Matemática atuarial

AULA 25- Prêmios Carregados

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).

- Para incluirmos as despesas da seguradora no prêmio puro deve-se inicialmente dividir as despesas no que diz respeito à incidência.

- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
  - Comissão de corretagem,
  - Despesas com médicos examinadores,
  - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

Prêmios Carregados

- Em contrapartida, algumas despesas incidem enquanto o segurado estiver ligação com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
  - salários de funcionários,
  - despesas com informática,
  - correspondência,
  - aluguel,
  - impostos, etc.

- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurabilidade para diminuir o risco de insolvência da seguradora a partir da Teoria do Risco de Ruína.

Prêmios Carregados

- Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário.

A obrigação da segurado é, além de pagar as indenizações, pagar também as despesas com administrativas para seu funcionamento (durante o período de vigência do contrato).

b) Prêmio “Zillmerado” (Zilmer,1863).

Este caso, o segurado irá pagar um prêmio durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e, em seguida, pagará um prêmio relativo ao risco.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

Prêmio de Inventário.

- Seja, Z (obrigação da seguradora) uma v.a. cuja função (em relação ao tempo de vida adicional) pode ser descrita como:

$$Z = v^{k+1} + \gamma \, \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \quad se \; k \geq 0$$

- Y (obrigação do segurado) . O segurado se compromete a pagar o prêmio enquanto estiver vivo.

$$Y = P^{\gamma} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \quad se \; k \geq 0$$

Em que P^{γ} é a notação utilizada para designar o prêmio anual de inventário

Prêmio de Inventário.

- Assim, para

$$L = Z - Y$$
$$E(L) = 0 = E(Z) - E(Y)$$

$$E\left(v^{k+1} + \gamma\, \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = E\left(P^{\gamma}\, \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right)$$

$$A_x + \gamma \ddot{a}_x = P^{\gamma} \ddot{a}_x$$

→ $\gamma \ddot{a}_x$ corresponde ao valor atuarial da carga de gestão

→ $P^{\gamma} \ddot{a}_x$ corresponde ao prêmio puro único de inventário, Π^{γ} .

$$P^{\gamma} \ddot{a}_x = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

$$\Pi^{\gamma} = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

Prêmio de Inventário.

- Alternativamente

$$P^{\gamma}\ddot{a}_x = A_x + \gamma\ddot{a}_x$$

$$P^{\gamma} = \frac{A_x + \gamma\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \gamma$$

$$P^{\gamma} = P + \gamma$$

Prêmio periódico nivelado, de um seguro vitalício.

- Ou

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_x}$$

➢ Exemplo 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $R\$\ 1{,}00$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\ 0{,}005}$** relativos a gastos administrativos.

- Exemplo 10

Solução :

$$\Pi^{\gamma} = \mathrm{A}_{40} + \gamma \ddot{a}_{40}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{40}} = \frac{\frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{N_{40}} + 0{,}005$$

➢ Exemplo 11

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de temporário por 30 anos que paga $R\$\ 1{,}00$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\ 0{,}005}$** relativos a gastos administrativos.

Exemplo 11

Solução :

$$\Pi^{\gamma} = A_{40^{1}:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}\right)$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{40:\overline{30}|}} = \frac{\frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}\right)}{\frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}}} = \frac{M_{40} - M_{70}}{N_{40} - N_{70}} + 0{,}005$$

➢ Exemplo 12

Uma pessoa de 20 anos decide contratar uma aposentadoria vitalícia que pagará $R\$1,00$ ao ano até que este segurado faleça. Ele se aposentará caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado enquanto estiver ativo.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 a taxa de juros de 3% ao ano e considere **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos (gastos que ocorrem desde da assinatura do contrato)., qual será o valor do prêmio a ser pago pelo segurado?

➢ Exemplo 12

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1|}} & se\ 0 < t < 40 \\ P\ddot{a}_{\overline{40|}} & se\ t \geq 40. \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ T > 40 \\ \gamma\ \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 < T \leq 40. \end{cases}$$

$$\Pi^{\gamma} = {}_{\mathbf{40|}}\boldsymbol{\ddot{a}_{20}} + \gamma\ddot{a}_{20}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{N_{60}}{D_{20}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{20}}{D_{20}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{20:\overline{40}|}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{20}}{D_{20}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{20} - N_{60}}{D_{20}}}$$

Prêmios Carregados

$$\Pi(x) = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

b) Prêmio "Zillmerado".

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Gasto relativo ao seguro e a despesas que a seguradora terá no momento de aquisição do contrato, então:

$$E(Z) = A_x + \alpha$$

Em que α é o gasto inicial da seguradora.

- O compromisso do segurado é dado por:

$$E(Y) = P^{\alpha}\ddot{a}_{x:\overline{s}|} + P\ {}_{s|}\ddot{a}_x$$

P^{α} é o prêmio considerando as despesas gastas no período s (menor que a cobertura).

P é o prêmio periódico nivelado, puro, de um seguro vitalício

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Assim, para

$$L = Z - Y$$

Tem-se:

$$E(Z) = E(Y)$$

$$A_x + \alpha = P^{\alpha}\,\ddot{a}_{x:\overline{s}|} + P\;{}_{s|}\ddot{a}_x$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\;{}_{s|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Relembrando que ${}_{s|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x - P\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

$$A_x - P\ddot{a}_x = 0$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

Prêmio periódico constante, puro de uma dada modalidade.

- Exemplo 13

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos, durante 10 anos.

- Exemplo 13

Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + P$$

$$P^{\alpha} = \frac{\mathbf{0,005}}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + \frac{\mathrm{M}_{22}}{N_{22}}$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

k pagamentos sendo

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi_x + \alpha - P\ {}_{s|}\ddot{a}_x$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} + P$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Em que P corresponde ao prêmio puro periódico de uma dada modalidade de seguros.

➢ Exemplo 14

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida misto por um período de 10 anos que paga $1\ u.m.$ ao final do ano de morte caso o segurado morra no período de 10 anos, ou receba o mesmo valor caso, sobreviva a esse período. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos, mais gastos adicionais de encardos de $R\$\ 0{,}002$ durante 2 anos.

- Exemplo 14

$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}}$$

$$P^c = \frac{\dfrac{M_{22} - M_{32} + D_{32}}{D_{22}}}{\dfrac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\dfrac{N_{22} - N_{24}}{D_{22}}}$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

k pagamentos sendo

b) Prêmio "Zillmerado".

$$\Pi^{\alpha} = \Pi_x + \alpha - P\ {}_{s|}\ddot{a}_x$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$P^{c} = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$