

Teoria do Risco

Aula 3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley/index.html>



Função de Distribuição

- Um fenômeno aleatório ou estocástico é descrito minimamente por uma distribuição de probabilidade.
 - Indexa parâmetros e campos de variação.
- O conhecimento do modelo e suas principais características permite ao pesquisador ter uma clara visão do uso adequado dos mesmos.



Importantes modelos discretos

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Distribuição Uniforme discreta

$Y \sim U_d(E)$, com “ E ” sendo o conjunto de seus valores.

$$P(Y = y) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\dots,N\}}(y)$$

Todos os possíveis valores da variável são equiprováveis.

$$Y \sim U_d(1, N)$$

$$E(Y) = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{N^2-1}{12}$$

Distribuição de Bernoulli

$$Y \sim \text{Bernoulli}(q)$$

$$P(Y = y) = q^y (1 - q)^{1-y} I_{\{0,1\}}(y)$$

Uma variável aleatória que segue o modelo Bernoulli, assume apenas os valores 0 ou 1.

$$E(Y) = q \quad \text{var}(Y) = q(1 - q)$$

Distribuição Binomial

Considerando uma sequência de n ensaios de Bernoulli, a observação conjunta de vários desses ensaios leva à definição da distribuição Binomial.

Exemplo:

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso). Qual o modelo de probabilidade para o número de coroas?

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1 - q)^4$	$\binom{4}{0} q^0(1 - q)^4$
Coroa	Cara	Cara	Cara	1	$q^1(1 - q)^3$	$\binom{4}{1} q^1(1 - q)^3$
Cara	Coroa	Cara	Cara		$q^1(1 - q)^3$	
Cara	Cara	Coroa	Cara		$q^1(1 - q)^3$	
Cara	Cara	Cara	Coroa		$q^1(1 - q)^3$	
Coroa	Coroa	Cara	Cara	2	$q^2(1 - q)^2$	$\binom{4}{2} q^2(1 - q)^2$
Coroa	Cara	Coroa	Cara		$q^2(1 - q)^2$	
Coroa	Cara	Cara	Coroa		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Coroa	Cara	Coroa		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Cara	Coroa	Coroa		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Cara		$q^2(1 - q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Coroa	3	$q^3(1 - q)^1$	$\binom{4}{3} q^3(1 - q)^1$
Coroa	Cara	Coroa	Coroa		$q^3(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Cara	Coroa		$q^3(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Cara		$q^3(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Coroa	4	$q^4(1 - q)^0$	$\binom{4}{4} q^4(1 - q)^0$

Distribuição Binomial

Seja Y o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes. Então é $Y \sim B(n, q)$.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y)$$

$$E(Y) = nq \quad \text{var}(Y) = nq(1 - q)$$

Distribuição de Poisson

Sendo a ocorrência do evento em estudo um evento raro, o cálculo através do modelo binomial se torna extremamente laborioso

$$Y \sim Po(\lambda).$$

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} I_{\{0,1,\dots\}}(y)$$

□ parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

$$E(Y) = \lambda \quad \text{var}(Y) = \lambda$$

Importantes modelos discretos

- **Distribuição Geométrica.** $Y \sim G(q)$

$$P(Y = y) = q(1 - q)^{y-1}$$

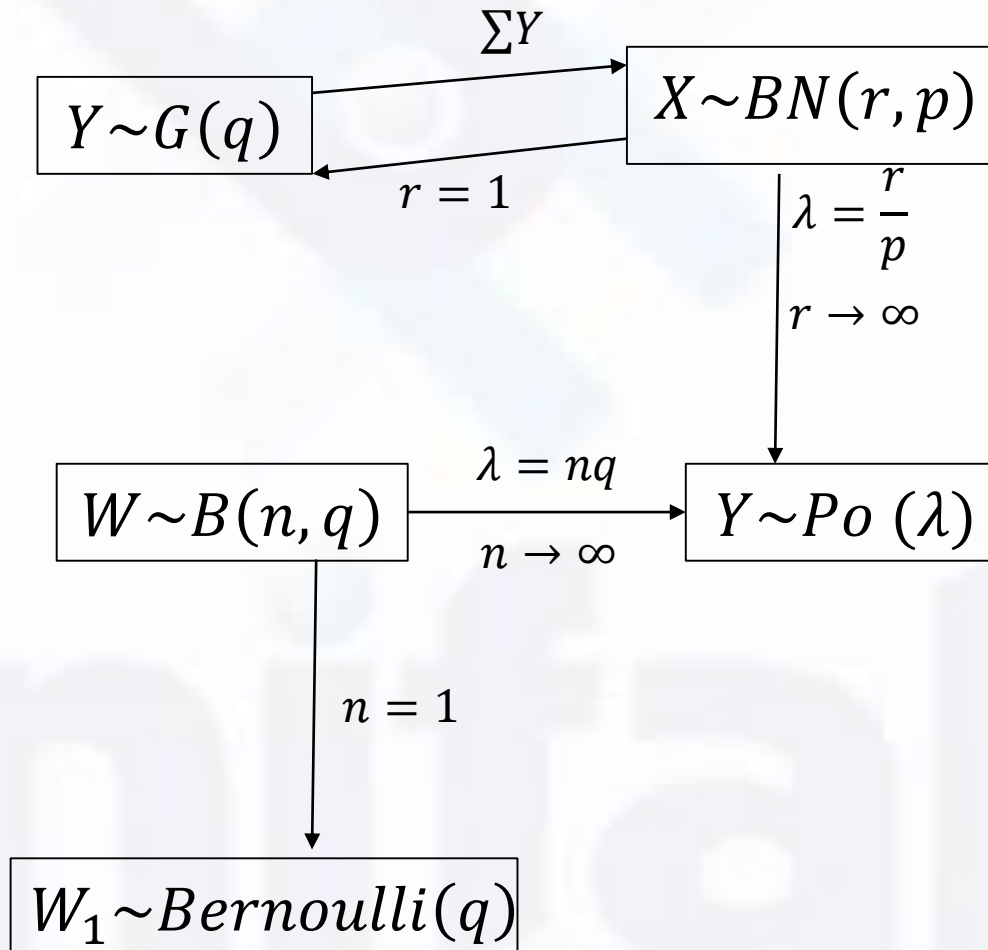
$$E(Y) = \frac{1}{q} \quad \text{var}(Y) = \frac{1 - q}{q}$$

- **Distribuição Binomial Negativa** $Y \sim BN(r, q)$

$$P(Y = y) = \binom{y + r - 1}{y} q^r (1 - q)^y$$

$$E(Y) = \frac{r(1 - q)}{q} \quad \text{var}(Y) = \frac{r(1 - q)}{q^2}$$

Importantes modelos discretos



Importantes modelos contínuos

Distribuição Uniforme contínua

$$Y \sim U_c(a, b)$$

$$f(y) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(y)$$

No intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, todos os sub-intervalos com mesmo comprimento tem a mesma probabilidade.

$$E(Y) = \frac{a+b}{2} \quad \text{var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição Uniforme contínua

$$Y \sim U_c(a, b).$$

O mais simples modelo probabilístico contínuo

$$F(y) = \frac{y - a}{b - a} I_{[a, b]}(y) + I_{[b, \infty)}(y).$$

Distribuição Exponencial

Importante função de distribuição utilizadas na modelagem de dados que representam o tempo até a ocorrência pela primeira vez de algum evento de interesse,

Tempo de falha de um componente eletrônico.

Tempo de ocorrência de indenização em uma seguradora.

Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas.

Intervalos entre chegadas de chamadas telefônicas a uma central.

Boas propriedades matemáticas.

Distribuição Exponencial

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y} I_{[0, \infty)}(y)$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância ou volume, entre outras.

$$F(y) = (1 - e^{-\lambda y}) I_{(0, \infty)}(y)$$

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuição Normal

- A grande maioria das técnicas empregadas é baseada na distribuição normal.
- Inúmeros fenômenos aleatórios podem ser descritos precisamente ou aproximadamente por este modelo.
- Essa distribuição é a forma limitante de outras distribuições de probabilidade, como consequência do teorema central do limite.
- Muitas estatísticas apresentam normalidade assintótica.

Distribuição Normal

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

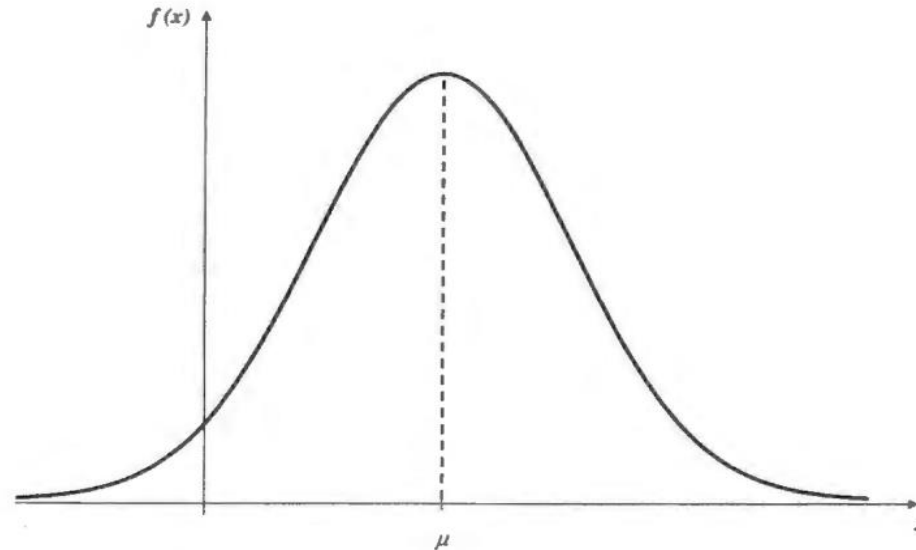
$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(-\infty, \infty)}(y)$$

com $\mu, \sigma, y \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Os parâmetros μ, σ^2 são respectivamente, a média e a variância da variável.

$$E(Y) = \mu \quad \text{var}(Y) = \sigma^2$$

Distribuição Normal



Simétrica ao redor de μ e vai diminuindo a massa de probabilidade, à medida que seus valores se movem para as extremidades.

Adequado para várias quantidades envolvendo medidas populacionais:

Peso, Altura, Dosagem De Substâncias No Sangue, Entre Outras.

Distribuição Normal

- A função de distribuição da $N(\mu, \sigma^2)$ não tem uma forma fechada.
 - Não possui primitiva.
- Os valores de probabilidade são obtidos por integração numérica e apresentados em tabela.
- Basta, tabelar as probabilidades para $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Uma transformação linear de Y é feita nesse sentido.

$$Y = \sigma Z - \mu$$

Sendo $Z \sim N(0,1)$

Distribuição Normal

Sendo $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{y - \mu}{\sigma}$ terá distribuição $N(0,1)$.

$$P(Y \leq y) = P\left(Z \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$$

A distribuição $N(0,1)$ é denominada Normal Padrão ou Normal Reduzida.

Distribuição Normal

$$P(a < Y < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Pareto

- $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$

$$f(X) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0 \ (\alpha, \beta > 0)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \alpha > 2$$

- **Utilizada no seguro de incêndio vultoso, e resseguro de catástrofe.**

Lognormal

- $Y \sim LN(\mu, \beta)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(y)$$

$$E(Y) = e^{\mu + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

$$\text{var}(Y) = e^{2(\mu + \sigma^2)}$$

- Utilizada nos seguros de automóveis e incêndio comum.