

# Matemática Atuarial II

## Aula 7

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br  
Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. COSTA, L.H. Status vida conjunta: Seguros pagos no momento da falha. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: [https://atuaria.github.io/portahalley/notas\\_MatAtuarial2.html](https://atuaria.github.io/portahalley/notas_MatAtuarial2.html). Acessado em: 28 jun. 2025.

# Status vida conjunta-função densidade

A densidade de  $T_{x,y}$  é obtida por meio de:

$$f_{T_{x,y}}(t) = \frac{\partial F_{T_{x,y}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial {}_t q_{x,y}}{\partial t} = \frac{\partial [{}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y]}{\partial t}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = \frac{\partial [F_{T_x}(t) + F_{T_y}(t) - F_{T_x}(t) F_{T_y}(t)]}{\partial t}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - [f_{T_x}(t)F_{T_y}(t) + f_{T_y}(t)F_{T_x}(t)]$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_x}(t)F_{T_y}(t) - f_{T_y}(t)F_{T_x}(t)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) [1 - F_{T_y}(t)] + f_{T_y}(t) [1 - F_{T_x}(t)]$$

# Status vida conjunta-função densidade

$$\dots$$
$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) [1 - F_{T_y}(t)] + f_{T_y}(t) [1 - F_{T_x}(t)]$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t)(1 - {}_t q_y) + f_{T_y}(t)(1 - {}_t q_x)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) {}_t p_y + f_{T_y}(t) {}_t p_x$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x \mu(x + t) {}_t p_y + {}_t p_y \mu(y + t) {}_t p_x$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y [\mu(x + t) + \mu(y + t)]$$

# Status vida conjunta-força de mortalidade

$$\mu(x + t, y + t) = \frac{f_{T_{x,y}}(t)}{{}_t p_{x,y}}$$

$$\mu(x + t, y + t) = \frac{{}_t p_x {}_t p_y [\mu(x + t) + \mu(y + t)]}{{}_t p_x {}_t p_y} =$$

$$\mu(x + t, y + t) = \mu(x + t) + \mu(y + t)$$

# Resumo

Seja  $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) {}_t p_y + f_{T_y}(t) {}_t p_x = {}_t p_x {}_t p_y [\mu(x+t) + \mu(y+t)]$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

**EXEMPLO 1:** Determine a função sobrevivência e a função acumulada (mortalidade) para o status de vida conjunta composto por  $(x, y)$  tal que, seja o tempo de vida futuro  $T_x$  e  $T_y$  independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# EXEMPLO 1:

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_t q_x = {}_t q_y = \int_0^t 0,02(10 - u) du = 0,02[10u - 0,5u^2]_{u=0}^{u=t}$$

$${}_t q_x = {}_t q_y = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0,2(t - 0,05t^2) & 0 < t < 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases}$$

$${}_t p_x = {}_t p_y = \int_t^{10} 0,02(10 - u) du = 0,02[10u - 0,5u^2]_{u=t}^{u=10}$$

$${}_t p_x = {}_t p_y = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 1 - 0,2(t - 0,05t^2) & 0 < t < 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases}$$



$${}_t q_x = {}_t q_y = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0,2(t - 0,05t^2) & 0 < t < 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases}$$

$${}_t p_x = {}_t p_y = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 1 - 0,2(t - 0,05t^2) & 0 < t < 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases} = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 0,01(10 - t)^2 & 0 < t < 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases}$$

$${}_t p_{x,y} = {}_t p_x {}_t p_y = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)][1 - 0,2(t - 0,05t^2)]$$

$${}_t p_{x,y} = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]^2 = [0,01(10 - t)^2]^2$$

E

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_{x,y} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = 1 - {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 0,2(t - 0,05t^2) + 0,2(t - 0,05t^2) - [0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

$${}_t q_{x,y} = 0,4(t - 0,05t^2) - 0,04(t - 0,05t^2)^2 = 1 - [0,01(10 - t)^2]^2$$

**EXEMPLO 2:** Ainda com os dados do exemplo 1 determine a força de mortalidade, função de densidade e a expectativa de vida para o status de vida conjunta composto por  $(x, y)$ .

## EXEMPLO 2:

$$\mu(x + t, y + t) = \mu(x + t) + \mu(y + t)$$

$$\mu(x + t) = \frac{f_{T_x}(t)}{tp_x} = \frac{0,02(10 - t)}{0,01(10 - t)^2} = \frac{2}{10 - t} = \mu(y + t) \quad 0 < t < 10$$

$$\mu(x + t, y + t) = \frac{2}{10 - t} + \frac{2}{10 - t} = \frac{4}{10 - t}$$

EXEMPLO 2:  $f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y [\mu(x+t) + \mu(y+t)]$

$$f_{T_{xy}}(t) = [0,01(10-t)^2][0,01(10-t)^2] \left[ \frac{2}{10-t} + \frac{2}{10-t} \right]$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = [0,01(10-t)^2]^2 \frac{4}{10-t}, \quad 0 < t < 10.$$

ou

$$f_{T_{x,y}}(t) = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]^2 \frac{4}{10-t}, \quad 0 < t < 10.$$

## EXEMPLO 2:

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\infty} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\infty} t p_x dt$$

$$e_{x,y} = E(T_{x,y}) = \int_0^{\infty} t f_{T_{x,y}}(t) dt = \int_0^{\infty} t p_{x,y} dt$$

$$e_{x,y} = \int_0^{10} [0,01(10 - t)^2]^2 dt = \int_0^{10} 0,0001(10 - t)^4 dt$$

$$e_{x,y} = \int_0^{10} 0,0001(10000 - 4000t + 600t^2 - 40t^3 + t^4) dt = 2$$

## EXEMPLO 3: Calcule

$$g(t) = e^{-\int_0^t \mu(x+s, y+s) ds}$$

em que  $\mu(x + s, y + s) = \frac{4}{10-s}$

### EXEMPLO 3: Calcule

$$g(t) = e^{-\int_0^t \mu(x+s, y+s) ds}$$

em que  $\mu(x+s, y+s) = \frac{4}{10-s}$

$$g(t) = e^{-\int_0^t \left(\frac{4}{10-s}\right) ds} = e^{-4 \int_0^t \left(\frac{1}{10-s}\right) ds} = e^{-4[-\ln(10-s)]_{s=0}^{s=t}}$$

$$g(t) = e^{-4[-\ln(10-t) + \ln(10)]} = e^{4 \ln(10-t)} e^{-4 \ln(10)}$$

$$g(t) = \left[ e^{\ln(10-t)} \right]^4 \left[ e^{\ln(10)} \right]^{-4} = \frac{(10-t)^4}{10000}$$

$$g(t) = 0,0001(10-t)^4 = {}_t p_{x,y}$$

# Status vida conjunta

$${}_t p_{x,y} = e^{-\int_0^t \mu(x+s,y+s)ds}$$

$${}_t p_{x,y} = {}_t p_x {}_t p_y$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+s,y+s)ds}$$

$${}_t q_{x,y} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

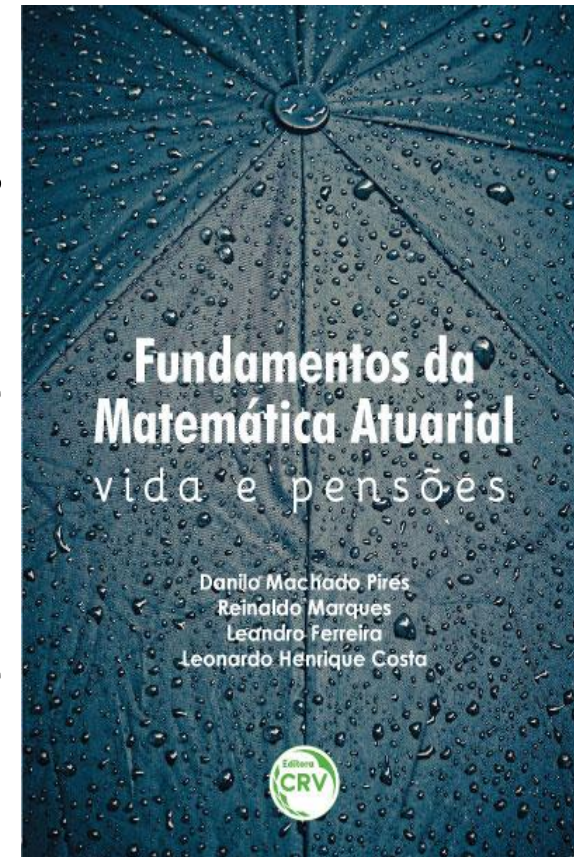
$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_{x,y} \mu(x+t, y+t)$$

$$e_{x,y} = \int_0^{\infty} t f_{T_{x,y}}(t) dt = \int_0^{\infty} {}_t p_{x,y} dt$$



- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



# Matemática Atuarial II

## Aula 8

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

# Status vida conjunta (Seguro vitalício pago no momento da “falha”)

Seja  $T_{x,y}$  a variável aleatória associada ao tempo adicional do status vida conjunta, onde  $T_x$  e  $T_y$  são as variáveis aleatórias contínuas e independentes entre si, então o prêmio puro único do seguro de vida vitalício com efeito imediato e benefício (unitário) pago no momento da falha do status é dado por:

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{x,y}}(t) dt$$

em que  $f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_{x,y} [\mu(x+t) + \mu(y+t)]$

**EXEMPLO 1:** Seja o tempo de vida futuro ao nascer dos indivíduos  $x$  e  $y$ , ambos com a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$$

Determine o prêmio puro único para um seguro vitalício para o status  $u = \{x, y\}$ . Considere  $\delta$ .

# EXEMPLO 1:

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} \mu(x+t, y+t) dt$$

$${}_t p_x = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha t} = {}_t p_y$$

$$\mu(x+t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} = -\frac{-\alpha e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t}} = \alpha = \mu(y+t)$$

## EXEMPLO 1:

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y [\mu(x+t) + \mu(y+t)] dt$$

Como  ${}_t p_{x,y} = {}_t p_x {}_t p_y$  e  $\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} (e^{-t\delta})(e^{-\alpha t})^2 (2\alpha) dt$$

$$\bar{A}_{x,y} = (2\alpha) \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+2\alpha)} dt$$

$$\bar{A}_{x,y} = 2\alpha \left[ -\frac{1}{(2\alpha + \delta)e^{t(2\alpha+\delta)}} \right]_0^{\infty} = \frac{2\alpha}{2\alpha + \delta}$$

# Status vida conjunta (Seguro temporário pago no momento da “falha”)

Caso o seguro for temporário por  $n$  anos, temos:

$$\bar{A}_{u^1:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} f_{T_u}(t) dt$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

**EXEMPLO 2:** Seja o tempo de vida futuro  $T_x$  e  $T_y$  independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine O valor presente atuarial temporário por 5 anos para o status  $u = \{x, y\}$ , considere  $\delta = 0,05$  .



**EXEMPLO 2:** Seja o tempo de vida futuro  $T_x$  e  $T_y$  independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine O valor presente atuarial temporário por 5 anos para o status  $u = \{x, y\}$ , considere  $\delta = 0,05$ .

**Resp**

$$\bar{A}_{u^{1:\bar{5}}|} = \int_0^5 e^{-\delta t} f_{T_u}(t) dt$$

$$\bar{A}_{u^{1:\bar{5}}|} = \int_0^5 e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} [\mu(x+t) + \mu(y+t)] dt$$

## EXEMPLO 2:

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = \int_0^5 e^{-\delta t} f_{T_u}(t) dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = \int_0^5 e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} [\mu(x+t) + \mu(y+t)] dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = \int_0^5 e^{-t0,05} (0,01)^2 (10-t)^4 \left( \frac{4}{10-t} \right) dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = 0,0004 \int_0^5 e^{-t0,05} (10-t)^3 dt \approx 0,86143$$

# Status vida conjunta

$$\bar{A}_{x,y} \approx \frac{i}{\delta} A_{x,y}$$

$$\bar{A}_{u^1:\overline{n}|} \approx \frac{i}{\delta} A_{u^1:\overline{n}|}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

# Dotal puro/Dotal misto

O dotal puro aplicado ao status vida conjunta se caracteriza por pagar o benefício somente se todos os indivíduos do status sobreviverem ao período contratado. Já o seguro dotal misto garante que o benefício será pago caso o status falhe dentro do período de cobertura  $n$ , ou todos os indivíduos sobrevivam a esse período.

$$\bar{A}_{u:\bar{n}|^1} = v^n {}_n p_{x,y} = v^n {}_n p_x {}_n p_y$$

$$\bar{A}_{u:\bar{n}|} = \bar{A}_{u:\bar{n}|^1} + \bar{A}_{u^1:\bar{n}|}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

**EXEMPLO 3:** Qual o valor do prêmio puro único calculado para um dotal misto aplicado ao status vida conjunta composto por duas vidas, tal que,  $T_x \sim \text{Exp}(0,028)$  e  $T_y \sim \text{Exp}(0,025)$ ? Considere a taxa de juros instantânea de  $\delta = 0,06$  e 5 anos de cobertura .

$$\bar{A}_{u:\bar{5}|} = \bar{A}_{u:\bar{5}|^1} + \bar{A}_{u^1:\bar{5}|}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

$$\bar{A}_{u:\bar{5}|^1} = e^{-0,06 \times 5} {}_5p_x {}_5p_y$$

$$\bar{A}_{u:\bar{5}|^1} = e^{-0,06 \times 5} \int_5^{\infty} 0,028 e^{-0,028t} dt \int_5^{\infty} 0,025 e^{-0,025t} dt \approx 0,569$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = \int_0^5 e^{-0,06t} {}_t p_{x,y} [\mu(x+t) + \mu(y+t)] dt,$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = \int_0^5 e^{-0,06t} e^{-0,028t} e^{-0,025t} [0,028 + 0,025] dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\bar{5}|} = \int_0^5 e^{-0,113t} 0,053 dt \approx 0,2024$$

$$\bar{A}_{u:\bar{5}|} = \bar{A}_{u:\bar{5}|^1} + \bar{A}_{u^1:\bar{5}|}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

$$\bar{A}_{u:\bar{5}|^1} \approx 0,569 \quad \bar{A}_{u^1:\bar{5}|} \approx 0,2024$$

$$\bar{A}_{u:\bar{5}|} \approx 0,569 + 0,2024 \approx 0,7714$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

