Matemática Atuarial II

AULA-3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Introdução

- Ao longo do curso de Matemática Atuarial I a teoria desenvolvida foi pensando somente na vida de uma única pessoa.
  - No entanto, a maioria dos produtos atuariais do ramo vida (podem envolver) envolvem mais de uma vida.
  - Planos de previdência que são revertidos em pensão
  - Seguros (considerando a vida do beneficiário)
- ...

Vetor aleatório

Diferentes fatores observados na mesma unidade amostral ou então o mesmo fator em unidades amostrais diferentes

Definição: Vetor aleatório (variável aleatória multidimensional ou variável aleatória multivariada) *Sejam* $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ *variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade, então* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ *corresponde a um vetor aleatório.*

.

Vetor aleatório

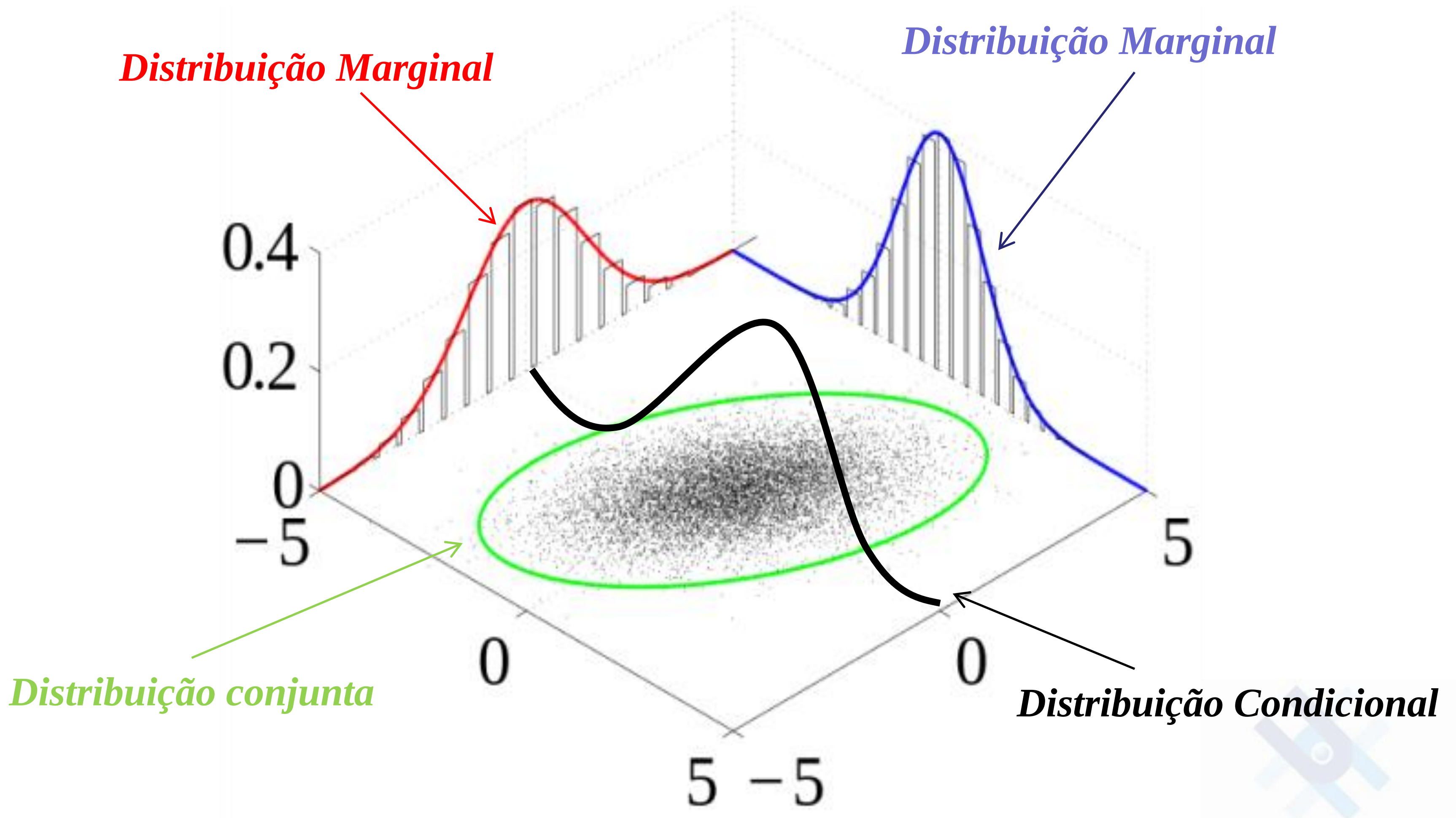
Ao se trabalhar com vetores aleatórios, surge a noção de três tipos de modelos probabilísticos.

- A distribuição conjunta: Descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

- A distribuição marginal: Descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

- A distribuição condicional: Descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.

Vetor aleatório



Variável aleatória discreta bidimensional

Definição: (Variável aleatória discreta bidimensional) *Seja a variável aleatória* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$, *onde* X_1 *e* X_2 *são duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Então* $\boldsymbol{X}$ *é uma variável aleatória bidimensional e a função de probabilidade conjunta* $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ *definida para cada par* (x_1, x_2) *é dada por:*

$$P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, \mathrm{X}_2 = x_2)$$

em que $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ para todo (x, y) e $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(x_{1i}, x_{2j}\right) = 1$

.

Variável aleatória contínua bidimensional

Definição: (Variável aleatória contínua bidimensional) Seja a variável aleatória $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$,onde X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Então $\boldsymbol{X}$ é uma variável aleatória bidimensional. A função de densidade conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ definida para cada par (x_1, x_2) é dada por:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) > 0 \text{ para todo } (x_1, \mathrm{x}_2) \in \mathbb{R}.$$

em que $\int \int f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 d\mathrm{x}_2 = 1.$

EXEMPLO 1: Considere duas pessoas cujo tempo de vida adicional pode ser modelado pela distribuição de probabilidade expressa na tabela abaixo:

X→ Tempo de vida adicional da pessoa 1.

Y→ Tempo de vida adicional da pessoa 2.

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Observe que $\sum\sum P(x,y) = \sum P(x) = \sum P(y) = 1$

Função de distribuição Conjunta

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n)$$

- $F(-\infty, y_2, \dots, y_n) = F(y_1, -\infty, \dots, y_n) = F(y_1, y_2, \dots, -\infty) = 0$

- $F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$

- F é não-decrescente e contínua à direita, com respeito a cada um dos eixos associados a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

- F é tal que, para $\forall\, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sendo $a_i < b_i$ e $1 \leq i \leq n$ então:

$$P(a_1 < Y_1 \leq b_1, a_2 < Y_2 \leq b_2, \dots, a_n < Y_n \leq b_n) \geq 0$$

EXEMPLO 2: Sejam dois indivíduos, cujo tempo de vida adicional para cada um possa ser representado pelas variáveis aleatórias T_x e T_y, respectivamente. Considere ainda que T_x e T_y possam ser modelados pela seguinte função distribuição de densidade conjunta:

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $F_{T_x}(t)$ e $F_{T_x,T_y}(t,s)$.

EXEMPLO 2: Calcule $F_{T_x}(t)$

$$f_{T_x}(t) = \int_0^{10} f_{T_x,T_y}(t,s)ds = 0{,}0006\left(t^2 s - \frac{2ts^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_{s=0}^{s=10}$$

$$\boldsymbol{f_{T_x}(t) = 0{,}002\left(3t^2 - 30t + 100\right), \qquad 0 < t < 10}$$

$$F_{T_x}(t) = \int_0^{t} f_{T_x}(u)\,du = 0{,}002\,(u^3 - 15u^2 + 100u)\Big|_{u=0}^{u=t}$$

$$\boldsymbol{F_{T_x}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 0{,}002\left(t^3 - 15t^2 + 100t\right), & 0 < t \le 10 \\ 1, & t > 10 \end{cases}}$$

EXEMPLO 2: Calcule $F_{T_xT_y}(t,s)$

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = \int_0^t \int_0^s f_{T_x,T_y}(u,v)\,dv\,du = \int_0^t 0{,}0006\left[u^2v - uv^2 + \frac{v^3}{3}\right]_{v=0}^{v=s} du$$

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = \int_0^t 0{,}0006\left(u^2s - us^2 + \frac{s^3}{3}\right) du$$

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = 0{,}0006\left[\frac{u^3}{3}s - \frac{u^2}{2}s^2 + \frac{s^3}{3}u\right]_{u=0}^{u=t}$$

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = 0{,}0006\left(\frac{t^3s}{3} - \frac{t^2s^2}{2} + \frac{s^3t}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{F_{T_x,T_y}(t,s)} = \begin{cases} \mathbf{0{,}0001}(\mathbf{2}t^3s - \mathbf{3}t^2s^2 + \mathbf{2}s^3t), & \mathbf{0} < s \leq \mathbf{10}, \mathbf{0} < t \leq \mathbf{10} \\ \mathbf{0{,}001}(\mathbf{200}s - \mathbf{30}s^2 + \mathbf{2}s^3), & \mathbf{0} < s \leq \mathbf{10}, t > \mathbf{10}, \\ \mathbf{0{,}001}(\mathbf{2}t^3 - \mathbf{30}t^2 + \mathbf{200}t), & s > \mathbf{10}, \mathbf{0} < t \leq \mathbf{10}. \\ \mathbf{1}, & s > \mathbf{10}, t > \mathbf{10}. \end{cases}$$

EXEMPLO 2: Lembrando que $F_{T_x,T_y}(t,10) = F_{T_x}(t)$, assim:

$$F_{T_x}(t) = 0{,}0001(2t^3 10 - 3t^2 100 + 2t1000)$$

$$F_{T_x}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 0{,}001(2t^3 - 30t^2 + 200t), & 0 < t \leq 10 \\ 1, & t > 10 \end{cases}$$

Variável aleatória bidimensional

Como no caso unidimensional, a função de sobrevivência também está presente para os modelos conjuntos. Assim dado o vetor aleatório (T_x, T_y), então:

$$S_{T_x,T_y}(t,s) = 1 - F_{T_x,T_y}(t,s) = P\left(T_x > t\ , T_y > s\right)$$

EXEMPLO 4: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0{,}02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determina a função acumulada e a função de sobrevivência.

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_{T_xT_y}(t,s) = \int_0^t \int_0^s 0{,}0004(10-u)(10-v)dvdu$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_{T_xT_y}(t,s) = \int_0^t \int_0^s 0{,}0004(10-u)(10-v)\,dv\,du$$

$$\boldsymbol{F_{T_xT_y}(t,s)} = \begin{cases} \mathbf{0,04}(\boldsymbol{s} - \mathbf{0,05}\boldsymbol{s}^2)(\boldsymbol{t} - \mathbf{0,05}\boldsymbol{t}^2), & \mathbf{0} < \boldsymbol{s} \leq \mathbf{10}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \mathbf{10}, \\ \mathbf{0,2}(\boldsymbol{s} - \mathbf{0,05}\boldsymbol{s}^2) & \mathbf{0} < \boldsymbol{s} \leq \mathbf{10}, \boldsymbol{t} > \mathbf{10} \\ \mathbf{0,2}(\boldsymbol{t} - \mathbf{0,05}\boldsymbol{t}^2), & \boldsymbol{s} > \mathbf{10}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \mathbf{10} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{s} \geq \mathbf{10}, \boldsymbol{t} \geq \mathbf{10} \end{cases}$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{T_xT_y}(t,s) = \int_t^{10}\int_s^{10} f_{T_x,T_y}(u,v)\,dv\,du$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{T_xT_y}(t,s) = \int_t^{10}\int_s^{10} f_{T_x,T_y}(u,v)\,dv\,du$$

$$\boldsymbol{S_{T_x,T_y}(t,s)} = \begin{cases} \mathbf{0,0001}(\mathbf{10}-\boldsymbol{s})^{\mathbf{2}}(\mathbf{10}-\boldsymbol{t})^{\mathbf{2}}, & \mathbf{0} < \boldsymbol{s} \leq \mathbf{10}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \mathbf{10}, \\ \mathbf{0,01}(\mathbf{10}-\boldsymbol{s})^{\mathbf{2}} & \mathbf{0} < \boldsymbol{s} \leq \mathbf{10}, \boldsymbol{t} < \mathbf{0} \\ \mathbf{0,01}(\mathbf{10}-\boldsymbol{t})^{\mathbf{2}} & \boldsymbol{s} < \mathbf{0}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \mathbf{10} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{s} \geq \mathbf{10}, \boldsymbol{t} \geq \mathbf{10} \end{cases}$$

Valor esperado - Variável aleatória bidimensional

Seja (X_1, X_2) um vetor de bidimensional. A esperança ou valor esperado da função $g(x_1, x_2)$, denotada por $E[g(X_1, X_2)]$ é definida por:

$$E[g(X_1, X_2)] = \sum\sum g(x_1, x_2)\, P(x_1, x_2),$$

se as variáveis são discretas

$$E[g(X_1, X_2)] = \int\int g(x_1, x_2) f_{X,Y}(x, y) dxdy$$

se as variáveis são contínuas.

EXEMPLO 5: Calcule o valor esperado de $g(T_x, T_y) = T_x T_y$ tal que:

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Resp:

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10}\int_0^{10} st\, 0,0006(t-s)^2 ds\, dt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t0,0006 \int_0^{10} t^2 s - 2ts^2 + s^3\, dsdt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t0,0006 \left[\frac{t^2 s^2}{2} - \frac{2ts^3}{3} + \frac{s^4}{4}\right]_{s=0}^{s=10} dt$$

EXEMPLO 5:

$$E\left[g\left(T_x, T_y\right)\right] = \int_0^{10} t0,0006\left(t^2 50 - \frac{2000t}{3} + 2500\right) dt$$

$$E\left[g\left(T_x, T_y\right)\right] = \int_0^{10} t^3 0,03 - t^2 0{,}4 + t1{,}5\, dt$$

$$E\left[g\left(T_x, T_y\right)\right] = \left[\frac{t^4 0{,}03}{4} - \frac{t^3 0{,}4}{3} + \frac{t^2 1{,}5}{2}\right]_{t=0}^{t=10} = 75 - \frac{400}{3} + 75$$

$$E\left[g\left(T_x, T_y\right)\right] = \frac{50}{3}$$

Distribuição condicional-Variável aleatória bidimensional

Função probabilidade de X_1 dado X_2, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias discretas

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}$$

Função densidade de X_1 dado X_2, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias contínuas

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Independência de variáveis aleatórias

A independência permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Independência entre variáveis aleatórias.

Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

- Para as variáveis aleatórias discretas,

$$P(X = x|Y = y) = P(X = x)$$

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$$

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ **independentes** $\Leftrightarrow \boldsymbol{P_{X,Y}(x, y)} \equiv \boldsymbol{P_X(x)P_Y(y)}, \forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$**.**

- Para as variáveis aleatórias contínuas,

$$f_{X|Y}(X|Y) = f_X(x)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$$

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ **independentes** $\Leftrightarrow \boldsymbol{f_{X,Y}(x, y)} \equiv \boldsymbol{f_X(x)f_Y(y)}, \forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$

Independência de variáveis aleatórias

- Para as variáveis aleatórias discretas,

X, Y independentes $\Leftrightarrow \boldsymbol{P_{X,Y}(x,y) \equiv P_X(x)P_Y(y)}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Para as variáveis aleatórias contínuas,

X, Y independentes $\Leftrightarrow \boldsymbol{f_{X,Y}(x,y) \equiv f_X(x)f_Y(y)}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{F_{X,Y}(x,y) \equiv F_X(x)F_Y(y)}$$

$$\boldsymbol{S_{X,Y}(x,y) \equiv S_X(x)S_Y(y)}$$

EXEMPLO 6: Determine se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sendo que:

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

EXEMPLO 6: Determine se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sendo que:

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

EXEMPLO 7: Seja o tempo de vida futuro T_{45} e T_{50} independentes, obtenha as expressões pedidas:

a) A probabilidade de que ambos vivam pelo menos mais 10 anos.

b) A probabilidade de que ao menos um esteja morto ao fim de 30 anos.

c) A probabilidade de que ambos alcancem a idade de 60 anos.

d) A probabilidade de que um faleça antes de alcançar 65 anos e de que o outro faleça exatamente 40 anos após a data 0.

EXEMPLO 7:

a) A probabilidade de que ambos vivam pelo menos mais 10 anos.

$$S_{T_{45}T_{50}}(10,10) = S_{T_{45}}(10)S_{T_{50}}(10) = {}_{10}p_{45}\,{}_{10}p_{50}$$

b) A probabilidade de que ao menos um esteja morto ao fim de 30 anos.

$$P(T_{45} \leq 30 \text{ ou } T_{50} \leq 30) = P(T_{45} \leq 30) + P(T_{50} \leq 30) - P(T_{45} \leq 30 \text{ e } T_{45} \leq 30)$$

$$P(T_{45} \leq 30 \text{ ou } T_{50} \leq 30) = {}_{30}q_{45} + {}_{30}q_{50} - {}_{30}q_{45}\,{}_{30}q_{50}$$

EXEMPLO 7:

c) A probabilidade de que ambos alcancem a idade de 60 anos.

$$P(T_{45} > 15 \text{ e } T_{50} > 10) = S_{T_{45}}(15)S_{T_{50}}(10) = {}_{15}p_{45}\,{}_{10}p_{50}$$

d) A probabilidade de que um faleça antes de alcançar 65 anos e de que o outro faleça exatamente 40 anos após a data 0.

$$P[\,(T_{45} \leq 20 \text{ e } T_{50} = 40) \text{ ou } (T_{45} = 40 \text{ e } T_{50} \leq 10)\,]$$

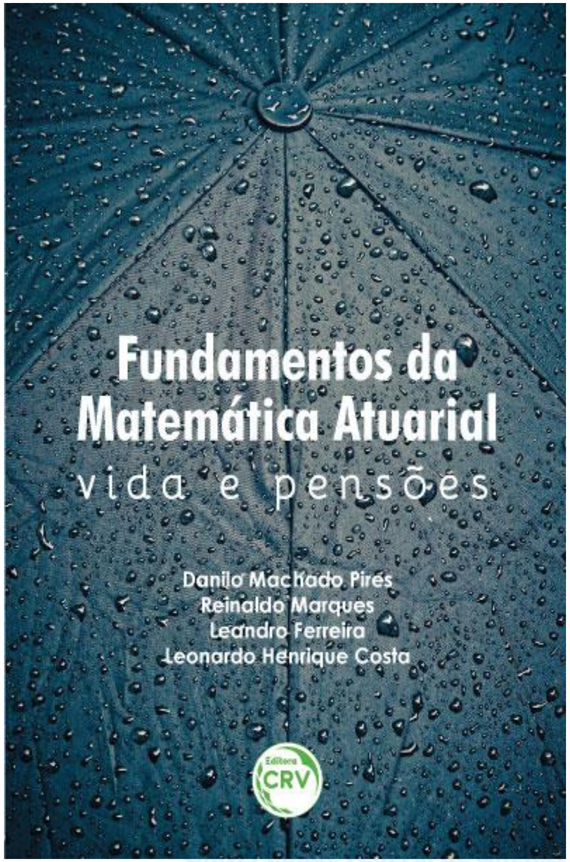
$$= P[(T_{45} \leq 20 \text{ e } T_{50} = 40)] + P[(T_{45} = 40 \text{ e } T_{50} \leq 10)]$$

$$= P(T_{45} \leq 20\,)P(T_{50} = 40) + P(\,T_{50} \leq 10)P(T_{45} = 40\,)$$

$$= {}_{20}q_{45}[\,{}_{40}p_{50}q_{90}] + {}_{10}q_{50}[\,{}_{40}p_{45}q_{85}]$$

- **Portal Halley : https://atuaria.github.io/portalhalley/**

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Matemática Atuarial II

AULA-4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

São ferramentas importantes da inferência quando se tem interesse no estudo de valores extremos e quantis (ou funções destes).

Considere o vetor aleatório n −dimensional $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ é então possível definir:

$$X_{(1)} = min(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

e

$$X_{(n)} = max(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

Cujos valores assumidos são os valores extremos dentre as n variáveis.

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

Para o caso em que $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ sejam independentes, então:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(x)]$$

e

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^{n} [F_{X_i}(x)]$$

Demonstração:

Se $P(X_{(1)} > x)$ então $P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x, \dots, X_n > n)$, assim:

$$P\left(X_{(1)} > x\right) = P(X_1 > x)P(X_2 > x)\dots P(X_n > x)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_{X_i}(x)]$$

Se $P(X_{(n)} \leq x)$ então $P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x, \dots, X_n \leq n)$, assim:

$$P\left(X_{(n)} \leq x\right) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)\dots P(X_n \leq x)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^{n}[F_{X_i}(x)]$$

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

Para o caso em que $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sejam independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \left[1 - F_{X_i}(x)\right]^{\mathrm{n}}$$

e

$$F_{X_{(n)}}(x) = \left[F_{X_i}(x)\right]^{n}$$

EXEMPLO 1: Considere um seguro de vida feito por um grupo de 4 pessoas de mesma idade e mesmo sexo, em que o benefício somente será pago caso todas as pessoas venham a falecer. Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada um dos membros desse grupo seja modelado pela variável aleatória $Y_i, i = 1,2,3,4$ e que sejam independentes e identicamente distribuídas, tal que $Y_i \sim Exp(0{,}02)$.

Solução

EXEMPLO 1: Considere um seguro de vida feito por um grupo de 4 pessoas de mesma idade e mesmo sexo, em que o benefício somente será pago caso todas as pessoas venham a falecer. Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada um dos membros desse grupo seja modelado pela variável aleatória $Y_i, i = 1,2,3,4$ e que sejam independentes e identicamente distribuídas, tal que $Y_i \sim Exp(0{,}02)$.

Solução

$$F_{Y_{(n)}}(10) = P\left(Y_{(n)} \leq 10\right) = \prod_{i=1}^{4} \left[F_{X_i}(10)\right]$$

$$F_{Y_{(n)}} = (1 - e^{-10\times 0{,}02})^4 \approx 0{,}107\%$$

EXEMPLO 2: Refaça o exemplo 1 porém considere que o seguro é pago assim que a primeira pessoa do grupo vir a óbito.

Solução

EXEMPLO 2: Refaça o exemplo 1 porém considere que o seguro é pago assim que a primeira pessoa do grupo vir a óbito.

Solução

$$F_{Y_{(1)}}(10) = P\left(Y_{(1)} \leq 10\right) = 1 - \prod_{i=1}^{4}\left[1 - F_{X_i}(10)\right]$$

$$F_{Y_{(1)}}(10) = 1 - (e^{-10\times 0,02})^4 \approx 55,06\%$$

COVARIÂNCIA

- A covariância é o valor esperado do produto dos desvios de cada variável em relação à suas médias.

- *Medida* de "intensidade" da dependência *linear* entre as variáveis e pode assumir valores de qualquer sinal.

  - Quando duas variáveis aleatórias X e Y são dependentes, geralmente é de interesse avaliar quão fortemente estão relacionadas uma com a outra.

COVARIÂNCIA

A covariância entre as variáveis aleatórias X e Y (num mesmo espaço de probabilidades) é dada por:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

ou

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação ($\rho_{X,Y}$ ou $\rho(X,Y)$) é uma medida que também descreve o relacionamento entre variáveis aleatórias, sendo que seu valor está entre -1 e 1. Assim:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \qquad -1 < \rho_{X,Y} < 1$$

Dado que σ_X e σ_Y existem, e $\sigma_Y > 0$ e $\sigma_X > 0$

Valores próximos de ± 1 indicam boa tendência de alinhamento.

$|\rho_{X,Y}| = 1$ se uma variável for função linear da outra.

EXEMPLO 3: Um agência de seguros presta serviços a diversos clientes que compraram uma apólice residencial e outra de automóvel da mesma seguradora. Para uma apólice de automóvel as opções de indenização são representadas pela variável aleatória X, enquanto, para uma apólice residencial, as opções são caracterizadas pela variável aleatória Y. Suponha que a função de probabilidade conjunta seja dada pela tabela abaixo.

Y/X	100	250
0	0,2	0,05
100	0,10	0,15
200	0,2	0,3

Calcule a covariância e a correlação entre as variáveis.

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$E(X) = 100(0{,}5) + 250(0{,}5) = \mathbf{175}$$

$$E(Y) = 0(0{,}25) + 100(0{,}25) + 200(0{,}5) = \mathbf{125}$$

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mathbf{175})(Y - \mathbf{125})]$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$Cov(X,Y) = \sum_x \sum_y (X-175)(Y-125)P(x,y)$$

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= (100-175)(0-125)P(100{,}0) + (100-175)(100-125)P(100{,}100) \\ &+ (100-175)(200-125)P(100{,}200) + (250-175)(0-125)P(250{,}0) \\ &+ (250-175)(100-125)P(250{,}100) + (250-175)(200-125)P(250{,}200) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Cov(X,Y) = 1875}$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$E(X^2) = 100^2(0{,}5) + 250^2(0{,}5) = 36250$$

$$\boldsymbol{var(X) = 36250 - 175^2 = 5625}$$

$$E(Y^2) = 0^2(0{,}25) + 100^2(0{,}25) + 200^2(0{,}5) = 22500$$

$$\boldsymbol{var(Y) = 22500 - 125^2 = 6875}$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1875}{\sqrt{5625}\sqrt{6875}} = 0{,}3015$$

EXEMPLO 4: Sejam dois indivíduos, cujo tempo de vida adicional para cada um possa ser representado pelas variáveis aleatórias T_x e T_y, respectivamente. Considere ainda que T_x e T_y possam ser modelados pela seguinte função distribuição de densidade conjunta:

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a correlação entre T_x e T_y

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E\left(T_x T_y\right) - E(T_x)E\left(T_y\right)}{\sqrt{[E(T_x^2) - E(T_x)^2]\left[E\left(T_y\right) - E\left(T_y\right)^2\right]}}$$

$$f_{T_x}(t) = 0{,}002(3t^2 - 30t + 100), \qquad 0 < t < 10$$

$$f_{T_y}(s) = 0{,}002(3s^2 - 30s + 100), \qquad 0 < s < 10$$

$$E(T_x) = \int_0^{10} t\, f_{T_x}(t)dt = E\left(T_y\right) = \int_0^{10} s\, f_{S_x}(s)ds = \mathbf{5}$$

$$E(T_x^2) = \int_0^{10} t^2\, f_{T_x}(t)dt = E\left(T_y^2\right) = \int_0^{10} s^2\, f_{S_x}(s)ds = \frac{\mathbf{110}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{var(T_x) = \frac{110}{3} - 5^2 = \frac{35}{3} var\left(T_y\right)}$$

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(T_xT_y) = \int_0^{10}\int_0^{10} ts f_{T_x,T_y}(t,s)\,dt\,ds = \frac{50}{3}$$

$$\boldsymbol{Cov(T_xT_y) = \frac{50}{3} - 25 = -\frac{25}{3}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{X,Y} = \frac{-\frac{25}{3}}{\frac{35}{3}} = -\frac{5}{7}}$$

EXEMPLO 5 : As variáveis aleatórias T_x e T_y são associadas ao tempo de vida de x e y, cuja modelo de probabilidade conjunto é dado por

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672

- Qual o valor atuarial de um seguro feito por y?
- Qual o valor atuarial para um seguro feito por y que pague a x caso ele esteja vivo ao final do ano de morte de y?

*Considere $i = 5\%$ ao ano e $b = 1$.

EXEMPLO 5: Qual o valor atuarial de um seguro feito por y que pague $b = 1$?

$$A_y = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1} P(T_y = t).$$

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	$\mathbf{0,26}$
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	$\mathbf{0,24}$

$$A_y = v^1 P(T_y = 0) + v^2 P(T_y = 1) + v^3 P(T_y = 2) + v^4 P(T_y = 3)$$

$$A_y = v^1(0{,}25) + v^2(0{,}26) + v^3(0{,}25) + v^4(0{,}24) \approx \mathbf{0{,}88733}$$

EXEMPLO 5: Qual o valor atuarial para um seguro feito por y que pague a x um benefício $b = 1$ caso ele esteja vivo ao final do ano de morte de y?

T_y/T_x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	$\mathbf{0,26}$
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	$\mathbf{0,24}$
	$\mathbf{0,03}$	$\mathbf{0,08}$	$\mathbf{0,16}$	$\mathbf{0,21}$	$\mathbf{0,24}$	$\mathbf{0,028}$	

$$VPA = v^1 P(T_y = 0) P(T_x > 1) + v^2 P(T_y = 1) P(T_x > 2) + v^3 P(T_y = 2) P(T_x > 3) + v^4 P(T_y = 3) P(T_x > 4)$$

EXEMPLO 5:

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	$\mathbf{0,26}$
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	$\mathbf{0,24}$
	$\mathbf{0,03}$	$\mathbf{0,08}$	$\mathbf{0,16}$	$\mathbf{0,21}$	$\mathbf{0,24}$	$\mathbf{0,028}$	

$$VPA = v^1 P(T_y = 0)P(T_x > 1) + v^2 P(T_y = 1)P(T_x > 2) + v^3 P(T_y = 2)P(T_x > 3) + v^4 P(T_y = 3)P(T_x > 4)$$

$$VPA = v^1\ {}_0p_y q_y(p_x) + v^2\ p_y q_{y+1}(\ {}_2p_x) + v^3\ {}_2p_y q_{y+2}(\ {}_3p_x) + v^4\ {}_3p_y q_{y+3}(\ {}_4p_x)$$

$$\boldsymbol{VPA = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ ({}_tp_y)(q_{y+t})(\ {}_{t+1}p_x) \approx 7,65595}$$

Força de mortalidade

- A força de mortalidade é a taxa na qual as pessoas em uma determinada população estão morrendo em um período de tempo específico.
  - Função risco $h(x)$
  - Taxa de falha
  - Valor pequeno para função implica em unidade exposta a menor quantidade de risco...

Força de mortalidade

- Para T_x e T_y serem independentes e esses resultados podem ser estendidos para n variáveis, o mesmo raciocínio vale para o cálculo da força de mortalidade conjunta, assim

$$\mu(x+t, y+s) = \frac{f_{T_x,T_y}(t,s)}{S_{T_x,T_y}} = \left[\frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}\right]\left[\frac{f_{T_y}(s)}{S_{T_y}(s)}\right] = \mu(x+t)\mu(y+s)$$

EXEMPLO 6: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0{,}02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determina a força de mortalidade conjunta.

Como já visto anteriormente

$$S_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0001(10-s)^2(10-t)^2, & 0 < s \leq 10{,}0 < t \leq 10, \\ 0{,}01(10-s)^2 & 0 < s \leq 10, t < 0 \\ 0{,}01(10-t)^2 & s < 0, 0 < t \leq 10 \\ 0 & s \geq 10, t \geq 10 \end{cases}$$

Então

$$S_{T_x}(t) = 0{,}01(10-t)^2 \qquad \text{e} \qquad S_{T_y}(t) = 0{,}01(10-s)^2$$

Logo

…

Como já visto anteriormente

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{0{,}02(10-t)}{0{,}01(10-t\ )^2} = \frac{2}{10-t}, \qquad 0 < t < 10$$

$$\mu(y+s) = \frac{f_{T_y}(s)}{S_{T_y}(s)} = \frac{0{,}02(10-s)}{0{,}01(10-s\ )^2} = \frac{2}{10-s}, \qquad 0 < s < 10.$$

$$\mu(x+t, y+s) = \frac{4}{(10-t)(10-s)}, 0 < t < 10, 0 < s < 10.$$

- **Portal Halley : https://atuaria.github.io/portalhalley/**

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.