Matemática Atuarial II

Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L.H. Status último sobrevivente: Seguros pagos no momento da falha. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_MatAtuarial2.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Status último sobrevivente

A densidade de $F_{T_{\overline{x,y}}}(t)$ é obtida por meio de :

$$\frac{\partial F_{T_{\overline{x,y}}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \ {}_t q_{\overline{x,y}}}{\partial t} = \frac{\partial \left[{}_t\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}} \ {}_t\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{y}} \right]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_{T_{\overline{x,y}}}(t)}{\partial t} = f_{T_x}(t) \ {}_t\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{y}} + f_{T_y}(t) \ {}_t\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}$$

Lembrando da expressão da força de mortalidade

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_t p_x}$$

Então:

$$f_{T_x}(t) = \mu(x+t) \ {}_t p_x \quad \text{e} \quad f_{T_y}(t) = \mu(y+t) \ {}_t p_y$$

Status último sobrevivente

A densidade de $F_{T_{\overline{x,y}}}(t)$ é obtida por meio de :

$$\frac{\partial F_{T_{\overline{x,y}}}(t)}{\partial t} = \mu(x+t)\ {}_t p_x\ {}_t q_y + \mu(y+t)\ {}_t p_y\ {}_t q_x$$

$$\boldsymbol{f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \mu(x+t)\ {}_t p_x\ {}_t q_y + \mu(y+t)\ {}_t p_y\ {}_t q_x}$$

Status último sobrevivente

A força de mortalidade do status último sobrevivente será:

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{f_{T_{\overline{x,y}}}(t)}{{}_tp_{\overline{y,y}}}$$

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\mu(x+t)\ {}_tp_x\ {}_tq_y + \mu(y+t)\ {}_tp_y\ {}_tq_x}{1 - {}_tq_x\ {}_tq_y}$$

Resumo

$$T_{x,y} = min\{T(x), T(y)\}$$

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x\,{}_tq_y = {}_tq_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_tp_x\,{}_tp_y = {}_tp_{x,y}$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = {}_tp_{x,y}\mu(x+t, y+t)$$

$$T_{\overline{x,y}} = max\{T(x), T(y)\}$$

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_tq_x\,{}_tq_y = {}_tq_{\overline{x,y}}$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x\,{}_tp_y = {}_tp_{\overline{x,y}}$$

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\mu(x+t)\,{}_tp_x\,{}_tq_y + \mu(y+t)\,{}_tp_y\,{}_tq_x}{1 - {}_tq_x\,{}_tq_y}$$

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_tp_{\overline{x,y}}\mu(\overline{x+t, y+t})$$

Exemplo 1: Determine a função acumulada e a função sobrevivência para o status último sobrevivente.

Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10-t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$_tq_x = {}_tq_y = 0{,}2(t - 0{,}05t^2)$$

$$\mu(x+t) = \mu(y+t) = \frac{2}{10 - \mathrm{t}}$$

Exemplo 1:

$$ {}_{t}q_{\overline{x,y}} = {}_{t}\,q_{x}\;{}_{t}q_{y} $$

$$ {}_{t}q_{\overline{x,y}} = [0{,}2(t - 0{,}05t^{2})]^{2} $$

Exemplo 1:

$$ {}_t p_{\overline{x,y}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \, {}_t p_y $$

$$ {}_t p_{\overline{x,y}} = \left[1 - 0{,}2\left(t - 0{,}05t^2\right)\right] + \left[1 - 0{,}2\left(t - 0{,}05t^2\right)\right] - \left[1 - 0{,}2\left(t - 0{,}05t^2\right)\right]^2 $$

$$ {}_t p_{\overline{x,y}} = 2[1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)] - [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2 $$

$$ {}_t p_{\overline{x,y}} = [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]\{2 - [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]\} $$

$$ {}_t p_{\overline{x,y}} = [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]\{1 + 0{,}2(t - 0{,}05t^2)\} $$

$$ {}_t p_{\overline{x,y}} = 1 - [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2 $$

Exemplo 2: Determine a <u>função de densidade</u> e a <u>força de mortalidade</u> para o status último sobrevivente.

Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_tq_x = {}_tq_y = 0{,}2(t - 0{,}05t^2)$$

$$\mu(x+t) = \mu(y+t) = \frac{2}{10-t}$$

$${}_tq_{\overline{x,y}} = [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2$$

$${}_tp_{\overline{x,y}} = 1 - [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2$$

Exemplo 2:

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \mu(x+t)\ {}_tp_x\ {}_tq_y + \mu(y+t)\ {}_tp_y\ {}_tq_x$$

$$\begin{aligned} & f_{T_{\overline{x,y}}}(t) \\ & = \frac{2}{10-\mathrm{t}}\{[1-0{,}2(t-0{,}05t^2)]0{,}2(t-0{,}05t^2)\} \\ & + \frac{2}{10-\mathrm{t}}\{[1-0{,}2(t-0{,}05t^2)]0{,}2(t-0{,}05t^2)\} \end{aligned}$$

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \frac{4}{10-\mathrm{t}}\{[1-0{,}2(t-0{,}05t^2)]0{,}2(t-0{,}05t^2)\}$$

Exemplo 2:

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\mu(x+t)\ {}_tp_x\ {}_tq_y + \mu(y+t)\ {}_tp_y\ {}_tq_x}{{}_tp_{\overline{x,y}}}$$

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\frac{4}{10-\mathrm{t}}\left\{\left[1-0{,}2\left(t-0{,}05t^2\right)\right]0{,}2\left(t-0{,}05t^2\right)\right\}}{1-[0{,}2(t-0{,}05t^2)]^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10-t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_t p_{x,y} = [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - [0{,}01(10-t)^2]^2$$

$$\mu(x+t, y+t) = \frac{4}{10-\mathrm{t}}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2 \frac{4}{10-t}$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = 1 - [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2$$

$${}_t q_{\overline{x,y}} = [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2$$

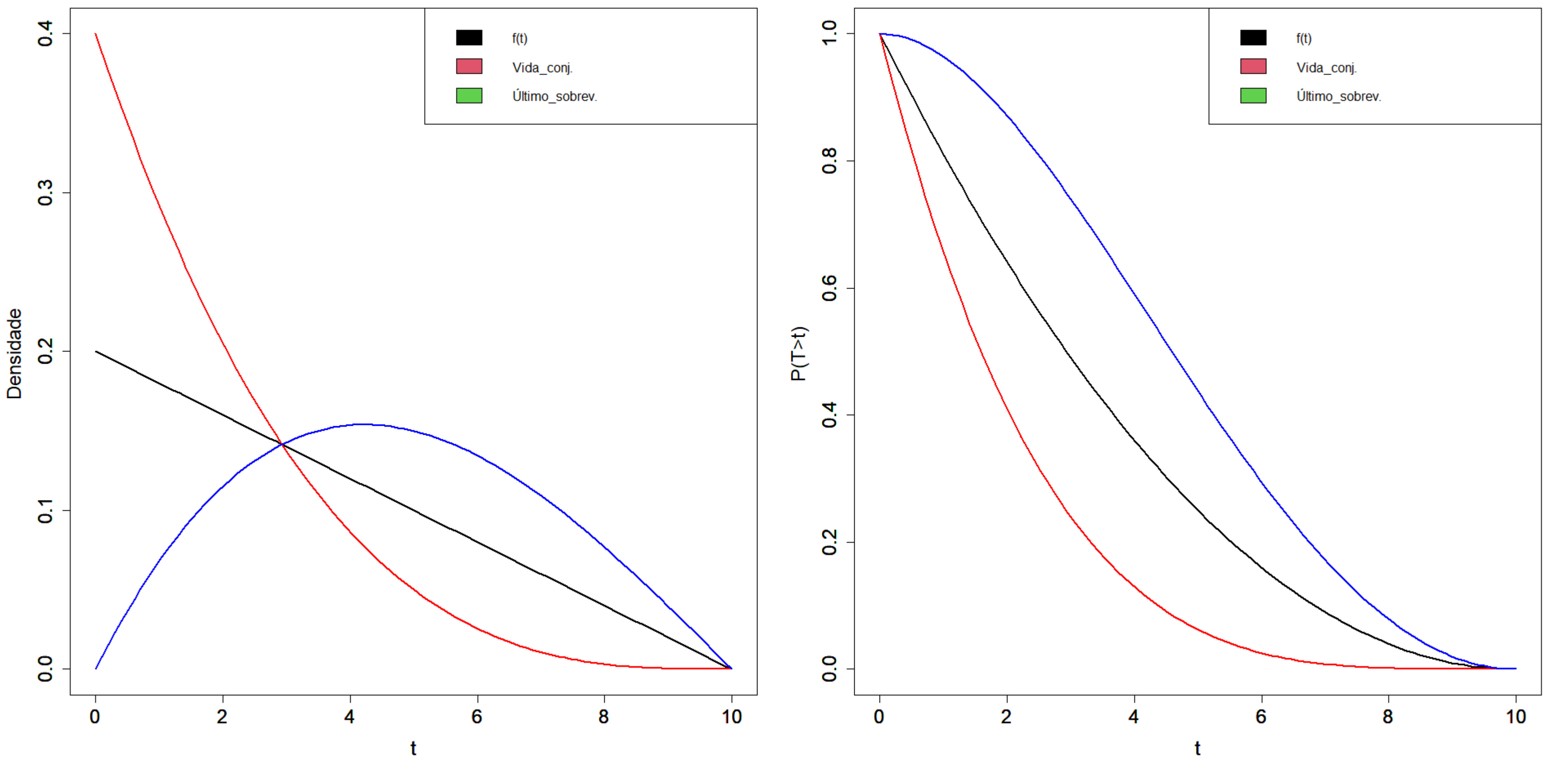
$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\frac{4}{10-\mathrm{t}}\{[1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]0{,}2(t - 0{,}05t^2)\}}{1 - [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2}$$

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \frac{4}{10-\mathrm{t}}\{[1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]0{,}2(t - 0{,}05t^2)\}$$

$$e_x = e_y = \mathbf{3,3333}$$

$$e_{x,y} = \mathbf{2}$$

$$e_{\overline{x,y}} \approx \mathbf{4,46}$$



f(t)
Vida_conj.
Último_sobrev.
Densidade
t
P(T>t)

Status último sobrevivente(Seguro vitalício)

Ao lidar com $T_{\overline{x,y}}$, onde T_x e T_y são variáveis aleatórias contínuas da sobrevida de x e y, temos que o prêmio puro único do seguro vitalício, com benefício unitário, é calculado por

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{\overline{x,y}}}(t)dt$$

Status último sobrevivente(Seguro temporário)

Caso o seguro tenha uma cobertura pré-determinada então o prêmio puro único do seguro temporário, com benefício unitário (pago no momento da falha do status) será:

$$\bar{A}_{\overline{u}^{1}:\overline{n|}} = \int_{0}^{n} e^{-\delta t} f_{T_{\overline{u}}}(t) dt$$

em que $u = \{x, y\}$, logo $f_{T_{\overline{u}}}(t) = f_{T_{\overline{x,y}}}(t)$.

Exemplo 1: Seja $T_{\overline{x,y}} = max(T_x, T_y)$ em que $T_x \sim Exp(0{,}025)$ e $T_y \sim Exp(0{,}02)$. Usando $\delta = 0{,}05$. Calcule o valor de $\bar{A}_{\overline{u}^1:\overline{20|}}$, em que $u = \{x, y\}$.

Solução:

$$\bar{A}_{\overline{u}^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-\delta t}\{[\mu(x+t)\ {}_tp_x]\ {}_tq_y + [\mu(y+t)\ {}_tp_y]\ {}_tq_x\}dt.$$

Tendo em visa que

$${}_tp_x = 1 - e^{-0{,}025t}\ ,\ {}_tq_x = e^{-0{,}025t},\ \mu(x+t) = 0{,}025,$$

$${}_tp_y = 1 - e^{-0{,}02t},\ {}_tq_y = e^{-0{,}02t} \text{ e } \mu(y+t) = 0{,}02$$

Então:

$$\bar{A}_{\overline{u}^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-\delta t}\{[\mu(x+t)\ {}_tp_x]\ {}_tq_y + [\mu(y+t)\ {}_tp_y]\ {}_tq_x\}dt\,.$$

Tendo em visa que

$${}_tp_x = 1 - e^{-0{,}025t}\ ,\ {}_tq_x = e^{-0{,}025t},\ \mu(x+t) = 0{,}025,$$

$${}_tp_y = 1 - e^{-0{,}02t},\ {}_tq_y = e^{-0{,}02t}\ \text{e}\ \mu(y+t) = 0{,}02$$

Então:

$$\bar{A}_{\overline{u}^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-0{,}05t}\{[(0{,}025)(1-e^{-0{,}025t})]e^{-0{,}02t} + [(0{,}02)(1-e^{-0{,}02t})]e^{-0{,}025t}\}dt\,,$$

$$\bar{A}_{\overline{u}^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} (0{,}025e^{-0{,}07t} - 0{,}045e^{-0{,}095t} + 0{,}02e^{-0{,}075t})dt\,,$$

$$\boldsymbol{\bar{A}_{\overline{u}^1:\overline{20|}} \approx 0{,}0734}.$$

Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x,y}}$

$$\bar{A}_{x,y} + \bar{A}_{\overline{x,y}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$

$$_{m|}\bar{A}_{\overline{x,y}} + {}_{m|}\bar{A}_{x,y} = {}_{m|}\bar{A}_x + {}_{m|}\bar{A}_y$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{n}|} + \bar{A}_{\bar{u}^1:\bar{n}|} = \bar{A}_{x^1:\bar{n}|} + \bar{A}_{y^1:\bar{n}|}$$

$$_{m|}\bar{A}_{\bar{u}^1:\bar{n}|} + {}_{m|}\bar{A}_{u^1:\bar{n}|} = {}_{m|}\bar{A}_{x^1:\bar{n}|} + {}_{m|}\bar{A}_{y^1:\bar{n}|}$$

em que $u = \{x, y\}$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.