Matemática atuarial

AULA 26- Reservas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Reserves

- Uma reserva matemática é um fundo formado pelas seguradoras a partir de parte dos prêmios pagos, como garantia de suas operações.

- As reservas podem ser puras ou carregadas, a depender de quais despesas a reserva se relacionam, se são somente as despesas com benefícios ou com todos os gastos de gestão.

Reservas

- No ramo de seguros, geralmente os planos são com longos períodos de cobertura.

  - Por vezes o que se verifica é que no períodos iniciais ocorre um excedente de prêmios recebidos em relação a benefícios pagos.

- Como exemplo considere que uma pessoa de 40 anos de idade deseja fazer um seguro de vida de benefício unitário ao final do ano de morte, em que possa pagar os prêmios anualmente durante toda a cobertura do seguro que é de 5 anos.

Reservas

- Assim ao considerar tabela AT-49 e uma taxa de juros $i = 0{,}05$ tem-se:

- **Opção 1**

$$P_{40^1:\overline{5}|} = \frac{A_{40^1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0{,}002395$$

- **Opção 2**

$$A_{40^1:\overline{1}|} = v^1 q_{40} \approx 0{,}001933$$

$$A_{41^1:\overline{1}|} = v^1 q_{41} \approx 0{,}002114$$

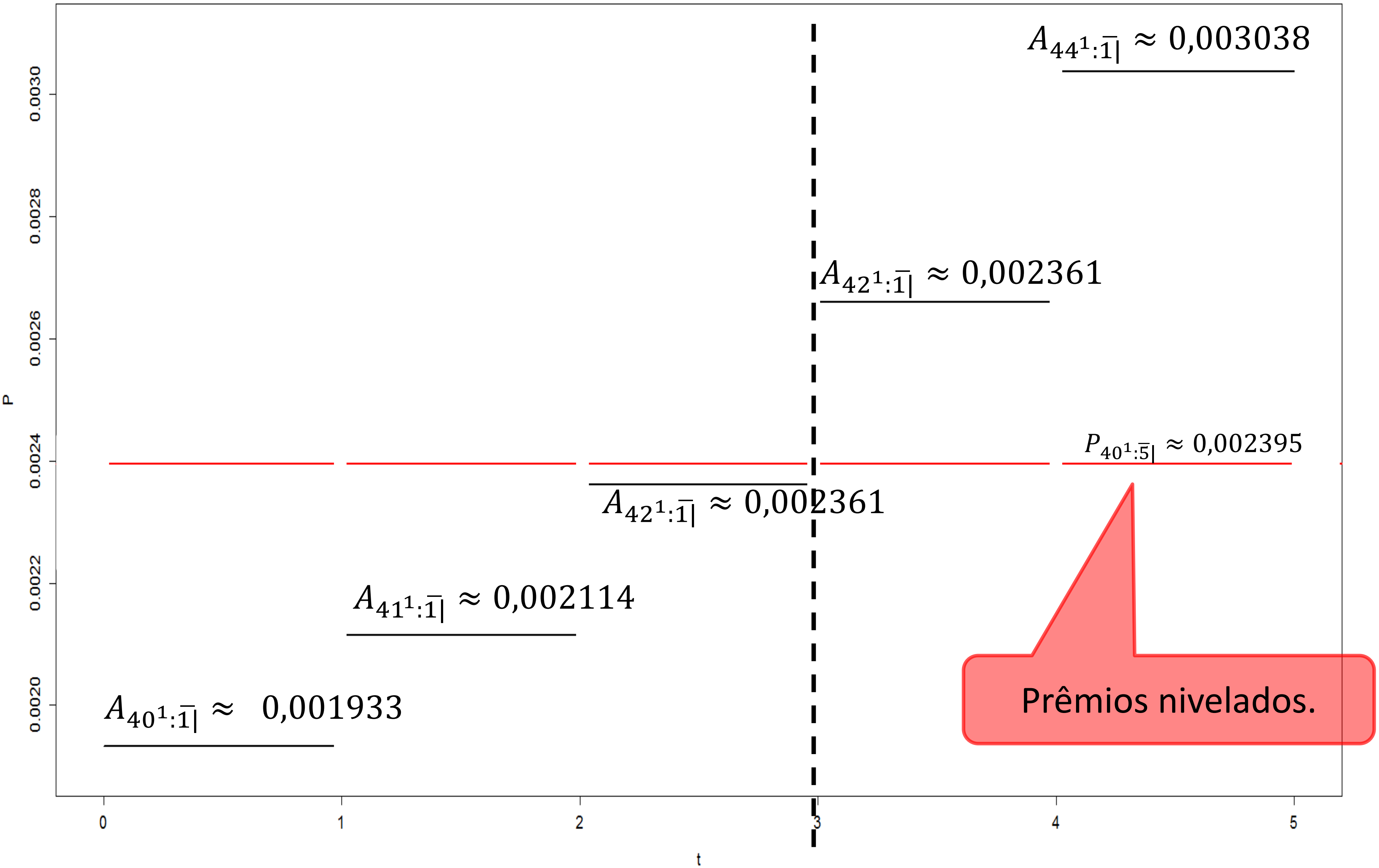
$$A_{42^1:\overline{1}|} = v^1 q_{42} \approx 0{,}002361$$

$$A_{43^1:\overline{1}|} = v^1 q_{43} \approx 0{,}00266$$

$$A_{44^1:\overline{1}|} = v^1 q_{44} \approx 0{,}003038$$

$$5 \times P = 0{,}0119725$$

$$\sum_{i=0}^{4} A_{40+i^1:\overline{1}|} = 0{,}012106$$



Reservas

- Apenas as contribuições que faltam ser feitas ao segurado não são suficientes para pagamento de benefício.

- Então parte desse excedente obtido nos primeiros anos é vital para que se possa garantir o pagamento de benefícios que ainda estão por vir,

  - ....é necessário o uso da Reserva matemática, ou somente reserva.

Reservas

- Reserva num determinado momento, é a diferença entre o valor atuarial das responsabilidades futuras da seguradora e o valor das responsabilidades futuras do segurado, a partir desse momento.

$$Rm_t = Rb_t - Rp_t$$

- Rm_t : Reserva média ao tempo t

- Rb_t : O valor atuarial do compromisso da seguradora no instante t

- Rp_t: O valor atuarial do compromisso com os prêmios, vindos do segurado.

Reservas

$$Rm_t = Rb_t - Rp_t$$

- Para $t = 0$

$$L = Y - Z$$

- Ao considerar o produto atuarial referente a uma pessoa de idade x cujo tempo de vida adicional é T_x.

$$Rm(T_x) = Rb(T_x) - Rp(T_x)$$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- O método de reservas prospetivo consiste ao valor esperado de $Rm(T_x)$, levando em conta os compromissos futuros.

$$_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

P_x: ao prêmio periódico anual $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- Exemplo 1

Suponha que um segurado de 40 anos tenha comprado um seguro de vida inteiro que paga 1 u.m. ao fim do ano de morte. Esse segurado irá pagar por esse seguro um prêmio $P_{40} = 0{,}01737$ enquanto estiver vivo.

Passados 2 anos de vigência do contrato, qual será a reserva ${}_{2}V_{40}$ que a seguradora deverá ter formado?(Considerando tábua de mortalidade AT-49 e i = 3% e o método prospectivo)

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- Exemplo 1

A Reserva pelo método prospectivo

$$_{2}V_{40} = A_{42} - P_{40}\ddot{a}_{42}$$

$$_{2}V_{40} = 0{,}393717 - (0{,}01737)20{,}8157 \approx 0{,}032148$$

- Lista.

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida inteiro que paga 1 $u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser bem modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano.

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - P\ddot{a}_{x+m} $$

$$ A_x = \frac{M_x}{D_x} \qquad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} $$

a) Calcule o prêmio puro nivelado para esse seguro.

$$ P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} $$

b) Passados 5 anos de vigência do contrato, qual será a reserva que a seguradora deverá ter formado.

$$ {}_5V_{25} = A_{30} - P_{25}\ddot{a}_{30} $$

c) Passados 10 anos de vigência do contrato, qual será a reserva que a seguradora deverá ter formado.

$$ {}_{10}V_{25} = A_{35} - P_{25}\ddot{a}_{35} $$

d) Passados 15 anos de vigência do contrato, qual será a reserva que a seguradora deverá ter formado.

$$ {}_{15}V_{25} = A_{40} - P_{25}\ddot{a}_{40} $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$
{}_tV_x = A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t}
$$

$$
{}_tV_{x^1:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t^1:\overline{n-t}|} - P_{x^1:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 0, & t = n \end{cases}
$$

$$
{}_tV_{x:\overline{n}|^1} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|^1} - P_{x:\overline{n}|^1}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases}
$$

- Exemplo 2

Seja uma pessoa de 40 anos tenha comprado um seguro de vida temporário por 5 anos. Esse segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo (sem carregamentos).

Passados 2 anos de vigência do contrato, qual será a reserva ${}_2V_{40^1:\overline{5}|}$ que a seguradora deverá ter formado?(Considerando tábua de mortalidade AT-49 e i = 3% e o método prospectivo)

- Exemplo 2

$$ {}_{2}V_{40^1:\overline{5}|} = A_{42^1:\overline{3}|} - P_{40^1:\overline{5}|}\, \ddot{a}_{42:\overline{3}|} $$

$$ {}_{2}V_{40^1:\overline{5}|} = \frac{M_{42} - M_{45}}{D_{42}} - \left(\frac{\frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}}{\frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}} \right) \left(\frac{N_{42} - N_{45}}{D_{42}} \right) $$

$$ {}_{2}V_{40^1:\overline{5}|} = 0{,}007944 - (0{,}002452\,)(2{,}906092) $$

$$ {}_{2}V_{40^1:\overline{5}|} = 0{,}0008182624 $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

...

$$ {}_tV_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\bar{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases} $$

$$ {}_t^kV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_kP_x\ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|}, & t < k \\ A_{x+t}, & t \geq k \end{cases} $$

Exemplo 3

Passados 2 anos de vigência de um contrato de seguros, feito por $x = 40$ com cobertura de 5 anos, qual deverá ser o valor da reserva formada? Considere AT-49, $b = 1$ e $i = 3\%$, e que a seguradora cobre uma taxa de $0{,}005$ ao ano referente a gastos de gestão

$$ {}_{2}V^{\gamma}_{40^1:\overline{5}|} = \Pi^{\gamma} - P^{\gamma}\ddot{a}_{42:\overline{3}|} $$

$$ {}_{2}V^{\gamma}_{40^1:\overline{5}|} \approx \left(A_{42^1:\overline{3}|} + 0{,}005\ddot{a}_{42:\overline{3}|}\ \right) - \left(P_{40^1:\overline{5}|} + 0{,}005\right)\ddot{a}_{42:\overline{3}|} $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo) T_x contínuo

- A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$ {}_m\bar{V}_x = \bar{A}_{x+m} - \bar{P}_x \bar{a}_{x+m} $$

$$ {}_m\bar{V}_{x^1:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m^1:\overline{n-m}|} - \bar{P}_n \bar{a}_{x+m:\overline{n-m}|}, & m < n \\ 0, & m = n \end{cases} $$

$$ {}_m\bar{V}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|} - \bar{P}_{x:\overline{n}|} \bar{a}_{x+m:\overline{n-m}|}, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases} $$

Exemplo Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{120} I_{(0,120]}(t)$$

Suponha que um segurado de 40 anos tenha comprado um seguro de vida inteiro que paga 1 u.m. no momento da morte. Esse segurado irá pagar por esse seguro prêmios nivelados enquanto estiver vivo.

Passados 2 anos de vigência do contrato, qual será a reserva ${}_2\bar{V}_{40}$ que a seguradora deverá ter formado? (Considerando $\delta = 0{,}06$).

Solução:

$$ {}_2\bar{V}_{40} = \bar{A}_{42} - \bar{P}_{40}\,\bar{a}_{42} $$

$$ {}_tp_{42} = \frac{P(T>t+42)}{P(T>42)} = \frac{\frac{120-42-t}{120}}{\frac{120-42}{120}} = \frac{78-t}{78} \qquad {}_tq_{42} = 1 - \frac{78-t}{78} = \frac{t}{78} $$

Considerando que $\frac{\partial F_{T_x}(t)}{\partial t} = \boldsymbol{f_{T_x}(t)}$, assim:

$$ \frac{\partial \boldsymbol{F_{T_{42}}(t)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{78}\right) = \frac{1}{78} = \boldsymbol{f_{T_{42}}(t)} $$

Logo

$$ \mu(42+t) = \frac{\boldsymbol{f_{T_{42}}(t)}}{\boldsymbol{1 - F_{T_{42}}(t)}} = \frac{\frac{1}{78}}{\frac{78-t}{78}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{78-t}} $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}\mu(42+t)dt \qquad \bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}dt $$

Solução:

$$ {}_2\bar{V}_{40} = \bar{A}_{42} - \bar{P}_{40}\bar{a}_{42} $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}\mu(42+t)dt \qquad \bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\ {}_tp_{42}dt $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\left(\frac{1}{78}\right)dt = 0,211693 $$

$$ \bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t}\left(\frac{78-t}{78}\right)dt = \int_0^{78} \frac{(1-e^{-0,06t})}{0,06}\left(\frac{1}{78}\right)dt = 13,1385 $$

$$ {}_2\bar{V}_{40} = 0,211693 - \bar{P}_{40}13,1385 $$

Solução:

$${}_2\bar{V}_{40} = 0{,}213516 - \bar{P}_{40}\ 13{,}1148$$

$$\bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\left(\frac{80-t}{80}\right)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{80-t}}\,dt$$

$$\bar{a}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\left(\frac{80-t}{80}\right)dt$$

$$\boldsymbol{\bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\,\frac{1}{80}\,dt = 0{,}206619}$$

$$\boldsymbol{\bar{a}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\left(\frac{80-t}{80}\right)dt = \int_0^{80} \frac{(1-e^{-0{,}06t})}{0{,}06}\left(\frac{1}{80}\right)dt = 13{,}223}$$

$${}_2\bar{V}_{40} = 0{,}211693 - \left(\frac{0{,}206619}{13{,}223}\right)13{,}1385 = 0{,}006394374$$

Solução:

$$ {}_2\bar{V}_{40} = 0{,}211693 - \left(\frac{0{,}206619}{13{,}223}\right)13{,}1385 = 0{,}006394374 $$

$$ \bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0{,}06t}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{80}}\,dt = 0{,}206619 $$

$$ \bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0{,}06t}\left(\frac{1}{78}\right)dt = 0{,}211693 $$

$$ \boldsymbol{\bar{A}_x + \delta\bar{a}_x = 1} $$

$$ \bar{a}_{40} = \frac{1-0{,}206619}{0{,}06} = 13{,}22302 $$

$$ \bar{a}_{42} = \frac{1-0{,}2011693}{0{,}06} = 12{,}3185 $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

- A reserva pelo método **retrospectivo** é calculada a partir dos compromissos passados da seguradora.

- Para exemplificar, considere

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{A_{x^1:\overline{t|}} + {}_{t|}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + {}_{t|}\ddot{a}_x}$$

$$P_x = \frac{A_{x^1:\overline{t|}} + v^t \; {}_tp_x A_{x+t}}{\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + v^t \; {}_tp_x \ddot{a}_{x+t}}$$

$$0 = \left(A_{x^1:\overline{t|}} + v^t \; {}_tp_x A_{x+t}\right) - P_x\left(\ddot{a}_{x:\overline{t|}} + v^t \; {}_tp_x \ddot{a}_{x+t}\right)$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$0 = A_{x^1:\overline{t}|} - P_x \ddot{a}_{x:\overline{t}|} + v^t \ {}_tp_x(A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t})$$

Como ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$, então

$$0 = A_{x^1:\overline{t}|} - P_x \ddot{a}_{x:\overline{t}|} + v^t \ {}_tp_x(\ {}_tV_x),$$

Logo

$${}_tV_x = \frac{P_x \ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A_{x^1:\overline{t}|}}{A_{x:\overline{t}|^1}}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

- Exemplo 4

Suponha que um segurado de 40 anos tenha comprado um seguro de vida inteiro que paga 1 u.m. ao fim do ano de morte. Esse segurado irá pagar por esse seguro um prêmio $P_{40} = 0{,}01737$ enquanto estiver vivo.

Passados 2 anos de vigência do contrato, qual será a reserva ${}_{2}V_{40}$ que a seguradora deverá ter formado?(Considerando tábua de mortalidade AT-49 e i = 0,03% e o método retrospectivo.)

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

- Exemplo 4

A reserva pelo método retrospectivo

$$ {}_2V_{40} = \frac{P_{40}\ddot{a}_{40:\overline{2}|} - A_{40^1:\overline{2}|}}{v^2\ {}_2p_{40}} = \frac{0{,}01737\ (1{,}968904) - 0{,}004058}{0{,}9708^2\ (0{,}9957545)} \approx 0{,}032148 $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$ {}_tV_x = \frac{P_x \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}} $$

$$ {}_tV_{x^1:\overline{n|}} = \frac{P_{x^1:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}} $$

$$ {}_tV_{x:\overline{n|}} = \frac{P_{x:\overline{n|}} \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}} $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$ {}_tV_x = \frac{P\ddot{a}_{x:t} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\bar{t}|^1}} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{A_{x:\bar{t}|^1}} - \frac{A_{x^1:t}}{A_{x:\bar{t}|^1}} $$

P é o prêmio periódico de uma modalidade qualquer.

Considerando $t = n$.

$$ {}_nV_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^1}} - \frac{A_{x^1:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^1}} $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$ {}_{n}V_{x} = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^{1}}} - \frac{A_{x^{1}:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^{1}}} $$

Em que $\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{v^{n}\ {}_{n}p_{x}}$ é conhecida como anuidades “tontineira” (tontine).

Em que $\frac{A_{x^{1}:\overline{n|}}}{v^{n}\ {}_{n}p_{x}}$ é o custo acumulado do seguro.

Reservas

- A anuidades “tontineira” foi concebida para pagar benefícios a sobreviventes da seguinte forma:

- Um grupo de participantes se une e faz pagamentos regulares ao fundo. Os participantes que morrem ao longo do período deixam de contribuir, porém o benefício é pago somente às pessoas que sobreviveram durante todo o período de vigência desta anuidade.

$$_{/n}\ddot{S}_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{A_{x:\bar{n}|^1}}$$

Reservas

- A anuidade tontineira é o valor acumulado dos prêmios sujeitos a juros e sobrevivência.

- Pode-se pensar que essa anuidade é o valor pago ao fim de m anos a todos que sobreviverem.

- Este tipo de seguro pode ser um incentivo ao homicídio de pessoas próximo ao período final de contribuição e, por isso, não pode ser comercializado.