Teoria do Risco
Aula 11

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Modelos de risco Coletivo

A distribuição de S_{col}, os sinistros coletivos.

- o método da convolução a partir da distribuição de X e N
  - Um método interativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado poder computacional,

- método da função geradora de momentos.
  - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos.

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln(M_X(t)))$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = E\left[e^{t(X_1+X_2+..X_N)}\right] = E\left[e^{t(X_1)}e^{t(X_2)} \dots e^{t(X_N)}\right] = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})$$

Como $X_i s$ são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i}) = [M_X(t)]^N$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$\dots$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i}) = [M_X(t)]^N$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

$$M_{S_{col}}(t) = E\left[e^{ln\left(M_X(t)^N\right)}\right] = E\left[e^{N\,ln(M_X(t)\,)}\right]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln(M_X(t)\,))$$

EXEMPLO

Calcule $E(S_{col})$ por meio de $\mathrm{M}_{\mathrm{S_{col}}}(\mathrm{t})$, dado que X possui distribuição Exponencial (α) e N possui distribuição de Poisson(λ).

Se $\mathrm{N} \sim \mathrm{poisson}(\lambda)$, então

$$\mathrm{M_N(t)} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e^t}-1)}$$

Se $\mathrm{X} \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

$\mathrm{M_N(t)} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{t}-1)}$ $\qquad$ $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$

Como $\mathrm{M}_{\mathrm{S_{col}}}(\mathrm{t}) = \mathrm{M_N}(\ln(\mathrm{M_X}(\mathrm{t})))$, então:

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t)} = \mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-\mathrm{t}}\right)}-1\right)} = \boldsymbol{e^{\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}-1\right)}} = e^{(\alpha-t)^{-1}\lambda\alpha-\lambda}$$

$$\frac{d\mathrm{M_{scol}}(t)}{dt} = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-t)^2}e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-t}-\lambda}$$

$$M'_{scol}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-0)^2}e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-0}-\lambda} = \boldsymbol{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

EXEMPLO

Seja N com distribuição $Binomial\ (n, q)$.

Determinar uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$\mathrm{M}_{\mathrm{S}_{\mathrm{col}}}(\mathrm{t}) = \mathrm{M}_{\mathrm{N}}(\ln(\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{t})))$ $M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$

Assim:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{S}_{\mathrm{col}}}(\mathrm{t}) = \left(qe^{\ln(\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{t}))} + 1 - q\right)^n$$

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = (qM_X(t) + 1 - q)^n}$$

EXEMPLO

Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro (sem dedução da franquia) obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos de momentos do total agregado de sinistros S_{col}, dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $Binomial\ (n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col}.

$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$

$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$

Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{S}_{\mathrm{col}}}(\mathrm{t}) = (qM_X(t) + 1 - q)^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^n$$

Assim:

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n} = [q\alpha^{r}(\alpha - t)^{-r} + 1 - q]^{n}}$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} q\alpha^{r}(-\boldsymbol{r})(\alpha - t)^{-r-1}(-\mathbf{1})$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^{r}}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(\color{red}{0}) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - 0}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^{r}}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$\boldsymbol{E(S_{col})} = n(q + 1 - q)^{n-1}\frac{rq}{\alpha} = \boldsymbol{\frac{nqr}{\alpha}}$$

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i I_i$	$s_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$\mathrm{E}(\mathrm{S}_{\mathrm{ind}}) = \mathrm{E}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_{\mathrm{i}}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} E(X_i)$	$\mathrm{E}(\mathrm{S}_{\mathrm{col}}) = \mathrm{E}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_{\mathrm{i}}\right)$
$S_{ind}, X_i, \mathrm{B}_i, I_i$	s_{col}, X_i, N
$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$	$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln(M_X(t)\,))$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = \left.\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln(M_X(t)))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$\left.\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = M'_N(\ln(M_X(0)))\frac{M'_X(0)}{M_X(0)}$$

$$\left.\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = M'_N(\log(1))\frac{M'_X(0)}{1} = M'_N(0)M'_X(0)$$

$$M'_{S_{col}}(0) = E(N)E(X) = E(S_{col})$$

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(N)E(X)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = \mathrm{M'}_{\mathrm{N}}(\ln(\mathrm{M_X(t)}))\frac{\mathrm{M'_X(t)}}{\mathrm{M_X(t)}}$$

$$\frac{d^2M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(ln(M_X(t)))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(ln(M_X(t)))\left[\frac{M''_X(t)M_X(t) - M'_X(t)M'_X(t)}{M_X(t)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(ln(M_X(0)))\frac{M'_X(0)}{M_X(0)}\frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(ln(M_X(0)))\left[\frac{M''_X(0)M_X(0) - M'_X(0)M'_X(0)}{M_X(0)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0)E(X)\,E(X) + M'_N(0)[E(X^2) - E(X)^2]$$

$$E\left(S_{col}^2\right) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[var(X)]$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$var(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[var(X)] - E(N)^2E(X)^2$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\,[E(N^2) - E(N)^2] + E(N)var(X)$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\,var(N) + E(N)var(X)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo

Exemplo

Encontre os valores de $\mathrm{E}(S_{\mathrm{col}})$ e $var(S_{col})$ para as situações dos itens a seguir:

a) $\mathrm{N} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ e $\mathrm{X} \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$.

b) $\mathrm{N} \sim \mathrm{Binomial}(\mathrm{n}, \mathrm{q})$ e $\mathrm{X} \sim \mathrm{Gama}(\mathrm{r}, \alpha)$.

Exemplo

a) $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ e $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, então:

$$\mathrm{E}(N) = \lambda \qquad E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Logo:

$$\mathrm{E}(S_{\mathrm{col}}) = \mathrm{E}(N)E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$var(N) = \lambda \text{ e } var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = var(X)E(N) + E(X)^2 var(N)$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{\alpha^2}\lambda + \frac{1}{\alpha^2}\lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Exemplo

b) $N \sim \text{Binomial}(n, q)$ e $X \sim \text{Gama}(r, \alpha)$, então:

$$E(N) = nq \qquad E(X) = \frac{r}{\alpha}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{nqr}{\alpha}$$

$$var(N) = nq(1-q) \text{ e } var(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = \frac{r}{\alpha^2}nq + \frac{r^2}{\alpha^2}nq(1-q) = \frac{nqr[1 + r(1-q)]}{\alpha^2}$$

Exemplo

Suponha uma carteira de seguros cuja frequência de sinistros seja caracterizada pela variável aleatória $N \sim Po(12)$ e os valores dos sinistros seja $X \sim U_c(0,1)$, calcule $P(S_{col} \leq 10)$ utilizando a distribuição normal.

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(N)E(X)}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)}$$

Exemplo

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = 12 \times \frac{1}{2} = 6}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = \frac{1}{4}12 + 12\,\frac{1}{12} = 4}$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-6}{2}\right)$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P(Z \leq 2) = 0{,}97725$$