Matemática Atuarial II

Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L.H. Anuidades reversíveis. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_MatAtuarial2.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Anuidades reversíveis

- São anuidades pagas enquanto um status sobrevive mas seu início ocorre apenas após a falha de outro status.
  - Pagamento de pensão após morte do participante

- Os produtos atuariais que são revertidos pra outras pessoas (ou outros status) tem uma notação própria...

Anuidades reversíveis

Considere um produto dotal puro com as seguintes características:

Será pago a y um beneficio igual a 1, caso x tenha morrido entre a data 0 e n. Como calcular esse produto?

Anuidades reversíveis

Considere um produto dotal puro com as seguintes características:

Será pago a y um beneficio igual a 1, caso x tenha morrido entre a data 0 e n. Como calcular o valor presente atuarial desse produto?

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}p_{y}v^{n} \times {}_{n}q_{x}$$

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}p_{y}v^{n}(1 - {}_{n}p_{x})$$

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}p_{y}v^{n} - {}_{n}p_{y}\,{}_{n}p_{x}v^{n}$$

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = A_{y:\overline{n|}}{}^{1} - A_{x,y:\overline{n|}}{}^{1}$$

Anuidades reversíveis

Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer

Se $\lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil$, então o pagamento a esse benefício será 0

Se $\lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil$, então o pagamento ocorrerá até o falecimento de y

Anuidades reversíveis

Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer

Se $\lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil$, então o pagamento a esse benefício será 0

Se $\lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil$, então o pagamento ocorrerá até o falecimento de y

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ v^{\lceil T_x \rceil + 1} + v^{\lceil T_x \rceil + 2} + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ v^{\lceil T_x \rceil + 1} + v^{\lceil T_x \rceil + 2} + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

De outra forma:

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}\right) - \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_x \rceil}\right), & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}\right) - \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_x \rceil}\right), & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_x \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Logo

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_x \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_x \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

A variável aleatória pode ser descrita como uma subtração entre uma série de pagamentos relacionados ao tempo de vida adicional de (y) por outra série de pagamentos que estará relacionada ao menor tempo de vida adicional entre (x) e (y), assim:

$$Z = \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_{y,x} \rceil + 1}|}$$

Anuidades reversíveis

Do slide anterior é fácil notar também que

$$Z = \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1|}} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_{y,x} \rceil + 1|}}$$

Logo

$$E(Z) = \ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

Anuidades reversíveis

É fácil notar que

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_{y} - \ddot{a}_{x,y} = \ddot{a}_{\overline{x,y}} - \ddot{a}_{x}$$

A série de pagamentos relacionados a y menos a série de pagamentos relacionado ao mínimo entre x e y. Ou o a série de pagamentos do máximo entre x e y menos a série de x.

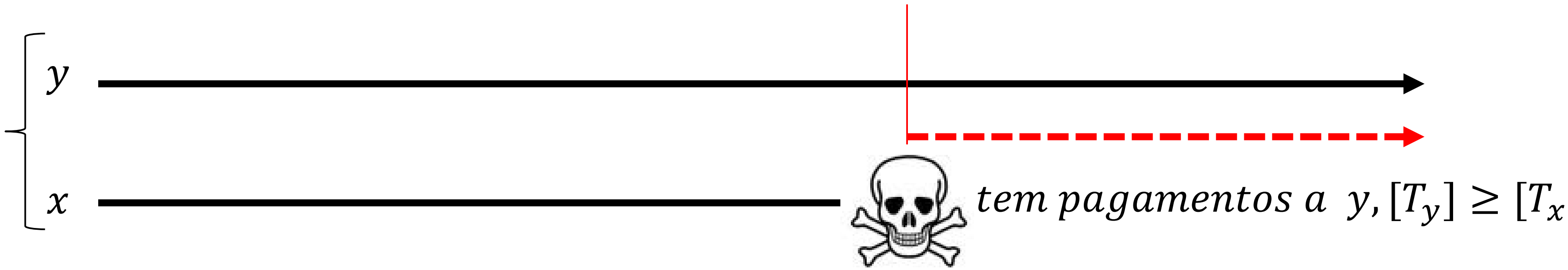
$$\ddot{a}_{x|y}$$

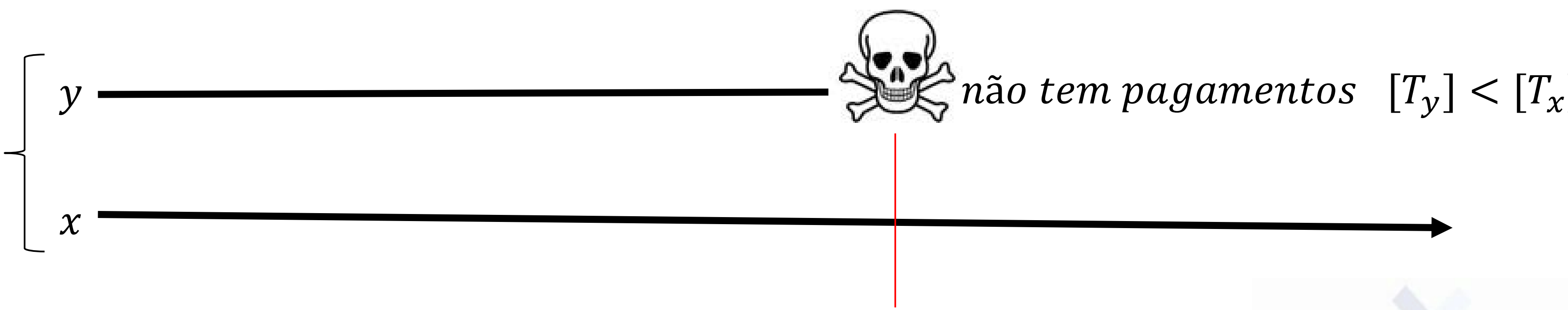
O PRIMEIRO TERMO INDICA A REGRA DE INÍCIO DA REVERSÃO (MORTE DE x POR EXEMPLO)

O SEGUDO TERMO INIDICA A REGRA DO FIM DA REVERSÃO, MORTE DE y POR EXEMPLO.

Anuidades reversíveis

$$\color{red}{\ddot{a}_{x|y}} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$





$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_{\overline{x,y}} - \ddot{a}_x$$

Exemplo 1: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um individuo tem $x = 107$ anos e o outro tem $y = 105$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer, qual o valor do VPA para esse produto atuarial? Considere a tábua AT-49 e taxa de juros de 3 % ao ano.

Exemplo 1: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 107$ anos e o outro tem $y = 105$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer, qual o valor do VPA para esse produto atuarial? Considere a tábua AT-49 e taxa de juros de 3 % ao ano.

$$\ddot{a}_{107|105}$$

O PRIMEIRO TERMO INDICA A REGRA DE INÍCIO DA REVERSÃO (MORTE DE x POR EXEMPLO)

O SEGUNDO TERMO INIDICA A REGRA DO FIM DA REVERSÃO, MORTE DE y POR EXEMPLO.

$$\ddot{a}_{107|105} = \ddot{a}_{105} - \ddot{a}_{105,107}$$

$$\ddot{a}_{107|105} = \left(\sum_{t=0}^{4} {}_tp_{105} v^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{2} {}_tp_{105}\, {}_tp_{107} v^t\right) \approx 0{,}3903$$

Anuidades reversíveis

Pensemos no caso em que a regra de início da reversão seja generalizada para u (não necessariamente a morte de x) e a regra do fim da reversão seja dado por v (não necessariamente a morte de y). assim

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_{v} - \ddot{a}_{u,v}$$

Por exemplo:

u significa que o início da reversão se da com a morte de x ou se passarem n anos, o que ocorrer primeiro

v significa que somente a morte do beneficiário y da fim a reversão...

Anuidades reversíveis

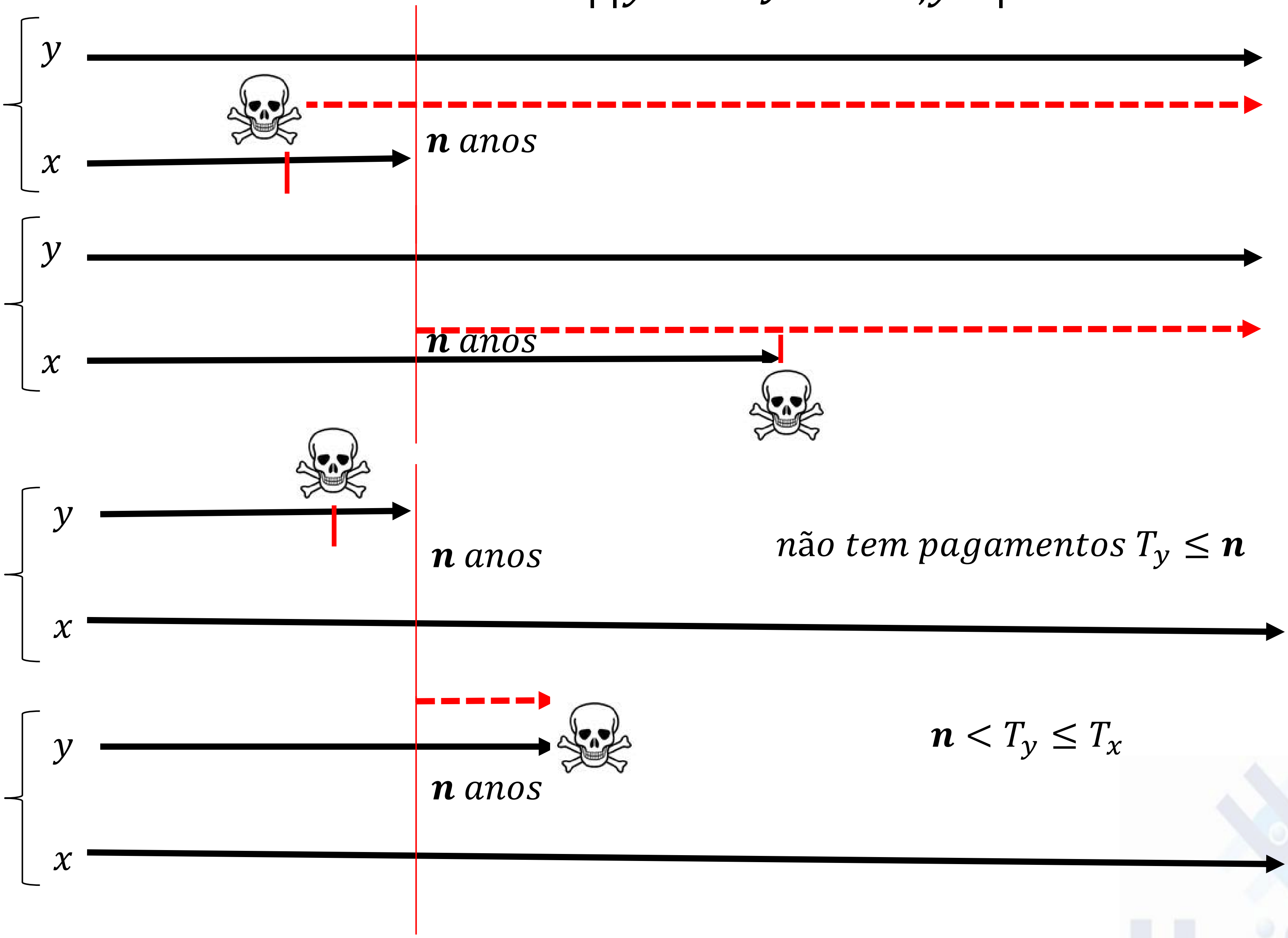
$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

u significa que o início da reversão se da com a morte de x ou se passarem n anos, o que ocorrer primeiro

v significa que somente a morte do beneficiário y da fim a reversão, então:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}\,|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}\,|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$



Exemplo 2: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 65$ anos e o outro tem $y = 25$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer ou se passarem 30 anos. Qual o valor do prêmio puro único para esse produto atuarial?

Exemplo 2: Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 65$ anos e o outro tem $y = 25$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à y enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando x falecer ou se passarem 30 anos. Qual o valor do prêmio puro único para esse produto atuarial?

$$u = x{:}\overline{n|}$$
$$v = y$$

- u significa que o início da reversão se da com a morte de x ou se passarem n anos, o que ocorrer primeiro
- v significa que somente a morte do beneficiário y da fim a reversão...

$$\ddot{a}_{65:\overline{30|}\,|25} = \ddot{a}_{25} - \ddot{a}_{65,25:\overline{30|}}$$

$$\ddot{a}_{65:\overline{30|}\,|25} = \left(\sum_{t=0}^{84} {}_tp_{25}v^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{29} {}_tp_{65}\,{}_tp_{25}v^t\right)$$

Exemplo 3: Pensemos agora no caso em que (y) receberá uma pensão temporária de n anos mas essa anuidade será paga somente quando (x) falecer. Quanto deve ser pago hoje como prêmio puro único?

Exemplo 3: Pensemos agora no caso em que (y) receberá uma pensão temporária de n anos mas essa anuidade será paga somente quando (x) falecer. Quanto deve ser pago hoje como prêmio puro único?

$$u = x$$
$$v = y:\overline{n|}$$

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n|}} = \ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

- u= significa que somente a morte de x da início a reversão
- v = significa que a reversão pode ser encerrada com o falecimento de y ou decorridos n anos

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_y v^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, {}_tp_y v^t\right)$$

Anuidades reversíveis

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_{v} - \ddot{a}_{u,v}$$

u significa que o início da reversão

v significa o fim a reversão

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_{y} - \ddot{a}_{x,y}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}\,|y} = \ddot{a}_{y} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n|}} = \ddot{a}_{y:\bar{n}|} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

$$a_{x|y} = a_{y} - a_{x,y}$$

$$a_{x:\overline{n|}\,|y} = a_{y} - a_{x,y:\overline{n|}}$$

$$a_{x|y:\overline{n|}} = a_{y:\bar{n}|} - a_{x,y:\overline{n|}}$$

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_{y} - \bar{a}_{x,y}$$

Anuidades reversíveis

Considere uma renda vitalícia paga a y e z a partir da morte de x (final do período), assim temos:

u: regra para iniciar a reversão (morte de x) e condição de y e z estarem vivos

v: regra para finalizar a reversão (primeira morte entre y e z)

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_{v} - \ddot{a}_{u,v}$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{a_{x|y,z} = a_{y,z} - a_{x,y,z}}$$

Anuidades reversíveis

Considere uma renda vitalícia paga a y ou z a partir da morte de x (final do período), assim temos:

u: regra para iniciar a reversão (morte de x) e condição de y **ou** z estarem vivos

v: regra para finalizar a reversão (última morte entre y e z)

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{a_{x|\overline{y,z}} = a_{\overline{y,z}} - a_{x,\overline{y,z}}}$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.