Matemática atuarial

Aula 2-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

JUROS

- Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades constatou-se que:
  - Bens e os serviços poderiam ser consumidos e guardados para o consumo futuro.
    - Consumo → Falta
    - Acúmulo → Estoque (..Gerar novos bens através do processo produtivo)
- Estoques
  - Bens
  - Valores monetários
    - Podem aumentar gradativamente conforme a utilidade temporal.

JUROS

- As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira:

- Capital $(\boldsymbol{P})$ **:** Todo acúmulo de valores monetários em um determinado período de tempo, a riqueza, também chamado de principal.

- Unidade de tempo $(\boldsymbol{n})$: é a unidade temporal geralmente expressa anos, trimestres, meses ...

- Taxa de juros $(\boldsymbol{i})$: é a taxa de incremento que o capital sobre por unidade de tempo.

- Juros $(\boldsymbol{J})$: é a remuneração de um capital $\boldsymbol{P}$ aplicada a uma certa taxa $\boldsymbol{i}$ durante um determinado período $\boldsymbol{n}$, ou seja, preço do crédito.

JUROS

- A existência de Juros decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

  - **Inflação:** A diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo...

  - **Riscos:** Eventos que podem causar desequilíbrio ao patrimônio.

  - **Outros:** Aquisição ou oferta de empréstimo a terceiros.

JUROS SIMPLES

- Quando o juro incide no decorrer do tempo sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples.

Juros simples

$$J = P.i.n$$

- Juros produzidos depois de n períodos, do capital P Aplicado a uma taxa de juros i.

Montante($\boldsymbol{M}$)

$$M = P(1 + i.n)$$

- Capital inicial adicionado aos juros produzidos no período.

JUROS SIMPLES

- EXEMPLO 1:

Faz-se um deposito de $\$1000$ em uma conta que paga $0,5\%$ de juros simples, mensalmente. Determine uma sequência que represente os saldos mensais.

$\boldsymbol{n}$	Juros Simples por período (J)	Montante (M)
1		
2		
3		
4		

- EXEMPLO 1:

Faz-se um deposito de $1000 em uma conta que paga 0,5% de juros simples, mensalmente. Determine uma sequência que represente os saldos mensais.

$\boldsymbol{n}$	Juros Simples por período (J)	Montante (M)
1	$1000(0{,}005) = 5$	$1000(1 + 0{,}005.1) = 1005$
2	$1000(2\ .0{,}005) = 10$	$1000(1 + 0{,}005.2) = 1010$
3	$1000(3.0{,}005) = 15$	$1000(1 + 0{,}005.3) = 1015$
4	$1000(4.0{,}005) = 20$	$1000(1 + 0{,}005.4) = 1020$

JUROS SIMPLES

- EXEMPLO 2:

Calcule o montante ao final de dez anos de um capital $R\$10000{,}00$ aplicada à taxa de juros simples de 18% ao semestre $(18\%\ a.s)$, capitalizados em juros simples.

Resp.:

JUROS SIMPLES

- EXEMPLO 2:

Calcule o montante ao final de dez anos de um capital $R\$10000{,}00$ aplicada à taxa de juros simples de 18% ao semestre $(18\%\ a.s)$, capitalizados em juros simples.

Resp.:

Em 10 anos existem 20 semestres, logo:

$$M = 10000(1 + 0{,}18.20) = R\$46000{,}00$$

O juro produzi nesse período foi de:

$$J = 10000(0{,}18.20) = R\$36000{,}00$$

JUROS COMPOSTOS

- Quando a taxa de juros incide sobre o capital atualizado com os juros do período (montante), dizemos que temos um sistema de capitalização composta.

  - Considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando um montante, capital mais juros, do período.

  - Cada montante formado é constituído do capital inicial, juros acumulados e dos juros sobre juros formados em período anteriores.

Juros Composto

- EXEMPLO 3:

Faz-se um deposito de $1000 em uma conta que paga 0,5% de juros, composto mensalmente. Determine uma sequencia que represente os saldos mensais.

1° mês→ $M_1 = 1000 + 1000.\ 0{,}005 = \mathbf{1000.(1,005)}$

2° mês→ $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_1\ .0{,}005 = M_1(1{,}005) = \mathbf{1000.(1,005)}(1{,}005) = 1000(1{,}005)^2$

3° mês→ $\mathrm{M}_3 = M_2 + \mathrm{M}_2.\ 0{,}005 = M_2(1{,}005) = [1000(1{,}005)^2].(1{,}005) = 1000(1{,}005)^3$

4° mês→ $\mathbf{M_4} = M_3 + \mathrm{M}_3.\ 0{,}005 = M_3(1{,}005) = [1000(1{,}005)^3].(1{,}005) = 1000(1{,}005)^{\mathbf{4}}$

...

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1000(1,005)}^{\boldsymbol{n}}$$

JUROS COMPOSTOS

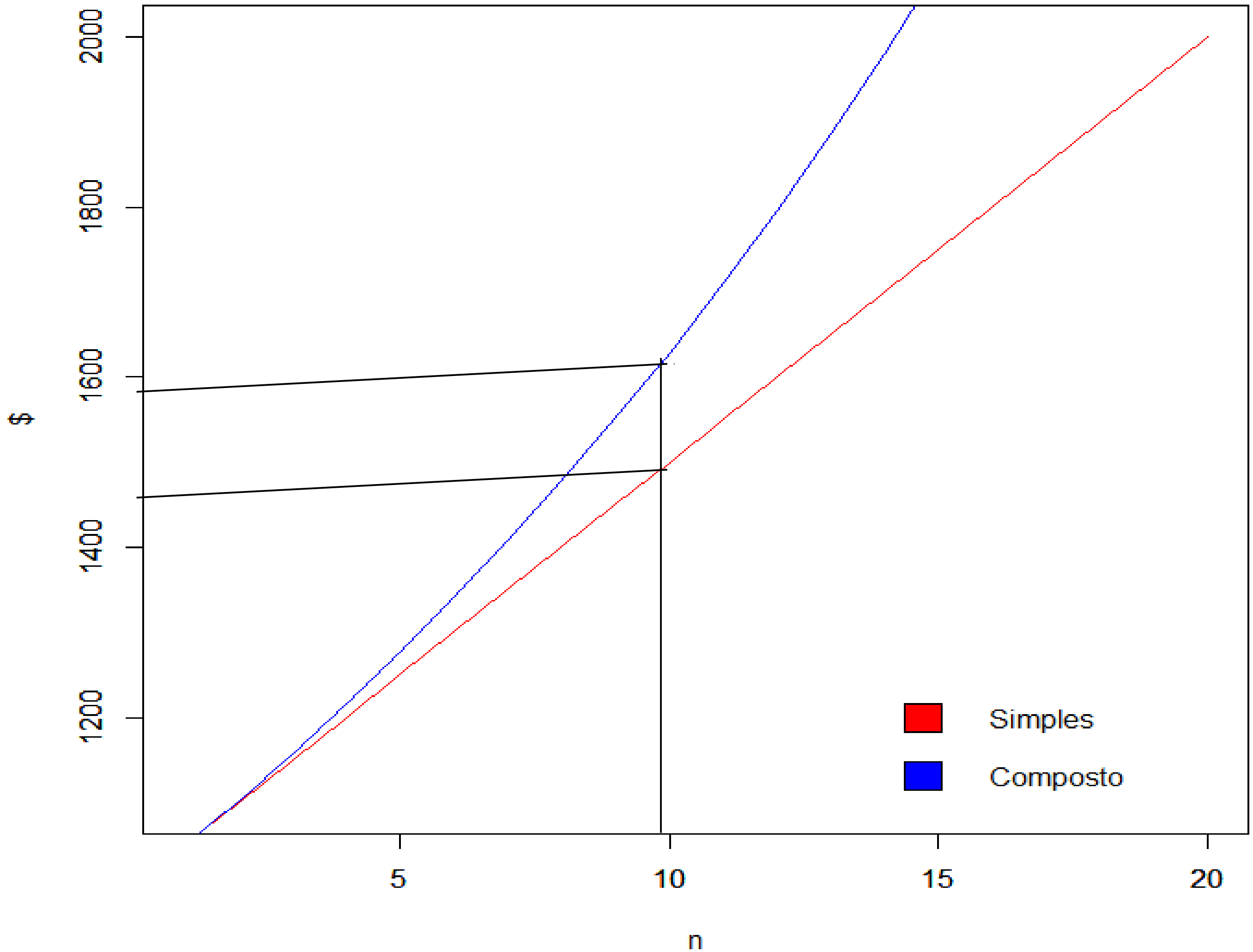
- EXEMPLO 4:

Faz-se um deposito de $1000 em uma conta que paga 0,5% de juros , mensalmente. Determine uma sequencia que represente os saldos mensais (juros por período e montante) pelo capitalização simples e composta

n	Juros Simples (J)	Montante (M)	Juros compostos (J)	Montante (M)
1	$1000.0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005.1) = 1005$	$1000\,.\,(0{,}005) = 5$	$1000(1 + 0{,}005)^1 = 1005$
2	$1000.0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005.2) = 1010$	$1005\,.\,(0{,}005) = 5{,}025$	$1000(1 + 0{,}005)^2 = 1010{,}025$
3	$1000.0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005.3) = 1015$	$1010{,}025\,.\,(0{,}005) = 5{,}0501$	$1000(1 + 0{,}005)^3 = 1015{,}075$
4	$1000.0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005.4) = 1020$	$1015{,}075\,.\,(0{,}005) = 5{,}0753$	$1000(1 + 0{,}005)^4 = 1020.151$
	$J = P.i$	$M_n = P(1 + i.n)$	$J_n = \mathrm{M}_{n-1}.i$	$\mathrm{M}_n = P(1 + i)^n$

Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores utilizam os juros compostos.

Juros Compostos



- EXEMPLO 5:

Ao comunicar o sinistro para a seguradora, um segurado recebeu a seguinte proposta como indenização: $R\$20000,00$ agora ou $R\$21211,92$ daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1 + i)^n$$

$$M = 21211,91 \;\; P = 20000 \;\; n = 60dias \rightarrow 2mês$$

- EXEMPLO 5:

Ao comunicar o sinistro para a seguradora, um segurado recebeu a seguinte proposta como indenização: $R\$20000,00$ agora ou $R\$21211,92$ daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1+i)^n$$

$$M = 21211,91 \;\; P = 20000 \;\; n = 60dias \rightarrow 2mês$$

$$21211,92 = 20000(1+i)^2$$

$$1,0606 = (1+i)^2$$

$$(1,0606)^{\frac{1}{2}} = 1 + i$$

$$1,03 \cong 1 + i$$

$$i \cong 0,03 \rightarrow 3\% \; ao \; mês$$

Juros Compostos

➢**Taxas proporcionais**

São taxas que se relacionam linearmente **(juros simples).**

Exemplo 6:

Ao se emprestar $R\$2000{,}00$, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá após 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0{,}04.(12)) = R\$2960{,}00$$

Essa taxa é proporcional a $(0{,}04 * 2)$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000\big(1 + \mathbf{0{,}08}(\mathbf{6})\big) = R\$2960{,}00$$

➢**Taxas equivalente**

As taxas não se relacionam de forma linear **(juros compostos).**

Exemplo 7:

Ao se emprestar $R\$2000{,}00$, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá após 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0{,}04)^{12} = R\$3202{,}06$$

Diferente de:

$$M = 2000(1 + \mathbf{0{,}08})^{\mathbf{6}} = R\$3173{,}74$$

➢Taxas equivalente

As taxas equivalente são chamadas assim pois apesar de serem diferentes, se aplicadas a um mesmo capital, produzem e uma mesma data o mesmo montante.

Ao se emprestar $R\$2000{,}00$, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$(1+0{,}04)^{12} = (1+i)^{6}$$

$$i = 0{,}0816$$

Essa taxa é equivale a $0{,}0816$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000(1+0{,}0816)^{6} = R\$3202{,}06$$

Relações equivalentes

➢ *Taxas de Juros podem ser representadas em diferentes unidades de tempo (ao ano, ao mês, etc.) e são ditas equivalentes se produzem o mesmo efeito quando aplicadas em um mesmo período de tempo.*

$$\boldsymbol{(1+i_d)^{360}=(1+i_m)^{12}=(1+i_b)^{6}=(1+i_t)^{4}=\left(1+i_q\right)^{3}=(1+i_s)^{2}=(1+i_a)}$$

TAXAS DE JUROS

- Taxa nominal

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

-340% ao semestre com capitalização mensal.

-1150% ao ano com capitalização mensal.

- Taxa Efetiva

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquela a que a taxa está referida.

- *140% ao mês com capitalização mensal.*
- *250% ao semestre com capitalização semestral.*

- EXEMPLO 8:

Uma empresa contrai um empréstimo de $R\$100000,00$ em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, **capitalizados mensalmente**. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

- EXEMPLO 8:

Uma empresa contrai um empréstimo de $R\$100000{,}00$ em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, capitalizados mensalmente. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

A taxa nominal corresponde a $36\%\ a.a.$

Pois:

$$i = \frac{36}{12} = 3\% \text{ ao mês } (\text{ nominal})$$

A capitalização mensal indica que os 36% corresponde a soma das taxas mensais ao longo de um ano.

Assim:

$$(1 + 0{,}03)^{12} = (1 + i)$$
$$i \cong 42{,}58\% a.a.$$

A taxa efetiva será de $42{,}25\%\ a.a.$

Logo

$$M \cong 100000(1 + 0{,}4258) = R\$142580{,}00$$

Taxas de Juros

- Dada a taxa nominal, se quiser saber a taxa efetiva basta descapitalizar a juros simples (divisão) e capitalizar a juros compostos.

Em que $i_{(n)}$ é a taxa nominal, com n períodos de conversão e i é a taxa efetiva anual.

$$i = \left(1 + \frac{i_{(n)}}{n}\right)^{n} - 1$$

Ou seja a taxa nominal i_n é o resultado da soma da taxa verificada em n períodos.

- EXEMPLO 9

Sendo as taxas com capitalizações mensais, 340% ao semestre e 300% ao ano, qual será as taxas de juros efetivas ao final de um ano?

$$i = \left(1 + \frac{340}{6}\right)^{6} - 1 \cong 1378\% \text{ a.s}$$

$$i = \left(1 + \frac{300}{12}\right)^{12} - 1 \cong 1355\% \text{ a.a}$$

- EXEMPLO 10

Admitindo-se uma taxa de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitação: **diário, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual**.

$$i = \left(1 + \frac{i_{(n)}}{n}\right)^{n} - 1$$

EXEMPLO 10

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalização anualmente, a taxa acaba é a própria taxa efetiva.

$$i = (1 + 0{,}72\ )^1 - 1 = 0{,}72$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalização semestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos dois semestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}8496$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalização quadrimestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos 3 quadrimestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{3}\right)^3 - 1 \cong 0{,}906624$$

...

EXEMPLO 10

Admitindo-se uma taxa de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitação: diário, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual.

$$i = (1 + 0{,}72\,)^1 - 1 = 0{,}72$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}8496$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{3}\right)^3 - 1 \cong 0{,}906624$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{4}\right)^4 - 1 \cong 0{,}9387778$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{6}\right)^6 - 1 \cong 0{,}9738227$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{12}\right)^{12} - 1 \cong 1{,}012196$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{360}\right)^{360} - 1 \cong 1{,}05295$$

OBS.:

Ao se afirmar que a taxa de juros é de 72% ao ano , capitalizado diariamente. Isso equivale em dizer que esse valor foi obtido pela soma das taxa de juros ao longo de 360 dias. Assim a taxa diária é $\boldsymbol{\frac{0{,}72}{360} = 0{,}002}$ ***e o equivalente a esse valor em um ano corresponde a :***

$$\boldsymbol{1 + i = (1 + 0{,}002)^{360}}$$

$$\boldsymbol{i \cong 1{,}05295}$$

Taxas de Juros

- Taxa instantânea de juros

  - A taxa nominal corresponde a soma das taxas cobradas em todas os períodos.

  - Se o número de períodos dos quais se compõem a taxa nominal crescem muito, dizemos que essa taxa é uma soma contínua, também chamada de taxa de juros instantânea.
    - Juros compostos capitalizados de forma instantânea.

  - De acordo com Hull[1], “ taxas de juros capitalizados continuamente são bastante utilizadas quando as opções e outros derivativos complexos estão sendo precificados. E para fins práticos a capitalização contínua pode ser considerada equivalente à diária”

[1] Hulll, John. Introdução aos mercados futuros e de opões. 2. ed. São Paulo: Bolsa Mercantil e de Futuros, Cultura editores Associados, p. 52-54,1996

Taxas de Juros

- Taxa instantânea de juros e taxa de juros efetiva

$$i = \left(1 + \frac{i_{(n)}}{n}\right)^n - 1$$

- A partir desse ponto usamos o símbolo δ para mostra que a taxa nominal trata-se de uma taxa instantânea.

$$\lim_{n\to\infty} i = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^n - \lim_{n\to\infty} 1$$

$$i = e^{\delta} - 1$$

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$ke^{r} = \lim_{n\to\infty}\left(k\left(1 + \frac{r}{n}\right)\right)^n$$

Taxas de Juros

- Taxa instantânea de juros e taxa de juros efetiva

$$e^{\delta} = 1 + i$$

$$\delta = \ln(1 + i)$$

Em que $\boldsymbol{\delta}$, é a taxa de juros instantânea e $\boldsymbol{i}$ é a taxa de juros efetiva.

- Assim o cálculo do montante (valor futuro) em um regime de capitalização contínua é dado por:

$$M = P(1 + i\,)^{n} = \boldsymbol{Pe^{\delta.n}}$$

Ou

$$P = M\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n} = Me^{-\delta.n}$$

- Importante lembrar que por se tratar de período contínuo é comum representar n como sendo t.

- EXEMPLO 11

Um capital de $R\$15000{,}00$ é aplicado durante 2 anos e meio a uma taxa de juros contínuos de $1{,}5\%$ ao mês. Calcular o montante acumulado nesse período.

$$M = \boldsymbol{Pe^{\delta . n}}$$

$$M = 15000e^{0{,}015(30)} = \text{R\$ } 23534{,}68$$

- EXEMPLO 12

Calcular a taxa de juros instantâneo mensal que aplicada a um capital de $R\$1000,00$ produz um montante de $R\$3500,00$ após 3 anos.

$$M = \boldsymbol{Pe^{\delta . n}}$$

- EXEMPLO 12

Calcular a taxa de juros instantâneo mensal que aplicada a um capital de $R\$1000{,}00$ produz um montante de $R\$3500{,}00$ após 3 anos.

$$M = \boldsymbol{Pe^{\delta.n}}$$

$$\frac{M}{P} = \boldsymbol{e^{\delta.n}}$$

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{M}{P}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{36}\ln\left(\frac{3500}{1000}\right) = 0{,}03479897$$