Teoria do Risco
Aula 19

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Processo de Ruína

- Pode-se descrever o processo de reserva através do modelo clássico, chamado de modelo de Cramér-Lundberg:

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

- $u = U(0)$ representa a reserva inicial da seguradora.

- $U(t)$ é o processo estocástico associado ao nível de reserva no tempo t,

- $U(t) < 0$, é dito então que ocorreu ruína.

- Π_t prêmio recebido no intervalo de tempo $(0, t]$ - Incremento a $U(t)$.

- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ Sinistro agregado, sendo N_t o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo.

- Decremento em $U(\mathrm{t})$ de acordo com a ocorrência de sinistros.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

➢ Tipos de Reserva.

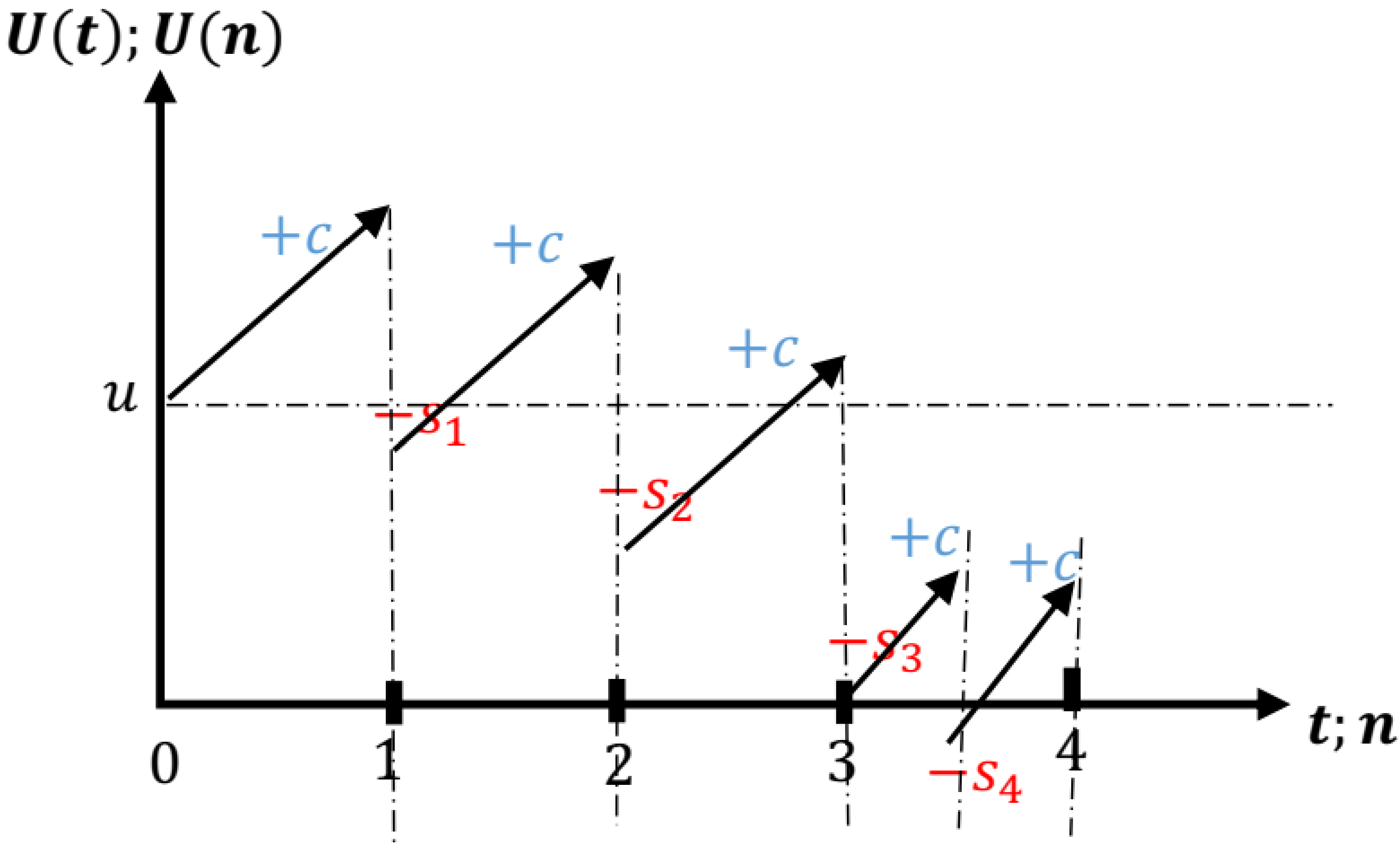
➢ Processo em tempo contínuo

No processo em tempo contínuo, o interesse está no processo de reserva $\{U(t): \mathrm{t} \geq 0\}$, em que $U(t)$ representa a reserva da seguradora até o instante t.

➢ Processo em tempo discreto

No processo em tempo discreto, o tempo t assume valores inteiros (geralmente anos) e o interesse está no processo de reserva $\{U(n): n = 0,1, \ldots\}$.

Processo Clássico de Ruína



RUÍNA EM TEMPO DISCRETO: A ruína não é percebida, pois somente é avaliada em $n =$ 0,1,2,3, ...
RUÍNA EM TEMPO CONTÍNUO: A ruína é percebida no intervalo [3: 4]

PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- A probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte infinito contínuo, é definida por:

$$\varphi(u) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; t \geq 0 | u = U(0)) \,.$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo contínuo, analisada em um tempo t qualquer no intervalo $[0, \infty)$.

PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte finito em tempo contínuo, é definida por:

$$\varphi(u,\tau) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; 0 \leq t \leq \tau | u = U(0)) \,.$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo contínuo, analisada até um tempo específico, denotado por τ.

PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte de tempo infinito discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2,\ldots |u = U(0))$$

Representa a probabilidade de sobrevivência de sobrevivência da seguradora em tempo discreto analisada em um tempo qualquer n no intervalo $[0,1,2, \ldots)$.

PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- Probabilidade de sobrevivência da seguradora no horizonte finito em tempo discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u,\tau) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2,\ldots,\tau | u = U(0)).$$

Representa a probabilidade de sobrevivência da seguradora em tempo discreto, analisada até um tempo específico, denotado por τ.

PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte de tempo infinito discreto:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2, \ldots |u = U(0))$$

- A probabilidade de sobrevivência no horizonte infinito contínuo:

$$\varphi(u) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; t \geq 0|u = U(0))$$

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo contínuo:

$$\varphi(u,\tau) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; 0 \leq t \leq \tau|u = U(0))$$

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo discreto, é definida por:

$$\tilde{\varphi}(u,\tau) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2, \ldots, \tau|u = U(0))$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Uma ruína acontece em t se $U(t) < 0$, ou seja, quando a reserva da seguradora ficar negativa em algum instante, sendo que:

$$T_t = \begin{cases} \min\{t | t \geq 0 \ e \ U(t) < 0\} \\ \infty \ se \ U_t \geq 0 \ para \ todo \ t \end{cases}.$$

- Dessa maneira, pode-se definir a probabilidade de ruína de uma seguradora.

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall\, t \;\; 0 \leq t \; < \infty) = 1 - \varphi(u)$$

- Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u,\tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall\, t\,, 0 \leq t < \tau) = 1 - \varphi(u,\tau).$$

$$\boldsymbol{\psi(u,\tau) \leq \psi(u)}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$\widetilde{T_n} = \min\{n \ : \ U(n\ ) < 0\}\,.$$

- Probabilidade de ruína no horizonte infinito no tempo discreto é definida por:

$$\tilde{\psi}(u) = P\left(\widetilde{T_n} < \infty | U(0) = u\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n\,, 0 \leq n < \infty) = 1 - \tilde{\varphi}(u).$$

- Probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo discreto é definido por:

$$\tilde{\psi}(u,\tau) = P\left(\widetilde{T_n} < \tau\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n, 0 \leq n < \tau) = 1 - \tilde{\varphi}(u,\tau).$$

$$\boldsymbol{\tilde{\psi}(u,\tau) \leq \tilde{\psi}(u)}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- A probabilidade de ruína em 1 ano pode ser expressa por:

$$\psi(u,1) = P(T_t < 1)$$

ou

$$\psi(u,1) = P(U(1) < 0) = P(S_1 > u + \Pi_1)$$

- É importante notar que $P(T_t < 1) = P(U(1) < 0)$ não necessariamente é verdadeiro,

  - $P(T_t < 1)$ estabelece a probabilidade de ruína a qualquer momento menor que 1 ano.
  - $P(U(1) < 0)$ estabelece a probabilidade ruína ao final de 1 ano.

- Exemplo 1

A carteira de um segurador tem distribuição de sinistros dada pela tabela a seguir:

S	$R\$1500,00$	$R\$3000,00$
$P(s)$	$0,6$	$0,4$

- O excedente do segurador é dado pela expressão:

$$U(t) = 900 + 150t - S_t.$$

- Determine os possíveis intervalos que irão ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

Como, por hipótese, as únicas indenizações possíveis são no valor de R$ 1500,00 e R$ 3000,00 então a primeira ruína ocorrerá como resultado da menor indenização se:

$$900 + 150t - 1500 < 0$$
$$150t < 600$$
$$t < 4.$$

Caso ocorra sinistro no intervalo $(0,4]$ este ocasionará em um caso de ruína, pois para qualquer sinistro que venha acontecer nesse intervalo não haverá solvência.

Após esse período, a seguradora não estará vulnerável ao evento de custo R$ 1500,00 porém a seguradora ainda tem um risco de solvência caso a indenização seja igual a R$ 3000,00. Nesse caso:

$$900 + 150t - 3000 < 0$$
$$150t < 2100$$
$$t < 14.$$

Caso o primeiro sinistro ocorra em $t > 14$ a seguradora não se tornará insolvente. No entanto, se o sinistro ocorrer entre 4 e 14, a seguradora não terá recursos disponíveis para fazer frente à indenização caso o valor do sinistro seja igual a $R\$ 3000,00$.

➢ Exemplo 2

Ainda para os dados do exemplo anterior. Considere que o tempo entre sinistros possa ser modelado pela distribuição exponencial $T \sim Exp(0{,}1)$.

Calcule a probabilidade de vir a ocorrer a sua ruína com o primeiro sinistro.

Dado que

$$\psi(u) = P(U(t) < 0)$$

Então:

$$P(U(t) < 0) = P(T < 4, S \neq 0) + P(4 \leq T < 14, S = 3000)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}) < \boldsymbol{0}) = P(T < 4)P(S \neq 0|T < 4) + P(4 \leq T < 14)P(S = 3000|4 \leq T < 14).$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}) < \boldsymbol{0}) = [1 - (e^{-0,1\times 4})](0{,}6 + 0{,}4) + \{[1 - (e^{-0,1\times 14})]0{,}4 - [1 - (e^{-0,1\times 4})]0{,}4\}$$

$$\boldsymbol{P(U(t) < 0) = 0,3298 + 0,16948}$$

$$\boldsymbol{P(U(t) < 0) = 0,49928 = \psi(900)}.$$

Exemplo 3

Considere que a variável aleatória S esteja associada aos gastos com indenização no período de 1 ano, em uma carteira de seguros. Considere também que essa carteira tenha sido modelada segundo o modelo de risco coletivo com $N_1 \sim Po(200)$ e $X \sim Exp(0{,}002)$, ou seja, $S = S_{col}$ é um modelo Poisson composto.

Utilizando a aproximação pela distribuição normal determine o valor do prêmio retido, Π, ao longo desse ano de forma que a probabilidade de que essa seguradora entre em ruína não exceda 5%, considere a reserva inicial igual a $U(0) = 5000$.

Solução

$$P(U(1) < 0) = 0{,}05$$

$$P(5000 + \Pi - S_{col} < 0) = 0{,}05$$

$$P(S_{col} > 5000 + \Pi) = 0{,}05$$

Por considerar $S = S_{col}$ tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) = 100000$$

$$\sqrt{var(S_{col}\,)} = \sqrt{\lambda E(X^2)} = 10\,000$$

Lembrando que $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0{,}1)$, tem-se

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000}\right) = 0{,}05$$

Solução

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000}\right) = 0{,}05$$

$$\frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000} = z_{95\%}$$

$$\Pi = 100000 - 5000 + 10000(1{,}645) = 111450$$

Exemplo 4

Ainda com os dados do exemplo anterior determine o valor do prêmio Π considerando um limite técnico para os valores de indenização por apólice de $Li = 550$.

Solução

Por considerar $S = S_{col}$ e o limite técnico $Li = 550$, tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li)$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li)$$

Solução

Por considerar $S = S_{col}$ e o limite técnico $Li = 550$, tem-se que

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li)$$
$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li)$$

Logo

$$E(X; Li) = \int_0^{550} x\, 0{,}002 e^{-0{,}002x} dx + 550 S_X(550)$$
$$E(X; Li) = 150{,}485 + 183{,}079 = 333{,}564$$

$$E(X^2; Li) = \int_0^{550} x^2\, 0{,}002 e^{-0{,}002x} dx + 550^2 S_X(550)$$
$$E(X^2; Li) = 49791{,}9 + 1{,}00694 \times 10^5 = 1{,}50485 \times 10^5$$

Solução

$$E(X;Li) = 150{,}485 + 183{,}079 = 333{,}564$$

$$E(X^2;Li) = 49791{,}9 + 1{,}00694 \times 10^5 = 1{,}50485 \times 10^5$$

Assim

$$E(S_{col}) = \lambda E(X;Li) = 166782$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2,Li) = 7{,}52427 \times 10^7$$

Lembrando que $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0,1)$, tem-se

$$\frac{(5000 + \Pi) - 166782}{\sqrt{7{,}52427 \times 10^7}} = z_{95\%}$$

$$\Pi = 166782 - 5000 + 8674{,}26(1{,}645) = \mathbf{176051{,}1577}$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA NO HORIZONTE INFINITO NO CASO POISSON COMPOSTO

- A probabilidade de ruína em período infinito $\psi(u)$ pode ser representada por:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left(e^{-RU(T)} \mid T_t < \infty\right)}, u \geq 0$$

Onde R é o coeficiente de ajustamento.

- **Definição** Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$M_{S_t - ct}(r) = 1$$

Em que $M_{S_t - ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right)$, assim

$$M_{S_t - ct}(r) = E\left(e^{r(S_t - ct)}\right) = 1$$

$$e^{-rct} E(e^{rS_t}) = 1$$

$$e^{-rct} M_{S_t}(r) = 1$$

$$M_N(\ln M_X(r)) = e^{rct}$$

Um caso especial amplamente abordado na literatura é o caso em que $c = (1+\theta)E(S)$ e $N_t \sim Po(\lambda t)$, assim :

$$M_N(ln\, M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t(M_X(r)-1)} = e^{r(1+\theta)E(S)t}$$

$$\lambda t(M_X(r)-1) = r(1+\theta)\lambda E(X)t$$

$$M_X(r)-1 = r(1+\theta)E(X)$$

$$1+(1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$