

Matemática atuarial

Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

Revisão de probabilidade

- A ciência objetiva a coleta de informações na natureza e a formulação de modelos (..) que expliquem parte dos fenômenos ou permitam a sua previsão.
- Método científico,
 - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.
- Modelo e realidade sejam por vezes erroneamente confundidos é evidente.

Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre estará envolto por um certo grau de incerteza.
- Modelos determinísticos
 - Condições bastante controladas,
 - Variações desprezadas
- Modelos probabilísticos
 - Controle total e inviabilizado
 - Variações não podem ser ignoradas.

Revisão de probabilidade

- **Fenômeno aleatório** é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
 - Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico**.
- **Espaço amostral (Ω)** é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de probabilidade

- **Espaço amostral (Ω)** é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.
- **Definição** Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento. Ω é o evento certo, \emptyset o evento impossível. Se $\omega \subset \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).



Revisão de probabilidade

➤ EXEMPLO 1:

Defina os seguintes espaços amostrais.

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{ \quad \}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{ \quad \}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você)

$$\Omega = \{ \quad \}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*;

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você);

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*;

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

$$A = \{1,6 \leq x \leq 1,7\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você);

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$

$$A = \{0 \leq t \leq 30\}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade será chamado evento aleatório.

Revisão de probabilidade

➤ Conceito de Probabilidade

➤ Teoria clássica

- Dado o espaço de resultados Ω , constituído por um número finito de n elementos igualmente prováveis, todos eles igualmente possíveis, define-se a probabilidade de acontecimento de A , e representa-se por $P(A)$, como sendo a razão de resultados favoráveis A e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados de } A}{n^{\circ} \text{ de resultados possíveis}}$$

➤ Teoria Frequentista

- Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento A é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

- Em que n_A é o número de ensaios em que o evento A foi observado, e n o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com que se realiza A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.

➤ Probabilidade subjetiva e lógica

- Define-se como uma medida do grau de confiança de uma pessoa em relação a uma proposição. Ela é função da quantidade de informação disponível pela pessoa, e possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Revisão de probabilidade

➤ Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto $P(\cdot)$ que associa a subconjuntos A de Ω um número real $P(A)$ que satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

I) Para todo $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$;

II) $P(\Omega) = 1$

III) Se $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

I) Se A_1, A_2, \dots, A_n forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
 - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.
- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de Ω um número real.

➤ EXEMPLO 2:

Sabe-se que em uma fabrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos $\left(D \rightarrow P(D) = \frac{1}{4} \right)$

Itens perfeitos $\left(Pe \rightarrow P(Pe) = \frac{3}{4} \right)$

Revisão de probabilidade

Para uma amostra $n = 2$ peças retiradas é possível construir uma tabela onde X é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e $P(X)$ será a probabilidade do resultado.

X	0	1	2
	(Pe, Pe)	$(D, Pe)(Pe, D)$	(D, D)
$P(X)$	$\frac{3}{4} * \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4} * \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} * \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Unifal 2
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de probabilidade

➤ Variáveis Aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

- $P(X = x)$ Função de probabilidade (fp)
- $P(X = x_i) \geq 0$ para todo i .
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

➤ Variáveis aleatórias contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes aos \mathbb{R} , assim como para variáveis contínuas em geral....

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

- Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

Em geral ela é representada por $F(x)$, ou $\Phi(x)$.

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_k} f_X(z) dz \\ \sum_{i=0}^k P(X = x_i) \end{cases}$$

Revisão de probabilidade

➤ EXEMPLO 3:

a)

X	1	2	3	4
P(X)	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

c)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,7 & \text{se } x = 0 \\ 0,5 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) = \frac{6}{5} \left(\frac{5}{6} \right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left(-\frac{1}{e^{2(0)}} \right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}dx + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}dx$$

$$\left. \frac{x^2}{20} + \frac{x}{10} \right|_0^2 + \left. \left(-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20} \right) \right|_2^6$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Revisão de probabilidade

Esperança de variáveis aleatórias

- ...a motivação histórica: uma forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.
- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.
- ...serve como parâmetro para vários modelos probabilísticos.

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de probabilidade

Esperança de variáveis aleatórias

- A esperança de uma variável aleatória X é dada por:
- Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \mu_X$$

- Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_X$$

Esperança de uma função de variáveis aleatórias

- Seja X uma variável aleatória e $g(\cdot)$ uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função $g(X)$ denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_j g(x_j)P(X = x_j), & X \text{ discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx, & X \text{ contínuo} \end{cases}$$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Variáveis aleatórias

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

c)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$$E(X) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,4 = 3$$

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$E(X) = 0 \times 0,6 + 1 \times 0,4 = 0,4$$

c)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx = uv - \int v du$$

$$u = 2x \rightarrow \frac{du}{dx} = 2$$

$$dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$E(X) = 2x \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-2x}}{2} 2 dx = \left(-xe^{-2x} \Big|_0^{\infty} \right) - \left(\frac{e^{-2x}}{2} \Big|_0^{\infty} \right)$$

$$E(X) = \left(-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} + \frac{0}{1} \right) - \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$