

Teoria do Risco

Aula1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley/index.html>



Introdução

- Desde as antigas civilizações o ser humano sempre se preocupou com as incertezas do futuro ...
- O homem teve a necessidade de criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e para o seu patrimônio.

Introdução

- Os comerciantes mesopotâmicos e fenícios:



- Os hebreus:



Introdução

- Por volta de 1347, na cidade de Gênova as atividades de seguros começam a se popularizar...
 - início aos primeiros estudos de matemática atuarial e análise de riscos.
- 1693 :primeira tábua de mortalidade (Sir Edmond Halley).
 - Matemática atuarial ramo vida (**cálculo atuarial**) .
 - Risco individual.
- Século XX surge a teoria do risco coletivo.
 - Modelo de Crámer -Lundberg.
 - Ramo vida e ramo não vida (**Matemática atuarial de seguro de danos**).



Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
- Avaliar **riscos**
- Avaliar sistemas de investimentos.
- Estabelecer políticas de investimentos.
- Estabelecer valor de **prêmios**
 - Seguro ligados a vida (Cálculo atuarial)
 - Seguro ligado a danos (**Teoria do risco**)

Teoria do risco

- ...reside em estabelecer um modelo de tarifação eficiente frente aos sinistros que chegam ao segurador.
- ...tem como objetivo principal estabelecer para o “bem” sob análise um prêmio justo para um dado futuro mensurável,...

Modelos de Risco

- 1) Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?
- 2) Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma margem de segurança?

Dois paradigmas!!!

Conceitos Estatísticos

- A teoria do risco é inerente à teoria estatística, portanto a compreensão de determinados termos e conceitos estatísticos assim como algumas propriedades, se faz necessária ou até mesmo fundamental.

Conceitos Estatísticos

- Conceitos Estatísticos
 - Variável Aleatória e função de distribuição
 - Variável aleatória Discreta
 - Importantes modelos discretos
 - Variável aleatória contínua
 - Importantes modelos de contínuos
 - Variável aleatória multidimensional
 - Esperança e Variância de variáveis aleatórias.
 - Esperança sujeito a valor limite.
 - Covariância e Correlação entre variáveis aleatórias.
 - Regressão linear simples, modelo normal bivariado
 - Desigualdade de Jensen
 - Momentos ordinários e função Geradora de Momentos

➤ **TEORIA DA UTILIDADE**

- Função de utilidade
- Seguro e utilidade

➤ **CÁLCULO DE PRÊMIOS**

- Princípios de cálculos de prêmios
- Propriedades desejáveis ao prêmio

➤ **MODELOS DE RISCO**

- Modelo de risco individual anual
 - ...
- Medida de Risco
- Modelo de risco coletivo anual
 - ...

➤ **Processo Estocástico para frequência de sinistros e sinistralidade.**

- ...

➤ **Processo de ruína**

- ...

Variável Aleatória

- A variável aleatória pode ser entendida como uma função $X(.)$ que associa a cada evento do espaço de probabilidade um número real.

Exemplo 1

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso). Caracterize a variável aleatória número de coroas.

Resp. $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $R \subset \mathbb{R}$.

R é a imagem de $X(\cdot)$.

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1 - q)^4$	$\binom{4}{0} q^0(1 - q)^4$
Coroa	Cara	Cara	Cara	1	$q^1(1 - q)^3$	$\binom{4}{1} q^1(1 - q)^3$
Cara	Coroa	Cara	Cara		$q^1(1 - q)^3$	
Cara	Cara	Coroa	Cara		$q^1(1 - q)^3$	
Cara	Cara	Cara	Coroa		$q^1(1 - q)^3$	
Coroa	Coroa	Cara	Cara	2	$q^2(1 - q)^2$	$\binom{4}{2} q^2(1 - q)^2$
Coroa	Cara	Coroa	Cara		$q^2(1 - q)^2$	
Coroa	Cara	Cara	Coroa		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Coroa	Cara	Coroa		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Cara	Coroa	Coroa		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Cara		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Coroa	3	$q^3(1 - q)^1$	$\binom{4}{3} q^3(1 - q)^1$
Coroa	Cara	Coroa	Coroa		$q^3(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Cara	Coroa		$q^3(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Cara		$q^3(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Coroa	4	$q^4(1 - q)^0$	$\binom{4}{4} q^4(1 - q)^0$

Exemplo 1

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso). Caracterize a variável aleatória número de coroas.

X (n° de coroas)	$P(X)$
0	q^4
1	$4q^1(1 - q)^3$
2	$6q^2(1 - q)^2$
3	$4q^3(1 - q)^1$
4	q^4

Variáveis aleatórias Discretas

Assume somente uma quantidade enumerável de valores (finito ou infinito).

➤ $P(X = x)$ Função de probabilidade (fp)

➤ $P(X = x_i) \geq 0$ para todo i .

➤ $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Variáveis aleatórias Contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes a \mathbb{R} , assim como para variáveis contínuas em geral...

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Função de distribuição acumulada

Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

Em geral ela é representada por $F(x)$, ou $\Phi(x)$.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$$

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i)$$

Função de distribuição acumulada

- O conhecimento de tal função permite obter diversas informações sobre a variável.
- A composição das funções de probabilidade faz parte da modelagem teórica das realizações das variáveis aleatórias...

Função Sobrevivência

Ao complementar da função acumulada se dá o nome de função de sobrevivência, ou seja, a função de probabilidades acumulada acima de determinado valor:

$$\bar{F}_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

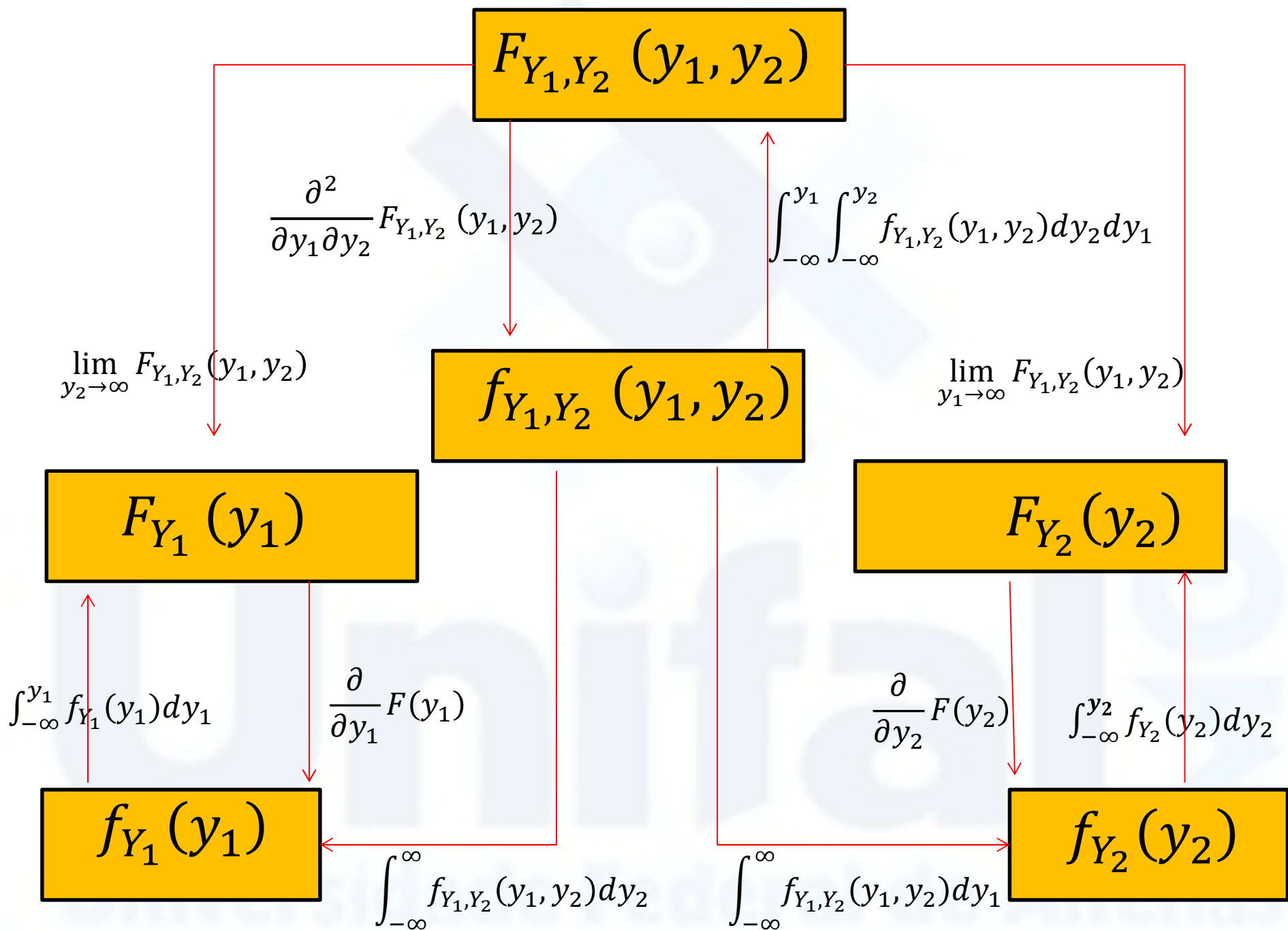
$$\bar{F}_X(x) = S_X(x)$$

Sempre que duas ou mais variáveis aleatórias são observadas no mesmo experimento ou fenômeno, pode-se definir

A distribuição conjunta, que descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

A distribuição marginal, descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

A distribuição condicional, que descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.



Probabilidade condicional

- Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidades. Definimos a probabilidade condicional de X_1 dado X_2 , por:

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)},$$

onde $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2 .

Probabilidade condicional

➤ Caso X_1 e X_2 sejam contínuas:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

➤ Em que $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função densidade conjunta de X_1 e X_2 e $f_{X_2}(x_2)$ é função densidade marginal de X_2 .

Independência de variáveis aleatórias

A independência é um requisito importante que permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Independência entre variáveis aleatórias.

Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

- Para as discretas, pode-se escrever uma definição equivalente com o uso de funções de probabilidade:

$$X, Y \text{ independentes} \Rightarrow p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Para as contínuas, a condição de independência usa as seguintes densidades:

$$X, Y \text{ independentes} \Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 2

Determine se as variáveis dadas nos dois modelos conjuntos, são independentes ou não.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0,0008e^{(-0,02x-0,04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

b)

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y = y)$	2/8	3/8	3/8	

Determine se as variáveis dadas nos dois modelos conjuntos, são independentes ou não.

a) $f_{X,Y}(x, y) = 0,0008e^{(-0,02x-0,04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

$$f_Y(y) = 0,04e^{-0,04y}$$

$$f_X(x) = 0,02e^{-0,02x}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y)f_X(x)$$

b)

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y = y)$	2/8	3/8	3/8	

$$P_{X,Y}(2, 2) \neq P_X(2)P_Y(2)$$