Matemática atuarial

Anuidades Vitalícia (aula12)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Anuidades (rendas)

- Sucessão de pagamentos equidistantes (termos), efetuados por uma dada entidade a outrem.

- **IMEDIATAS**

  Os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

- **DIFERIDAS**

  Os termos são exigíveis após um diferimento

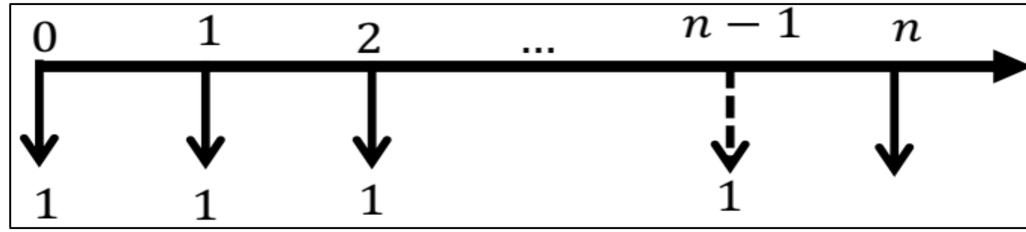
- **ANTECIPADA** (Quando os termos ocorrem no início de cada período)

$$VP = \ddot{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, n \geq 1$$

- P**OSTECIPADA** (Quando os termos ocorrem ao final de cada período)

$$VP = a_{\bar{n}|} = v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right), n \geq 1$$

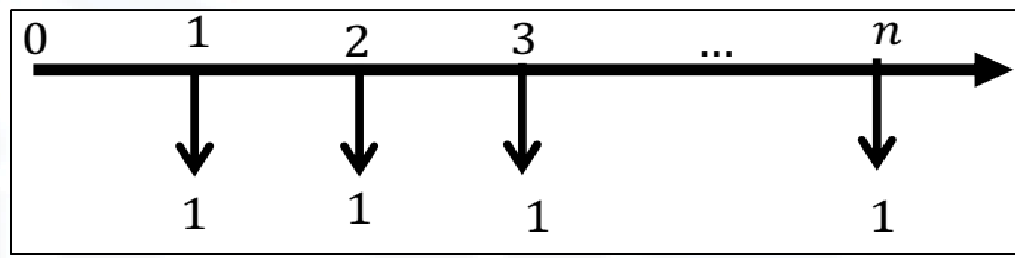
➢Fluxo Antecipado



$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, n \geq 1$$

➢Fluxo Postecipado



$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n$$

$$a_{\bar{n}|} = v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right), n \geq 1$$

Anuidades (rendas)

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$a_{\overline{n-1|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n|}} - a_{\overline{n-1|}} = 1}$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Estamos trabalhando com o valor presente de uma série de pagamentos.

- De fato, as anuidades apresentadas são anuidades certas. Uma série de pagamentos sendo realizados ao longo do tempo

- É preciso o reconhecimento da “natureza” aleatória do número de termos.

Anuidades vitalícias imediatas

- No processo de compra de um produto atuarial ou de concessão de benefício, existe risco.
  - A seguradora não sabe se vai receber todos os prêmios do segurado (este pode morrer antes do período de cobertura).
  - A seguradora não sabe ao certo quanto irá gastar com previdência uma vez que uma pessoa se aposentou e entrou em gozo de benefício.
- Reconhecer a anuidade como um produto atuarial é reconhecer que:
  - A seguradora (ou fundo de pensão) não saberá ao certo quando x irá falecer.

Anuidades (Rendas)

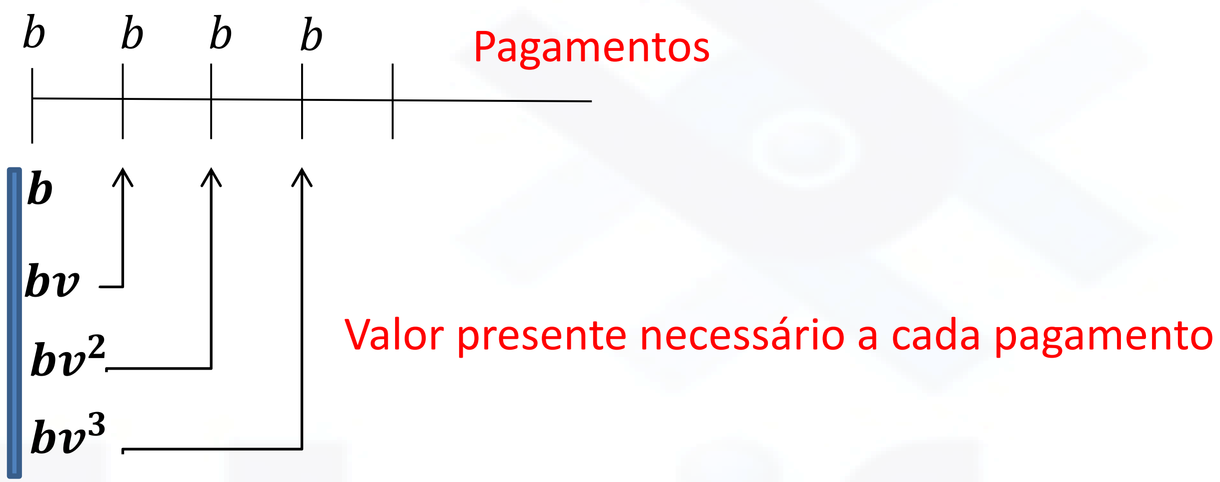
- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras (previdência privada-complementar).

- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte
  - Cobertura: por período determinado.

- São interrompidos em caso de morte...

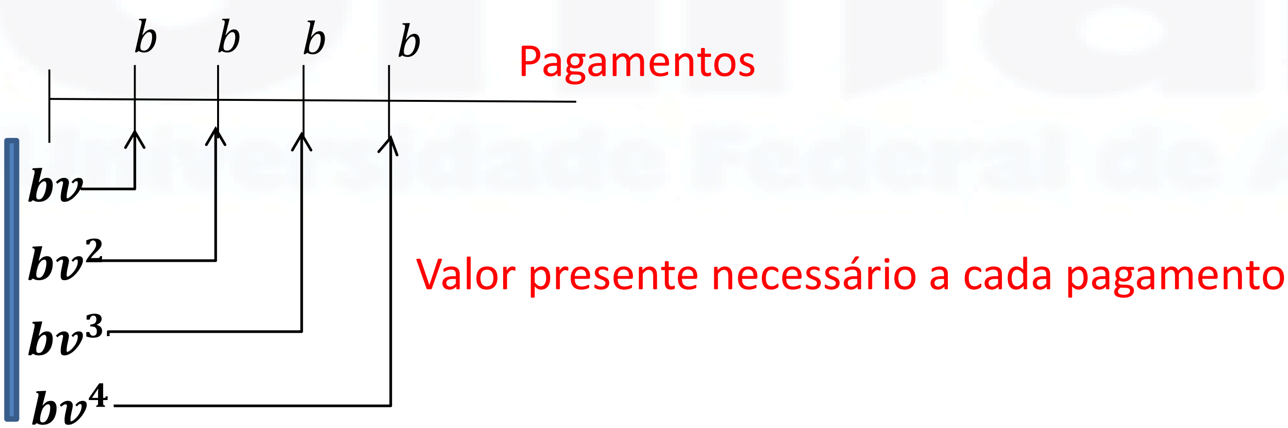
Anuidades imediatas

- Pagamentos **Antecipados** (Os pagamentos começam no primeiro período).



$$F_0 = b\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

- Pagamentos **Postecipados** (Os pagamentos começam no final de cada período).



Anuidades vitalícias imediatas

- Seja T_x a variável aleatória discreta associada **ao maior inteiro contido** na sobrevida de x logo:

- Antecipada (benefício unitário)

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}} = \frac{1-v^{T_x+1}}{1-v}, T_x \geq 0$$

- Postecipada (benefício unitário)

$$a_{\overline{T_x|}} = v\frac{1-v^{T_x}}{1-v}, T_x \geq 0$$

Anuidades vitalícias imediatas

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **ANTECIPADO** para uma pessoa de idade x corresponde ao valor esperado da anuidade imediata antecipada:

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \ddot{a}_x$$

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **POSTECIPADO** para uma pessoa de idade x corresponde ao valor esperado da anuidade imediata postecipada:

$$E\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = a_x$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Anuidade vitalícia antecipada

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ p(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

- Anuidade vitalícia antecipada Postecipada

$$E\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\bar{t}|}\, p(T_x = t)$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\bar{t}|}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

EXEMPLO 1

Considere uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E\left(\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_{t}p_{40}q_{40+t} = \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_{0}p_{40}q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2|}}\ p_{40}q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3|}}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1-v^1}{1-v}\ {}_{0}p_{40}q_{40} + \frac{1-v^2}{1-v} p_{40}q_{41} + \frac{1-v^3}{1-v}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 17{,}67 u.m.$$

EXEMPLO 2

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega - x} a_{\overline{t}|}\ {}_{t}p_{40}q_{40+t} = a_{\overline{1}|}\ p_{40}q_{41} + a_{\overline{2}|}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + a_{\overline{3}|}\ {}_{3}p_{40}q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = \frac{v(1-v^{1})}{1-v}\ p_{40}q_{41} + \frac{v(1-v^{2})}{1-v}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \frac{v(1-v^{3})}{1-v}\ {}_{3}p_{40}q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = 16{,}67\text{u.m.}$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Outras alternativas para o calculo do V.P.A. serão:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \; {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

e

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \; {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

Demonstração

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\ {}_t p_x (1 - p_{x+t})$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} ({}_t p_x - {}_t p_x p_{x+t}) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} ({}_t p_x - {}_{t+1} p_x)$$

$$\ddot{a}_x = v^0({}_0 p_x - {}_1 p_x) + (v^0 + v)({}_1 p_x - {}_2 p_x) + (v^0 + v + v^2)({}_2 p_x - {}_3 p_x) + \cdots$$

Assim

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_t p_x$$

EXEMPLO 3

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a.., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \ {}_tp_{40} = 1 + v \ p_{40} + v^2 \ {}_2p_{40} + v^3 \ {}_3p_{40} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 1 + v \ p_{40} + v^2 \ p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots \approx 17{,}67 u.m.$$

Postecipado,

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \ {}_tp_{40} = v \ p_{40} + v^2 \ {}_2p_{40} + v^3 \ {}_3p_{40} + \cdots$$

$$a_{40} = v \ p_{40} + v^2 \ p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots \approx 16{,}67 u.m.$$

Anuidades vitalícias imediatas

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia antecipada.

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia postecipada.

Anuidades vitalícias imediatas

- Então, para o caso discreto, o V.P.A. será dado por:

  - Anuidade **Antecipada** (Variável aleatória discreta)

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

  - Anuidade **Postecipada** (Variável aleatória discreta)

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t|}} \, {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_tp_x q_{x+t}$$

Aula 13 - Anuidade Imediata

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades temporárias imediatas

- No caso de anuidades temporárias, essas são válidas enquanto a pessoa de idade x for viva até no máximo n anos.
  - Então, para o caso discreto, o V.P.A. de anuidades temporárias temos:

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \; {}_{t}p_{x} q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \; {}_{n}p_{x}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & se\ 0 < T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & se\ \ T \geq n \end{cases}$$

$$E(Y) = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P(T_x = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n|}}\, P(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P(T_x = t)\ddot{a}_{\overline{n|}} + \sum_{t=n}^{\infty} P(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P(T_x = t) + \ddot{a}_{\overline{n|}} P(T_x \geq n)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_{t}p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x}$$

Anuidades temporárias imediatas

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \; {}_{t}p_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n|}} \; {}_{n}p_x$$

EXEMPLO 4

Pense em uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 40 anos. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 feminina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{25:\overline{40|}} = \left(\sum_{t=0}^{39} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} \, {}_{t}p_{25} q_{25+t} \right) + \left(\frac{1 - v^{40}}{1 - v} \right) {}_{40}p_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{40|}} = 1{,}0584 + 16{,}78173 = 17{,}8402$$

Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \ {}_tp_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \ {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_tp_x$$

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \ {}_tp_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n|}} \ {}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n|}} = E(Y) = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_tp_x$$

EXEMPLO 5:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{4-1} {}_tE_{30} = \sum_{t=0}^{3} v^t \; {}_tp_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + vp_{30} + v^2 \; {}_2p_{30} + v^3 \; {}_3p_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + \frac{1}{1{,}05} p_{30} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32}$$

$$p_{30}p_{31}p_{32} = \frac{l_{33}}{l_{30}}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 3{,}71$$

EXEMPLO 6:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$a_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^{4} {}_tE_{30} = \sum_{t=1}^{4} v^t \ {}_tp_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = vp_{30} + v^2 \ {}_2p_{30} + v^3 \ {}_3p_{30} + v^4 \ {}_4p_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = \frac{1}{1,05}p_{30} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 p_{30}p_{31}p_{32}p_{33}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = 3,52$$

EXEMPLO 7:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 5 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_X	p_X	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{5-1} {}_tE_{25} = \sum_{t=0}^{4} v^t \; {}_tp_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + vp_{25} + v^2 \; {}_2p_{25} + v^3 \; {}_3p_{25} + v^4 \; {}_4p_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + \left(\frac{1}{1,05}\right) p_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 4,53$$

EXEMPLO 8:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$a_{25:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^{4} {}_tE_{25} = \sum_{t=0}^{4} v^t \; {}_tp_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = vp_{25} + v^2 \; {}_2p_{25} + v^3 \; {}_3p_{25} + v^4 \; {}_4p_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right) p_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = 3{,}53$$

Anuidades temporárias imediatas

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + v^4\ {}_4p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$a_{x:\overline{n-1|}} = vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + v^4\ {}_4p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E(Y)} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_tp_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \, {}_np_x$$

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = E(Y) = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_x$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \, {}_tp_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n|}} \, {}_np_x$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}}$$