

Teoria do Risco

Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley/index.html>

Momentos

- Valor esperado de X

$$\mu_X = E(X)$$

- Variância probabilística de X

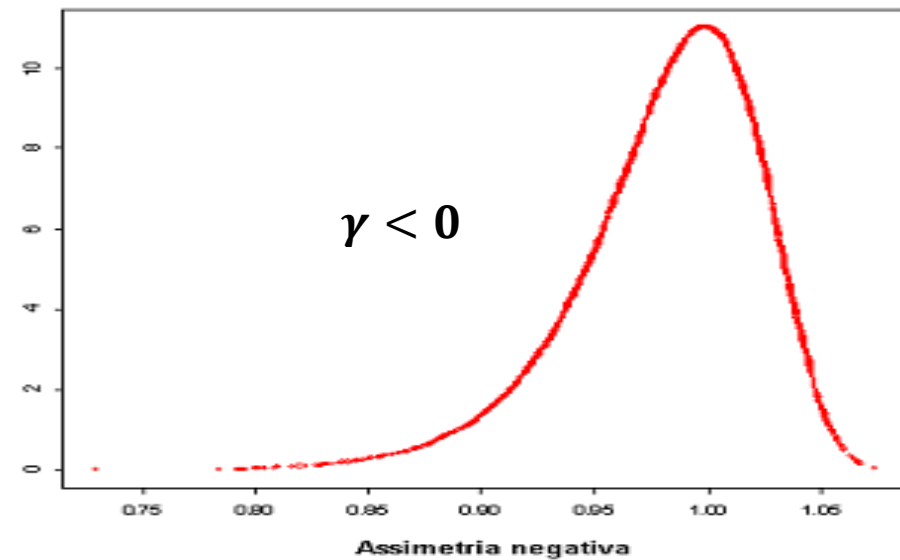
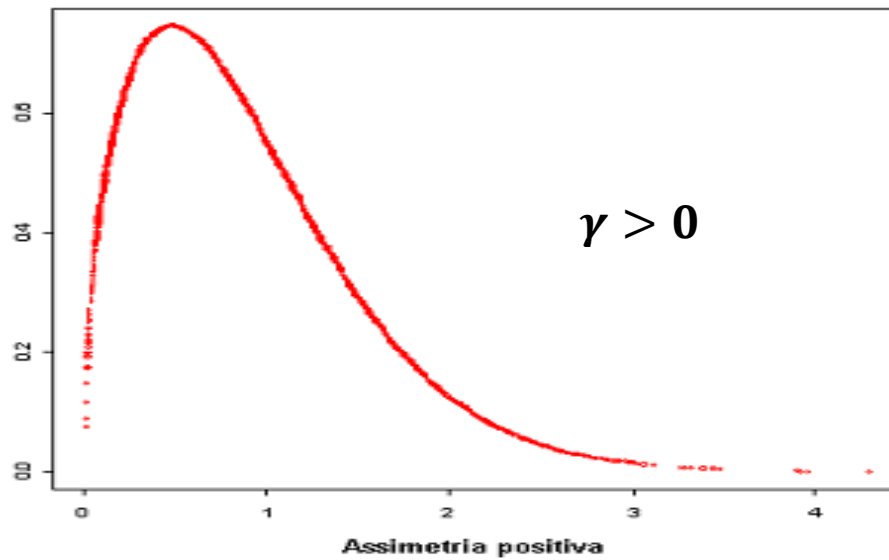
$$\sigma_X^2 = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - E(X)^2$$

- Assimetria de X

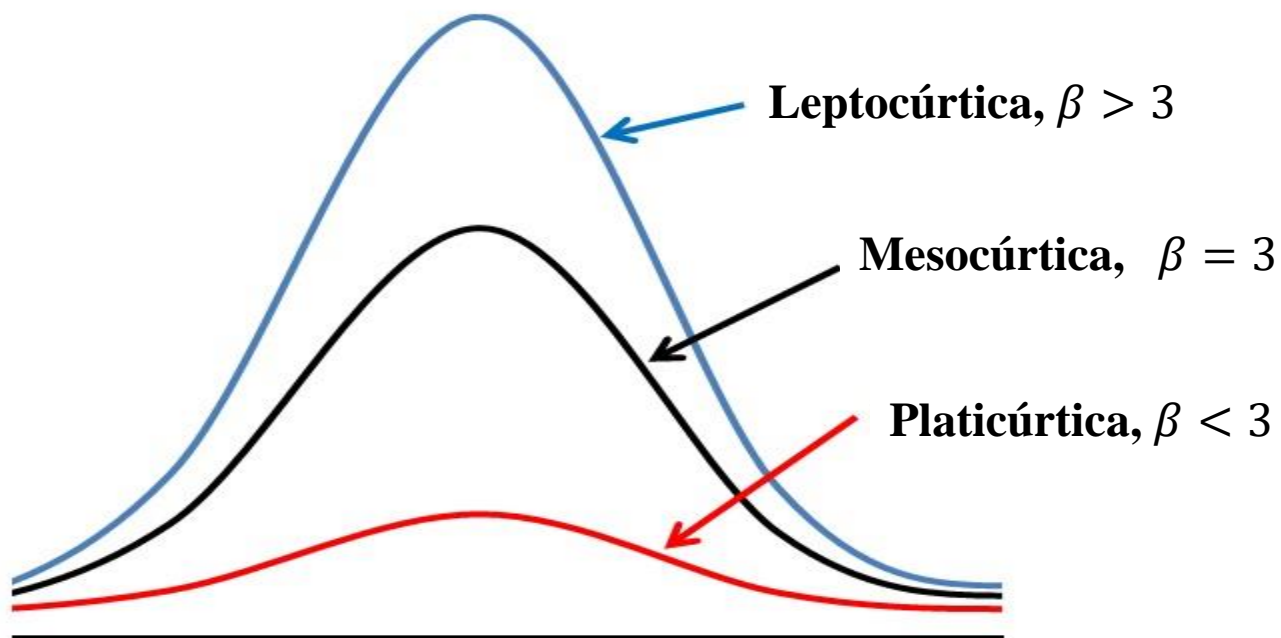
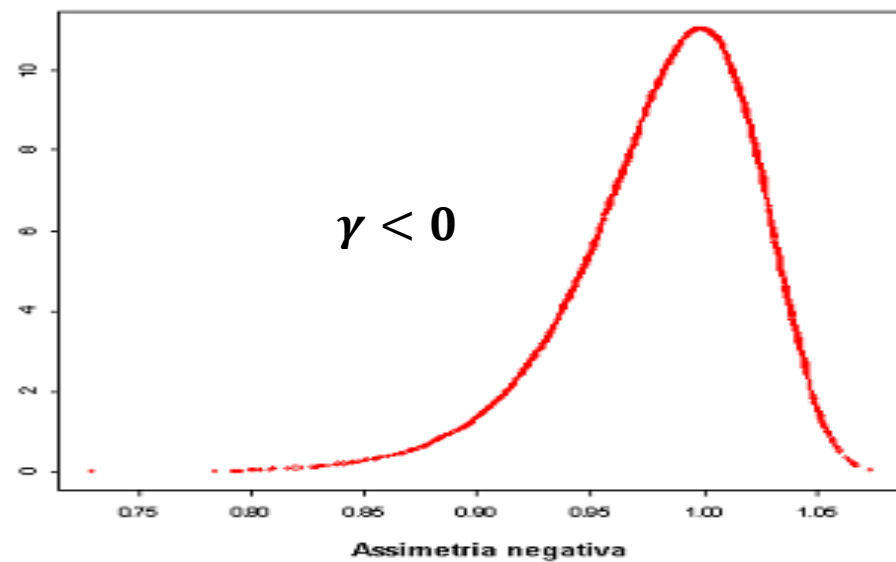
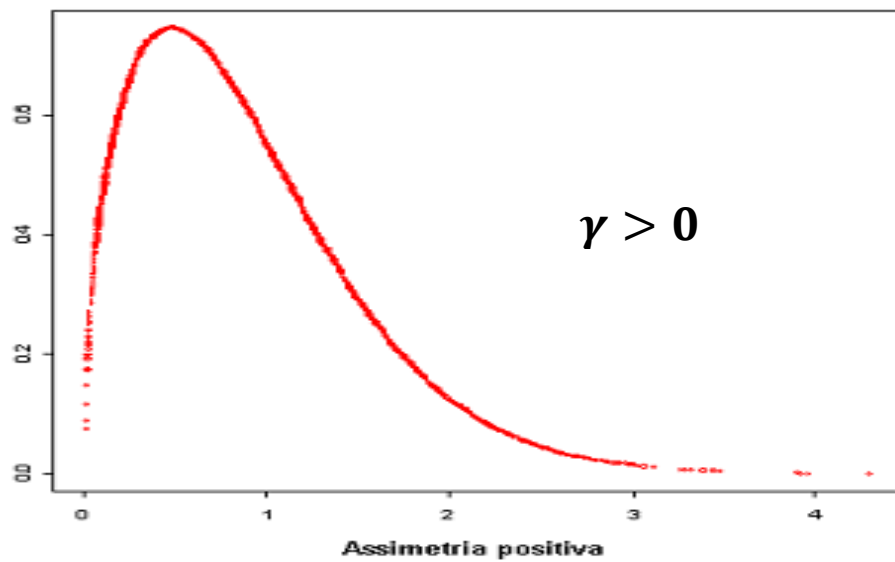
$$\gamma = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^3\right] = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{[E(X^2) - E(X)^2]^{3/2}}$$

- Curtose de X

$$\beta = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^4\right] = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4}{[E(X^2) - E(X)^2]^2}$$



O mais comum em seguros é assimétrica positiva, pois há uma tendência de os sinistros de custo mais baixa serem mais frequentes do que os de custo mais alta.



Momentos

- Momento de ordem k ou momentos ordinários de ordem k de uma variável Y (sendo k um inteiro positivo) como:

$$m_k = E(Y^k)$$

Momentos

$$m_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y) dy \end{cases}$$

- $m_1 = E(Y)$
- $m_2 = E(Y^2)$
- $m_3 = E(Y^3)$

Função Geradora de Momentos

$$\blacktriangleright M_Y(t) = E(e^{tY}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ty_i} P(Y = y_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy \end{cases}$$

Função Geradora de Momentos

- 1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.
- 2) A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.
- 3) Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.
- 4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

1) A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.

....se duas v.a. possuem funções geradoras de momentos iguais, então elas têm a mesma função de distribuição (teorema de unicidade).

2) A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.

Seja $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, tal que X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E[e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}]$$

$$M_Y(t) = E(e^{tX_1}e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n})$$

$$M_Y(t) = M_{\Sigma X}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

3) Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} \right] = E \left[1 + tX + \frac{(tX)^2}{2} + \frac{(tX)^3}{6} + \frac{(tX)^4}{24} + \dots \right]$$

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2} + \frac{t^3 E(X^3)}{6} + \frac{t^4 E(X^4)}{24} + \dots$$

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2 E(X^3)}{2} + \frac{t^3 E(X^4)}{6} + \dots \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = E(X)$$

$$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} = E(X^2) + tE(X^3) + \frac{t^2 E(X^4)}{2} + \dots \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = E(X^2)$$

$$\frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3} = E(X^3) + tE(X^4) + \dots \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial^3 M_X(t)}{\partial t^3} \right|_{t=0} = E(X^3)$$

4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

Em muitas situações, é mais fácil mostrar a convergência de funções geradoras do que provar a convergência das distribuições diretamente.

Exemplo 1: Seja $Y \sim B(n, q)$ e $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ vamos obter as respectivas funções geradoras de momentos.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$0 \leq Y \leq n \text{ e } 0 \leq x \leq \infty.$$

Seja $Y \sim B(n, q)$, $0 \leq Y \leq n$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y}$$

Lembrando que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ e $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^n e^{ty} \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} = \sum_{y=0}^n \binom{n}{y} (e^t q)^y (1 - q)^{n-y}$$

$$M_Y(t) = [e^t q + (1 - q)]^n$$

Seja $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda-t)} dx$$

$$M_X(t) = - \frac{\lambda}{(\lambda - t)e^{x(\lambda-t)}} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

Exemplo 2: Seja uma dada variável aleatória $X \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $Y = g(X) = X^2$, pela técnica da função geradora de momentos.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$M_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx \quad \rightarrow \quad X \sim N(0, (1-2t)^{-1})$$

Logo

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ para } t < \frac{1}{2}$$

$$Y \sim \text{Gama} \left(\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2} \right)$$

Seja $X_j \sim \text{Bernoulli}(q)$, $j = 1, 2, \dots, n$ sendo X_j independentes. Então a distribuição de $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ é?

$$M_{X_j}(t) = qe^t + 1 - q$$

Função Geradora de Momentos

Sejam X_1, \dots, X_n v.as definidas num mesmo espaço de probabilidade, com $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ e dada as funções $Y_i = g_i(X_1, \dots, X_n)$, $i = 1, \dots, k$.

A função geradora de momentos multidimensional dessas variáveis é definida por:

$$M_{Y_1, \dots, Y_k}(t_1, \dots, t_k) = E(e^{t_1 Y_1 + \dots + t_k Y_k})$$

ou

$$M_{Y_1, \dots, Y_k}(t_1, \dots, t_k) = \int \dots \int e^{t_1 g_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + t_k g_k(X_1, \dots, X_n)} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n dx_j$$

Obs.:

$$M_{Y_1}(t_1) = M_{Y_1, \dots, Y_k}(t_1, 0, 0, 0, \dots, 0) = \lim_{t_s \neq t_1 \rightarrow 0} M_{Y_1, \dots, Y_k}(t_1, \dots, t_k)$$

Função Geradora de Momentos

Propriedade:

Dada as constantes a e b , então se $Y = aX + b$, então:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

$$\text{Se } X \sim \text{Bernoulli}(q) \rightarrow M_X(t) = qe^t + 1 - q; \quad 0 \leq q \leq 1$$

$$\text{Se } X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}; \quad -\infty \leq \mu \leq \infty, \quad \sigma^2 > 0$$

$$\text{Se } X \sim \text{Po}(\lambda) \rightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}; \quad \lambda > 0$$

$$\text{Se } X \sim \text{Exp}(\alpha) \rightarrow M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}; \quad \alpha > 0$$

$$\text{Se } X \sim \text{Geo}(q) \rightarrow M_X(t) = \frac{qe^t}{1 - (1 - q)e^t}; \quad 0 \leq q \leq 1$$

$$\text{Se } X \sim \text{Uni}_c(a, b) \rightarrow M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}; \quad a < b$$

$$\text{Se } X \sim \text{Gama}(\lambda, r) \rightarrow M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r; \quad \lambda > 0, \quad r > 0, \quad t < \lambda$$

Exemplo 3: Seja $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, Sendo X e Y independentes. Seja $Y_1 = X + Y$ e $Y_2 = X - Y$. Encontre as distribuições de Y_1 e Y_2 .

Sendo que a função geradora de momentos de uma distribuição normal é $U \sim N(\mu, \sigma^2)$ é dada por: $M_U(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$

Entregar!!

Função Geradora de Momentos

$$\blacktriangleright M_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$\left. \frac{d^n M_Y(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = E(Y^n)$$

Função Característica

$$\blacktriangleright \psi_Y(t) = E(e^{itY})$$

$$\left. \frac{d^n \psi_Y(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = i^n E(Y^n)$$

$$\psi_Y(t) = M_Y(it)$$

Fórmula de Inversão

Seja Y uma variável aleatória, e $\psi_Y(t)$ sua função característica, tal que $|\psi_Y(t)| = 1$ para algum $t \neq 0$, se ela for discreta, ou $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_Y(t)| dt < \infty$, se for contínua, então:

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \psi_Y(t) dt$$

Exemplo 4: Considere a função geradora de momentos abaixo

$$M_X(t) = e^{\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

Determine a função de densidade de X .

Exemplo 4: Como $\psi_Y(t) = M_Y(it)$, então $\psi_Y(t) = e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$. Aplicando a fórmula de inversão.

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-\frac{(t^2+2ity)}{2}\right]} dt$$

$$f(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[t^2+2ity+(iy)^2]}{2}} e^{\frac{(iy)^2}{2}} dt$$

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t+iy)^2}{2}} dt$$

Exemplo 4

$$\dots$$
$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t+iy)^2}{2}} dt$$

$$N(-iy, 1)$$

$$f(Y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}$$

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$Y \sim N(0,1)$$

Referências

- Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: SAO Paulo, 2001.
- JAMES, B. R.; **Probabilidade: Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba, CRV 2020.

