### Matemática atuarial

AULA 20- Prêmios periódicos (Seguros)

Danilo Machado Pires danilo.pires@unifal-mg.edu.br Leonardo Henrique Costa leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

#### **Prêmios**

- ➤ O prêmio poderá ser pago de 3 formas:
  - Um único pagamento.
    - Valor esperado da função valor presente.
    - ➤ Valor atuarial.
  - Prêmios periódicos de valor constante no tempo (prêmios nivelados).
  - Prêmios periódicos de quantidade variável.

O contrato estipula que o <u>segurado</u> deverá pagar um prêmio constante **P** (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver.

O primeiro pagamento será uma fração do prêmio pois este será capitalizado pela seguradora e o último pagamento corresponderá ao próprio prêmio.

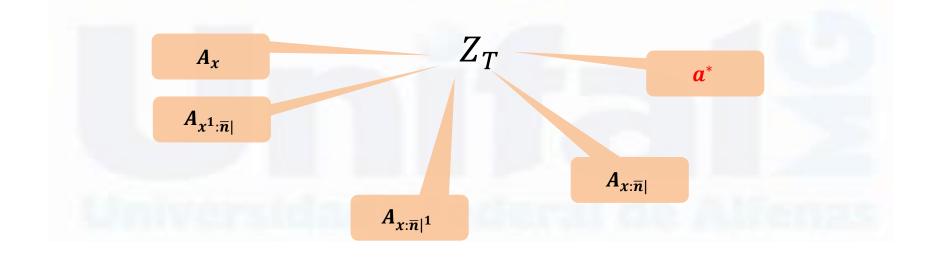
O contrato estipula que o <u>segurado</u> deverá pagar um prêmio constante **P** (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver.

O compromisso do <u>SEGURADO (Y)</u>, em valor presente ( a data  $\underline{0}$ ) é igual a :

$$Y = Pv^{k} + Pv^{k-1} \dots + Pv^{3} + Pv^{2} + Pv + P = P(v^{k} + v^{k-1} + \dots + v^{2} + v + 1)$$

$$Y = P\left(\frac{1 - v^{k+1}}{1 - v}\right) = P\ddot{a}_{\overline{k+1}}$$

Por outro lado o valor presente do benefício que será pago pela seguradora por uma dada modalidade de seguro é representado por  $Z_T$ . Então, o compromisso em valor presente do **SEGURADOR** é:



A ideia básica do cálculo do valor de *P*, está em igualar o compromisso do segurado ao compromisso do segurador, a data 0. Tal que

$$L = \text{Compromisso do segurador} - \text{Compromissos segurado}$$
 
$$L = Z_T - Y$$

Princípio da Equivalência, E(L) = 0

$$E(L) = 0 = E(Z_T - Y)$$

$$E(Z_T) = E(Y)$$

$$E(Y) = E(Z_T)$$

$$E(P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = E(Z_{T_x})$$

$$P\ddot{a}_{x} = E(Z_{T_{x}})$$

$$P = \frac{E(Z_{T_x})}{\ddot{a}_x}$$

# Prêmio Puro periódico Anual- $A_\chi$

$$P_{\mathcal{X}} = \frac{A_{\mathcal{X}}}{\ddot{a}_{\mathcal{X}}}$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$
 e  $\ddot{a}_x = a_x + 1$ 

$$P_{\mathcal{X}} = \frac{(1-v)A_{\mathcal{X}}}{1-A_{\mathcal{X}}}$$

**EXEMPLO 1:** Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1 - v)A_{25}}{1 - A_{25}}$$

**EXEMPLO 1:** Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{0}, 2492899 \quad \ddot{a}_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{25}, 774389 \quad v \approx 0,9708738$$

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} \approx 0,00967$$
  $P_{25} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}} \approx 0,00967$ 

**EXEMPLO 1:** Caso o segurado queira que o beneficiário receba *R*\$1000,00 neste seguro de vida inteira, então:

$$1000P_{25} = 1000(0,00967)$$

$$1000P_{25} = R$9,67$$

#### Prêmio Puro periódico Anual- $A_{\chi}$

pagamentos limitados

No caso dos pagamentos estarem limitados a um período  $k < \omega - x$ , tem-se:

$$_{k}P_{x}=rac{A_{x}}{\ddot{a}_{x:ar{k}|}}$$
 Número de pagamentos

**EXEMPLO 2:** Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?



**EXEMPLO 2:** Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?

$$_{4}P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{4}|}} = \frac{0,24929}{3,82415} \approx 0,06519$$

# Prêmio Puro periódico Anual- $A_{\chi^1:ar{n}|}$

$$P_{x^1:\overline{k}|} = \frac{A_{x^1:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

**EXEMPLO 3:** Qual o valor do prêmio puro anual pago durante a vigência de um seguro com cobertura de 5 anos, feito por uma pessoa de 40 anos de idade? Considere a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano.

#### **EXEMPLO 3:**

$$A_{40^{1}:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{T+1}{}_{t} p_{40} q_{40+t} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{t}_{t} p_{40} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}$$

$$P_{40^{1}:\overline{5}|} = \frac{A_{40^{1}:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0,002452$$

A teoria até agora nos levou ao cálculo do Prêmio nivelado a ser pago pelo segurado uma vez escolhido o valor do benefício.

- > Pensemos agora na seguinte situação:
- ➤ Um segurado procura um fundo de pensão e sabe quanto ele, o segurado, poderá depositar no fundo de pensão anualmente para adquirir uma anuidade em sua aposentadoria (digamos, daqui a *n* anos).

Este segurado gostaria de saber qual o benefício ele receberá ser fizer os depósitos durante sua vida ativa.

Neste caso, conhecemos o valor do Prêmio nivelado, porém, não conhecemos o valor do benefício a ser pago.

...não estamos querendo calcular o prêmio que, em média seja o suficiente para pagamento de sinistros.

...queremos calcular o benefício que em média a seguradora não tenha nem ganho nem perda financeira.

**EXEMPLO 4:** Um segurado de 40 anos quer comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado se propõe a pagar por 5 anos um prêmio de \$0,003 a contar do dia do contrato. Qual deverá ser o benefício contratado nesse seguro? Use a tábua AT - 49 e uma taxa de juros de 3% ao ano.



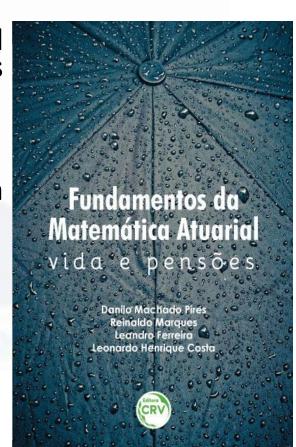
#### **EXEMPLO 4 - Solução**

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} bv^{T+1} & se \ 0 \le T < 5 \\ 0 & se \ T > 5 \end{cases} \qquad \text{e} \quad Y = \begin{cases} 0,003 \ \ddot{a}_{\overline{T_x}|} & se \ 0 \le T < 5 \\ 0,003 \ \ddot{a}_{\overline{5}|} & se \ T \ge 5 \end{cases}$$

Valor de  $P_{40^1:\overline{5}|}$  é conhecido. Então:

$$b = \frac{0,003\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{A_{40:\overline{5}|}} = \frac{0,003(4,696544)}{0,0115156} \approx 1,22$$

- Portal Halley: <a href="https://atuaria.github.io/portalhalley/">https://atuaria.github.io/portalhalley/</a>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões. Curitiba: CRV,2022.



#### Aula 21

Danilo Machado Pires danilo.pires@unifal-mg.edu.br



Seja uma pessoa de 40 anos que queira pagar por um seguro que paga 1 *u.m.* Considerando a tábua de mortalidade AT-49 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação (3%).

- a) Calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado?
- b) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante toda a vigência do seguro?
- c) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante 15 anos?

- d) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado?
- e) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos com benefício de *R*\$50000,00. Qual o valor da parcela do Prêmio puro único a ser pago pelo segurado, para o caso excepcional, do segurado poder pagar por 10 anos?
- f) Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga R\$ 250 mil se o segurado sobreviver durante o período de 3 anos. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago pelo segurado?

### Prêmio Puro periódico Anual fracionado

Esses prêmios podem ser pagos de forma fracionadas ao longo do ano.

$$P_{x}^{(m)} = \frac{E(Z_{T_{x}})}{m \ddot{a}_{x:\bar{k}|}^{(m)}}$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 -_n p_x v^n) \left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

**EXEMPLO 1:** Uma pessoa de 40 anos decide adquirir um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato, um prêmio fixo mensal. Qual o valor do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando a tábua AT-49 e uma taxa de juros 3% ao ano?



#### **SOLUÇÃO**

$$A_{40^1:\overline{5}|} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)} \approx \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - (1 - p_{40}v^5) \left(\frac{12 - 1}{2 \times 12}\right)$$

$$P_{40^{1}:\overline{5}|}^{(12)} = \frac{A_{40^{1}:\overline{5}|}}{12\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)}} \approx 0,0002$$

Planos	Prêmio Puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.	$P_{x} = \frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x}}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante $k$ anos.	$_{k}P_{x}=\frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{k} }}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$P_{x^1:\bar{n} } = \frac{A_{x^1:\bar{n} }}{\ddot{a}_{x:\bar{n} }}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n} ^{1}} = \frac{A_{x:\overline{n} ^{1}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\bar{n} } = \frac{A_{x:\bar{n} }}{\ddot{a}_{x:\bar{n} }}$

• • •

#### PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_{x} = \frac{\bar{A}_{x}}{\bar{a}_{x}}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante $k$ anos.	$_{k}\bar{P}_{x}=\frac{\bar{A}_{x}}{\bar{a}_{x:\overline{k} }}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^1:\bar{n} } = \frac{\bar{A}_{x^1:\bar{n} }}{\bar{a}_{x:\bar{n} }}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n} ^{1}} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} ^{1}}}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\bar{n} } = \frac{\bar{A}_{x:\bar{n} }}{\bar{a}_{x:\bar{n} }}$

• • •

**EXEMPLO 2:** Considere que um indivíduo de idade x, decida fazer um seguro de vida temporário por 10 anos, que pague um benefício unitário no momento da morte do segurado. Dado que o tempo de vida adicional possa ser modelado pela distribuição exponencial,  $T_x \sim Exp(0,02)$ , calcule o prêmio  $\bar{P}_{x^1:\bar{10}|}$  anual, que deverá ser pago pelo segurado. Considere  $\delta = 0,06$ .



#### **EXEMPLO 2**

$$\bar{P}_{\chi^1:\overline{10}|} = \frac{\bar{A}_{\chi^1:\overline{10}|}}{\bar{a}_{\chi:10|}},$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{(1 - e^{-\delta 10})}{\delta} e^{-\alpha 10}$$

$$\bar{A}_{\chi^1:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-\delta t} \, \alpha e^{-\alpha t} dt$$

Após resolver as integrais acima e substituir  $\delta = 0.06$  e  $\alpha = 0.02$ .

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} \approx 6,8834$$

$$\bar{A}_{\chi^1:\overline{10}|} \approx 0.13766$$

$$\bar{P}_{\chi^1:\overline{10}|} \approx \frac{0.13766}{6.8834} \approx 0.01999$$

#### Relações importantes

$$\bar{P}_{x} = \frac{i}{\delta} P_{x}$$

$$\bar{P}_{x^1:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|}$$

$$\bar{P}_{x:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|} + P_{x:\bar{n}|^1}$$

A busca do valor da parcela do prêmio através do princípio da equivalência, estabelece uma paridade entre os gastos do segurado e da seguradora. Contudo ...

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P(Z_{T_{\mathcal{X}}} > Y) = \epsilon$$

Como  $L = Z_{T_x} - Y$  para o caso em que trata-se do prêmio relacionado seguros de vida, tem-se:

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P\left(be^{-\delta T} > \bar{P}\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right)\right) = \epsilon$$

$$P\left(\delta be^{-\delta T} > \bar{P}(1 - e^{-\delta T})\right) = \epsilon$$

$$P\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} > e^{\delta T} \left(1 - e^{-\delta T}\right)\right) = \epsilon$$

$$P\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1 > e^{\delta T}\right) = \epsilon$$

$$P\left(\ln\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right) > \delta T\right) = \epsilon$$

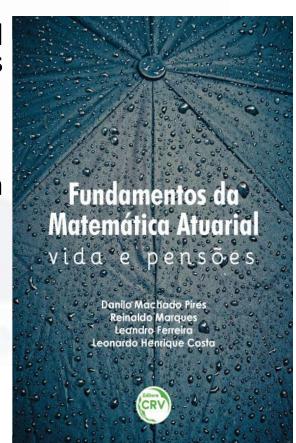
$$P\left(\frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right)}{\delta} > T\right) = \epsilon$$

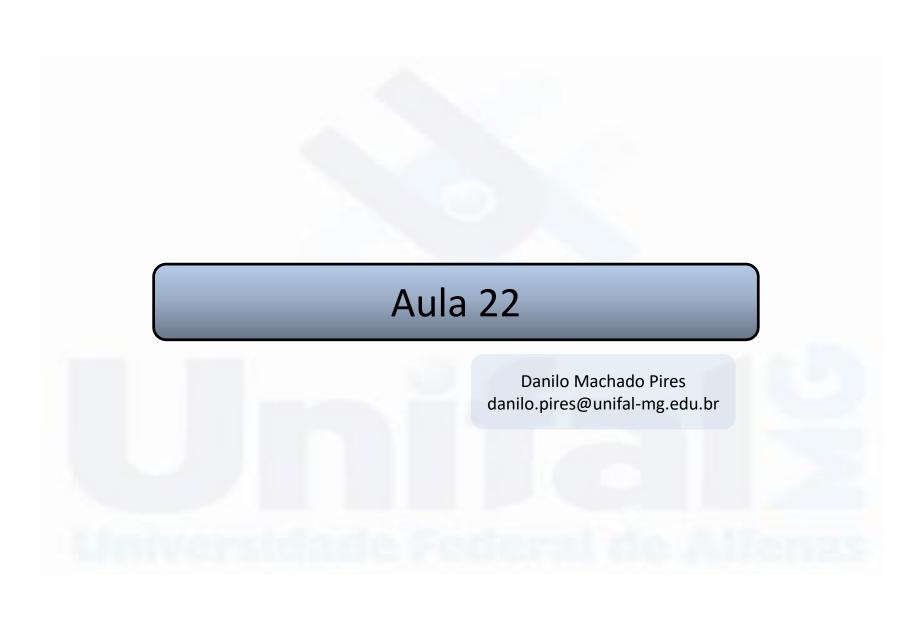
$$P\left(T < \frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right)}{\delta}\right) = \epsilon$$

$$\frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\overline{P}} + 1\right)}{\delta} = t_{\epsilon}$$

$$\bar{P} = \frac{\delta b}{e^{\delta t_{\epsilon}} - 1}$$

- Portal Halley: <a href="https://atuaria.github.io/portalhalley/">https://atuaria.github.io/portalhalley/</a>
- Bowers et al. Actuarial Mathematics, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões. Curitiba :CRV,2022.





# **Prêmios** Anuidades

Com exceção do seguro diferido, os prêmios de seguro serão pagos durante o período de cobertura do mesmo.

➤ No caso das anuidades em geral os prêmios são pagos antes do período de sua vigência.

# **Prêmios** Anuidades

A função perda, *L*, da seguradora que relaciona os compromissos do segurado com os pagamentos dos prêmios e o compromisso da seguradora com os pagamentos de benefícios é dada por:

$$L = Y_b - Y_p$$

$$Y_p = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} & T=0,1,2,\ldots,k-1\\ P\ddot{a}_{\overline{k}|} & T=k,k+1,\ldots \end{cases} : \text{ compromisso do segurado por } k$$
 anos,

 $Y_b$ : compromisso da seguradora (alguma modalidade de anuidade diferida).

$$E(L)=0$$

$$P(Y_b) = \frac{E(Y_b)}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}}$$

# **Prêmios** Anuidades

<b>Planos</b>
---------------

Prêmio puro

Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P(k_|\ddot{a}_x) = \frac{k_|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia diferida por n anos, com prêmios limitados a k anos. ( $k \le n$ )

$$P(n|\ddot{a}_x)_k = \frac{n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P(x_{||}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{x_{||}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P\left(\left| k \right| \ddot{a}_{x}^{(m)} \right) = \frac{\left| k \right| \ddot{a}_{x}^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}^{(m)}}$$

...

**EXEMPLO 1**: Uma pessoa de 20 anos de idade, decide comprar uma anuidade vitalícia que pague um benefício igual a 1, caso chegue vivo à idade de 60 anos. Qual o valor do prêmio puro pago por essa pessoa para adquirir esse plano? Considere a tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

#### **SOLUÇÃO:**

\*Não faz sentido adquiri rendas vitalícias imediatas a prêmios periódicos, todavia, é justificável adquirir rendas vitalícias diferidas. Assim:

#### **EXEMPLO 1**

$$P\left(\left| a_{0} \right| \ddot{a}_{20} \right) = \frac{|a_{0}| \ddot{a}_{20}}{|\ddot{a}_{20}|} = \frac{|v^{40}|_{40} p_{20} \ddot{a}_{60}|}{|\ddot{a}_{20}|_{40}|} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}}}{\frac{(N_{20} - N_{60})}{D_{20}}} = \frac{N_{60}}{(N_{20} - N_{60})}$$

$$P(a_0|\ddot{a}_{20}) \approx 0.157468$$

Caso o segurado tenha interesse de receber \$25000,00 ao ano, então:

$$25000P(a_0|\ddot{a}_{20}) \approx 25000(0,157468) \approx 3936,711$$

**EXEMPLO 2:** Suponha que uma pessoa de 18 anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir mensalmente por um período de 33 anos para sua aposentadoria ( que também será mensal e vitalícia). Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de \$10000,00 e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 3% ao ano? ( considere a Tábua AT-49)



#### **SOLUÇÃO:**

$$P\left(\begin{array}{c} 33 | \ddot{a}_{18}^{(12)} \right) = \frac{33 | \ddot{a}_{18}^{(12)} |}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$$_{33}|\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33}\left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{22}\right) \approx 6$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - (1 - {}_{33}p_{18}v^{33}) \left(\frac{11}{22}\right) \approx 20,76$$

$$P\left(\frac{33}{31}\ddot{a}_{18}^{(12)}\right) \approx \frac{6}{20,76} \approx 0,288$$

Logo o valor pago mensalmente será de \$2880

#### Lista (entregar)

1) Considere uma pessoa de idade 30 que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga R\$1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição Uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja,  $T \sim U(0,70)$ . Suponha que i = 5% a. a.

Calcule o prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

2) Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de P = 0.157468.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do benefício contratado pelo segurado?

3) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga R\$ 1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros  $\alpha$ , ou seja,  $T \sim Exp(\alpha)$ .

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

4) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que paga R\$ 1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros  $\alpha$ , ou seja,  $T \sim Exp(0,02)$ .

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado, considere  $\delta = 0.06$ 

- Portal Halley: <a href="https://atuaria.github.io/portalhalley/">https://atuaria.github.io/portalhalley/</a>
- Bowers et al. Actuarial Mathematics, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões. Curitiba :CRV,2022.

