

Teoria do Risco

Aula 20

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

DANILO MACHADO PIRES
LEANDRO FERREIRA
LEONARDO HENRIQUE COSTA
REINALDO ANTONIO GOMES MARQUES

TEORIA DO RISCO ATUARIAL
FUNDAMENTOS E CONCEITOS



<https://atuaria.github.io/portahalley>

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Através do modelo de Poisson é possível perceber que a probabilidade de que não ocorra sinistros dentro de um intervalo t é dado por:

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

- Considerando a propriedade de estacionaridade, ao se definir N_t e N_{t+s} como a frequência de sinistros ocorridos até os instantes t e $t + s$, tem-se:

$$P(N_{t+s} - N_t = 0) = P(N_s = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!}$$

- Esse resultado pode ser entendido como a probabilidade de espera entre um sinistro e outro (evento), neste caso, pode-se dizer que o tempo necessário para ocorrer um sinistro é maior que s .

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Ao se definir uma variável aleatória T como o intervalo de tempo entre dois sinistros, tem-se:

$$P(T > s) = P(N_s = 0) = P(N_{t+s} - N_t = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

- A probabilidade de que o tempo entre dois sinistros seja menor que um intervalo s , implica que o número de sinistros ocorridos nesse intervalo é maior que 0.

$$P(T < s) = P(N_s > 0) = 1 - e^{-\lambda s}$$

Portanto T possui distribuição exponencial com média $\frac{1}{\lambda}$, $t > 0$ e $\lambda > 0$.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

➤ Portanto ao se definir $\{N_t, t \geq 0\}$ como um processo de Poisson homogêneo com intensidade λ , é estabelecido que o tempo entre dois sinistros, T , possui distribuição exponencial com parâmetro λ , logo:

$$F_T(t) = 1 - e^{-t\lambda} \quad \text{Distribuição acumulada de } T.$$

$$\bar{F}_T(t) = e^{-t\lambda} \quad \text{Função de sobrevivência de } T.$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-t\lambda} \quad \text{Função densidade de } T.$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Valor esperado de } T.$$

$$\text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{Variância de } T.$$

$$M_T(r) = \frac{\lambda}{r - \lambda} \quad \text{Função geradora de momentos de } T.$$

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- O fato da distribuição do tempo entre dois sinistros ser dado por um modelo de distribuição exponencial implica em dizer que:
 - I) A probabilidade do tempo de espera entre dois sinistros decai exponencialmente com o passar do tempo.
 - II) A probabilidade de que seja necessário esperar mais s "anos" até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de t "anos", é a mesma de que esse evento ocorra depois dos s "anos" iniciais.

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

*Propriedade da perda de memória: Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

III) A variável aleatória que representa a soma de durações exponencialmente distribuídas (idênticas) , $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$, apresenta distribuição gama com parâmetros n e λ :

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$$

em que $\Gamma(n) = (n-1)!$, uma vez que n é um inteiro positivo.

EXEMPLO I

Denote por T como o tempo decorridos entre $k - 1$ ésimo sinistro e do k -ésimo sinistro de uma carteira de seguros. Suponha que o tempo decorrido entre sinistros independentes e identicamente distribuídos seguindo a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_T(t) = 0,04861e^{-0,04861t}, t > 0.$$

Em que t é mensurado em lapsos de meia hora. Sendo assim calcule a probabilidade de que pelo **menos** um sinistro será processado nas próximas duas horas e trinta minutos.

Solução:

Uma vez que a distribuição do tempo decorrido entre dois sinistros é uma exponencial, logo:

$$\lambda = 0,04861.$$

Como a função densidade de probabilidade está descrita em duas e trinta minutos, então deve-se calcular a probabilidade considerando-se essa ordem de medida. Dessa forma:

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - P(N_5 = 0)$$

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - e^{-0,04861 \times 5} = 1 - e^{-0,24305} \approx 0,2157 \approx 21,57\%.$$

EXEMPLO 2

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.
- b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

EXEMPLO

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036$$

EXEMPLO

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja menor que 8 meses.

$$\overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036$$

- b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

$$10 \text{ meses} = \frac{5}{6} \text{ anos e } 2 \text{ meses} = \frac{1}{6} \text{ anos.}$$

$$P\left(T > \frac{5}{6} \mid T > \frac{1}{6}\right) = \frac{e^{-5\left(\frac{5}{6}\right)}}{e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}} = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036 = \overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right)$$

Processo estocástico de sinistros agregados

$$S_{ind.t} = X_{1.t} + X_{2.t} + X_{3.t} + \cdots + X_{n.t}$$

$$S_{Col.t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$\{N_t, t \geq 0\}$: processo de contagem (**Processo de Poisson**)

$\{S_{Col.t}, t \geq 0\}$: Processo estocástico de sinistros agregados

X_i : Representa a severidade do i — *ésimo* sinistro.

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Definindo-se $S_{col.t}$ como a severidade acumulada no intervalo de tempo t de acordo como o modelo de risco agregado.

$$S_{col.t} = S_t$$

- O processo estocástico $\{S_t, t > 0\}$ é dito ser um processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo da seguinte forma:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo.
- $\{X_i, i > 0\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $\{N_t, t > 0\}$.
- $S_t = 0$ se $N_t = 0$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

A função distribuição convoluta de S_t é será dada por:

$$F_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Em que $P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k < s)$.

Consequentemente temos que :

$$p_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Em que $p^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Sua esperança e variância são dadas por:

$$E(S_t) = \lambda t E(X)$$

$$\text{var}(S_t) = \lambda t E(X^2)$$

- Esperança matemática e variância do sinistro agregado para o intervalo de tempo t de um processo estocástico Poisson Homogêneo.

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t [M_X(r) - 1]}$$

Exemplo 3

Considere uma carteira de n apólices idênticas de seguros de dano em que a frequência histórica relativa de ocorrência de sinistros é de 5 sinistros por ano obedecendo uma distribuição Poisson com valor de intensidade constante. Considere que a distribuição de probabilidades de severidades tem um comportamento descrito pela distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 100$ e $\beta = 2$, $X \sim Gama(100, 2)$. Supondo que este comportamento se mantenha constante no período de análise e que todas as apólices são renovadas a cada ano. Obtenha a fórmula genérica da função geradora de momentos, esperança matemática e do desvio padrão da distribuição convoluta de sinistros agregados.

■ Resp.:

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^\alpha \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Logo,

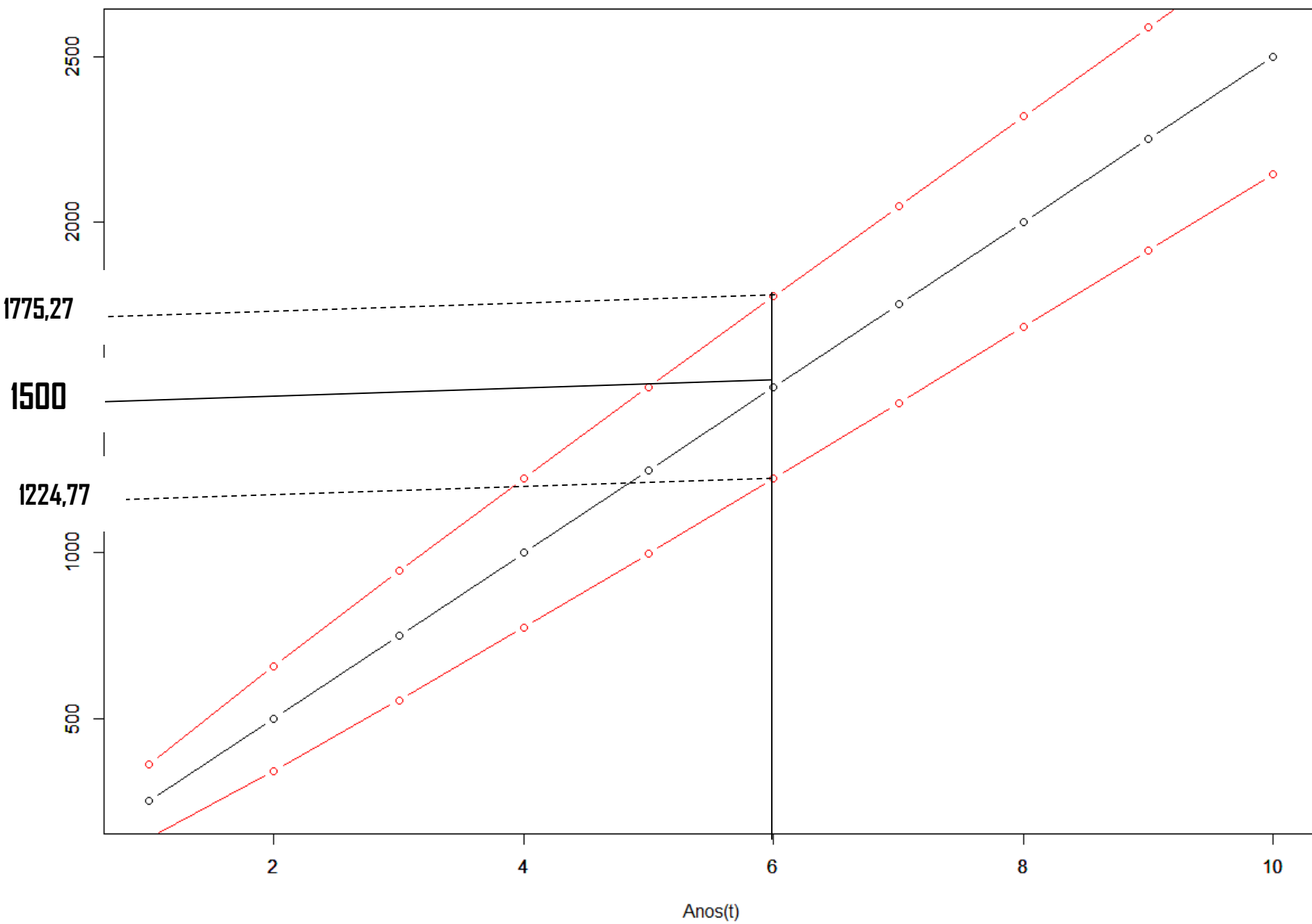
$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t \left[\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^\alpha - 1 \right]} = e^{5t \left[\left(\frac{2}{2-r}\right)^{100} - 1 \right]}$$

$$E(S_t) = \frac{\lambda t \alpha}{\beta} = 5t \left(\frac{100}{2} \right) = 250t$$

$$\text{var}(S_t) = \lambda t \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) = 5t(25 + 50^2) = 12625t$$

$$\sigma_{S_t} = 112,361\sqrt{t}$$

$E(S_t)$



Processo de Ruína

- O termo “ruína”, no contexto atuarial está associado ao risco de uma instituição financeira ficar com **reservas** insuficientes ...
- Fatores quantitativos, relacionados a Ruína
 - i) Duração do processo;
 - ii) Carregamento de segurança (θ) embutido no prêmio puro;
 - iii) Distribuição do valor total dos sinistros retidos S ;
 - iv) Limite técnico;
 - v) Fundo inicial que a seguradora aloca para assumir o risco de ruína U_0 .
- A teoria da ruína está relacionada com o estudo do **nível de reserva** de uma seguradora ao longo do tempo.

Processo de Ruína

- Pode-se descrever o processo de reserva através do modelo clássico, chamado de modelo de Cramér-Lundberg:

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

- $u = U(0)$ representa a reserva inicial da seguradora.
- $U(t)$ é o processo estocástico associado ao nível de reserva no tempo t ,
- $U(t) < 0$, é dito então que ocorreu ruína.
- Π_t prêmio recebido no intervalo de tempo $(0, t]$ - Incremento a $U(t)$.
- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ Sinistro agregado, sendo N_t o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo.
- Decremento em $U(t)$ de acordo com a ocorrência de sinistros.

Processo de Ruína

- De maneira simplificada, serão adotados modelos de ruína que envolva os prêmios recebidos a uma taxa constante, isto é.

$$U(t) = u + ct - S_t$$

- $c > E(S)$
- Na prática utilizam-se percentuais que variam de 25% a 50% patrimônio líquido,
- A utilização de um percentual do patrimônio líquido, como reserva de risco, se justifica pelo fato que a perda de uma porcentagem pode levar a falta de liquidez.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

- Assumir que N_t é um processo de Poisson, implica em:
 - Considerar $U(t)$ um processo estocástico de reserva que cresce de acordo com o ganho de prêmios.
 - $U(t)$ decresce de acordo com a ocorrência de sinistros.

➤ Exemplo 4

Um segurador tem uma reserva de risco inicial de $R\$100$ e recebe prêmios a uma taxa constante de $c = R\$40$ por **unidade** de tempo. O segurador deverá ter uma experiência de sinistros X relativa ao tempo t , com a distribuição expressa pela tabela a seguir.

t	0,8	1,4	2,3	3	4
X	30	40	70	60	x_4

Determine o valor de x_4 para que o segurador não entre em processo de ruína no intervalo de tempo $[0,4]$.

De acordo com o modelo de Cramér-Lundberg $U(t) = u + ct - S_t$ temos que:

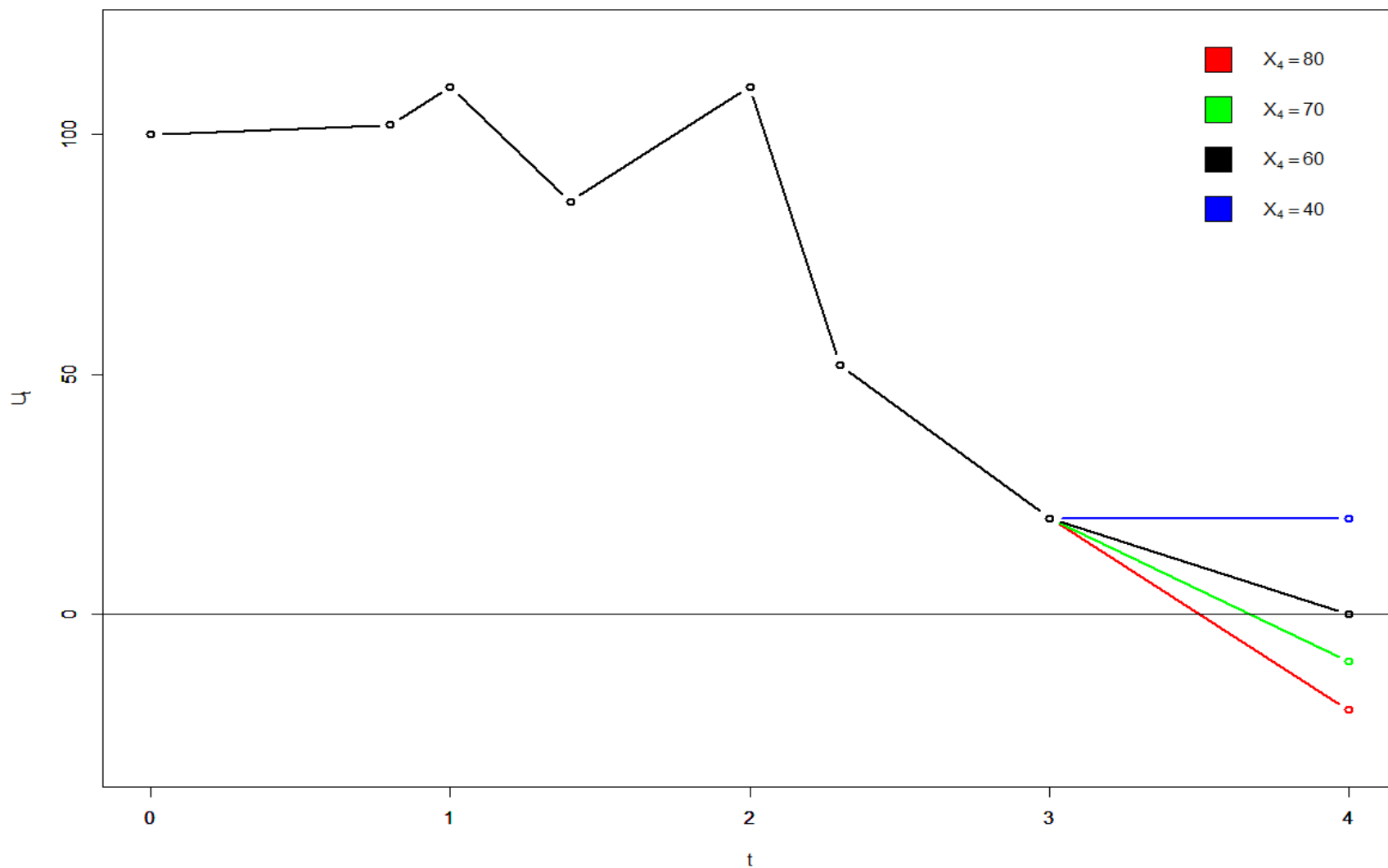
$$\begin{aligned}U(0) &= 100 = u \\U(0,8) &= 100 + 40(0,8) - 30 = \mathbf{102} \\U(1) &= \mathbf{102} + 40(1 - 0,8) - 0 = \mathbf{110} \\U(1,4) &= \mathbf{110} + 40(1,4 - 1) - 40 = \mathbf{86} \\U(2) &= \mathbf{86} + 40(2 - 1,4) - 0 = \mathbf{110} \\U(2,3) &= \mathbf{110} + 40(2,3 - 2) - 70 = \mathbf{52} \\U(3) &= \mathbf{52} + 40(3 - 2,3) - 60 = \mathbf{20}\end{aligned}$$

Para que no tempo $t = 4$, tem-se:

$$U(4) = \mathbf{20} + 40(4 - 3) - X_4 = 60 - X_4$$

Haverá solvência relativa aos ganhos proporcionados por c , estando o segurador limitado a honrar sinistros inferiores a R\$60,00 (em X_4).

Evolução da reserva ao longo do tempo.



Comportamento do $U(t)$ para diferentes valores de X_4 .

➤ Tipos de Reserva.

➤ Processo em tempo contínuo,

No processo em tempo contínuo, o interesse está no processo de reserva $\{U(t): t \geq 0\}$, em que $U(t)$ representa a reserva da seguradora até o instante t .

➤ Processo em tempo discreto,

No processo em tempo discreto, o tempo t assume valores inteiros (geralmente anos) e o interesse está no processo de reserva $\{U(n): n = 0, 1, \dots\}$.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

- A ruína de uma empresa (seguradora) acontece exatamente reserva num instante t se torna negativa ou abaixo de limite técnico pré-estabelecido sobre a reserva inicial.
- De acordo com a evolução do processo de reserva ao longo do tempo, pode-se definir a probabilidade de sobrevivência da seguradora de quatro maneiras: