Introdução às Ciências Atuariais
Notas de aula - Comutação

Professor: Matheus Saraiva Alcino*

As técnicas de comutação são técnicas de precificação de alguns produtos atuariais que foram desenvolvidas em uma época em que os recursos computacionais eram limitados. Assim, com a criação de algumas funções de mortalidade criadas a partir da tábua de mortalidade e de uma taxa de juros, torna-se possível a simplificação de alguns cálculos atuariais, fazendo com que tal precificação seja menos sensível à disponibilidade dos recursos computacionais.

O objetivo desta aula é desenvolver o cálculo o prêmio puro único de alguns produtos atuariais do ramo vida. O prêmio puro único (PPU) denota o valor que um segurado deve pagar a uma seguradora para que haja a transferência do risco. É importante notar que o PPU se refere a apenas uma única parcela de pagamento e que, neste valor não estão inclusos nenhum tipo de carregamento, como por exemplo margem de lucro, taxas administrativas, impostos etc.

1 Comutação para seguros de vida e suas variações

Uma operação de seguro de vida se refere à transferência do risco financeiro que o evento morte pode causar a uma pessoa. Assim, a indenização neste tipo de operação de seguro, em geral, acontecerá uma vez que o segurado venha a falecer (com exceção da operação seguro dotal puro).

O prêmio puro único para um seguro de vida vitalício para uma pessoa de x anos de idade é escrito atuarialmente como A_x. Da matemática atuarial, sabemos que este prêmio é dado pela equação 2.

*E-mail: matheus.alcino@unifal-mg.edu.br

$$A_x = B \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} \tag{1}$$

$$A_x = B \left(v^1 \cdot q_x + v^2 \cdot_1 p_x \cdot q_{x+1} + v^3 \cdot_2 p_x \cdot q_{x+2} + \ldots + v^{\omega-x} \cdot_{\omega-x-1} p_x \cdot q_{\omega-x-1} \right), \tag{2}$$

em que:
B denota o benefício (indenização a ser paga)
$v = \dfrac{1}{1+i}$ e i é a taxa de juros (retorno)
${}_t p_x$: probabilidade de sobrevivência de uma pessoa de idade x sobreviver até $x + t$ anos.
q_{x+t}: probabilidade de morte aos $x + t$ anos. x e ω são a idade do segurado e a idade limite da tábua de vida utilizada respectivamente.

Imagine desenvolver manualmente o somatório da equação (2) para uma pessoa de 20 anos. Seria um tanto quanto trabalhoso realizar tal cálculo, além de aumentar a chance de erro humano. Com as técnicas de comutação, o mesmo resultado poderia ser atingido realizando a operação da equação (3).

$$A_x = B \left(\frac{M_x}{D_x} \right) \tag{3}$$

Prova:
Vamos criar algumas funções auxiliares:

$$C_x = v^{x+1} \cdot_n d_x \tag{4}$$

Em que
${}_n d_x$ é o número de óbitos entre as idades x e $x + n$. Esta função pode ser calculada através da tábua de mortalidade.

Além disso, vamos criar também a função M_x, que é apenas uma soma acumulada de C_x:

$$M_x = \sum_{i=x}^{\omega-x} C_i \tag{5}$$

Por fim, criamos uma última função auxiliar, D_x:

$$D_x = v^x \cdot l_x \tag{6}$$

Em que l_x é número de sobreviventes à exata idade x. Esta função também é retirada da tábua de mortalidade.

Sendo assim:

$$A_x = B\left(\frac{M_x}{D_x}\right)$$

$$A_x = B\left(\frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{\omega-x}}{v^x \cdot l_x}\right)$$

$$A_x = B\left(\frac{v^{x+1} \cdot_n d_x}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+2} \cdot_n d_{x+1}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+3} \cdot_n d_{x+2}}{v^x \cdot l_x} + \ldots + \frac{v^{\omega-x} \cdot_n d_{\omega-x-1}}{v^x \cdot l_x}\right)$$

$$A_x = B\left(\frac{v^{x+1} \cdot l_x \cdot q_x}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+2} \cdot l_{x+1} \cdot q_{x+1}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+3} \cdot l_{x+2} \cdot q_{x+2}}{v^x \cdot l_x} + \ldots + \frac{v^{\omega-x} \cdot l_{\omega-x-1} \cdot q_{\omega-x-1}}{v^x \cdot l_x}\right)$$

Da construção da tábua de mortalidade sabemos que $\frac{l_{x+n}}{l_x} =_n p_x$, portanto:

$$A_x = B\left(v^1 \cdot q_x + v^2 \cdot_1 p_x \cdot q_{x+1} + v^3 \cdot_2 p_x \cdot q_{x+2} + \ldots + v^{\omega-x+1} \cdot_{\omega-x} p_x \cdot q_\omega\right)$$

Utilizando a mesma lógica do seguro de vida vitalício, é possível calcular o prêmio puro único de outros tipos de seguro de vida. No caso do seguro de vida temporário, o que muda é apenas o período em que o segurado está coberto. Atuarialmente, um seguro de vida temporário por n anos, para uma pessoa de x anos de idade (obviamente $n > 0$), pode ser atuarialmente denotado e calculado como

$$A^1_{x:\overline{n}|} = B\sum_{t=0}^{n} v^{t+1} \cdot_t p_x \cdot q_{x+t} = B\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right)$$

.

Uma outra variação seria o seguro de vida vitalício para uma pessoa de x anos de idade, com carência (ou diferimento) de m anos, que por sua vez, pode ser atuarialmente denotado e calculado como

$$_{m|}A_x = B \cdot v^m \cdot_m p_x \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^{t+1} \cdot_t p_{x+m} \cdot q_{x+m+t} = B\left(\frac{M_{x+m}}{D_x}\right)$$

.

Há ainda, a possibilidade de se calcular um seguro de vida temporário por n anos, para uma pessoa de x anos de idade, com carência (ou diferimento) de m anos

$$
{}_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = B \cdot v^m \cdot_m p_x \cdot \sum_{t=0}^{n} v^{t+1} \cdot_t p_{x+m} \cdot q_{x+m+t} = B\left(\frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}\right)
$$

.

Por fim, existem também os seguros de vida dotais. Nesta aula, estudaremos apenas o seguro de vida dotal (ou dotal puro). Este produto pode ser denotado atuarialmente e calculado como

$$
A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = B \cdot v^n \cdot_n p_x = B\left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)
$$

2 Comutação para anuidades e suas variações

Anuidades se referem a pagamentos de um benefício em intervalos determinados de tempo. Ou seja, é razoável entender as anuidades como uma previdência pois o segurado recebe de uma seguradora (ou instituição de previdência privada, etc) um benefício durante um intervalo de tempo específico ou durante toda a sua vida. Logo, os pagamentos são cessados sob duas condições principais: quando o evento morte do segurado acontece ou quando o tempo especificado (no caso de uma anuidade temporária) termina.

Existem, de forma geral, duas principais variações de anuidades: anuidades **antecipadas** e **postecipadas** e, o que difere uma da outra é a data do primeiro pagamento. As anuidades antecipadas possuem o primeiro pagamento de forma imediata, ou seja, logo após a assinatura da apólice. Já as anuidades postecipadas, o primeiro pagamento ocorrerá um período após a assinatura da apólice (desconsiderando o período de carência, se for o caso).

Uma anuidade vitalícia **antecipada** para uma pessoa de x anos de idade é escrita atuarialmente através do símbolo $\ddot{a}_x$. Supondo que o benefício seja igual a 1, o prêmio puro único deste produto atuarial é dado através do seguinte somatório

$$
\ddot{a}_x = B \sum_{t=0}^{\omega - x} v^t \cdot_t p_x
$$

$$
\ddot{a}_x = B\left(v^0 \cdot_0 p_x + v^1 \cdot_1 p_x + v^2 \cdot_2 p_x + \ldots + v^{\omega-x} \cdot_{\omega-x} p_x\right).
$$

Analogamente ao que fizemos com os seguros de vida vitalício, podemos construir funções de comutação auxiliares para simplificar o cálculo das anuidades. Portanto, vamos impor que

$$D_x = l_x \cdot v^x, \tag{7}$$

e que, além disso

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega-x} D_j. \tag{8}$$

Dessa forma, podemos dizer que o cálculo de uma anuidade vitalícia antecipada pode ser dado por

$$\ddot{a}_x = B\left(\frac{N_x}{D_x}\right). \tag{9}$$

Prova:

$$\ddot{a}_x = B\left(\frac{N_x}{D_x}\right)$$

$$\ddot{a}_x = B\sum_{j=x}^{\omega-x} \frac{l_j \cdot v^j}{l_x \cdot v^x}$$

$$\ddot{a}_x = B\sum_{j=x}^{\omega-x} v^{j-x} \cdot \frac{l_j}{l_x},$$

lembrando que ${}_np_x = \dfrac{l_{x+n}}{l_x}$, temos que

$$\ddot{a}_x = B\sum_{j=x}^{\omega-x} v^{j-x} \cdot_{(j-x)} p_x$$

$$\ddot{a}_x = B\left(v^0 \cdot_0 p_x + v^1 \cdot_1 p_x + v^2 \cdot_2 p_x + \ldots + v^{\omega-x} \cdot_{\omega-x} p_x\right).$$

As técnicas de comutação nos permitem calcular as variações de anuidades de forma simplificada, assim como acontece nos seguros de vida. No caso de uma anuidade vitalícia **postecipada** para uma pessoa de x anos de idade, este produto pode ser denotado atuarialmente e calculado como

$$a_x = B\sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \cdot_t p_x = B\left(\frac{N_{x+1}}{D_x}\right).$$

É possível calcular também, através das técnicas de comutação, uma anuidade antecipada (ou postecipada) temporária por n anos para uma pessoa de x anos de idade. O caso **antecipado**, pode ser denotado atuarialmente e calculado como

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = B\sum_{t=0}^{n} v^t \cdot_t p_x = B\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\right).$$

Já no caso **postecipado**, este produto pode ser denotado atuarialmente e calculado como

$$a_{x:\overline{n}|} = B\sum_{t=1}^{n} v^t \cdot_t p_x = B\left(\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\right).$$

Ainda, é possível calcular estes produtos incluindo um tempo de diferimento. Dessa forma, uma anuidade vitalícia **antecipada** para uma pessoa de x anos de idade e diferida por m anos, pode ser denotada atuarialmente e calculada como

$${}_{m|}\ddot{a}_x = B \cdot v^m \cdot_m p_x \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^t \cdot_t p_{x+m} = B\left(\frac{N_{x+m}}{D_x}\right).$$

Já uma anuidade vitalícia **postecipada** para uma pessoa de x anos de idade e diferida por m anos, pode ser denotada atuarialmente e calculada como

$${}_{m|}a_x = B \cdot v^m \cdot_m p_x \sum_{t=1}^{\omega-x-m} v^t \cdot_t p_{x+m} = B\left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x}\right).$$

Ainda, é possível calcular uma anuidade **antecipada** temporária por n anos, para uma pessoa de x anos de idade e diferida por m anos através da comutação. A notação atuarial e o cálculo deste produto por ser feito por

$${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = B \cdot v^m \cdot_m p_x \sum_{t=0}^{n} v^t \cdot_t p_{x+m} = B\left(\frac{N_{x+m-N_{x+m+n}}}{D_x}\right).$$

No caso postecipado, ou seja, uma anuidade **postecipada** temporária por n anos, para uma pessoa de x anos de idade e diferida por m, pode ser denotada atuarialmente e calculada como

$${}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = B \cdot v^m \cdot_m p_x \sum_{t=1}^{n} v^t \cdot_t p_{x+m} = B\left(\frac{N_{x+m+1-N_{x+m+n+1}}}{D_x}\right).$$