Matemática atuarial

Seguros Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
  - Avaliar riscos.
  - Avaliar sistemas de investimentos.

- A matemática atuarial atua fornecendo meios para apuração de prêmios de seguros ligados à vida...
  - Produtos atuariais do ramo vida
    - Seguros,
    - Planos de previdência,
    - Planos de benefício

Seguros

- *Seguro é todo contrato pelo qual uma das partes,* ***segurador****, se obriga a pagar um benefício a outra,* ***segurado****, em caso de ocorrência de* ***sinistro****, em troca do recebimento de um* ***prêmio*** *seguro.*

- Características do contrato de seguros
  - Aleatório: Depende de elementos futuros e incertos;
  - Bilateral: Há obrigações para as duas partes;
  - Oneroso: Segurado e segurador possuem ônus e vantagens econômicas;
  - Solene: Há uma formalidade materializada na forma de apólice;

Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte .
  - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
  - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
  - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.
  - Refletem uma característica única nos seres humanos.

Seguro de vida

- Para a apuração dos prêmios ligados à vida é necessário uma avaliação do risco de morte:

- Como o risco é uma Probabilidade de ocorrência de eventos desfavoráveis, logo:

  - É necessário identificar e caracterizar a variável aleatória trabalhada.
    - **Tempo de vida restante.**

- Diferente do risco de danos, no risco de vida (sob certas circunstâncias) a seguradora lida com a certeza que terá que pagar algum dia o valor do benefício

Seguro de vida

- Suponha que a seguradora deseja guardar hoje o valor presente do gasto que ela terá com o segurado no futuro. Qual deverá ser esse valor?

Lembrando da matemática financeira temos que

$$F_0 = F\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

ou

$$F_0 = Fv^n$$

Como é usual chamar de b o benefício pago ao segurado temos:

$$F_0 = bv^n$$

n nesse caso corresponde ao tempo de vida do segurado, e quanto é esse tempo?

Seguro de vida

- Seja x o indivíduo de idade x que faz seguro de vida inteiro (vitalício).

- Seja T, o tempo de vida futuro (ou adicional) de x.
  - T é uma variável aleatório tal que $T \in (0, \infty)$

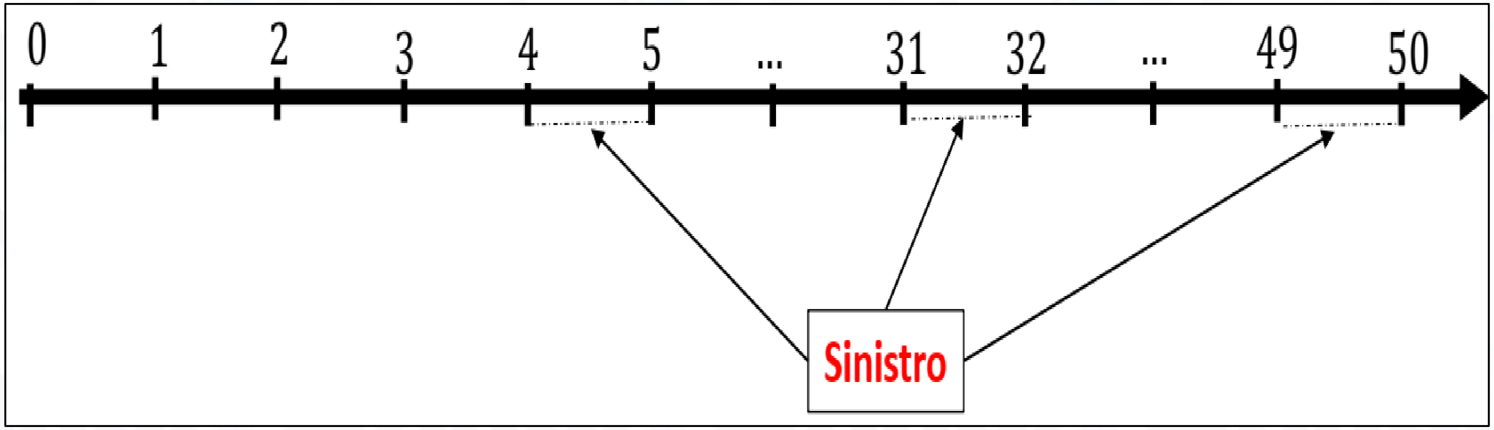
- Logo o tempo, n, que a seguradora irá guardar o dinheiro corresponde a variável aleatória T (tempo adicional do indivíduo), que pode ser caraterizada por.
  - Tábua de vida.
  - Função de distribuição.

➢ EXEMPLO 1

Para que um beneficiário receba um valor financeiro de $R\$100000{,}00$ ao final do ano de morte do segurado, daqui T anos. Qual deve ser o valor presente $(V.P.)$ ou F_0?

Resp.

$$V.P. = 100000\left(\frac{1}{1+i}\right)^{T+1} = 100000v^{T+1}$$



- EXEMPLO 1 (continuação)

Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então

$$v = \frac{1}{1 + 0{,}05} = 0{,}9524$$

Assim pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário a pagar o benefício de $R\$100000{,}00$ para os casos em que:

- O indivíduo x (segurado) morra em 4 anos.

$$V.P. =$$

- O indivíduo x (segurado) morra em 31 anos.

$$V.P. =$$

- O indivíduo x (segurado) morra em 49 anos.

$$V.P. =$$

- EXEMPLO 1 (continuação)

Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então

$$v = \frac{1}{1+0{,}05} = 0{,}9524$$

Assim pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário a pagar o benefício de $R\$100000{,}00$ para os casos em que:

- O indivíduo x (segurado) morra em 4 anos.

$$V.P. = 100000v^{4+1} = 100000(0{,}9524\,)^5 = \mathrm{R}\$78360{,}45$$

- O indivíduo x (segurado) morra em 31 anos.

$$V.P. = 100000v^{31+1} = 100000(0{,}9524\,)^{32} = R\$21000{,}05$$

- O indivíduo x (segurado) morra em 49 anos.

$$V.P. = 100000v^{49+1} = 100000(0{,}9524\,)^{50} = R\$8720{,}37$$

Seguro de vida

- Em resumo temos que a uma taxa de 5% ao ano para um beneficiário poder ganhar $b = R\$100000{,}00$ reais depois de 4 , 31 e 49 anos, tempos que ter os seguintes valores presentes.

$T(\ anos)$	$V.P.(R\$)$
4	$R\$\ 78360{,}45$
31	$R\$\ 21000{,}05$
49	$R\$\ 8720{,}37$

- Imagine que T é uma variável aleatória e esses são os únicos valores que ele pode assumir. Então que é o valor presente esperado que o indivíduo x deveria pagar hoje por este seguro de modo que a seguradora receba o necessário para pagar o benefício de $R\$100000{,}00$?

Seguro de vida

- A resposta a essa questão está relacionada a esperança matemática (valor esperado ou média probabilística) de uma função de variável aleatória.

- Para o caso em questão seja T uma variável aleatória e $V.P = g(T) = bv^{T+1}$ então tem-se que:

$$E[g(T)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_T(t) dt \, ,$$

$$E[g(T)] = \sum_j g(t_j) P(T = t_j),$$

Seguro de vida

- Assim considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de bv^{T+1}, logo:

$$E(V.P.) = E(bv^{T+1}) = b\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T+1}}\right)$$

Seguro de vida

- Assim considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser o valor esperado para bv^{T+1}, logo:

$$E(V.P.) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

$$E(V.P.) = 100000(0{,}9524\,)^{5}P(T=4) + 100000(0{,}9524\,)^{32}P(T=31) + 100000(0{,}9524\,)^{50}P(T=49)$$

$$E(V.P.) = 100000[(0{,}9524\,)^{5}P(T=4) + (0{,}9524\,)^{32}P(T=31) + (0{,}9524\,)^{50}P(T=49)\,]$$

$$E(V.P.) = 100000\boldsymbol{E(v^{T+1})}$$

- Também chamado de **valor presente atuarial V.P.A.**

Seguro de vida

- Para calcular o valor necessário que se deve ter **hoje** para pagar..., o benefício futuro, foi necessário entender o comportamento da variável aleatória T (tempo de vida adicional do segurado).

Seguro de vida

- Definição: Seja T a variável aleatória associada ao tempo de vida futuro, ou seja, o tempo entre a emissão da apólice do seguro e a morte do segurado, Então:

$b_T = b$ → Função benefício;

$v_t = v^{t+1}$ → Função desconto;

$Z_T = bv^{T+1}$ → Função valor presente.

Seguro de vida

- Chame de **Prêmio Puro** a parcela do prêmio, suficiente para pagar sinistros.
  - Neste sentido o Prêmio Puro é o prêmio que propõe o pagamento de despesas relacionadas ao risco que está sendo assumido pela seguradora.
  - O valor esperado do valor presente de todos os benefícios que a seguradora compromete a pagar.
  - Em geral é estabelecido em um dado período, normalmente um ano.
  - O termo *puro* significa que ao valor considerado não foram adicionadas quaisquer cargas técnicas.
    - De gestão ou comerciais

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- No caso de Seguro de Vida Temporário:
  - Existe a incerteza sobre a ocorrência ou não do pagamento do benefício.
  - Existe incerteza sobre o momento do pagamento.

- Como calcular do V.P.A desse Benefício?
  - Calcular a esperança matemática da variável aleatória " quanto devo ter hoje para pagar o benefício devido em relação a um segurado?"

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

➢ EXEMPLO 2

Pense no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro onde caso este segurado faleça antes de completar 30 anos, o seu beneficiário receberá uma quantia de $1. u. m$. Considere também uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte. Calcule o valor esperado da função valor presente.

Idade	q_X
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

- Resp.:

$b_T = \begin{cases} 1\,, t = 0{,}1{,}2{,}\ldots, 4 \\ \quad 0,\ c.c. \end{cases}$ → benefício (caso o tempo de vida adicional seja menor que o tempo de contrato, caso morra antes);

$v_T = v^{t+1}\,, t \geq 0$ → desconto (caso o tempo de vida adicional seja maior que zero, caso o segurado não morra no primeiro período do contrato);

$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0{,}1, \ldots, 4 \\ 0 & c.c. \end{cases}$ → valor presente atuarial(VPA) (o valor presente necessário para que a seguradora cubra a apólice contratada).

Obs. É normal o uso de T_x para indicar que a variável T está vinculada a idade x

$b_T = 1.u.m, i = 4\%$

Idade	$q_X =_1 q_x$	$p_X =_1 p_x = 1 - q_x$	${}_1l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$E(Z_T) = v^1P(T_{25} = 0) + v^2P(T_{25} = 1) + v^3P(T_{25} = 2) + v^4P(T_{25} = 3) + v^5P(T_{25} = 4) + [0P(T_{25} = 5) + 0P(T_{25} = 6) + \cdots].$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

- **Importante** $P(T_x = t)$ corresponde a probabilidade do tempo de vida adicional ser igual a t, no caso a probabilidade que indivíduo "morra" durante o intervalo t e $t+1$ é determinado

$$P(t < T_x \leq t+1) = P(T_x > t) - P(T_x > t+1)$$

$$P(t < T_x \leq t+1) = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x$$

Lembrando da relação ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$

$$P(t < T_x \leq t+1) = {}_t p_x - {}_t p_x \, {}_1 p_{x+t}$$

$$P(t < T_x \leq t+1) = {}_t p_x (1 - p_{x+t})$$

$$P(T_x = t) = ({}_t p_x)(q_{x+t}) = {}_{t|}q_x$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1\ {}_0p_{25}q_{25} + v^2\ p_{25}q_{26} + v^3\ {}_2p_{25}q_{27} + v^4\ {}_3p_{25}q_{28} + v^5\ {}_4p_{25}q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) 0{,}00077 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 0{,}99923 0{,}00081 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 0{,}99842 0{,}00085 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 0{,}99757 0{,}00090 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 0{,}99667 0{,}00095$$

$$E\left(Z_{T_{25}}\right) \approx 0{,}003788\, u.m.$$

- Outra opção seria:

$$b_T = \begin{cases} 1 & t = 0,1,2,3,4 \\ 0 & c.c. \end{cases} \qquad v_T = v^{t+1} \quad t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0,1,2,3,4 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$V.P.A = E(Z_T)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

Como ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l\, p_{x+m}$, então:

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3 p_{25} p_{26} q_{27} + v^4 p_{25} p_{26} p_{27} q_{28} + v^5 p_{25} p_{26} p_{27} p_{28} q_{29}$$

$$E(Z_T) \approx 0{,}003788\, u.m.$$

$$\boldsymbol{E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)}$$

$\boldsymbol{x}$	T. vida adicional	$\boldsymbol{Z(t)}$	$\boldsymbol{S_T(t) = {}_t p_x}$	$F_T(t) = {}_1 q_x$
25	$t = 0$	v	$T(25) > 0$	$T(25) \leq 1$
26	$t = 1$	v^2	$T(25) > 1$	$T(25) \leq 2$
27	$t = 2$	v^3	$T(25) > 2$	$T(25) \leq 3$
28	$t = 3$	v^4	$T(25) > 3$	$T(25) \leq 41$
29	$t = 4$	v^5	$T(25) > 4$	$T(25) \leq 5$

$$E(Z_T) = \sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \, {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0{,}003788 \, u.m.$$

Matemática atuarial

Seguros Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- O valor encontrado para $E(Z_T)$, corresponde ao chamado prêmio puro único, ou seja, o valor que ao ser cobrado que é suficiente para se pagar as despesas relacionadas aos riscos assumidos pela seguradora a medida que o tempo vai passando, pago em uma única parcela.

  - Benefício igual a 1.

- A notação usada para o seguro de vida temporário é

$$A_{x^1:\overline{n|}} = E(Z_T)$$

Assim para o exemplo 2 tem-se que

$$A_{25^1:\overline{5|}} \approx 0{,}003788\ u.m$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- O Seguro de **Vida Temporário por n anos** é o seguro que pagará uma unidade monetária (u.m.) somente se o segurado **morre antes de completar n anos após o contrato.**

Notação:

$$A_{x^1:\overline{n|}}$$

Lê-se: Seguro de vida de uma pessoa de idade x com cobertura de n anos, com benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado. Tempo discreto.

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}}$$

Lê-se: Seguro de vida de uma pessoa de idade x com cobertura de n anos, com benefício unitário pago no momento da morte do segurado. Tempo contínuo.

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$x \rightarrow$ idade no momento do seguro

$n \rightarrow$ Tempo de cobertura do seguro

Barra indica que T é contínuo

"1" acima do "x" indica que o seguro é pago se "x" expirar antes que "n".

$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	caso discreto
$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	caso contínuo

Seguro de vida Inteiro

- Exemplo 3:

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de **vida inteiro** que paga $1\,u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago por esse segurado?

Seguro de vida Inteiro

- Exemplo 3:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \; {}_tp_x q_{x+t}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} \; {}_tp_{25} q_{25+t}$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{1} q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} \; p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{3} \; {}_2p_{25} q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{91} \; {}_{90}p_{25} q_{115} = 0{,}11242$$

Seguro de vida Inteiro

- Exemplo 3:

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{1} q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{3} {}_{2}p_{25} q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{91} {}_{90}p_{25} q_{115} = 0{,}11242$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{1} 1 q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} p_{25} q_{26} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{91} (p_{25} p_{26} p_{27} \ldots p_{114}) q_{115} = 0{,}11242$$

Exemplo 4

A seguradora irá pagar um benefício de 1 u.m. por um seguro temporário caso o segurado de 105 anos faleça dentre um período de 4 anos. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e tábua at-2000 Masculina . Calcule o prêmio puro:

	x	q_x	p_x
106	105	0.37240	0.62760
107	106	0.40821	0.59179
108	107	0.44882	0.55118
109	108	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	**112**	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	**114**	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

$$A_{105^1:\overline{4}|} = v^1 \ {}_0p_{105}q_{105} + v^2 p_{105}q_{106} + v^3 \ {}_2p_{105}q_{107} + v^4 \ {}_3p_{105}q_{108}$$

$$A_{105^1:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1} \ {}_tp_{105}q_{105+t}$$

	x	q_x	p_x
106	**105**	0.37240	0.62760
107	**106**	0.40821	0.59179
108	**107**	0.44882	0.55118
109	**108**	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	**112**	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	**114**	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

$$A_{105^1:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1} \; {}_tp_{105} q_{105+t}$$

Função que recebe como entrada, a taxa de rentabilidade(i) anual, a idade do segurado (idade), o numero de anos de cobertura (n) e o valor do benefício (b).

```
prêmio<- function( i, idade, n,b)  {
        v    <- (1/(i+1))^(1:n)
        pxx <-  c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
```

$\# \; 1, p_{105}, {}_2p_{105}, {}_3p_{105}$

```
        qxx <- qx[(idade+1):(idade+n)]
```

$\# \; q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}$

```
        Ax   <- b* sum(v*pxx*qxx)
        return (Ax)
                    }
```

$A_{105^1:\overline{4}|}$= prêmio(0.04,105,4,1)

NOTAÇÃO: SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Caso discreto

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}$$

$A_{x^1:\overline{n|}}$= prêmio(i,x,n,b)

NOTAÇÃO: SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

- Caso discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}$$

A_x= prêmio(i,x,max(x)-x,b)

Observação

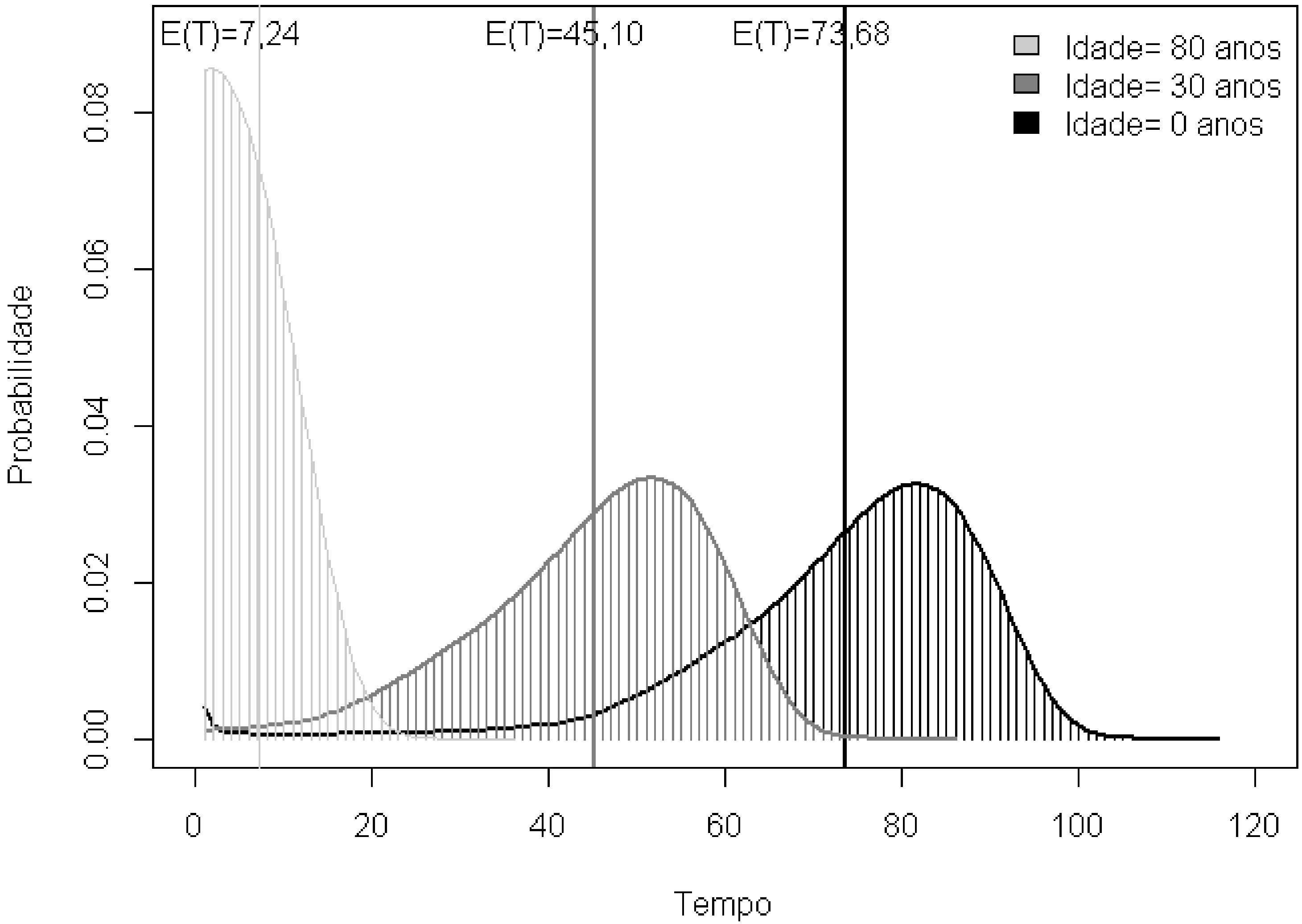
- A expectativa de vida de uma pessoa de idade x , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} t \ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} t \ {}_tp_x$$

- A expectativa de vida completa de uma pessoa de idade x , admitindo que a distribuição das mortes ao longo do ano é uniforme, é dada por:

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

Probabilidades AT-49 M



Matemática atuarial

Seguros Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Seguro de vida pago no momento da morte

Seja T ou T_0 a variável aleatória tempo de vida adicional do indivíduo recém nascido (de idade 0). Então a função de sobrevivência, $S_{T_0}(t)$, é a probabilidade de viver além da idade futura t.

$$S_{T_0}(t) = 1 - F_{T_0}(t) = p(T_0 > t)$$

Ou

$$S_T(t) = 1 - F_T(t) = p(T > t)$$

Seja T_x a variável aleatória tempo de vida adicional do indivíduo de idade x. Então a função de sobrevivência, $S_{T_x}(t)$, é a probabilidade de viver além da idade futura t.

$$S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t) = p(T_x > t)$$

Se T é a variável aleatória que representa o tempo de vida expresso em anos de um recém nascido, então nota-se que para $T_x > t$, implica aceitar que $T_0 > x + t$ dado que $T_0 > x$.

- A probabilidade de uma pessoa de idade x atingir (viva) a idade $x + t$, tem-se:

$${}_tp_x = S_{T_x}(t) = p(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x)$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A probabilidade de uma pessoa de idade x atingir (viva) a idade $x+t$, tem-se:

$$ {}_tp_x = S_{T_x}(t) = p(T_x > t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) $$

$$ {}_tp_x = \frac{S(x+t)}{s(x)} = \frac{P(T > t + x)}{P(T > x)} $$

- A probabilidade de uma pessoa de idade x morrer antes de atingir a idade $x+t$, é dado por:

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{s(x)} = F_{T_x}(t) $$

Logo:

$$ {}_tq_x + {}_tp_x = 1 $$

Exemplo 5

Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

- Calcule ${}_tp_x$ e ${}_tq_x$.

Exemplo 5

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = {}_t p_x$$

Nota-se que para $T_x > t$, implica aceitar que $T_0 > x + t$ dado que $T_0 > x$. Assim

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x)$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T_0 > x + t, T_0 > x)}{P(T_0 > x)}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{\int_{x+t}^{140} \frac{1}{140} dt}{\int_{x}^{140} \frac{1}{140} dt} = \frac{\frac{140 - (x + t)}{140}}{\frac{140 - (x)}{140}} = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$${}_t p_x = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$${}_t q_x = 1 - \frac{140 - x - t}{140 - x} = \frac{t}{140 - x}$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A força de mortalidade -transição instantânea de transição do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$\mu(x+t) = \lim_{h \to 0} \frac{{}_{h}q_{x+t}}{h}$$

$$\mu(x+t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(T_{x+t} < h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - P(T_{x+t} > h)}{h} \right]$$

$$\mu(x+t) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - \frac{P(T_x > t+h)}{P(T_x > t)}}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1 - \frac{S_{T_x}(t+h)}{S_{T_x}(t)}}{h} \right]$$

$$\mu(x+t) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{S_{T_x}(t) - S_{T_x}(t+h)}{h\, S_{T_x}(t)} \right]$$

Seguro de vida pago no momento da morte

…

$$\mu(x+t) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1-\dfrac{P(T_x > t+h)}{P(T_x > t)}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1-\dfrac{S_{T_x}(t+h)}{S_{T_x}(t)}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{S_{T_x}(t)-S_{T(x)}(t+h)}{h\, S_{T(x)}(t)}\right]$$

$$\mu(x+t) = -\frac{1}{S_{T_x}(t)}\lim_{h\to 0}\left[\frac{S_{T_x}(t+h)-S_{T_x}(t)}{h}\right]$$

$$\mu(x+t) = -\frac{S'_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A força de mortalidade - transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$\boxed{\mu(x) = \frac{f_{T_0}(t)}{S_{T_0}(t)}}$$

$$\boxed{\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}}$$

- $\mu(x)$ é uma medida relativa da mortalidade em que a idade x é atingida, enquanto q_x mede a mortalidade ao logo do ano.

Exemplo 6

Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

- Calcule $\mu(x+t)$. Lembrando do exercício anterior que :

$$_tp_x = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

logo

$$_tq_x = \frac{t}{140 - x}$$

EXEMPLO 6

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}$$

Como $S_{T_x}(t) = {}_t p_x$, então :

$${}_t q_x = \frac{1}{140-x} = F_{T_x}(t)$$

Considerando que $\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = f_{T_x}(t)$, assim:

$$\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{140-x}\right) = \frac{1}{140-x} = f_{T_x}(t)$$

Logo

$$\mu(x+t) = \frac{\frac{1}{140-x}}{\frac{140-x-t}{140-x}} = \frac{1}{140-x-t}$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- A densidade de $F_{T_x}(t)$ é obtida por meio de :

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}$$

$$f_{T_x}(t) = S_{T_x}(t)\mu(x+t)$$

- Assim

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

Seguro de vida pago no momento da morte

- Assim considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de $b_t e^{-\delta T}$, logo:

$$E(V.P.) = E\left(be^{-\delta T}\right) = bE\left(e^{-\delta T}\right)$$

Lembrando que $\delta = ln(1+i)$.

- Também chamado de valor presente atuarial *V.P.A*→ $E(Z_T)$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO	SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

➢Caso Contínuo

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z(t) f_T(t)dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z(t) f_T(t)dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t} \, {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Exemplo 7

Considere a função de sobrevivência e força de mortalidade de $x = 30$ em dada população seja de:

$$ {}_tp_{30} = \frac{70-t}{70} \quad \text{e} \quad \mu(30+t) = \frac{1}{70-t} \text{ para } t > 0 $$

Esse indivíduo decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que a taxa de rentabilidade constante, e suponha que $i = 5\%$ a.a.

Calcule o VPA (ou prêmio puro) que paga $1\,u.m.$ de benefício pago no momento da morte do segurado.

➢ Exemplo 7

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \qquad i = 5\%\ a.a. \qquad v = e^{-\ln(1{,}05)}$$

$b = 1 \ , 0 \leq t \leq 20$

$v_t = e^{-\delta t} \ , 0 \leq t \leq 20$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T};\ 0 \leq T \leq 20 \\ 0; \quad c.c. \end{cases}$$

- Exemplo 7

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}}\ ,\ v = e^{-\,ln(1,05)}$$

$$V.P.A = E(Z_T) = \bar{A}_{30^1:\overline{20|}}$$

$b = 1\ ,0 \leq t \leq 20 \quad v_t = e^{-\delta t}\ ,0 \leq t \leq 20 \quad Z_T = e^{-\delta T}; 0 \leq T \leq 20$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-\delta t} f_{T_{30}}(t)dt = \int_0^{20} e^{-\delta t}\ {}_tp_{30}\mu(30+t)dt = \int_0^{20} e^{-0,04879t}\frac{1}{70}dt$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \left.\frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)}\right|_{t=0}^{t=20} = \frac{1}{-3,4153}\left[e^{20(-0,04879)} - e^{0(-0,04879)}\right]$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \frac{1}{-3,4153}\left(e^{-0,9758} - 1\right) \approx 0,182446$$

➢ Exemplo 7

Veja que, é suficiente para o segurado pagar $0{,}182446\ u.m.$ hoje de forma a receber (o beneficiário) $1{,}00\ u.m.$ na ocorrência de sinistro.

O exemplo considerou que o benefício seria de $1\ u.m.$, e caso o segurado contratasse um seguro que paga $R\$\ 250000{,}00$ reais no momento de morte? Quanto deveria ser o Prêmio Puro Único pago por ele???

$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}}$, $T_{30} \sim U_c(0,70)$ e $i = 5\%$ a.a. $v = e^{-\ln(1,05)t}$

$b = 2500000.$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = 0,182446$$

$$250000\,\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = 45611,53$$

Caso o valor do benefício seja $R\$\ 250000,00$, o prêmio a ser pago pelo segurado deverá ser (arredondando no centavo) de $R\$\ 45611,53$ (considerando a mesma taxa de juros).

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Exemplo 8

Para proteger seu filho de 5 anos, uma pessoa de 30 anos decide fazer um contrato de seguro de vida temporário com benefício variável no tempo (Considere distribuição $T_{30} \sim U_c(0,70)$).
Considere $i = 5$ a.a.

I) Se morrer dentro de 10 anos o benefício será de $R\$\ 100000{,}00$.

II) Se morrer entre 10 e 20 anos, o benefício será: $150000 - 5000t$.

- Exemplo 8

Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$Z_T = b_T e^{-\delta T} = \begin{cases} 100000\, e^{-\,ln(1{,}05)T}; \quad T \leq 10 \\ (150000 - 5000T)e^{-\,ln(1{,}05)T}; \;\; 10 < T \leq 20 \end{cases}$$

Portanto:

$$V.P.A = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\,ln(1{,}05)t}}{70}dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\,ln(1{,}05)t}}{70}dt$$

$$V.P.A = V.P.A_1 + V.P.A_2$$

$$V.P.A_1 = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

$$V.P.A_1 = \left. \frac{10000e^{-0,04879t}}{7(-0,04879)} \right|_{t=0}^{t=10} = \frac{10000e^{-0,4879} - 10000}{-0,34153}$$

$$V.P.A_1 \approx 11304,59$$

➢ Exemplo 8

$$V.P.A_2 = \int_{10}^{20} \frac{\mathbf{(150000 - 5000}\boldsymbol{t}\mathbf{)}e^{-\,ln(1{,}05)t}}{\mathbf{70}}\boldsymbol{dt}$$

Por partes:

$$\int udr = ur - \int rdu$$

então

$$u = 150000 - 5000t; \qquad \Rightarrow \qquad du = -5000dt$$

$$dr = \frac{e^{-\ln(1{,}05)t}}{70}dt \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}$$

$$V.P.A_2 = (150000 - 5000t)\left.\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}\right|_{t=10}^{t=20} - \int_{10}^{20} -\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}5000dt$$

Exemplo 8

$$V.P.A_2 = \int_{10}^{20} \frac{(\mathbf{150000 - 5000}\boldsymbol{t})e^{-\,ln(1,05)t}}{\mathbf{70}}\,\boldsymbol{dt}$$

$$\ldots$$

$$V.P.A_2 = (150000 - 5000t)\,\frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)}\Bigg|_{t=10}^{t=20} + \int_{10}^{20} \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)}\,5000dt$$

$$V.P.A_2 = (150000 - 5000t)\,\frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)}\Bigg|_{t=10}^{t=20} + \frac{e^{-0,04879t}}{7(-0,04879)^2}\,500\Bigg|_{t=10}^{t=20}$$

$$V.P.A_2 = \frac{5000e^{-0,04879(20)} - 10000e^{-0,04879(10)}}{7(-0,04879)} + \frac{500\left(e^{-0,04879(20)} - e^{-0,04879(10)}\right)}{7(-0,04879)^2}$$

$$V.P.A_2 \approx 12457,73 - 7112,165 \approx 5345,565$$

Exemplo 8

Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$V.P.A = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{\mathbf{(150000 - 5000}\boldsymbol{t}\mathbf{)}e^{-\ln(1,05)t}}{\mathbf{70}} \boldsymbol{dt}$$

$$V.P.A = V.P.A_1 + V.P.A_2$$

$$V.P.A = 11304,59 + 5345,565 \approx R\$16650,15$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Caso Contínuo

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = \int_0^n Z_t f_T(t)dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

- Caso discreto

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \ {}_tp_x q_{x+t}$$

SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

- Caso Contínuo

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_t f_T(t)dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

- Caso discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \ {}_tp_x q_{x+t}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1};\ T \geq 0$$

$$\boldsymbol{A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}; & T = 0,1,\dots,n-1 \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}}$$

$$Z_T = e^{-\delta T};\ T \geq 0$$

$$\boldsymbol{\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt}$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}; & 0 \leq T \leq n \\ 0; & c.c \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^{n} Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt}$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

Matemática atuarial

Seguros Aula 7

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Uma característica importante de uma variável aleatória é sua variabilidade:
  - Em geral, é avaliada pela discrepância de seus valores em relação à média ou à mediana.
  - A média dos desvios é sempre zero e, portanto, nada informativa.

- Tomando o quadrado dos desvios e, então, calculando o valor esperado, chegamos a uma das mais importantes medidas de variabilidade.

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- A definição matemática da variância de uma variável aleatória Z_T é tal que:

$$var(Z_T) = E\{[Z_T - E(Z_T)]^2\}$$

- A raiz quadrada da variância é denominada de desvio-padrão e representado por σ.

- Pode se calcular a variância também por:

$$var(Z_T) = E(Z_T^2) - E(Z_T)^2$$

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Considerando $\mathrm{Z_T} = bv^{T+1}$, uma função de variável aleatória e por consequência também uma variável aleatória, tem-se:

$$var(Z_T) = var(bv^{T+1}) = b^2 var(v^{T+1})$$

- Supondo $b = 1$ a fim de simplificação, tem-se:

$$var(Z_T) = var(v^{T+1}) = E\{[v^{T+1} - E(v^{T+1})]^2\}$$

$$var(Z_T) = var(v^{T+1}) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2$$

Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Caso de T discreto: $var(Z_T) = {}^2A_{x^1:\overline{n|}} - \left(A_{x^1:\overline{n|}}\right)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{n-1} w^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} - \left[\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}\right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$ Chamado de fator de desconto

- Caso de T contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{x^1:\overline{n|}} - \left(\bar{A}_{x^1:\overline{n|}}\right)^2$

$$var(Z_T) = E\left(e^{-2\delta T}\right) - E\left(e^{-\delta T}\right)^2 = \int_0^n e^{-2\delta t} f_{T_x}(t)dt - \left[\int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right]^2$$

Cálculo da variância: Seguro de vida inteiro

- Caso de T discreto: $var(Z_T) = {}^2A_x - (A_x)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{\omega-x} w^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} - \left[\sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}\right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$ Chamado de fator de desconto

- Caso de T contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_x - (\bar{A}_x)^2$

$$var(Z_T) = E\left(e^{-2\delta T}\right) - E\left(e^{-\delta T}\right)^2 = \int_0^\infty e^{-2\delta t} f_{T_x}(t)dt - \left[\int_0^\infty e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right]^2$$

Exemplo de Cálculo da variância

➢ Exemplo 9

Calcule a variância de Z_T .

$$b = 1 \ , \quad 0 \leq t < 5 \qquad v^{t+1}, t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}; & 0 \leq T < 5 \\ 0; & c.c. \end{cases}$$

Lembramos que $A_{25^1:\overline{5}|} = 0{,}0037888$ para $i = 4\%$.

- Dados do exemplo 9

  $i = 4\%$

Idade	q_x	$p_x = 1 - q_x$	$l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

➢ Exemplo 9

$$var(Z_T) = \ {}^{2}A_{25^{1}:\overline{5}|} - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_t) = \sum_{t=0}^{4}\left[\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2\right]^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_T\ ) = \left[\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 {}_{1}p_{25}q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^6 {}_{2}p_{25}q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^8 {}_{3}p_{25}q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{10} {}_{4}p_{25}q_{29}\right] - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_T) = 0{,}1224543$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- Exemplo 10

Considere que $x = 30$ decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que o tempo de vida adicional desta pessoa possa ser modelado pela distribuição uniforme contínua de parâmetros 0 e 70, ou seja:

$$T_{30} \sim U_c(0{,}70).$$

Considere $i = 5\%$ a.a.

Sabemos pela resolução do problema que $\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \approx 0{,}182446$. A partir dessas informações obtenha a variância para esse seguro.

➢ Exemplo 10

$\boldsymbol{b = 1;} \qquad \boldsymbol{0 \leq t \leq 20} \qquad \boldsymbol{e^{-\delta t}\,, t \geq 0} \qquad \boldsymbol{Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}; & 0 \leq T \leq 20 \\ 0; & c.c. \end{cases}}$

$$var(Z_T) = \int_0^{20} e^{-2\delta t}\frac{1}{70}dt - 0{,}182446^2$$

$$var(Z_T) = \frac{1 - e^{-40\delta}}{140\delta} - 0{,}182446^2 = 0{,}09231757$$

$$\sigma_{Z_T} = \sqrt{0{,}09231757} = 0{,}3038381$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

- Considere a situação em que uma pessoa de 30 anos deseja fazer um seguro que pague seu beneficiário no momento da morte um valor de $R\$200000{,}00$. Para esse cálculo a segura considera uma taxa de rentabilidade anual de 5% e que o tempo de vida adicional do segurado seja modelado por um modelo uniforme contínuo. Assim:

$$T_{30} \sim U_c(0{,}70) \qquad i = 5\%\, a.a. \qquad b_T = R\$200000{,}00$$

$$V.P.A = \int_0^{70} z_T f_T(t)dt = \int_0^{70} 200000e^{-\ln 1{,}05t}\frac{1}{70}dt$$

$$V.P.A = -\frac{200000e^{-\ln(1{,}05)t}}{70\ \ln 1{,}05}\Bigg|_{t=0}^{t=70} = \frac{200000}{70\ \ln 1{,}05}\left[-e^{-\ln(1{,}05)70} + e^{-\ln(1{,}05)0}\right]$$

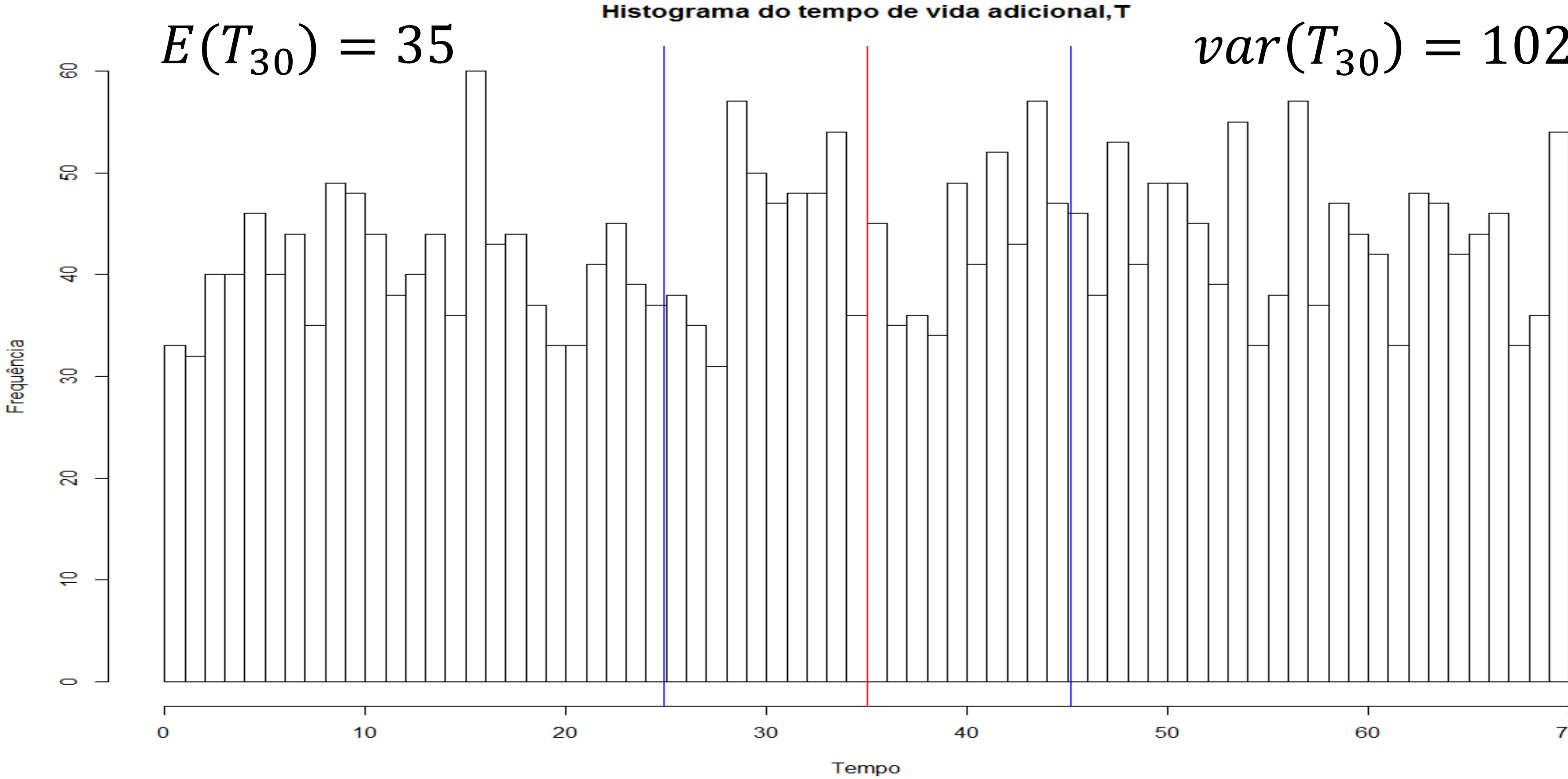
$$\boldsymbol{V.P.A = 200000\bar{A}_{30} = 58559{,}81\left(-e^{-3{,}415} + 1\right) \approx 56634{,}57}$$

SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

- Considere agora que após um determinado tempo observando 3000 pessoas da mesma coorte que fizeram no mesmo ano um seguro de vida vitalício. Seja anotado o tempo gasto para que cada um venha a falecer.

$E(T_{30}) = 35$

$var(T_{30}) = 102{,}83$



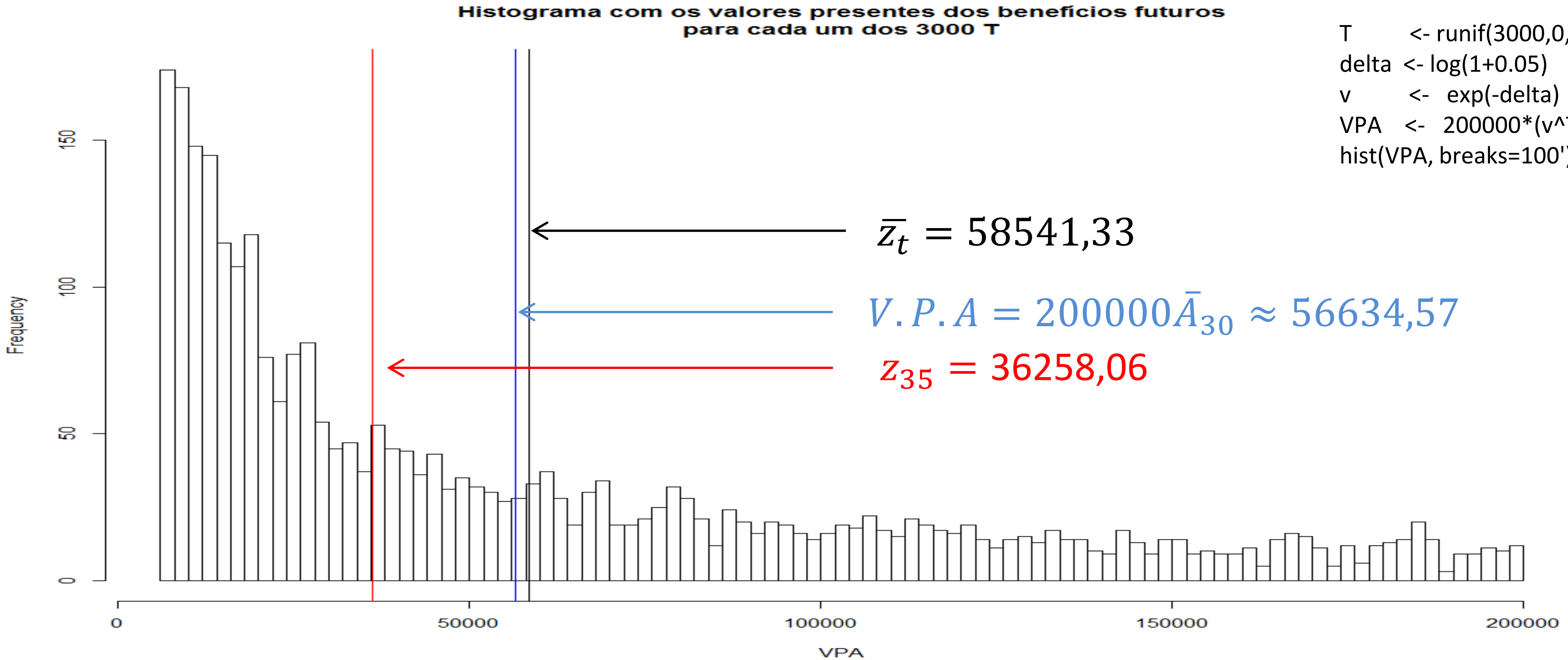
SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

- Levando em consideração que “sabemos” previamente a sobrevida de cada segurado (dados simulados). Os valores presentes necessários ao pagamento do benefício contratado por cada segurado pode ser calculada.

- Assim:

$$z_t = bv^t = 200000e^{-\delta t} = 200000e^{-\ ln(1,05)t}$$

```
T       <- runif(3000,0,70)
delta  <- log(1+0.05)
v       <-   exp(-delta)
VPA    <-   200000*(v^T)
hist(VPA, breaks=100')
```



$n = 1865$ $\quad$ $n = 1135$

$n = 1838$ $\quad$ $n = 1162$

$n = 1459$ $\quad$ $n = 1541$

- *A distribuição Uniforme para modelar a sobrevida do segurado, leva a um valor de prêmio alto, pois essa supõem que chance da pessoa morrer "cedo" é igual a de morrer "tarde".*

- *Apesar das limitações estimativa se mostrou próxima da média verificada posteriori.*

Prêmio calculado por percentil

- Devido à variabilidade elevada, pode ser interessante calcular determinar o valor presente a partir de um quantil predeterminado.

- Ou seja, obter um valor presente de baseado nas probabilidades dos benefícios futuramente pagos serem inferiores ao estipulado.

Prêmio calculado por percentil

- Considere um prêmio Π_x de um seguro vitalício de forma que:

$$P\left(Z_{T_x} \leq \Pi_x\right) = \alpha$$

$$P\left(be^{-\delta T_x} \leq \Pi_x\right) = \alpha$$

$$P\left(e^{-\delta T_x} \leq \frac{\Pi_x}{b}\right) = \alpha$$

$$P(-\delta T_x \leq ln(\Pi_x) - \ln(b)) = \alpha$$

$$P\left(T_x \geq \frac{ln(b) - l\,n(\Pi_x)}{\delta}\right) = \alpha$$

Prêmio calculado por percentil

$$P_{Z_T}(Z_T \leq \Pi_{t_\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$$

$$P_T(T_x \geq t_\alpha) = \boldsymbol{\alpha}$$

$$P_T\left(T_x \geq \frac{ln(b)\ - l\,n(\Pi_x)}{\delta}\right) = \boldsymbol{\alpha}$$

Como a variável aleatória de comportamento conhecido é o tempo (T), é mais conveniente lidar com sua distribuição do que com a distribuição dos valor presente atuarial.

Assim:

$$t_\alpha = \frac{ln(b)\ - \ln(\Pi_{x_\alpha})}{\delta}$$

$$\Pi_{t_\alpha} = \frac{b}{e^{\delta t_\alpha}}$$

Exemplo 11

Considere um seguro de vida vitalício feito por $x = 30$, com benefício unitário, dado que $T_{30} \sim U_c(0{,}70)$ e $i = 5\%$ a.a. Qual seria o valor do prêmio Π_{30} de forma que $P(Z_T \leq \Pi_{30}) = 0{,}9$?

Exemplo 11

- $b = R\$20000{,}00$. $T_{30} \sim U_c(0{,}70)$. $i = 5\%$ a.a. $\alpha = 0{,}9$

$$P_T(T_{30} \geq t_{90\%}) = 0{,}9$$

$$P_T(T_{30} \geq t_{90\%}) = \int_{t_{90\%}}^{70} \frac{1}{70}\,dt = \boxed{\frac{70 - t_{90\%}}{70} = 0{,}9}$$

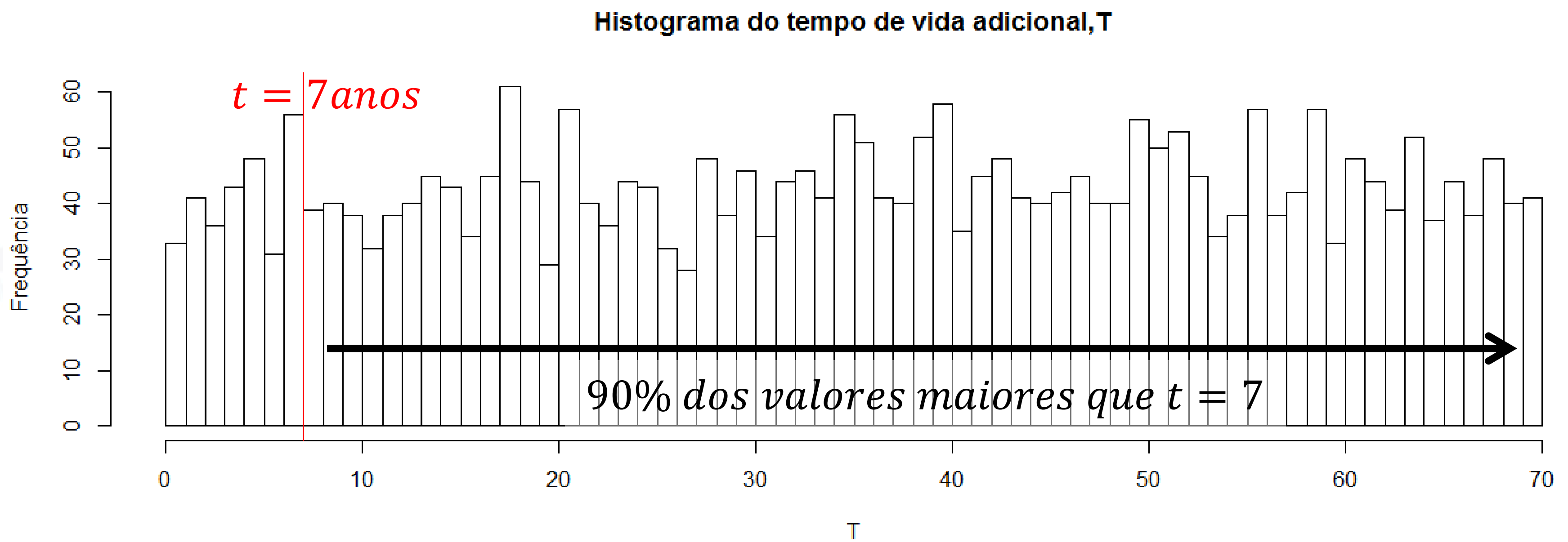
$$t_{90\%} = 7$$

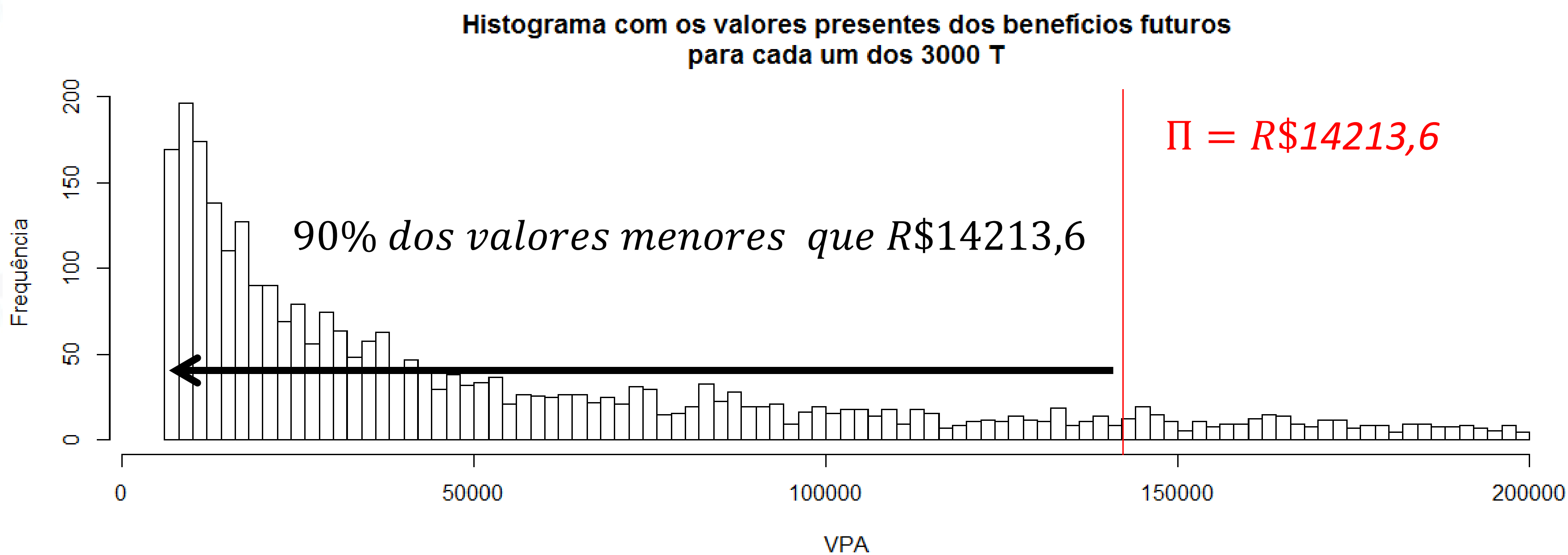
$$P_T(T_{30} \geq 7) = 0{,}9$$

$$P_T(T_{30} \geq 7) = P_T\left(T_{30} \geq \frac{ln(20000) - ln(\Pi_{30})}{\delta}\right) = 0{,}9$$

$$\frac{ln(20000) - ln\left(\Pi_{30_{0,9}}\right)}{\delta} = 7$$

$$\Pi_{30_{0,9}} \approx R\$14213{,}6$$





- Quanto maior o tempo de vida adicional menor o valor presente.
  - Valores grandes de t se geram valores pequenos e próximos de VPA.

- Exemplo 12

x decide fazer um seguro de vida vitalício com pagamento de beneficio unitário no momento de sua morte. Considere a taxa instantânea de juros, $\delta = 0{,}06$ e que $T_x \sim Exp(0{,}04)$.

$$f_{T_x}(t) = 0{,}04e^{-0{,}04t}, \;\; t > 0$$

Determine o valor de Π_x tal que $P_{Z_T}(Z_T \leq \Pi_x) = 0{,}1$

Exemplo 12

$$P_{Z_T}(Z_T \leq \Pi_x) = 0{,}1$$

$$P_T(T_x > t_{10\%}) = 0{,}1$$

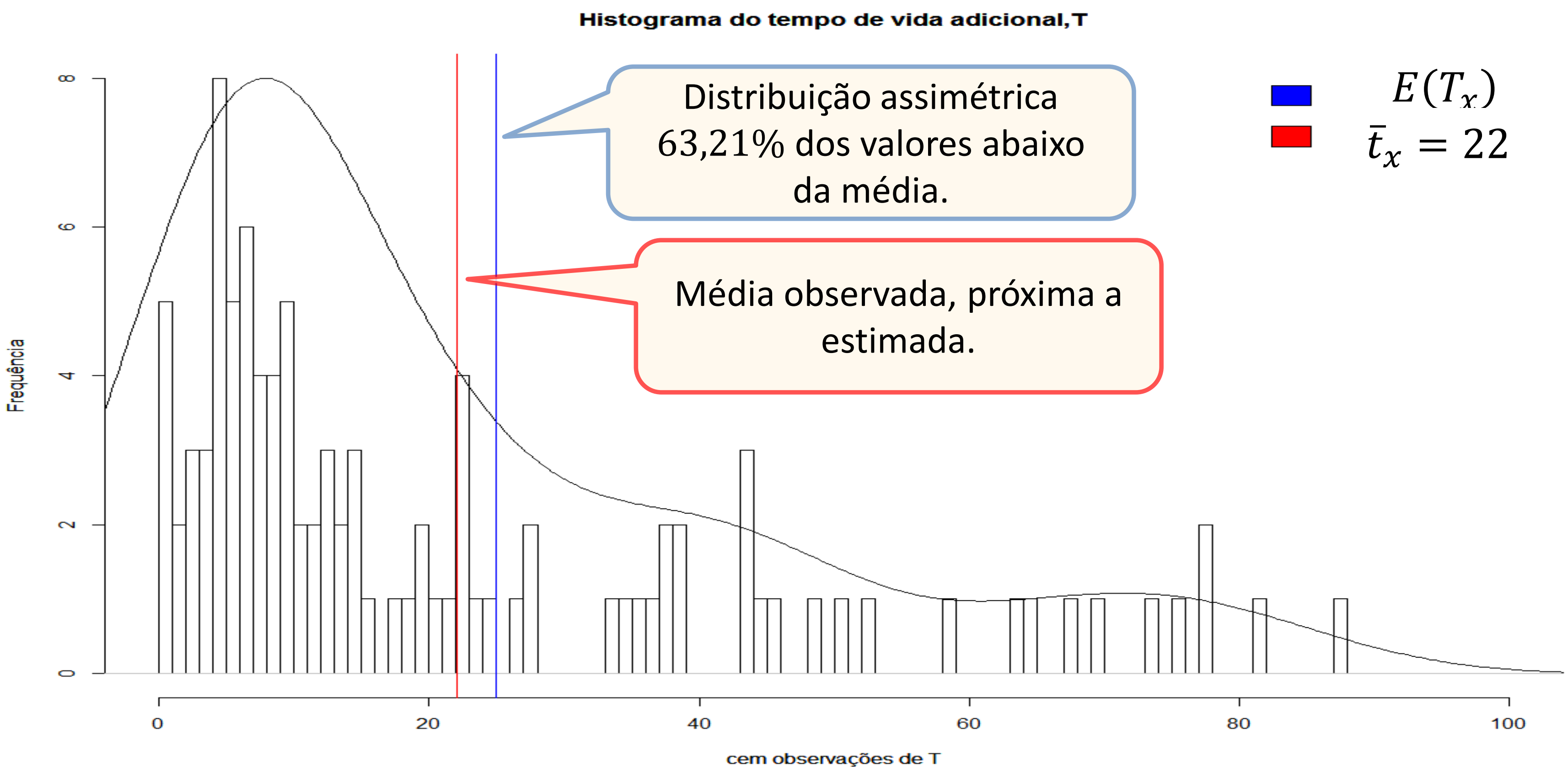
$$P_T(T_x > t_{10\%}) = \int_{t_{10\%}}^{\infty} 0{,}04e^{-0{,}04t}dt$$

$$P(T_x > t_{10\%}) = e^{-0{,}04t_{10\%}} = 0{,}1$$

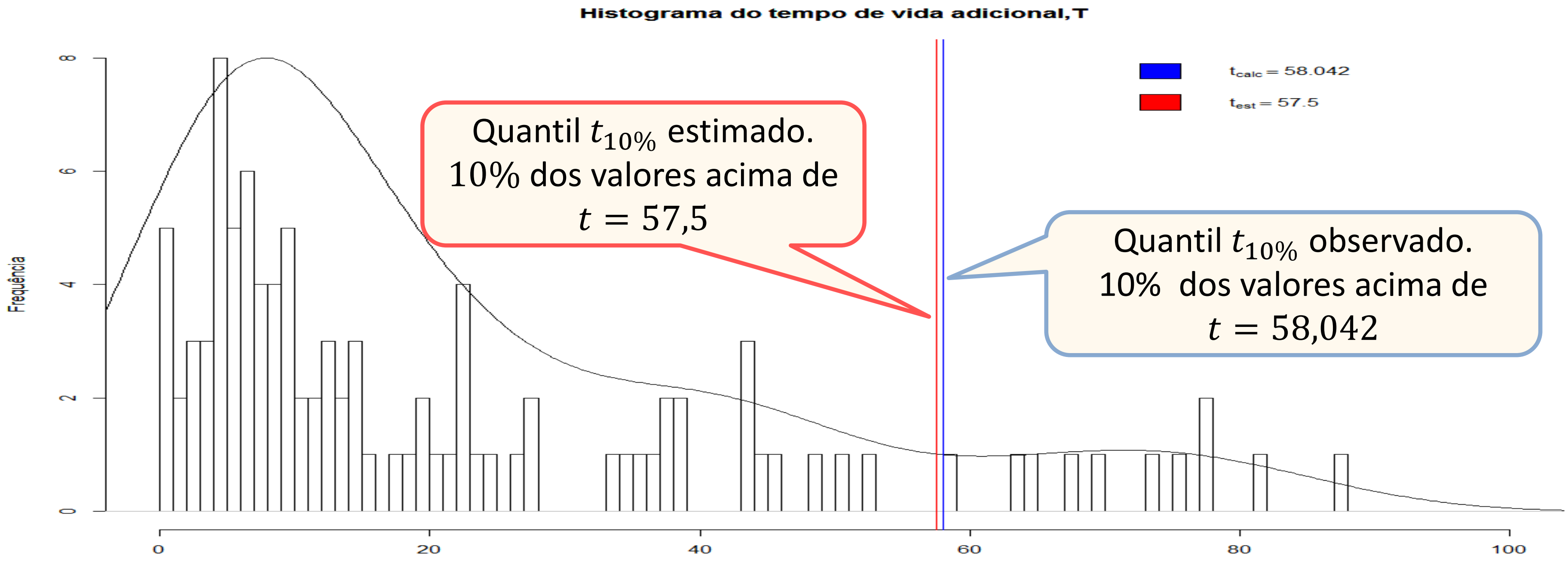
$$t_{10\%} = 57{,}5$$

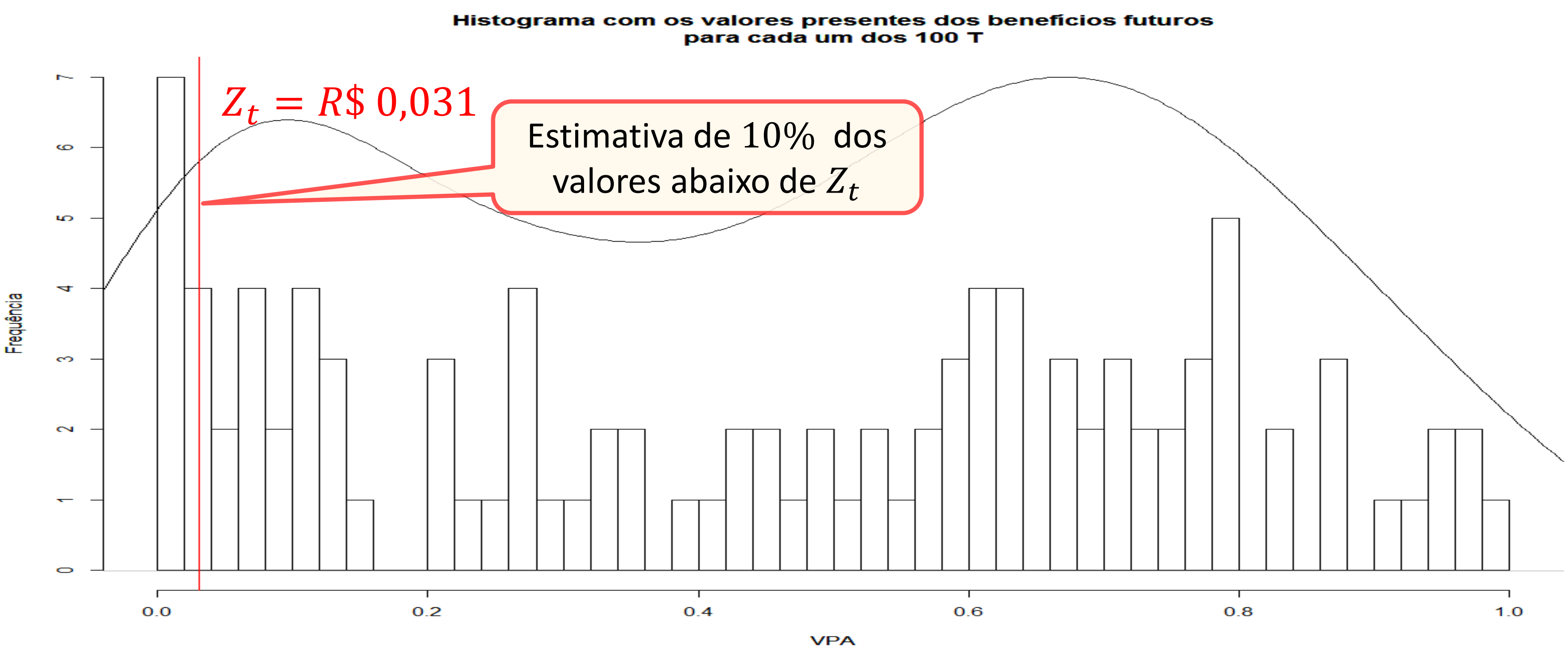
$$\Pi_x = \frac{1}{e^{0{,}06\times 57{,}5}} \approx 0{,}031745$$

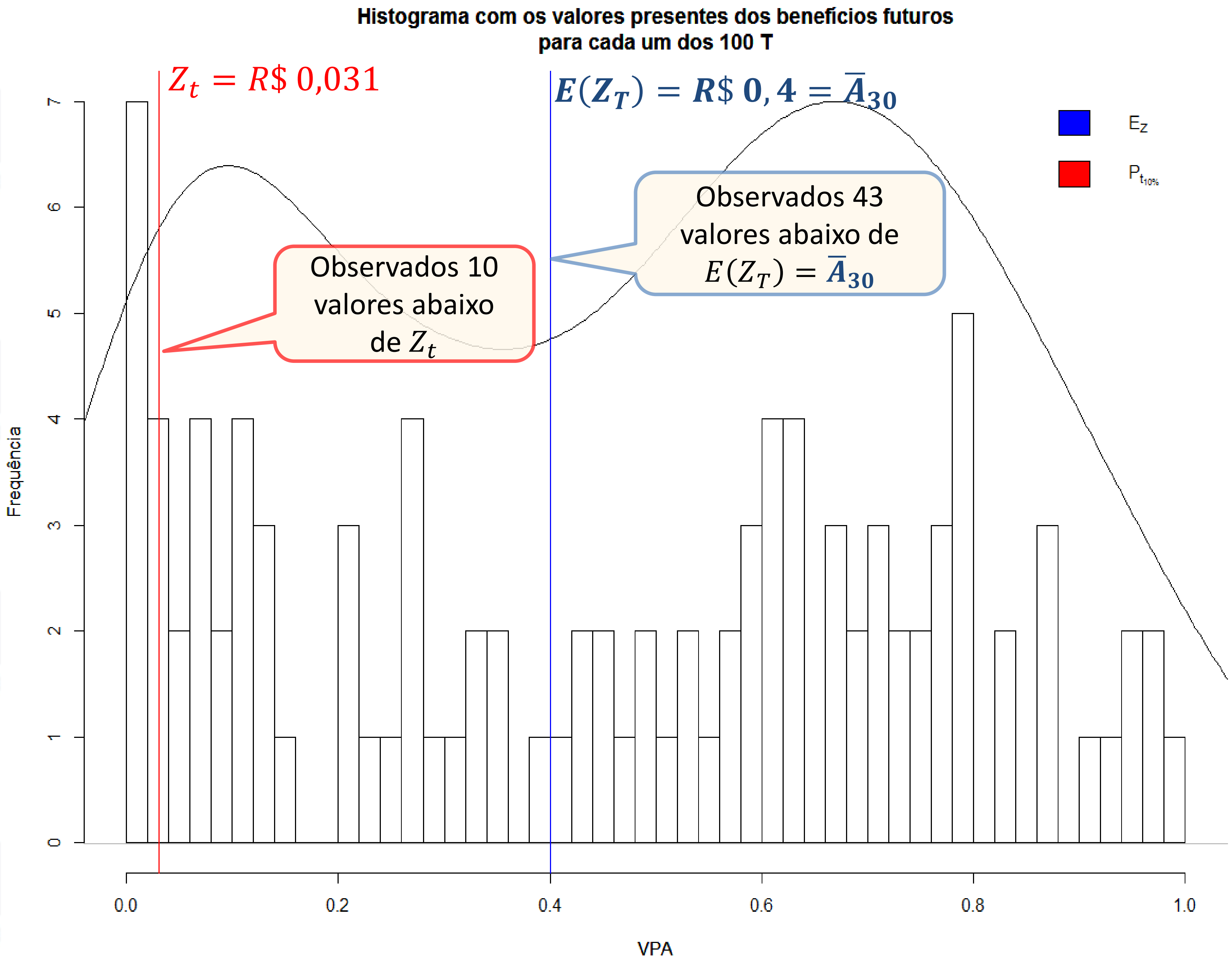
- Importante lembrar que nas mesmas condições $\bar{A}_x \approx 0{,}4$



- Gráfico da simulação de 100 apólices (ou 100 cenários) com as condições do exemplo 12.
  - A distribuição exponencial é assimétrica, onde 63,21% das observações são menores que a média.


Histograma do tempo de vida adicional,T
$t_{calc} = 58.042$
$t_{est} = 57.5$
Quantil $t_{10\%}$ estimado.
10% dos valores acima de
$t = 57{,}5$
Quantil $t_{10\%}$ observado.
10% dos valores acima de
$t = 58{,}042$
Frequência
0 20 40 60 80 100


Histograma com os valores presentes dos benefícios futuros
para cada um dos 100 T
$Z_t = R\$\ 0{,}031$
Estimativa de 10% dos
valores abaixo de Z_t
Frequência
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
VPA



Histograma com os valores presentes dos benefícios futuros para cada um dos 100 T
$Z_t = R\$ \, 0{,}031$
$E(Z_T) = R\$ \, 0,4 = \bar{A}_{30}$
E_Z
$P_{t_{10\%}}$
Observados 43 valores abaixo de $E(Z_T) = \bar{A}_{30}$
Observados 10 valores abaixo de Z_t
Frequência
0
1
2
3
4
5
6
7
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
VPA

Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

- Considere agora a variável aleatória S associada a uma carteira de seguros composta por k apólices (independentes e identicamente distribuídas), isso é

$$S = \sum_{i=1}^{k} Z_i$$

em que Z_i corresponde a função valor presente da apólice i.

$$E(S) = kE(Z)$$

$$var(S) = k\ var(Z)$$

Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

➢ Definição: Teorema central do limite.

Seja S uma variável aleatória correspondente a uma soma de k variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança μ e variância σ^2. Então:

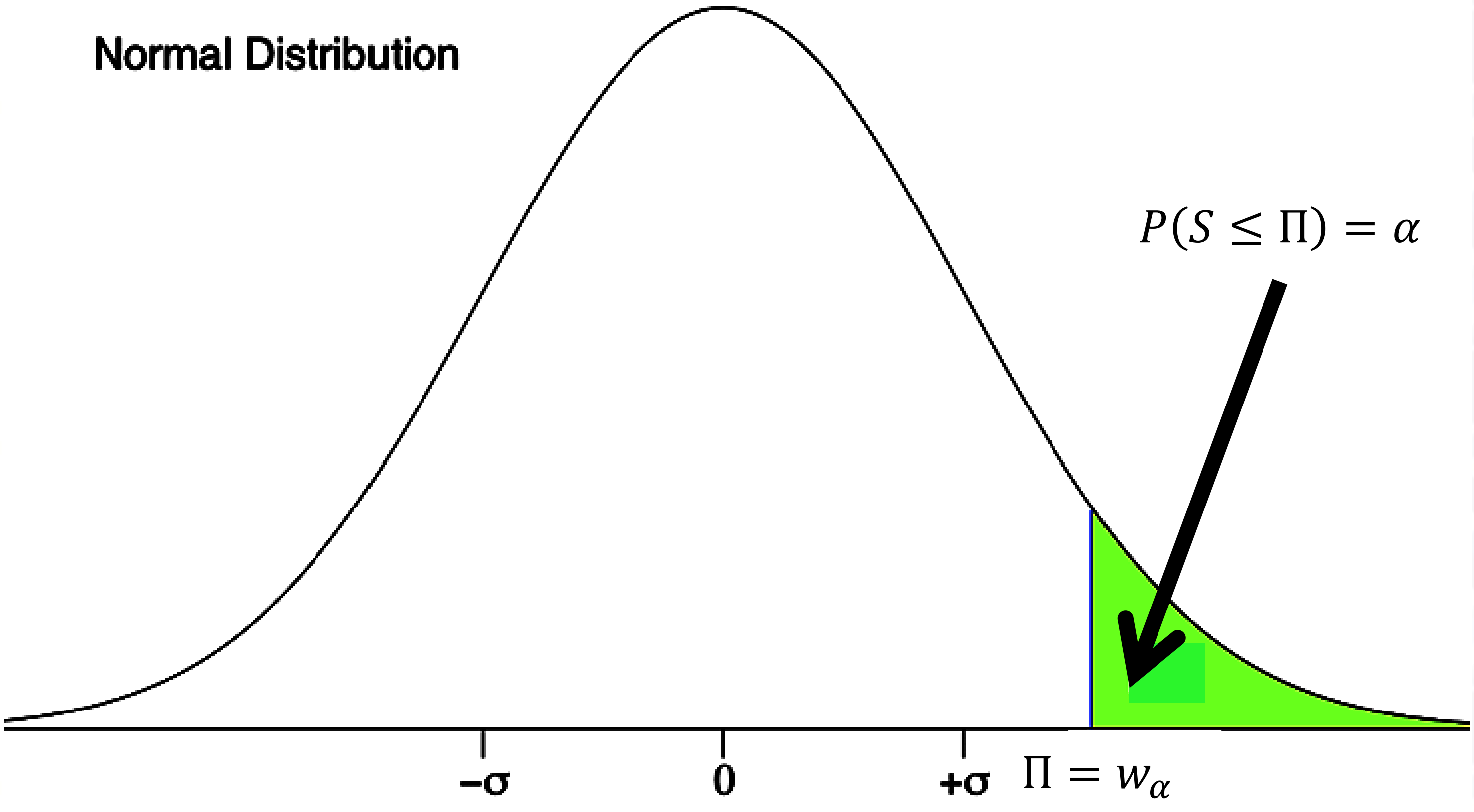
$$W = \frac{S - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \rightarrow W \sim N(0,1)$$

Logo

$$S \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

- Chamando de S a soma dos valores presentes necessários a cobrir os sinistros ocorridos, queremos encontrar o valor Π tal que:



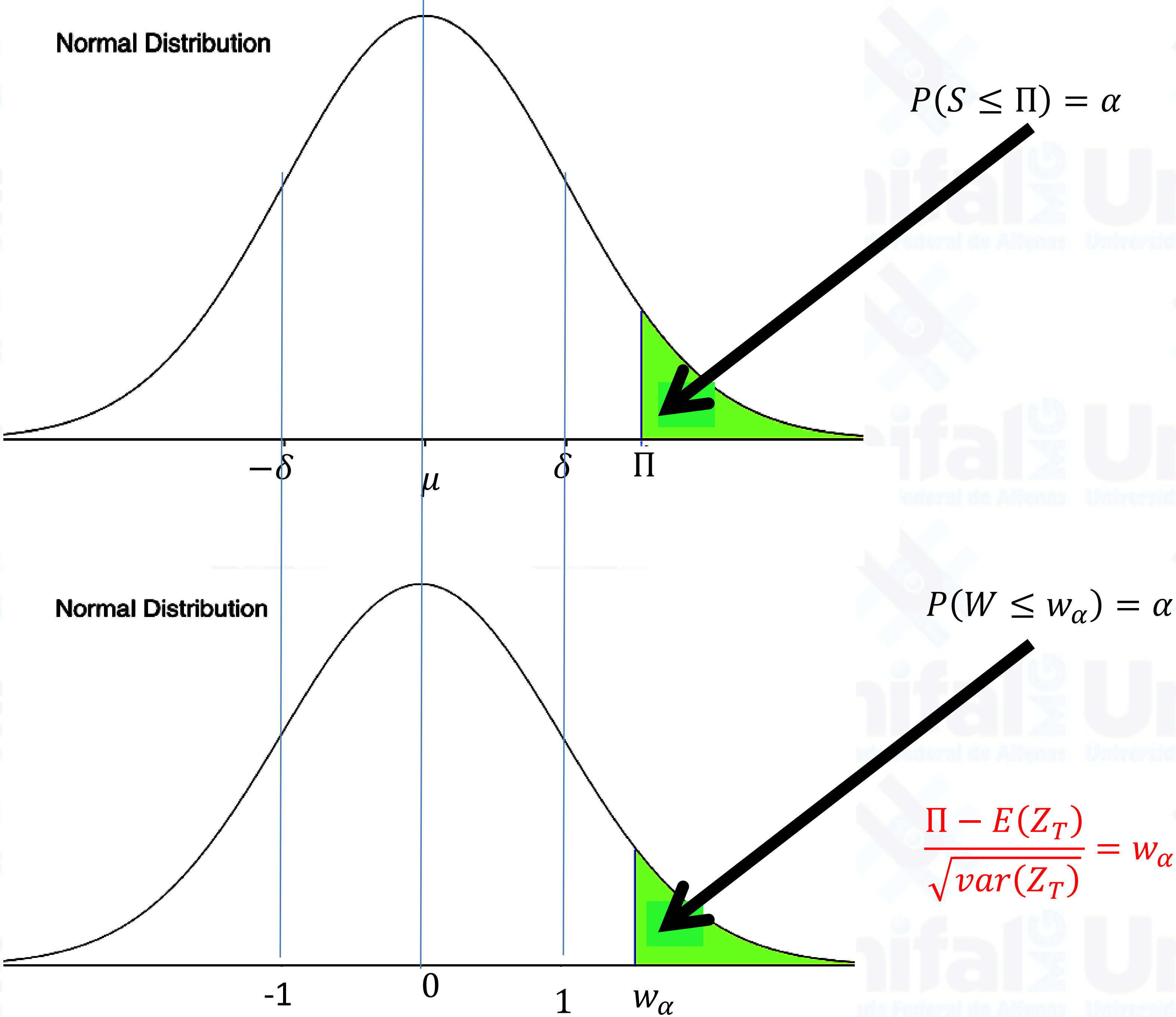
Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

$$P(S \leq \Pi) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} \leq \frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$P\left(W \leq \frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} = w_\alpha$$



Normal Distribution
$P(S \leq \Pi) = \alpha$
$-\delta$
μ
δ
Π
Normal Distribution
$P(W \leq w_\alpha) = \alpha$
$\frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} = w_\alpha$
-1
0
1
w_α

EXEMPLO

Seja uma carteira com 100 apólices de seguro de vida vitalício com benefício unitário pago no momento da morte, em que todas as apólices são independentes e identicamente distribuídas, e cada apólice corresponde ao seguro de vida de $x = 60$, e o tempo de vida adicional é modelado de tal forma que ${}_tp_{60} = e^{-0,04t}$ e $\mu(60 + t) = 0,04$. Considerando que $\delta = 0,06$ qual é o valor do prêmio Π cuja probabilidade de que o total de indenizações dessa carteira o supere seja de 5%, ou seja

$$P(S \leq \Pi) = 0,95.$$

SOLUÇÃO

Para cada apólice vida

$$\bar{\mathrm{A}}_{60} = \int_0^{\infty} e^{-0,06t} 0,04 e^{-0,04t} dt = 0,4 \text{ u.m.}$$

$$var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{60} - (\bar{\mathrm{A}}_{60})^2$$

$$var(Z_T) = \int_0^{\infty} e^{-0,12t} 0,04 e^{-0,04t} dt - (0,4)^2 \approx 0,09$$

Logo $E(S) = 40$ e $var(S) = 9$.

SOLUÇÃO

Para cada apólice vida

$$\bar{\mathrm{A}}_{60} = 0{,}4 \text{ u.m.} \quad var(Z_T) = 0{,}09$$

Logo $E(S) = 40$ e $var(S) = 9$.

$$P(S \leq \Pi) = 0{,}95 \quad P\left(W \leq \frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}95$$

Como $W \sim N(0{,}1)$, então

$$\frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}} = \mathrm{w}_{0{,}95} = 1{,}645$$

$$\Pi = 44{,}93.$$