

Teoria do Risco

Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley/index.html>



Modelos de Risco

- Na teoria do Risco aplicada ou matemática de seguros não-vida há questões de importância central e de grande implicância para um segurador, das quais destacam-se as seguintes:
 - Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações?
 - Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma margem de segurança?

Modelos de Risco

- ...A teoria do risco busca estabelecer um modelo de tarificação eficiente para a seguradora frente aos sinistros.
- Modelo de Risco Individual Anual.
- Modelo de Risco Coletivo Anual

Modelo de Risco Individual

- O modelo de Risco individual estabelece um modelo de probabilidade para o valor total das indenizações de uma carteira,
- Baseado na soma das diferentes distribuições dos sinistros individuais no intuito de se obter uma distribuição de probabilidades para os danos agregados.

Modelo de Risco Individual

- Para fins de simplificação deste modelo é estabelecida as seguintes premissas:
 - Em cada **apólice** ocorrerá somente um **sinistro** no ano de avaliação.
 - A ocorrência de um sinistro não influencia em qualquer outro risco do conjunto segurado.

Modelo de Risco Individual

- Este modelo considera que para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ apólices, os sinistros sob forma agregada serão denominados:

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$S_{ind.}$ → Valor total das indenizações na carteira em 1 ano.

X_{is} → V.a. associada ao sinistro da apólice i em 1 ano (chamada de montante de sinistro).

n → Número fixo de apólices independentes mas não identicamente distribuídas.

Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n var(X_i)$$

Modelo de Risco Individual

- A relevância do modelo reside fundamentalmente no fato de que as apólices têm abordagens independentes.

$q_i \Rightarrow$ A probabilidade de ocorrência de um sinistro em um ano de vigência da apólice i .

$B_i \Rightarrow$ Variável aleatória relativa ao valor da indenização de cada apólice i .

Modelo de Risco Individual

A fim de simplificar os conceitos, X_i será definido como:

$$X_i = I_i B_i$$

Em que I_i é uma variável dicotômica indicadora da ocorrência de um sinistro com distribuição $Bernoulli(q_i)$.

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } q_i \\ 0, & \text{com probabilidade } (1 - q_i) \end{cases}$$

A variável aleatória B_i é mais bem definida por $(X_i | I_i = 1)$.

$$E(I_i) = q_i \quad \text{var}(I_i) = q_i(1 - q_i)$$

Modelo de Risco Individual

- Um seguro de veículos cuja cobertura é apenas o furto ou o microsseguro que cobre perdas de pequenos objetos em viagens como malas, máquinas fotográficas entre outros, são exemplos simples para o caso em que B_i assume apenas um único valor.
- Dessa forma também podem-se estabelecer outras relações:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - q & (x = 0) \\ q & (x = B) \\ 0 & (x = \text{valores não cobertos}) \end{cases}$$

$$E(X) = Bq$$

$$\text{var}(X) = B^2 q(1 - q)$$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - q & (0 \leq x < B) \\ 1 & (x \geq B) \end{cases}$$

Modelo de Risco Individual

Exemplo 1.

Calcule o valor do Prêmio de Risco através do princípio do desvio padrão, para um seguro que paga R\$ 30.000,00 caso o veículo seja furtado. Considere a probabilidade de furto do veículo igual a 0,007 e o $\beta=0,7$.

Nesse caso, o prêmio é calculado por meio de $\Pi_X = E(X) + \sigma_X\beta$.

Modelo de Risco Individual

Resposta

$$E(X) = 30000(0,007) = R\$ 210,00$$

$$var(X) = 30000^2(0,007)(0,993) = R\$ 6255900,00$$

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} = 2501,18$$

- Logo

$$\Pi_X = 210 + 2501,18 \times 0,7 = R\$1960,83$$

Modelo de Risco Individual

Pode-se estabelecer S_{ind} como:

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n I_i B_i$$

Sendo $P(I_i = 1) = q_i$ e $P(I_i = 0) = 1 - q_i$.

Logo:

$$E(S_{ind.}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(I_i B_i)$$

$$var(S_{ind.}) = var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n var(I_i B_i)$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

No modelo de risco individual , N será definido como:

$$N = \sum_{i=1}^n I_i$$

Logo :

$$N \sim \text{Binomial}(n, q)$$

$$E(N) = nq$$

$$\text{var}(N) = nq(1 - q)$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

Exemplo 2:

Seja uma carteira de seguros com 10000 apólices, onde cada apólice possui uma probabilidade não nula de sinistros de 0,01.

Calcular o número esperado de sinistros em 1 ano e o respectivo desvio padrão.

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

Resp.:

$$N \sim \text{Binomial}(10000; 0,01)$$

$$E(N) = 10000 \times 0,01 = 100$$

$$\sigma_N = \sqrt{10000 \times 0,01 \times 0,99} \approx 9,94$$

Modelos de risco Individual- A distribuição de N

- Uma boa aproximação da distribuição de N pode ser feita através de:
 - Da distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = nq$ ou
 - Normal com parâmetros $\mu_N = nq$ e $var(N) = nq(1 - q)$,
para o caso de n suficientemente grande.

➤ Exemplo 3

Para os dados do exemplo anterior calcule a probabilidade de que em 10000 apólices verificadas ocorra no máximo 120 sinistros. Para este calcule utilize o modelo binomial e suas aproximações pelo modelo de Poisson e Normal.

$$N \sim B(n = 1000, q = 0.01)$$

$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \binom{100000}{k} 0,01^k (0,99)^{10000-k} = \mathbf{0,9778855}$$

$$N \sim Po(nq = 100)$$

$$P(N \leq 120) = \sum_{k=0}^{120} \frac{100^k e^{-100}}{k!} = \mathbf{0,9773307}$$

$$N \sim N(nq = 100, nq(1 - q) = 99)$$

$$P(N \leq 120) = \int_0^{120} \frac{e^{-\frac{(n-100)^2}{198}}}{\sqrt{198\pi}} dn = \mathbf{0,9777884}$$

Modelos de risco Individual -A distribuição de X_i

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \sum_{k=0}^1 P(X_i \leq x_i, I_i = k)$$

Assim:

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i | I = 1)P(I_i = 1) + P(X_i \leq x_i | I_i = 0)P(I_i = 0)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0, \infty)}(x_i)$$

em que x_i corresponde a um possível valor de X_i e representa o valor da indenização paga em caso de ocorrência do sinistro

Exemplo 4

Seja um seguro que cobre morte com indenização fixa de R\$10000,00, e invalidez total e permanente com indenização fixa de R\$ 5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002, respectivamente. Determinar os modelos probabilísticos de I_i , B_i e X_i .

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		$I_1.$	B_1
R\$0,00	0,9988		
R\$5000,00	0,0002		
R\$10000,00	0,001		

$$E(X_1) = 0 \times 0,9988 + 5000 \times 0,0002 + 10000 \times 0,001 = \text{R\$}11,00$$

$$\text{var}(X_1) = (0^2 \times 0,9988 + 5000^2 \times 0,0002 + 10000^2 \times 0,001) - 11,00^2 = \text{R\2104879,00$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_1 =$		$I_1.$		B_1
R\$0,00	0,9988	0	0,9988	
R\$5000,00	0,0002			
R\$10000,00	0,001	1	0,0012	

$$E(X_1) = \text{R\$}11,00$$

$$E(I_1) = 0,0012$$

$$\text{var}(X_1) = \text{R\2104879,00$

$$\text{var}(I_1) = 0,0012 \times 0,9988 = 0,001199$$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		$I_1.$		$B_1 = X_1 I_1 = 1$
R\$0,00	0,9988	0	0,9988	
R\$5000,00	0,0002			$\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$
R\$10000,00	0,001	1	0,0012	$\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$

$$E(X_1) = \text{R\$}11,00$$

$$E(I_1) = 0,0012$$

$$var(X_1) = \text{R\$}^2 104879,00$$

$$var(I_1) = 0,001199$$

$$E(B_1) = (0,833) \text{R\$}10000,00 + (0,167) \text{R\$}5000,00 = \text{R\$}9166,67$$

$$var(B_1) = [0,833(\text{R\$}10000,00)^2 + 0,167(\text{R\$}5000,00)^2] - \text{R\$}9166,67^2 = \text{R\$}^2 3497768$$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		$I_1.$		B_1
R\$0,00	0,9988	0	0,9988	
R\$5000,00	0,0002			$\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$
R\$10000,00	0,001	1	0,0012	$\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$

$$E(X_1) = R\$11,00$$

$$E(I_1) = 0,0012$$

$$E(B_1) = R\$9166,67$$

$$var(X_1) = R\2104879,00$

$$var(I_1) = 0,001199$$

$$var(B_1) = R\23497768$

$$\sigma_{X_1} = R\$ 323,85$$

$$\sigma_{I_1} = 0,034$$

$$\sigma_{B_1} = R\$ 1870,232$$

$$CV_{X_1} = 29,44$$

$$CV_{I_1} = 0,9991667$$

$$CV_{B_1} = 0,2040252$$

$$S = \textcircled{X_1} + X_2 + \dots + X_n$$

$X_1 =$		$I_1.$		B_1	
R\$0,00	0,9988	0	0,9988		
R\$5000,00	0,0002	1	0,0012	R\$5000,00	$\frac{0,0002}{0,0012} = 0,167$
R\$10000,00	0,001			R\$10000,00	$\frac{0,001}{0,0012} = 0,833$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0,9988, & \text{se } 0 \leq x < 5000 \\ 0,999, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000. \end{cases}$$

$$F_{B_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 5000 \\ 0,167, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000 \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0,\infty)}(x_i)$$

$$F_{X_i}(x) = \left(\begin{cases} 0, & \text{se } x < 5000 \\ 0,167, & \text{se } 5000 \leq x < 10000 \\ 1, & \text{se } x \geq 10000 \end{cases} \right) 0,0012 + 0,9988I_{(0,\infty]}(x)$$

Exemplo 5

Um seguro agrícola cobre a perda de uma plantação em caso de geada e seca prolongada. Considere que esses eventos ocorrem com 1% de probabilidade, e que o valor das indenizações paga pela seguradora seja modelado tenha a seguinte função densidade

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0,99 & \text{se } x_i = 0 \\ 0,002e^{-0,2x_i} & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre a distribuição de X_i , no caso da ocorrência do sinistro (em milhões de reais). Encontre a função de distribuição de X_i , obtenha também o modelo probabilístico de I_i .

- Resposta:

Observe que $X_i = 0$ se $I_i = 0$, o que implica que $P(X_i = 0) = P(I = 0) = 0,99$, e de imediato temos que $I_i \sim \text{Bernoulli}(0,01)$.

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \int_0^{x_i} 0,002e^{-0,2z} dz$$

- Resposta:

A função acumulada então é definida por:

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \int_0^{x_i} 0,002e^{-0,2z} dz$$

$$F_{X_i}(x_i) = 0,99 + \left[-\frac{0,002}{0,2} e^{-0,2x_i} - \left(-\frac{0,002}{0,2} e^{-0,2 \times 0} \right) \right]$$

$$F_{X_i}(x_i) = 1 - 0,01e^{-0,2x_i}$$

Resposta:

A partir das informações dadas no enunciado do exemplo temos que:

$$f_{B_i}(x_i) = f_{X_i|I_i=1}(x_i|I_i = 1) = \frac{f_{X_i,I_i=1}(x_i, I_i = 1)}{P(I_i = 1)}$$

$$f_{B_i}(x_i) = \frac{0,002e^{-0,2x_i}}{0,01} = 0,2e^{-0,2x_i}, \quad x_i > 0$$

Assim

$$F_{B_i}(x_i) = \int_0^{x_i} 0,2e^{-0,2z} dz = \left[-\frac{0,2}{0,2} e^{-0,2x_i} - \left(-\frac{0,2}{0,2} e^{-0,2 \times 0} \right) \right]$$

$$F_{B_i}(x_i) = 1 - e^{-0,2x_i}$$

$$B_i \sim \text{Exp}(0,2)$$

- Resposta:

X	I	B
$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0,99, & \text{se } x_i = 0 \\ 0,002e^{-0,2x_i}, & \text{se } x_i > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$	$P(I_i = 0) = 0,99$ $P(I_i = 1) = 0,01$	$f_{B_i}(x) = 0,2e^{-0,2x_i}, x_i > 0$
$E(X_i) = 0,05$	$E(I_i) = 0,01$	$E(B_i) = 5$
$var(X_i) \approx 0,4950$	$var(I_i) = 0,0099$	$var(B_i) = 25$
$F_{X_i}(x_i) = (1 - e^{-0,2x_i})0,01 + 0,99I_{(0,\infty]}(x_i)$		

Modelos de risco Individual – A distribuição de X_i

É fácil perceber pelo exemplo que:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 - q_i), & \text{se } x_i = 0 \\ q_i f_{B_i}(x), & \text{se } x_i > 0. \end{cases}$$

Pois,

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0,99 & ; & (1 - 0,01) & ; \text{ se } x_i = 0 \\ 0,002e^{-0,2x_i} & ; & 0,01 \times 0,2e^{-0,2x} & ; \text{ se } x_i > 0 \\ 0 & & \text{caso contrário} \end{cases}$$