

# Aula 12

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

Leonardo Henrique Costa

[Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

<https://atuaria.github.io/portahalley>

# Anuidades temporárias imediatas

- Variável aleatória tempo  $T$ , **discreta**.
- No caso de anuidades temporárias, essas são válidas enquanto a pessoa de idade  $x$  for viva até no máximo  $n$  anos.
  - Então, para o caso discreto, o V.P.A. de anuidades temporárias temos:
- VPA de uma anuidade **antecipada**.

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x$$

## Exemplo 5:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{4-1} {}_tE_{30} = \sum_{t=0}^3 v^t {}_tp_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + vp_{30} + v^2 {}_2p_{30} + v^3 {}_3p_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + \frac{1}{1,05} p_{30} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 3,71$$

# Anuidades temporárias imediatas

➤ VPA de uma anuidade **Postecipada**.

$$Z = \begin{cases} a_{\overline{T}|} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{t=1}^n {}_tE_x = \sum_{t=1}^n v^t {}_tp_x$$

## Exemplo 6:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$a_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^4 {}_tE_{30} = \sum_{t=1}^4 v^t {}_tp_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = vp_{30} + v^2 {}_2p_{30} + v^3 {}_3p_{30} + v^4 {}_4p_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = \frac{1}{1,05} p_{30} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 p_{30}p_{31}p_{32}p_{33}$$

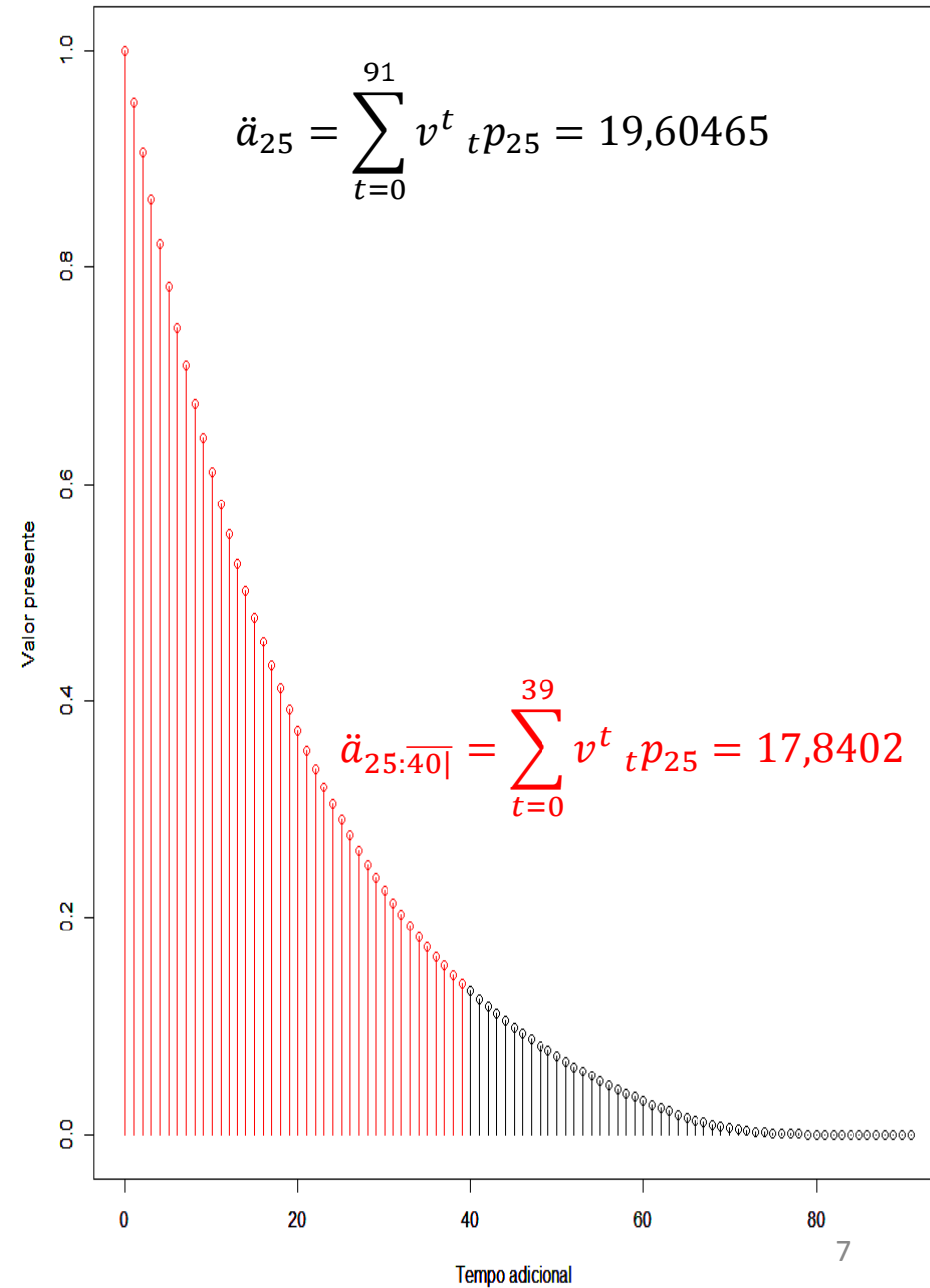
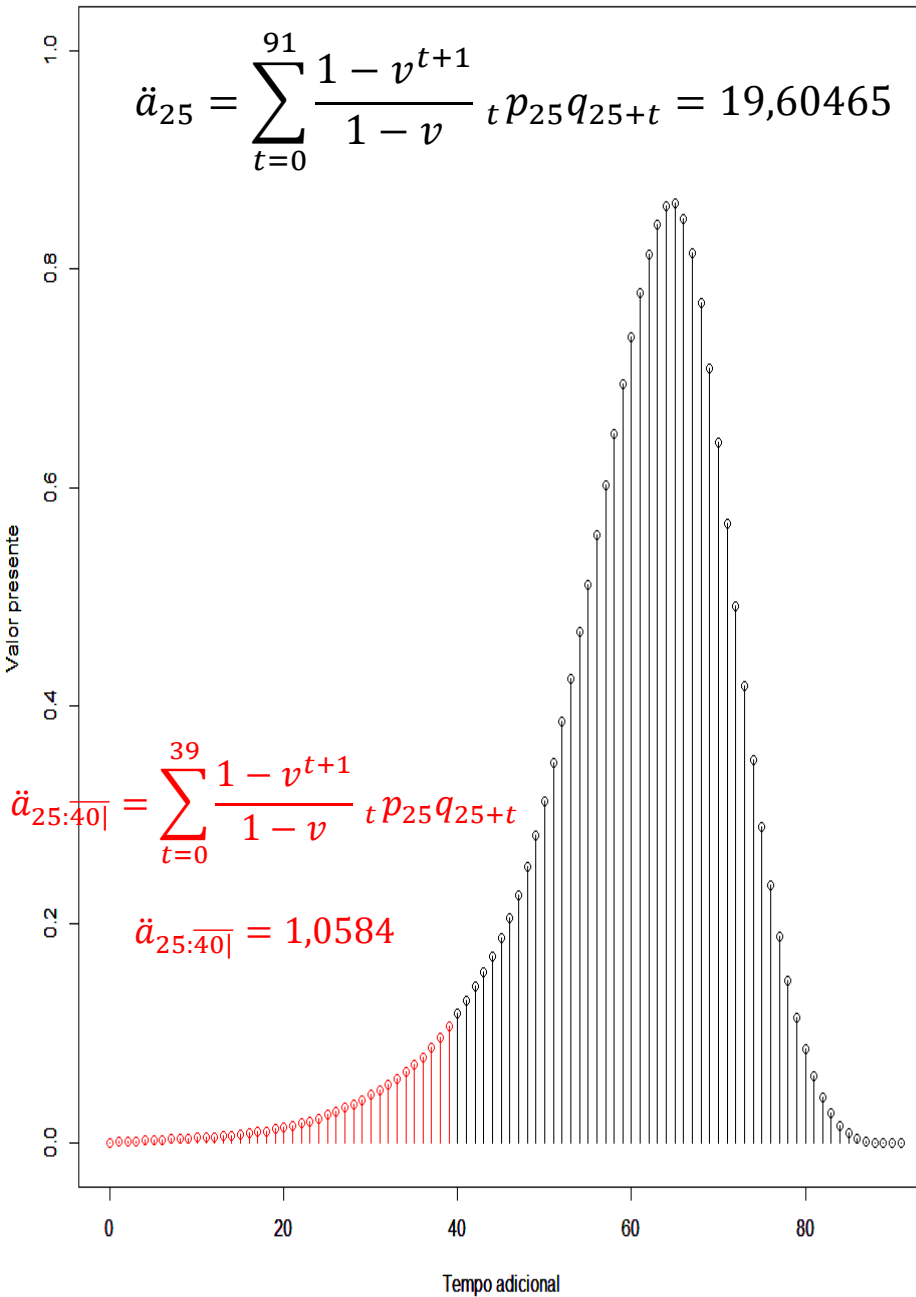
$$a_{30:\overline{4}|} = 3,52$$

## ➤ Exemplo 7

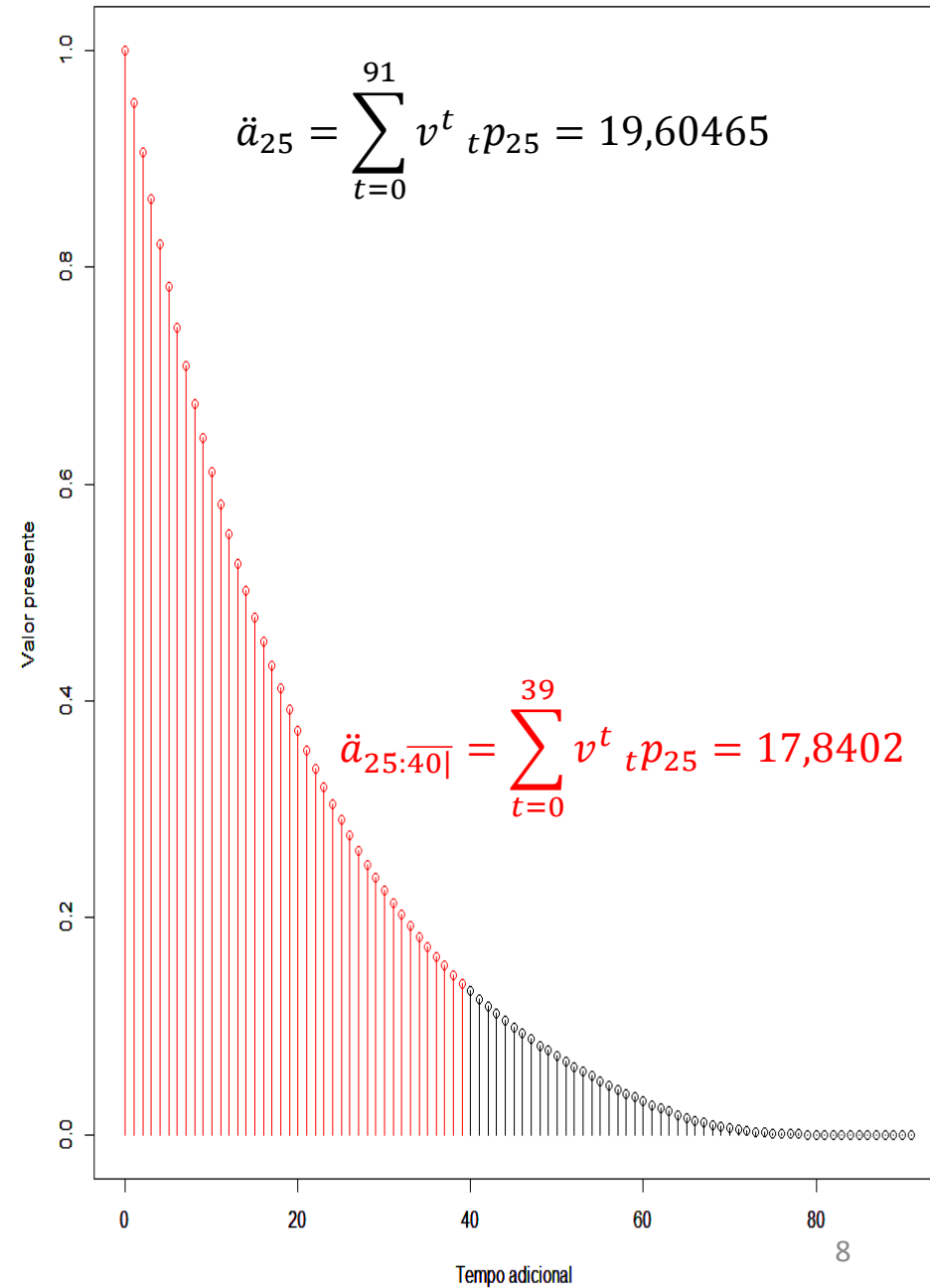
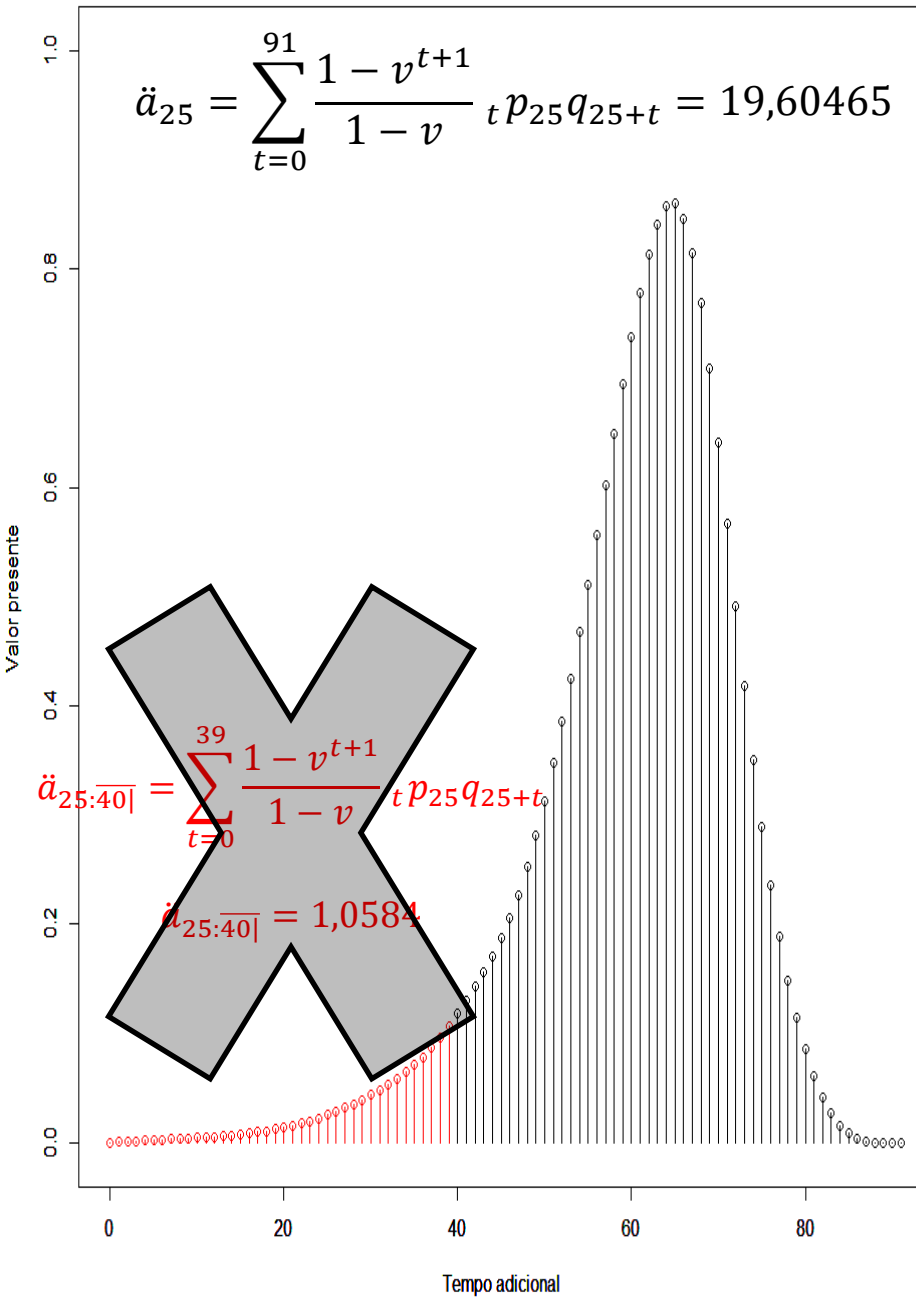
Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 40 anos. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 feminina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{25:\overline{40}|}$$

$$\omega = 117, x = 25$$



$$\omega = 117, x = 25$$





$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & \text{se } 0 < T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{se } T \geq n \end{cases}$$

$$E(Y) = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} P_x(T = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} P_x(T = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} P_x(T = t) + \ddot{a}_{\overline{n}|} \sum_{t=n}^{\infty} P_x(T = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} P_x(T = t) + \ddot{a}_{\overline{n}|} P_x(T \geq n)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_n p_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

## ➤ Exemplo 8

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 40 anos. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 feminina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40:\overline{40}|} = \left( \sum_{t=0}^{39} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{25} q_{25+t} \right) + \left( \frac{1 - v^{40}}{1 - v} \right) {}_{40} p_{25}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{40}|} = 1,0584 + 16,78173 = 17,8402$$

## Exemplo 9:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 5 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{5-1} {}_tE_{25} = \sum_{t=0}^4 v^t {}_tp_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + v p_{25} + v^2 {}_2p_{25} + v^3 {}_3p_{25} + v^4 {}_4p_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + \left(\frac{1}{1,05}\right) p_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 4,53$$

## Exemplo 10:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

## Exemplo 10:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	$q_x$	$p_x$	$l_x$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$a_{25:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^4 {}_tE_{25} = \sum_{t=0}^4 v^t {}_tp_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = vp_{25} + v^2 {}_2p_{25} + v^3 {}_3p_{25} + v^4 {}_4p_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)p_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = 3,53$$

# Anuidades temporárias imediatas

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x + v^2 {}_2p_x + v^3 {}_3p_x + v^4 {}_4p_x + \cdots + v^{n-1} {}_{n-1}p_x$$

$$a_{x:\overline{n-1}|} = v p_x + v^2 {}_2p_x + v^3 {}_3p_x + v^4 {}_4p_x + \cdots + v^{n-1} {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

# Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

Variável aleatória tempo  $T$ , **discreta**.

➤ VPA de uma anuidade **antecipada**.

➤ VPA de uma anuidade **Postecipada**.

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} a_{\overline{T}|} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{t=1}^n {}_tE_x = \sum_{t=1}^n v^t {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_tp_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=1}^n a_{\overline{t}|} {}_tp_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n}|} {}_np_x$$