Teoria do Risco
Aula 11

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Modelo de Risco individual	**Modelo de Risco coletivo**
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$	$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t))$
$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) q_i$	$E(S_{col}) = E(N)E(X)$
$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 q_i (1 - q_i)$	$var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N) var(X)$

Modelos de risco Coletivo- A distribuição de S_{col}, os sinistros coletivos.

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N.

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s)\, p(N = k) \qquad P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\, p(N = k) \qquad p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Modelos de risco Coletivo

O processo de convolução no modelo de risco coletivo leva em consideração a convolução entre os sinistros ocorridos dado que quantidade ocorrida também é uma variável aleatória.

Modelo de risco individual	Modelo de risco coletivo
$\mathrm{F}^{(\mathrm{k})} = \mathrm{F}_{\mathrm{k}} * \mathrm{F}^{(\mathrm{k}-1)}$	$P^{(k)} = P_k * P^{(k-1)}$
$\mathrm{F}_{\mathrm{S}_{\mathrm{ind}}}^{(2)}(\mathrm{s}) = \sum_{j=0}^{s} F_X(s - y_j) p_Y(y_j)$	$F_{S_{col}}^{(2)}(s) = \sum_{k=0}^{2} P^{*k}(s) p_N(k)$

$$X\ (discreto) \rightarrow S_{col}\ (discreto)$$
$$X(contínuo) \rightarrow S_{col}(contínuo)$$

Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de **X** e **N**.

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(\boldsymbol{X_1} + \boldsymbol{X_2} + \ldots + \boldsymbol{X_k} = \boldsymbol{s})$$

X **contínuo.**

$$P^{*k}(s) = \int_0^s P^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$P^{*k-1} * P$$

$$p^{*k}(s) = \int_0^s p^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*k-1} * p$$

EXEMPLO 1

Calcular $F_{S_{col}}(s)$, quando X $\sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$.

$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s)\, p(N = k)$

$P^{*k}(s) = \int_0^s P^{*k-1}(s-h)p(h)dh$

Assim:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \qquad P(x) = F(x) = 1 - e^{-\alpha x}\ ; x > 0$$

$$P^{*k}(s) = \int_h P^{*k-1}(s-h)\, p(h)dh$$

$$P^{*(2)}(s) = \int_0^s P^{*2-1}(s-h)p(h)dh = \int_0^s P\ (s-h)p(h)dh$$

$$P^{*(2)}(s) = \int_0^s \left[1 - e^{-\alpha(s-h)}\right]\alpha e^{-\alpha h}dh$$

...

$$P^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s}(1 + \alpha s)$$

$$P^{*3}(s) = \int_0^s P^{*3-1}(s-h)p(h)dh = \int_0^s P^{*2}(s-h)p(h)dh$$

$$P^{*3}(s) = \int_0^s \{1 - e^{-\alpha(s-h)}[1 + \alpha(s-h)]\}\alpha e^{-\alpha h}dh$$

...

$$P^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s}\left[1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!}\right]$$

- Desta forma, então, chega-se à seguinte formula de P^{*k}

$$P(s) = 1 - e^{-\alpha s}$$

$$P^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s}(1 + \alpha s)$$

$$P^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s}\left[1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!}\right]$$

...

$$P^{*k}(s) = 1 - e^{-\alpha s}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\alpha s)^i}{i!}$$

$$\lim_{k\to\infty} P^{*k}(s) = 1 - e^{-\alpha s}e^{\alpha s} = \lim_{k\to\infty} P^{*k}(S \leq s) = 0$$

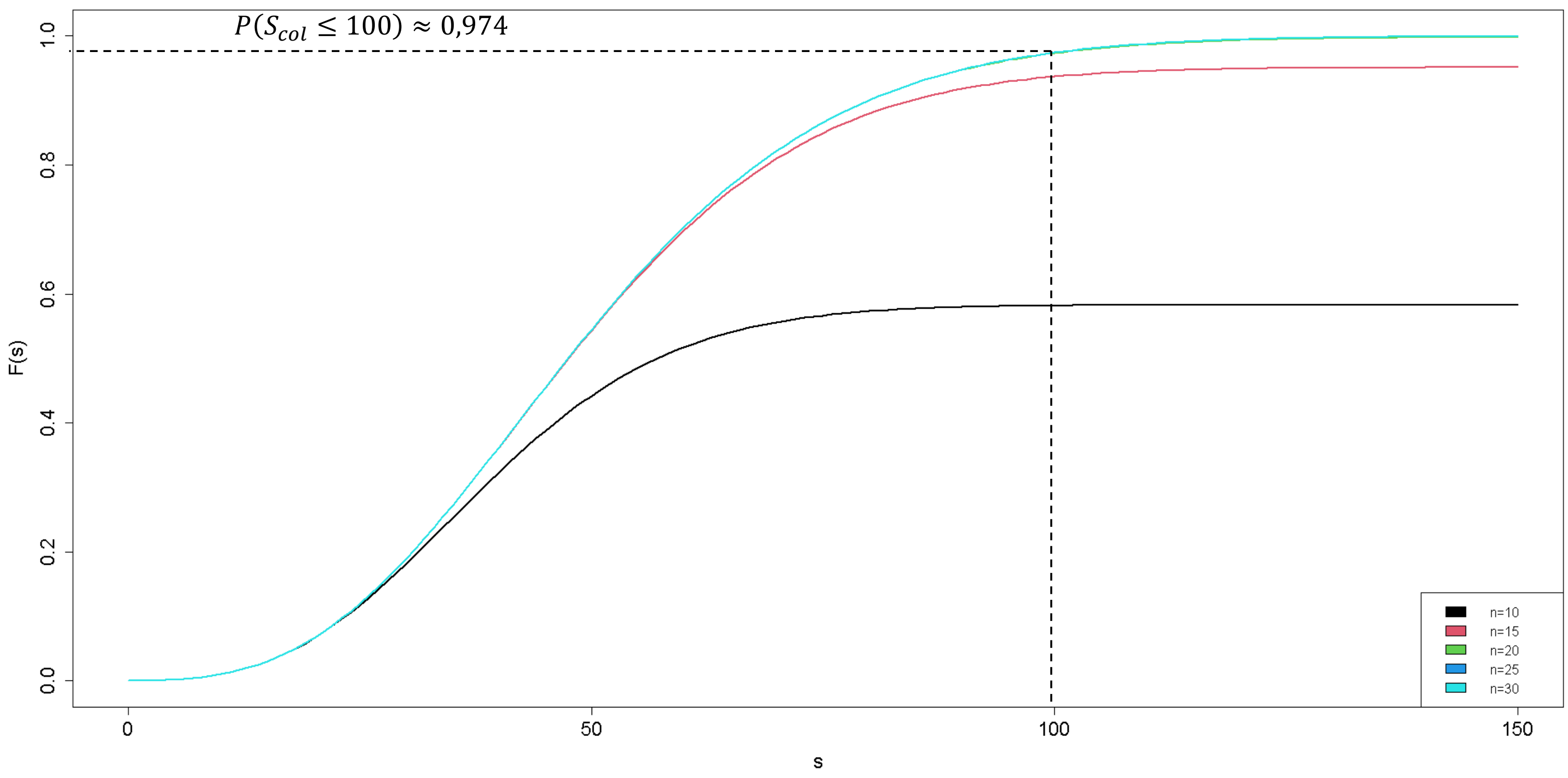
Como:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

Tem-se que:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^{i}}{i!}\right] \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^{n\to\infty}\left[1 - e^{-\alpha s}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\alpha s)^i}{i!}\right]\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$



Comportamento de $F_{s_{col}}(S)$ com $\alpha = 0,2, \lambda = 10$ para diferentes quantidade de apólices n.

EXEMPLO 2

Adicionalmente pode-se calcular p^{*k} e $f_{S_{col}}(s)$, quando $X \sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \,;\, x > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h)\, p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s p^{*2-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s p(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s \left[\alpha e^{-\alpha(s-h)}\right] \alpha e^{-\alpha h} dh = \alpha^2 s\, e^{-\alpha s}$$

Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \; ; x > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h)\, p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \alpha^2 s\, e^{-\alpha s}$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s p^{*3-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^x p^{*2}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s \alpha^2 (s-h)\, e^{-\alpha(s-h)} \alpha e^{-\alpha h} dh = \frac{\alpha^3 s^2\, e^{-\alpha s}}{2}$$

Cálculo de $\boldsymbol{P^{*k}(x)}$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \; ; x > 0$$

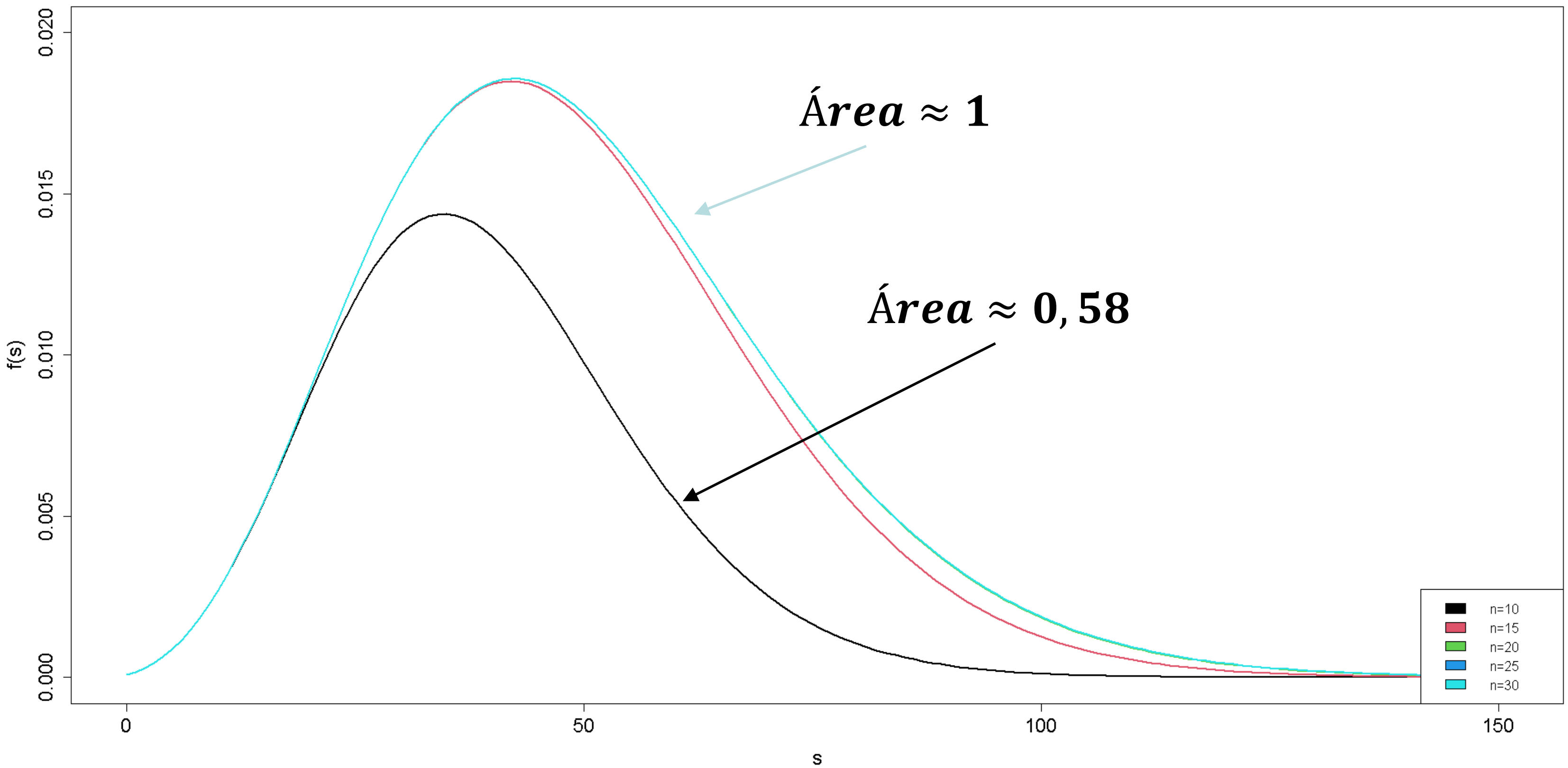
$$p^{*(2)}(s) = \alpha^2 s \, e^{-\alpha s}$$

$$p^{*3}(s) = \frac{\alpha^3 s^2 \, e^{-\alpha s}}{2}$$

...

$$\boldsymbol{p^{*k}(s) = \frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!}}$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^{n\to\infty}\left[\frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!}\right]\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$



Comportamento de $f_{s_{col}}(S)$ com $\alpha = 0,2, \lambda = 10$ para diferentes quantidade de apólices n.

Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de X e N.

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de **X** e **N**.

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Quando X é discreto tem-se

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \neq 0 \\ 1 \; se \; s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h) p(h)$$

Considere h como um dos valores possíveis para X.

EXEMPLO 3

Uma carteira de seguros produz 0, 1 ou 2 sinistros com as respetivas probabilidades: 20%,50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores $R\$100$, $R\$200$ ou $R\$300$, com as respectivas probabilidades: $20\%, 70\%$ e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados S_{col}.

X_i	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

N	$P(N)$	S_{col}	
0	0,2	$S_{col} = 0$	
1	0,5	$S_{col} = X_1$	$\{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$

Em primeiro lugar, computemos todas as combinações possíveis de frequência e severidades e assim obtemos os valores possíveis de sinistros agregados e associados as probabilidades de ocorrência

Por definição tem-se que $\boldsymbol{p^{*0}(s)} = \begin{cases} \mathbf{0}\ \boldsymbol{se\ s \neq 0} \\ \mathbf{1}\ \boldsymbol{se\ \ s = 0} \end{cases}$

- Logo para $\boldsymbol{k = 0}$:

$p^{*0}(0) = 1$

$p^{*0}(100) = 0$

$p^{*0}(200) = 0$

$p^{*0}(300) = 0$

$p^{*0}(400) = 0$

$p^{*0}(500) = 0$

$p^{*0}(600) = 0$

Para $\boldsymbol{k = 1}$:

Usando $p^{*\mathrm{k}}(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{h} \leq \mathrm{s}} p^{*\mathrm{k}-1}(\mathrm{s}-\mathrm{h})p(\mathrm{h})$ sendo k os possíveis valores assumidos por N.

$$\boldsymbol{p^{*1}(0)} = \sum_{h=0}^{0} p^{*1-1}(0-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(100)} = \sum_{h=0}^{100} p^{*1-1}(100-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(200)} = \sum_{h=0}^{200} p^{*1-1}(200-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(300)} = \sum_{h=0}^{300} p^{*1-1}(300-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(400)} = \sum_{h=0}^{400} p^{*1-1}(400-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(500)} = \sum_{h=0}^{500} p^{*1-1}(500-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(600)} = \sum_{h=0}^{600} p^{*1-1}(600-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = p^{*0}(\,0)p(0) = 0$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{100}) = p^{*0}(100)p(0) + \boldsymbol{p}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{0})\boldsymbol{p}(\mathbf{100}) = \mathbf{0,2}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{200}) = p^{*0}\,(200)p(0) + p^{*0}(100)p(100) + \boldsymbol{p}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{0})\boldsymbol{p}(\mathbf{200}) = 0{,}7$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{300}) = p^{*0}(300)p(0) + p^{*0}(200)p(100) + p^{*0}(100)p(200) + \boldsymbol{p}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{0})\boldsymbol{p}(\mathbf{300}) = \mathbf{0,1}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{400}) = p^{*0}(400)p(0) + p^{*0}(300)p(100) + p^{*0}(200)p(200) + p^{*0}(100)p(300) + p^{*0}(0)p(400) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{500}) = p^{*0}(500)p(0) + p^{*0}(400)p(100) + p^{*0}(300)p(200) + p^{*0}(200)p(300) + p^{*0}(100)p(400) + p^{*0}(0)p(500) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{600}) = p^{*0}(600)p(0) + p^{*0}(500)p(100) + p^{*0}(400)p(200) + p^{*0}(300)p(300) + p^{*0}(200)p(400) + p^{*0}(100)p(500) + p^{*0}(0)p(600) = \mathbf{0}$$

S_{col}	$N = 0$	$N = 1$
0	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$
100	$p^{*0}(100) = 0$	$p^{*1}(100) = 0,2$
200	$p^{*0}(200) = 0$	$p^{*1}(200) = 0,7$
300	$p^{*0}(300) = 0$	$p^{*1}(300) = 0,1$
400	$p^{*0}(400) = 0$	$p^{*1}(400) = 0$
500	$p^{*0}(500) = 0$	$p^{*1}(500) = 0$
600	$p^{*0}(600) = 0$	$p^{*1}(600) = 0$

Para $\boldsymbol{k = 2}$:

$$\boldsymbol{p^{*2}(0)} = \sum_{h=0}^{0} p^{*2-1}(0-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(100)} = \sum_{h=0}^{100} p^{*2-1}(100-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(200)} = \sum_{h=0}^{200} p^{*2-1}(200-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(300)} = \sum_{h=0}^{300} p^{*2-1}(300-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(400)} = \sum_{h=0}^{400} p^{*2-1}(400-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(500)} = \sum_{h=0}^{500} p^{*2-1}(500-h)p(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(600)} = \sum_{h=0}^{600} p^{*2-1}(600-h)p(h)$$

Para $\boldsymbol{k = 2}$:

$\boldsymbol{p^{*2}(0)} = p^{*1}(0)p(0) = 0$

$\boldsymbol{p^{*2}(100)} = p^{*1}(100)p(0) + p^{*1}(0)p(100) = 0$

$\boldsymbol{p^{*2}(200)} = p^{*1}(200)p(0) + \boldsymbol{p^{*1}(100)p(100)} + p^{*1}(0)p(200) = 0{,}04$

$\boldsymbol{p^{*2}(300)} = p^{*1}(300)p(0) + \boldsymbol{p^{*1}(200)p(100)} + \boldsymbol{p^{*1}(100)p(200)} + p^{*1}(0)p(300) = \boldsymbol{0{,}28}$

$\boldsymbol{p^{*2}(400)} = p^{*1}(400)p(0) + \boldsymbol{p^{*1}(300)p(100)} + \boldsymbol{p^{*1}(200)p(200)} + \boldsymbol{p^{*1}(100)p(300)} + p^{*1}(0)p(400) = 0{,}53$

$\boldsymbol{p^{*2}(500)} = p^{*1}(500)p(0) + p^{*1}(400)p(100) + \boldsymbol{p^{*1}(300)p(200)} + \boldsymbol{p^{*1}(200)p(300)} + p^{*1}(100)p(400) + p^{*1}(0)p(500) = 0{,}14$

$\boldsymbol{p^{*2}(600)} = p^{*1}(600)p(0) + p^{*1}(500)p(100) + p^{*1}(400)p(200) + \boldsymbol{p^{*1}(300)p(300)} + p^{*1}(200)p(400) + p^{*1}(100)p(500) + p^{*1}(0)p(600) = 0{,}01$

S_{col}	$P(N=0)=0,2$	$P(N=1)=0,5$	$P(N=2)=0,3$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$
0	$p^{*0}(0)=1$	$p^{*1}(0)=0$	$p^{*2}(0)=0$
100	$p^{*0}(100)=0$	$p^{*1}(100)=0{,}2$	$p^{*2}(100)=0$
200	$p^{*0}(200)=0$	$\boldsymbol{p^{*1}(200)=0,7}$	$\boldsymbol{p^{*2}(200)=0,04}$
300	$p^{*0}(300)=0$	$p^{*1}(300)=0{,}1$	$p^{*2}(300)=0{,}28$
400	$p^{*0}(400)=0$	$p^{*1}(400)=0$	$p^{*2}(400)=0{,}53$
500	$p^{*0}(500)=0$	$p^{*1}(500)=0$	$p^{*2}(500)=0{,}14$
600	$p^{*0}(600)=0$	$p^{*1}(600)=0$	$p^{*2}(600)=0{,}01$
	1	**1**	**1**

Agora se faz necessário sumarizar todas as combinações que resultam no mesmo valor de sinistros.

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)p_N(k)$$

Logo

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(0)} = p^{*0}(0)p_N(0) + p^{*1}(0)p_N(1) + p^{*2}(0)p_N(2) = 0{,}2$

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(100)} = p^{*0}(100)p_N(0) + p^{*1}(100)p_N(1) + p^{*2}(100)p_N(2) = 0{,}1$

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(200)} = p^{*0}(200)p_N(0) + p^{*1}(200)p_N(1) + p^{*2}(200)p_N(2) = 0{,}362$

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(300)} = p^{*0}(300)p_N(0) + p^{*1}(300)p_N(1) + p^{*2}(300)p_N(2) = 0{,}134$

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(400)} = p^{*0}(400)p_N(0) + p^{*1}(400)p_N(1) + p^{*2}(400)p_N(2) = 0{,}159$

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(500)} = p^{*0}(500)p_N(0) + p^{*1}(500)p_N(1) + p^{*2}(500)p_N(2) = 0{,}042$

$\boldsymbol{P_{S_{col}}(600)} = p^{*0}(600)p_N(0) + p^{*1}(600)p_N(1) + p^{*2}(600)p_N(2) = 0{,}003$

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,04 \\ 0 & 0,1 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,53 \\ 0 & 0 & 0,14 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{p}^{*\mathbf{0}}(\mathrm{s}) & \mathrm{p}^{*\mathbf{1}}(\mathrm{s}) & \mathrm{p}^{*\mathbf{2}}(\mathrm{s}) \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \boldsymbol{P_N(0)} \\ \Rightarrow \boldsymbol{P_N(1)} \\ \Rightarrow \boldsymbol{P_N(2)} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P_{S_{col}}(0)} = 1 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 0 \times 0,3 = 0,2$$

$$\boldsymbol{P_{S_{col}}(100)} = 0 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 + 0 \times 0,3 = 0,1$$

...

$$\boldsymbol{P_{S_{col}}(600)} = 0 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 0,01 \times 0,3 = 0,003$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}2 & s = 0 \\ 0{,}1 & s = 100 \\ 0{,}362 & s = 200 \\ 0{,}134 & s = 300 \\ 0{,}159 & s = 400 \\ 0{,}042 & s = 500 \\ 0{,}003 & s = 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0{,}2 & 0 \leq s < 100 \\ 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 & 100 \leq s < 200 \\ 0{,}3 + 0{,}362 = 0{,}662 & 200 \leq s < 300 \\ 0{,}662 + 0{,}134 = 0{,}796 & 300 \leq s < 400 \\ 0{,}796 + 0{,}159 = 0{,}955 & 400 \leq s < 500 \\ 0{,}955 + 0{,}042 = 0{,}997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

Teoria do Risco

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Modelos de risco Coletivo-Convolução

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$$

Quando X é discreto tem-se

$$\boldsymbol{P^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \ se \ s \leq 0 \\ 1 \ se \ s > 0 \end{cases}}$$

$$P^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} P^{*k-1}(s-h) p(h)$$

Considere h como um dos valores possíveis para X.

EXEMPLO 4

Uma carteira de seguros produz 0,1 ou 2 sinistros com as respetivas probabilidades: 20%,50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores $R\$100$, $R\$200$ ou $R\$300$, com as respectivas probabilidades: 20%, 70% e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados S_{col}.

X_i	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

N	$P(N)$	S_{col}	
0	0,2	$S_{col} = 0$	
1	0,5	$S_{col} = X_1$	$\{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$

Por definição tem-se que $P^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \leq 0 \\ 1 \; se \; s > 0 \end{cases}$

Logo para $\boldsymbol{k = 0}$:

$$P^{*0}(0) = 0$$
$$P^{*0}(100) = 1$$
$$P^{*0}(200) = 1$$
$$P^{*0}(300) = 1$$
$$P^{*0}(400) = 1$$
$$P^{*0}(500) = 1$$
$$P^{*0}(600) = 1$$

Para $\boldsymbol{k = 1}$:

Usando $P^{*\mathrm{k}}(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{h} \leq \mathrm{s}} P^{*\mathrm{k}-1}(\mathrm{s} - \mathrm{h})p(\mathrm{h})$ sendo k os possíveis valores assumidos por N.

$$P^{*1}(0) = \sum_{h=0}^{0} P^{*1-1}(0 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(100) = \sum_{h=0}^{100} P^{*1-1}(100 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(200) = \sum_{h=0}^{200} P^{*1-1}(200 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(300) = \sum_{h=0}^{300} P^{*1-1}(300 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(400) = \sum_{h=0}^{400} P^{*1-1}(400 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(500) = \sum_{h=0}^{500} P^{*1-1}(500 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(600) = \sum_{h=0}^{600} P^{*1-1}(600 - h)p(h)$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = P^{*0}(\ 0)p(0) = 0$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{100}) = P^{*0}(100)p(0) + P^{*0}(0)p(100) = 0$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{200}) = P^{*0}\ (200)p(0) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{100})\boldsymbol{p}(\mathbf{100}) + P^{*0}(0)p(200) = 0{,}2$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{300}) = P^{*0}(300)p(0) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{200})\boldsymbol{p}(\mathbf{100}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{100})\boldsymbol{p}(\mathbf{200}) + P^{*0}(0)p(300) = 0{,}9$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{400}) = P^{*0}(400)p(0) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{300})\boldsymbol{p}(\mathbf{100}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{200})\boldsymbol{p}(\mathbf{200}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{100})\boldsymbol{p}(\mathbf{300}) + P^{*0}(0)p(400) = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{500}) = P^{*0}(500)p(0) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{400})\boldsymbol{p}(\mathbf{100}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{300})\boldsymbol{p}(\mathbf{200}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{200})\boldsymbol{p}(\mathbf{300}) + P^{*0}(100)p(400) + P^{*0}(0)p(500) = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{P}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{600}) = P^{*0}(600)p(0) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{500})\boldsymbol{p}(\mathbf{100}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{400})\boldsymbol{p}(\mathbf{200}) + \boldsymbol{P}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{300})\boldsymbol{p}(\mathbf{300}) + P^{*0}(200)p(400) + P^{*0}(100)p(500) + P^{*0}(0)p(600) = \mathbf{1}$$

S_{col}	$N = 0$	$N = 1$
0	$P^{*0}(0) = 0$	$P^{*1}(0) = 0$
100	$P^{*0}(100) = 1$	$P^{*1}(100) = 0$
200	$P^{*0}(200) = 1$	$P^{*1}(200) = 0{,}2$
300	$P^{*0}(300) = 1$	$P^{*1}(300) = 0{,}9$
400	$P^{*0}(400) = 1$	$P^{*1}(400) = 1$
500	$P^{*0}(500) = 1$	$P^{*1}(500) = 1$
600	$P^{*0}(600) = 1$	$P^{*1}(600) = 1$

Para $\boldsymbol{k = 2}$:

$$P^{*2}(0) = \sum_{h=0}^{0} P^{*2-1}(0-h)p(h)$$

$$P^{*2}(100) = \sum_{h=0}^{100} P^{*2-1}(100-h)p(h)$$

$$P^{*2}(200) = \sum_{h=0}^{200} P^{*2-1}(200-h)p(h)$$

$$P^{*2}(300) = \sum_{h=0}^{300} P^{*2-1}(300-h)p(h)$$

$$P^{*2}(400) = \sum_{h=0}^{400} P^{*2-1}(400-h)p(h)$$

$$P^{*2}(500) = \sum_{h=0}^{500} P^{*2-1}(500-h)p(h)$$

$$P^{*2}(600) = \sum_{h=0}^{600} P^{*2-1}(600-h)p(h)$$

Para $\boldsymbol{k=2}$:

$P^{*2}(0) = P^{*1}(0)p(0) = 0$

$P^{*2}(100) = P^{*1}(100)p(0) + P^{*1}(0)p(100) = 0$

$P^{*2}(200) = P^{*1}(200)p(0) + P^{*1}(100)p(100) + P^{*1}(0)p(200) = 0$

$P^{*2}(300) = P^{*1}(300)p(0) + \boldsymbol{P^{*1}(200)p(100)} + P^{*1}(100)p(200) + P^{*1}(0)p(300) = 0{,}04$

$P^{*2}(400) = P^{*1}(400)p(0) + \boldsymbol{P^{*1}(300)p(100)} + \boldsymbol{P^{*1}(200)p(200)} + P^{*1}(100)p(300) + P^{*1}(0)p(400) = 0{,}32$

$P^{*2}(500) = P^{*1}(500)p(0) + \boldsymbol{P^{*1}(400)p(100)} + \boldsymbol{P^{*1}(300)p(200)} + \boldsymbol{P^{*1}(200)p(300)} + P^{*1}(100)p(400) + P^{*1}(0)p(500) = 0{,}85$

$P^{*2}(600) = P^{*1}(600)p(0) + \boldsymbol{P^{*1}(500)p(100)} + \boldsymbol{P^{*1}(400)p(200)} + \boldsymbol{P^{*1}(300)p(300)} + P^{*1}(200)p(400) + P^{*1}(100)p(500) + P^{*1}(0)p(600) = 0{,}99$

S_{col}	$P(N=0)=0,2$	$P(N=1)=0,5$	$P(N=2)=0,3$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$
0	$P^{*0}(0)=0$	$P^{*1}(0)=0$	$P^{*2}(0)=0$
100	$P^{*0}(100)=1$	$P^{*1}(100)=0$	$P^{*2}(100)=0$
200	$P^{*0}(200)=1$	$P^{*1}(200)=0{,}2$	$P^{*2}(200)=0$
300	$P^{*0}(300)=1$	$P^{*1}(300)=0{,}9$	$P^{*2}(300)=0{,}04$
400	$P^{*0}(400)=1$	$P^{*1}(400)=1$	$P^{*2}(400)=0{,}32$
500	$P^{*0}(500)=1$	$P^{*1}(500)=1$	$P^{*2}(500)=0{,}85$
600	$P^{*0}(600)=1$	$P^{*1}(600)=1$	$P^{*2}(600)=0{,}99$

$$\mathrm{P}_{S_{\mathrm{col}}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}2 & 0 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}04 \\ 1 & 1 & 0{,}32 \\ 1 & 1 & 0{,}85 \\ 1 & 1 & 0{,}99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{P_N(0)} \\ \Rightarrow \boldsymbol{P_N(1)} \\ \Rightarrow \boldsymbol{P_N(2)} \end{matrix}$$

$\mathbf{P}^{*2}(s)$

$\mathbf{P}^{*1}(s)$

$\mathbf{P}^{*0}(s)$

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0{,}2 & 0 \leq s < 100 \\ 0{,}3 & 100 \leq s < 200 \\ 0{,}662 & 200 \leq s < 300 \\ 0{,}796 & 300 \leq s < 400 \\ 0{,}955 & 400 \leq s < 500 \\ 0{,}997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0{,}2 & 0 \leq s < 100 \\ 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 & 100 \leq s < 200 \\ 0{,}3 + 0{,}362 = 0{,}662 & 200 \leq s < 300 \\ 0{,}662 + 0{,}134 = 0{,}796 & 300 \leq s < 400 \\ 0{,}796 + 0{,}159 = 0{,}955 & 400 \leq s < 500 \\ 0{,}955 + 0{,}042 = 0{,}997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

EXEMPLO 5

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

X_i	$R\$0{,}00$	$R\$1000{,}00$	$R\$2000{,}00$	$R\$3000{,}00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco individual**. Obtenha a função de probabilidade de S_{ind}.

X_i	$R\$0,00$	$R\$1000,00$	$R\$2000,00$	$R\$3000,00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

$$p_S(s) = p_{X_1} * p_{X_2}(s) = \sum_{\forall\, x_1 \le s} p_{X_2}(s - x_1) p_{X_1}(x_1)$$

S	$S(X_1, X_2)$	P_S
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

EXEMPLO 5

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

X_i	$R\$0{,}00$	$R\$1000{,}00$	$R\$2000{,}00$	$R\$3000{,}00$
$P(X_i)$	$0{,}6$	$0{,}02$	$0{,}06$	$0{,}32$

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco coletivo.** Obtenha a função de probabilidade de S_{col}.

Solução:

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$	$B_i = (X_i \mid I_i = 1)$	$P(B_i = b_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6		
R\$1000,00	0,02	1	0,4	R\$1000,00	$\frac{0{,}02}{0{,}4} = 0{,}05$
R\$2000,00	0,06			R\$2000,00	$\frac{0{,}06}{0{,}4} = 0{,}15$
$R\$3000{,}00$	0,32			R\$3000,00	$\frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$

N	$P(N) = \binom{2}{n} 0{,}4^n 0{,}6^{2-n}$	S_{col}	Possíveis valores para S_{col}.
0	0,36	$S_{col} = 0$	
1	0,48	$S_{col} = X_i \; \forall \, \mathrm{i} = 1{,}2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\, p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Quando X é discreto tem-se

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \neq 0 \\ 1 \; se \; s = 0 \end{cases}$$

$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h)p(h)$

Considere h *como um dos valores possíveis para* X.

S_{col}	$P(N=0)=0,36$	$P(N=1)=0,48$	$P(N=2)=0,16$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$
0	$p^{*0}(0)=1$	$p^{*1}(0)=0$	$p^{*2}(0)=0$
1000	$p^{*0}(1000)=0$	$p^{*1}(1000)=0{,}05$	$p^{*2}(1000)=0$
2000	$p^{*0}(2000)=0$	$p^{*1}(2000)=0{,}15$	$p^{*2}(2000)=0{,}0025$
3000	$p^{*0}(3000)=0$	$p^{*1}(3000)=0{,}8$	$p^{*2}(3000)=0{,}015$
4000	$p^{*0}(4000)=0$	$p^{*1}(4000)=0$	$p^{*2}(4000)=0{,}1025$
5000	$p^{*0}(5000)=0$	$p^{*1}(5000)=0$	$p^{*2}(5000)=0{,}24$
6000	$p^{*0}(6000)=0$	$p^{*1}(6000)=0$	$p^{*2}(6000)=0{,}64$
	1	**1**	**1**

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\, p_N(k)$$

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}0025 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}015 \\ 0 & 0 & 0{,}1025 \\ 0 & 0 & 0{,}24 \\ 0 & 0 & 0{,}64 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} p^{*\mathbf{0}}(s) & p^{*\mathbf{1}}(s) & p^{*\mathbf{2}}(s) \end{array} \end{array} \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}48 \\ 0{,}16 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \boldsymbol{P_N(0)} \\ \boldsymbol{P_N(1)} \\ \boldsymbol{P_N(2)} \end{array} \end{array}$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

S	$S(X_1,X_2)$	P_S
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{2} E(B_i)q_i}$$

$$\boldsymbol{E(S_{ind}) = 2200}$$

$$\boldsymbol{var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{2}\left[var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)\right]}$$

$$\boldsymbol{var(S_{ind}) = 3860000}$$

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(N)E(X)}$$

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = 2200}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = 3860000}$$

$$M_{S_{ind}}(t) = M_X(t)M_X(t)$$

$$M_X(t) = 0{,}6 + 0{,}02e^{1000t} + 0{,}06e^{2000t} + 0{,}32e^{3000t}$$

Logo

$$\boldsymbol{M_{S_{ind}}(t) = \left(0,6 + 0,02e^{1000t} + 0,06e^{2000t} + 0,32e^{3000t}\right)^2}$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N\big(\ln\big(M_X(t)\big)\big)$$

$$M_N(t) = (0{,}6 + 0{,}4e^{t})^2 \qquad M_X(t) = 0{,}05e^{1000t} + 0{,}15e^{2000t} + 0{,}8e^{3000t}$$

$$M_{S_{col}}(t) = [0{,}6 + 0{,}4(0{,}05e^{1000t} + 0{,}15e^{2000t} + 0{,}8e^{3000t})]^2$$

Logo

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left(0,6 + 0,02e^{1000t} + 0,06e^{2000t} + 0,32e^{3000t}\right)^2}$$

Teoria do Risco

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Calcule o valor de prêmio puro (utilizando o principio do percentil) de modo que a probabilidade do sinistro o superar, não exceda a 5% (utilizando aproximação pela distribuição normal). *Use os dados do **exemplo 5.**

Calcule o valor de prêmio puro (utilizando o principio do percentil) de modo que a probabilidade do sinistro o superar, não exceda a 5% (utilizando aproximação pela distribuição normal).

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}} = z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = E(S_{col}) + \sigma_{S_{col}} z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964{,}688\,(1{,}645) = R\$5431{,}91$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o prêmio puro de risco considerando que o limite de indenização para essa carteira seja de R$4000,00.

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o prêmio puro de risco considerando que o limite de indenização para essa carteira seja de R$4000,00.

$$Y = \begin{cases} S_{col}\,, & S_{col} < 4000 \\ 4000\,, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s\,p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000\,p(s) = R\$1956{,}8$$

Fórmula recursiva de Panjer

Alguns modelos de probabilidade podem ser escritos como

$$P(n) = P(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2,3, \ldots$$

Família de distribuição (a, b) de Panjer.

Fórmula recursiva de Panjer

$$P(n) = P(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2,3, \ldots$$

- **Poisson**(λ)

$$P(N=n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(N=n) = \frac{\lambda}{n} P(N=n-1)$$

$a = 0,$ $b = \lambda$ **e** $P(N=0) = e^{-\lambda}.$

- **Binomial**(k, q)

$$P(N=n) = \binom{k}{n} q^n (1-q)^{k-n}$$

$$P(N=n) = \frac{(k-n+1)q}{n(1-q)} P(N=n-1)$$

$a = -\frac{q}{1-q}$, $b = \frac{(k+1)q}{1-q}$ **e**
$P(N=0) = (1-q)^k.$

- **Binomial Negativa** (r, q)

$$P(N=n) = \binom{n+r-1}{n} q^r (1-q)^n$$

$$P(N=n) = \frac{r+n-1}{n} P(N=n-1)$$

$a = 1-q$, $b = \frac{r-1}{1-q}$ **e** $P(N=0) = (1-q)^n.$

Considere que o número de sinistros N tal que $N \sim Po(5)$, calcule $P(N=3)$?

$$P(N=3) = \frac{e^{-5}5^3}{3!} \approx 0{,}140$$

ou

$$P(N=n) = \frac{5}{n}P(N=n-1) \quad a=0, \quad b=\lambda=5 \quad \text{e} \quad P(N=0)=e^{-5}$$

$$P(N=3) = \frac{5}{3}P(N=2)$$

$$P(N=2) = \frac{5}{2}P(N=1)$$

$$P(N=1) = \frac{5}{1}P(N=0) = 5e^{-5}$$

$$P(N=3) = \frac{5}{3}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{5}{1}\times e^{-5}\right)\right]$$

$$P(N=3) = \frac{e^{-5}5^3}{3!}$$

Fórmula recursiva de Panjer

$$P(n) = P(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2,3,\dots$$

- **Poisson**(λ)

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(N = n) = \frac{\lambda}{n} P(N = n-1)$$

$a = 0$, $b = \lambda$ **e** $P(N = 0) = e^{-\lambda}$.

```
poi<-function(n,λ){
 if(n==0){
  poi<-exp(-λ)
 } else{
  poi<-(λ /n)*poi(n-1,λ)
 }
 return(poi)
}
```

- **Binomial**(k, q)

$$P(N = n) = \binom{k}{n} q^n (1-q)^{k-n}$$

$$P(N = n) = \frac{(k-n+1)q}{n(1-q)} P(N = n-1)$$

$a = -\frac{q}{1-q}$, $b = \frac{(k+1)q}{1-q}$ **e** $P(N = 0) = (1-q)^k$

```
Bin<-function(n,k,q){
 if(n==0){
  Bin<-(1-q)^k
 } else{
  Bin<-((k-n+1)*q)/(n*(1-q))*Bin(n-1,k,q)
 }
 return(Bin)
}
```

Fórmula recursiva de Panjer para $\boldsymbol{P(S_{col})}$

- Sendo $S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$, então:

$$P(S = s) = \frac{1}{1 - a\boldsymbol{P(X = 0)}} \sum_{i=1}^{s} \left[\left(a + \frac{bx_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

em que a e b vem da distribuição de N e $P(S = 0) = P(N = 0)$

N	$P(N) = \binom{2}{n} 0{,}4^n 0{,}6^{2-n}$	S_{col}	Possíveis valores para S_{col}.
0	0,36	$S_{col} = 0$	$\boxed{\mathbf{0,05 \quad 0,15 \quad 0,8}}$
1	0,48	$S_{col} = X_i \ \forall \text{ i} = 1{,}2$	$\boxed{\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$P(S = s) = \frac{1}{1 - aP(X = 0)} \sum_i^s \left[\left(a + \frac{bx_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

$$P(S = s) = \frac{1}{1 + \frac{q}{1-q} P(X = 0)} \sum_i^s \left[\left(-\frac{q}{1-q} + \frac{(k+1)qx_i}{(1-q)s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

$$P(S = s) = \sum_i^s \left[\left(-\frac{0{,}4}{0{,}6} + \frac{2x_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

$$P(S = s) = \sum_{i}^{s} \left[\left(-\frac{0,4}{0,6} + \frac{2x_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

- $P(S = 0) = P(N = 0) = 0,36$

- $P(S = 1000) = \left(-\frac{0,4}{0,6} + \frac{2\times 1000}{1000}\right) P(X = 1000) P(S = 0) = \mathbf{0,024}$

- $P(S = 2000) = \left(-\frac{0,4}{0,6} + \frac{2\times 1000}{2000}\right) P(X = 1000) P(S = 1000) + \left(-\frac{0,4}{0,6} + \frac{2 \times 2000}{2000}\right) P(X = 2000) P(S = 0) = \mathbf{0,0724}$

...

Distribuição de S_{col}

- Aproximação pela normal

$$\frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0,1)$$

- Aproximação Gama

$$\alpha = \frac{4\left(var(S_{col})\right)^3}{E\left[\left(S_{Col} - E(S_{col})\right)^3\right]^2} \quad \beta = \frac{2var(S_{col})}{E\left[\left(S_{Col} - E(S_{col})\right)^3\right]} \quad x_0 = E(S_{col}) - \frac{2\left(var(S_{col})\right)^2}{E\left[\left(S_{Col} - E(S_{col})\right)^3\right]}$$

x_0 é o montante mínimo de indenização

...