = 5t \left( \frac{100}{2} \right) = 250t$$

$$\text{var}(S_t) = \lambda t \left( \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) = 5t(25 + 50^2) = 12625t$$

$$\sigma_{S_t} = 112,361\sqrt{t}$$

$E(S_t)$



# Processo de Ruína

- O termo “ruína”, no contexto atuarial está associado ao risco de uma instituição financeira ficar com **reservas** insuficientes ...
- Fatores quantitativos, relacionados a Ruína
  - i) Duração do processo;
  - ii) Carregamento de segurança ( $\theta$ ) embutido no prêmio puro;
  - iii) Distribuição do valor total dos sinistros retidos  $S$ ;
  - iv) Limite técnico;
  - v) Fundo inicial que a seguradora aloca para assumir o risco de ruína  $U_0$ .
- A teoria da ruína está relacionada com o estudo do **nível de reserva** de uma seguradora ao longo do tempo.

# Processo de Ruína

- Pode-se descrever o processo de reserva através do modelo clássico, chamado de modelo de Cramér-Lundberg:

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

- $u = U(0)$  representa a reserva inicial da seguradora.
- $U(t)$  é o processo estocástico associado ao nível de reserva no tempo  $t$ ,
- $U(t) < 0$ , é dito então que ocorreu ruína.
- $\Pi_t$  prêmio recebido no intervalo de tempo  $(0, t]$  - Incremento a  $U(t)$ .
- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$  Sinistro agregado, sendo  $N_t$  o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo.
- Decremento em  $U(t)$  de acordo com a ocorrência de sinistros.

# Processo de Ruína

- De maneira simplificada, serão adotados modelos de ruína que envolva os prêmios recebidos a uma taxa constante, isto é.

$$U(t) = u + ct - S_t$$

- $c > E(S)$
- Na prática utilizam-se percentuais que variam de 25% a 50% patrimônio líquido,
- A utilização de um percentual do patrimônio líquido, como reserva de risco, se justifica pelo fato que a perda de uma porcentagem pode levar a falta de liquidez.

## Processo Clássico de Ruína ( Modelo de Cramér-Lundberg)

- Assumir que  $N_t$  é um processo de Poisson, implica em:
  - Considerar  $U(t)$  um processo estocástico de reserva que cresce de acordo com o ganho de prêmios.
  - $U(t)$  decresce de acordo com a ocorrência de sinistros.

## ➤ Exemplo 4

Um segurador tem uma reserva de risco inicial de  $R\$100$  e recebe prêmios a uma taxa constante de  $c = R\$40$  por **unidade** de tempo. O segurador deverá ter uma experiência de sinistros  $X$  relativa ao tempo  $t$ , com a distribuição expressa pela tabela a seguir.

$t$	0,8	1,4	2,3	3	4
$X$	30	40	70	60	$x_4$

Determine o valor de  $x_4$  para que o segurador não entre em processo de ruína no intervalo de tempo  $[0,4]$ .



De acordo com o modelo de Cramér-Lundberg  $U(t) = u + ct - S_t$  temos que:

$$U(0) = 100 = u$$

$$U(0,8) = 100 + 40(0,8) - 30 = \mathbf{102}$$

$$U(1) = \mathbf{102} + 40(1 - 0,8) - 0 = \mathbf{110}$$

$$U(1,4) = \mathbf{110} + 40(1,4 - 1) - 40 = \mathbf{86}$$

$$U(2) = \mathbf{86} + 40(2 - 1,4) - 0 = \mathbf{110}$$

$$U(2,3) = \mathbf{110} + 40(2,3 - 2) - 70 = \mathbf{52}$$

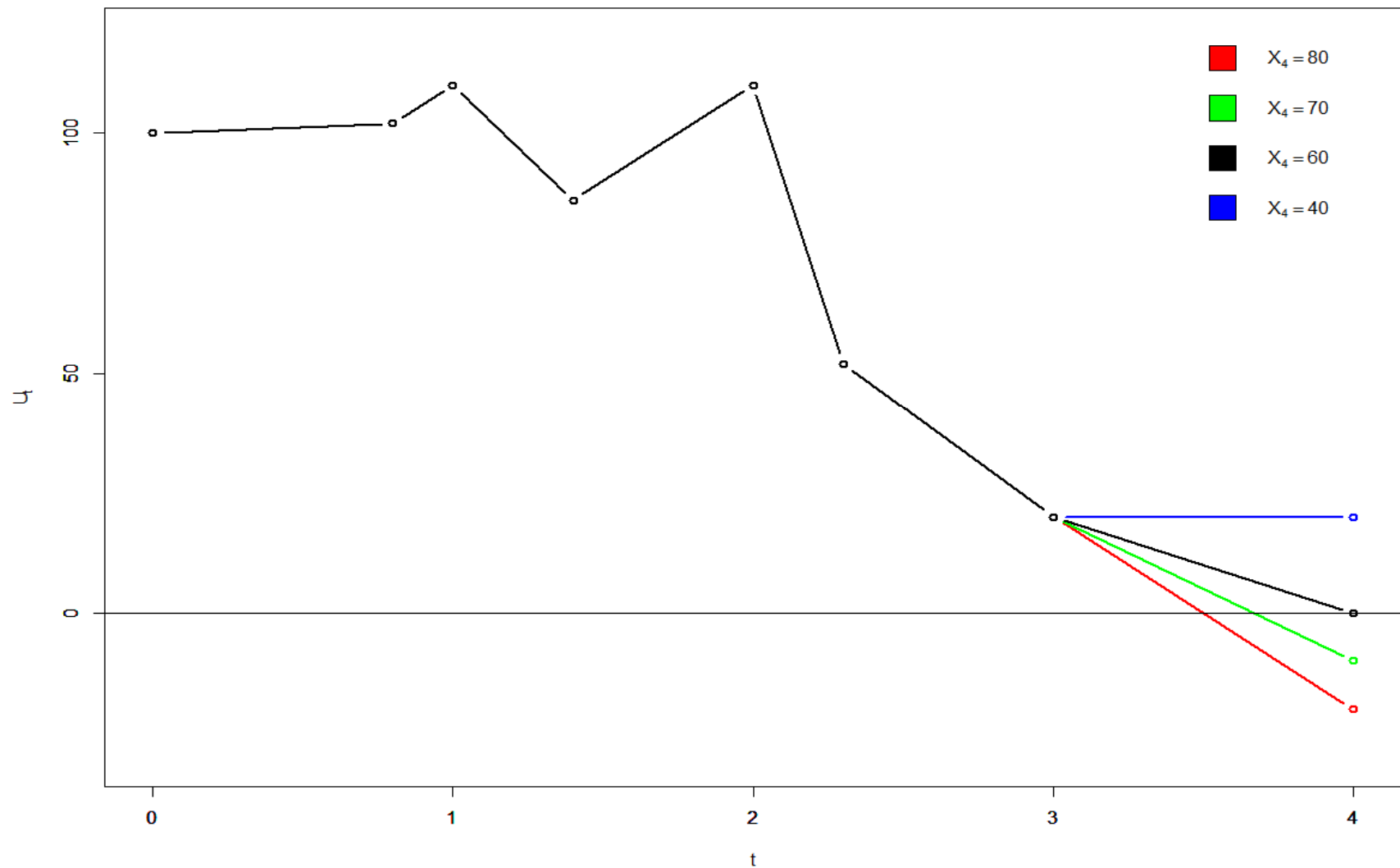
$$U(3) = \mathbf{52} + 40(3 - 2,3) - 60 = \mathbf{20}$$

Para que no tempo  $t = 4$ , tem-se:

$$U(4) = \mathbf{20} + 40(4 - 3) - X_4 = 60 - X_4$$

Haverá solvência relativa aos ganhos proporcionados por  $c$ , estando o segurador limitado a honrar sinistros inferiores a R\$60,00 (em  $X_4$ ).

Evolução da reserva ao longo do tempo.



Comportamento do  $U(t)$  para diferentes valores de  $X_4$ .

## Processo Clássico de Ruína ( Modelo de Cramér-Lundberg)

### ➤ Tipos de Reserva.

- **Processo em tempo contínuo**, denotado por  $\{X_t: t \geq 0\}$ .

No processo em tempo contínuo, o interesse está no processo de reserva  $\{U(t): t \geq 0\}$ , em que  $U(t)$  representa a reserva da seguradora até o instante  $t$ .

- **Processo em tempo discreto**, denotado por  $\{X_n: n = 0, 1, \dots\}$ .

No processo em tempo discreto, o tempo  $t$  assume valores inteiros (geralmente anos) e o interesse está no processo de reserva  $\{U(n): n = 0, 1, \dots\}$ .

## Processo Clássico de Ruína ( Modelo de Cramér-Lundberg)

- A ruína de uma empresa (seguradora) acontece exatamente reserva num instante  $t$  se torna negativa ou abaixo de limite técnico pré-estabelecido sobre a reserva inicial.
- De acordo com a evolução do processo de reserva ao longo do tempo, pode-se definir a probabilidade de sobrevivência da seguradora de quatro maneiras: