

# Teoria do Risco

## Aula 16

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

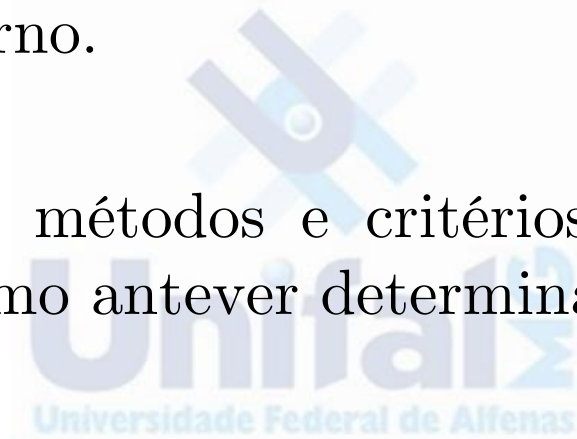


# Medida de Risco

De uma forma muito simplificada associa-se o risco a uma variável aleatória que assume valores reais em algum conjunto de possíveis cenários financeiros.

Ao se assumir um risco deve-se ter em mente a incerteza sobre o possível retorno.

Busca-se estabelecer métodos e critérios para que se possa entender ou até mesmo antever determinadas situações.



# Medida de Risco

Em um modelo probabilístico para o Risco, pode-se voltar às atenções para a distribuição resultante e tentar mensurar o risco em termos de momentos ou quantis (formas mais comuns).

- Uma medida de risco é um número real associado ao risco.
- Quantifica o “perigo” que representa para a seguradora um determinado risco.
- Um valor de prêmio é também uma medida de risco.
- Valores de prêmios e medidas de risco são sensíveis ao “peso” da cauda da distribuição da indenizações.

Quanto maior o valor da medida de risco associada ao risco, mais arriscado se torna assegurar esse risco.

# Medida de Risco

O coeficiente de variação em uma carteira de seguros serve como medida de risco para cada risco avaliado. Assim o coeficiente de variação associado ao Risco X é dado por:

$$Cv_X = \frac{\sqrt{\text{var}(X)}}{E(X)}$$

É um indicador do grau de dispersão de valores, independentemente de sua escala e unidades de medida.

O coeficiente de variação pode ser usado para comparar a variação de vários processos e fenômenos.

**EXEMPLO 1:** Considere dois segurados (I e II) que têm as distribuições de danos a veículos como mostradas por  $P_I(x)$  e  $P_{II}(x)$ . Qual segurado representa maior risco para o segurador?

$$P_I(x) = \begin{cases} 0,75 & x = 0 \\ 0,15 & x = 5000 \\ 0,08 & x = 10000 \\ 0,02 & x = 15000 \end{cases}$$

$$P_{II}(x) = \begin{cases} 0,80 & x = 0 \\ 0,08 & x = 5000 \\ 0,07 & x = 10000 \\ 0,05 & x = 15000 \end{cases}$$

A primeira vista supõem que o segurado  $II$  apresenta melhores chances imediatas de não sofrer sinistros...

$$E(X_I) = 0,75(0) + 0,15(5000) + 0,08(10000) + 0,02(15000) \\ = 1850,00$$

$$E(X_{II}) = 0,8(0) + 0,08(5000) + 0,07(10000) + 0,05(15000) \\ = 1850,00$$



A primeira vista supõem que o segurado *II* apresenta melhores chances imediatas de não sofrer sinistros...

$$E(X_I) = 0,75(0) + 0,15(5000) + 0,08(10000) + 0,02(15000) = 1850,00$$

$$E(X_{II}) = 0,8(0) + 0,08(5000) + 0,07(10000) + 0,05(15000) = 1850,00$$

A identificação do segurado que represente maior risco, ficará a cargo da variância verificada em cada uma das funções relativas aos segurados *I* e *II*.

$$E(X_I^2) = 0,75(0^2) + 0,15(5000^2) + 0,08(10000^2) + 0,02(15000^2) = 16250000,00$$

$$E(X_{II}^2) = 0,8(0^2) + 0,08(5000^2) + 0,07(10000^2) + 0,05(15000^2) = 20250000,00$$

$$var(X_I) = 16250000,00 - (1850,00)^2 = 12826500,00$$

$$var(X_{II}) = 20250000,00 - (1850,00)^2 = 16827500,00$$

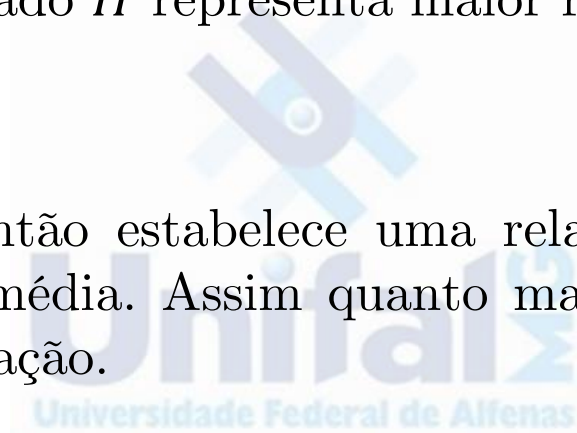
Com o uso do coeficiente de variação, pode-se obter a medida de risco:

$$CV_I = \frac{\sqrt{12826500}}{1850,00} = \frac{3581,55}{1850,00} \approx 1,93597$$

$$CV_{II} = \frac{\sqrt{16827500}}{1850,00} = \frac{4102,13}{1850,00} \approx 2,21737$$

Conclui-se então que o segurado *II* representa maior risco ao segurador.

O coeficiente de variação então estabelece uma relação da variabilidade dos dados em unidades de sua média. Assim quanto maior a variabilidade maior será o seu coeficiente de variação.





## EXEMPLO

Considere duas carteiras de seguros A e B, sendo que as distribuições do total de indenizações para as duas carteiras são dadas por:

$$f_A(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}$$

com

$$M_{S_A}(t) = \frac{3}{(1-t)} - \frac{6}{(2-t)} + \frac{3}{(3-t)}$$

e

$$P_B(s) = \begin{cases} 0,14 & s = 0 \\ 0,2279 & s = 1 \\ 0,2075 & s = 2 \\ 0,1625 & s = 3 \\ 0,1078 & s = 4 \\ 0,0627 & s = 5 \\ 0,0369 & s = 6 \\ 0,0265 & s = 7 \\ 0,0148 & s = 8 \\ 0,0072 & s = 9 \\ 0,0038 & s = 10 \\ 0,0011 & s = 11 \\ 0,0003 & s = 12 \\ 0,001 & s = 13 \end{cases}$$

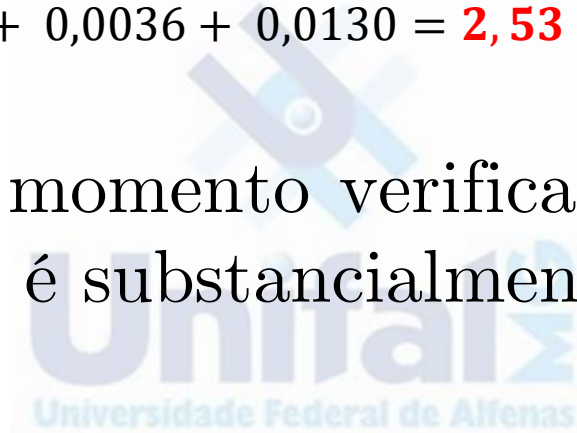
Qual dessas carteiras representa maior risco para o segurador?

Embora as carteiras apresentem diferentes valores é preciso calcular o custo de risco para cada uma delas na forma:

$$E(S_A) = \frac{dM_{S_A}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{6}{(2-t)^2} + \frac{3}{(3-t)^2} \Big|_{t=0} = 3 - \frac{6}{4} + \frac{3}{9} \approx \mathbf{1,833}$$

$$\begin{aligned} E(S_B) &= 0 + 0,2279 + 0,4150 + 0,4875 + 0,4312 + 0,3135 + 0,2214 + 0,1855 + 0,1184 \\ &+ 0,0648 + 0,0380 + 0,0121 + 0,0036 + 0,0130 = \mathbf{2,53} \end{aligned}$$

Baseado no primeiro momento verifica-se que o esperado de indenizações em  $B$  é substancialmente maior que  $A$  ....



$$E(S_A) \approx 1,833 \quad E(S_B) = 2,53$$

$$E(S_A^2) = \left. \frac{d^2 M_{S_A}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{6}{(1-t)^3} - \frac{12}{(2-t)^3} + \frac{6}{(3-t)^3} \Big|_{t=0} = 6 - \frac{12}{8} + \frac{6}{27} \approx 4,73$$

$$\begin{aligned} E(S_B^2) &= 0 + 0,2279 + 0,8300 + 1,4625 + 1,7248 + 1,5675 + 1,3284 + 1,2985 \\ &+ 0,9472 + 0,5832 + 0,38 + 0,1331 + 0,0432 + 0,1690 = 10,6953 \end{aligned}$$

Assim

$$var(S_A) = 4,73 - (1,83)^2 = 1,372$$

$$var(S_B) = 10,69 - (2,53)^2 = 4,2891$$

Com o uso do coeficiente de variação, pode se obter o maior risco ao segurador

$$CV_A = \frac{\sqrt{1,372}}{1,833} = 0,639 \quad CV_B = \frac{\sqrt{4,2891}}{2,53} = 0,8185$$

Agora sim é possível afirmar que a carteira B possui maior risco que a Carteira A.

# Medida de Risco

Em geral, uma medida de risco é uma função mapeando um risco  $X$  em um número real não-negativo  $\rho(X)$ .

- Desvio padrão

$$\rho(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

- Coeficiente de variação

$$\rho(X) = \frac{\sqrt{\text{var}(X)}}{E(X)}$$

- Função utilidade

$$\rho(X) = -E[\mu(X - E(X))]$$

- Value-at-Risk

$$\text{VaR}(X; q) = F_X^{-1}(q) = \inf\{x: F_X \geq q\}$$

# Medida de Risco

A medida de risco para uma variável aleatória  $X$  é matematicamente um mapeamento funcional a um número real.

- Uma das possibilidades é o preço pago para a cobertura de um risco financeiro ( prêmio).

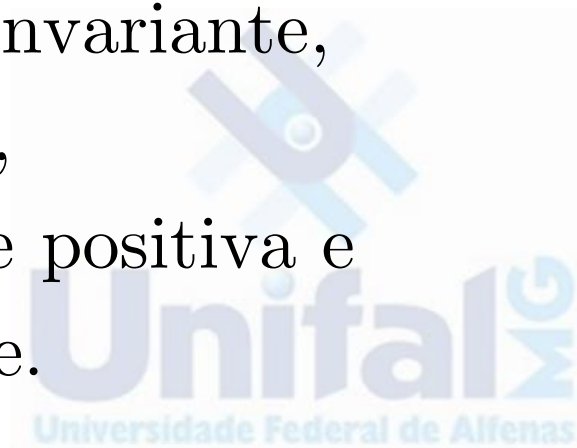
$$\Pi_S = E(S); \quad \Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta \dots$$

- Outra é a probabilidade de ruína para um determinado capital inicial dado.

# Medida de Risco

O matemático Philippe Artzner (1999) elencou alguns axiomas que torna uma medida de risco coerente.

- Transitividade invariante,
- Subaditividade,
- Homogeneidade positiva e
- Monotonicidade.



# Medida de Risco

## ➤ Transitividade invariante

Se  $c$  é uma constante, temos que

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

$$\rho(X - c) = \rho(X) - c$$

“Aumentando ou subtraindo uma certa quantidade à variável aleatória  $X$ , a medida de risco aumenta ou diminui pela certa quantidade. Redução de risco por alocação”



# Medida de Risco

## ➤ Subaditividade

Para todo  $X_1$  e  $X_2$ ,

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

“A combinação de riscos deverá acarretar em vantagens, ou seja, a medida do risco total da carteira... é menor ou igual que a medida do risco da soma individual dos ativos da carteira”



# Medida de Risco

## Homogeneidade Positiva ( de grau 1)

Para todo  $\lambda \geq 0$  e todo  $X$ ,

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

“Se possíveis indenizações de um risco são sempre modificadas tal que  $\lambda X$ , então o valor da medida de risco de  $X$  é modificada em igual proporção.”



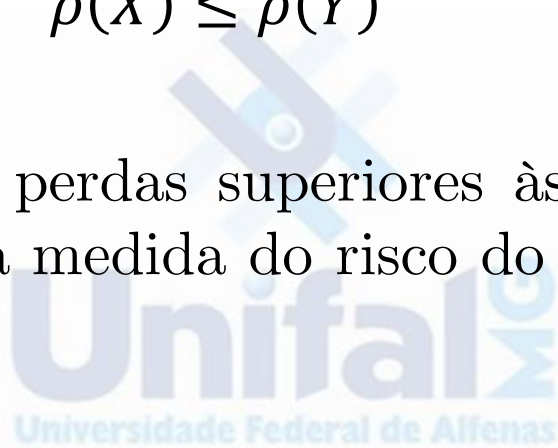
# Medida de Risco

## Monotonicidade

Para todo  $X$  e  $Y$  com  $X \leq Y$  com probabilidade 1, temos que

$$\rho(X) \leq \rho(Y)$$

“Se um risco tem sempre perdas superiores às de outro risco ( em todos os cenários), então a medida do risco do primeiro deverá ser o superior à do segundo.”



# Medida de Risco

➤ A redução do risco diminui a probabilidade da ruína de uma seguradora...

➤ Resseguro

➤ Franquia

$$Y = \text{Max}(0; X - d) = (X - d)_+$$

$$Y = (X - d) | (X > d)$$

➤ ...

# Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- DA ROCHA, José Eduardo Nunes. **Sistema Inteligente de Diagnósticos Energéticos e de Análise de Investimentos em Projetos de Eficiência Energética Gerenciados pelo Lado da Demanda**. 2013. Tese de Doutorado. PUC-Rio.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

