

Matemática atuarial

Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

➤ Inflação

- Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.
 - FIPE
 - FGV
 - DIEESE
- É a elevação generalizada dos preços de uma economia.
 - Excesso de gastos
 - Aumento de salários mais rápido do que da produtividade
 - Aumento dos lucros
 - Aumento nos preços das matérias primas
 - Inércia

- Taxa real de juros (t_r)
 - Essa taxa elimina o efeito da inflação
 - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva (i) a taxa de inflação no período (j) e a taxa real (t_r) é dada por:

$$(1 + i) = (1 + t_r)(1 + j)$$

Juros e inflação

➤ EXEMPLO 1

Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?



Juros e inflação

➤ EXEMPLO 1

Suponha que para o período de **1** ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de **36%**. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$i = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42,58\%a.a.$$

$$(1 + 0,4258) = (1 + t_r)(1 + 0,15)$$

$$t_r \cong 23,98\%a.a.$$

O ganho real do banco terá sido de 23,98%a.a.

Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1 + i)^n$$

➤ O capital P também é chamado de valor presente, F_0 , (V.P.) e o montante M de valor futuro, F (V.P.), assim:

$$F = F_0(i + 1)^n$$

Logo:

$$F_0 = \frac{1}{(1 + i)^n} F$$

➤ $FCC(i, n) = (1 + i)^n$: fator de capitalização (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

➤ $FAC(i, n) = v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$ é chamado de fator de atualização do capital, ou fator de desconto (O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

Juros Compostos

Depósitos em série

➤ Série é a generalização do conceito de soma para uma sequência de infinitos termos.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

➤ Denota-se por sequência de somas parciais de uma série os seguintes termos:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

Juros Compostos

Depósitos em série

➤ Se a é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

É chamada, **série geométrica de razão r**

➤ Neste caso a sequencia de somas parciais da série é:

$$S_0 = a$$

$$S_1 = a + ar$$

$$S_2 = a + ar + ar^2$$

...

Juros Composto

Depósitos em série

➤ A n-ésima soma parcial de uma série geométrica $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ é

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

para $r \neq 1$

Demonstração:

$$S_n = a + ar + \dots + ar^n \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão r :

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1} \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \dots + ar^n) - (ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1})$$

$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^{n+1})$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{(1 - r)}$$

Juros Compostos

Depósitos em série

- Série de pagamentos é um conjunto de pagamentos de valores $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ distribuídos ao longo do tempo (n períodos).
- Pagamentos (ou recebimentos) constantes.
- Pagamentos (ou recebimentos) distintos.

Juros Compostos

Depósitos em série

- O conjunto de pagamentos ao longo dos n períodos, constitui-se num fluxo de caixa.
- Fluxo Antecipado: Pagamentos (ou recebimentos) no início dos períodos, ou seja, os depósitos ou pagamentos ocorrem na data zero.
 - No caso de depósitos o montante é resgatado **UM PERÍODO APÓS o último depósito.**
- Fluxo Postecipado: Pagamentos (ou recebimentos) no final dos períodos, ou seja, os depósitos ocorrem um período após a data zero.
 - No caso de depósitos o montante é resgatado com **O ÚLTIMO DEPÓSITO.**

Juros Compostos

Depósitos em série

➤ EXEMPLO 2: (Pagamentos **constantes**.)

Faz-se 24 depósitos mensais de R\$ 50 em uma conta de poupança que paga juros 0,5%, composto mensalmente. Qual é o montante na conta ao fim de dois anos? **Considere o fluxo antecipado.**



➤ Depois de 24 meses o dinheiro depositado no primeiro mês montará á:

$$M_{24} = 50(1 + 0,005)^{24} = 50(1,005)^{24}$$

➤ Após 23 meses, o dinheiro depositado no segundo mês montará á:

$$M_{23} = 50(1 + 0,005)^{23} = 50(1,005)^{23}$$

➤ O último depósito renderá por um único período,

$$M_1 = 50(1 + 0,005)$$

	Montante para o depositado no mês 1	Montante para o depositado no mês 2	Montante para o depositado no mês 3	
Mês 0	\$50 depositado			
Mês 1	M_1	\$50 depositado		
Mês 2	M_2	M_1	\$50 depositado	
Mês 3	M_3	M_2		M_1
...
Mês 24	M_{24}	M_{23}	M_{22}	...

Prosseguindo desta maneira, vemos que o montante resultante dos 24 depois será:

$$F_{24} = M_{24} + M_{23} + M_{22} + \dots + M_1 = \sum_{n=1}^{24} M_n$$

$$F_{24} = R(1+i)^{24} + R(1+i)^{23} + R(1+i)^{22} + \dots + R(1+i) = \sum_{n=1}^{24} R(1+i)^n$$

$$F_{24} = \sum_{n=1}^{24} 50(1,005)^n = -50 + \sum_{n=0}^{24} 50(1,005)^n$$

Repare que trata-se de um série geometria de razão: $r = 1,005 = 1 + i$, e constantes iguais a: $a = 50 = R$

Como

$$S = S_{24} + S_{23} + S_{22} + \dots + S_0 = \frac{a(1 - r^{24+1})}{(1 - r)}$$

temos

$$R + F_{24} = \frac{R[1 - (1 + i)^{24+1}]}{1 - (1 + i)} = \frac{-R[1 - (1 + i)^{24+1}]}{i} = \frac{R[(1 + i)^{24+1} - 1]}{i}$$

$$F_{24} = \frac{R[(1 + i)^{24+1} - 1]}{i} - R = \frac{R(1 + i)^{24}(1 + i) - R - Ri}{i}$$

$$F_{24} = \frac{R[(1 + i)^{24}(1 + i) - (1 + i)]}{i} = \frac{R(1 + i)[(1 + i)^{24} - 1]}{i}$$

Logo:

$$F_{24} = \frac{50(1,005)(1,005^{24} - 1)}{0,005} \cong \$1277,956$$

$$F_n = \frac{R(1 + i)[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$

➤ EXEMPLO 3:

Faz-se um depósito mensal de R\$ 100,00 em uma conta de poupança que paga juros de 0,6% a.m. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo antecipado e postecipado.



➤ Fluxo antecipado:

$$F_3 = \frac{100(1 + 0,006)[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = R\$303,6144$$

➤ Fluxo postecipado:

$$F_3 = \frac{100[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = R\$301,8036$$



Montante final

	Fluxo Antecipado	Fluxo postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$

➤ Determinar o principal P que deve ser aplicada a uma taxa i para que se possa retirar o valor R em cada um dos n períodos.

➤ Qual valor P que financiado à taxa i por período, pode ser amortizado em n pagamentos iguais a R .

Capital investido

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$	$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$

➤ EXEMPLO 4:

Uma empresa conseguiu um financiamento de R\$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga no ato da liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = 15000$$

$$i = 0,02$$

$$n = 4$$

$$P = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i(1 + i)^{n-1}}$$

➤ EXEMPLO 4:

Uma empresa conseguiu um financiamento de R\$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga no ato da liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = R \frac{[(1 + i)^n - 1]}{i(1 + i)^{n-1}}$$

$$R = \frac{P[i(1 + i)^{n-1}]}{[(1 + i)^n - 1]} = \frac{15000[0,02(1,02^3)]}{[(1,02^4) - 1]} = R\$3862,11$$

➤ EXEMPLO 5:

Uma empresa conseguiu um financiamento de R\$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 30 dias após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

$$R = \frac{P[i(1+i)^n]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0,02(1,02^4)]}{[(1,02^4) - 1]} = R\$3939,356$$

a) Aplicando-se $R\$1000,00$ por um prazo de dois anos a uma taxa de 5% ao semestre, qual será o montante no fim do período?

b) Um capital de $R\$20000,00$ é aplicado durante um ano e três meses à taxa de 2% *a. m.* Quais os juros gerados no período?

c) Determinado capital aplicado a juros compostos durante 12 meses, gera um juros igual ao valor aplicado. Qual a taxa mensal dessa aplicação?

d) Calcule o montante de $R\$1000,00$ aplicados a 10% *a.a.* durante 50 dias.

e) Quando deve ser investido agora para acumular $R\$200,00$ ao final de 3 anos à taxa de 5% *a.a.*?

f) Qual o valor de resgate de uma aplicação de $R\$12000,00$ em um título pelo prazo de 8 meses à taxa de juros composta de 3,5% *a. m.*?

Juros Compostos-Depósitos em série

- No caso de pagamentos **variáveis** tem-se que (fluxo antecipado *).
 - Fluxo antecipado porém o modelo considera depósito no mês de resgate, daí é um fluxo genérico na verdade.

- Após o primeiro mês o primeiro depósito (F_0) montará á:

$$F_1 = F_0(1 + i) + R_1$$

- Após o segundo mês o primeiro depósito (F_0) acrescido de R_1 montará á:

$$F_2 = F_1(1 + i) + R_2$$

Sucessivamente temos que:

$$F_3 = F_2(1 + i) + R_3$$

$$F_4 = F_3(1 + i) + R_4$$

...

$$F_n = F_{n-1}(1 + i) + R_n$$

Juros Compostos-Depósitos em série

➤ Note também que:

$$F_1 = F_0(1+i) + R_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + R_2 = [F_0(1+i) + R_1](1+i) + R_2$$

$$F_2 = F_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [F_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$

$$F_3 = F_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + R_4 = [F_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = F_0(1+i)^4 + (1+i)^3R_1 + (1+i)^2R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

...

$$F_n = F_0(1+i)^n + \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j}R_j$$

Acumulação do capital inicial.

Soma dos valores acumulados nos depósitos intermediários.

Juros Compostos-Depósitos em série

➤ Modelo genérico

$$F_n = F_0(i + 1)^n + \sum_{j=1}^n (1 + i)^{n-j} R_j$$

➤ Fluxo antecipado

$$F_n = F_0(i + 1)^n + \sum_{j=1}^{n-1} (1 + i)^{n-j} R_j$$

➤ Fluxo postecipado

$$F_n = \sum_{j=1}^n (1 + i)^{n-j} R_j$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo postecipado
Pagamento Constante	$F_n = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$F_n = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Pagamento Variável	$F_n = F_0(i+1)^n + \sum_{j=1}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$	$F_n = \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} R_j$

➤ EXEMPLO 18:

Faz-se um depósito mensal de R\$ 100,00 em uma conta de poupança que paga juros de 0,6% a.m. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo antecipado e postecipado.

➤ Fluxo antecipado:

$$F_3 = \frac{100(1 + 0,006)[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = R\$303,6144$$

ou

$$F_3 = 100(1 + 0,006)^3 + \sum_{j=1}^2 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = 100(1,006)^3 + (1,006)^2 100 + (1,006) 100 \\ = R\$303,6144$$

➤ Fluxo postecipado:

$$F_3 = \frac{100[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = R\$301,8036$$

ou

$$F_3 = \sum_{j=1}^3 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = (1,006)^2 100 + (1,006) 100 + 1 00 = R\$301,8036$$

- Determinar o principal P que deve ser aplicada a uma taxa i para que se possa retirar o valor R em cada um dos n períodos.
- Qual valor P que financiado à taxa i por período, pode ser amortizado em n pagamentos iguais a R .

Lembrando que: $F = F_0(1 + i)^n$ e $F_0 = F \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = Fv$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$P = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i(1 + i)^{n-1}}$	$P = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i(1 + i)^n}$
Pagamento Variável	$P = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + i} \right)^j R_j$	$P = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1 + i} \right)^j R_j$

➤ EXEMPLO 6:

Uma empresa conseguiu um financiamento de R\$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 30 dias após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$P = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i(1 + i)^n}$$



➤ Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$P = F_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i} \right)^j R_j = R + \left(\frac{1}{1+i} \right) R + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 R + \left(\frac{1}{1+i} \right)^3 R$$

$$R = \frac{P}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i} \right) + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 + \left(\frac{1}{1+i} \right)^3 \right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,0404} + \frac{1}{1,0612}} = R\$3862,11$$

➤ Pagamento 30 dias após a liberação dos recursos

$$P = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+i} \right)^j R_j = \left(\frac{1}{1+i} \right) R + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 R + \left(\frac{1}{1+i} \right)^3 R + \left(\frac{1}{1+i} \right)^4 R$$

$$R = \frac{P}{\left[\left(\frac{1}{1+i} \right) + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 + \left(\frac{1}{1+i} \right)^3 + \left(\frac{1}{1+i} \right)^4 \right]} = \frac{15000}{\left[\left(\frac{1}{1,02} \right) + \left(\frac{1}{1,02} \right)^2 + \left(\frac{1}{1,02} \right)^3 + \left(\frac{1}{1,02} \right)^4 \right]}$$

$$R = R\$3939,35$$