

Matemática Atuarial II

Aula 17

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Status composto

- O status composto refere-se a um produto atuarial que envolve várias vidas, onde se mescla os conceitos do status vida conjunta com os do status último sobrevivente.
- Estruturas mais complexas

Status composto

Por exemplo, pode-se ter interesse em contratar uma anuidade postecipada cujos benefícios são pagos enquanto x **ou** y estiverem vivos desde que z **ou** w também estejam, ou seja:

$$a_{\overline{x,y,w,z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,w,z}}$$

Para $b = 1$.

Status composto

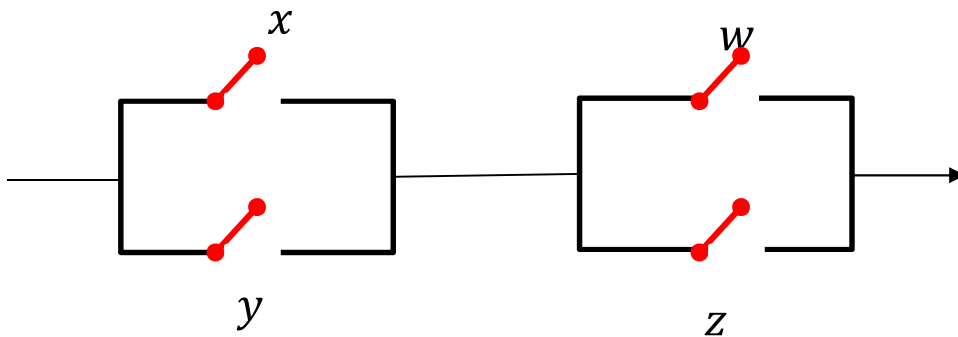
$$a_{\overline{x,y:\overline{w,z}}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,\overline{w,z}}}$$

$a_{\boxed{1}:\boxed{2}}$ O status falha quando o primeiro grupo “falhar”
(seja o 1 ou o 2)

$\boxed{1} = \overline{x,y}$ O status falha quando ocorrer a última morte entre x e y

$\boxed{2} = \overline{w,z}$ O status falha quando ocorrer a última morte entre w e z

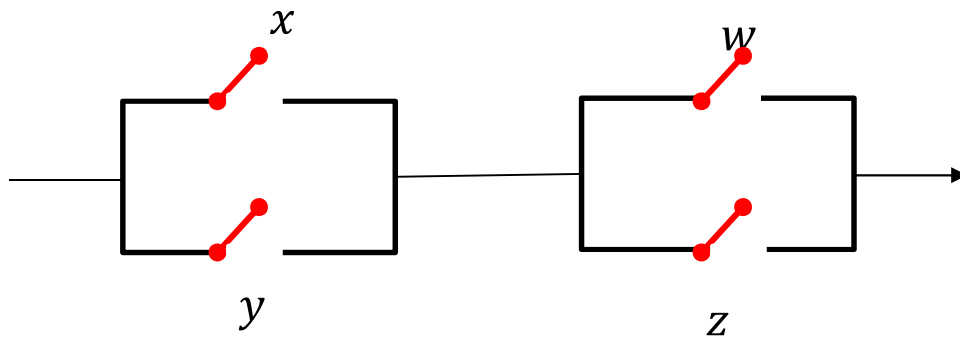
$$a_{\overline{x,y,w,z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,w,z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o fim do pagamento da anuidade

	x	y	w	z
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

$$a_{\overline{x,y,w,z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,w,z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o fim do pagamento da anuidade

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>w</i>	<i>z</i>	
1	1	1	1	1	A
2	0	1	1	1	A
3	1	0	1	1	A
4	1	1	0	1	A
5	1	1	1	0	A
6	1	1	0	0	Falha
7	1	0	1	0	A
8	1	0	0	1	A
9	1	0	0	0	Falha
10	0	1	1	0	A
11	0	1	0	1	A
12	0	1	0	0	Falha
13	0	0	1	1	Falha
14	0	0	1	0	Falha
15	0	0	0	1	Falha
16	0	0	0	0	Falha

Status composto

$$a_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x},\overline{y}} {}_t p_{\overline{w},\overline{z}},$$

$$a_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) ({}_t p_w + {}_t p_z - {}_t p_w {}_t p_z),$$

$$a_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} [v^t ({}_t p_x {}_t p_w) + ({}_t p_x {}_t p_z) - ({}_t p_x {}_t p_w {}_t p_z) + v^t ({}_t p_y {}_t p_w) + v^t ({}_t p_y {}_t p_z) - v^t ({}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z) - v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w) - v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z) + v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z {}_t p_w)]$$

Status composto

$$\begin{aligned}
 & a_{\overline{x}, \overline{y}, \overline{w}, \overline{z}} \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_w) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_z) - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_w {}_t p_z) \\
 &+ \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_y {}_t p_w) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_y {}_t p_z) - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z) \\
 &- \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w) - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z {}_t p_w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{\overline{x}, \overline{y}, \overline{w}, \overline{z}} \\
 &= a_{x,w} + a_{x,z} - a_{x,w,z} + a_{y,w} + a_{y,z} + a_{y,w} - a_{y,w,z} \\
 &\quad - a_{x,y,w} - a_{x,y,z} + a_{x,y,z,w}
 \end{aligned}$$

Status composto

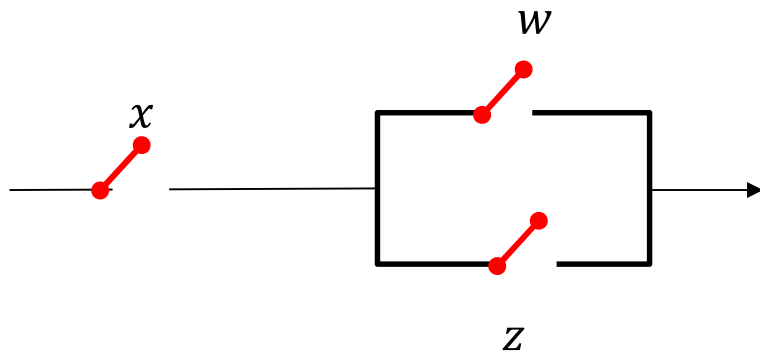
Como será o prêmio puro único de uma anuidade vitalícia de efeito imediato, que paga os benefícios de forma postecipada desde que x esteja vivo e o último sobrevivente de w ou z estiver vivo.

Status composto

Como será o prêmio puro único de uma anuidade vitalícia de efeito imediato, que paga os benefícios de forma postecipada desde que x esteja vivo e o último sobrevivente de w ou z estiver vivo.

$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$

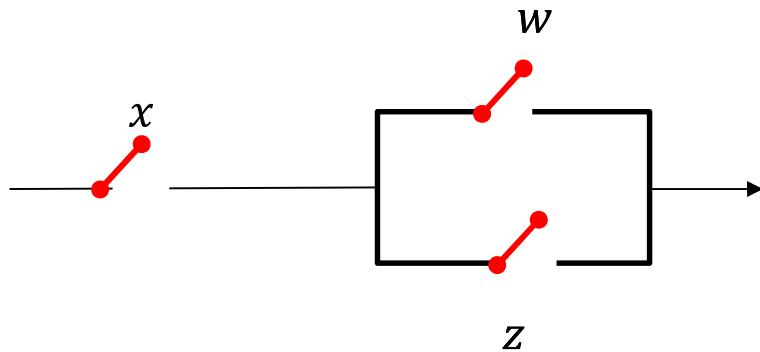
$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$



x	w	z	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

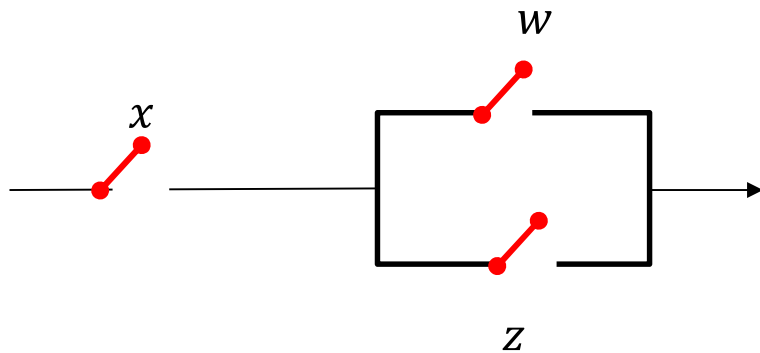
$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

	x	w	z	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga
2	0	1	1	Falha
3	1	0	1	A/Paga
4	1	1	0	A/Paga
5	1	0	0	Falha
6	0	1	0	Falha
7	0	0	1	Falha
8	0	0	0	Falha

E caso esse status composto fosse feito para um seguro de vida vitalício, como seria os pagamentos?



	x	w	z	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$	$A_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga	A
2	0	1	1	Falha	Falha/Paga
3	1	0	1	A/Paga	A
4	1	1	0	A/Paga	A
5	1	0	0	Falha	Falha/Paga
6	0	1	0	Falha	Falha/Paga
7	0	0	1	Falha	Falha/Paga
8	0	0	0	Falha	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

Como calcular o valor de $a_{x,\overline{w},\overline{z}}$ e $A_{x,\overline{w},\overline{z}}$?

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



Matemática Atuarial II

Aula 18

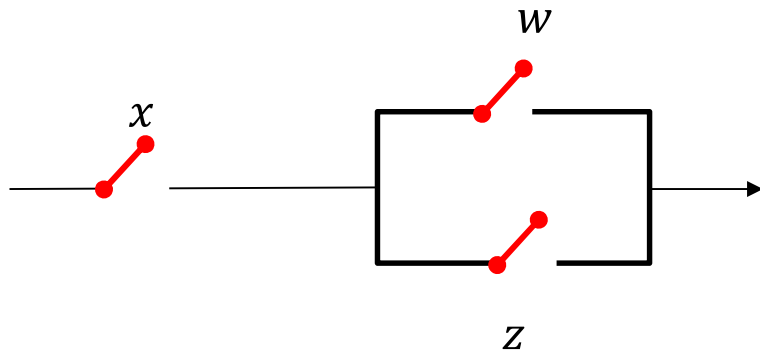
Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Status composto

Como será o prêmio puro único de uma anuidade vitalícia de efeito imediato, que paga os benefícios de forma postecipada desde que x esteja vivo e o último sobrevivente de w ou z estiver vivo.

$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$

Status composto



	x	w	z	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$	$A_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga	A
2	0	1	1	Falha	Falha/Paga
3	1	0	1	A/Paga	A
4	1	1	0	A/Paga	A
5	1	0	0	Falha	Falha/Paga
6	0	1	0	Falha	Falha/Paga
7	0	0	1	Falha	Falha/Paga
8	0	0	0	Falha	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

Como calcular o valor de $a_{x,\overline{w},\overline{z}}$ e $A_{x,\overline{w},\overline{z}}$?

Status composto

Para esse cálculo é importante perceber que:

$$\begin{aligned} T_{\overline{w,z}} = T_w \text{ então } T_{w,z} = T_z \text{ logo } T_{x,\overline{w,z}} = T_{x,w} \text{ e } T_{x,w,z} = T_{x,z} \\ T_{\overline{w,z}} = T_z \text{ então } T_{w,z} = T_w \text{ logo } T_{x,\overline{w,z}} = T_{x,z} \text{ e } T_{x,w,z} = T_{x,w} \end{aligned}$$

Consequentemente

$$T_{x,\overline{w,z}} + T_{x,w,z} = T_{x,w} + T_{x,z}$$

Dessa forma...

$$v^{T_{x,\overline{w,z}}+1} + v^{T_{x,w,z}+1} = v^{T_{x,w}+1} + v^{T_{x,z}+1}$$

Tomando a esperança dos dois lados:

Status composto

$$E(v^{T_{x,\overline{w,z}}+1}) + E(v^{T_{x,w,z}+1}) = E(v^{T_{x,w}+1}) + E(v^{T_{x,z}+1})$$

$$A_{x,\overline{w,z}} + A_{x,w,z} = A_{x,w} + A_{x,z}$$

em que $A_{x,\overline{w,z}}$ é um seguro onde o benefício é pago assim que a primeira pessoa morrer entre x e o último sobrevivente entre w e z , e $A_{x,w,z}$ é o seguro pago assim que ocorrer a primeira morte entre x , w e z .

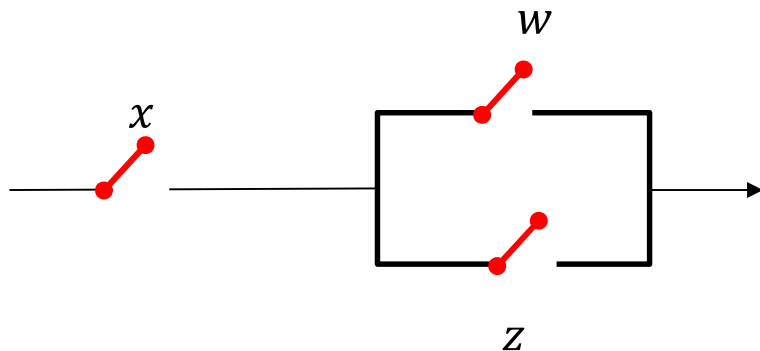
Status composto

O mesmo raciocínio serve para

$$a_{x,\overline{w,z}} + a_{x,w,z} = a_{x,w} + a_{x,z}$$

em que $a_{x,\overline{w,z}}$ é uma anuidade paga enquanto x estiver vivo e pelo menos um entre w e z estiver vivo, e $a_{x,w,z}$ é o anuidade paga enquanto todos os componentes do status (x , w e z) estiverem vivos.

Status composto



	x	w	z	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$	$A_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga	A
2	0	1	1	Falha	Falha/Paga
3	1	0	1	A/Paga	A
4	1	1	0	A/Paga	A
5	1	0	0	Falha	Falha/Paga
6	0	1	0	Falha	Falha/Paga
7	0	0	1	Falha	Falha/Paga
8	0	0	0	Falha	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

$$a_{x,\overline{w},\overline{z}} = a_{x,w} + a_{x,z} - a_{x,w,z}$$

$$A_{x,\overline{w},\overline{z}} = A_{x,w} + A_{x,z} - A_{x,w,z}$$

Exemplo: Qual prêmio puro único pago por um seguro de vida vitalício com benefício unitário para o status composto, formado por $x = 30$, $y = 32$, $w = 12$ e $z = 10$. Cujo benefício será pago quando a **segunda** morte ocorrer no par contrário ao da **primeira** morte ou à terceira morte, caso as duas primeiras ocorram no mesmo par?

Exemplo: ...cujo benefício será pago quando a **segunda morte ocorrer no par contrário ao da primeira morte** ou à terceira morte, caso as duas primeiras ocorram no mesmo par?

Solução

Em um primeiro momento é possível identificar dois pares do status vida conjunta, pois com a primeira morte em um par já busca-se a morte no segundo par, logo

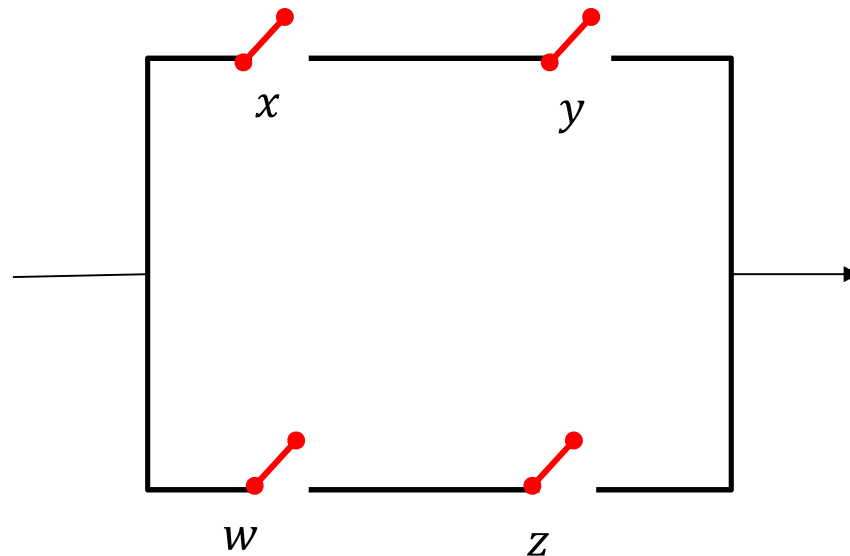
$$(x, y) \text{ e } (w, z)$$

Conclui-se que a relação desse seguro é

$$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$$

...cujo benefício será pago quando a
segunda morte ocorrer no par contrário
ao da primeira morte ou à terceira morte,
 caso as duas primeiras ocorram no
 mesmo par?

$$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$$

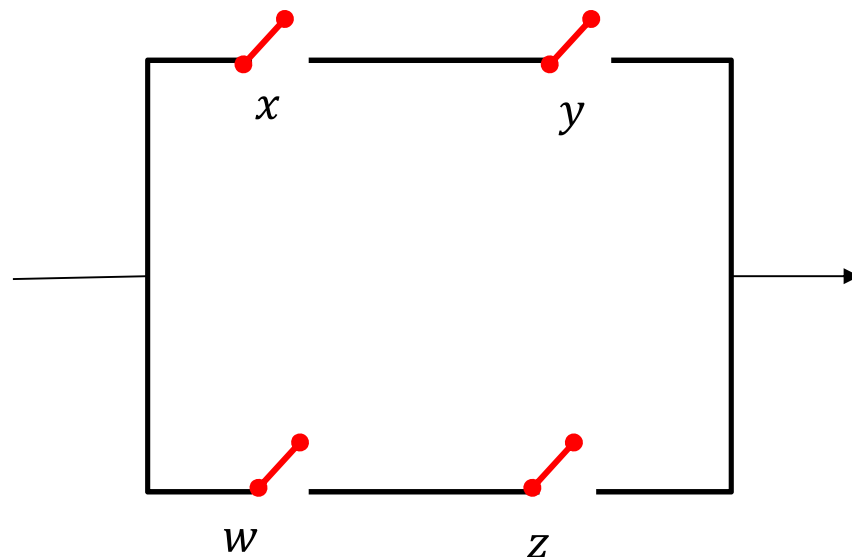


	x	y	w	z	$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					

1 indica vivo, 0 indica morto

...cujo benefício será pago quando a
segunda morte ocorrer no par contrário
ao da primeira morte ou à terceira morte,
 caso as duas primeiras ocorram no
 mesmo par?

$$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$$



	x	y	w	z	$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$
1	1	1	1	1	Ativo
2	0	1	1	1	Ativo
3	1	0	1	1	Ativo
4	1	1	0	1	Ativo
5	1	1	1	0	Ativo
6	1	1	0	0	Ativo
7	1	0	1	0	Falha/Paga
8	1	0	0	1	Falha/Paga
9	1	0	0	0	Falha/Paga
10	0	1	1	0	Falha/Paga
11	0	1	0	1	Falha/Paga
12	0	1	0	0	Falha/Paga
13	0	0	1	1	Ativo
14	0	0	1	0	Falha/Paga
15	0	0	0	1	Falha/Paga
16	0	0	0	0	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto

Exemplo: Qual prêmio puro único pago por um seguro de vida vitalício com benefício unitário para o status composto, formado por $x = 30$, $y = 32$, $w = 12$ e $z = 10$. Cujo benefício será pago quando a segunda morte ocorrer no par contrário ao da primeira morte, ou à terceira morte, caso as duas primeiras ocorram no mesmo par?

$$A_{\overline{(30,32),(12,10)}} = A_{30,32} + A_{12,10} - A_{30,32,12,10}$$

Status composto

Considere um seguro de vida com benefício pago assim que vier a óbito o **primeiro** entres os segurados x e y , desde que o **último** entre w e z já tiver falecido, ou o último entre w e z vir a óbito desde que o primeiro entre x e y já tenha falecido. Ou seja:

Status composto

Considere um seguro de vida com benefício pago assim que vier a óbito o **primeiro** entres os segurados x e y , desde que o **último** entre w e z já tiver falecido, ou o último entre w e z vir a óbito desde que o primeiro entre x e y já tenha falecido. Ou seja:

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$

em que ${}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = P(T_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = t)$

Status composto

$$A_{\overline{(x,y), \overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y), \overline{w,z}}}$$

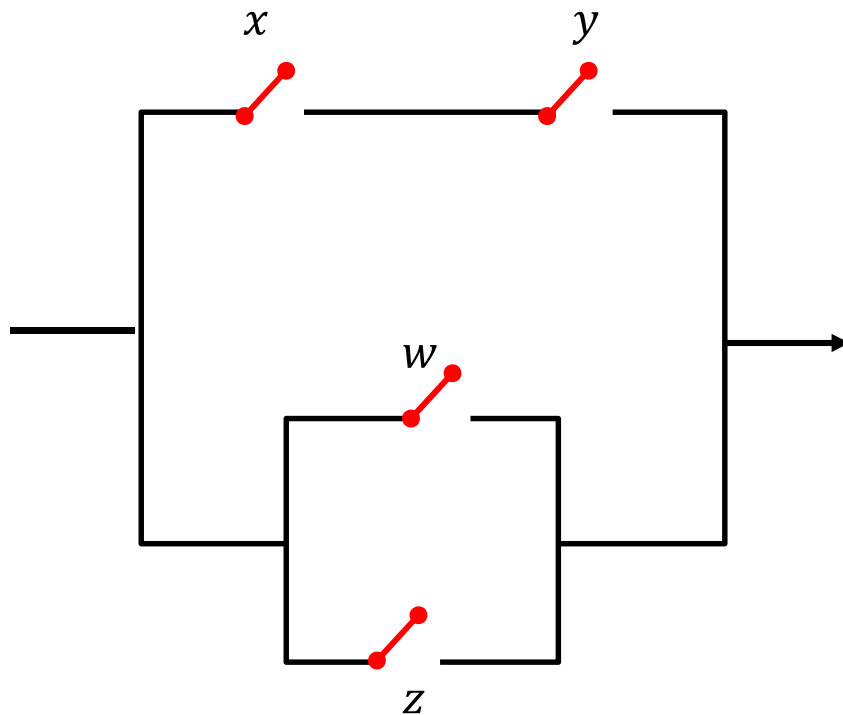
$A_{\overline{1:2}}$ O status falha quando o último grupo “falhar” (seja o 1 ou o 2)

$\overline{1} = x, y$ O status falha quando ocorrer a primeira morte entre x e y

$\overline{2} = \overline{w, z}$ O status falha quando ocorrer a última morte entre w e z

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$

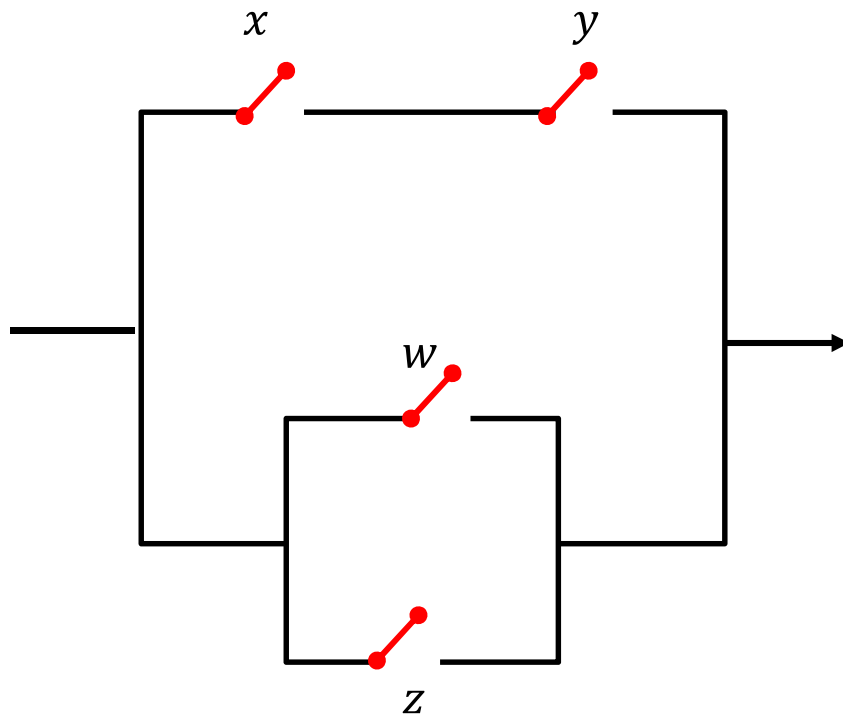
$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o pagamento do seguro

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>w</i>	<i>z</i>
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

$$A_{\overline{(x,y),w,z}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),w,z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o pagamento do seguro

	x	y	w	z	$A_{\overline{(x,y),w,z}}$
1	1	1	1	1	A
2	0	1	1	1	A
3	1	0	1	1	A
4	1	1	0	1	A
5	1	1	1	0	A
6	1	1	0	0	A
7	1	0	1	0	A
8	1	0	0	1	A
9	1	0	0	0	Falha/Paga
10	0	1	1	0	A
11	0	1	0	1	A
12	0	1	0	0	Falha/Paga
13	0	0	1	1	A
14	0	0	1	0	A
15	0	0	0	1	A
16	0	0	0	0	Falha/Paga

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_tq_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$

em que ${}_tq_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = P(T_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = t)$.

Lembrando de matemática atuarial 1:

$${}_tq_x = P(T_x = t) = P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t\mathbf{p}_x - {}_{t+1}\mathbf{p}_x = {}_tp_x q_{x+t}$$

Assim ${}_tq_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = P(T_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = t) = ({}_tp_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} - {}_{t+1}p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})$ então:

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_tp_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} - {}_{t+1}p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})$$

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} - {}_{t+1} p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})$$

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} [(1 - {}_t q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}) - (1 - {}_{t+1} q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})]$$

$$\begin{aligned} & A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \{ [1 - (1 - {}_t p_{x,y})(1 - {}_t p_{\overline{w,z}})] - [1 - (1 - {}_{t+1} p_{x,y})(1 - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})] \}, \end{aligned}$$

$$= [1 - (1 - {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_t p_{x,y} + {}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}})] - [1 - (1 - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} + {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$= [({}_t p_{\overline{w,z}} + {}_t p_{x,y} - {}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}})] - [({}_{t+1} p_{\overline{w,z}} + {}_{t+1} p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$A_{(x,y),\overline{w,z}}^{\overline{\infty}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \{ [1 - (1 - {}_t p_{x,y})(1 - {}_t p_{\overline{w,z}})] - [1 - (1 - {}_{t+1} p_{x,y})(1 - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})] \},$$

...

$$= [({}_t p_{\overline{w,z}} + {}_t p_{x,y} - {}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}})] - [({}_{t+1} p_{\overline{w,z}} + {}_{t+1} p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$= [({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - ({}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$A_{(x,y),\overline{w,z}}^{\overline{\infty}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} [({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y})$$

$$- ({}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$\begin{aligned}
& A_{(x,y),\overline{w,z}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})
\end{aligned}$$

$$= [{}_t p_x {}_t p_y ({}_t p_w + {}_t p_z - {}_t p_w {}_t p_z) - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y ({}_{t+1} p_w + {}_{t+1} p_z - {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z)]$$

$$\begin{aligned}
&= {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w + {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z - {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_z \\
&\quad + {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{(x,y),\overline{w,z}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} [({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w) + ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_z) \\
&\quad - ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&- \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \left[({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w) + ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_z) \right. \\
&- \left. ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w) \\
&- \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_z) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w} - {}_{t+1} p_{x,y,w}) \\
&- \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,z} - {}_{t+1} p_{x,y,z}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w,z} - {}_{t+1} p_{x,y,w,z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w} - {}_{t+1} p_{x,y,w}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,z} - {}_{t+1} p_{x,y,z}) \\
&\quad + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w,z} - {}_{t+1} p_{x,y,w,z})
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= A_w + A_z - A_{w,z} + A_{x,y} - A_{x,y,w} - A_{x,y,z} + A_{x,y,w,z}
\end{aligned}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

