Teoria do Risco
Aula 1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Introdução

Desde as antigas civilizações o ser humano sempre se preocupou com as incertezas do futuro...

O homem teve a necessidade de criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e para o seu patrimônio

Introdução

- Os comerciantes mesopotâmicos e fenícios:

- Os hebreus:

Introdução

- Por volta de 1347, na cidade de Gênova as atividades de seguros começam a se popularizar...
  - "A apolizza" "A promessa"
  - Seguro de transporte marítimo.
  - Primeiros estudos da matemática atuarial.

- No século VI o sistema de seguros europeu faliu,
  - Técnicas de gestão de risco intuitivas.
  - Técnicas pouco elaboradas.

Introdução

- Século XVII, Fermat e Pascal idealizaram a teoria de probabilidades.

- Edmond Halley cria primeira tábua de mortalidade sobre princípios científicos concretos (1693).

Introdução

- Século XX surge a teoria do risco coletivo.
  - Modelo de Crámer –Lundberg.
  - Ramo vida e ramo não vida...

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
  - Avaliar riscos
  - Avaliar sistemas de investimentos.
  - Estabelecer politicas de investimentos.

  - Estabelecer valor de prêmios
    - Seguro ligados a vida (Cálculo atuarial- Sinistros só ocorrem uma vez)
    - Seguro ligado a danos (Teoria do risco - Sinistros podem ocorrer várias vezes)

Introdução

*"Pelo fato do atuário lidar com conceitos técnicos diversos, como conceitos estatísticos, econômicos e financeiros passou-se a usar o termo geral **Ciências atuariais** para o ramo do conhecimento relacionado a analise de risco e expectativas financeiras."*

BRITO, Irene; GONÇALVES, Patrícia; RAMOS, Pedro Lima. O risco e a ruína na atividade seguradora. **Boletim da SPM**, v. 75, p. 1-29, 2017.

Teoria do risco

- …reside em estabelecer um modelo de tarifação eficiente frente aos sinistros que chegam ao segurador.

  - …tem como objetivo principal estabelecer para o "bem" sob análise um prêmio justo para um dado futuro mensurável,…

Modelos de Risco

I) Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?

II) Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma da margem de segurança?

Dois padrões a serem seguidos!!

Conceitos Estatísticos

A teoria do risco é inerente à teoria estatística, portanto a compreensão de determinados termos e conceitos estatísticos assim como algumas propriedades, se faz necessária ou até mesmo fundamental.

Conceitos Estatísticos

- Conceitos Estatísticos
  - Variável Aleatória e função de distribuição
    - Variável aleatória Discreta
    - Importantes modelos discretos
    - Variável aleatória Contínua
    - Importantes modelos de contínuos
  - Variável aleatória multidimensional
  - Esperança e Variância de variáveis aleatórias.
    - Esperança sujeito a valor limite.
  - Covariância e Correlação entre variáveis aleatórias.
  - Desigualdade de Jensen
  - Momentos ordinários e função Geradora de Momentos

- **MODELOS DE RISCO**
  - Modelo de risco individual anual
    - ...
  - Modelo de risco coletivo anual
    - ...
- **CÁLCULO DE PRÊMIOS**
  - Seguro e utilidade
  - Princípios de cálculos de prêmios
  - Propriedades desejáveis ao prêmio
  - Medida de Risco
- **Processo Estocástico para frequência de sinistros e sinistralidade**
    - ...
- **Processo de ruína**
    - ...

Variável Aleatória

A variável aleatória pode ser entendida como uma função X( ) que associa a cada evento pertencente a uma partição do espaço amostral Ω um número real.

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

EXEMPLO 1

Suponha o lançamento de 3 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1-q$ (fracasso). A variável aleatória "Número de coroas" pode ser caracterizada por:

Resp.

$\mathrm{R} = \{0,1,2,3\}$, $\mathrm{R} \subset \mathbb{R}$

R é a imagem de $X(\cdot)$

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1-q)^3$	$q^0(1-q)^3$
Coroa	Cara	Cara		$q^1(1-q)^2$	
Cara	**Coroa**	Cara	1	$q^1(1-q)^2$	$3q^1(1-q)^2$
Cara	Cara	**Coroa**		$q^1(1-q)^2$	
Coroa	**Coroa**	Cara		$q^2(1-q)^1$	
Coroa	Cara	**Coroa**	2	$q^2(1-q)^1$	$3q^2(1-q)^1$
Cara	**Coroa**	**Coroa**		$q^2(1-q)^1$	
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	3	$q^3(1-q)^0$	q^3

X ($n°$ de $coro$	$P(X)$
0	$(1-q)^3$
1	$3q^1(1-q$
2	$3q^2(1-q$
3	q^3

Variáveis aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

- $P(X = x)$ Função de probabilidade (fp)
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todo i.
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Variáveis aleatórias Contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes a $\mathbb{R}$,...

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

EXEMPLO 2

Um apólice de seguro cobre uma perda aleatória X, com um valor de franquia d, onde $0 < d < 1$. A perda é modelada como um variável aleatória contínua com densidade $f_X(x) = 2x$ para $0 < x < 1$. Sabe-se que a probabilidade da seguradora pagar uma indenização menor que $0{,}5$ é 64%. Calcule o valor da franquia.

Solução

$$Y = X - d$$

$$P(Y \leq 0{,}5) = P(X \leq 0{,}5 + d) = 0{,}64 = \int_0^{0{,}5+d} 2x dx$$

$$(0{,}5 + d)^2 = 0{,}64$$

$$0{,}25 + d + d^2 = 0{,}64$$

$$d = 0{,}3$$

- No exemplo 2 foi feita uma modificação na variável aleatória X de forma a se obter a variável aleatória $Y = Max(0; X - d) = (X - d)$ em que d corresponde ao valor da franquia.

- A variável aleatória Y corresponde ao valor de excesso de dano acima da franquia para todas as severidades ocorridas X.

- Situação teórica em que os segurados informariam ao segurador todos os sinistros ocorridos, mesmo aqueles cujo valor ficou abaixo da franquia dedutível (esses considerados pela seguradora como de valor 0).

- O segurador trata os sinistros avisados com severidade abaixo da franquia como sendo sinistros de valor 0.

Função de distribuição acumulada

Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_k} f_X(z)dz \\ \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) \end{cases}$$

$\Phi(x)$

Função de distribuição acumulada

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0;$

- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1;$

- Se $x_1 < x_2$, então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2);$

- $P_X(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1);$

- $F_X(x)$ é uma função crescente de $x;$

Função de distribuição acumulada

- O conhecimento da função permite obter diversas informações sobre a variável.

- A composição das funções de probabilidade faz parte da modelagem teórica das realizações das variáveis aleatórias...

Função Sobrevivência/ Excesso de Danos

$$\bar{F}_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$\bar{F}_X(x) = S_X(x)$$

EXEMPLO 3

Considere a função de sobrevivência dada por:

$$\bar{F}_X(x) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - x)^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq x \leq 115.$$

Calcule $f(x)$. Entregar!!!

Sempre que duas ou mais variáveis aleatórias são levadas em conta, três tipos de distribuição de probabilidade são definidas.

A distribuição conjunta, descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

A distribuição marginal, descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

A distribuição condicional, descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.

Probabilidade condicional

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidades. Definimos a função de probabilidade condicional de X_1 dado X_2, por:

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}$$

onde $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.

Probabilidade condicional

- Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço de probabilidades. Definimos a função de densidade condicional de X_1 dado X_2, por:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

- Em que $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função densidade conjunta de X_1e X_2 e $f_{X_2}(x_2)$ é função densidade marginal de X_2.

Independência de variáveis aleatórias

A independência é um requisito importante que permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

- Para variáveis aleatórias discretas:

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow P_{X,Y}(x,y) \equiv P_X(x)P_Y(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Para variáveis aleatórias contínuas:

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) \equiv f_X(x)f_Y(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

EXEMPLO 4

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b. Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/8	0	0
1	0	3/8	0
2	0	0	3/8
3	1/8	0	0

EXEMPLO 4

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b. Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = f_Y(y) = 0{,}04e^{-0{,}04y}$$
$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = f_X(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y=y)$	2/8	3/8	3/8	

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b. Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

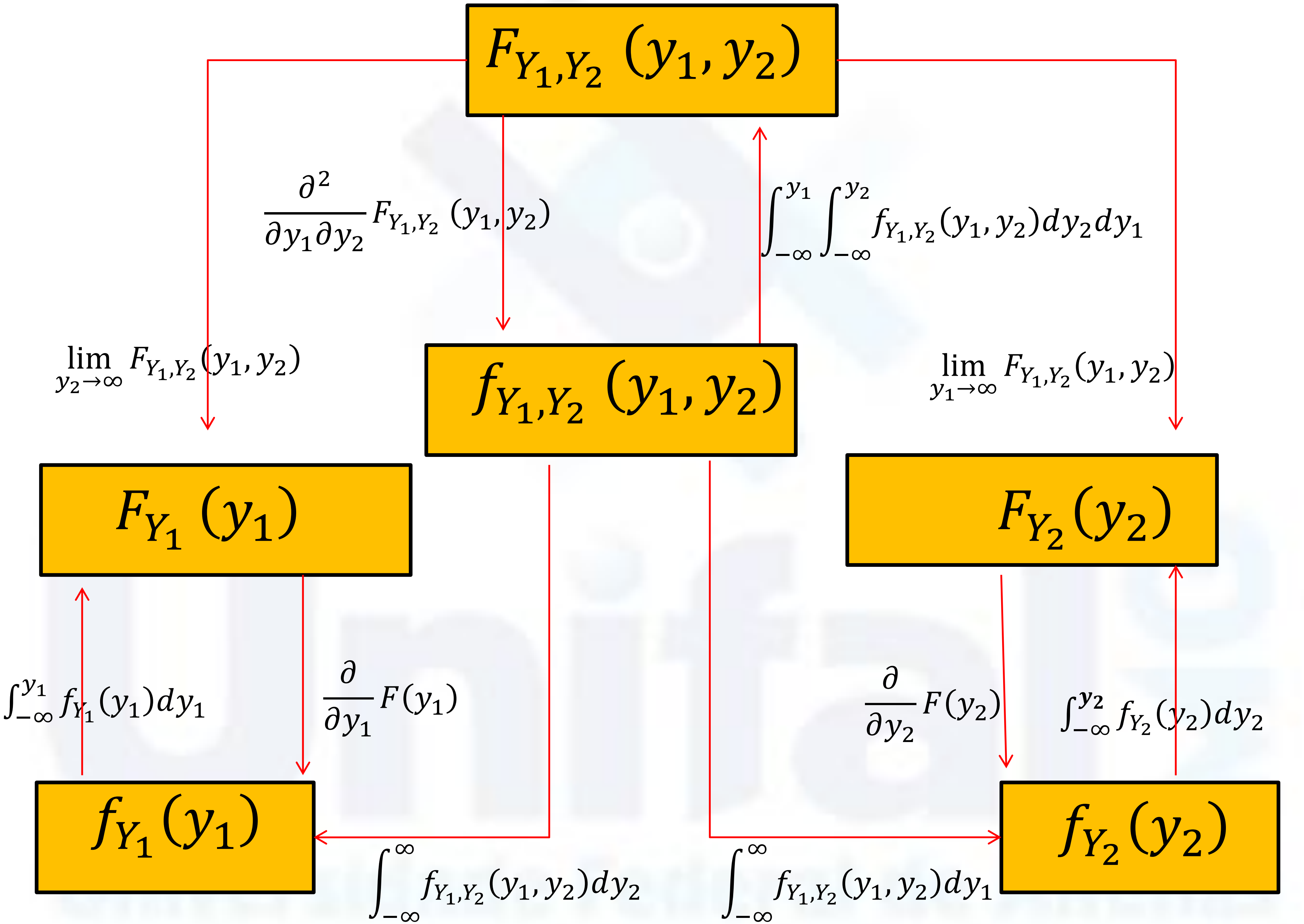
a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$

$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = f_Y(y) = 0{,}04e^{-0{,}04y}$$
$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = f_X(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$$
$$\boldsymbol{f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_X(x)}$$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	**3/8**	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y=y)$	2/8	3/8	3/8	

$$\boldsymbol{P_{X,Y}(2,2) \neq P_X(2) P_Y(2)}$$


$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2dy_1$
$\lim_{y_2\to\infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\lim_{y_1\to\infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$F_{Y_1}(y_1)$
$F_{Y_2}(y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_1} f_{Y_1}(y_1)dy_1$
$\frac{\partial}{\partial y_1} F(y_1)$
$\frac{\partial}{\partial y_2} F(y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_2}(y_2)dy_2$
$f_{Y_1}(y_1)$
$f_{Y_2}(y_2)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 0{,}004\left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10}\right) I_{[0,10]}(y_1) I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1)$$

$$F_{Y_2}(y_2)$$

$$f_{Y_1}(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \int_0^{y_2}\int_0^{y_1} 0{,}004\left(10 - u - v + \frac{uv}{10}\right) du dv$$

$$\int_0^{y_1} 0{,}004\left(10 - u - v + \frac{uv}{10}\right) du = 0{,}004\left(10u - \frac{u^2}{2} - uv + \frac{u^2 v}{20}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=y_1} = 0{,}004\left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 v + \frac{y_1^2 v}{20}\right)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \int_0^{y_2} 0{,}004\left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 v + \frac{y_1^2 v}{20}\right) dv$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10y_1 v - \frac{y_1^2}{2}v - \frac{y_1 v^2}{2} + \frac{y_1^2 v^2}{40}\right)\Bigg|_{v=0}^{v=y_2}$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10y_1 y_2 - \frac{y_1^2 y_2}{2} - \frac{y_1 y_2^2}{2} + \frac{y_1^2 y_2^2}{40}\right)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2dy_1$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1y_2}{10}\right)I_{[0,10]}(y_1)I_{[0,10]}(y_2)$$

$F_{Y_1}(y_1)$

$F_{Y_2}(y_2)$

$f_{Y_1}(y_1)$

$f_{Y_2}(y_2)$

$$F_{Y_1}(y_1) = \lim_{y_2 \to \infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \lim_{y_2 \to 10} 0{,}004\left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40}\right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}004\left(100y_1 - \frac{10y_1^2}{2} - \frac{100y_1}{2} + \frac{100y_1^2}{40}\right) = 0,4\left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} - \frac{y_1}{2} + \frac{y_1^2}{40}\right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}2\left(2y_1 - \frac{y_1^2}{10} - y_1 + \frac{y_1^2}{20}\right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}2\left(y_1 - \frac{y_1^2}{20}\right)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40}\right)$$

$$\boldsymbol{\lim_{y_2\to 10} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)}$$

$$\boldsymbol{\int_0^{y_1}\int_0^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1}$$

$$\boldsymbol{f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)} = 0{,}004\left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1y_2}{10}\right)I_{[0,10]}(y_1)I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}2\left(y_1 - \frac{y_1^2}{20}\right)$$

$$F_{Y_2}(y_2)$$

$$f_{Y_1}(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2)$$

EXEMPLO 4

Uma apólice de seguro cobre uma perda aleatória X, com um valor de franquia d, onde a seguradora somente é notificada pelo segurado quando a severidade do sinistro supera a franquia dedutível, ou seja, o valor das severidades conhecidas pela seguradora é definida por Y, tal que:

$$Y = (X - d)|(X > d)$$

Considerando que a perda é modelada como um variável aleatória contínua com densidade $f_X(x) = 2x$ para $0 < x < 1$ e que $d = 0,3$, obtenha $f_Y(y)$.

Solução

EXEMPLO 4-Solução

$$Y = (X - d)|(X > d)$$

Partimos do modelo de distribuição $F_Y(y)$, assim:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X - d \leq y|X > d)$$

$$P(X \leq y + d|X > d) = \frac{P(X \leq y + d, X > d)}{P(X > d)} = \frac{P(y + d > X > d)}{P(X > d)}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_X(y + d) - F_X(d)}{\bar{F}_X(d)}$$

Consequentemente

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\bar{F}_X(d)}\left[\frac{dF_X(y + d)}{dy} - \frac{dF_X(d)}{dy}\right] = \frac{f_X(y + d)}{\bar{F}_X(d)}$$

EXEMPLO 4-Solução

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y+d)}{\bar{F}_X(d)} = \frac{2(y+d)}{\int_d^1 2x dx} = \frac{2(y+d)}{1-d^2}$$

Logo

$$f_Y(y) = \frac{2y + 0{,}6}{0{,}91}, 0 < y < 0{,}7$$

- No exemplo 4 foi feita uma modificação na variável aleatória X de forma a se obter a variável aleatória $Y = (X - d)|(X > d)$ em que d corresponde ao valor da franquia.

- A variável aleatória Y corresponde ao valor de excesso de danos ocorridos somente para os sinistros acima da franquia.

- A seguradora somente é notificada pelo segurado sobre os sinistros que superam a franquia (d),

- Y é uma variável **aleatória truncada**, pois é obtida mediante a operação de restringir o domínio da variável aleatória original e redimensionar adequadamente a probabilidade sobre o novo domínio.
  - Uma distribuição truncada pode ser considerada como uma distribuição **condicionada a uma restrição** intervalar no suporte da distribuição.

- Os exemplos 2 e 4 são exemplos de modificações na variável aleatória da severidade de sinistros no sentido de introduzir o conceito de franquias dedutíveis,

$$Y = Max(0; X - d) = (X - d)$$

$$Y = (X - d)|(X > d)$$

- ...O segurador transfere ao segurado uma parte do risco ao estipular que somente arcará com as indenizações que excede um determinado patamar de franquia.

Referências

- Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: SAO Paulo, 2001.

- JAMES,B. R.; Probabilidade: **Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba, CRV 2020.