Matemática atuarial

Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Revisão de probabilidade

- A ciência objetiva a coleta de informações na natureza e a formulação de modelos (...) que expliquem parte dos fenômenos ou permitam a sua previsão.

- Método cientifico,
  - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.

- Modelo e realidade sejam por vezes erroneamente confundidos é evidente.

Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre estará envolto por um certo grau de incerteza.

- Modelos determinísticos
  - Condições bastante controladas,
  - Variações desprezadas

- Modelos probabilísticos
  - Controle total e inviabilizado
  - Variações não podem ser ignoradas.

Revisão de probabilidade

- **Fenômeno aleatório** é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
  - Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico.**

- **Espaço amostral** (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.

- **Fenômeno aleatório** é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
  - Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico.**

- **Espaço amostral** (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.

Revisão de probabilidade

- **Espaço amostral** $(\boldsymbol{\Omega})$ é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.

  - **Definição** Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento. Ω é o evento certo, $\emptyset$ o evento impossível. Se $\omega \subset \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

Revisão de probabilidade

- **EXEMPLO 1:**

Defina os seguintes espaços amostrais.

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{ \quad \}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{ \quad \}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você)

$$\Omega = \{ \quad \}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*;

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1{,}5 \leq x \leq 2\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você);

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\boldsymbol{A = \{1, 3, 5\}}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*;

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$
$$\boldsymbol{A = \{1,6 \leq x \leq 1,7\}}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você);

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$
$$\boldsymbol{A = \{0 \leq t \leq 30\}}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade será chamado evento aleatório.

Revisão de probabilidade

- Conceito de Probabilidade
  - Teoria clássica
    - Dado o espaço de resultados Ω, constituído por um número finito de n elementos <u>igualmente prováveis</u>, todos eles igualmente possíveis, define-se a probabilidade de acontecimento de A, e representa-se por $P(A)$, como sendo a ração de resultados favoráveis A e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{n°de\ resultados\ de\ A}{n°\ de\ resultados\ possíveis}$$

  - Teoria Frequentista
    - Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento A é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

    - Em que n_A é o número de ensaios em que o evento A foi observado, e n o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com quer se realiza A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.
  - Probabilidade subjetiva e lógica
    - Define-se como uma medida do grau de confiança de uma pessoa em relação a uma proposição. Ela é função da quantidade de informação disponível pela pessoa, e possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Revisão de probabilidade

- Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto $P(\ )$ que associa a subconjuntos A de Ω um numero real $P(A)$ que satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

I) Para todo $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$;

II) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

III) Se$A \subseteq \Omega$, $\mathrm{B} \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

I) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
  - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.

- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de Ω um número real.

- EXEMPLO 2:

Sabe-se que em uma fabrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos $\left(D \to P(D) = \frac{1}{4}\right)$

Itens perfeitos $\left(Pe \to P(Pe) = \frac{3}{4}\right)$

Revisão de probabilidade

Para uma amostra $n = 2$ peças retiradas é possível construir uma tabela onde X é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e $P(X)$ será a probabilidade do resultado.

X	0	1	2
	(Pe, Pe)	$(D, Pe)(Pe, D)$	(D, D)
$P(X)$	$\frac{3}{4}\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Revisão de probabilidade

- Variáveis Aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

- $P(X = x)$ Função de probabilidade (fp)
- $P(X = x_i) \geq 0$ para todo i.
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

- Variáveis aleatórias contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes aos $\mathbb{R}$, assim como para variáveis continuas em geral....

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

- Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

Em geral ela é representada por $F(x)$, ou $\Phi(x)$.

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x_k} f_X(z)dz \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) \end{cases}$$

Revisão de probabilidade

- **EXEMPLO 3:**

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X=x)=\begin{cases}0{,}6 & se\ x=0\\ 0{,}4 & se\ x=1\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

c)

$$P(X=x)=\begin{cases}0{,}7 & se\ x=0\\ 0{,}5 & se\ x=1\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

d)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x^2+x) & se\ 0\le x\le 1\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

e)

$$f(x)=2e^{-2x}, \qquad se\ x\ge 0$$

f)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}x+\frac{1}{10}, & se\ 0\le x\le 2\\ -\frac{3}{40}x+\frac{9}{20}, & se\ 2<x\le 6\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) \; se \; 0 \le x \le 1 \\ 0 \qquad\qquad c.c. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{6}{5}\left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad se \; x \ge 0$$

$$\int_0^\infty 2e^{-2x}dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left(-\frac{1}{e^{2(0)}}\right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, se \; 0 \le x \le 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, se \; 2 < x \le 6 \\ 0, \qquad c.c. \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\boldsymbol{dx} + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}\boldsymbol{dx}$$

$$\left.\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10}\right|_0^2 + \left.\left(-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20}\right)\right|_2^6$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Revisão de probabilidade

Esperança de variáveis aleatórias

- ...a motivação histórica: uma forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.

- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.

- ...serve como parâmetro para vários modelos probabilísticos.

Revisão de probabilidade

Esperança de variáveis aleatórias

- A esperança de uma variável aleatória X é dada por:

- Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \mu_{\mathrm{X}}$$

- Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_X$$

Esperança de uma função de variáveis aleatórias

- Seja X uma variável aleatória e $g(.)$ uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função $g(X)$ denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_j g(x_j)P(X = x_j), & X\ discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx\,, & X\ contínuo \end{cases}$$

Variáveis aleatórias

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}6 & se\ x = 0 \\ 0{,}4 & se\ x = 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad se\ x \geq 0$$

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$$E(X) = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}4 = 3$$

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} \quad 0{,}6 \quad se\ x = 0 \\ \quad 0{,}4 \quad se\ x = 1 \\ 0, \quad caso\ contrário \end{cases}$$

$$E(X) = 0 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}4 = 0{,}4$$

c)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad se\ x \geq 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = uv - \int vdu$$

$$u = 2x \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \qquad\qquad dv = e^{-2x}dx \quad \rightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$E(X) = 2x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x\rightarrow\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-2x}}{2}2dx = \left(-xe^{-2x}\Big|_{x=0}^{x\rightarrow\infty}\right) - \left(\frac{e^{-2x}}{2}\Bigg|_{x=0}^{x\rightarrow\infty}\right)$$

$$E(X) = \left(-\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x}{e^{2x}} + \frac{0}{1}\right) - \left(\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{1}{2e^{2x}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Exemplo 4

Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma :

T	0	1	2	3
$P(T)$	$0{,}67514$	0,195183	0,1219955	0,0076815

a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?

b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1{,}03}\right)$.

Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma :

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução

a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?

$$E(T) = \sum tP(t) = 0,4622$$

b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

$$E[g(T)] = E(v^{T+1}) = \sum v^{t+1}P(t) = 0,9866602$$

Esperança de variáveis aleatórias

Seja L um valor limite para dentro do domínio de X, e seja Y uma variável aleatória “ Valor de X sujeito ao limite L. Então:

$$Y = \begin{cases} X, & X < L \\ L, & X \geq L \end{cases}$$

Logo, para o caso de X se contínuo tem-se que:

$$E(Y) = E(X; L) = \int_{-\infty}^{L} x f_X(x) dx + \int_{L}^{\infty} L f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{L} x f_X(x) dx + L\, S_X(L)$$

E no caso de X se discreto, tem-se:

$$E(Y) = E(X; L) = \sum_{i=0}^{x_i < L} x_i P_X(x_i) + \sum_{x_i \geq L}^{\infty} L P_X(x_i) = \sum_{i=0}^{x_i = L} x_i P_X(x_i) + L\, S_X(L)$$

Exemplo 5

Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma :

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,6751	0,195183	0,1219955	0,0076815

a) Determinado produto oferecido por uma seguradora tem um prêmio calculado a partir do valor esperado da variável aleatória $g(T) = \frac{1-v^T}{1-v}$, em que (nesse caso) $v = \frac{1}{1{,}03}$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no valor esperado de $g(T+1)$, sujeito a um limite técnico $g(2)$. Calcule o prêmio sujeito a esse limite.

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

Seja Y, tal que:

$$Y = \begin{cases} g(T+1), & g(T+1) < g(2) \\ g(2), & g(T+1) \geq g(2) \end{cases}$$

Equivalente a

$$Y = \begin{cases} g(T+1), & T < 2 \\ g(2), & T \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E[g(T+1); g(2)]$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^{1} g(T+1)\,P(T) + g(2)\sum_{t=2}^{3} P(T)$$

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^{1} g(T+1)\, P(T) + g(2) \sum_{t=2}^{3} P(T)$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^{1} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} P(T) + \frac{1 - v^2}{1 - v} \sum_{t=2}^{3} P(T) = 1{,}315398$$