Teoria do Risco
Aula 16

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

Princípios de cálculos de prêmios

- A defesa, da utilização de um princípio em detrimentos aos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis..

Propriedades

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$\Pi_S \geq E(S)$$

  - O prêmio não deve ser menor o valor esperado a ser pago.
  - No caso de uma única apólice esse princípio seria inviável de se manter...

- *Aditividade.*
  - Se S_1 e S_2 são independentes, o prêmio para o risco combinado, $\Pi_{S_1+S_2}$, é igual a $\Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Propriedades

- *Escala invariante.*

Se $\mathrm{Z} = \mathrm{aS}$, em que $\mathrm{a} > 0$, então $\Pi_Z = a\Pi_s$.

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

- *Consistência.*

Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $\Pi_Y = \Pi_s + c$

- Perda máxima.

Seja $\mathrm{r_S}$ o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição S, então $\Pi_s \leq \mathrm{r_S}$

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

  $$\Pi_s \geq \mathrm{E(S)}$$

- *Aditividade.*

  $$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

- *Escala invariante.*

  Se $\mathrm{Z} = \mathrm{aS}$, em que $\mathrm{a} > 0$, então $E(Z) = aE(S)$

- *Consistência.*

  Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $E(Y) = E(S) + c$

- Perda máxima

  $$\Pi_s \leq \mathrm{r_S}$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_s = \boldsymbol{E(S)(1+\theta)}$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$E(S)(1+\theta) \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

$$E(S_1+S_2)(1+\theta) = E(S_1)(1+\theta) + E(S_2)(1+\theta)$$

- *Escala invariante.*

$$\Pi_Z = (1+\theta)E(Z) = (1+\theta)E(aS)$$
$$\Pi_z = a(1+\theta)E(S)$$
$$\Pi_z = a\Pi_s.$$

- *Consistência*
- Perda máxima

Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = \boldsymbol{E(S)(1+\theta)}$

- Consistência.

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então

$$\Pi_Y = (1+\theta)E(S+c) = (1+\theta)[E(S)+c],$$
$$\Pi_Y > \Pi_S + c.$$

Como $\Pi_Y \neq \Pi_S + c$, o princípio do prêmio carregado não é consistente.

- Perda máxima

Uma forma de mostrar que o princípio do prêmio puro não satisfaz essa propriedade é através de um exemplo hipotético, em que dado um valor b correspondente a r_S (maior valor pago por S) e supondo que $P(S = b) = 1$, com $b > 0$ e $\theta > 0$, tem-se que

$$\Pi_S = (1+\theta)E(S) = (1+\theta)b > b.$$

Como $\Pi_S > r_S$, essa propriedade não é satisfeita.

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + var(S)\alpha \geq E(S)$$

- *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + var(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + E(S_2) + \alpha\, var(S_1) + \alpha\, var(S_2),$$

$$E(S_1 + S_2) + var(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + \alpha\, var(S_1) + E(S_2) + \alpha\, var(S_2),$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

- *Escala invariante*
- *Consistência*
- *Perda máxima*

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que $a > 0$, então

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha\, var(Z) = E(aS) + \alpha\, var(aS),$$
$$\Pi_Z = aE(S) + a^2\alpha\, var(S),$$
$$\Pi_z \neq a\Pi_s$$

- *Consistência*

Dado $\mathrm{Y} = \mathrm{S} + \mathrm{c}$, em que $\mathrm{c} > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \alpha\, var(Y),$$
$$\Pi_Y = E(S + c) + \alpha\, var(S + c),$$
$$\Pi_Y = E(S) + c + \alpha\, var(S),$$
$$\Pi_Y = \Pi_s + c.$$

- *Perda máxima*

Dado $\mathrm{P}(\mathrm{S} = 8) = \mathrm{P}(\mathrm{S} = 12) = 0{,}5$ então:

$$E(S) = 10,$$
$$var(S) = 4,$$
$$\Pi_s = 10 + 4\alpha.$$

em que excede 12 quando $\alpha > 0{,}5$.

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta; \quad \beta > 0$

- *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + \beta\sigma_S \geq E(S).$$

- *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \sqrt{var(S_1 + S_2)}\beta = E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{var(S_1) + var(S_2)}$$

$$E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{var(S_1) + var(S_2)} \neq \left[E(S_1) + \sigma_{S_1}\beta\right] + \left[E(S_2) + \sigma_{S_2}\beta\right]$$

- *Escala invariante*
- *Consistência*
- *Perda máxima*

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta; \quad \beta > 0$

- *Escala invariante*

Dado $\mathrm{Z} = \mathrm{aS}$, em que $\mathrm{a} > 0$, então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta\sigma_Z = E(aS) + \beta\sqrt{var(aS)},$$
$$\Pi_Z = aE(S) + \beta\sqrt{a^2 var(S)},$$
$$\Pi_Z = aE(S) + a\beta\sigma_S,$$
$$\Pi_z = a\Pi_S$$

Consistência

Dado $\mathrm{Y} = \mathrm{S} + \mathrm{c}$, em que $\mathrm{c} > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \beta\sqrt{var(Y)},$$
$$\Pi_Y = E(S + c) + \beta\sqrt{var(S + c)},$$
$$\Pi_Y = E(S) + c + \beta\sqrt{var(S)},$$
$$\Pi_Y = \Pi_S + c.$$

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta; \quad \beta > 0$

- *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$ então:

$$E(S) = 8 \times 0,5 + 12 \times 0,5 = 10$$
$$var(S) = (8^2 \times 0,5 + 12^2 \times 0,5) - 10^2 = 104 - 100 = 4$$

$$\sigma = 2$$
$$\Pi_S = 10 + 2\beta.$$

Como na prática o valor de β varia entre 1 e 2, Π_S excede 12 quando $\beta > 1$.

A propriedade de perda máxima não é satisfeita.

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Carregamento de segurança não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$\mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_s - \mathrm{s})] \leq \mu(\mathrm{E}(\mathrm{W} + \Pi_s - \mathrm{S}))$$

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{W}) = \mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_s - \mathrm{S})] \leq -\boldsymbol{\alpha e}^{-\boldsymbol{\alpha}[\mathbf{W}+\Pi_s-\mathbf{E}(\boldsymbol{S})]}$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \leq -\alpha e^{-\alpha[W+\Pi_s-E(X)]}$$

$$\ln e^{-\alpha W} \geq \ln e^{-\alpha[W+\Pi_s-E(S)]}$$

$$-\alpha W \geq -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$-W \geq -W - \Pi_s + E(S)$$

$$\Pi_s \geq E(S)$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➢ *Aditividade*

Em geral o principio da utilidade zero não é aditivo, mas o principio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln E\left(e^{\alpha(S_1+S_2)}\right)}{\alpha} = \frac{\ln\{E\left(e^{\alpha S_1}\right)E\left(e^{\alpha S_2}\right)\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln E\left(e^{\alpha S_1}\right)}{\alpha} + \frac{\ln E\left(e^{\alpha S_2}\right)}{\alpha} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escalava invariante. Suponha que e $\mathrm{S} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $\mathrm{Z} = \mathrm{aS}$, em que $\mathrm{a} > 0$.

Logo

$$\Pi_s = \frac{lnM_S(\alpha)}{\alpha} = \frac{\ln\left(e^{\frac{\delta^2\alpha^2}{2}+\mu\alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 \alpha \neq a\Pi_s$$

➢ *Consistência*

Seja $Y = S + c$, então Π_Y é dada por:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_Y - Y)]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + (\Pi_s + c) - (S + c))\ ]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + \Pi_s - S)]$$

Considerando $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$\mu(W + \Pi - E(Y)\ ) = \mu(W + \Pi_s - E(S)\ )$$

$$e^{-\alpha[W+\Pi_Y-E(Y)]} = e^{-\alpha[W+\Pi_s-E(S)]}$$

$$-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)] = -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$\Pi_Y - E(Y)\ = \Pi_s - E(S)$$

$$\Pi_Y\ = \Pi_s - E(S) + E(S) + c,$$

$$\boldsymbol{\Pi_Y}\ = \Pi_s + \boldsymbol{c}.$$

➢ *Perda máxima.*

Considerando que r_S é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W + \Pi_s - S)] \geq E[\mu(W + \Pi_s - r_S)]$$

Como $\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_s - r_S)$, então:

$$\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_s - r_S)$$

Como $\mu'(X) > 0$, tem-se que:

$$W \geq W + \Pi_s - r_S$$
$$\Pi_s - r_S \leq 0$$
$$\Pi_s \leq r_S$$