Teoria do Risco
Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Modelos de Risco

- No contexto da teoria do Risco aplicada, há questões de importância central e de grande implicância para um segurador, das quais destacam-se as seguintes:

  - Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?

  - Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma dada margem de segurança?

Modelos de Risco

- ...A teoria do risco busca estabelecer um modelo de tarifação eficiente para a seguradora frente aos sinistros.
  - Modelo de Risco Individual Anual.
  - Modelo de Risco Coletivo Anual

Modelo de Risco Individual

- O modelo de Risco individual estabelece um modelo de probabilidade para o valor total das indenizações de uma carteira,
  - Baseado na soma das diferentes distribuições dos sinistros individuais no intuito de se obter uma distribuição de probabilidades para os danos agregados.

Modelo de Risco Individual

- Para fins de simplificação deste modelo é estabelecida as seguintes premissas:

  - Em cada **apólice** ocorrerá somente um **sinistro** no ano de avaliação.

  - A ocorrência de um sinistro não influi em qualquer outro risco do conjunto segurado.

Modelo de Risco Individual

- Este modelo considera que para $i = 1,2,3, \ldots, n$ apólices, os sinistros sob forma agregada serão denominados:

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\boldsymbol{S_{ind.}}$ ⇨ Valor total das indenizações na carteira em 1 ano.

$\boldsymbol{X_{is}}$ ⇨ V.a. associada ao sinistro da apólice i em 1 ano (montante de sinistro, sinistralidade da apólice i).

$\boldsymbol{n}$ ⇨ Número fixo de apólices independentes.

Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

Modelo de Risco Individual

- A relevância do modelo reside fundamentalmente no fato de que as apólices têm abordagens independentes.

q_i ⇨ A probabilidade de ocorrência de um sinistro em um ano de vigência da apólice i.

B_i ⇨ Variável aleatória relativa ao valor da indenização de cada apólice i.

Modelo de Risco Individual

A fim de simplificar os conceitos, X_i será definido como:

$$X_i = I_i B_i$$

Em que I_i é uma variável dicotômica indicadora da ocorrência de um sinistro com distribuição $Bernoulli(q_i)$.

$$I_i = \begin{cases} 1, & q_i \\ 0, & 1 - q_i \end{cases}$$

A variável aleatória B_i é definida por $(X_i | I_i = 1)$.

$$E(I_i) = q_i \qquad var(I_i) = q_i(1 - q_i)$$

Modelo de Risco Individual

- Um seguro de veículos cuja cobertura é apenas o furto ou o microsseguro que cobre perdas de pequenos objetos em viagens como malas, máquinas fotográficas entre outros, são exemplos simples para o caso em que B_i assume apenas um único valor.
  - Dessa forma também podem-se estabelecer outras relações:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - q & x = 0 \\ q & x = B \end{cases}$$

$$E(X) = Bq \qquad var(X) = B^2 q(1 - q)$$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - q & 0 \leq x < B \\ 1 & x \geq B \end{cases}$$

EXEMPLO 1: Calcule o valor do Prêmio de Risco através do princípio do desvio padrão de um seguro que paga $30000,00 caso o veículo seja furtado. Considere a probabilidade de furto do veículo igual a 0,007 e o $\beta = 0,7$.

$$\Pi_X = E(X) + \sigma_X \beta.$$

Solução

$$E(X) = 30000(0{,}007) = \$\,210{,}00$$

$$var(X) = 30000^2(0{,}007)(0{,}993) = \$\,6255900{,}00$$

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} = \$2501{,}18$$

Logo

$$\Pi_X = 210 + 2501{,}18 \times 0{,}7 = \$1960{,}83$$

Modelo de Risco Individual

Pode-se estabelecer S_{ind} como:

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i B_i$$

Sendo $P(I_i = 1) = q_i$ e $P(I_i = 0) = 1 - q_i$. Logo:

$$E(S_{ind.}) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i B_i)$$

$$var(S_{ind.}) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} var(I_i B_i)$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

No modelo de risco individual, N será definido como:

$$N = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Logo :

$$N \sim Binomial(n, q)$$

$$E(N) = nq$$

$$var(N) = nq(1 - q)$$

EXEMPLO 2: Considere que em uma carteira de seguros exista 10000 apólices, onde cada uma possui uma probabilidade não nula de sinistros de 0,01.

Calcule o número esperado de sinistros em 1 ano e o respectivo desvio padrão.

SOLUÇÃO

$$N \sim Binomial(10000; 0{,}01)$$

$$E(N) = 10000 \times 0{,}01 = 100$$

$$\sigma_N = \sqrt{10000 \times 0{,}01 \times 0{,}99} \approx 9{,}94$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

- A aproximação da distribuição de N :

  - Distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = nq$ ou
  - Normal com parâmetros $E(N) = nq$ e $var(N) = nq(1 - q)$,

para o caso de n suficientemente grande.

EXEMPLO 3: Para os dados do exemplo anterior calcule a probabilidade de que em 10000 apólices verificadas ocorra no máximo 120 sinistros. Calcule utilizando o modelo binomial e suas aproximações pelo modelo de Poisson e Normal.

$$N \sim B(n = 1000, q = 0{,}01)$$

$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \binom{100000}{k} 0{,}01^{k}(0{,}99)^{10000-k} \approx \mathbf{0,9778855}$$

$$N \sim Po(nq = 100)$$

$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \frac{100^{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-100}}{\mathrm{k}!} \approx \mathbf{0,9773307}$$

$$N \sim N(nq = 100, nq(1-q) = 99)$$

$$P(N \leq 120) = \int_{0}^{120} \frac{e^{\frac{(n-100)^2}{198}}}{\sqrt{198\pi}} dn \approx \mathbf{0,9777884}$$

Modelos de risco Individual –A distribuição de X_i

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \sum_{k=0}^{1} P(X_i \leq x_i, I_i = k)$$

Assim:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i | I = 1) P(I_i = 1) + P(X_i \leq x_i | I_i = 0) P(I_i = 0)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i) q_i + (1 - q_i) I_{[0,\infty)}(x_i)$$

em que x_i corresponde a um possível valor de X_ie representa o valor da indenização paga em caso de ocorrência do sinistro

EXEMPLO 4: Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de $10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de $5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Determinar os modelos probabilísticos de $I_i, B_i\ e\ X_i$.

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		I_1	B_1
\$0,00	0,9988		
\$5000,00	0,0002		
\$10000,00	0,001		

$$E(X_1) = 0 \times 0{,}9988 + 5000 \times 0{,}0002 + 10000 \times 0{,}001 = \$11{,}00$$

$$var(X_1) = (0^2 \times 0{,}9988 + 5000^2 \times 0{,}0002 + 10000^2 \times 0{,}001) - 11{,}00^2 = \$^2 104879{,}00$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		B_1
\$0,00	0,9988	0	0,9988	
\$5000,00	0,0002			
\$10000,00	0,001	1	0,0012	

$E(X_1) = \$11,00$

$var(X_1) = \$^2 104879,00$

$\mathrm{E}(I_1) = 0,0012$

$var(I_1) = 0,0012 \times 0,9988 = 0,001199$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}$		$\mathbf{B_1} = \boldsymbol{X_1} \vert \boldsymbol{I_1} = \mathbf{1}$
\$0,00	0,9988	0	0,9988	
\$5000,00	0,0002	1	0,0012	$\frac{0{,}0002}{0{,}0012} = 0{,}167$
\$10000,00	0,001			$\frac{0{,}001}{0{,}0012} = 0{,}833$

$\mathrm{E}(X_1) = \$11{,}00$

$var(X_1) = \$^2 104879{,}00$

$\mathrm{E}(I_1) = 0{,}0012$

$var(I_1) = 0{,}001199$

$$\mathrm{E}(B_1) = (0{,}833\ )\$10000{,}00 + (0{,}167\ )\mathrm{R}\$5000{,}00 = \$9166{,}67$$

$$var(B_1) = [0{,}833(\$10000{,}00)^2 + 0{,}167(\$5000{,}00)^2] - \$9166{,}67^2 = \$^2 3497768$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		B_1
\$0,00	0,9988	0	0,9988	
\$5000,00	0,0002	1	0,0012	$\frac{0{,}0002}{0{,}0012} = 0{,}167$
\$10000,00	0,001			$\frac{0{,}001}{0{,}0012} = 0{,}833$

$\mathrm{E}(X_1) = \$11{,}00$

$var(X_1) = \$^2 104879{,}00$

$\sigma_{X_1} = \$\,323{,}85$

$CV_{X_1} = 29{,}44$

$\mathrm{E}(\mathrm{I}_1) = 0{,}0012$

$var(I_1) = 0{,}001199$

$\sigma_{I_1} = 0{,}034$

$CV_{I_1} = 0{,}9991667$

$\mathrm{E}(B_1) = \$9166{,}67$

$var(B_1) = \$^2 3497768$

$\sigma_{B_1} = \$\,1870{,}232$

$CV_{B_1} = 0{,}2040252$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		I_1		B_1	
\$0,00	0,9988	0	0,9988		
\$5000,00	0,0002	1	0,0012	\$5000,00	$\frac{0{,}0002}{0{,}0012} = 0{,}167$
\$10000,00	0,001			\$10000,00	$\frac{0{,}001}{0{,}0012} = 0{,}833$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x < 0 \\ 0{,}9988\text{ , se } 0 \le x < 5000 \\ 0{,}999, \text{se } 5000 \le x < 10000 \\ 1, \text{se } x \ge 10000. \end{cases}$$

$$F_{B_i}(x) = \begin{cases} 0\text{ ,} & \text{se } x < 5000 \\ 0{,}167, & \text{se } 5000 \le x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \ge 10000 \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i) q_i + (1 - q_i) I_{[0,\infty)}(x_i)$$

$$F_{X_i}(x) = \left(\begin{cases} 0\text{ ,} & se\ x < 5000 \\ 0{,}167, & se\ 5000 \le x < 10000 \\ 1, & se\ x \ge 10000 \end{cases} \right) 0{,}0012 + 0{,}9988 I_{(0,\infty]}(x)$$

EXEMPLO 5: Um seguro agrícola cobre toda a perda de uma plantação em caso de geada e seca prolongada. Considerando que esses eventos ocorrem com 1% de probabilidade, e que o valor das indenizações paga pela seguradora seja modelado pela seguinte função de densidade:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99 & se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i} & se\ x_i > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre a distribuição de X_i, no caso da ocorrência do sinistro (em milhões de reais). Encontre a função de distribuição de X_i, obtenha também o modelo probabilístico de I_i.

SOLUÇÃO

Observe que $X_i = 0$ se $I_i = 0$, o que implica que $P(X_i =$

SOLUÇÃO

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \int_0^{x_i} 0{,}002e^{-0{,}2z}dz$$

$$F_{X_i}(x_i) = 0{,}99 + \left[-\frac{0{,}002}{0{,}2}e^{-0{,}2x_i} - \left(-\frac{0{,}002}{0{,}2}e^{-0{,}2\times 0}\right)\right]$$

$$F_{X_i}(x_i) = 1 - 0{,}01e^{-0{,}2x_i}$$

SOLUÇÃO

A partir das informações dadas no enunciado do exemplo temos que:

$$f_{\mathrm{B}_i}(x_i) = f_{X_i|I_i=1}(x_i|I_i = 1) = \frac{f_{X_i,I_i=1}(x_i, I_i = 1)}{P(I_i = 1)}$$

$$f_{B_i}(x_i) = \frac{0{,}002e^{-0{,}2x_i}}{0{,}01} = 0{,}2e^{-0{,}2x_i}, \qquad x_i > 0$$

Assim

$$F_{\mathrm{B}_i}(x_i) = \int_0^{x_i} 0{,}2e^{-0{,}2z}dz = \left[-\frac{0{,}2}{0{,}2}e^{-0{,}2x_i} - \left(-\frac{0{,}2}{0{,}2}e^{-0{,}2\times 0}\right)\right]$$

$$F_{\mathrm{B}_i}(x_i) = 1 - e^{-0{,}2x_i}$$

$$B_i \sim Exp(0{,}2)$$

SOLUÇÃO

X	I	B
$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99\,, se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i}, se\ x_i > 0 \\ 0\,,\ \ c.c. \end{cases}$	$P(I_i = 0) = 0{,}99$ $P(I_i = 1) = 0{,}01$	$f_{\mathrm{B}_i}(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x_i}, x_i > 0$
$E(X_i) = 0{,}05$ $var(X_i) \approx 0{,}4950$	$E(I_i) = 0{,}01$ $var(I_i) = 0{,}0099$	$E(\mathrm{B}_i) = 5$ $var(\mathrm{B}_i) = 25$

$$F_{X_i}(x_i) = (1 - e^{-0{,}2x_i})0{,}01 + 0{,}99I_{(0,\infty]}(x_i)$$

Modelos de risco Individual – A distribuição de X_i

É fácil perceber que:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 - q_i)\ , se\ x_i = 0 \\ q_i f_{\mathrm{B}_i}(x), se\ x_i > 0 \end{cases}.$$

Pois,

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0{,}99 \quad ; & (1 - 0{,}01) & ;\ se\ x_i = 0 \\ 0{,}002e^{-0{,}2x_i}\ ; & 0{,}01 \times 0{,}2e^{-0{,}2x} & ; se\ x_i > 0 \\ 0 & & c.c. \end{cases}$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.