

# Teoria do Risco

## Aula 20-Parte 1

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

## PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$T_t = \begin{cases} \min\{t | t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0\} \\ \infty \text{ se } U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \end{cases}$$

Probabilidade de ruína **no horizonte infinito em tempo contínuo** é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall t \ 0 \leq t < \infty) = 1 - \varphi(u)$$

Probabilidade de ruína **no horizonte finito em tempo contínuo** é definido por:

$$\psi(u, \tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall t, 0 \leq t < \tau) = 1 - \varphi(u, \tau).$$

$$\psi(u, \tau) \leq \psi(u)$$

## PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$\widetilde{T}_n = \min\{n : U(n) < 0\}.$$

Probabilidade de ruína no horizonte infinito em **tempo discreto** é definida por:

$$\tilde{\psi}(u) = P(\widetilde{T}_n < \infty | U(0) = u) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \leq n < \infty) = 1 - \tilde{\varphi}(u).$$

Probabilidade de ruína no horizonte finito em **tempo discreto** é definido por:

$$\tilde{\psi}(u, \tau) = P(\widetilde{T}_n < \tau) = P(U(n) < 0, \forall n, 0 \leq n < \tau) = 1 - \tilde{\varphi}(u, \tau).$$

$$\tilde{\psi}(u, \tau) \leq \tilde{\psi}(u)$$

## PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO NO CASO POISSON COMPOSTO

A probabilidade de ruína em período infinito  $\psi(u)$  pode ser calculada por:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} | T_t < \infty)}, u \geq 0$$

Em que  $U(T)$  é o valor da reserva no momento da ruína e  $R$  é o coeficiente de ajustamento.

\*Teorema fundamental do Risco

**Definição** Seja  $X$  a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento  $r = R$  é a menor solução não trivial da equação em  $r$ :

$$M_{S_t-ct}(r) = 1$$

Em que  $M_{S_t-ct}(r) = E(e^{r(S_t-ct)})$ ,

$$M_{S_t-ct}(r) = E(e^{r(S_t-ct)}) = 1$$

$$e^{-rct} E(e^{rS_t}) = 1$$

$$e^{-rct} M_{S_t}(r) = 1$$

$$M_{N_t}(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

**EXEMPLO 1:** Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$  e que  $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$ . Encontre o valor não trivial de  $R$  considerando o prêmio  $c = \frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}$ .

**SOLUÇÃO:**

$$M_{N_t}(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

$$X \sim \text{Exp}(\alpha) \quad N_t \sim \text{Po}(\lambda t) \quad c = \frac{\ln[M_S(\beta)]}{\beta} \quad M_{N_t}(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t [M_X(r) - 1]} = e^{r \frac{\ln[M_S(\beta)]}{\beta} t}$$

$$\lambda(M_X(r) - 1) = r \frac{\ln[M_S(\beta)]}{\beta}$$

$$\frac{\beta \lambda}{r} \left( \frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \right) = \ln e^{\lambda [M_X(\beta) - 1]}$$

$$\frac{\beta \lambda}{r} \left( \frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \right) = \lambda [M_X(\beta) - 1]$$

$$\frac{\beta}{r} \left( \frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \right) = \left( \frac{\alpha}{\alpha - \beta} - 1 \right)$$

$$X \sim \text{Exp}(\alpha) \quad N_t \sim \text{Po}(\lambda t) \quad c = \frac{\ln[M_S(\beta)]}{\beta} \quad M_{N_t}(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

...

$$\frac{\beta}{r} \left( \frac{r}{\alpha - r} \right) = \left( \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\left( \frac{r}{\alpha - r} \right) = \left( \frac{r}{\alpha - \beta} \right)$$

$$r\alpha - r\beta = r\alpha - r^2$$

$$r^2 - r\beta = 0$$

- $r = 0$
- $R = \beta$



**EXEMPLO 2:** Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$  e  $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$ . Encontre o valor de  $R$  considere o prêmio baseado no valor esperado,  $c = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{2\lambda}{\alpha^2} \theta$ .

$$X \sim \text{Exp}(\alpha)$$

$$N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$$

$$c = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{2\lambda}{\alpha^2} \theta$$

$$e^{\lambda t[M_X(r)-1]} = e^{rct}$$

$$\lambda t[M_X(r) - 1] = rct$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 = r \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha^2} \right)$$

$$\left( \frac{r}{\alpha - r} \right) = r \left( \frac{\alpha + 2\theta}{\alpha^2} \right)$$

$$\alpha^2 = (\alpha + 2\theta)(\alpha - r)$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha\theta - \alpha r - 2\theta r$$

$$0 = 2\alpha\theta - r(\alpha + 2\theta)$$

$$R = \frac{2\alpha\theta}{\alpha + 2\theta}$$

Um caso especial amplamente abordado na literatura é quando  $N_t \sim Po(\lambda t)$ , assim:

$$M_{N_t}(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t(M_X(r)-1)} = e^{rct}$$

$$\lambda t(M_X(r) - 1) = rct$$

$$\mathbf{M_X(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1}$$

Caso  $c = E(S)(1 + \theta) = \lambda E(X)(1 + \theta)$ , então:

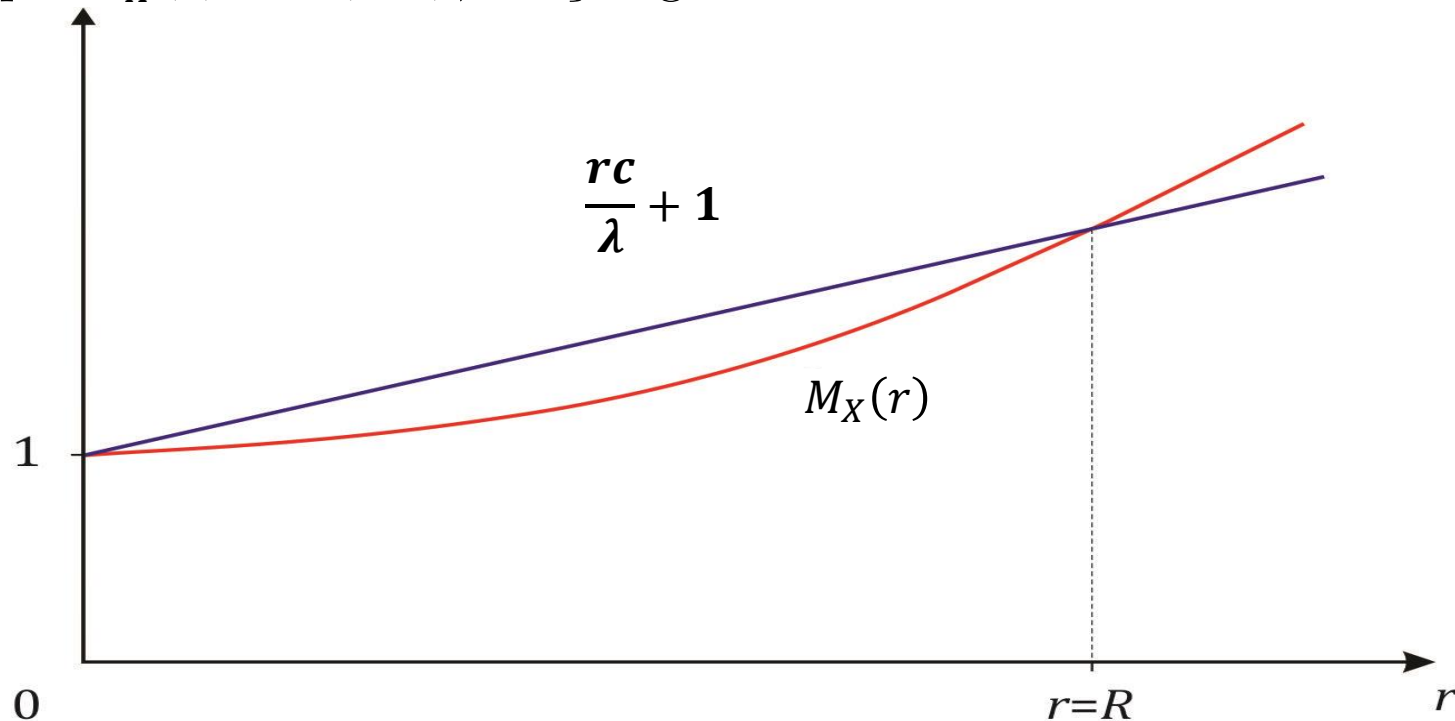
$$\mathbf{1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)}$$

## PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO

- Seja  $X$  a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento  $r = R$  é a menor solução não trivial da equação em  $r$ :

$$M_X(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1$$

Em que  $M_X(r) = E(e^{rX})$ , função geradora de momentos de  $X$ .



## PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO

Caso  $c \leq E(S)$  temos que  $\frac{rc}{\lambda} + 1$  e  $M_X(r)$  somente se interceptaram no ponto  $R = 0$  e esse seria então o coeficiente de ajustamento, sendo assim:

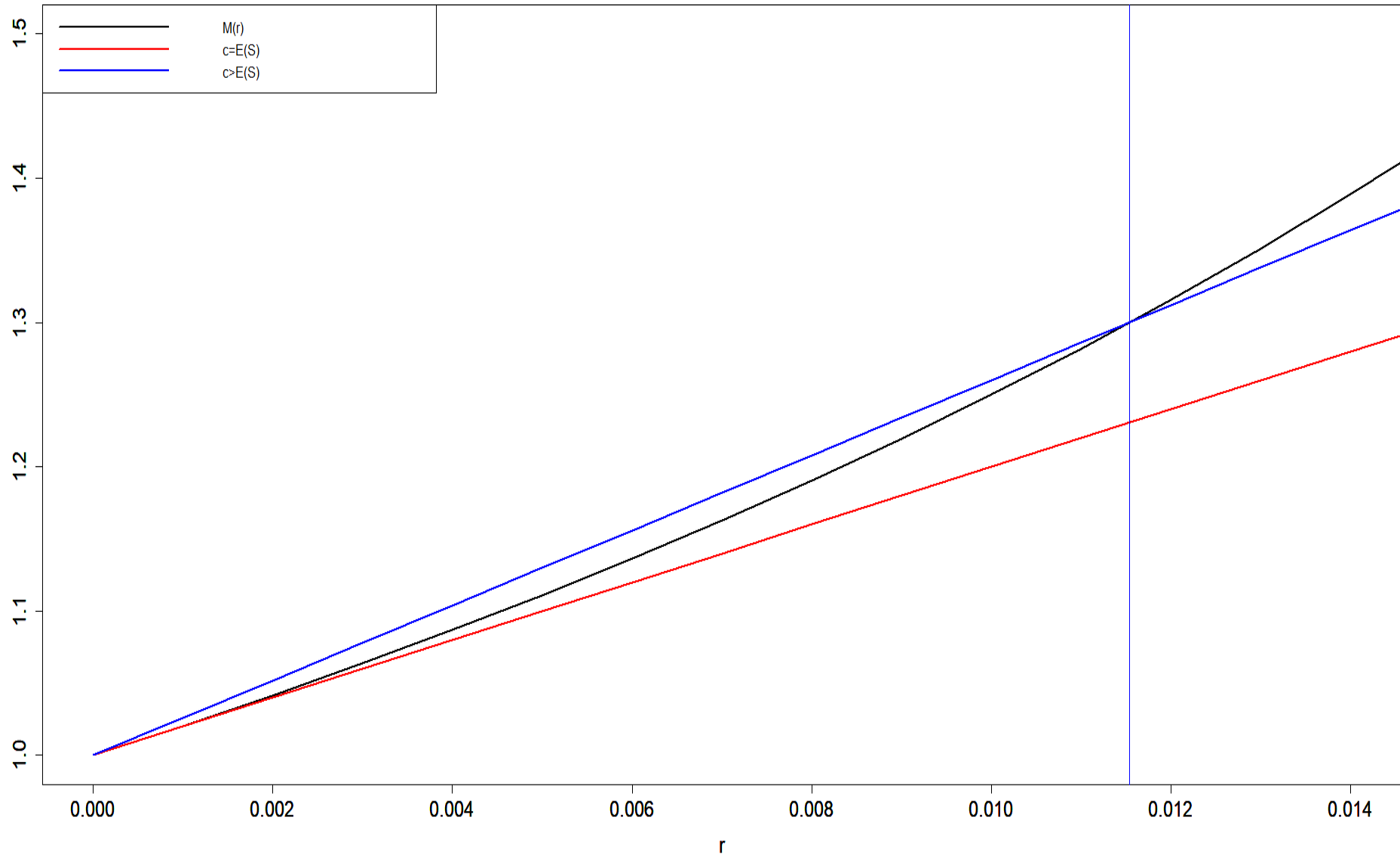
$$\psi(u) = \frac{e^{-0u}}{E(e^{-0U(T)} | T_t < \infty)} = 1$$

$$E(U_t) \leq 0$$

Ou seja, a escolha do prêmio puro de risco, certamente levará a ruína.

Considere  $N_t \sim Po(\lambda t)$ ,  $X \sim Exp(\alpha)$  e  $c = E(S)$ , Então  $f(r) = M_X(r) = \frac{0,05}{0,05-r}$   $g(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1$

- Para  $\alpha = 0,05$  e  $\lambda = 10$  temos  $E(S) = 200$ , logo  $g(r) = \frac{r}{0,05} + 1$ .
- Para  $c = 1,3E(S) = 260$  temos  $g(r) = 26r + 1$ ,



**EXEMPLO 3:** Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ . Encontre o coeficiente de ajustamento.

Solução:

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

...

**EXEMPLO 3:** Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ . Encontre o coeficiente de ajustamento.

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

**SOLUÇÃO:**

$$1 + \frac{(1 + \theta)}{\alpha}r = \frac{\alpha}{\alpha - r}$$

$$\alpha^2 + \alpha r + \alpha \theta r - \alpha r - r^2 - \theta r^2 - \alpha^2 = 0$$

$$(1 + \theta)r^2 - \theta \alpha r = 0$$

$$R = \frac{\theta \alpha}{1 + \theta}$$



$$c = (1 + \theta)E(S)$$

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r).$$

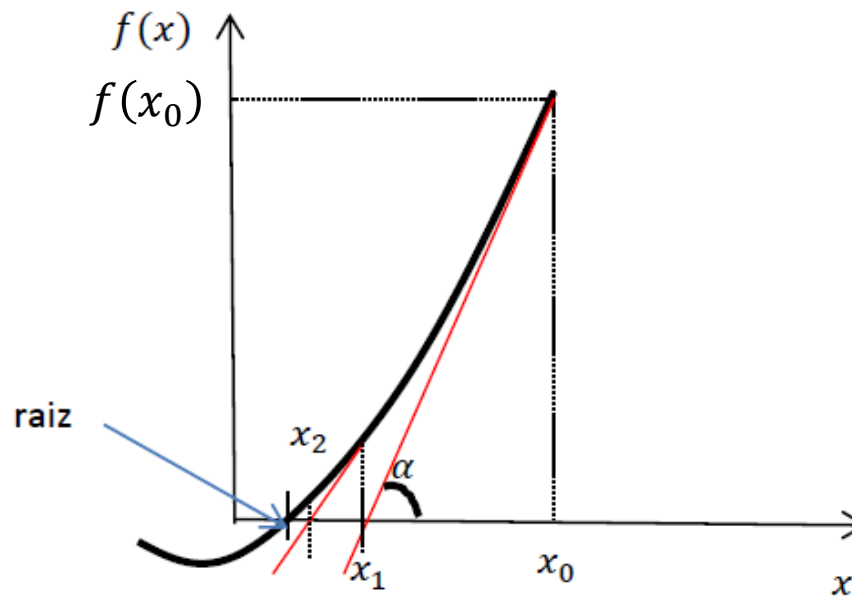
Dependendo da distribuição de  $X$ , não é possível encontrar analiticamente o coeficiente de ajustamento  $R$ . Geralmente, métodos numéricos são utilizados e um valor inicial para  $R$  é requerido.

# MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON

- Tem o objetivo estimar as raízes de uma função.
- Escolhe-se uma aproximação inicial.
- Calcula-se a equação da reta tangente da função neste ponto e a interseção dela com o eixo das abscissas, afim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Repete-se o processo até a convergência para o valor de  $x$ .



$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Logo a reta tangente a  $f(x)$  que passa no ponto  $x_2$  é dada por:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \rightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

De modo geral

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**EXEMPLO 4:** Encontre a raiz quadrada de 5 usando o método de NEWTON-RAPHSON

## SOLUÇÃO

Considere  $x = \sqrt{5}$ , então  $x^2 = 5$ , logo  $x^2 - 5 = 0$  logo iremos usar o método para achar a raiz da função  $f(x) = x^2 - 5$ .

Dessa forma,  $f(x) = x^2 - 5$ , então  $f'(x) = 2x$ , então:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

**EXEMPLO 4:** Considere  $x = \sqrt{5}$ , então  $x^2 = 5$ , logo  $x^2 - 5 = 0$  logo iremos usar o método para achar a raiz da função  $f(x) = x^2 - 5$ . Dessa forma

$f(x) = x^2 - 5$ , então  $f'(x) = 2x$ , então

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

É sensato supor que a raiz estará entre 2 e 3 pois  $2^2 = 4$  e  $3^2 = 9$ , assim  $x_0 = 2,5$

$$x_1 = 2,5 - \frac{f(2,5)}{f'(2,5)} = 2,25$$

$$x_2 = 2,25 - \frac{f(2,25)}{f'(2,25)} = 2,2361$$

$$x_3 = 2,2361 - \frac{f(2,2361)}{f'(2,2361)} = 2,236068$$

$$x_4 = 2,236068 - \frac{f(2,236068)}{f'(2,236068)} = 2,236068$$

$$c = (1 + \theta)E(S)$$

A velocidade da convergência ( caso ocorra) é fortemente relacionada a escolha do valor inicial para  $x_0$ .

No caso da utilização do método para determinar o valor do coeficiente de determinação  $R$  o valor indicado como melhor escolha é dado por:

$$R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$$

Uma vez que esse resultado corresponde ao valor máximo de  $R$ , conforme a desigualdade.

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$$

**EXEMPLO 5:** Suponha que o sinistro agregado  $S$  tem distribuição de Poisson composta, com parâmetro  $\lambda = 4$ . Considere que o prêmio recebido é igual a 7 ( $c = 7$ ) e que a distribuição de  $X$  é dada por:

$$P(X = 1) = 0,6 ; \quad P(X = 2) = 0,4.$$

Determine o coeficiente de ajustamento.

# Solução

Sendo que o coeficiente de ajustamento  $R > 0$  satisfaz  $H(R) = 0$ . Para resolver tal equação, pode-se utilizar o método iterativo de Newton-Raphson .

Como  $1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$ , definimos

$$H(r) = 1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)$$



## SOLUÇÃO

$$H(r) = 1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)$$

Assim:

$$R_{j+1} = R_j - \frac{H(R_j)}{H'(R_j)}.$$

Considerando o valor inicial  $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$

# Solução

Considerando o valor inicial  $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

$$E(X) = 1(0,6) + 2(0,4) = 1,4$$

$$E(X^2) = 1(0,6) + 4(0,4) = 2,2$$

$$c = (1 + \theta)E(S) = (1 + \theta)E(N)E(X) = (1 + \theta)\lambda E(X)$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1 = \frac{7}{4(1,4)} - 1 = 0,25$$

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \sum_x e^{rX} p(X = x) = 0,6e^r + 0,4e^{2r}.$$

## SOLUÇÃO

$$H(r) = 1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)$$

$$H(r) = 1 + 1,75r - 0,6e^r - 0,4e^{2r}$$

$$H'(r) = 1,75 - 0,6e^r - 0,8e^{2r}$$

$$R_{j+1} = R_j - \frac{1 + 1,75R_j - 0,6e^{R_j} - 0,4e^{2R_j}}{1,75 - 0,6e^{R_j} - 0,8e^{2R_j}}$$

$$R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)} = 0,3182$$

$$R_1 = 0,3182 - \frac{1 + 1,75(0,3182) - 0,6e^{(0,3182)} - 0,4e^{2(0,3182)}}{1,75 - 0,6e^{(0,3182)} - 0,8e^{2(0,3182)}}$$

$$R_1 = 0,3182 - \frac{1 + 1,75(0,3182) - 0,6e^{(0,3182)} - 0,4e^{2(0,3182)}}{1,75 - 0,6e^{(0,3182)} - 0,8e^{2(0,3182)}}$$

...

$j$	$R_j$	$H(R_j)$	$H'(R_j)$	$R_{j+1}$
0	0,3182	-0,0238	-0,5865	0,2776
1	0,2776	-0,0031	-0,4358	0,2705
2	0,2705	-0,0001	-0,4106	0,2703
3	0,2703	0,0000	-0,4098	0,2703

# Referências

- LEMOS, S., R., R. **Probabilidade de Ruína no mercado de Seguros; fundamentos teóricos e alguns resultados de simulação.** Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2008.
- RAMOS, P. A. F. L.. **Princípios de cálculo de prêmios e medidas de risco em modelos atuariais,** Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2014.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.



# Teoria do Risco

## Aula 20-Parte 2

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

## PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO, $c = (1 + \theta)E(S)$

- Quando o processo ruína no horizonte infinito é Poisson composto com  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T_t)} | T_t < \infty)} = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-Ru}$$

Como  $R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta}$ , então

$$\psi(u) = \frac{\alpha - \frac{\theta\alpha}{1+\theta}}{\alpha} e^{-\frac{\theta\alpha}{1+\theta}u} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\left(\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}\right)}$$

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

**EXEMPLO 1:** Considere que  $X \sim \text{Exp}(0,8)$ ,  $u = 5$  e  $\theta = 0,3$ . Então calcule a probabilidade de Ruína para o segurador.

**Solução**

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\left(\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}\right)}$$



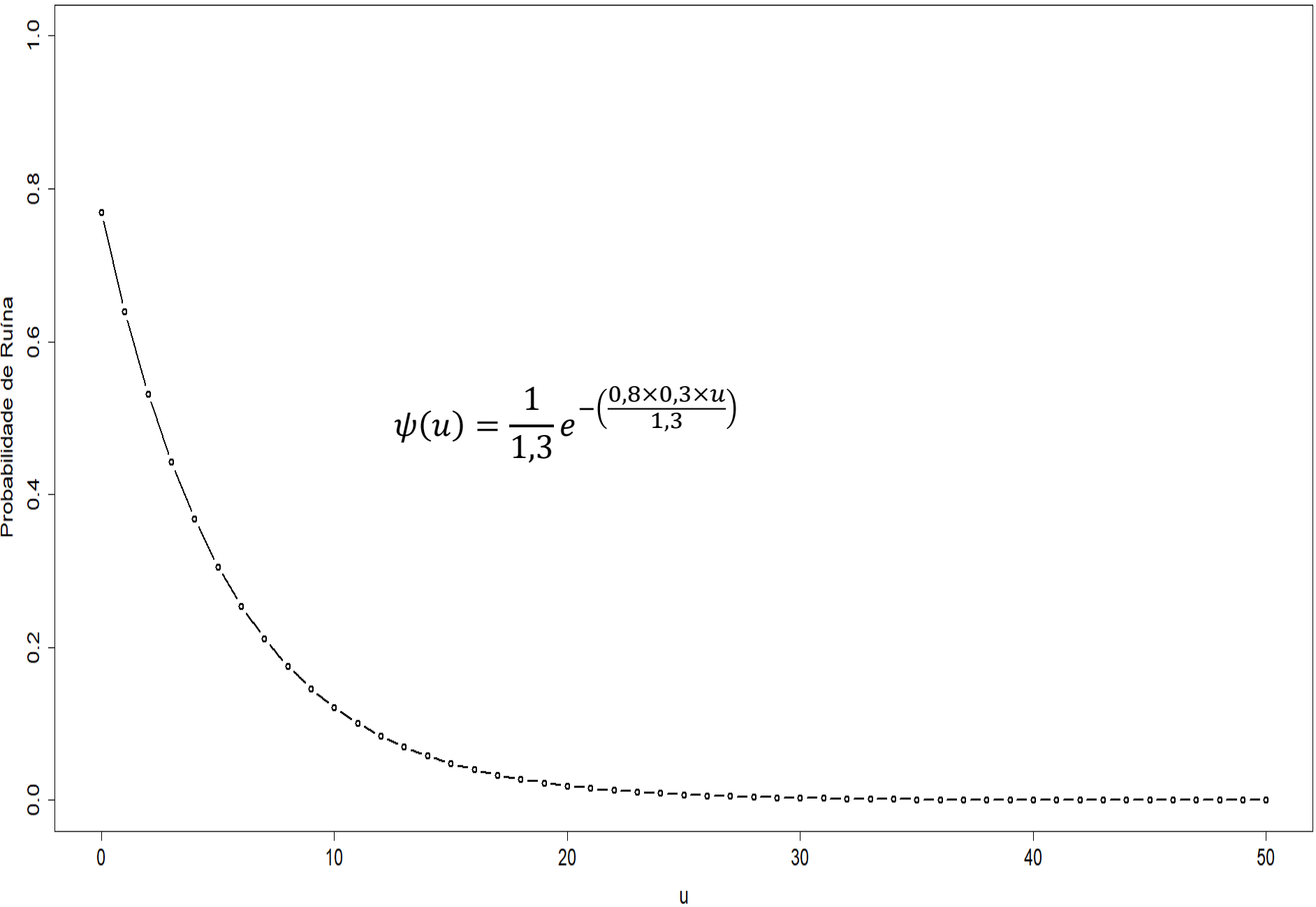
**EXEMPLO 1:** Considere que  $X \sim \text{Exp}(0,8)$ ,  $u = 5$  e  $\theta = 0,3$ . Então calcule a probabilidade de Ruína para o segurador.

**Solução**

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\left(\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}\right)} = \frac{1}{1 + 0,3} e^{-\left(\frac{0,8 \times 0,3 \times 5}{1+0,3}\right)}$$

$$\psi(5) \approx 0,3056$$

Considere que  $X \sim Exp(0,8)$ ,  $\theta = 0,3$ .



## PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO

Quando o processo de ruína no horizonte infinito é Poisson composto com  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ , e  $c = E(S)(1 + \theta)$ , temos:

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\left[\frac{\theta u}{E(X)(1+\theta)}\right]}$$

A função acima pode ser escrita de forma mais geral para diferentes valores de  $c$ , tal que:

$$\psi(u) = \frac{E(S)}{c} e^{-\left[E(X) - \frac{\lambda}{c}\right]u}$$

**EXEMPLO 2:** Considere um processo de reserva em tempo contínuo, onde os sinistros individuais  $X$  seguem uma distribuição exponencial com  $\alpha = 0,8$  e  $N_t \sim Po(10t)$ . Então determine a probabilidade de ruína para:

$$a) \quad c = \frac{\ln(M_S(0,2))}{0,2}.$$

$$b) \quad c = E(S) + \text{var}(S)0,2.$$

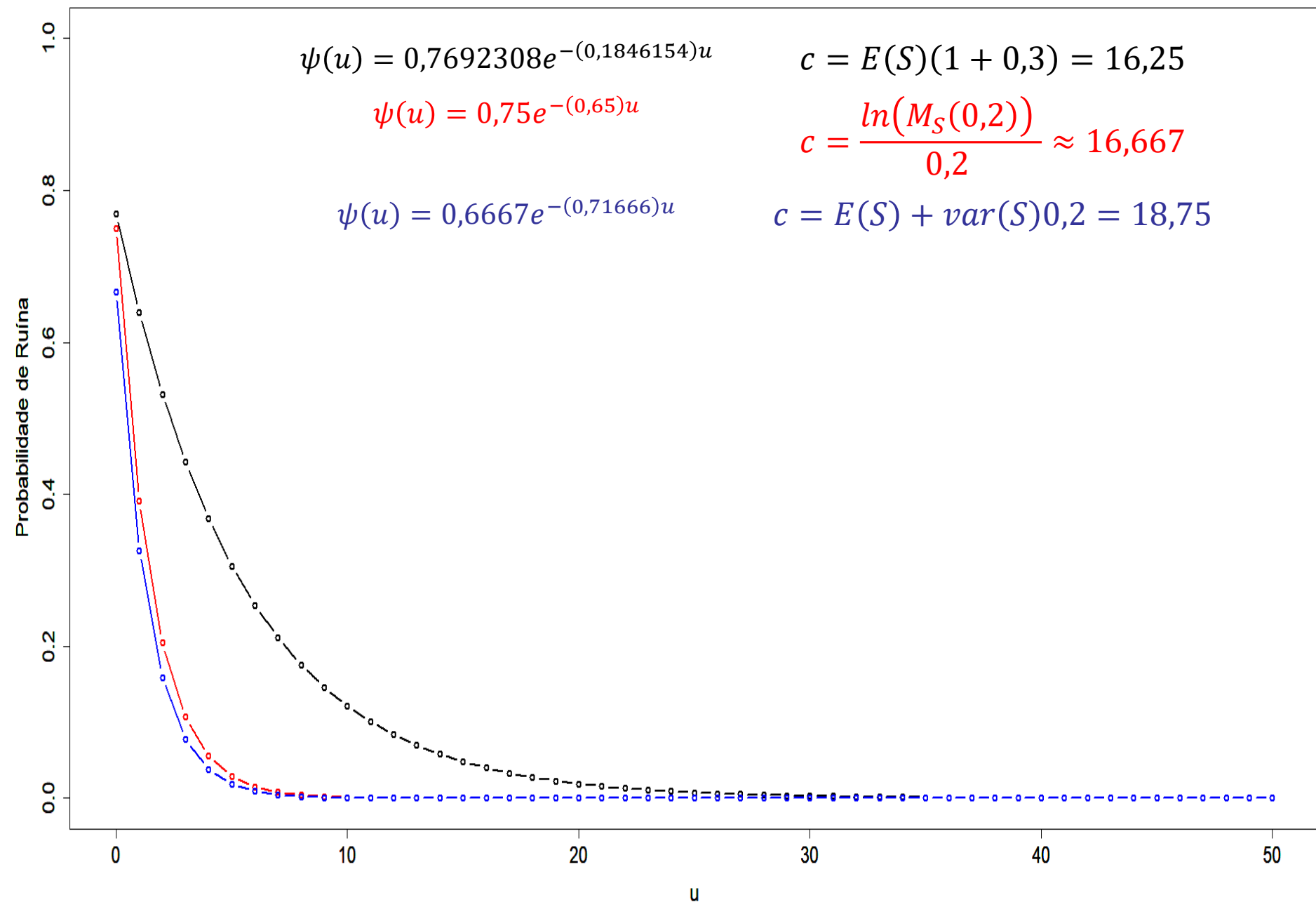
**Solução  $\lambda = 10, \alpha = 0,8$**

$$a) \ c = \frac{\ln(M_S(0,2))}{0,2} = \frac{\ln[e^{\lambda(\frac{\alpha}{\alpha-0,2}-1)}]}{0,2} \approx 16,667$$

$$\psi(u) = \frac{E(S)}{c} e^{-\left[E(X) - \frac{\lambda}{c}\right]u} = 0,75e^{-(0,65)u}$$

$$b) \ c = E(S) + \text{var}(S)0,2 = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{2\lambda}{\alpha^2}0,2 \approx 18,75$$

$$\psi(u) = \frac{E(S)}{c} e^{-\left[E(X) - \frac{\lambda}{c}\right]u} \approx 0,6667e^{-(0,71666)u}$$



## PROBABILIDADE DE RUÍNA

Desigualdade de Lundberg: Limitante superior para a probabilidade da ruína...

$$\psi(u) < e^{-Ru}$$

$$\psi(u)_{max} = e^{-Ru}$$

Nota-se que  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = 0$

Se  $X$  tem um suporte limitado, de tal forma que  $P(X \leq m) = 1$ , para alguma  $m$ , finito, então

$$\psi(u) > e^{-R(u+m)}$$

\*  $m$  limite suporte

**EXEMPLO 3:** Novamente considere que  $X \sim \text{Exp}(0,8)$ ,  $u = 5$  e  $\theta = 0,3$ . Então calcule a probabilidade máxima de Ruína para o segurador.

**Solução**



**EXEMPLO 3:** Novamente considere que  $X \sim \text{Exp}(0,8)$ ,  $u = 5$  e  $\theta = 1,282$ . Então calcule a probabilidade máxima de Ruína para o segurador.

**Solução**

$$R = \frac{\theta\alpha}{1 + \theta} = \frac{0,3 \times 0,8}{1 + 0,3} \approx 0,1846$$

Logo

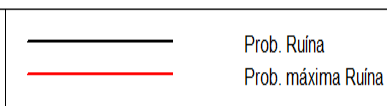
$$\psi(5)_{max} = e^{-0,1846 \times 5} \approx 0,3973$$

Para efeito de comparação

$$\psi(5) = \frac{1}{1 + 0,3} e^{-\left(\frac{0,8 \times 0,3 \times 5}{1 + 0,3}\right)} \approx 0,3056$$

Probabilidade de Ruína

1.0  
0.8  
0.6  
0.4  
0.2  
0.0

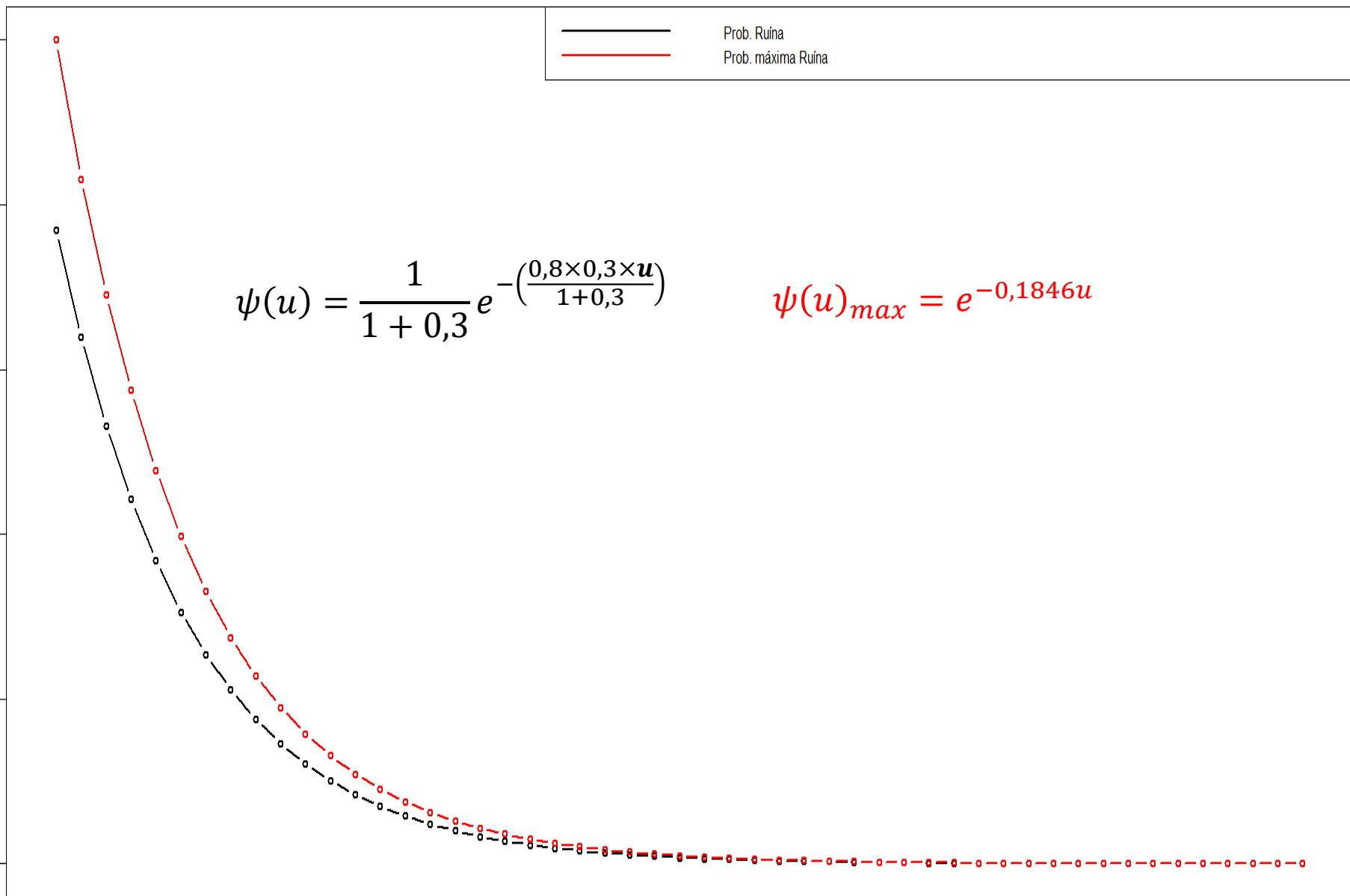


$$\psi(u) = \frac{1}{1 + 0,3} e^{-\left(\frac{0,8 \times 0,3 \times u}{1 + 0,3}\right)}$$

$$\psi(u)_{max} = e^{-0,1846u}$$

0 10 20 30 40 50

u



**EXEMPLO 4:** Então determine a probabilidade máxima de ruína com base no limite superior da desigualdade de Lundberg, os casos do exemplo 2.

$$a) \quad c = \frac{\ln(M_S(0,2))}{0,2}.$$

$$b) \quad c = E(S) + \text{var}(S)0,2.$$

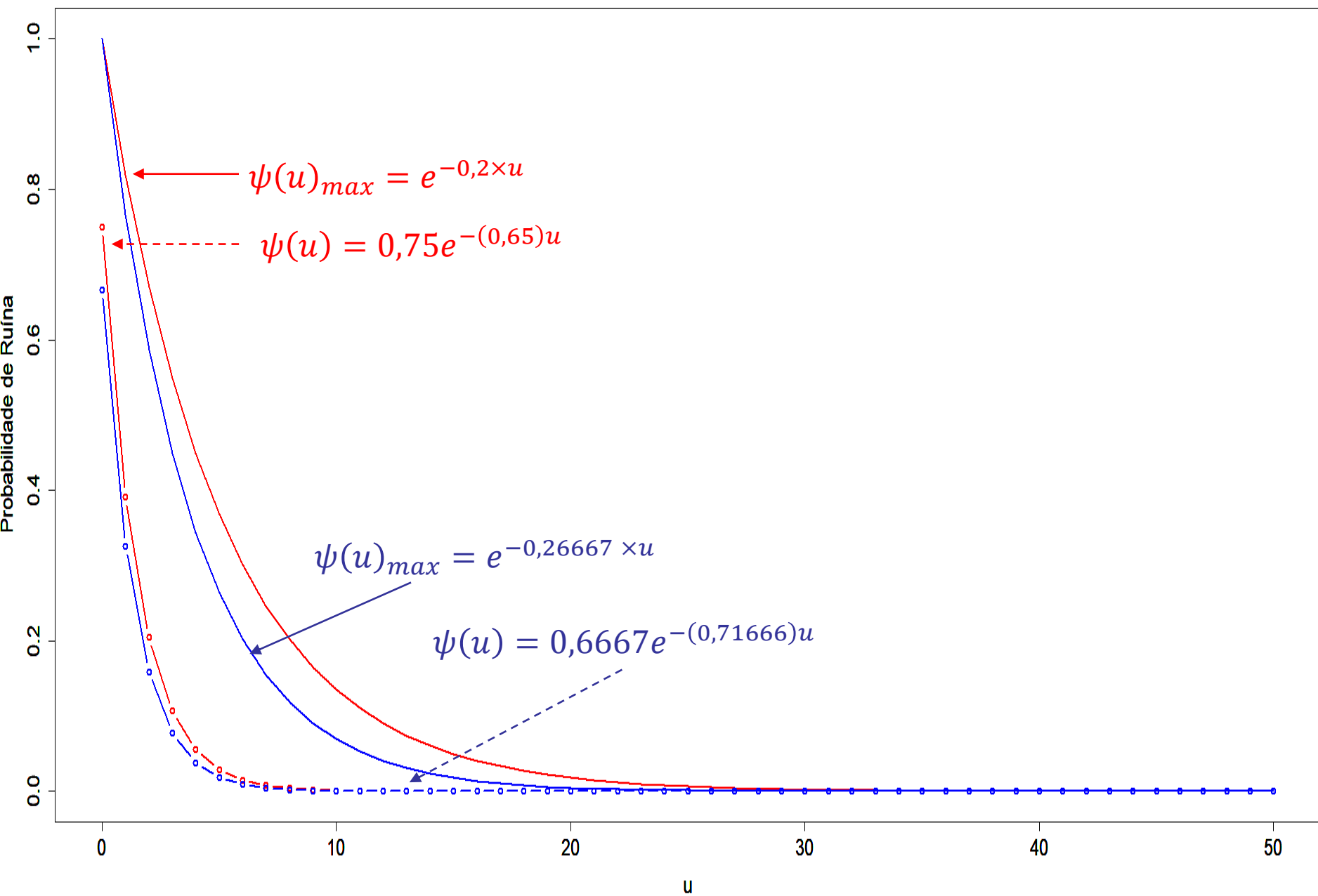
# Solução

a)  $c = \frac{\ln(M_S(0,2))}{0,2}$ . Como já visto para essa situação  $R = \beta = 0,2$  então

$$\psi(u)_{max} = e^{-0,2 \times u}.$$

b)  $c = E(S) + var(S)0,2$ . Como já visto  $R = \frac{2\alpha 0,2}{\alpha + 2(0,2)}$ , então

$$\psi(u)_{max} = e^{-0,26667 \times u}$$



## PROBABILIDADE DE RUÍNA

Considerando  $\epsilon$  como o limite superior da probabilidade de ruína para o montante inicial  $u$ , ou seja

$$\psi(u) < e^{-Ru} = \epsilon$$

Então  $e^{-Ru} = \epsilon$  implica em

$$R = \frac{|\ln(\epsilon)|}{u}$$

Como  $M_{N_t}(\ln M_X(r)) = e^{rct} \rightarrow M_S(R) = e^{Rc}$ , então

$$c = \frac{\ln(M_S(R))}{R} = u \frac{\ln\left(M_S\left(\frac{|\ln(\epsilon)|}{u}\right)\right)}{|\ln(\epsilon)|}$$

$c$  é um valor de prêmio baseado na probabilidade de ruína  $\epsilon$

## PROBABILIDADE DE RUÍNA

### ➤ Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \alpha \times \text{var}(S) \quad \text{em que } \alpha = \frac{R}{2}$$

### ➤ Princípio do desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \beta \sqrt{\text{var}(S)} \quad \text{em que } \beta = \sqrt{2i|\ln(\epsilon)|}, \quad 0 < i < 1$$

$\epsilon$  é um limite superior para a probabilidade de ruína

$i$  uma determinada porcentagem do capital inicial  $u$  considerada no valor do prêmio

## PROBABILIDADE DE RUÍNA

➤ Uma vez definido que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

então  $\psi(u)_{max} = e^{-Ru} = \epsilon$ , é possível determinar o valor de  $\theta$  com base em  $\epsilon$ , logo

$$\theta \approx \frac{u \left[ M_X \left( -\ln \left( \frac{\epsilon}{u} \right) \right) - 1 \right]}{-E(X) \ln(\epsilon)} - 1$$

em que  $u = U(0)$ .



## PROBABILIDADE DE RUÍNA

- O modelo de Crámer-Lundberg varia como consequência do equilíbrio entre indenizações pagas e prêmios arrecadados.
  - Coeficiente de ajustamento
- Pouco realista ao considerar os prêmios arrecadas de forma constante, e o fato de lidar exclusivamente com  $X_{is}$  iid.
- Na maioria dos casos não é possível conseguir uma expressão fechada para probabilidade de ruína.

### ➤ Aproximação de Vydler

Baseada em igualar momentos de um processo definido com os do modelo de Cramér-Lundberg.

### ➤ Aproximação de Beekman-Bowers

Baseada em relacionar a probabilidade de sobrevivência com a distribuição gama.

### ➤ Aproximação via simulação de Cramér-Lundberg

Possibilita aproximações das probabilidades de ruína do máximo esperado para os prejuízos da seguradora, do valor esperado para a reserva na primeira ruína....

LEMOS, Regina Ribeiro Lemos. **Probabilidade da ruína no mercado de seguros: fundamentos e alguns resultados de simulação**. 2008. Dissertação (Mestrado).

RAMOS, Pedro Alexandre Fernandes Lima. **Princípios de cálculo de prêmios e de medidas de risco em modelos atuariais**. 2014. Tese de Doutorado.

## PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

$$c = (1 + \theta)E(S) \quad X_i \sim \text{Gamma}(900,1)$$

$$N_t \sim \text{Po}(0,2t)$$

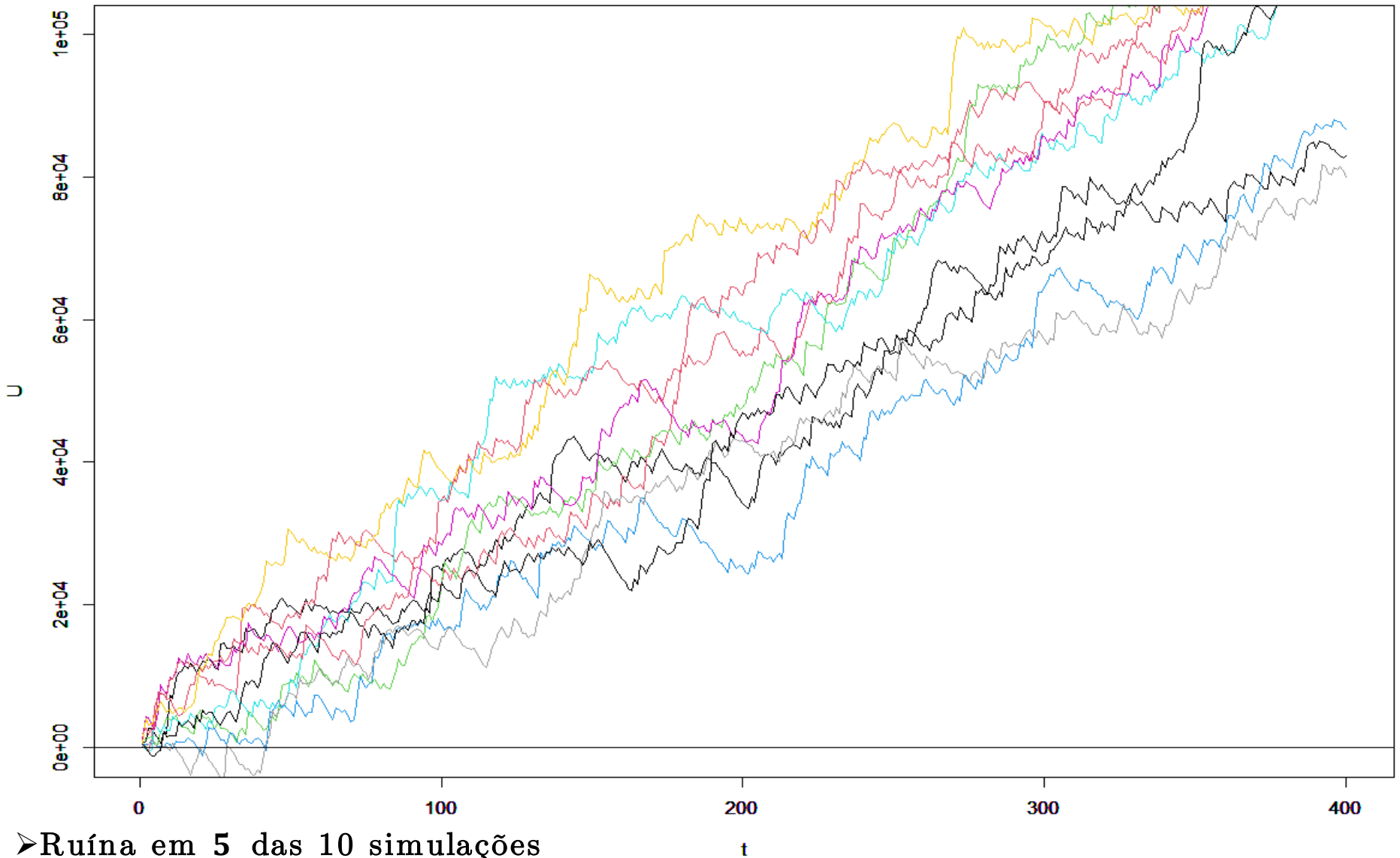
$$N_t \sim \text{Po}(0,2t) \rightarrow T \sim \text{Exp}(0,2)$$

$$u = U(0) = 600$$

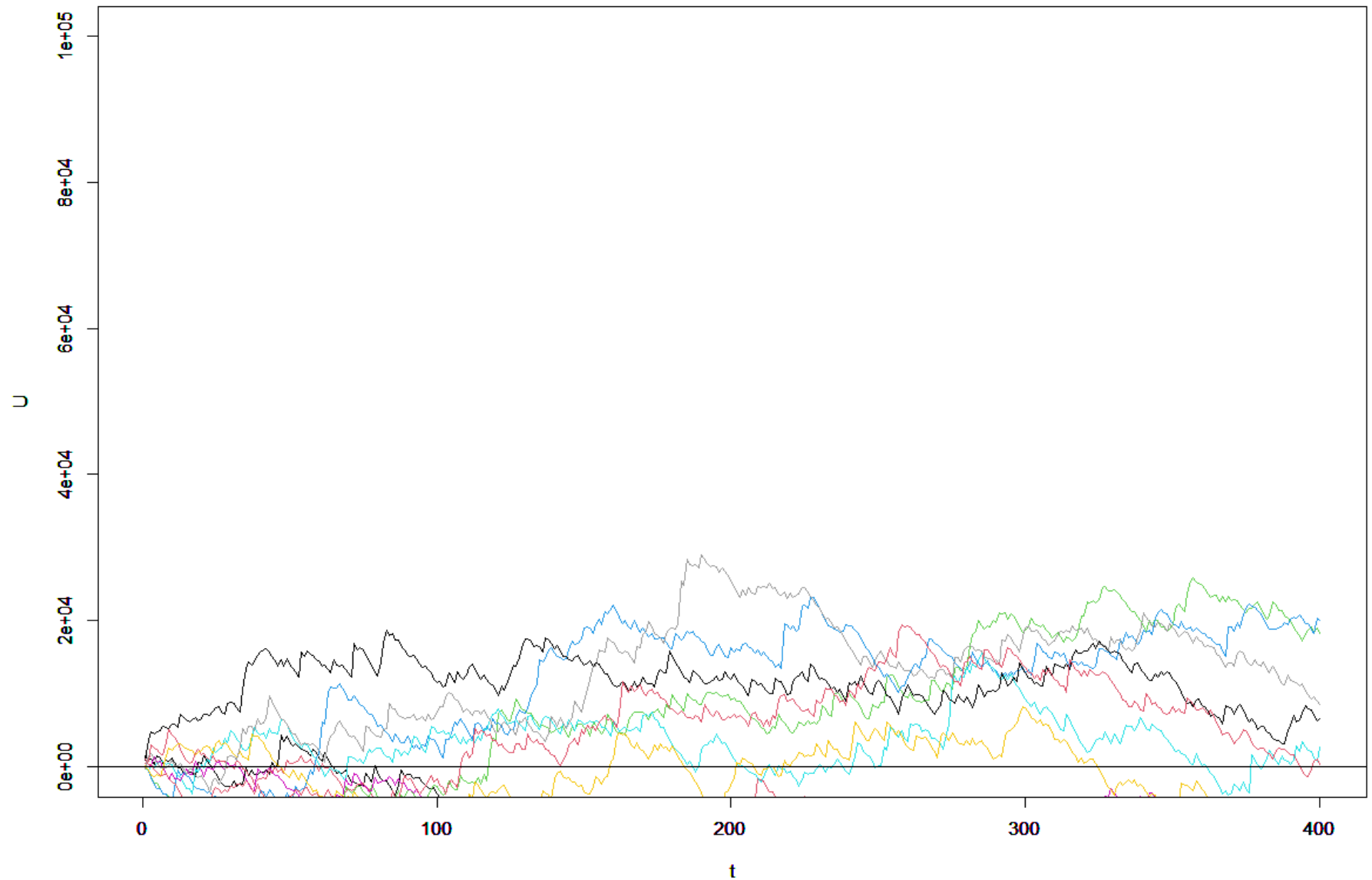
$$\theta = 0,3$$

$$U(t) = 600 + (1 + 0,3)900 \times 0,2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Gerar 400 valores de  $T$ , logo, o tempo necessário para a ocorrência de cada um dos 400 sinistros.



- Ruína em 5 das 10 simulações
- Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 5ª indenização e no máximo ocorreu pela primeira vez na 11ª indenização.



➤ Ruína em 9 das 10 simulações

➤ Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 6ª indenização e no máximo ocorreu na 29ª.

## PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

$$c = (1 + \theta)E(S) \quad X_i \sim \text{Gamma}(900,1) \quad N_t \sim \text{Po}(0,2t)$$

- $U(t) = 600 + 900 \times 0,2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ 
  - Em 9602 das 10000 simulações ocorreu ruína
  - Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 16º indenização e no máximo ocorreu na **396º**
  - $\psi(600) \approx 0,9602$
  
- $U(t) = 600 + (1 + 0,3)900 \times 0,2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ 
  - Em 6136 das 10000 simulações ocorreu ruína
  - Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 5º indenização e no máximo ocorreu na **173º**
  - $\psi(600) \approx 0,6136$

## PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

$$c = (1 + \theta)E(S) \quad X_i \sim \text{Gamma}(900,1) \quad N_t \sim \text{Po}(0,2t)$$

$$\triangleright U(t) = 600 + (1 + 0,3)900 \times 0,2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

➤ Em 6136 das 10000 simulações ocorreu ruína

➤ Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 5º indenização e no máximo ocorreu na **173º**

$$\triangleright \psi(600) \approx 0,6136$$

$$M_X(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1 \rightarrow \frac{1}{(1-r)^{900}} = 1179r + 1$$

$$R \approx 5,5887 \times 10^{-4}$$

$$\psi_{max}(600) = e^{-600(5,5887 \times 10^{-4})} = 0,7153$$



## PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

O maior valor do montante pelo qual  $U(t)$  desce abaixo de  $U(0)$ , é chamado de perda agregada máxima, e é representado por  $L$  tal que:

$$L = \max_{t \geq 0} \{S_t - ct\}$$

e

$$P(L > u) = \psi(u)$$

$$E(L) = \frac{\lambda E(X^2)}{2[c - \lambda E(X)]}$$

$$\text{var}(L) = \frac{\lambda [4E(X^3)(c - \lambda E(X)) + 3\lambda E(X^2)^2]}{12[c - \lambda E(X)]^2}$$

Para a simulação anteriores temos que:

$$X_i \sim \text{Gamma}(900,1)$$

$$N_t \sim \text{Po}(0,2t)$$

$$E(X) = \left(\frac{900}{1}\right) = 900$$

$$\text{var}(X) = \left(\frac{900}{1^2}\right) = 900$$

- $c = (1 + \theta)E(S)$

$$c = (1,3)900 \times 0,2 = 234$$

$$E(L) = \frac{\lambda E(X^2)}{2[c - \lambda E(X)]} = \frac{0,2(900 + 900^2)}{2(234 - 180)} = 1501,66$$

# Referências

- LEMOS, S., R., R. **Probabilidade de Ruína no mercado de Seguros; fundamentos teóricos e alguns resultados de simulação.** Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2008.
- RAMOS, P. A. F. L.. **Princípios de cálculo de prêmios e medidas de risco em modelos atuariais,** Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2014.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

