Aula 13-Implementação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){
 v <- 1/(1+i)
px          <- 1-qx
pxx          <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]) )
t           <- (0:(length(pxx)-1))
a           <- (1-v^(t+1))/(1-v)
ax          <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
return(ax)
}
```

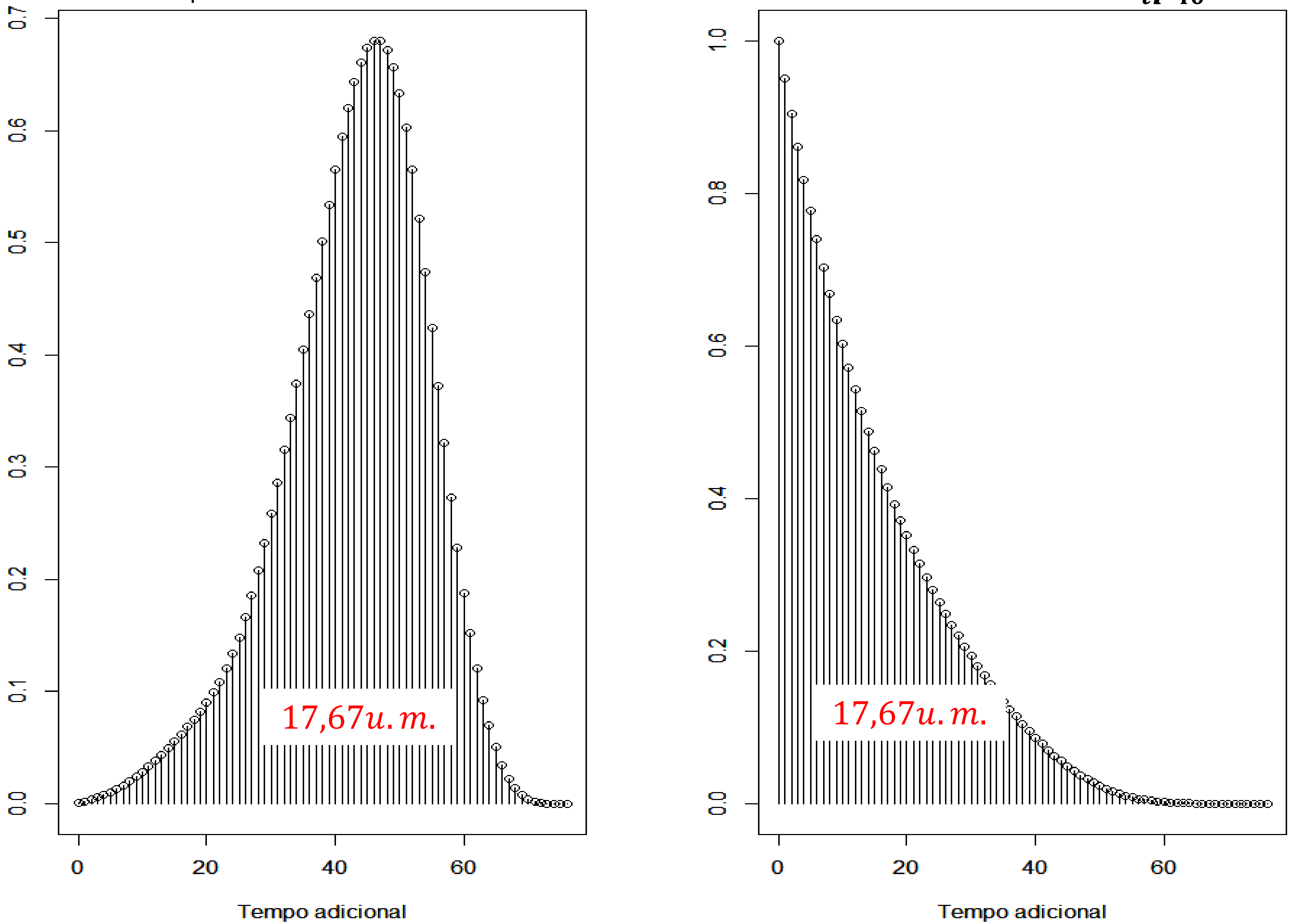
Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \ {}_t p_x$$

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){

v <- 1/(1+i)
px            <- 1-qx
pxx           <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
t            <- (0:(length(pxx)-1))
bx            <- b*sum(v^(t)*pxx)
return(bx)
}
```

$\ddot{a}_{40}$ $i = 5\%$ AT-2000M

$\ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_tp_{40}q_{40+t}$ $v^t\ {}_tp_{40}$



Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} a_{\overline{t|}}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

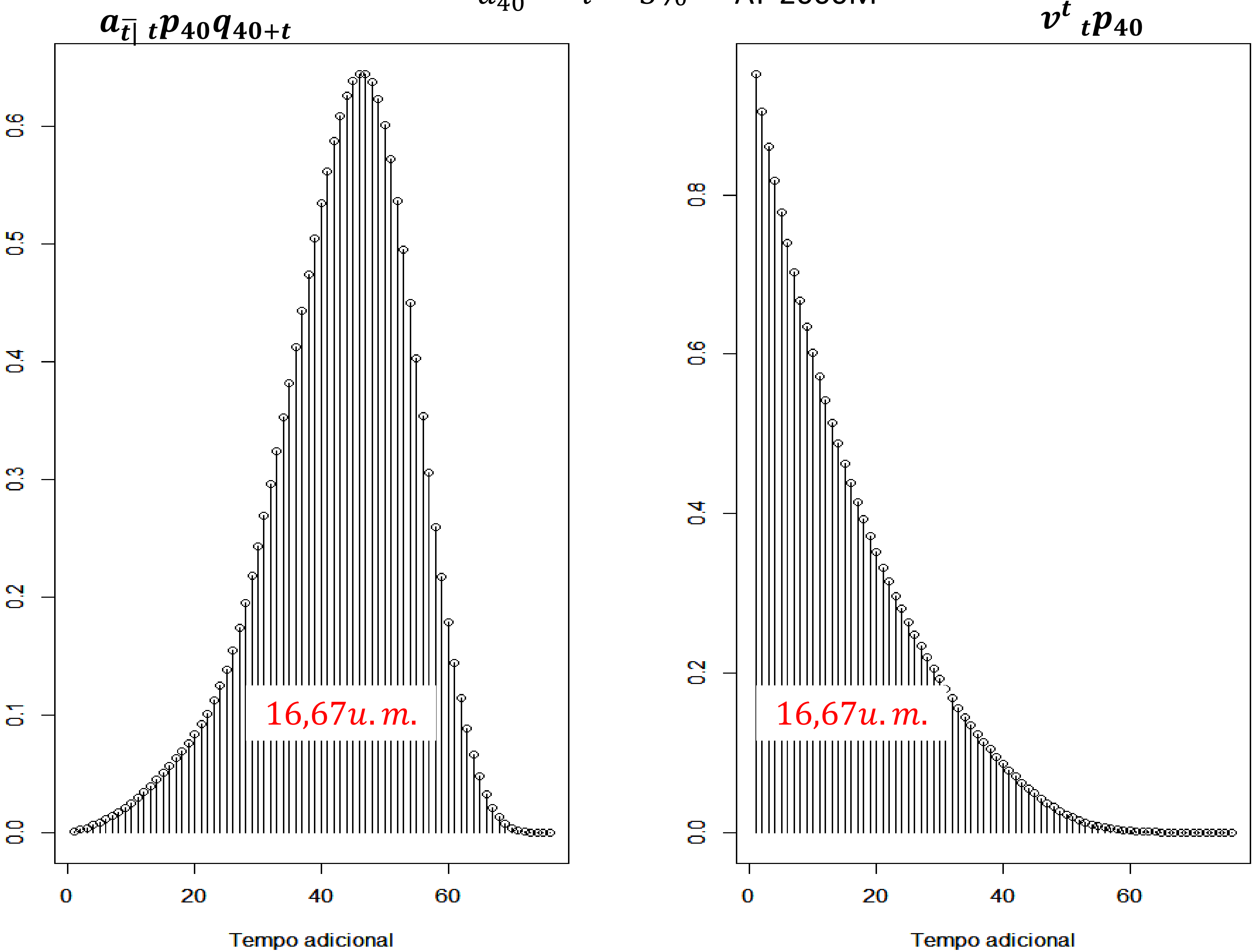
```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){

 v<- 1/(1+i)
 px      <- 1-qx
 pxx     <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])
 ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))
t         <- (1:(length(pxx)))
 ## t     <- (0:(length(pxx)-1))
 a         <- v*(1-.v^t)/(1-v)
 ## a     <- (1-v^(t+1))/(1-v)
  ax           <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])
 ## ax             <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
 return(ax)
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} v^t \ {}_t p_x$$

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){
v<- 1/(1+i)
  px          <- 1-qx
  pxx          <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  ## pxx          <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
  t          <- (1:(length(pxx)))
 ## t          <- (0:(length(pxx)-1))
  bx          <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}
```

$a_{40} \qquad i = 5\% \qquad$ AT-2000M



Anuidade imediata Temporária

```
AnuiAntTemp<-function(i,idade,n,b){
        v     <- 1/(1+i)
        px    <- 1-qx
        pxx   <- c(1, cumprod(px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
        t     <- (0:(length(pxx)-1))
        ax    <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \; {}_t p_x$$

```
AnuiPostTemp<-function(i,idade,n,b){
        v     <- 1/(1+i)
        px    <- 1-qx
        pxx   <- cumprod(px[(idade+1):(idade+n)])
        t     <- 1:length(pxx)
        ax    <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_t p_x$$

EXEMPLO 13:

Seja uma pessoa $x = 25$ anos, e considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano. Calcule A_{25}, $\ddot{a}_{25}$ e a_{25}

EXEMPLO 13:

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t}$$

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} = 0{,}08320205$$

```
prêmio<-function(beneficio,idade,i){
  fator.desconto <- 1/(1+i)
  v <- fator.desconto^(1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax <- benefício*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
 }
```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 19{,}25276$$

```
AnuiAnt<-function(i,idade,b){
 f.desconto <- 1/(1+i)
 px        <- 1-qx
 pxx        <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t        <- (0:(length(pxx)-1))
 bx        <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 18{,}25276$$

```
AnuiPost<-function(i,idade,b){
 f.desconto <- 1/(1+i)
 px        <- 1-qx
pxx        <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
 t        <- (1:(length(pxx)))
 bx        <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

Exemplo de Cálculo de seguros

- PortalHalley

https://phalley.shinyapps.io/interface-atuarial/

- AppCATU

https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt_BR

- R (Lifecontingencies)

https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf

Aula 14-Relações entre Anuidade e seguro pago ao final do ano de morte

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Relações entre Seguros e Anuidades

- Consideramos um seguro de vida inteiro com tempo discreto (seguro pago no final do ano da morte):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

- Assim:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x p_{x+t}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t+1}p_x$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x = v \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x \qquad a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

$$A_x = v \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

$$\boxed{A_x = v\ddot{a}_x - a_x}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1}:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

EXEMPLO 14 Mostre um exemplo que ilustre a relação $A_{x^1:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\bar{n}|}$

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

EXEMPLO 15

Determine a variância das seguintes variáveis aleatórias.

$a)\ \ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}$

$b)\ a_{\overline{T_x|}}$

$$c)\ Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}}, & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & T \geq n \end{cases}$$

SOLUÇÃO (Letra a)

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

Logo

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}} = \frac{1 - Z_T}{1 - v}$$

$$var\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = var\left(\frac{1 - v^{T_x+1}}{1 - v}\right) = \frac{var\left(v^{T_x+1}\right)}{(1 - v)^2}$$

$$\boldsymbol{var\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(1 - v)^2}}$$

SOLUÇÃO (Letra b)

$$1 + a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}$$

Logo

$$a_{\overline{T_x|}} = \frac{v - Z_T}{1 - v}$$

$$var\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = var\left(\frac{v - Z_T}{1 - v}\right) = \frac{var(v^{T_x+1})}{(1 - v)^2}$$

$$\boldsymbol{var}\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \frac{\boldsymbol{{}^2A_x - (A_x)^2}}{\boldsymbol{(1 - v)^2}}$$

SOLUÇÃO (letra c)

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1\right)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{1 - v}$$

Logo

$$Y = \frac{1 - \ Z_{T_x}}{1 - v}$$

$$var(Y) = var\left(\frac{1 - \ Z_{T_x}}{1 - v}\right) = \frac{1}{(1 - v)^2} var\left(Z_{T_x}\right)$$

$$var(Y) = \frac{{}^{2}A_{x:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2}{(1 - v)^2}$$

Variância (Anuidade Vitalícia)

$$var\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = var\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right)$$

$$\boldsymbol{var}\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \frac{{}^{2}\boldsymbol{A_x} - (\boldsymbol{A_x})^{2}}{(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v})^{2}}$$

Variância (Anuidade Temporária)

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}}, & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & T \geq n \end{cases}$$

$$var(Y) = \frac{{}^{2}A_{x:\overline{n|}} - \left(A_{x:\bar{n}|}\right)^2}{(1-v)^2}$$

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$var(Y) = \frac{(1+i)^2\left[{}^{2}A_{x^1:\overline{n|}} - \left(A_{x^1:\bar{n}|}\right)^2\right] - 2(1+i)A_{x^1:\bar{n}|}\,A_{x:\bar{n}|^1} + [v^{2n}\ {}_{n}p_x(1 - {}_{n}p_x)]}{i^2}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1}:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$A_{x^{1}:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^{1}} + iA_{x^{1}:\overline{n}|} + i = 1$$

Aula 15-Anuidades fracionadas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{mn-1} v^{\frac{t}{m}}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}}$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{T+\frac{1}{m}}|} = \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^{T+\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 0$$

$$a^{(m)}_{\overline{T}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-v^{T}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 1$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Anuidades vitalícias fracionadas

- Relação 1.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

- Relação 2.

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\infty} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_tp_x q_{x+t}$$

EXEMPLO 15

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Antecipado e postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro fracionado em pagamentos mensais, a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = R\$17{,}67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17{,}67 - \frac{12-1}{2 \times 12} = R\$\,17{,}21$$

Como $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$a_{40} = R\$16{,}67$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16{,}67 + \frac{12-1}{2 \times 12} = R\$17{,}12$$

Anuidades temporárias fracionadas

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

Anuidades vitalícias diferidas fracionadas

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(\ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right) $$

De forma idêntica

$$ {}_{k|}a_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(a_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \right) $$