Teoria do Risco
Aula 20-Parte 1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$T_t = \begin{cases} \min\{t | t \geq 0 \; e \; U(t) < 0\} \\ \infty \; se \; U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \end{cases}$$

Probabilidade de ruína no horizonte infinito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall\, t \;\; 0 \leq t \; < \infty) = 1 - \varphi(u)$$

Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u,\tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall\, t\,, 0 \leq t < \tau) = 1 - \varphi(u,\tau).$$

$$\boldsymbol{\psi(u,\tau) \leq \psi(u)}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$\widetilde{T_n} = \min\{n : U(n\,) < 0\}\,.$$

Probabilidade de ruína no horizonte infinito em tempo discreto é definida por:

$$\tilde{\psi}(u) = P\left(\widetilde{T_n} < \infty | U(0) = u\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n\,, 0 \le n < \infty) = 1 - \tilde{\varphi}(u).$$

Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo discreto é definido por:

$$\tilde{\psi}(u, \tau) = P\left(\widetilde{T_n} < \tau\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n, 0 \le n < \tau) = 1 - \tilde{\varphi}(u, \tau).$$

$$\boldsymbol{\tilde{\psi}(u, \tau) \le \tilde{\psi}(u)}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO NO CASO POISSON COMPOSTO

A probabilidade de ruína em período infinito $\psi(u)$ pode ser calculada por:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}|T_t < \infty)}, u \geq 0$$

Em que $U(T)$ é o valor da reserva no momento da ruína e R é o coeficiente de ajustamento.

***Teorema fundamental do Risco**

Definição Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$M_{S_t - ct}(r) = 1$$

Em que $M_{S_t - ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right)$,

$$M_{S_t - ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right) = 1$$

$$e^{-rct} E(e^{rS_t}) = 1$$

$$e^{-rct} M_{S_t}(r) = 1$$

$$M_{N_t}(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$$

EXEMPLO 1: Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$ e que $N_t \sim Po(\lambda t)$. Encontre o valor não trivial de R considerando o prêmio $c = \frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}$.

SOLUÇÃO:

$$M_{N_t}(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$$

$X \sim Exp(\alpha) \quad N_t \sim Po(\lambda t) \quad c = \frac{ln[M_S(\beta)]}{\beta} \quad M_{N_t}(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$

$$e^{\lambda t[M_X(r)-1]} = e^{r\frac{ln[M_S(\beta)]}{\beta}t}$$

$$\lambda(M_X(r) - 1) = r\frac{ln[M_S(\beta)]}{\beta}$$

$$\frac{\beta\lambda}{r}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = ln\, e^{\lambda[M_X(\beta)-1]}$$

$$\frac{\beta\lambda}{r}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \lambda[M_X(\beta) - 1]$$

$$\frac{\beta}{r}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - 1\right)$$

$X \sim Exp(\alpha) \quad N_t \sim Po(\lambda t) \quad c = \frac{ln[M_S(\beta)]}{\beta} \quad M_{N_t}(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$

...

$$\frac{\beta}{r}\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right)$$

$$\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = \left(\frac{r}{\alpha - \beta}\right)$$

$$r\alpha - r\beta = r\alpha - r^2$$

$$r^2 - r\beta = 0$$

- $r = 0$
- $\boldsymbol{R = \beta}$

EXEMPLO 2: Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$ e $N_t \sim Po(\lambda t)$. Encontre o valor de R considere o prêmio baseado no valor esperado, $c = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{2\lambda}{\alpha^2}\theta$.

$$X \sim Exp(\alpha) \qquad N_t \sim Po(\lambda t) \qquad c = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{2\lambda}{\alpha^2}\theta$$

$$e^{\lambda t[M_X(r)-1]} = e^{rct}$$

$$\lambda t[M_X(r) - 1] = rct$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 = r\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha^2}\right)$$

$$\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = r\left(\frac{\alpha + 2\theta}{\alpha^2}\right)$$

$$\alpha^2 = (\alpha + 2\theta)(\alpha - r)$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha\theta - \alpha r - 2\theta r$$

$$0 = 2\alpha\theta - r(\alpha + 2\theta)$$

$$R = \frac{2\alpha\theta}{\alpha + 2\theta}$$

Um caso especial amplamente abordado na literatura é quando $N_t \sim Po(\lambda t)$, assim:

$$M_{N_t}(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t(M_X(r)-1)} = e^{rct}$$

$$\lambda t(M_X(r) - 1) = rct$$

$$\boldsymbol{M_X(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1}$$

Caso $c = E(S)(1 + \theta) = \lambda E(X)(1 + \theta)$, então:

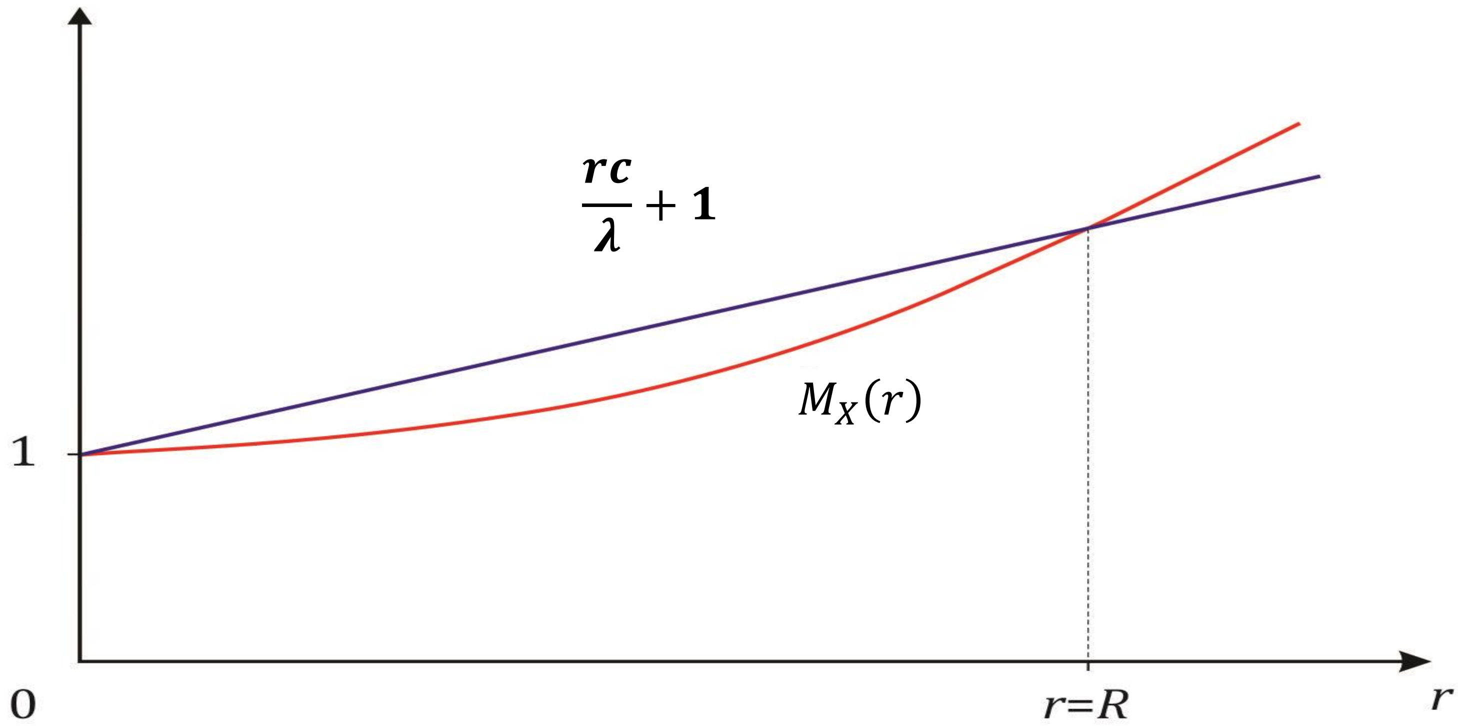
$$\boldsymbol{1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO

- Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$\boldsymbol{M_X(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1}$$

Em que $M_X(r) = E(e^{rX})$, função geradora de momentos de X.



PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO

Caso $c \leq E(S)$ temos que $\frac{rc}{\lambda} + 1$ e $M_X(r)$ somente se interceptaram no ponto $R = 0$ e esse seria então o coeficiente de ajustamento, sendo assim:

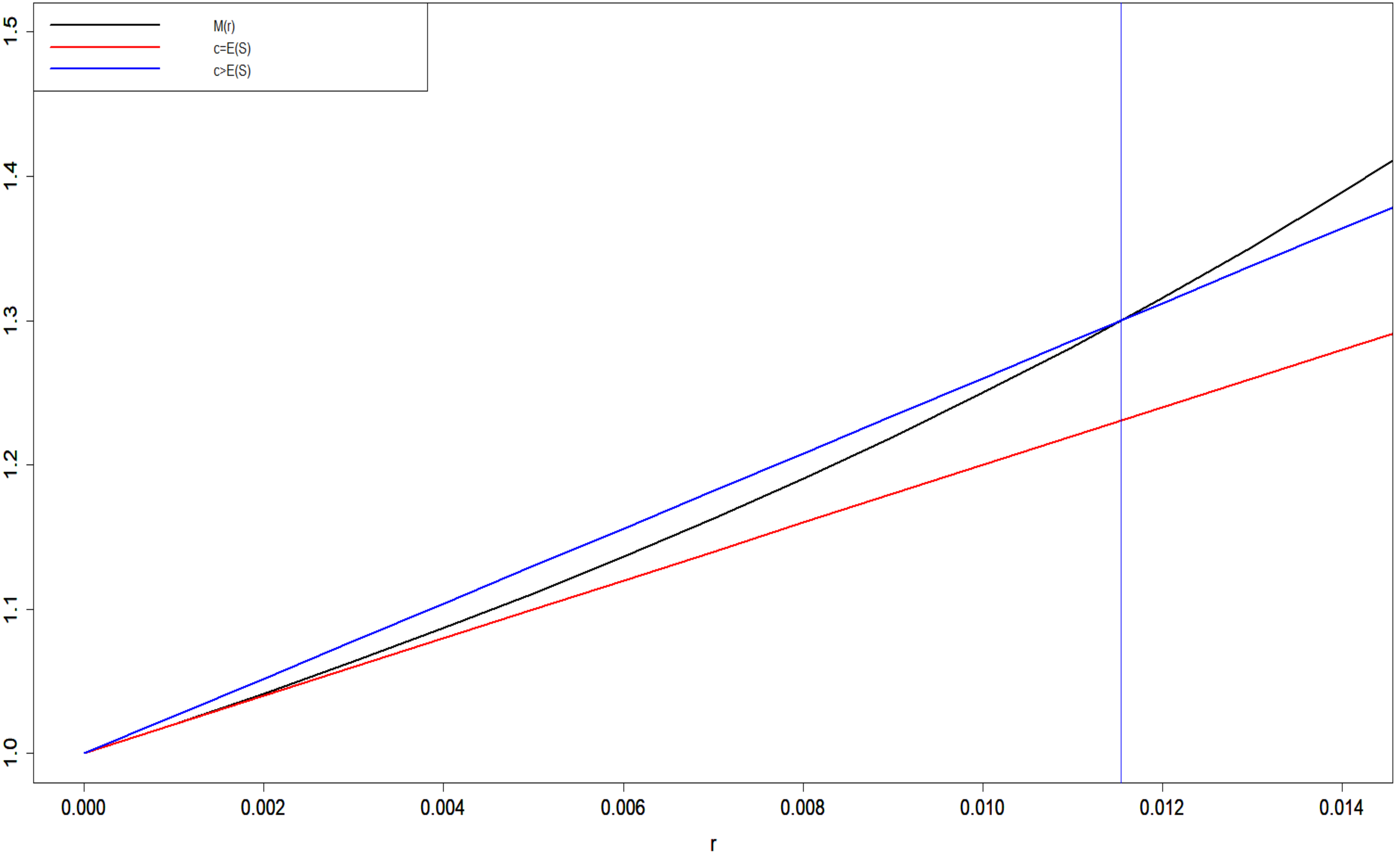
$$\psi(u) = \frac{e^{-0u}}{E(e^{-0U(T)}|T_t < \infty)} = 1$$

$$E(U_t) \leq 0$$

Ou seja, a escolha do prêmio puro de risco, certamente levará a ruína.

Considere $N_t \sim Po(\lambda t)$, $X \sim Exp(\alpha)$ e $c = E(S)$, Então $\boldsymbol{f(r) = M_X(r)} = \frac{0{,}05}{0{,}05-r}$ $\boldsymbol{g(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1}$

- Para $\alpha = 0{,}05$ e $\lambda = 10$ temos $E(S) = 200$, logo $g(r) = \frac{r}{0{,}05} + 1.$
- Para $c = 1{,}3E(S) = 260$ temos $g(r) = 26r + 1,$



EXEMPLO 3: Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$. Encontre o coeficiente de ajustamento.

Solução:

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

...

EXEMPLO 3: Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim Exp(\alpha)$. Encontre o coeficiente de ajustamento.

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

SOLUÇÃO:

$$1 + \frac{(1+\theta)}{\alpha} r = \frac{\alpha}{\alpha - r}$$

$$\alpha^2 + \alpha r + \alpha\theta r - \alpha r - r^2 - \theta r^2 - \alpha^2 = 0$$

$$(1+\theta)r^2 - \theta\alpha r = 0$$

$$R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - $N_t \sim Po(\lambda t)$ $c = (1+\theta)E(S)$

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$

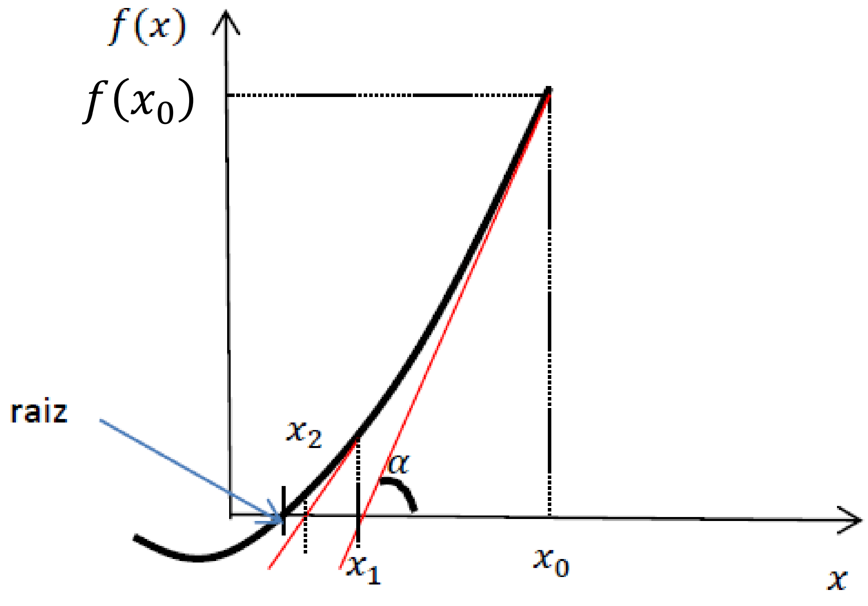
Dependendo da distribuição de X, não é possível encontrar analiticamente o coeficiente de ajustamento R. Geralmente, **métodos numéricos são utilizados e um valor inicial para R é requerido.**

MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON

- Tem o objetivo estimas as raízes de uma função.
  - Escolhe-se uma aproximação inicial.
  - Calcula-se a equação da reta tangente da função neste ponto e a interseção dela com o eixo das abcissas, afim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

  - Repete-se o processo até a convergência para o valor de x.



$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Logo a reta tangente a $f(x)$ que passa no ponto x_2 é dada por:

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \rightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

De modo geral

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

EXEMPLO 4: Encontre a raiz quadrada de 5 usando o método de NEWTON-RAPHSON

SOLUÇAO

Considere $x = \sqrt{5}$, então $x^2 = 5$, logo $x^2 - 5 = 0$ logo iremos usar o método para achar a raiz da função $f(x) = x^2 - 5$.

Dessa forma, $f(x) = x^2 - 5$, então $f'(x) = 2x$, então:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

EXEMPLO 4: Considere $x = \sqrt{5}$, então $x^2 = 5$, logo $x^2 - 5 = 0$ logo iremos usar o método para achar a raiz da função $f(x) = x^2 - 5$. Dessa forma

$f(x) = x^2 - 5$, então $f'(x) = 2x$, então

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

É sensato supor que a raiz estará entre 2 e 3 pois $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, assim $x_0 = 2{,}5$

$$x_1 = 2{,}5 - \frac{f(2{,}5)}{f'(2{,}5)} = 2{,}25$$

$$x_2 = 2{,}25 - \frac{f(2{,}25)}{f'(2{,}25)} = 2{,}2361$$

$$x_3 = 2{,}2361 - \frac{f(2{,}2361)}{f'(2{,}2361)} = 2{,}236068$$

$$x_4 = 2{,}236068 - \frac{f(2{,}236068\ )}{f'(2{,}236068\ )} = 2{,}236068$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - $N_t \sim Po(\lambda t)$ $c = (1+\theta)E(S)$

A velocidade da convergência (caso ocorra) é fortemente relacionada a escolha do valor inicial para x_0.

No caso da utilização do método para determinar o valor do coeficiente de determinação R o valor indicado como melhor escolha é dado por:

$$R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$$

Uma vez que esse resultado corresponde ao valor máximo de R, conforme a desigualdade.

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$$

EXEMPLO 5: Suponha que o sinistro agregado S tem distribuição de Poisson composta, com parâmetro $\lambda = 4$. Considere que o prêmio recebido é igual a 7 $(c = 7)$ e que a distribuição de X é dada por:

$$P(X = 1) = 0{,}6 \ ; \quad P(X = 2) = 0{,}4.$$

Determine o coeficiente de ajustamento.

Solução

Sendo que o coeficiente de ajustamento $R > 0$ satisfaz $H(R) = 0$. Para resolver tal equação, pode-se utilizar o método iterativo de Newton-Raphson .

Como $1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$, definimos

$$H(r) = 1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)$$

SOLUÇÃO

$$H(r) = 1 + (1+\theta)E(X)r - M_X(r)$$

Assim:

$$R_{j+1} = R_j - \frac{H(R_j)}{H'(R_j)}.$$

Considerando o valor inicial $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

Solução

Considerando o valor inicial $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

$$E(X) = 1(0,6) + 2(0,4) = 1,4$$

$$E(X^2) = 1(0,6) + 4(0,4) = 2,2$$

$$c = (1+\theta)E(S) = (1+\theta)E(N)E(X) = (1+\theta)\lambda E(X)$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1 = \frac{7}{4(1,4)} - 1 = 0,25$$

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \sum_x e^{rX} p(X=x) = 0,6e^{r} + 0,4e^{2r}.$$

SOLUÇÃO

$$H(r) = 1 + (1+\theta)E(X)r - M_X(r)$$

$$H(r) = 1 + 1{,}75r - 0{,}6e^{r} - 0{,}4e^{2r}$$

$$H'(r) = 1{,}75 - 0{,}6e^{r} - 0{,}8e^{2r}$$

$$R_{j+1} = R_j - \frac{1 + 1{,}75R_j - 0{,}6e^{R_j} - 0{,}4e^{2R_j}}{1{,}75 - 0{,}6e^{R_j} - 0{,}8e^{2R_j}}$$

$$R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)} = 0{,}3182$$

$$R_1 = 0{,}3182 - \frac{1 + 1{,}75(0{,}3182) - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}4e^{2(0{,}3182)}}{1{,}75 - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}8e^{2(0{,}3182)}}$$

$$R_1 = 0{,}3182 - \frac{1 + 1{,}75(0{,}3182) - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}4e^{2(0{,}3182)}}{1{,}75 - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}8e^{2(0{,}3182)}}$$

...

j	R_j	$H(R_j)$	$H'(R_j)$	R_{j+1}
0	0,3182	−0,0238	−0,5865	0,2776
1	0,2776	−0,0031	−0,4358	0,2705
2	0,2705	−0,0001	−0,4106	0,2703
3	0,2703	0,0000	−0,4098	0,2703

Referências

- LEMOS, S., R., R. **Probabilidade de Ruína no mercado de Seguros; fundamentos teóricos e alguns resultados de simulação.** Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2008
- RAMOS, P. A. F. L.. **Princípios de cálculo de prémios e medidas de risco em modelos atuariais,** Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2014.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

Teoria do Risco
Aula 20-Parte 2

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO, $c = (1 + \theta)E(S)$

- Quando o processo ruína no horizonte infinito é Poisson composto com $X \sim Exp(\alpha)$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T_t)}|T_t < \infty)} = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-Ru}$$

Como $R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta}$, então

$$\psi(u) = \frac{\alpha - \frac{\theta\alpha}{1+\theta}}{\alpha} e^{-\frac{\theta\alpha}{1+\theta}u} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\left(\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}\right)}$$

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

EXEMPLO 1: Considere que $X \sim Exp(0{,}8)$, $u = 5$ e $\theta = 0{,}3$. Então calcule a probabilidade de Ruína para o segurador.

Solução

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\left(\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}\right)}$$

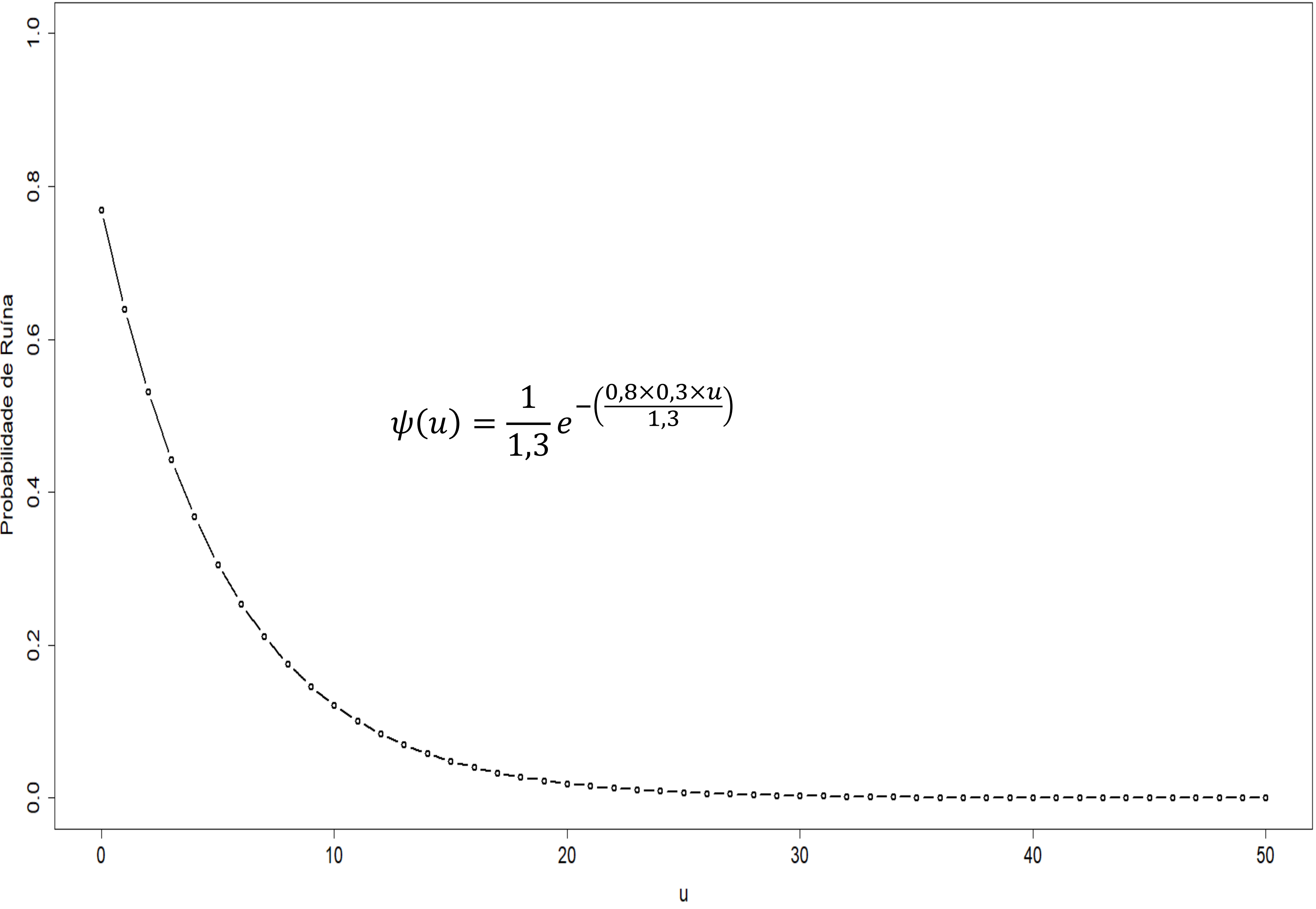
EXEMPLO 1: Considere que $X \sim Exp(0{,}8)$, $u = 5$ e $\theta = 0{,}3$. Então calcule a probabilidade de Ruína para o segurador.

Solução

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\left(\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}\right)} = \frac{1}{1+0{,}3} e^{-\left(\frac{0{,}8\times 0{,}3\times 5}{1+0{,}3}\right)}$$

$$\psi(5) \approx 0{,}3056$$

Considere que $X \sim Exp(0{,}8)$, $\theta = 0{,}3$.



PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO - POISSON COMPOSTO

Quando o processo de ruína no horizonte infinito é Poisson composto com $X \sim Exp(\alpha)$, e $c = E(S)(1+\theta)$, temos:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\left[\frac{\theta u}{E(X)(1+\theta)}\right]}$$

A função acima pode ser escrita de forma mais geral para diferentes valores de c, tal que:

$$\psi(u) = \frac{E(S)}{c} e^{-\left[E(X) - \frac{\lambda}{c}\right]u}$$

EXEMPLO 2: Considere um processo de reserva em tempo contínuo, onde os sinistros individuais X seguem uma distribuição exponencial com $\alpha = 0{,}8$ e $N_t \sim Po(10t)$. Então determine a probabilidade de ruína para:

$$a)\ \ c = \frac{ln\left(M_S(0{,}2)\right)}{0{,}2}.$$

$$b)\ \ c = E(S) + var(S)0{,}2.$$

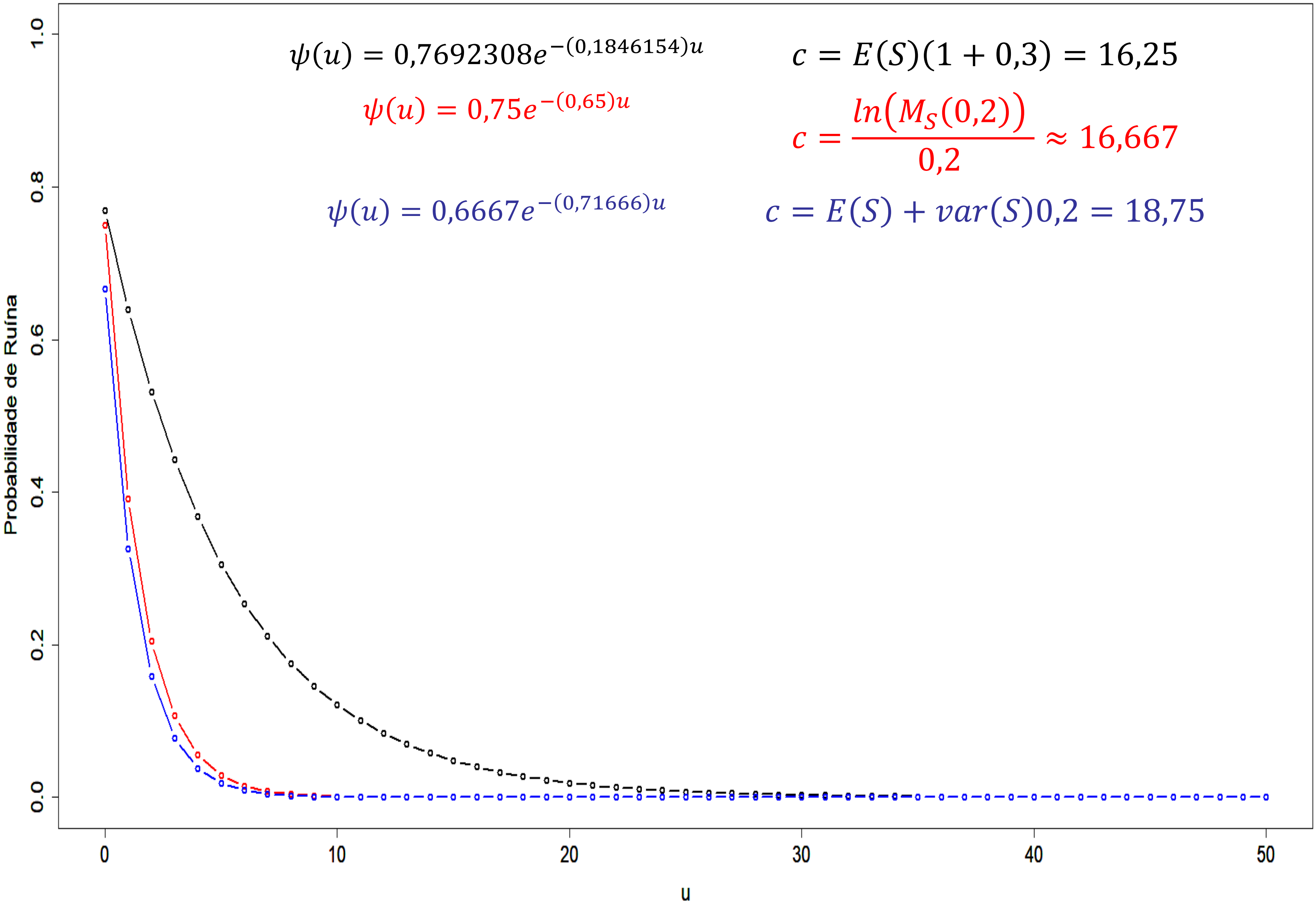
Solução $\lambda = 10, \ \alpha = 0,8$

$$a) \ \ c = \frac{ln\left(M_S(0{,}2)\right)}{0{,}2} = \frac{ln\left[e^{\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-0{,}2}-1\right)}\right]}{0{,}2} \approx 16{,}667$$

$$\psi(u) = \frac{E(S)}{c} e^{-\left[E(X)-\frac{\lambda}{c}\right]u} = 0{,}75e^{-(0{,}65)u}$$

b) $c = E(S) + var(S)0{,}2 = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{2\lambda}{\alpha^2}0{,}2 \approx 18{,}75$

$$\psi(u) = \frac{E(S)}{c} e^{-\left[E(X)-\frac{\lambda}{c}\right]u} \approx 0{,}6667e^{-(0{,}71666)u}$$



$\psi(u) = 0{,}7692308e^{-(0{,}1846154)u}$
$c = E(S)(1 + 0{,}3) = 16{,}25$
$\psi(u) = 0{,}75e^{-(0{,}65)u}$
$c = \frac{ln(M_S(0{,}2))}{0{,}2} \approx 16{,}667$
$\psi(u) = 0{,}6667e^{-(0{,}71666)u}$
$c = E(S) + var(S)0{,}2 = 18{,}75$
Probabilidade de Ruína
u
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50

PROBABILIDADE DE RUÍNA

Desigualdade de Lundberg: Limitante superior para a probabilidade da ruína...

$$\psi(u) < e^{-Ru}$$

$$\psi(u)_{max} = e^{-Ru}$$

Nota-se que $\lim_{u \to +\infty} \psi(u) = 0$

Se X tem um suporte limitado, de tal forma que $P(X \leq m) = 1$, para alguma m, finito, então

$$\psi(u) > e^{-R(u+m)}$$

$*\ m$ limite suporte

EXEMPLO 3: Novamente considere que $X \sim Exp(0{,}8)$, $u = 5$ e $\theta = 0{,}3$. Então calcule a probabilidade máxima de Ruína para o segurador.

Solução

EXEMPLO 3: Novamente considere que $X \sim Exp(0{,}8)$, $u = 5$ e $\theta = 1{,}282$. Então calcule a probabilidade máxima de Ruína para o segurador.

Solução

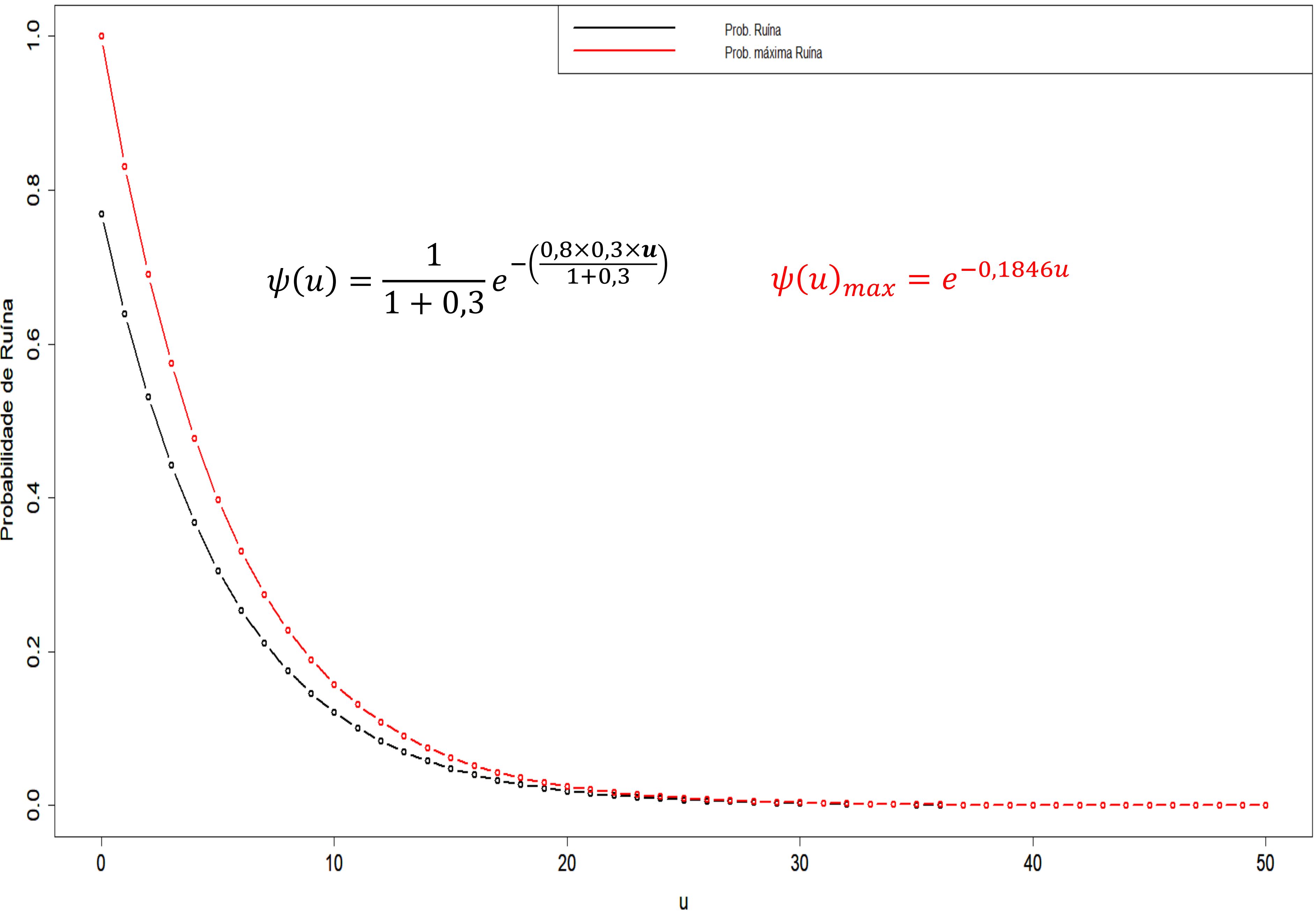
$$R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta} = \frac{0{,}3 \times 0{,}8}{1+0{,}3} \approx 0{,}1846$$

Logo

$$\psi(5)_{max} = e^{-0{,}1846\ \times 5} \approx 0{,}3973$$

Para efeito de comparação

$$\psi(5) = \frac{1}{1+0{,}3} e^{-\left(\frac{0{,}8 \times 0{,}3 \times 5}{1+0{,}3}\right)} \approx 0{,}3056$$



Prob. Ruína
Prob. máxima Ruína
$$\psi(u) = \frac{1}{1+0,3} e^{-\left(\frac{0,8\times 0,3\times \boldsymbol{u}}{1+0,3}\right)}$$
$$\psi(u)_{max} = e^{-0,1846u}$$
Probabilidade de Ruína
u
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50

EXEMPLO 4: Então determine a probabilidade máxima de ruína com base no limite superior da desigualdade de Lundberg, os casos do exemplo 2

$$a)\ \ c = \frac{ln\left(M_S(0{,}2)\right)}{0{,}2}.$$

$$b)\ \ c = E(S) + var(S)0{,}2.$$

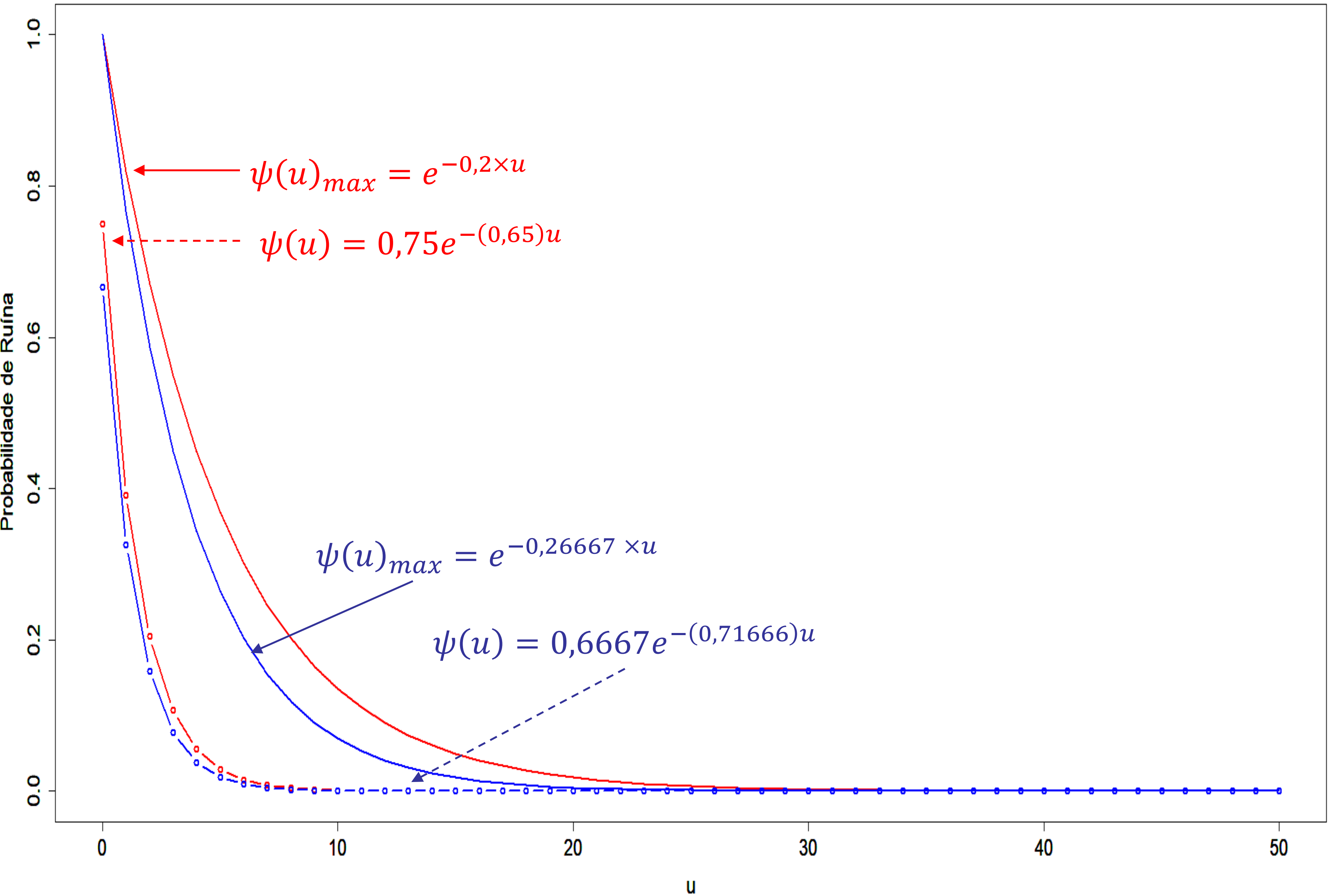
Solução

a) $c = \frac{ln\left(M_S(0,2)\right)}{0,2}$. Como já visto (Exemplo 1 aula 22) para essa situação $R = \beta = 0,2$ então

$$\psi(u)_{max} = e^{-0,2\times u}.$$

b) $c = E(S) + var(S)0,2$. Como já visto (exemplo 2, aula 22), $R = \frac{2\alpha 0,2}{\alpha+2(0,2)}$, então

$$\psi(u)_{max} = e^{-0,26667\ \times u}$$



$\psi(u)_{max} = e^{-0,2\times u}$
$\psi(u) = 0,75e^{-(0,65)u}$
$\psi(u)_{max} = e^{-0,26667\times u}$
$\psi(u) = 0,6667e^{-(0,71666)u}$
Probabilidade de Ruína
u
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50

PROBABILIDADE DE RUÍNA

Considerando ϵ como o limite superior da probabilidade de ruína para o montante inicial u, ou seja

$$\psi(u) < e^{-Ru} = \epsilon$$

Então $e^{-Ru} = \epsilon$ implica em

$$R = \frac{|\ln(\epsilon)|}{u}$$

Como $M_{N_t}(ln\, M_X(r)) = e^{rct} \rightarrow \quad M_S(R) = e^{Rc}$, então

$$c = \frac{ln\left(M_S(R)\right)}{R} = u\frac{ln\left(M_S\left(\frac{|\ln(\epsilon)|}{u}\right)\right)}{|\ln(\epsilon)|}$$

c é um valor de prêmio baseado na probabilidade de ruína ϵ

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \alpha \times var(S) \qquad \text{em que } \alpha = \frac{R}{2}$$

- Princípio do desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \beta\sqrt{var(S)} \qquad \text{em que } \beta = \sqrt{2i|\ln(\epsilon)|},\ 0 < i < 1$$

ϵ é um limite superior para a probabilidade de ruína

i uma determinada porcentagem do capital inicial u considerada no valor do prêmio

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Uma vez definido que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

então $\psi(u)_{max} = e^{-Ru} = \epsilon$, é possível determinar o valor de θ com base em ϵ, logo

$$\theta \approx \frac{u\left[M_X\left(-\ln\left(\frac{\epsilon}{u}\right)\right) - 1\right]}{-E(X)\ln(\epsilon)} - 1$$

em que $u = U(0)$.

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- O modelo de Crámer-Lundberg varia como consequência do equilíbrio entre indenizações pagas e prêmios arrecadados.
  - Coeficiente de ajustamento

- Pouco realista ao considerar os prêmios arrecadas de forma constante, e o fato de lidar exclusivamente com X_{is} *iid*.

- Na maioria dos casos não é possível conseguir uma expressão fechada para probabilidade de ruína

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Aproximação de Vydler

Baseada em igualar momentos de um processo definido com os do modelo de Cramér-Lundberg.

- Aproximação de Beekman-Bowers

Baseada em relacionar a probabilidade de sobrevivência com a distribuição gama.

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Aproximação via simulação de Cramér-Lundberg

Possibilita aproximações da probabilidades de ruína do máximo esperado para os prejuízos da seguradora, do valor esperado para a reserva na primeira ruína....

LEMOS, Regina Ribeiro Lemos. **Probabilidade da ruína no mercado de seguros: fundamentos e alguns resultados de simulação**. 2008. Dissertação (Mestrado).

RAMOS, Pedro Alexandre Fernandes Lima. **Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais**. 2014. Tese de Doutorado.

PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

$$c = (1+\theta)E(S) \qquad X_i \sim Gamma(900,1)$$

$$N_t \sim Po(0,2t)$$

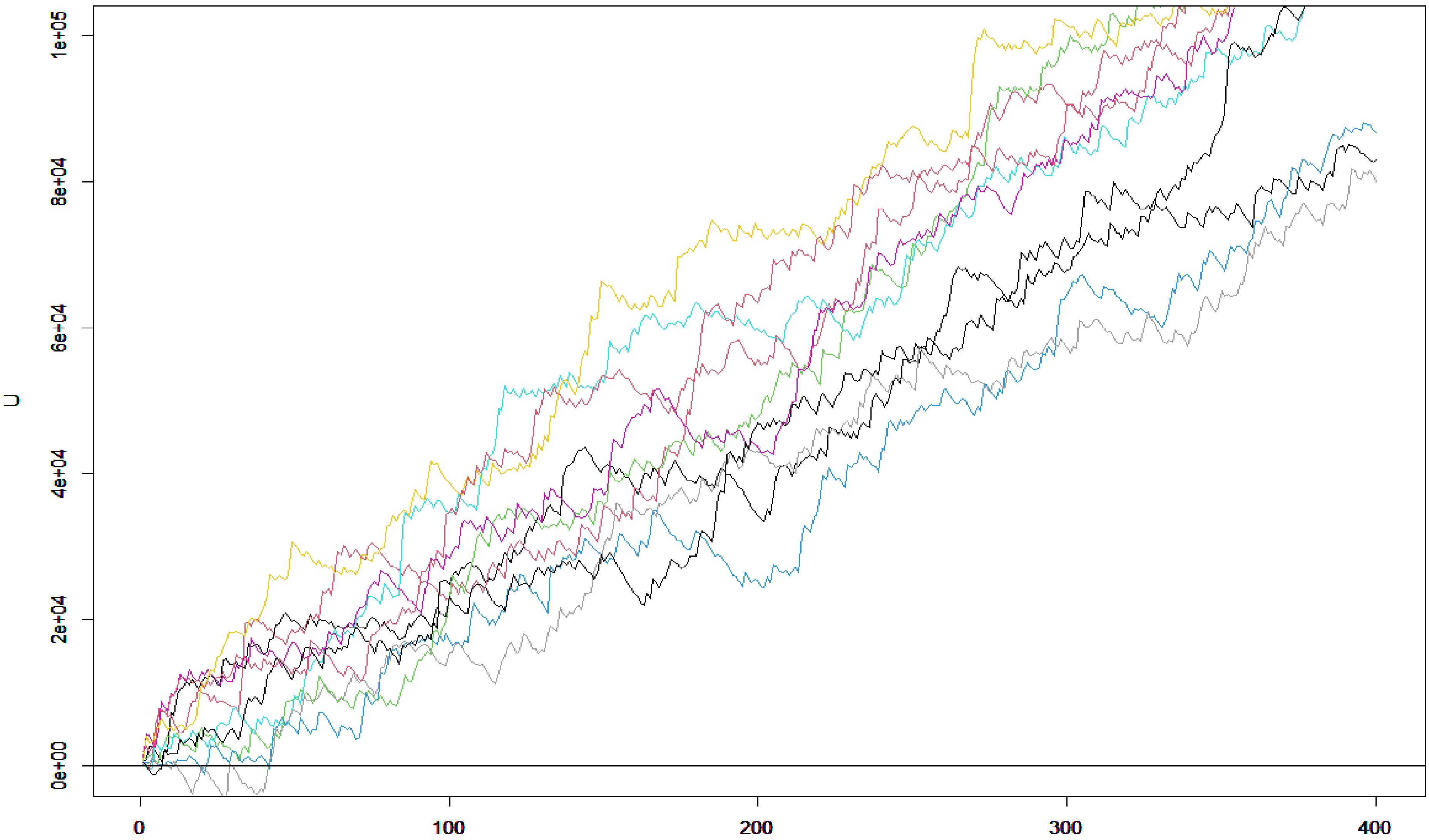
$$N_t \sim Po(0,2t) \rightarrow T \sim Exp(0,2)$$

$$u = U(0) = 600$$

$$\theta = 0,3$$

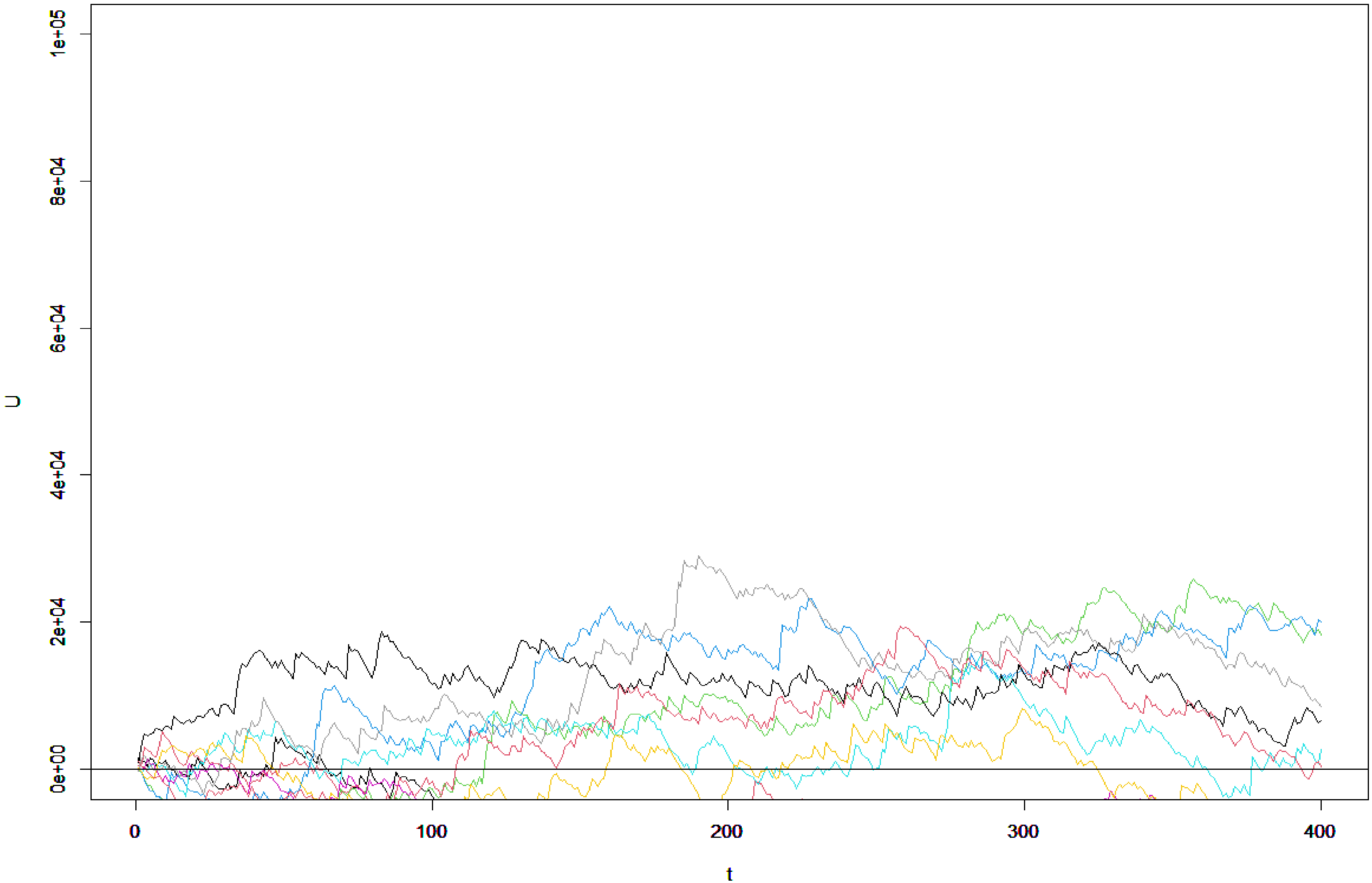
$$U(t) = 600 + (1+0,3)900 \times 0,2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Gerar 400 valores de T, logo, o tempo necessário para a ocorrência de cada um dos 400 sinistros.



➢**Ruína em 5 das 10 simulações**

➢**Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 5° indenização e no máximo ocorreu pela primeira vez na 11° indenização.**



- ➢**Ruína em 9 das 10 simulações**
- ➢**Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 6° indenização e no máximo ocorreu na 29°.**

PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

$$c = (1+\theta)E(S) \qquad X_i \sim Gamma(900{,}1) \qquad N_t \sim Po(0{,}2t)$$

- $U(t) = 600 + 900 \times 0{,}2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$
  - Em 9602 das 10000 simulações ocorreu ruína
  - Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 16° indenização e no máximo ocorreu na $\mathbf{396}$°
  - $\psi(600) \approx 0{,}9602$

- $U(t) = 600 + (1+0{,}3)900 \times 0{,}2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$
  - Em 6136 das 10000 simulações ocorreu ruína
  - Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 5° indenização e no máximo ocorreu na $\mathbf{173}$°
  - $\psi(600) \approx 0{,}6136$

PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

$$c = (1+\theta)E(S) \qquad X_i \sim Gamma(900{,}1) \qquad N_t \sim Po(0{,}2t)$$

- $U(t) = 600 + (1+0{,}3)900 \times 0{,}2t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$
  - Em 6136 das 10000 simulações ocorreu ruína
  - Em média, a ruína surgiu pela primeira vez na 5° indenização e no máximo ocorreu na **173°**
  - $\psi(600) \approx 0{,}6136$

$$M_X(r) = \frac{rc}{\lambda} + 1 \rightarrow \frac{1}{(1-r)^{900}} = 1179r + 1$$

$$R \approx 5{,}5887 \times 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{\psi_{max}(600) = e^{-600\left(5{,}5887\times 10^{-4}\right)} = 0{,}7153}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA- Simulação

O maior valor do montante pelo qual $U(t)$ desce abaixo de $U(0)$, é chamado de perda agregada máxima, e é representado por L tal que:

$$L = \max_{t \geq 0}\{S_t - ct\}$$

e

$$P(L > u) = \psi(u)$$

$$E(L) = \frac{\lambda E(X^2)}{2[c-\lambda E(X)]} \qquad var(L) = \frac{\lambda\left[4E(X^3)(c-\lambda E(X)) + 3\lambda E(X^2)^2\right]}{12[c-\lambda E(X)]^2}$$

Para a simulação anteriores temos que:

$X_i \sim Gamma(900,1)$ $N_t \sim Po(0{,}2t)$

$E(X) = \left(\frac{900}{1}\right) = 900$ $var(X) = \left(\frac{900}{1^2}\right) = 900$

- $c = (1+\theta)E(S)$

$$c = (1{,}3)900 \times 0{,}2 = 234$$

$$E(L) = \frac{\lambda E(X^2)}{2[c - \lambda E(X)]} = \frac{0{,}2(900 + 900^2)}{2(234 - 180)} = 1501{,}66$$

Referências

- LEMOS, S., R., R. **Probabilidade de Ruína no mercado de Seguros; fundamentos teóricos e alguns resultados de simulação.** Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2008
- RAMOS, P. A. F. L.. **Princípios de cálculo de prémios e medidas de risco em modelos atuariais,** Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2014.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.