Teoria do Risco
Aula 17

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

O processo de Poisson

- Em consequência dessas hipóteses, $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson com média λt, para todo $t > 0$

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$E(N_t) = \lambda t = var(N_t), \qquad M_{N_t}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$$

O processo de Poisson

- Exemplo:

Suponha que a média do número de chamadas telefônicas que uma central telefônica recebe é de 30 chamadas por hora.

a) Qual a probabilidade que não tenha nenhuma chamada em um período de 3 minutos?

b) Qual a probabilidade que ocorra mais que 5 chamadas em um intervalo de 5 minutos?

$$\lambda = \frac{30}{60} = 0{,}5/\,m$$

a)

$$P(N_3 = 0) = \frac{e^{-0{,}5\times 3}(0{,}5 \times 3)^0}{0!} = 0{,}223$$

b)

$$P(N_5 > 5) = 1 - \sum_{n=0}^{5} \frac{e^{-0{,}5\times 5}(0{,}5 \times 5)^n}{n!} = 0{,}42$$

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Através do modelo de Poisson é possível perceber que a probabilidade de que não ocorra sinistros dentre de um intervalo t é dado por:

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

- Considerando a propriedade de estacionaridade, ao se definir N_t e N_{t+s} como a frequência de sinistros ocorridos até os instantes t e $t + s$, tem-se:

$$P(N_{t+s} - N_t = 0) = P(N_s = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!}$$

- Esse resultado pode ser entendido como a probabilidade de espera entre um sinistro e outro (evento), neste caso, pode-se dizer que o tempo necessário para ocorrer um sinistro é maior que s.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Ao se definir uma variável aleatória T como o intervalo de tempo entre dois sinistros, tem-se:

$$P(T > s) = P(N_s = 0) = P(N_{t+s} - N_t = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

- A probabilidade de que o tempo entre dois sinistros seja menor que um intervalo s, implica que o número de sinistros ocorridos nesse intervalo é maior que 0.

$$P(T < s) = P(N_s > 0) = 1 - e^{-\lambda s}$$

Portanto T possui distribuição exponencial com média $\frac{1}{\lambda}$, $t > 0$ e $\lambda > 0$.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Portanto ao se definir $\{N_t, t \geq 0\}$ como um processo de Poisson homogêneo com intensidade λ, é estabelecido que o tempo entre dois sinistros, T, possui distribuição exponencial com parâmetro λ, logo:

$F_T(t) = 1 - e^{-t\lambda}$ Distribuição acumulada de T.

$\bar{F}_T(t) = e^{-t\lambda}$ Função de sobrevivência de T.

$f_T(t) = \lambda e^{-t\lambda}$ Função densidade de T.

$E(T) = \frac{1}{\lambda}$ Valor esperado de T.

$var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ Variância de T.

$M_T(r) = \frac{\lambda}{r-\lambda}$ Função geradora de momentos de T.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- O fato da distribuição do tempo entre dois sinistros ser dado por um modelo de distribuição exponencial implica em dizer que:

- I) A probabilidade do tempo de espera entre dois sinistros decai exponencialmente com o passar do tempo.

- II) A probabilidade de que seja necessário esperar mais s anos até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de t segundos, é a mesma de que esse evento ocorra depois dos s segundos iniciais.

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

- Propriedade da perda de memória: Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

III) A variável aleatória que representa a soma de durações exponencialmente distribuídas (idênticas) , $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, apresenta distribuição gama com parâmetros n e λ:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$$

em que $\Gamma(n) = (n-1)!$ uma vez que n é um inteiro positivo.

EXEMPLO

Denote por T como o tempo decorridos entre $k-1$ ésimo sinistro e do k-ésimo sinistro de uma carteira de seguros. Suponha que o tempo decorrido entre sinistros independentes e identicamente distribuídos seguindo a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_T(t) = 0{,}04861e^{-0{,}04861t}, \mathrm{t} > 0.$$

Em que t é mensurado em lapsos de meia hora. Sendo assim calcule a probabilidade de que pelo **menos** um sinistro será processado nas próximas duas horas e trinta minutos.

Solução:

Uma vez que a distribuição do tempo decorrido entre dois sinistros é uma exponencial, logo:

$$\lambda = 0{,}04861.$$

Como a função densidade de probabilidade está descrita em duas e trinta minutos, então deve-se calcular a probabilidade considerando-se essa ordem de medida. Dessa forma:

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - P(N_5 = 0)$$

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - e^{-0{,}04861 \times 5} = 1 - e^{-0{,}24305} \approx 0{,}2157 \approx 21{,}57\%.$$

EXEMPLO

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

EXEMPLO

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036$$

EXEMPLO

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja menor que 8 meses.

$$\overline{\mathrm{F_T}}\left(\frac{2}{3}\right) = \mathrm{e}^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036$$

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

$$10\ meses = \frac{5}{6}\ anos \text{ e } 2\ meses = \frac{1}{6}\ anos.$$

$$P\left(T > \frac{5}{6}\middle|T > \frac{1}{6}\right) = \frac{e^{-5\left(\frac{5}{6}\right)}}{e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}} = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036 = \overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Definindo-se $S_{col.t}$ como a severidade acumulada no intervalo de tempo t de acordo como o modelo de risco agregado.

$$S_{col.t} = S_t$$

- O processo estocástico $\{S_t, t > 0\}$ é dito ser um processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo da seguinte forma:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo.

- $\{X_n, n > 0\}$ é uma sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $\{N_t, t > 0\}$.

- $\{X_n, n > 0\}$ e $\{N_t, t > 0\}$ são mutuamente independentes.

- $S_t = 0$ se $N_t = 0$

- A função distribuição convoluta de S_t é será dada por:

$$F_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Em que $P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k < s)$.

Consequentemente temos que :

$$p_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Em que $p^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k = s)$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Sua esperança e variância são dadas por:

$$E(S_t) = \lambda t E(X)$$

$$var(S_t) = \lambda t E(X^2)$$

- Esperança matemática e variância do sinistro agregado para o intervalo de tempo t de um processo estocástico Poisson Homogêneo

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t M_X(r)-1}$$

Exemplo

Considere uma carteira de n apólices idênticas de seguros de dano em que a frequência histórica relativa de ocorrência de sinistros é de 5 sinistros por ano obedecendo uma distribuição Poisson com valor de intensidade constante. Considere que a distribuição de probabilidades de severidades tem um comportamento descrito pela distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 100$ e $\beta = 2$, $X \sim Gama(100, 2)$. Supondo que este comportamento se mantenha constante no período de análise e que todas as apólices são renovadas a cada ano. Obtenha a fórmula genérica da função geradora de momentos, esperança matemática e do desvio padrão da distribuição convoluta de sinistros agregados.

- Resp.:

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^{\alpha} \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

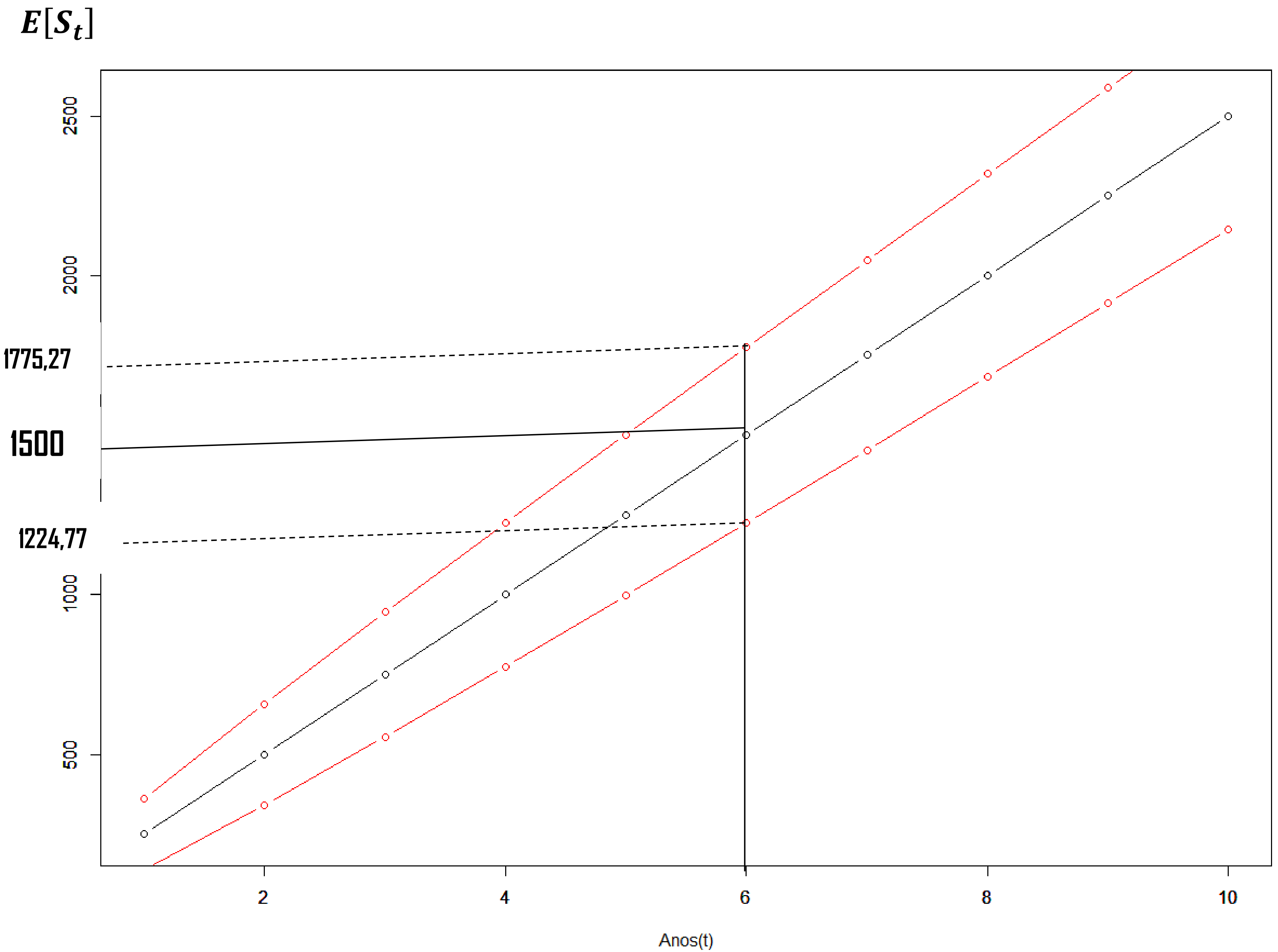
Logo,

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t\left[\left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^{\alpha} - 1\right]} = e^{5t\left[\left(\frac{2}{2 - r}\right)^{100} - 1\right]}$$

$$E(S_t) = \frac{\lambda t \alpha}{\beta} = 5t\left(\frac{100}{2}\right) = 250t$$

$$var(S_t) = \lambda t\left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) = 5t(25 + 50^2) = 12625t$$

$$\sigma_{S_t} = 112{,}361\sqrt{t}$$



$E[S_t]$
2500
2000
1775,27
1500
1224,77
1000
500
2
4
6
8
10
Anos(t)

Processo de Ruína

- O termo "ruína", no contexto atuarial está associado ao risco de uma instituição financeira ficar com **reservas** insuficientes ...
- Fatores quantitativos, relacionados a Ruína

i) Duração do processo;

ii) Carregamento de segurança (θ) embutido no prêmio puro;

iii) Distribuição do valor total dos sinistros retidos S;

iv) Limite técnico;

v) Fundo inicial que a seguradora aloca para assumir o risco de ruína U_0.

- A teoria da ruína está relacionada com o estudo do **nível de reserva** de uma seguradora ao longo do tempo.

Processo de Ruína

- Pode-se descrever o processo de reserva através do modelo clássico, chamado de modelo de Cramér-Lundberg:

$$U(t) = u + P_t - S_t$$

- $u = U(0)$ representa a reserva inicial da seguradora.
- $U(t)$ é o processo estocástico associado ao nível de reserva no tempo t,
  - $U(t) < 0$, é dito então que ocorreu ruína.
- P_t prêmio recebido no intervalo de tempo $(0, t]$
  - Incremento a $U(t)$
- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ Sinistro agregado, sendo N_t o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo.
  - Decremento em $U(\mathrm{t})$ de acordo com a ocorrência de sinistros.

Processo de Ruína

- De maneira simplificada, serão adotados modelos de ruína que envolva os prêmios recebidos a uma taxa constante, isto é.

$$U(t) = u + ct - S_t$$

- $c > E(S)$

- Na prática utilizam-se percentuais que variam de 25% a 50% patrimônio liquido,

- A utilização de um percentual do patrimônio liquido, como reserva de risco, se justifica pelo fato que a perda de uma porcentagem pode levar a falta de liquidez.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

- Assumir que N_t é um processo de Poisson, implica em:

  - Considerar $U(t)$ um processo estocástico de reserva que cresce de acordo com o ganho de prêmios.

  - $U(t)$ decresce de acordo com a ocorrência de sinistros.

➢ Exemplo

Um segurador tem uma reserva de risco inicial de $R\$100$ e recebe prêmios a uma taxa constante de $c = R\$40$ por unidade de tempo. O segurador deverá ter uma experiência de sinistros X relativa ao tempo t, com a distribuição expressa pela tabela a seguir.

t	0,8	1,4	2,3	3	4
X	30	40	70	60	x_4

Determine o valor de x_4 para que o segurador não entre em processo de ruína no intervalo de tempo $[0,4]$.

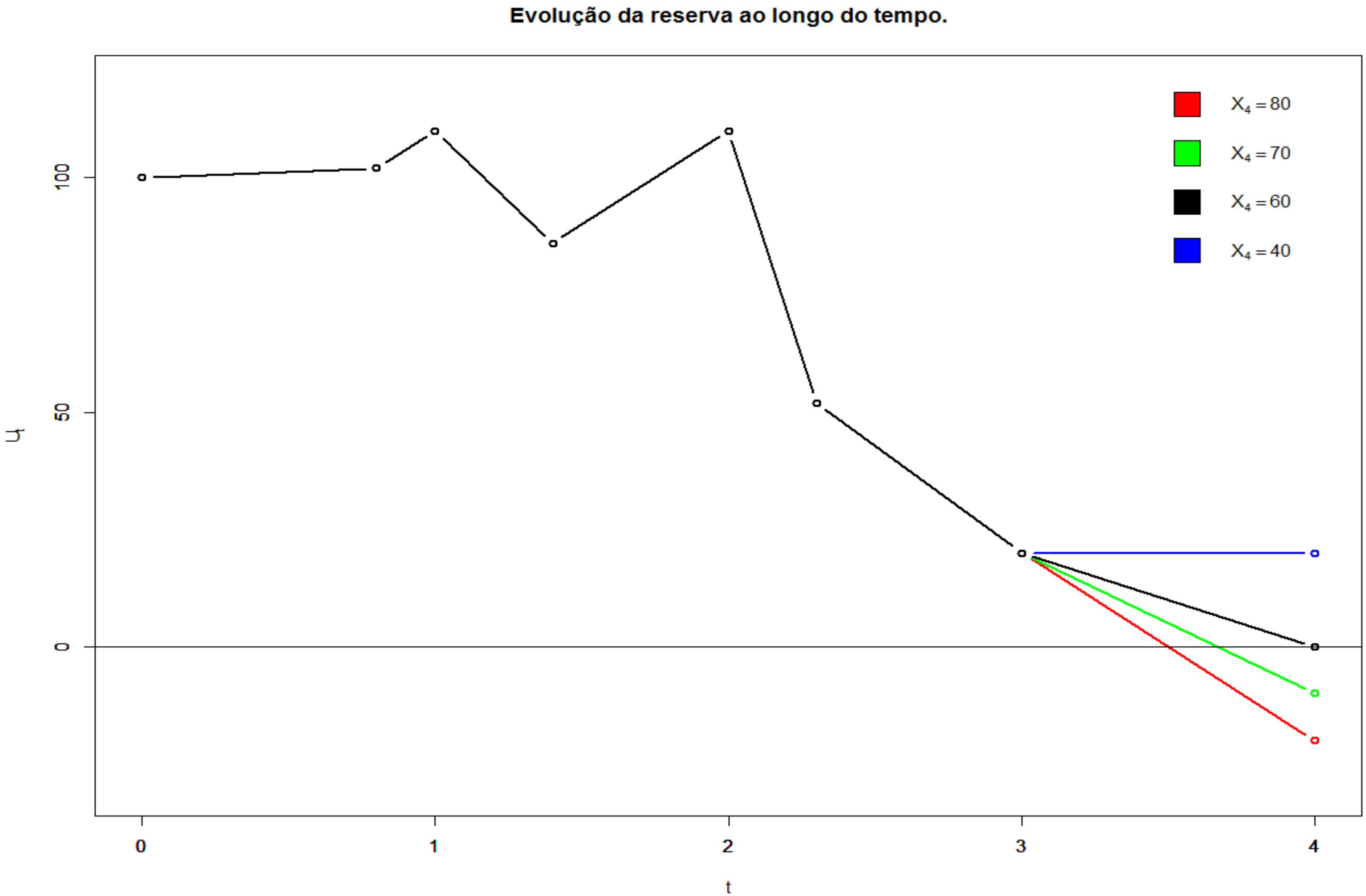
De acordo com o modelo de Cramér-Lundberg $U(t) = u + ct - S_t$ temos que:

$$\begin{aligned}
U(0) &= 100 = u \\
U(0{,}8) &= 100 + 40(0{,}8) - 30 = \mathbf{102} \\
U(1) &= \mathbf{102} + 40(1 - 0{,}8) - 0 = \mathbf{110} \\
U(1{,}4) &= \mathbf{110} + 40(1{,}4 - 1) - 40 = \mathbf{86} \\
U(2) &= \mathbf{86} + 40(2 - 1{,}4) - 0 = \mathbf{110} \\
U(2{,}3) &= \mathbf{110} + 40(2{,}3 - 2) - 70 = \mathbf{52} \\
U(3) &= \mathbf{52} + 40(3 - 2{,}3) - 60 = \mathbf{20}
\end{aligned}$$

Para que no tempo $t = 4$, tem-se:

$$U(4) = \mathbf{20} + 40(4 - 3) - X_4 = 60 - X_4$$

Haverá solvência relativa aos ganhos proporcionados por c, estando o segurador limitado a honrar sinistros inferiores a $R\$60{,}00$ (em X_4) .



Comportamento do $U(t)$ para diferentes valores de X_4.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

- Tipos de Reserva.
  - Processo em tempo contínuo, denotado por $\{X_t : t \geq 0\}$.

No processo em tempo contínuo, o interesse está no processo de reserva $\{U(t) : \mathrm{t} \geq 0\}$, em que $U(t)$ representa a reserva da seguradora até o instante t.

  - Processo em tempo discreto, denotado por $\{X_n : n = 0,1, \ldots\}$.

No processo em tempo discreto, o tempo t assume valores inteiros (geralmente anos) e o interesse está no processo de reserva $\{U(n) : n = 0,1, \ldots\}$.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

- A ruína de uma empresa (seguradora) acontece exatamente reserva num instante t se torna negativa ou abaixo de limite técnico pré-estabelecido sobre a reserva inicial.

- De acordo com a evolução do processo de reserva ao longo do tempo, pode-se definir a probabilidade de sobrevivência da seguradora de quatro maneiras:

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas