Matemática atuarial

Aula 2-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Universidade Federal de Alfenas

JUROS

- Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades constatou-se que bens e serviços poderiam ser consumidos ou guardados para o consumo futuro.

- Com o avanço cientifico diversas metodologias surgiram como auxílio a modelagem do processo de quantificação financeira envolvendo dinheiro ao longo do tempo.

- Valores monetários em “estoque” podem aumentar gradativamente conforme a utilidade temporal.

JUROS

- As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira:

- Capital $(\boldsymbol{P})$**:** capital inicial que será aplicado através de alguma operação financeira...

- Unidade de tempo $(\boldsymbol{n})$: é a unidade temporal geralmente expressa em anos.

- Taxa de juros $(\boldsymbol{i})$: é a taxa de incremento ao capital por unidade de tempo.

- Juros $(\boldsymbol{J})$: rendimento sobre o principal.

JUROS

- A existência de Juros decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

  - **Inflação:** A diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo...

  - **Riscos:** Eventos que podem causar desequilíbrio ao patrimônio.

  - **Outros:** Aquisição ou oferta de empréstimo a terceiros.

JUROS SIMPLES

Quando o juro incide no decorrer do tempo sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples.

JUROS SIMPLES

$$J = P \times i \times n$$

Juros produzidos depois de n períodos, do capital P Aplicado a uma taxa de juros i.

MONTANTE(M)

$$M = P(1 + i \times n)$$

Capital inicial adicionado aos juros produzidos no período.

JUROS SIMPLES

Um depósito de \$1000 é remunerado a uma taxa de 0,5% de juros ao mês. A sequência a seguir represente os saldos mensais considerando o cálculo do juro simples.

n	Juros Simples por período (J)	Montante (M)
1	$1000(0{,}005) = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 1) = 1005$
2	$1000(2 \times 0{,}005) = 10$	$1000(1 + 0{,}005 \times 2) = 1010$
3	$1000(3 \times 0{,}005) = 15$	$1000(1 + 0{,}005 \times 3) = 1015$
4	$1000(4 \times 0{,}005) = 20$	$1000(1 + 0{,}005 \times 4) = 1020$

EXEMPLO 1: Calcule o montante ao final de dez anos de um capital \$10000,00 aplicada à taxa de juros 18% ao semestre.

EXEMPLO 1: Calcule o montante ao final de dez anos de um capital \$10000,00 aplicada à taxa de juros 18% ao semestre.

Resp.:

Em 10 anos existem 20 semestres, logo:

$$M = 10000(1 + 0{,}18 \times 20) = R\$46000{,}00$$

O juro produzido nesse período foi de:

$$J = 10000(0{,}18 \times 20) = R\$36000{,}00$$

JUROS COMPOSTOS

- Quando a taxa de juros incide sobre o montante obtido do rendimento do período anterior, tem-se um sistema de **capitalização composta** também chamado "**juros sobre juros**".

  - Cada montante formado é constituído do capital inicial e dos juros sobre juros formados em período anteriores.

EXEMPLO 2: Faz-se um depósito de $1000 em uma conta que paga 0,5% de juros ao mês. Considerando o cálculo dos juros compostos, determine uma sequência que represente os saldos mensais.

1° mês→ $M_1 = 1000 + 1000 \times \; 0{,}005 = \mathbf{1000(1{,}005)}$

2° mês→ $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_1 0{,}005 = M_1(1{,}005) = \mathbf{1000(1{,}005)}(1{,}005) = 1000(1{,}005)^2$

3° mês→ $\mathrm{M}_3 = M_2 + \mathrm{M}_2 0{,}005 = M_2(1{,}005) = [1000(1{,}005)^2](1{,}005) = 1000(1{,}005)^3$

4° mês→ $\mathrm{M}_4 = M_3 + \mathrm{M}_3 0{,}005 = M_3(1{,}005) = [1000(1{,}005)^3](1{,}005) = 1000(1{,}005)^4$

...

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1000(1{,}005)}^{\boldsymbol{n}}$$

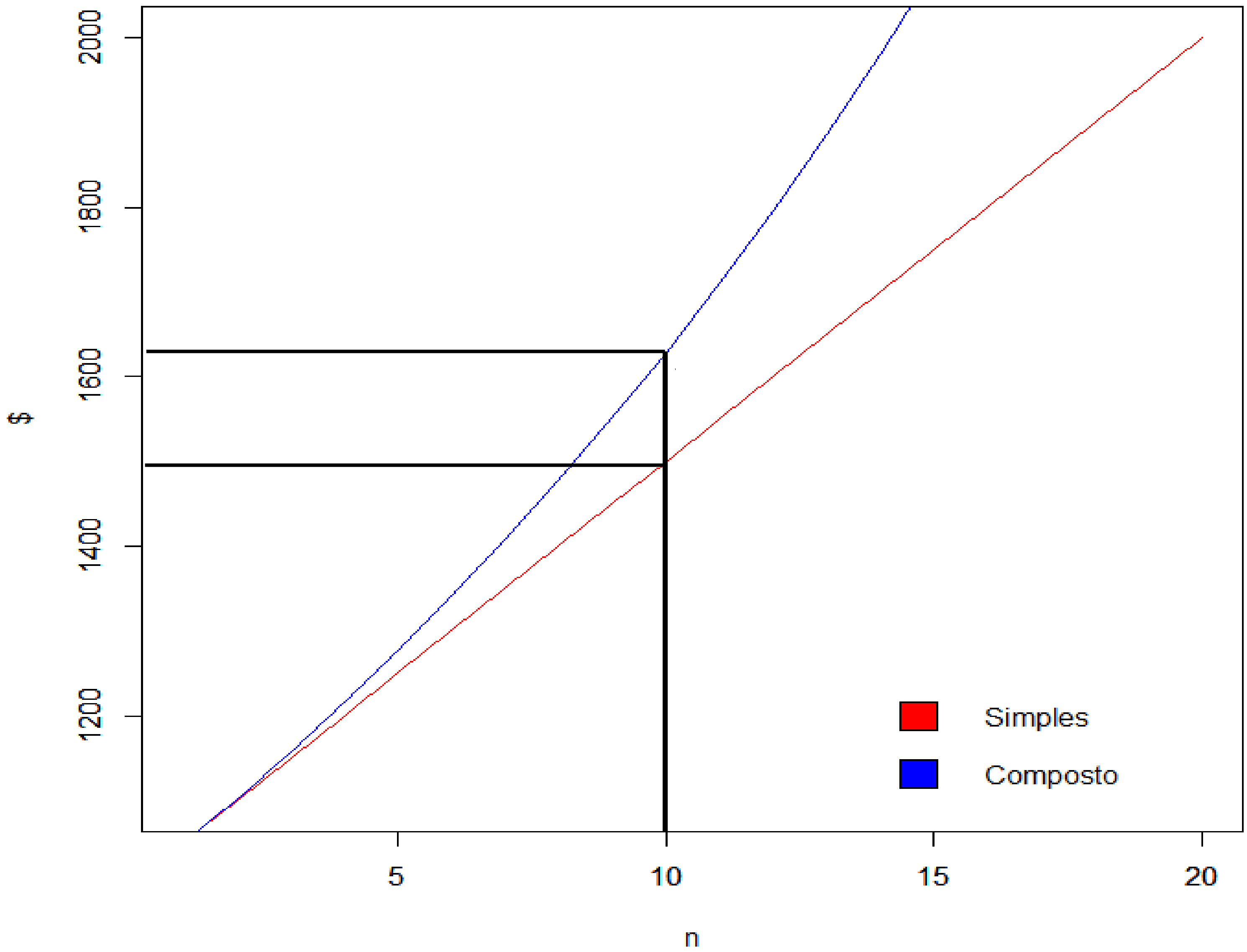
$$\boldsymbol{M = P(1 + i)^n}$$

EXEMPLO 3: Determine uma sequência que represente os saldos mensais pela capitalização simples e composta. $P = \$1000{,}00 \quad i = 0{,}5\%$ de juros ao mês.

n	Juros Simples (J)	Montante (M)	Juros compostos (J)	Montante (M)
1	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 1) = 1005$	$1000(0{,}005) = 5$	$1000(1 + 0{,}005)^1 = 1005$
2	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 2) = 1010$	$1005(0{,}005) = 5{,}025$	$1000(1 + 0{,}005)^2 = 1010{,}025$
3	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 3) = 1015$	$1010{,}025(0{,}005) = 5{,}0501$	$1000(1 + 0{,}005)^3 = 1015{,}075$
4	$1000 \times 0{,}005 = 5$	$1000(1 + 0{,}005 \times 4) = 1020$	$1015{,}075(0{,}005) = 5{,}0753$	$1000(1 + 0{,}005)^4 = 1020{,}151$
	$J = Pi$	$M_n = P(1 + in)$	$J_n = P[(1 + i)^{n-1}]$	$M_n = P(1 + i)^n$

Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores utilizam os juros compostos.

Montantes obtidos pelo sistema de juros simples e compostos, para um capital inicial de $\$1000,00$ a $0,5\%$ ao mês.



EXEMPLO 4: João teve seu carro roubado. Ao comunicar o sinistro para a seguradora, recebeu a seguinte proposta como indenização: $20000,00 agora ou $21211,92 daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1+i)^n$$

$$M = 21211{,}91 \quad P = 20000 \quad n = 60dias \rightarrow 2mês$$

EXEMPLO 4: João teve seu carro roubado. Ao comunicar o sinistro para a seguradora, recebeu a seguinte proposta como indenização: \$20000,00 agora ou \$21211,92 daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1+i)^n$$

$$M = 21211{,}91 \quad P = 20000 \quad n = 60dias \rightarrow 2mês$$

$$21211{,}92 = 20000(1+i)^2$$

$$1{,}0606 = (1+i)^2$$

$$(1{,}0606)^{\frac{1}{2}} = 1+i$$

$$1{,}03 \approx 1+i$$

$$i \approx 0{,}03 \rightarrow 3\% \text{ ao mês}$$

JUROS COMPOSTOS

➢**Taxas proporcionais**

São taxas que se relacionam linearmente **(juros simples).**

Exemplo 5:

Fulano emprestou $2000,00 a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0{,}04 \times 12) \ = \$2960{,}00$$

Essa taxa é proporcional a $(0{,}04 \times 2)$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000(1 + 0{,}08 \times 6) = \$2960{,}00$$

➢**Taxas equivalente**

As taxas não se relacionam de forma linear **(juros compostos).**

Exemplo 6a:

Fulano emprestou $2000,00 a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0{,}04)^{12} = \$3202{,}06$$

Diferente de:

$$M = 2000(1 + 0{,}08)^{6} = \$3173{,}74$$

JUROS COMPOSTOS

➢ Taxas equivalente

As taxas equivalente são chamadas assim pois apesar de serem diferentes, se aplicadas a um mesmo capital, produzem e uma mesma data o mesmo montante.

Exemplo 6b:

Fulano emprestou $\$2000{,}00$ a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$(1+0{,}04)^{12} = (1+i)^{6}$$

$$i = 0{,}0816$$

Essa taxa é equivale a $0{,}0816$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000(1+0{,}0816)^{6} = \$3202{,}06$$

RELAÇÕES EQUIVALENTES

- *Taxas de Juros podem ser representadas em diferentes unidades de tempo (ao ano, ao mês, etc.) e são ditas equivalentes se produzem o mesmo efeito quando aplicadas em um mesmo período de tempo.*

$$\boldsymbol{(1+i_d)^{360} = (1+i_m)^{12} = (1+i_b)^{6} = (1+i_t)^{4} = \left(1+i_q\right)^{3} = (1+i_s)^{2} = (1+i_a)}$$

i_d, i_m, i_b, i_t, i_q, i_s e i_a correspondem as taxas de juros diária, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual, respectivamente.

TAXAS DE JUROS

- Taxa nominal

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

- *340% ao semestre com capitalização mensal,* $340\% a.s./mês$.

- *1150% ao ano com capitalização mensal,* $1150\% a.a./mês$.

- Taxa Efetiva

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquela a que a taxa está referida.

- *140% ao mês com capitalização mensal.*
- *250% ao semestre com capitalização semestral.*

EXEMPLO 7: Uma empresa contrai um empréstimo de \$100000,00 em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, com capitalização mensal. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

EXEMPLO 7: Uma empresa contrai um empréstimo de $100 000,00 em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, com capitalização mensal. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

A taxa nominal corresponde a 36% $a.a.$

Pois:

$$i = \frac{36}{12} = 3\% \text{ ao mês } (\text{ nominal})$$

A capitalização mensal indica que os 36% corresponde a soma das taxas mensais ao longo de um ano.

Assim:

$$\mathrm{M} = 100000(1 + 0{,}03)^{12} \approx \$142576{,}1$$

$$(1 + 0{,}03)^{12} = (1 + i)$$

$$i \approx 42{,}576\% a.a.$$

A taxa efetiva será de aproximadamente 42,576% $a.a.$

Logo

$$M = 100000(1 + 0{,}42576) \approx \$142576{,}00$$

TAXAS DE JUROS

- Dada a taxa nominal, se quiser saber a taxa efetiva basta descapitalizar a juros simples (divisão) e capitalizar a juros compostos. Assim

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

- Em que i_n é a taxa nominal, com n períodos de conversão.
  - A taxa nominal i_n é o resultado da soma da taxa verificada em n períodos.

- i é a taxa efetiva cujo período de formação corresponde ao período ao qual a taxa nominal foi apresentada.

  Exemplos:
  - Se i_n for uma taxa semestral/mês então, i é a taxa efetiva semestral.
  - *Se i_n for uma taxa anual/dias então, i é a taxa efetiva anual*

EXEMPLO 8: Considere as taxas i = 340% ao semestre e 300% ao ano, qual será as taxas de juros efetivas ao considerar que foram capitalizadas mensalmente ?

$$i = \left(1 + \frac{340}{6}\right)^6 - 1 \approx 1378\% \text{ a.s}$$

$$i = \left(1 + \frac{300}{12}\right)^{12} - 1 \approx 1355\% \text{ a.a}$$

Perceba

TAXAS MENSAIS

$$i = \frac{340}{6} \approx 56{,}67\% \qquad i = \frac{300}{12} = 25\%$$

TAXAS EFETIVAS

$$(1 + i_s)^2 = (1 + i_m)^{12} \quad \rightarrow i_s = (1 + i_m)^6 - 1$$

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \quad \rightarrow i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$$

EXEMPLO 9: Admitindo-se uma de juros nominal de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitação: anual, semestral, quadrimestral, bimestral, mensal e diário.

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

EXEMPLO 9:

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado anualmente, a taxa acaba é a própria taxa efetiva.

$$i = (1 + 0{,}72\ )^1 - 1 = 0{,}72$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado semestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos dois semestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}8496$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado quadrimestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos 3 quadrimestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{3}\right)^3 - 1 \approx 0{,}906624$$

...

EXEMPLO 9 : Admitindo-se uma taxa de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitação: diário, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual.

$$i = (1 + 0{,}72\,)^1 - 1 = 0{,}72$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}8496$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{3}\right)^3 - 1 \approx 0{,}906624$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{4}\right)^4 - 1 \approx 0{,}9387778$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{6}\right)^6 - 1 \approx 0{,}9738227$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{12}\right)^{12} - 1 \approx 1{,}012196$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}72}{360}\right)^{360} - 1 \approx 1{,}05295$$

OBS.:

Ao se afirmar que a taxa de juros é de 72% ao ano , capitalizado diariamente. Isso equivale em dizer que esse valor foi obtido pela soma das taxa de juros ao longo de 360 dias. Assim a taxa diária é $\frac{0{,}72}{360} = \mathbf{0{,}002}$ ***e o equivalente a esse valor em um ano corresponde a :***

$$\mathbf{1 + i = (1 + 0{,}002)^{360}}$$

$$\mathbf{i \approx 1{,}05295}$$

TAXAS DE JUROS

- Taxa instantânea de juros

  - Se o número de períodos dos quais se compõem a taxa nominal crescem muito, dizemos que essa taxa é uma soma contínua, também chamada de taxa de juros instantânea.

  - De acordo com Hull[1], *“ taxas de juros capitalizados continuamente são bastante utilizadas quando as opções e outros derivativos complexos estão sendo precificados. E para fins práticos a capitalização contínua pode ser considerada equivalente à diária”*

[1] Hulll, John. Introdução aos mercados futuros e de opões. 2. ed. São Paulo: Bolsa Mercantil e de Futuros, Cultura editores Associados, p. 52-54,1996

TAXAS DE JUROS

- Taxa instantânea de juros e taxa de juros efetiva

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} i = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - \lim_{n\to\infty} 1$$

$$i = e^{i_n} - 1$$

$$ke^r = \lim_{n\to\infty}\left(k\left(1 + \frac{r}{n}\right)\right)^n$$

TAXAS DE JUROS

- Para indicar que a taxa nominal teve capitalização contínua, alguns autores optam por representar i_n por δ, também chamada de taxa de juros instantânea. Logo

$$i = e^{\delta} - 1$$

ou

$$\delta = ln(1 + i)$$

δ: Taxa de juros instantânea: *os juros são formados continuamente, por meio de uma capitalização infinitamente frequente.*

i: A taxa de juros efetiva com o período de formação de capital igual ao apresentada por δ: *os juros são formados somente ao final de cada período de capitalização.*

EXEMPLO 10: Seja a taxa de juros nominal de 6% ao ano. Dado um capital de $1000,00 qual o valor do montando ao fim de 3 anos, considerando que.

a) A taxa foi capitalizada mensalmente (6% a. a./ m.)

b) A taxa foi capitalizada diariamente (6% a. a./ d.)

c) A taxa foi capitalizada continuamente $(\delta = 6\%\ a.a.)$

taxa de juros nominal de 6% ao ano. $P = \$1000{,}00$ e $n = 3$ anos.

$$M = P[1+i]^3 \text{ e } i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

a) A taxa foi capitalizada mensalmente (6% a. a./ m.)

$$M = 1000\left[\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12}\right]^3 \approx \$1196{,}681$$

b) A taxa foi capitalizada diariamente (6% a. a./ d.)

$$M = 1000\left[\left(1 + \frac{0{,}06}{360}\right)^{360}\right]^3 \approx \$1197{,}199$$

c) A taxa foi capitalizada continuamente $(\delta = 6\%\ a.a.)$

$$M = 1000\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{0{,}06}{k}\right)^{k}\right]^3 = 1000(e^{0{,}06})^3 \approx \$1197{,}217$$

TAXAS DE JUROS

- Assim o cálculo do montante (valor futuro) em um regime de capitalização contínua é dado por:

$$M = P(1 + i\,)^n = Pe^{\delta n}$$

ou

$$P = M\left(\frac{1}{1+i}\right)^n = Me^{-\delta n}$$

- Importante lembrar que por se tratar de período contínuo é comum representar n como sendo t.

EXEMPLO 11: Um certo banco paga juros de 15% ao mês, em um regime de capitalização contínua. Quanto um cidadão deve investir para que daqui a dois anos possa retirar $1000000,00?

$$P = Me^{-\delta n}$$

$$P = 1000000e^{-0,15\times 24} \approx \$27323,72$$

EXEMPLO 11: Calcule o tempo de aplicação de um capital de \$120 000,00 que aplicado a uma taxa contínua de 3% ao mês com capitalização contínua produz um montante de \$200 000,00.

$$t = ln\left(\frac{M}{P}\right)\frac{1}{\delta}$$

$$t \approx 17{,}02 \text{ meses}$$

TAXAS DE JUROS

- Pode-se lidar com a taxa instantânea de juros que varia em função do tempo.

$$F(t) = F(s)e^{\int_0^t \delta(y)dy}$$

Em que s e t são dois instantes de tempo sendo que $s < t$.

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.