

# **Matemática Atuarial II**

## **Aula 11**

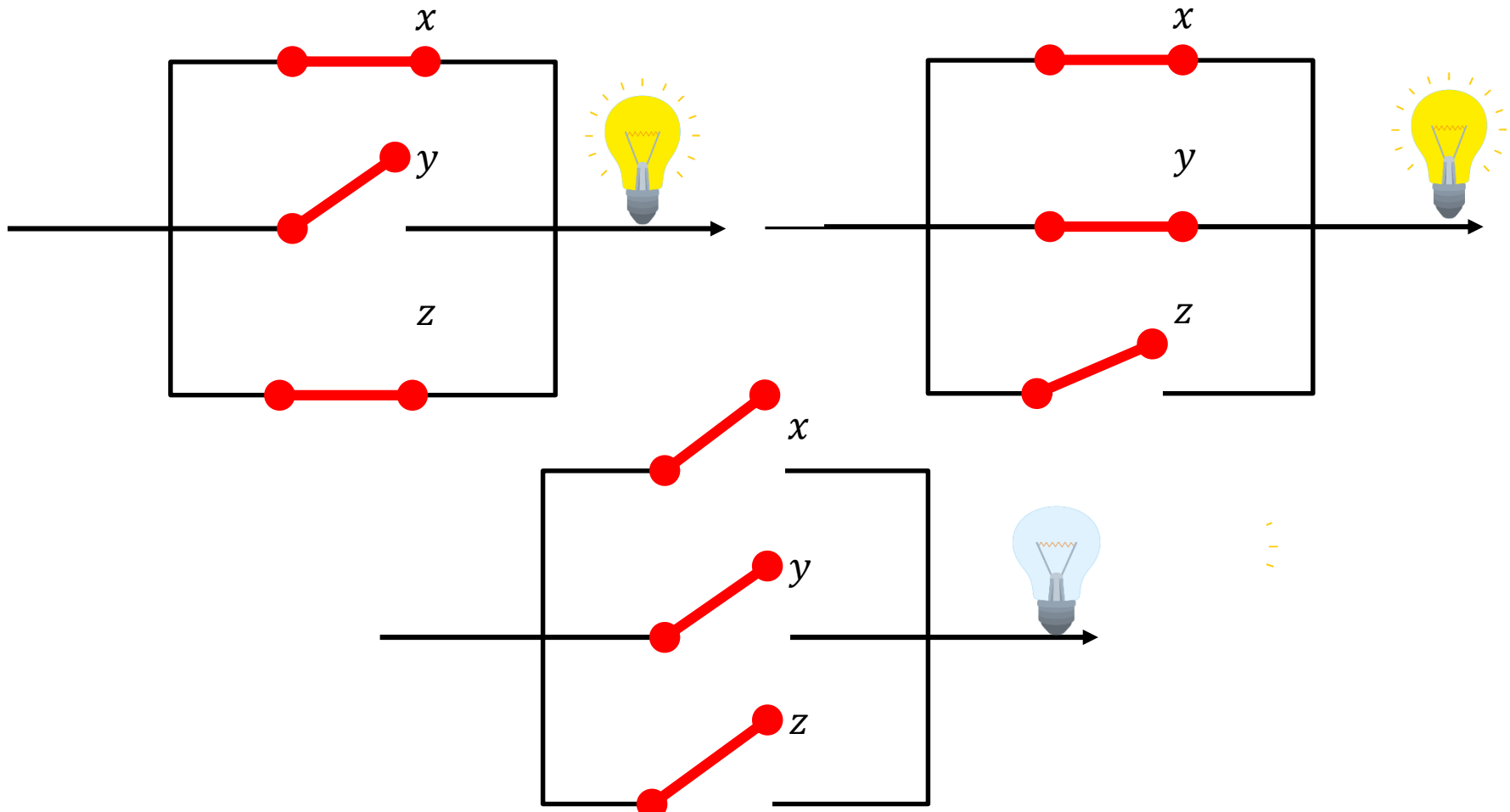
Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

# Status último sobrevivente

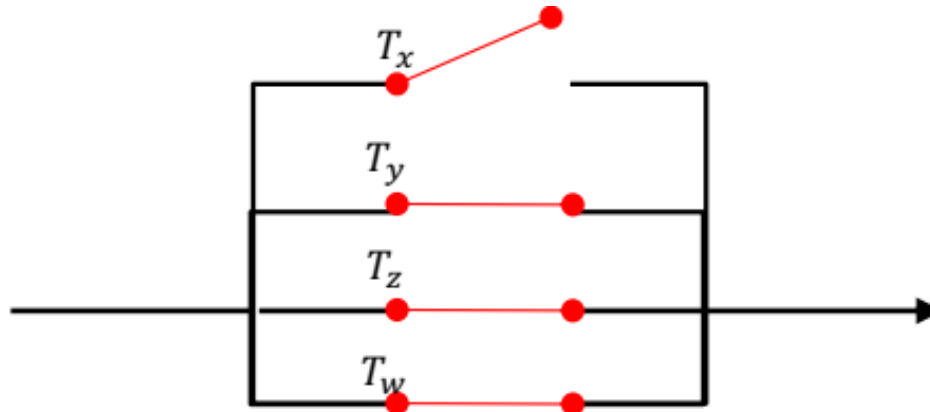
O status último sobrevivente (Last survivor status) falha quando a última das  $n$  vidas vir a óbito.

*Analogia com um circuito em paralelo*



# Status último sobrevivente

O status último sobrevivente (Last survivor status) falha quando a última de  $n$  vidas vir a óbito, ou seja, o status estará “ativo” enquanto pelo menos um elemento do grupo estiver vivo.



# Status último sobrevivente

Considere o vetor aleatório  $\{T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}, \dots, T_{x_n}\}$  composto pelas variáveis aleatórias das sobrevidas de  $n$  pessoas, então a sobrevida resultante do status vida conjunta relacionado a esse vetor é dada por:

$$T_{x_{(n)}} = \max\{T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}, \dots, T_{x_n}\}$$

E  $T_{x_{(n)}}$  representa a sobrevida (v.a.) daquele indivíduo que mais tempo viverá dentro o conjunto.

# Status último sobrevivente

Em particular daremos mais atenção a seguros sobre duas vidas ( $x$  e  $y$ ), assim:

$$T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$$

Por definição  $F_{T_{\overline{x,y}}}(t)$  implica na probabilidade de que aquele que viver mais entre  $x$  ou  $y$  não sobreviver a  $t$ , ou seja:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_{\overline{x,y}} \leq t) = P(\max\{T_x, T_y\} \leq t) = {}_t q_{\overline{x,y}}$$

\*A notação  $T_{\overline{x,y}}$  é usada para representar as idades que compõem o estados, assim  $T_{\overline{x,y}} = T_{(n)}$

# Status último sobrevivente

A probabilidade de que o status falhe em  $t$  anos, é dada por:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_{\overline{x,y}} \leq t)$$

Se o máximo entre  $T_x$  e  $T_y$  é menor que  $t$  então ambos são menores.

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_x \leq t \text{ e } T_y \leq t)$$

Como  $T_x$  e  $T_y$  são independentes:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_x \leq t) P(T_y \leq t)$$

$$\mathbf{F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t q_{\overline{x,y}} = {}_t q_x {}_t q_y}$$

# Status último sobrevivente

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_{\overline{x,y}} > t) = P(\max\{T_x, T_y\} > t)$$

Se o máximo entre  $T_x$  e  $T_y$  é maior que  $t$ , então:

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_x > t \text{ ou } T_y > t)$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = P(T_x > t) + P(T_y > t) - P(T_x > t) P(T_y > t)$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_{\overline{x,y}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y$$

# Resumo

Seja  $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

Seja  $T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$${}_t q_{\overline{x,y}} = 1 - {}_t p_{\overline{x,y}}$$



# Resumo

Seja  $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

Seja  $T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$${}_t q_{\overline{x,y}} = 1 - {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$${}_t q_{x,y} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{x,y}$$

**Exemplo 1:** Seja o tempo de vida futuro  $T_{45}$  e  $T_{50}$  independentes, obtenha a probabilidade de que a **última morte** ocorra entre 5 e 10.

**Exemplo 1:** Seja o tempo de vida futuro  $T_{45}$  e  $T_{50}$  independentes, obtenha a probabilidade de que a **última morte** ocorra entre 5 e 10.

$$P(5 < T_{\overline{45,50}} \leq 10) = P(T_{\overline{45,50}} > 5) - P(T_{\overline{45,50}} > 10)$$

$$P(5 < T_{\overline{45,50}} \leq 10) = {}_5p_{\overline{45,50}} - {}_{10}p_{\overline{45,50}}$$

$$P(5 < T_{\overline{45,50}} \leq 10) = {}_5p_{45} + {}_5p_{50} - {}_5p_{45,50} - {}_{10}p_{45} - {}_{10}p_{50} + {}_{10}p_{45,50}$$

$$P(5 < T_{\overline{45,50}} \leq 10) = {}_5p_{45} + {}_5p_{50} - {}_5p_{45} {}_5p_{50} - {}_{10}p_{45} - {}_{10}p_{50} + {}_{10}p_{45} {}_{10}p_{50}$$

**Exemplo 2:** Considere um seguro de vida feito por um grupo de 3 pessoas de mesmo sexo, em que o benefício será pago caso todos os membros do grupo venham a falecer. Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada membro seja modelado pelas variáveis aleatórias  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$  tal que  $T_x \sim \text{Exp}(0,02)$ ,  $T_y \sim \text{Exp}(0,032)$  e  $T_z \sim \text{Exp}(0,025)$ .

**Exemplo 2:** Considere um seguro de vida feito por um grupo de 3 pessoas de mesmo sexo, em que o benefício será pago caso todos os membros do grupo venham a falecer. Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada membro seja modelado pelas variáveis aleatórias  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$  tal que  $T_x \sim \text{Exp}(0,02)$ ,  $T_y \sim \text{Exp}(0,032)$  e  $T_z \sim \text{Exp}(0,025)$ .

$$P(T_{\overline{x,y,z}} \leq 10) = P(T_x \leq 10)P(T_y \leq 10)P(T_z \leq 10)$$

$$P(T_{\overline{x,y,z}} \leq 10) = (1 - e^{-0,02 \times 10})(1 - e^{-0,032 \times 10})(1 - e^{-0,025 \times 10})$$

$$P(T_{\overline{x,y,z}} \leq 10) \approx 0,01098$$

# Status último sobrevivente

A probabilidade de que número de anos completados pelo status seja  $t$ , é dado por:

$${}_t|q_{\overline{x,y}} = P(T_{\overline{x,y}} = t) = P(t < T_{\overline{x,y}} \leq t + 1)$$

$${}_t|q_{\overline{x,y}} = P(T_{\overline{x,y}} > t) - P(T_{\overline{x,y}} > t + 1)$$

$${}_t|q_{\overline{x,y}} = {}_t p_{\overline{x,y}} - {}_{t+1} p_{\overline{x,y}},$$

$${}_t|q_{\overline{x,y}} = ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) - ({}_{t+1} p_x + {}_{t+1} p_y - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y),$$

$${}_t|q_{\overline{x,y}} = ({}_t p_x - {}_{t+1} p_x) + ({}_t p_y - {}_{t+1} p_y) - ({}_t p_x {}_t p_y - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y),$$

...

# Status último sobrevivente

...

$${}_t|q_{\overline{x},\overline{y}} = ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) + ({}_tp_y - {}_{t+1}p_y) - ({}_tp_x {}_tp_y - {}_{t+1}p_x {}_{t+1}p_y),$$

$${}_t|q_{\overline{x},\overline{y}} = ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) + ({}_tp_y - {}_{t+1}p_y) - [{}_tp_x {}_tp_y - ({}_tp_x p_{x+t}) ({}_tp_y p_{y+t})],$$

$${}_t|q_{\overline{x},\overline{y}} = ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) + ({}_tp_y - {}_{t+1}p_y) - [{}_tp_x {}_tp_y (1 - p_{x+t} p_{y+t})],$$

$${}_t|q_{\overline{x},\overline{y}} = ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) + ({}_tp_y - {}_{t+1}p_y) - ({}_tp_x {}_tp_y q_{x+t,y+t}),$$

$${}_t|q_{\overline{x},\overline{y}} = ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) + ({}_tp_y - {}_{t+1}p_y) - [{}_tp_x {}_tp_y (q_{x+t} + q_{y+t} - q_{x+t}q_{y+t})]$$

...

# Status último sobrevivente

$${}_t|q_{\overline{x},y} = ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) + ({}_tp_y - {}_{t+1}p_y) - [{}_tp_x {}_tp_y (q_{x+t} + q_{y+t} - q_{x+t}q_{y+t})]$$

Fazendo  ${}_tp_x - {}_{t+1}p_x = {}_tp_x q_{x+t}$  e  ${}_tp_y - {}_{t+1}p_y = {}_tp_y q_{y+t}$

$${}_t|q_{\overline{x},y} = {}_tp_x q_{x+t} + {}_tp_y q_{y+t} - ({}_tp_x {}_tp_y q_{x+t} + {}_tp_x {}_tp_y q_{y+t} - {}_tp_x {}_tp_y q_{x+t} q_{y+t}),$$

$${}_t|q_{\overline{x},y} = (1 - {}_tp_y) {}_tp_x q_{x+t} + (1 - {}_tp_x) {}_tp_y q_{y+t} + {}_tp_x {}_tp_y q_{x+t} q_{y+t},$$

$${}_t|q_{\overline{x},y} = ({}_tq_y) {}_tp_x q_{x+t} + ({}_tq_x) {}_tp_y q_{y+t} + {}_tp_x {}_tp_y (q_{x+t})(q_{y+t})$$



**Exemplo 3:** Considerando a tábua de vida AT-49 masculina calcule  ${}_2|q_{\overline{20,25}}$  e  ${}_1|q_{\overline{20,25}}$ .

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	984341,5
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	981028,7
26	0,00081	0,99919	980273,3
27	0,00085	0,99915	979479,3
28	0,00090	0,99910	978646,8

**Exemplo 3:** Considerando a tábua de vida AT-49 masculina calcule  ${}_2|q_{\overline{20,25}}$  e  ${}_1|q_{\overline{20,25}}$ .

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	984341,5
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	981028,7
26	0,00081	0,99919	980273,3
27	0,00085	0,99915	979479,3
28	0,00090	0,99910	978646,8

$${}_2|q_{\overline{20,25}} = ({}_2q_{25})({}_2p_{20})q_{22} + ({}_2q_{20})({}_2p_{25})q_{27} + ({}_2p_{20})({}_2p_{25})q_{22}q_{27} \approx 0,000002703523$$

$${}_1|q_{\overline{20,25}} = (q_{25})(p_{20})q_{21} + (q_{20})(p_{25})q_{26} + (p_{20})(p_{25})q_{21}q_{26} \approx ???$$

# Resumo

Seja  $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

Seja  $T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$${}_t q_{\overline{x,y}} = 1 - {}_t p_{\overline{x,y}}$$

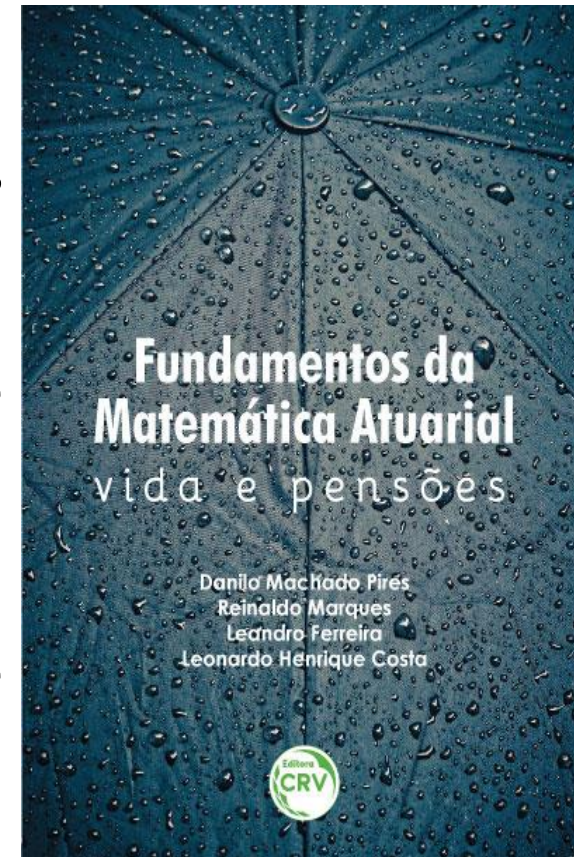
$$\begin{aligned} & {}_t | q_{x,y} \\ &= ({}_t p_x)({}_t p_y)(q_{x+t} + q_{y+t} - q_{x+t} q_{y+t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}_t | q_{\overline{x,y}} \\ &= ({}_t q_y) {}_t p_x q_{x+t} + ({}_t q_x) {}_t p_y q_{y+t} \\ &+ {}_t p_x {}_t p_y (q_{x+t})(q_{y+t}) \end{aligned}$$

$${}_t q_{x,y} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{x,y}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



# **Matemática Atuarial II**

## **Aula 12**

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

# Resumo

Seja  $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

Seja  $T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$  então:

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$${}_t q_{\overline{x,y}} = 1 - {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$$\begin{aligned} & {}_t | q_{x,y} \\ &= ({}_t p_x)({}_t p_y)(q_{x+t} + q_{y+t} - q_{x+t} q_{y+t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}_t | q_{\overline{x,y}} \\ &= ({}_t q_y) {}_t p_x q_{x+t} + ({}_t q_x) {}_t p_y q_{y+t} \\ &+ {}_t p_x {}_t p_y (q_{x+t})(q_{y+t}) \end{aligned}$$

$${}_t q_{x,y} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{x,y}$$

# Status último sobrevivente(Seguro)

O seguro de vida vitalício pago ao final do ano de falha do status último sobrevivente é aquele que somente pagará o benefício quando não restar mais nenhum sobrevivente do status...

Para a variável aleatória  $T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$ , o cálculo do prêmio puro único para um seguro de vida vitalício com benefício(unitário) pago ao final do ano de falha , é calculado por:

$$A_{\overline{x,y}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{x,y}}$$

Em que:

$${}_t|q_{\overline{x,y}} = {}_tq_y {}_tp_x q_{x+t} + {}_tq_x {}_tp_y q_{y+t} + {}_tp_x {}_tp_y q_{x+t} q_{y+t}$$

# Status último sobrevivente (Seguro)

Para a variável aleatória  $T_{\overline{x,y}} = \max\{T_x, T_y\}$ , o cálculo do prêmio puro único para um seguro de vida temporário por  $n$  anos com benefício(unitário) pago ao final do ano de falha , é calculado por:

$$A_{\overline{u}^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{x,y}}$$

em que  $u = \{x, y\}$  e  ${}_t|q_{\overline{x,y}} = {}_tq_y {}_tp_x q_{x+t} + {}_tq_x {}_tp_y q_{y+t} + {}_tp_x {}_tp_y q_{x+t} q_{y+t}$



**Exemplo 3:** Considere a tábua de vida AT-49 masculina e uma taxa de juros anual de 5%, então calcule o valor de  $A_{\overline{u}^1:\overline{3}|}$ , sendo que  $u = \{20,25\}$ .

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	984341,5
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	981028,7
26	0,00081	0,99919	980273,3
27	0,00085	0,99915	979479,3
28	0,00090	0,99910	978646,8

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	984341,5
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	981028,7
26	0,00081	0,99919	980273,3
27	0,00085	0,99915	979479,3

$$A_{\overline{u}^1:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^2 v^{t+1} {}_t|q_{\overline{20,25}},$$

$$A_{\overline{u}^1:\overline{3}|} = v {}_0|q_{\overline{20,25}} + v^2 {}_1|q_{\overline{20,25}} + v^3 {}_2|q_{\overline{20,25}}$$

Em que

$${}_0|q_{\overline{20,25}} = ({}_0q_{25}) {}_0p_{20} q_{20} + ({}_0q_{20}) {}_0p_{25} q_{25} + ({}_0p_{20})({}_0p_{25}) q_{20} q_{25} \approx 0,0000004774$$

$${}_1|q_{\overline{20,25}} = q_{25} {}_p_{20} q_{21} + {}_q_{20} {}_p_{25} q_{26} + {}_p_{20} {}_p_{25} q_{21} q_{26} \approx 0,000001527771$$

$${}_2|q_{\overline{20,25}} = ({}_2q_{25})({}_2p_{20})q_{22} + ({}_2q_{20})({}_2p_{25})q_{27} + ({}_2p_{20})({}_2p_{25})q_{22}q_{27} \approx 0,000002703523$$

Então

$$A_{\overline{u}^1:\overline{3}|} \approx 0,000004176$$

## Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x,y}}$

$$\text{Se } T_{x,y} = T_x \text{ então } T_{\overline{x,y}} = T_y$$

$$\text{Se } T_{x,y} = T_y \text{ então } T_{\overline{x,y}} = T_x$$

Consequentemente

$$T_{x,y} + T_{\overline{x,y}} = T_x + T_y$$

e

$$T_{x,y} T_{\overline{x,y}} = T_x T_y$$

Sendo assim para  $c$  um valor constante

$$c^{T_{x,y}} + c^{T_{\overline{x,y}}} = c^{T_x} + c^{T_y}$$

## Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x},y}$

Fazendo  $c = v$ , temos

$$v^{T_{x,y}} + v^{T_{\overline{x},y}} = v^{T_x} + v^{T_y}$$

logo

$$v^{T_{x,y}+1} + v^{T_{\overline{x},y}+1} = v^{T_x+1} + v^{T_y+1}$$

Tomando a esperança dos dois lados:

$$E(v^{T_{x,y}+1} + v^{T_{\overline{x},y}+1}) = E(v^{T_x+1} + v^{T_y+1})$$

$$E(v^{T_{x,y}+1}) + E(v^{T_{\overline{x},y}+1}) = E(v^{T_x+1}) + E(v^{T_y+1})$$

# Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x,y}}$

$$E(v^{T_{x,y}+1}) + E(v^{T_{\overline{x,y}}+1}) = E(v^{T_x+1}) + E(v^{T_y+1})$$

Para o caso em que  $T_x > 0$  e  $T_y > 0$

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(T_{x,y} = t) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(T_{\overline{x,y}} = t) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(T_x = t) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} P(T_y = t)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{x,y} + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{x,y}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_x + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_y$$

$$A_{x,y} + A_{\overline{x,y}} = A_x + A_y$$

## Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x,y}}$

$$A_{x,y} + A_{\overline{x,y}} = A_x + A_y$$

$$m|A_{\overline{x,y}} + m|A_{x,y} = m|A_x + m|A_y$$

$$A_{u^1:\bar{n}|} + A_{\bar{u}^1:\bar{n}|} = A_{x^1:\bar{n}|} + A_{y^1:\bar{n}|}$$

$$m|A_{\bar{u}^1:\bar{n}|} + m|A_{u^1:\bar{n}|} = m|A_{x^1:\bar{n}|} + m|A_{y^1:\bar{n}|}$$

em que  $u = \{x, y\}$

## Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x},\overline{y}}$

Entregar!!

$$A_{20,25:\overline{3}|}^1 + A_{\overline{20,25:\overline{3}|}}^1 = A_{20:\overline{3}|}^1 + A_{25:\overline{3}|}^1$$

## Status último sobrevivente(Seguro Dotal puro)

Tem como característica o fato de que o benefício será pago caso pelo menos um membro do status sobreviva ao período contratado. Sendo assim:

$$A_{\overline{u}:\overline{n}|^1} = v^n {}_n p_{\overline{x,y}}$$

$$A_{\overline{u}:\overline{n}|^1} = v^n ({}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_x {}_n p_y) = v^n (1 - {}_t q_x {}_t q_y)$$

em que  $u = \{x, y\}$ .



**Exemplo 3:** Qual o valor do prêmio puro de seguro feito por  $x$  e  $y$  que irá pagar \$100000,00 a ambos ou ao sobrevivente ao término de 6 anos (se ambos estiverem mortos, nada será pago)? Considere  $u = \{x = 20, y = 25\}$ ,  $i = 5\%$  e a tábua de vida AT-49 masculina para  $T_{20}$  e  $T_{25}$ .

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	984341,5
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	981028,7
26	0,00081	0,99919	980273,3
27	0,00085	0,99915	979479,3
28	0,00090	0,99910	978646,8
29	0,00095	0,99905	977766
30	0,00100	0,99900	976837,1
31	0,00107	0,99893	975860,3
32	0,00114	0,99886	974816,1

$$Z_t = \begin{cases} 10^5 v^6, & \text{se } T_{\overline{x,y}} = \max\{T_{20}, T_{25}\} > 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Exemplo 3:** Qual o valor do prêmio puro de seguro feito por  $x$  e  $y$  que irá pagar \$100000,00 a ambos ou ao sobrevivente ao término de 6 anos (se ambos estiverem mortos, nada será pago)? Considere  $u = \{x = 20, y = 25\}$  ,  $i = 5\%$  e a tábua de vida AT-49 masculina para  $T_{20}$  e  $T_{25}$ .

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	<b>984341,5</b>
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	<b>981028,7</b>
26	0,00081	0,99919	<b>980273,3</b>
27	0,00085	0,99915	979479,3
28	0,00090	0,99910	978646,8
29	0,00095	0,99905	977766
30	0,00100	0,99900	976837,1
31	0,00107	0,99893	<b>975860,3</b>
32	0,00114	0,99886	974816,1

$$(100000)A_{\overline{u}:\overline{6}|^1} = 10^5 v^6 \, {}_6p_{\overline{20,25}},$$

$$(100000)A_{\overline{u}:\overline{6}|^1} = 10^5 v^6 ({}_6p_{20} + {}_6p_{25} - {}_6p_{20} {}_6p_{25}).$$

$$(100000)A_{\overline{u}:\overline{6}|^1} = 10^5 v^6 \left( \frac{l_{26}}{l_{20}} + \frac{l_{31}}{l_{25}} - \frac{l_{26}}{l_{20}} \frac{l_{31}}{l_{25}} \right).$$

$$(100000)A_{\overline{u}:\overline{6}|^1} \approx \$74619,91.$$

## Status último sobrevivente(Seguro Dotal misto)

O dotal misto com cobertura de  $n$  anos para o status último sobrevivente composto por duas vidas, tal que  $u = \{x, y\}$  pode ser calculado por:

$$A_{\bar{u}:\bar{n}|} = A_{\bar{u}:\bar{n}|}^1 + A_{\bar{u}^1:\bar{n}|}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

**Exemplo 4:** Qual o valor do prêmio puro de seguro feito por  $x$  e  $y$  que irá pagar  $b = 1$  a ambos ou ao sobrevivente ao término de 2 anos ( se ambos estiverem mortos, um terceiro irá receber)? Considere  $u = \{x = 20, y = 25\}$  ,  $i = 3\%$  e a tábua de vida AT-49 masculina para  $T_{20}$  e  $T_{25}$ .

x	qx	px	lx
20	0,00062	0,99938	<b>984341,5</b>
21	0,00065	0,99935	983731,2
22	0,00067	0,99933	983091,8
23	0,00070	0,99930	982433,1
24	0,00073	0,99927	981745,4
25	0,00077	0,99923	981028,7
26	0,00081	0,99919	<b>980273,3</b>
27	0,00085	0,99915	979479,3
28	0,00090	0,99910	978646,8
29	0,00095	0,99905	977766
30	0,00100	0,99900	976837,1
31	0,00107	0,99893	975860,3
32	0,00114	0,99886	974816,1

$$A_{\overline{u}:\overline{2}|} = A_{\overline{u}:\overline{2}|^1} + A_{\overline{u}^1:\overline{2}|}$$

**Exemplo 5:** Considere um casal composto por uma pessoa de idade 20 anos e outra de idade 21 anos, assumindo uma taxa de juros de  $i = 3\%$  ao ano e que  $T_{20}$  e  $T_{21}$  possam ser modelados pelas tábuas AT2000\_M e AT2000\_F, respectivamente. Calcule o que se pede.

$x$	AT2000_M	$l_x$	AT2000_F	$l_x$
20	0,00055	989332,6	0,00028	993876,5
21	0,00057	988788,5	0,00029	993598,3
22	0,0006	988224,9	0,00031	993310,1
23	0,00063	987631,9	0,00033	993002,2
24	0,00066	987009,7	0,00035	992674,5
25	0,00069	986358,3	0,00037	992327,1
26	0,00071	985677,7	0,00039	991959,9
27	0,00074	984977,9	0,0004	991573
28	0,00076	984249	0,00042	991176,4
29	0,00077	983501	0,00044	990760,1
30	0,00078	982743,7	0,00045	990324,2

a)  ${}_4|A^1_{20:\overline{2}|}$

b)  ${}_4|A^1_{21:\overline{2}|}$

c)  ${}_4|A^1_{20,21:\overline{2}|}$

d)  $(10^4) {}_4|A^1_{\overline{20,21:\overline{2}}|}$

$$a) {}_4|A^1_{20:\overline{2}}| = v^4 {}_4p_{20}A^1_{24:\overline{2}}|$$

$x$	AT2000_M	$l_x$
20	0,00055	989332,6
21	0,00057	988788,5
22	0,0006	988224,9
23	0,00063	987631,9
24	0,00066	987009,7
25	0,00069	986358,3
26	0,00071	985677,7
27	0,00074	984977,9
28	0,00076	984249
29	0,00077	983501
30	0,00078	982743,7

$${}_4|A^1_{20:\overline{2}}| = v^4 {}_4p_{20} \sum_{t=0}^1 v^{t+1}({}_tp_{24})q_{24+t}$$

$${}_4|A^1_{20:\overline{2}}| = v^4 \left(\frac{l_{24}}{l_{20}}\right) [vq_{24} + v^2(p_{24})(q_{25})]$$

$${}_4|A^1_{20:\overline{2}}| \approx 0,001144112$$

b)  ${}_4|A^1_{21:\overline{2}}| = v^4 {}_4p_{21}A^1_{25:\overline{2}}|$

$x$	AT2000_F	$l_x$
20	0,00028	993876,5
21	0,00029	993598,3
22	0,00031	993310,1
23	0,00033	993002,2
24	0,00035	992674,5
25	0,00037	992327,1
26	0,00039	991959,9
27	0,0004	991573
28	0,00042	991176,4
29	0,00044	990760,1
30	0,00045	990324,2

$${}_4|A^1_{21:\overline{2}}| = v^4 {}_4p_{21} \sum_{t=0}^1 v^{t+1}({}_tp_{25})(q_{25+t})$$

$${}_4|A^1_{21:\overline{2}}| = v^4 \left(\frac{l_{25}}{l_{21}}\right) [vq_{25} + v^2(p_{25})(q_{26})]$$

$${}_4|A^1_{21:\overline{2}}| \approx 0,0006448372$$

$$c) \, {}_4|A^1_{20,21:\overline{2}}| = v^4 \, {}_4p_{20} \, {}_4p_{21} \, \sum_{t=0}^1 v^{t+1} \, {}_tp_{24} \, {}_tp_{25} (q_{24+t} + q_{25+t} - q_{24+t} \, q_{25+t})$$

$x$	AT2000_M	$l_x$	AT2000_F	$l_x$
20	0,00055	989332,6	0,00028	993876,5
21	0,00057	988788,5	0,00029	993598,3
22	0,0006	988224,9	0,00031	993310,1
23	0,00063	987631,9	0,00033	993002,2
24	0,00066	987009,7	0,00035	992674,5
25	0,00069	986358,3	0,00037	992327,1
26	0,00071	985677,7	0,00039	991959,9
27	0,00074	984977,9	0,0004	991573
28	0,00076	984249	0,00042	991176,4
29	0,00077	983501	0,00044	990760,1
30	0,00078	982743,7	0,00045	990324,2

$$v^4 \, {}_4p_{20} \, {}_4p_{21} \approx 0,8852669$$

$$v(q_{24} + q_{25} - q_{24} \, q_{25}) + v^2 p_{24} p_{25} (q_{25} + q_{26} - q_{25} \, q_{26}) \approx 0,002016465$$

$${}_4|A^1_{20,21:\overline{2}}| \approx 0,001785109$$



$$d)(10^4) \, {}_4|A_{\overline{20,21:\overline{2}}}^1 = 10^4 \left( {}_4|A_{\overline{20:\overline{2}}}^1 + {}_4|A_{\overline{21:\overline{2}}}^1 - {}_4|A_{\overline{20,21:\overline{2}}}^1 \right)$$

$$(10^4) \, {}_4|A_{\overline{20,21:\overline{2}}}^1 \approx 10^4(0,001144112 + 0,0006448372 - 0,001785109)$$

$$(10^4) \, {}_4|A_{\overline{20,21:\overline{2}}}^1 \approx 0,038402$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

