

Aula 15 (Parte 1)-Implementação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | \ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | \ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$${}_m | \ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_m | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$${}_{m+1} | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m | a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t E_x = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_x$$

$${}_m | a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$${}_m | a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m | a_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_m | a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n+m}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){  
  v <- 1/(1+i)  
  px    <- 1-qx  
  pxx   <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima] ) )  
  t     <- (0:(length(pxx)-1))  
  a     <- (1-v^(t+1))/(1-v)  
  ax    <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])  
  return(ax)  
}
```

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){  
  v <- 1/(1+i)  
  px    <- 1-qx  
  pxx   <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima] ) )  
  t     <- (0:(length(pxx)-1))  
  a     <- (1-v^(t+1))/(1-v)  
  ax    <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])  
  return(ax)  
}
```

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){  
  v <- 1/(1+i)  
  px  <- 1-qx  
  pxx <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )  
  t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(bx)  
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} \, {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){
```

```
  v <- 1/(1+i)
```

```
  px  <- 1-qx
```

```
  pxx <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])
```

```
  ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))
```

```
  t   <- (1:(length(pxx)))
```

```
  ## t   <- (0:(length(pxx)-1))
```

```
  a   <- v*(1-v^t)/(1-v)
```

```
  ## a   <- (1-v^(t+1))/(1-v)
```

```
  ax  <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])
```

```
  ## ax  <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
```

```
  return(ax)
```

```
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){  
  v      <- 1/(1+i)  
  px     <- 1-qx  
  pxx    <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])  
  ## pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))  
  t      <- (1:(length(pxx)))  
  ## t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  bx     <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(bx)  
}
```

Anuidade imediata Temporária

```
AnuiAntTemp<-function(i,idade,n,b){  
  v    <- 1/(1+i)  
  px   <- 1-qx  
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):(idade+n-1)]) )  
  t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  ax   <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(ax)  
}
```

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

```
AnuiPostTemp<-function(i,idade,n,b){  
  v    <- 1/(1+i)  
  px   <- 1-qx  
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):(idade+n)])  
  t    <- 1:length(pxx)  
  ax   <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(ax)  
}
```

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_x$$

EXEMPLO 1: Seja uma pessoa $x = 25$ anos, e considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano. Calcule A_{25} , \ddot{a}_{25} e a_{25} .



EXEMPLO 1

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t}$$

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25}$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} = 0,08320205$$

```

premio<-function(b,idade,i){
  v    <- (1/(1+i)) ^ (1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax   <- b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
}

```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 19,25276$$

$$a_{25} = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 18,25276$$

```

AnuiAnt<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  t    <- (0:(length(pxx)-1))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

```

AnuiPost<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  t    <- (1:(length(pxx)))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

Exemplo de Cálculo de seguros

- PortalHalley

<https://phalley.shinyapps.io/interface-atuarial/>

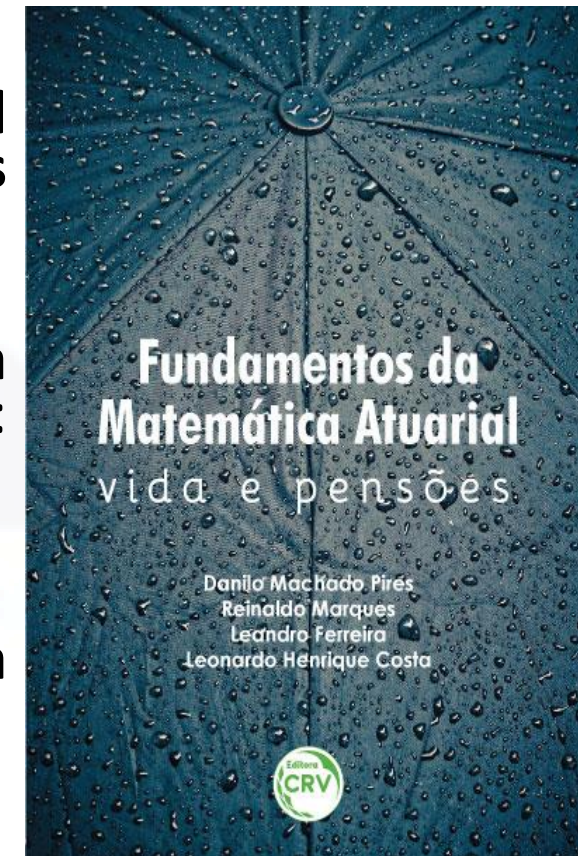
- AppCATU

[https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt BR](https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt_BR)

- R (Lifecontingencies)

<https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf>

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



Aula 15 (Parte 2)-Relações entre Anuidade e seguro pago ao final do ano de morte

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

EXEMPLO 1 : Dada uma pessoa de 25 anos ($x = 25$), calcule A_{25} , \ddot{a}_{25} e a_{25} .

Considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano.

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} = 0,08320205$$

```

premio<-function(b,idade,i){
  v    <- (1/(1+i)) ^ (1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax   <- b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
}

```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 19,25276$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 18,25276$$

```

AnuiAnt<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  t    <- (0:(length(pxx)-1))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

```

AnuiPost<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  t    <- (1:(length(pxx)))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```


Relações entre Seguros e Anuidades

Consideramos um seguro de vida inteiro com tempo discreto (seguro pago no final do ano da morte):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x (1 - p_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} [v^{t+1} {}_t p_x - v^{t+1} {}_t p_x (p_{x+t})]$$

Assim:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x p_{x+t}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1} p_x$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_{t+1} p_x = v \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x - \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$A_x = v \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x - \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$A_x = v \ddot{a}_x - a_x$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$1 + a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1:\bar{n}}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}} - a_{x:\bar{n}}|$$

$$A_{x:\bar{n}}| = v\ddot{a}_{x:\bar{n}} - a_{x:\overline{n-1}}|$$

$$A_{x^{1:\bar{n}}|} + A_{x:\bar{n}}| + iA_{x^{1:\bar{n}}} + a_{x:\bar{n}} i = 1$$

$$A_{x:\bar{n}}| + iA_{x^{1:\bar{n}}} + ia_{x:\bar{n}} = 1$$

Anuidade fracionadas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}_{\overline{T+\frac{1}{m}}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1 - v^{T+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right), T \geq 0$$

$$a_{\overline{T}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} \left(\frac{1 - v^T}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right), T \geq 1$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \frac{t}{m} p_x$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \frac{t}{m} p_x$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v \left(\frac{1-v^t}{1-v} \right) {}_t p_x q_{x+t}$$

Anuidades vitalícias fracionadas

Interpolação de Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \left[\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} + \ln(1+i) \right]$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m} \left[\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} + \ln(1+i) \right]$$

EXEMPLO 2: Seja uma pessoa de 40 anos que queira adquirir uma anuidade que paga 1 *u.m.* Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o valor do prêmio puro, considere o efeito imediato e que o benefício seja fracionado em pagamentos mensais.

$$\ddot{a}_{40} \approx \$17,67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17,67 - \frac{12 - 1}{2 \times 12} \approx \$ 17,21$$

Como $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$a_{40} \approx \$16,67$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16,67 + \frac{12 - 1}{2 \times 12} \approx \$17,12$$

$$\ddot{a}_{40} \approx \$17,67$$

$$a_{40} \approx \$16,67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(2)} \approx 17,67 - \frac{2-1}{2 \times 2} \approx \$17,42$$

$$a_{40}^{(2)} \approx 16,67 + \frac{2-1}{2 \times 2} \approx \$16,92$$

$$\ddot{a}_{40}^{(3)} \approx 17,67 - \frac{3-1}{2 \times 3} \approx \$17,336$$

$$a_{40}^{(3)} \approx 16,67 + \frac{3-1}{2 \times 3} \approx \$17,003$$

$$\ddot{a}_{40}^{(4)} \approx 17,67 - \frac{4-1}{2 \times 4} \approx \$17,295$$

$$a_{40}^{(4)} \approx 16,67 + \frac{4-1}{2 \times 4} \approx \$17,045$$

$$\ddot{a}_{40}^{(6)} \approx 17,67 - \frac{6-1}{2 \times 6} \approx \$17,253$$

$$a_{40}^{(6)} \approx 16,67 + \frac{6-1}{2 \times 6} \approx \$17,086$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17,67 - \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$17,211$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16,67 + \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$17,128$$

$$\ddot{a}_{40}^{(365)} \approx 17,67 - \frac{365-1}{2 \times 365} \approx \$17,17$$

$$a_{40}^{(365)} \approx 16,67 + \frac{12-1}{2 \times 365} \approx \$17,168$$

Anuidades temporárias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n) \left(\frac{m-1}{2m} \right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n) \left(\frac{m-1}{2m} \right)$$

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

Anuidades diferidas fracionadas

$${}_k|\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(\ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right)$$

$${}_k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx {}_k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\frac{m-1}{2m} \right) {}_k p_x v^k (1 - {}_n p_{x+k} v^n)$$

$${}_k|a_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(a_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \right)$$

$${}_k|a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx {}_k|a_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{m-1}{2m} \right) {}_k p_x v^k (1 - {}_n p_{x+k} v^n)$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

