Aula 15 – Anuidades Contínuas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades Contínuas

- Se imaginarmos que numa anuidade fracionada o número de frações cresce infinitamente, passamos a ter o que se pode designar por uma anuidade contínua.

  - Pagamentos por hora, por minuto, por segundo,...etc.
  - Infinitos pagamentos ao longo do ano, $m \to \infty$

- Importante notar que:

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

$$\lim_{m \to \infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)} \right)$$

$$\boxed{\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x}$$

Anuidades Contínuas

- Comecemos por calcular o valor atuarial de uma anuidade continua, considerando uma taxa de capitalização constante:

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$v = (1 + i)^{-1}$$

$$e^{\delta} = \frac{1}{v}$$

- Considere uma anuidade com duração n pagamentos fracionados em m partes a taxa de rentabilidade i.

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\left(\frac{1}{m}\right)^{2}} + \frac{1}{m} v^{\left(\frac{1}{m}\right)^{3}} \ldots + \frac{1}{m} v^{\left(\frac{1}{m}\right)^{mn-1}} = \frac{1}{m} \left(\frac{1 - \left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Cada ano "n" tem "'m" partes, assim $m \times n$ atualizações

Anuidades Contínuas

- Pensemos no que ocorre quando $m \to \infty$.

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{m}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Por L' Hopital: $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{f\prime(m)}{g\prime(m)}\right)$, então:

$$f(m) = \frac{1}{m} \quad \longmapsto \quad f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - v^{\frac{1}{m}} \longmapsto \ g'(m) = -e^{\frac{1}{m}\ln(v)}\left(-\frac{\ln(v)}{m^2}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}(\ln(v))}{m^2}$$

$$v^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\ln(v)}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}(\ln(v))}\right) = \frac{(1-v^n)}{\ln(v)}\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidades Contínuas

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1-v^n)}{\ln(v)} \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right) = -\frac{(1-v^n)}{\ln(v)}\left(\frac{1}{v^0}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1-v^n)}{\ln(v)} = -\frac{(1-v^n)}{\ln(e^{-\delta})} = \frac{(1-v^n)}{\delta}$$

$$\bar{\ddot{a}}_{\bar{n}|} = \frac{(1-v^n)}{\delta}$$

- Assim para um T aleatório :

$$\bar{\ddot{a}}_{\bar{T}|} = \frac{\left(1-e^{-\delta T}\right)}{\delta} = \bar{a}_{\bar{T}|}$$

- Que é o valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos entre $[0, t]$.

Anuidades Contínuas

- O valor presente atuarial contínuo de anuidades vitalícias por ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} f_{T(x)}(t)dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

- Considerando que :

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \qquad f_T(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

Anuidades Contínuas

- a variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = var\left[\frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}\right]$$

$$var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{var\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta^2}$$

$$var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{var\left(e^{-\delta T}\right)}{\delta^2}$$

$$e^{-\delta T} \equiv v^T$$

$$var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$var(v^T) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

$$var(v^T) = \int_0^n w^t f_T(t)dt - \left[\int_0^n v^t f_T(t)dt\right]^2$$

Anuidades Contínuas

- Exemplo 20

Suponha que :

$$S_{T(0)}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\alpha(t)}\right)$$

Usando a taxa de juros δ, calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\bar{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x.

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

$$var\left(\bar{a}_{\bar{t}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt - \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt\right)^2}{\delta^2}$$

Exemplo 20

- (i)

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}}$$

- (ii)

$$S_{T(0)}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\alpha(t)}\right)$$

$$S_{T(x)}(t) = P(T > t + x | T > x) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\alpha x}\right)} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{P(\boldsymbol{T} > \boldsymbol{t} + \boldsymbol{x} | \boldsymbol{T} > \boldsymbol{x}) = {}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{-\alpha t}}, & \boldsymbol{t > 0} \\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{c.c} \end{cases}}$$

➢ (i)

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}$$

➢ (ii)

$$\boxed{P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}}$$

➢ (iii)

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{f(x+t)}{1 - F(x+t)} = -\frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}$$

$$\boxed{\mu_{x+t} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha}$$

Exemplo 20

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right) e^{-\alpha t} \alpha}{\delta} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)} \, dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^{\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^{\infty} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}}}$$

$$\boldsymbol{\mu_{x+t} = \alpha}$$

➢ Exemplo 20

$$var(\bar{a}_{\bar{t}|}) = \frac{var(e^{-\delta t})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^\infty = \boxed{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\alpha}}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(2\delta + \alpha) e^{t(2\delta+\alpha)}} \right]_0^\infty = \boxed{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\alpha}}}$$

$$var(\bar{a}_{\bar{t}|}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\alpha}{2\delta + \alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha} \right)^2 \right] = \boxed{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}}}}$$

Anuidades Contínuas

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade exceda o valor presente esperado, para o caso do tempo de vida adicional ser exponencial com parâmetro α?

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(\frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta} > \frac{1}{\delta + \alpha}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} > \frac{\delta}{\delta + \alpha} - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} < \frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(-\delta T < \ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right)$$

Anuidades Contínuas

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = \left(\boldsymbol{\frac{\alpha}{\alpha+\delta}}\right)^{\boldsymbol{\frac{\alpha}{\delta}}}$$

Anuidades Contínuas

- Exemplo 21

Com $T(x) \sim \exp(\alpha)$, então $\alpha = \mu_{x+t}$, logo:

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\delta}}}$$

Anuidades Contínuas

- Exemplo 21

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)\right) = e^{-\mu_{x+t}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta+\mu_{x+t}}\right)\right)} = \left(\frac{\mu_{x+t}}{\delta + \mu_{x+t}}\right)^{\frac{\mu_{x+t}}{\delta}}$$

- Considerando $\delta = 0{,}10$ e a força de mortalidade igual a $0{,}016$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = \left(\frac{0{,}016}{0{,}016 + 0{,}10}\right)^{\frac{0{,}016}{0{,}1}} = 0{,}7283$$

- Considerando $\delta = 0{,}01$ e $\mu_{x+t} = 0{,}033$:

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = \left(\frac{0{,}033}{0{,}033 + 0{,}10}\right)^{\frac{0{,}033}{0{,}1}} = 0{,}4174$$

Anuidades Contínuas

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dador valor "Pr"?

$$F(Pr) = P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right) = P\left(1 - e^{-\delta T} \leq \delta\Pi\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right) = P\left(-e^{-\delta T} \leq \delta\Pi - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta\Pi\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta\Pi)]$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta\Pi)}{\delta}\right]$$

$$\boldsymbol{P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} \leq \Pi\right) = P\left[T \leq -\frac{ln(1 - \delta\Pi)}{\delta}\right] = F_T\left(-\frac{ln(1 - \delta\Pi)}{\delta}\right)}$$

Anuidades Contínuas

- O valor presente atuarial contínuo de vitalícia por ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Anuidades Contínuas

- Exemplo 22

Suponha que :

$$S_{T(0)}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\alpha(t)}\right)$$

Usando a taxa de juros δ, calcule $\bar{a}_{\bar{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x. Utilize $\boldsymbol{\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, {}_t p_x dt}$.

$$S_{T(0)}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\alpha(t)}\right)$$

$$S_{T(x)}(t) = P(T > t + x | T > x) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T > t + x | T > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, e^{-\alpha t} dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-t(\delta+\alpha)} \, dt$$

$$\bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_0^\infty$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{(\delta + \alpha)}$$

Anuidades contínua

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & se\ 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & se\ \ T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\boldsymbol{\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x}$$

$$\boldsymbol{\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt}$$