Aula 19 Comutação- Seguros e Anuidades

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ Ciências atuariais da Universidade federal de Alfenas- Campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L,H. Comutação-Seguros e Anuidades. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_MatAtuarial1.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Funções de comutação

$$D_x = l_x v^x$$

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)}$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}$$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t}$$

$$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} M_{x+t}$$

Comutação- Seguro vitalício

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\right)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{v^{x+t+1}}{v^x}\left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}\right)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{v^{x+t+1}(l_{x+t} - l_{x+t+1})}{l_x v^x} = \frac{1}{l_x v^x}\sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t+1}(l_{x+t} - l_{x+t+1})$$

$$\boldsymbol{A_x = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} = \frac{M_x}{D_x}}$$

Comutação- Dotal Puro

$$A_{x:\overline{n|}^1} = v^n \; {}_n p_x$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = v^n \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} \right)$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = \frac{v^{n+x}(l_{x+n})}{v^x l_x}$$

$$\boldsymbol{A_{x:\overline{n|}^1} = \left(\frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = {}_n E_x}$$

Comutação- Seguro Vitalício Diferido

$$ {}_{m|}A_x = A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1} A_{x+m} $$

$$ {}_{m|}A_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right)\left(\frac{M_{x+m}}{D_{x+m}}\right) = \left(\frac{M_{x+m}}{D_x}\right) $$

Comutação- Seguro Temporário

$$_{n|}A_x = A_x - A_{x^1:\overline{n|}}$$

$$\left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) = \frac{M_x}{D_x} - A_{x^1:\overline{n|}}$$

$$\boldsymbol{A_{x^1:\overline{n|}}} = \frac{M_x}{D_x} - \left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{M_x - M_{x+n}}}{\boldsymbol{D_x}}\right)$$

Comutação- Dotal Misto

$$A_{x:\overline{n|}} = A_{x^1:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^1}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\boldsymbol{A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}$$

Comutação- Seguro de vida

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

$$(IA)_{x^1:\overline{n|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \times M_{x+n}}{D_x}$$

EXEMPLO1: Considerando a taxa anual de juros igual a 3% e que o tempo de vida de um segurado de 47 anos de idade possa ser modelado pela tábua AT-49. Qual será o prêmio puro único que deverá ser pago por um dotal misto com cobertura de 5 anos, com o benefício pago no momento da morte?

EXEMPLO1: Considerando a taxa anual de juros igual a 3% e que o tempo de vida de um segurado de 47 anos de idade possa ser modelado pela tábua AT-49. Qual será o prêmio puro único que deverá ser pago por um dotal misto com cobertura de 5 anos, com o benefício pago no momento da morte?

Solução:

$$\bar{A}_{47:\overline{5}|} = A_{47^1:\overline{5}|}\frac{i}{\delta} + A_{47:\overline{5}|^1}.$$

Assim

$$\bar{A}_{47:\overline{5}|} = \left(\frac{M_{47} - M_{52}}{D_{47}}\right)\left[\frac{0{,}03}{\ln(1{,}03)}\right] + \left(\frac{D_{52}}{D_{47}}\right)$$

$$\bar{A}_{47:\overline{5}|} \approx (0{,}02665)(1{,}0149) + (0{,}837349) \approx 0{,}8643961.$$

Comutação-Anuidades

- Renda vitalícia imediata antecipada:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \; {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t} v^x v^t}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t} v^{x+t}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)}}{l_x v^x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Comutação-Anuidades

- Renda vitalícia Postecipada:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \ {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$a_x = \frac{\sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t} v^{x+t}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=1}^{\omega-x} D_{(x+t)}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+1+t)}}{l_x v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Comutação-Anuidades

- Renda Vitalícia diferida antecipada e postecipada:

$$_{m|}\ddot{a}_x = A_{x:\overline{m}|^1}\,\ddot{a}_{x+m}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right)\left(\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}\right) = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x}\right)$$

Logo

$$_{m|}a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x}\right)$$

Comutação-Anuidades

- Renda temporária imediata antecipada e postecipada:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Logo

$$a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Comutação-Anuidades

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x}\right)$$

$$_{m|}a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x}\right)$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$_{m|}a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\bar{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \times N_{x+n}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \times N_{x+n+1}}{D_x}$$

EXEMPLO2 : Considerando a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano, calcule o que se pede:

a) $a_{25:\overline{25}|}$

b) ${}_{30|}\ddot{a}_{25}^{(12)}$

c) $a_{30:\overline{10}|}^{(48)}$

SOLUÇÃO

a) $a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$

b) ${}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx A_{x:\bar{k}|}^{1}\left({}_{k|}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2\times m}\right)$

c) $a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + \left(1 - A_{x:\bar{n}|}^{1}\right)\left(\frac{m-1}{2\times m}\right)$

EXEMPLO2 : Considerando a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano, calcule o que se pede:

a) $a_{25:\overline{25|}}$

b) ${}_{30|}\ddot{a}_{25}^{(12)}$

c) $a_{30:\overline{10|}}^{(48)}$

SOLUÇÃO

a) $a_{25:\overline{25|}} = \frac{N_{26}-N_{51}}{D_{25}} \approx 17{,}143$

b) ${}_{30|}\ddot{a}_{25}^{(12)} \approx A_{25:\overline{30|}^1}\left({}_{30|}\ddot{a}_{25} - \frac{12-1}{2\times 12}\right) \approx \left(\frac{D_{55}}{D_{25}}\right)\left[\frac{\mathrm{N}_{55}}{D_{25}} - \left(\frac{12-1}{2\times 12}\right)\right] \approx 2{,}068$

c) $a_{30:\overline{10|}}^{(48)} \approx a_{30:\overline{10|}} + \left(1 - A_{30:\overline{10|}^1}\right)\left(\frac{48-1}{2\times 48}\right) \approx \left(\frac{N_{31}-N_{41}}{D_{30}}\right) + \left(1 - \frac{D_{40}}{D_{30}}\right)\left(\frac{48-1}{2\times 48}\right) \approx 8{,}6055$

Expectativa de vida

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots + l_\omega}{l_x}$$

$$e_x = \frac{2}{2}\left(\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots + l_\omega}{l_x}\right)$$

$$l_x e_x = \frac{2(l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots + l_\omega)}{2}$$

$$l_x e_x = \frac{l_{x+1} + (l_{x+1} + l_{x+2}) + (l_{x+2} + l_{x+3}) + \cdots + (l_{\omega-1} + l_\omega) + l_\omega}{2}$$

$$l_x e_x = \frac{l_{x+1}}{2} + \frac{(l_{x+1} + l_{x+2}) + (l_{x+2} + l_{x+3}) + \cdots + (l_{\omega-1} + l_\omega) + (l_\omega + l_{\omega+1})}{2}$$

$$l_x e_x = \frac{l_{x+1}}{2} + \left[T_x - \left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2}\right)\right]$$

Expectativa de vida

...

$$l_x e_x = \frac{l_{x+1}}{2} + \left[T_x - \left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2}\right)\right]$$

$$l_x e_x = T_x + \frac{(l_{x+1} - l_x - l_{x+1})}{2} = T_x - \frac{l_x}{2}$$

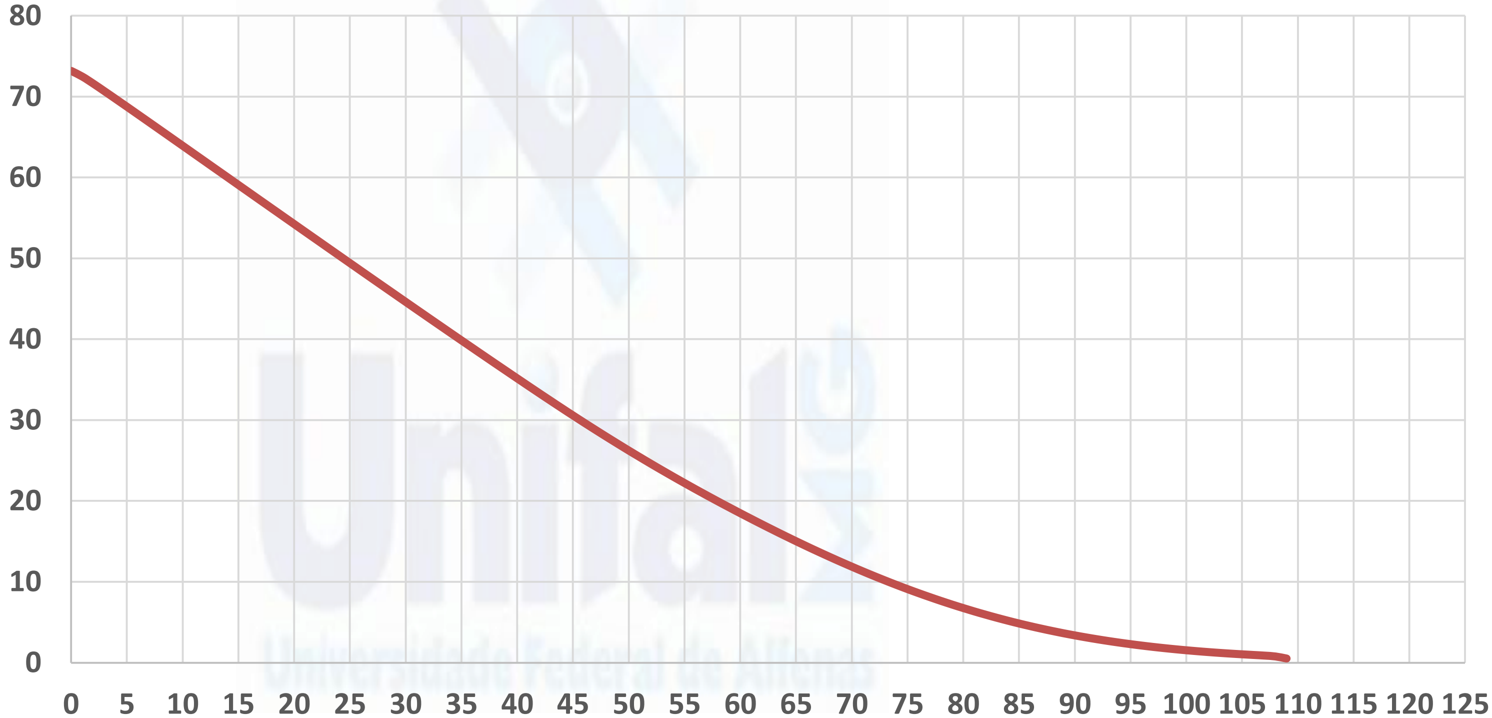
$$e_x = \frac{T_x}{l_x} - \frac{1}{2}$$

Expectativa de vida completa

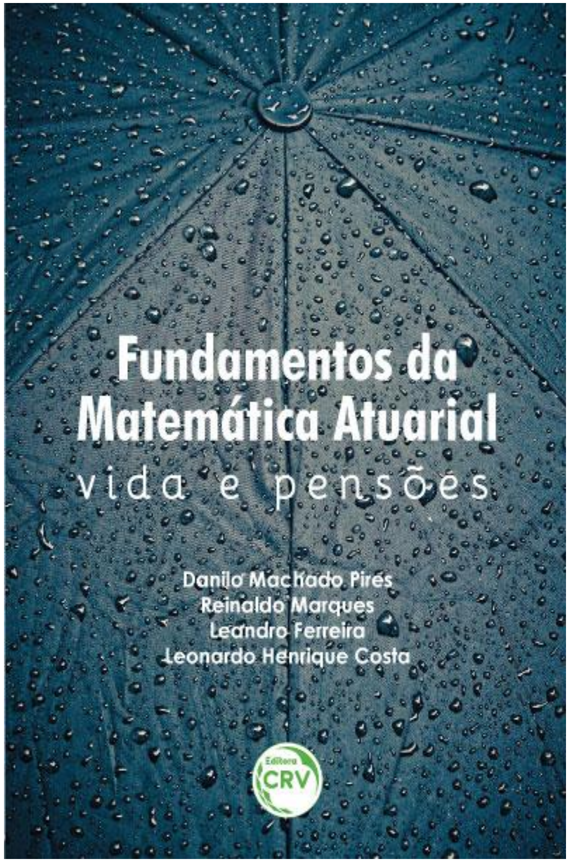
$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

Expectativa de vida- AT49

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$



- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



- Citar como:

PIRES, D. M.; COSTA, L. H. Notas de aula: Matemática Atuarial I . Curso de Ciências Atuariais, Universidade Federal de Alfenas, <ano> Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_TR.html. Acesso em: <data>