Teoria do Risco
Aula 9

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Modelos de risco Coletivo

- Diferente da abordagem do modelo de risco individual, no modelo de risco coletivo o valor total das indenizações é calculado a partir de uma soma aleatória de variáveis aleatórias.

- O modelo de risco coletivo se diferencia do modelo de risco individual por modelar, de maneira conjunta, o número de sinistros e sua severidade.

Modelos de risco Coletivo

- O objetivo central da teoria do risco coletivo aplicada a seguros e danos é a modelagem matemática do comportamento probabilístico de S_{col}.

- $S_{col.}$ → Montante agregado relativo aos sinistros ocorridos no ano.

- X_i → Montante relativo ao *i-ésimo* sinistro ocorrido.

- N → o número de sinistros para o mesmo período em analise.

Modelos de risco Coletivo

- S_{col} é condicionado a X_i e a N

$$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$S_{col} > 0 \text{ se } N > 0$$

$$S_{col} = 0 \text{ se } N = 0$$

Modelos de risco Coletivo

- O número de vezes que os sinistros ocorrem e seus valores serão expressos pelas ocorrências verificadas no conjunto das apólices que a compõem.

- Assumindo que $N = n$, então $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídos.

- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ e N são mutualmente independentes.

Modelos de risco Coletivo

- ...qualquer sinistro ocorrido não pode sofrer interferência de outros eventos de mesma espécie e o número de sinistros (N) não tem efeito sobre o montante deles ($\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$).

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

X_i → é a variável aleatória que representa a sinistralidade da apólice i-ésima.

N →variável aleatória que representa o número de sinistros na carteira em um dado intervalo de tempo.

Modelos de risco Coletivo

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
X_i, B_i, I_i	X_i, N

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E[E(S_{col}|N)]$$

$$E(S_{col}) = E[E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N|N = n)]$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N|N = n)\, P(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\, P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) P(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(X)\, P(N = n) = E(X) \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(N = n)$$

Logo

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(X)E(N)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E[var(S_{col}|N)] + var[E(S_{col}|N)]$$

Primeiro iremos trabalhar $\boldsymbol{E[var(S_{col}|N)]}$, assim:

$$E[var(S_{col}|N)] = E[var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N|N = n)]$$

$$E[var(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} var(X_1 + X_2 + \cdots + X_N|N = n)\, P(N = n)$$

$$E[var(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\, P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) P(N = n)$$

$$E[var(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, var(X)\, P(N = n) = var(X) \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(N = n)$$

$$\boldsymbol{E[var(S_{col}|N)] = var(X)E(N)}$$

Agora para $var\big(E(S_{col}|N)\big)$, tem-se:

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = var(X)E(N) + var[E(S_{col}|N)]$$

$$var[E(S_{col}|N)] = E[E(X_1 + \cdots + X_N|N = n)^2] - E[E(X_1 + \cdots + X_N|N = n)\ ]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \cdots + X_N|N = n)^2\, P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \cdots + X_n)^2\, P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(nX)^2\, P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$var[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2\, P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$var[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 E(N^2) - [E(X)E(N)]^2$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = var(X)E(N) + var[E(S_{col}|N)]$$

$$var[E(S_{col}|N)] = E(X)^2E(N^2) - E(X)^2E(N)^2 = E(X)^2[E(N^2) - E(N)^2]$$

Logo

$$var(S_{col}) = E(X)^2var(N) + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)$$

EXEMPLO 1: Encontre os valores de $\mathrm{E}(S_{col})$ e $var(S_{col})$ para as situações dos itens a seguir:

a) $N \sim Po(\lambda)$ e $X \sim Exp(\alpha)$

b) $N \sim B(n, q)$ e $X \sim Gama(r, \alpha)$

EXEMPLO 1

a) $N \sim Po(\lambda)$ e $X \sim Exp(\alpha)$, então:

$$\mathrm{E}(N) = \lambda \qquad E(\mathrm{X}) = \frac{1}{\alpha}$$

Logo:

$$\mathrm{E}(\mathrm{S_{col}}) = \mathrm{E}(N)E(\mathrm{X}) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$var(N) = \lambda \text{ e } var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = var(X)E(N) + E(X)^2 var(N)$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{\alpha^2}\lambda + \frac{1}{\alpha^2}\lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

EXEMPLO 1

b)$N \sim B(n, q)$ e $X \sim Gama(r, \alpha)$, então:

$$E(N) = nq \qquad E(X) = \frac{r}{\alpha}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{nqr}{\alpha}$$

$$var(N) = nq(1-q) \quad e \ var(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = \frac{r}{\alpha^2}nq + \frac{r^2}{\alpha^2}nq(1-q) = \frac{nqr[1 + r(1-q)]}{\alpha^2}$$

EXEMPLO 2: Suponha uma carteira de seguros cuja número de sinistros seja caracterizada pela variável aleatória $N \sim Po(12)$ e os valores dos sinistros seja $X \sim U_c(0,1)$, calcule $P(S_{col} \leq 10)$ utilizando uma aproximação pela distribuição normal.

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(N)E(X)}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)}$$

EXEMPLO 2

$$E(S_{col}) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{4}12 + 12\frac{1}{12} = 4$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-6}{2}\right)$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P(Z \leq 2) = 0{,}97725$$

Modelo de Risco individual	**Modelo de Risco coletivo**
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} q_i E(B_i)$	$E(S_{col}) = E(X)E(N)$
$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2\, var(I_i)$	$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.