

Aula 16 - Anuidade Contínua

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

Exemplo 1: Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a \$500,00, caso fosse fracionada em: 12,365,8760 ou 525600 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado e a taxa de juros de 2% ao ano.

Solução

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Exemplo 1: Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a \$500,00, caso fosse fracionada em: 12, 365, 8760 ou 525600 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado e a taxa de juros de 2% ao ano.

Solução

Pagamento por:	m	$500\ddot{a}_{\overline{6} }^{(m)}$
Ano	1	\$ 2856,7297
Mês	12	\$ 2830,9647
Dia	365	\$ 2828,7069
hora	8760	\$ 2828,6334
minuto	525600	\$ 2828,6302

Anuidade Contínua

- A medida que se aumenta o número de partes ao qual a anuidade foi fracionada, o seu valor converge.
- Caso a anuidade fosse fracionada em infinitas partes, os pagamentos seriam feitos continuamente ao longo do ano.
- Na prática, serve como uma abstração sobre comportamento de pagamentos contínuos.

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \rightarrow \infty$, então:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right) = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{m}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right) = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{m}}{1 - e^{\frac{1}{m} \ln(v)}} \right]$$

Usando a regra de L' Hopital

$$f(m) = \frac{1}{m} \mapsto f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - e^{\frac{1}{m} \ln(v)} \mapsto g'(m) = -e^{\frac{1}{m} \ln(v)} \left[-\frac{\ln(v)}{m^2} \right] = \frac{v^{\frac{1}{m}} \ln(v)}{m^2}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1 - v^n) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}} \ln(v)} \right] = \frac{(1 - v^n)}{\ln(v)} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \rightarrow \infty$, então:

$$\dots$$
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{(1 - v^n)}{\ln(v)} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1 - v^n)}{\ln(v)} = -\frac{(1 - v^n)}{\ln(e^{-\delta})}$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Anuidade Contínua

Outra forma de encontrar a anuidade contínua pode ser vista a seguir:

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \int_0^n v^t dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt,$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = -\frac{e^{-\delta t}}{\delta} \Big|_{t=0}^{t=n} = \frac{-e^{-\delta n} + 1}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

Exemplo 2: Quanto custaria uma anuidade unitária anual (\$500) pagável continuamente por 6 anos, considerando a taxa de juros anual de 2%?

Solução



Exemplo 2: Quanto custaria uma anuidade unitária anual (\$500) pagável continuamente por 6 anos, considerando a taxa de juros anual de 2%?

Solução

$$\bar{a}_{\overline{6}|} = \frac{1 - v^6}{\delta} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1,02}\right)^6}{\ln(1,02)} \approx 5,6572$$

$$500\bar{a}_{\overline{6}|} \approx 2828,6$$

Anuidade Vitalícia Contínua

➤ Assim para um T_x aleatório:

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

$$E(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{T_x}|} f_T(t) dt$$

➤ O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu(x + t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Anuidade Vitalícia Contínua

Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)} \right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq \bar{\ddot{a}}_x \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

Anuidade Vitalícia Contínua

A variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \text{var}\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right) = \frac{\text{var}(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{\text{var}(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta 2t} f_{T_x}(t) dt$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$(\bar{A}_x)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt \right)^2$$

EXEMPLO 3: Suponha que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ , calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\bar{T}_x|}$ considerando uma pessoa de idade x .

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt - \left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt \right)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 3

➤ (i)

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

➤ (ii)

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) = \frac{1 - (1 - e^{-\alpha(x+t)})}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

EXEMPLO 3

➤ (i)

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

➤ (ii)

$$P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

➤ (iii)

$$\mu(x + t) = -\frac{s'(x + t)}{s(x + t)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}}$$

$$\mu(x + t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

EXEMPLO 3

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|t} p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t}) e^{-\alpha t} \alpha}{\delta} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\alpha}{\delta} \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)} + \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

➤ ***Observação**

$${}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\alpha t} dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\alpha)} dt$$

$$\bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

EXEMPLO 3

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}_x|}) = \frac{\text{var}(e^{-\delta t})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta + \alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \boxed{\frac{\alpha}{\delta + \alpha}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(2\delta + \alpha)e^{t(2\delta + \alpha)}} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \boxed{\frac{\alpha}{2\delta + \alpha}}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\bar{T}_x|}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\alpha}{2\delta + \alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha} \right)^2 \right]$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dado valor Π_x ?

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x)$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi_x\right)$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x) = P(1 - e^{-\delta T} \leq \delta \Pi_x)$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x) = P(-e^{-\delta T} \leq \delta \Pi_x - 1) = P(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta \Pi_x)$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta \Pi_x)]$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right]$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x) = P\left[T \leq -\frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right] = F_{T_x}\left(-\frac{\ln(1 - \delta \Pi_x)}{\delta}\right)$$

EXEMPLO 4: Considerando que o tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x seja modelado por uma função de densidade exponencial, $T_x \sim \text{Exp}(0,016)$, dado que $\delta = 0,10$, calcule $P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x)$.

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x) = P\left[T_x \leq -\frac{\ln(1 - \delta \bar{a}_x)}{\delta}\right] = P\left[T_x \leq -\frac{\ln\left(1 - \frac{\delta}{\delta + \alpha}\right)}{\delta}\right]$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x) = P\left[T_x \leq -\frac{\ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)}{\delta}\right]$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x) = 1 - e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right)} = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \bar{a}_x) = 1 - \left(\frac{0,016}{0,016 + 0,10}\right)^{\frac{0,016}{0,1}} \approx 0,27164$$

Anuidade Vitalícia Contínua

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq y) = F_{T_x} \left(-\frac{\ln(1 - \delta y)}{\delta} \right)$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq y) = 1 - \frac{S_{T_0} \left(x + \left(-\frac{\ln(1 - \delta y)}{\delta} \right) \right)}{S_{T_0}(x)}, \quad 0 < y \leq \frac{1 - e^{-\delta(\omega-x)}}{\delta}.$$

EXEMPLO 5 : Considere a função de sobrevivência dada por:

$$S_{T_0}(t) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - t)^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq t \leq 115.$$

Dado $x = 40$ e $i = 4\%$ determine $P(\bar{a}_{\overline{T_{40}|}} \leq y)$.

EXEMPLO 5 :

$$P(\bar{a}_{\overline{T_{40}|}} \leq y) = 1 - \frac{S_{T_0} \left(40 - \frac{\ln(1 - 0,04y)}{0,04} \right)}{S_{T_0}(40)}$$

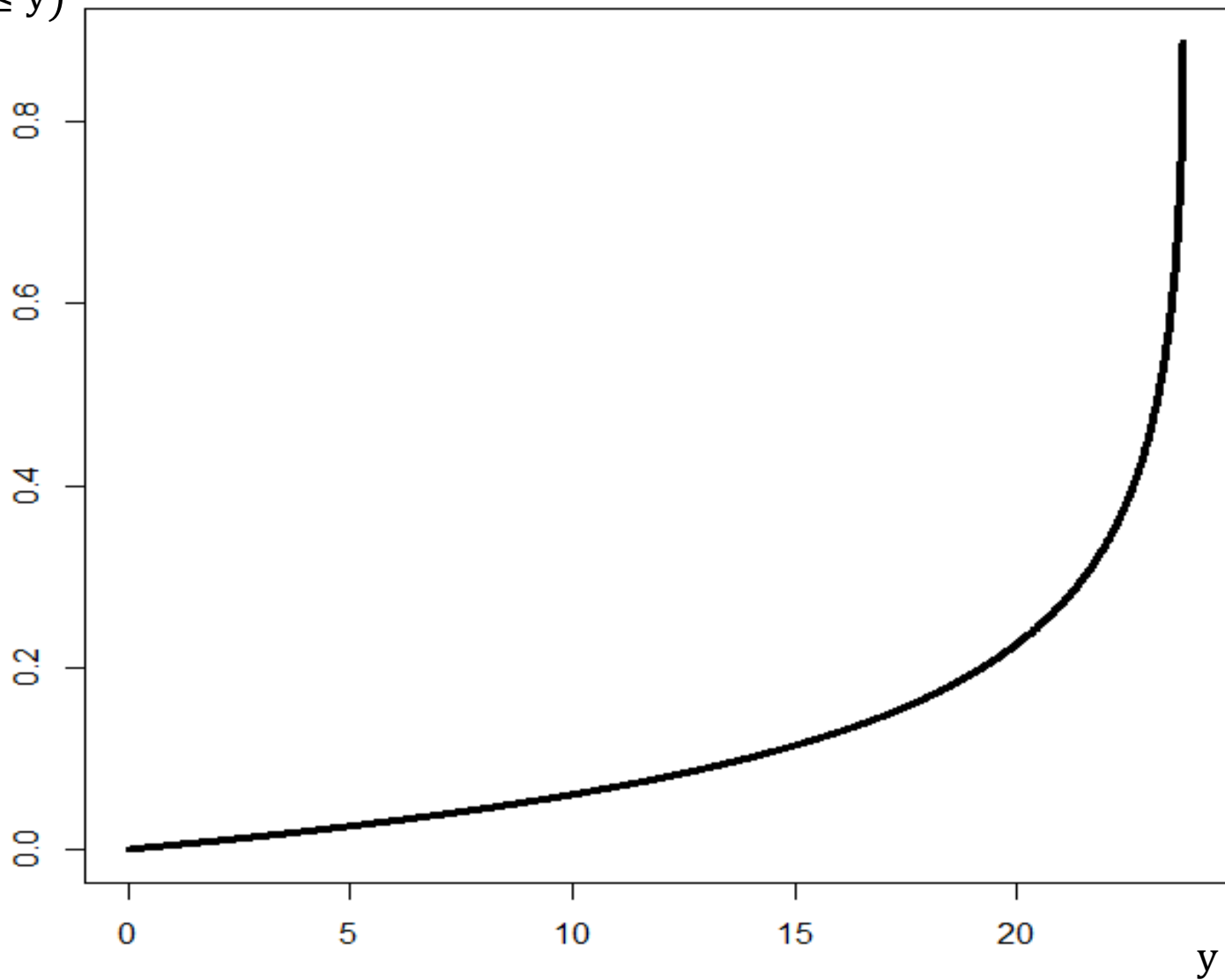
,

$$P(\bar{a}_{\overline{T_{40}|}} \leq y) = 1 - \frac{115^{-\frac{1}{3}} \left(115 - \left(40 - \frac{\ln(1 - 0,04y)}{0,04} \right) \right)^{\frac{1}{3}}}{115^{-\frac{1}{3}} (115 - 40)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_{40}|}} \leq y) = 1 - \frac{\left(75 + \frac{\ln(1 - 0,04y)}{0,04} \right)^{\frac{1}{3}}}{(75)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_{40}|}} \leq y) = 1 - \left(\frac{3 + \ln(1 - 0,04y)}{3} \right)^{\frac{1}{3}}, 0 < y \leq \frac{1 - e^{-3}}{0,04}$$

$$P(\bar{a}_{\overline{T_{40}|}} \leq y)$$



Anuidades Temporária contínua

Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de **cobertura n** .

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se } T \geq n \end{cases}$$

$$E(Y) = \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt + \bar{a}_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Anuidades Temporária contínua

Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n .

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se } T \geq n \end{cases}$$

$$\text{var}(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^2}{\delta^2}$$

Anuidade contínua, Diferida

$${}_m|\bar{a}_x = \int_m^{\infty} v^m \bar{a}_{\overline{t-m}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_m^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$${}_m|\bar{a}_x = {}_m E_x \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m|\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$${}_m|\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \bar{a}_{x+m:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

Dado que:

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\bar{T}_x|} + e^{-\delta T} = 1$$

Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E(\delta \bar{a}_{\bar{T}_x|} + e^{-\delta T})$$

$$1 = E(\delta \bar{a}_{\bar{T}_x|}) + E(e^{-\delta T})$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|}$$

			Fracionadas		Contínuas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	\ddot{a}_x	$\ddot{a}_x^{(m)}$	\bar{a}_x
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }$	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\overline{n} }$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n} }$	$a_{x:\overline{n} }^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	$m \ddot{a}_x$	$k \ddot{a}_x^{(m)}$	$m \bar{a}_x$
		Postecipada	$m a_x$	$k a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$m \ddot{a}_{x:\overline{n} }$	$k \ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}$	$m \bar{a}_{x:\overline{n} }$
		Postecipada	$m a_{x:\overline{n} }$	$k a_{x:\overline{n} }^{(m)}$	

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.

