

# Teoria do Risco

## Aula 4

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley/index.html>

# Momentos

Valor esperado de  $X$

$$\mu_X = E(X)$$

Variância probabilística de  $X$

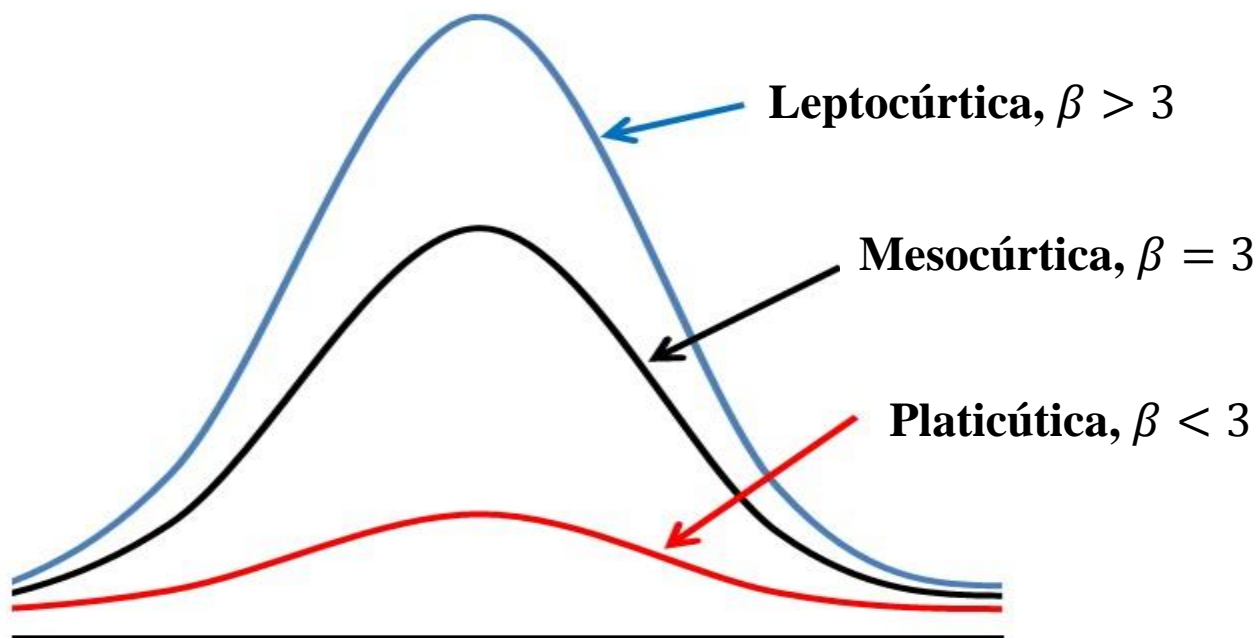
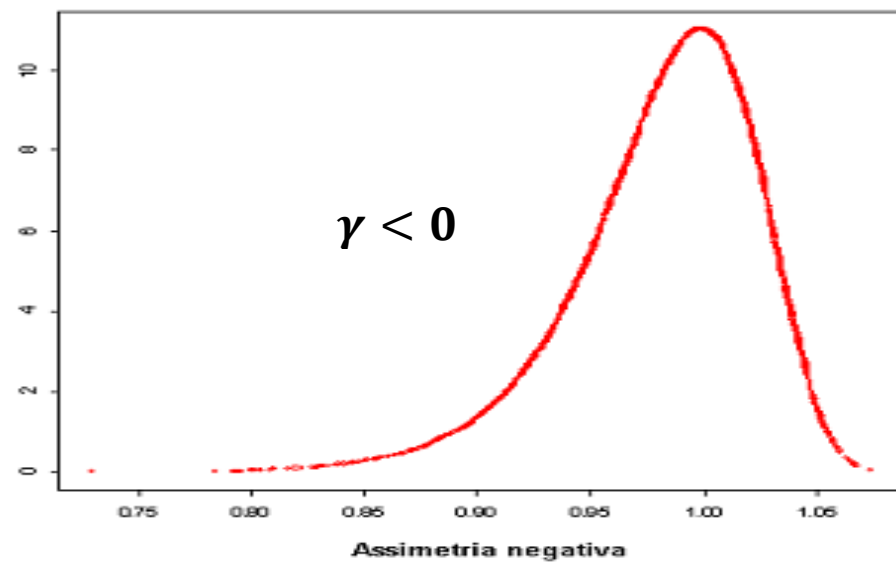
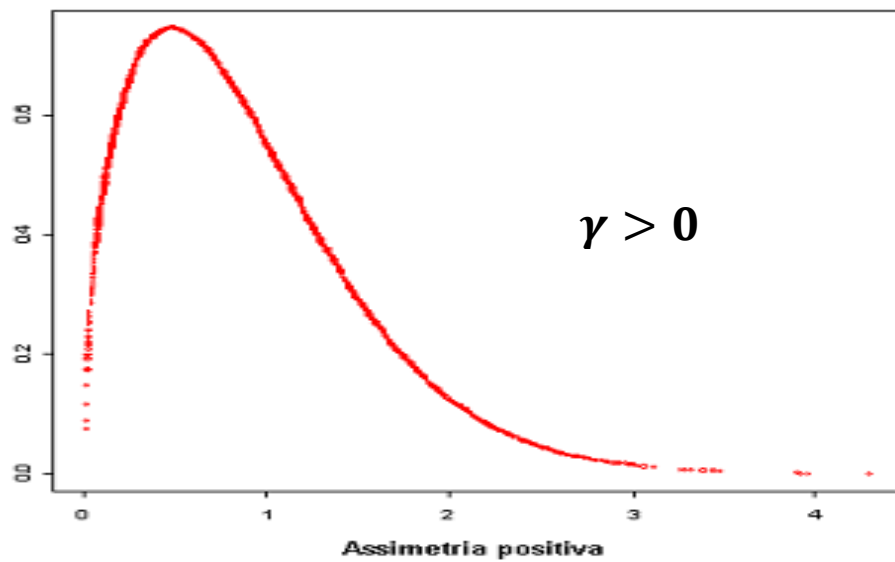
$$\sigma_X^2 = E \left[ (X - E(X))^2 \right] = E(X^2) - E(X)^2$$

Curtose de  $X$

$$\beta = E \left[ \left( \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \right)^4 \right] = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4}{(E(X^2) - E(X)^2)^2}$$

Assimetria de  $X$

$$\gamma_1 = E \left[ \left( \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \right)^3 \right] = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{(E(X^2) - E(X)^2)^{3/2}}$$



# Momentos

- Momento de ordem  $k$  ou momentos ordinários de ordem  $k$  de uma variável  $Y$  (sendo  $k$  um inteiro positivo) como:

$$m_k = E(Y^k)$$

# Momentos

$$m_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y) dy \end{cases}$$

➤  $m_1 = E(Y)$

➤  $m_2 = E(Y^2)$

➤  $m_3 = E(Y^3)$

# Função Geradora de Momentos

$$\blacktriangleright M_Y(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ty_i} P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy \end{cases}$$

$$\blacktriangleright M_Y(t) = E(e^{tY})$$

# Função Geradora de Momentos

- 1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.
- 2) A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.
- 3) Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.
- 4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

# Função Geradora de Momentos

## Exemplo

Seja  $Y \sim B(n, q)$  e  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  vamos obter as respectivas funções geradoras de momentos e o seu primeiro momento.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$0 \leq Y \leq n \text{ e } 0 \leq x \leq \infty.$$



Seja  $Y \sim B(n, q)$  ,  $0 \leq Y \leq n$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y}$$

Lembrando que  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  e  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{i=1}^n e^{ti} \binom{n}{i} q^i (1 - q)^{n-i} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (e^t q)^i (1 - q)^{n-i}$$

$$M_Y(t) = [e^t q + (1 - q)]^n$$

$$E(Y) = nq$$

Seja  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda-t)} dx$$

$$M_X(t) = - \frac{\lambda}{(\lambda - t)e^{x(\lambda-t)}} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

# Função Geradora de Momentos

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.as definidas num mesmo espaço de probabilidade, com  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  e dada as funções  $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ .

A função geradora de momentos multidimensional dessas variáveis é definida por:

$$M_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$M_Y(t) = \int e^{ty} f_Y(y) dy$$

ou

$$M_Y(t) = \int \dots \int e^{tg(X_1, \dots, X_n)} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n dx_j$$

Exemplo :

Seja a variável bidimensional cuja densidade conjunta é dada por

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)I_{[0,1]}(x_1)I_{[0,1]}(x_2)$$

Calcule  $E(X_1^n X_2^k)$

$$E(X_1^n X_2^k) = \int_0^1 \int_0^1 x_1^n x_2^k (x_1 - x_2) dx_1 dx_2$$

$$E(X_1^n X_2^k) = \int_0^1 \int_0^1 x_1^{n+1} x_2^k - x_1^n x_2^{k+1} dx_1 dx_2$$

$$E(X_1^n X_2^k) = \int_0^1 \left. \frac{x_1^{n+2} x_2^k}{n+2} - \frac{x_1^{n+1} x_2^{k+1}}{n+1} \right|_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2$$

$$E(X_1^n X_2^k) = \int_0^1 \frac{x_2^k}{n+2} - \frac{x_2^{k+1}}{n+1} dx_2$$

$$E(X_1^n X_2^k) = \frac{1}{(n+2)(k+1)} - \frac{1}{(n+1)(k+2)}$$

Exemplo :

Seja uma dada variável aleatória  $X \sim N(0,1)$ . Encontre a distribuição de  $Y = g(X) = X^2$ , pela técnica da função geradora de momentos.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$M_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx \quad \rightarrow \quad X \sim N(0, (1-2t)^{-1})$$

Logo

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ para } t < \frac{1}{2}$$

$$Y \sim \text{Gama} \left( \lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2} \right)$$



Exemplo :

Seja  $X_j \sim N(0,1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  sendo  $X_j$  independentes, então a distribuição de  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  é?

# Função Geradora de Momentos

Seja  $X_j \sim \text{Bernoulli}(q)$  ,  $j = 1, 2, \dots, n$  sendo  $X_j$  independentes. Então a distribuição de  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  é?

$$M_{X_j}(t) = qe^t + 1 - q$$

# Função Geradora de Momentos

Propriedade:

Dada as constantes  $a$  e  $b$  , então se  $Y = aX + b$  , então:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

$$\mathbb{S}_e X \sim \text{Bernoulli}(q) \rightarrow M_X(t) = qe^t + 1 - q; \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$\mathbb{S}_e X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}; \quad -\infty \leq \mu \leq \infty, \quad \sigma^2 > 0$$

$$\mathbb{S}_e X \sim \text{Po}(\lambda) \rightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}; \quad \lambda > 0$$

$$\mathbb{S}_e X \sim \text{Exp}(\lambda) \rightarrow M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad \lambda > 0$$

$$\mathbb{S}_e X \sim \text{Geo}(p) \rightarrow M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}; \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$\mathbb{S}_e X \sim \text{Uni}_C(a, b) \rightarrow M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)t}; \quad a < b$$

$$\mathbb{S}_e X \sim \text{Gama}(\lambda, r) \rightarrow M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r; \quad \lambda > 0, \quad r > 0, \quad t < \lambda$$

# Função Geradora de Momentos

$$\triangleright M_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$\left. \frac{d^n M_Y(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = E(Y^n)$$

# Função Característica

$$\triangleright \psi_Y(t) = E(e^{itY})$$

$$\left. \frac{d^n \psi_Y(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = i^n E(Y^n)$$

Exemplo:

Seja  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , Sendo  $X$  e  $Y$  independentes. Seja  $Y_1 = X + Y$  e  $Y_2 = X - Y$ . Encontre as distribuições de  $Y_1$  e  $Y_2$ .

Sendo que a função geradora de momentos de uma distribuição normal é  $U \sim N(\mu, \sigma^2)$  é dada por:  $M_U(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$