Matemática atuarial

Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Juros e inflação

- Inflação
  - Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.
    - FIPE
    - FGV
    - DIEESE
  - É a elevação generalizada dos preços de uma economia.
    - Excesso de gastos
    - Aumento de salários mais rápido do que da produtividade
    - Aumento dos lucros
    - Aumento nos preços das matérias primas
    - Inércia

- Taxa real de juros (t_r)
  - Essa taxa elimina o efeito da inflação
  - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva (i) a taxa de inflação no período (j) e a taxa real (t_r) é dada por:

$$(1 + i) = (1 + t_r)(1 + j)$$

Juros e inflação

- EXEMPLO 1

Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?

- EXEMPLO 1

Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36%. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$\mathrm{i} = \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42{,}58\% a.a.$$

$$(1 + 0{,}4258) = (1 + t_r)(1 + 0{,}15)$$

$$t_r \approx 23{,}98\% a.a.$$

O ganho real do banco terá sido de $23{,}98\% a.a.$

Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1+i)^n$$

➢O capital P também é chamado de <u>valor presente, F_0</u>, $(V.P.)$ e o montante M de <u>valor futuro, F $(V.P.)$,</u> assim:

$$F = F_0\boldsymbol{(i+1)^n}$$

Logo:

$$F_0 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(1+i)^n}}F$$

➢$FCC(i,n) = (1+i)^n$: <u>fator de capitalização</u> (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

➢ $\mathbf{FAC(i,n)} = \boldsymbol{v^n} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(1+i)^n}}$ é chamado de <u>fator de atualização do capital</u>, <u>**ou fator de desconto**</u> (O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

Juros Compostos- Depósitos em série

➢Série é a generalização do conceito de soma para uma sequência de infinitos termos.

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

➢Denota-se por sequência de somas parciais de um séria os seguintes termos:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Se a é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

É chamada, **série geométrica de razão r**

- Neste caso a sequência de somas parciais da série é:

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + ar$$
$$S_2 = a + ar + ar^2$$
$$\ldots$$

Juros Composto - Depósitos em série

- A n-ésima soma parcial de uma séria geométrica $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ é

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}$$

para $r \neq 1$

Demonstração:

$$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão r:

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}}$$

Juros Compostos- Depósitos em série

- Série de pagamentos é um conjunto de pagamentos de valores $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ distribuidos ao longo do tempo (n períodos).

    - Pagamentos (ou recebimentos) constantes.

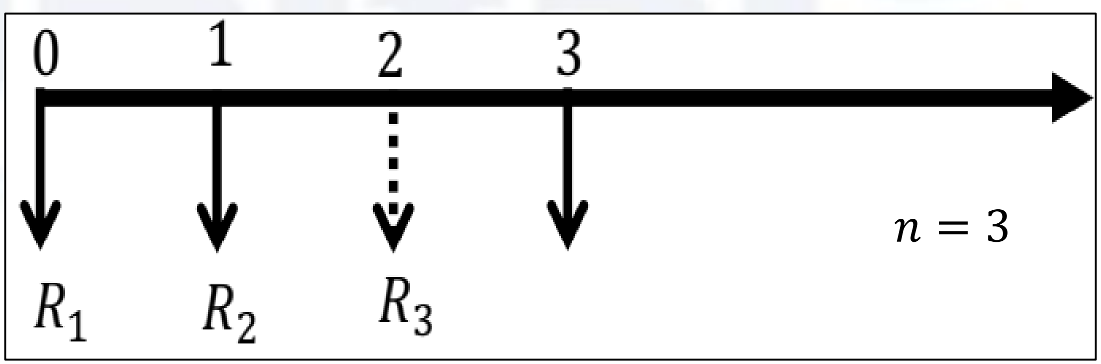
    - Pagamentos (ou recebimentos) distintos.

Juros Compostos - Depósitos em série

- O conjunto de pagamentos ao longo dos $\boldsymbol{n}$ períodos, constitui-se num fluxo de caixa.

  - Fluxo Antecipado: Pagamentos (ou recebimentos) no início dos períodos, ou seja, os depósitos ou pagamentos ocorrem na data zero.

    - Ao fazer n depósitos, o primeiro depósito começa no tempo 0, e o último é feito no tempo $n-1$

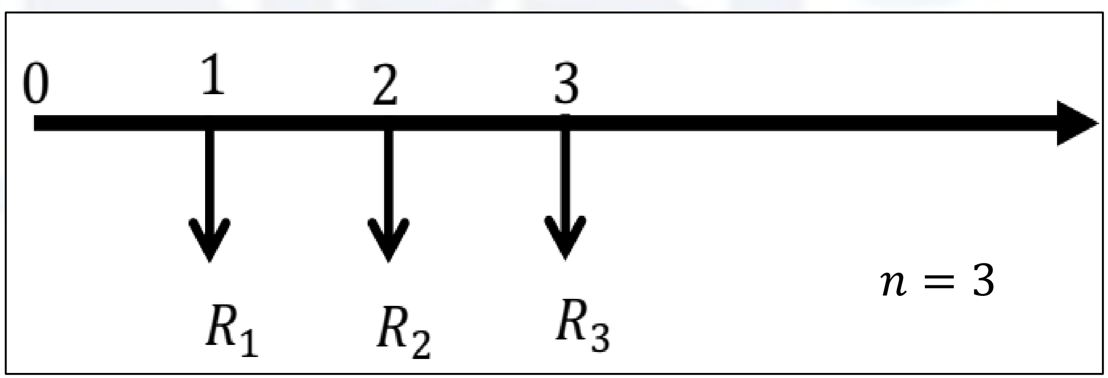


Juros Compostos - Depósitos em série

- O conjunto de pagamentos ao longo dos $\boldsymbol{n}$ períodos, constitui-se num fluxo de caixa.

  - Fluxo Postecipado: Pagamentos (ou recebimentos) no final dos períodos, ou seja, os depósitos ocorrem um período após a data zero.

    - Ao fazer n depósitos, o primeiro depósito começa no tempo 1, e o último é feito no tempo n.



Juros Compostos - Depósitos em série

➢EXEMPLO 2:

Faz-se n depósitos mensais iguais a R em uma conta de poupança que remunera a uma taxa de juros i, composto mensalmente. Qual é o montante após o último depósito.? **Considere o fluxo antecipado.**

- Depois de n meses o dinheiro depositado no primeiro mês montara á:

$$F_1 = R(1+i)^n$$

- Após $n-1$ meses, o dinheiro depositado no segundo mês montará á:

$$F_2 = R(1+i)^{n-2}$$

- O último depósito renderá por um único período,

$$F_n = R(1+i)$$

- Prosseguindo desta maneira, vemos que o montante resultante dos n depois será:

$$S = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = \sum_{n=1}^{n} F_n$$

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i) = \sum_{n=1}^{n} R(1+i)^n$$

$$S = \sum_{n=1}^{n} R(1+i)^n = (1+i)\sum_{n=1}^{n} R(1+i)^{n-1}$$

- $\sum_{n=1}^{n} R(1+i)^{n-1}$ é uma série geométrica com razão igual a $(1+i)$ e primeiro termo igual a R. Assim:

$$S = \frac{R[1-(1+i)^n]}{[1-(1+i)]}(1+i)$$

$$S = -\frac{R[1-(1+i)^n](1+i)}{i}$$

Como

$$S = -\frac{R[1-(1+i)^n](1+i)}{i};$$

Logo:

$$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de pagamentos variáveis tem-se que (fluxo antecipado *).
  - Fluxo antecipado porém o modelo considera deposito no mês de resgate, dai é um fluxo genérico na verdade.

- Após o primeiro mês o primeiro deposito (F_0) montara á:

$$F_1 = R_0(1 + i) + R_1$$

- Após o segundo mês o primeiro deposito (F_0) acrescido de R_1 montara á:

$$F_2 = F_1(1 + i) + R_2$$

Sucessivamente temos que:

$$F_3 = F_2(1 + i) + R_3$$

$$F_4 = F_3(1 + i) + R_4$$

$$\ldots$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Note também que:

$$F_1 = R_0(1+i) + \mathrm{R}_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + \mathrm{R}_2 = [R_0(1+i) + \mathrm{R}_1](1+i) + R_2$$
$$F_2 = R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$
$$F_3 = R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + \mathrm{R}_4 = [R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = R_0(1+i)^4 + (1+i)^3R_1 + (1+i)^2R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

- No tempo n, lembrando o resgate é feito após o último deposito, assim R_n não é depositado.

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Fluxo Antecipado

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} \mathrm{R}_j$$

- Fluxo Postecipado

$$S = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Pagamento Variável	$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} \mathrm{R}_j$	$S = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$

- EXEMPLO 3:

Faz-se um depósito mensal de $R\$\,100{,}00$ em uma conta de poupança que paga juros de $0{,}6\%$ a.m. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo Antecipado e Postecipado.

➢Fluxo Antecipado:

$$S = \frac{100(1+0{,}006)[(1+0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = R\$303{,}6144$$

ou

$$S = \sum_{j=0}^{2}(1+0{,}006)^{3-j}100 = 100(1{,}006)^3 + (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100 = R\$303{,}6144$$

➢Fluxo Postecipado:

$$S = \frac{100[(1+0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = R\$301{,}8036$$

ou

$$S = \sum_{j=1}^{3}(1+0{,}006)^{3-j}100 = (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100 + 1\,00 = \text{R\$}301{,}8036$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Pagamento Variável	$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$	$S = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$

- O valor presente de uma série de pagamentos representa por exemplo um valor de financiamento a uma taxa i que será pago em n prestações

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$	$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$
Pagamento Variável	$VP = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$	$VP = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$	$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$
Pagamento Variável	$VP = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$	$VP = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j$

- EXEMPLO 4:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **<u>paga no ato da liberação dos recursos</u>**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

- EXEMPLO 4:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga no ato da liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$$

$$R = \frac{VP[i(1+i)^{n-1}]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0{,}02(1{,}02^3)]}{[(1{,}02^4) - 1]} = R\$3862{,}11$$

- Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$\mathrm{VP} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j = R + \left(\frac{1}{1+i}\right)R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 R$$

$$R = \frac{P}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3\right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}0404} + \frac{1}{1{,}0612}} = R\$3862{,}11$$

- EXEMPLO 5:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga **1 ano após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

➢ EXEMPLO 5:

Uma empresa conseguiu um financiamento de $R\$15000{,}00$ a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **<u>paga 1 ano após a liberação dos recursos</u>**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

$$R = \frac{VP[i(1+i)^n]}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{15000[0{,}02(1{,}02^4)]}{[(1{,}02^4) - 1]} = \boldsymbol{R\$3939,356}$$

➢ Pagamento 30 dias após a liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j R_j = \left(\frac{1}{1+i}\right) R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 R + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 R \left(\frac{1}{1+i}\right)^4 R$$

$$R = \frac{VP}{\left[\left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3 \left(\frac{1}{1+i}\right)^4\right]} = \frac{15000}{\left[\left(\frac{1}{1{,}02}\right) + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^2 + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^3 + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^4\right]}$$

$$\boldsymbol{R = R\$3939,35}$$