

Aula 18 Comutação- Anuidades e Seguros

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

leonardo.costa@unifal-mg.edu.br



Funções de comutação

- **Renda vitalícia imediata antecipada:** é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga imediatamente a este beneficiário.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Funções de comutação

- **Renda vitalícia imediata antecipada:** é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga imediatamente a este beneficiário.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} l_{x+t} v^x v^t}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} l_{x+t} v^{x+t}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{(x+t)}}{l_x v^x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Funções de comutação

- **Renda vitalícia postecipada:** é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga no tempo t seguinte (no próximo ano, trimestre, mês).

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Funções de comutação

- **Renda vitalícia postecipada:** é uma renda (aposentadoria) que é paga ao beneficiário até o momento de sua morte e que deve ser paga no tempo t seguinte (no próximo ano, trimestre, mês).

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} v^{x+t}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{(x+t)}}{l_x v^x} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{(x+1+t)}}{l_x v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Funções de comutação

➤ Renda Vitalícia diferida antecipada e postecipada:

$${}_m|\ddot{a}_x = E_x \ddot{a}_{x+m} = v^m {}_m p_x \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x+m}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = v^m \left(\frac{l_{x+m}}{l_x} \right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{(x+m)+t}}{l_{(x+m)}}$$

$$v^m \left(\frac{l_{x+m}}{l_x} \right) = \frac{l_{x+m} v^{x+m}}{l_x v^x} = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x} \right)$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x} \right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}}$$

Funções de comutação

➤ Renda Vitalícia diferida antecipada e postecipada:

$${}_m|\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x} \right) \sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} l_{(x+m)+t} v^{(x+m)+t}}{l_{x+m} v^{x+m}} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{(x+m+t)}}{l_{x+m} v^{x+m}} = \left(\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} \right)$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x} \right) \left(\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} \right) = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x} \right)$$

Adicionalmente

$${}_m|a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x} \right)$$

Funções de comutação

➤ Renda temporária imediata antecipada e postecipada:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \ddot{a}_x - {}_n| \ddot{a}_x$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Funções de comutação

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x} \right)$$

$${}_m|\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$${}_m|a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x} \right)$$

$${}_m|a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

➤ Exemplo

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação.

- a) calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato antecipados, sendo a taxa de juros 5% *a. a.*
- b) calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato postecipado, sendo a taxa de juros 5% *a. a.*
- c) Refaça os exercícios (a) e (b) usando a taxa de juros de 3%.

Funções de comutação

- O acréscimo das colunas C_x e M_x são úteis para seguros que pagam benefícios em caso de morte, isto é, seguros de vida.
- **Seguro de vida inteiro** que paga um benefício unitário no final do ano de morte.

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \right) \\ A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \right) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{x+t+1}}{v^x} \left(\frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \right) \\ A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{x+t+1} (l_{x+t} - l_{x+t+1})}{l_x v^x} = \frac{1}{l_x v^x} \sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+1} (l_{x+t} - l_{x+t+1}) \end{aligned}$$

$$A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} = \frac{M_x}{D_x}$$

Funções de comutação

- Seguro de vida inteiro diferido por m anos.

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m} = v^m {}_m p_x \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x+m} q_{x+m+t}$$

$${}_m|A_x = v^m \left(\frac{l_{x+m}}{l_x} \right) \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x+m} q_{x+m+t}$$

$${}_m|A_x = v^m \left(\frac{l_{x+m}}{l_x} \right) \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}}$$

$${}_m|A_x = \frac{v^m (l_{x+m})}{l_x} \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}} = \frac{v^{m+x} (l_{x+m})}{v^x l_x} \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}}$$

$${}_m|A_x = \left(\frac{D_{x+m}}{D_x} \right) \left(\frac{M_{x+m}}{D_{x+m}} \right) = \left(\frac{M_{x+m}}{D_x} \right)$$

Funções de comutação

➤ Seguro de vida temporário.

$${}_n|A_x = A_x - A_{x^{1:\overline{n}|}}$$

$$\left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) = \frac{M_x}{D_x} - A_{x^{1:\overline{n}|}}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{M_x}{D_x} - \left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right) = \left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right)$$

Funções de comutação

➤ Dotal Puro.

$$A_{x:\overline{n}|1} = v^n {}_n p_x$$

$$A_{x:\overline{n}|1} = v^n \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} \right)$$

$$A_{x:\overline{n}|1} = \frac{v^{n+x} (l_{x+n})}{v^x l_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Funções de comutação

➤ Dotal Misto.

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^1}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Funções de comutação

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|^1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_n|A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Funções de comutação

➤ **Vantagens:**

- Facilidade de cálculo de produtos atuariais.

➤ **Desvantagens:**

- Os produtos atuariais nascem de variáveis aleatórias e devem ser tratadas como tal. Ao utilizar a comutação perde-se a noção da natureza aleatória da variável aleatória em questão, além da incapacidade de cálculo de variâncias.