

# Matemática atuarial

## Seguros Aula 10

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br  
Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ Ciências atuariais da Universidade federal de Alfenas- Campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L,H. Relações entre Seguros. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2025. Disponível em: [https://atuaria.github.io/portahalley/notas\\_MatAtuarial1.html](https://atuaria.github.io/portahalley/notas_MatAtuarial1.html). Acessado em: 28 jun. 2025.

# Seguros com benefício crescente

- Contratos de seguro com alta procura são aqueles em que o benefício pago pela seguradora varia conforme o tempo em relação a data do contrato.
- Algumas opções nesse sentido são aquelas em que ocorre um acréscimo ou decréscimo no benefício (anual) de acordo com uma progressão aritmética.
- A importância segurada aumenta segundo uma progressão aritmética.

# Produtos Atuariais com benefício crescente

Seguro de vida

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} t|A_x$$

$$(IA)_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} t|A_{x^{1:\overline{n-t}|}}$$

**EXEMPLO 1:** Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere a taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

**EXEMPLO 1:** Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere a taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

**Solução:**

$$(IA)_{110} = \sum_{t=0}^5 {}_t|A_{110} = A_{110} + {}_1|A_{110} + {}_2|A_{110} + {}_3|A_{110} + {}_4|A_{110} + {}_5|A_{110} \approx 1,4482.$$

$$(IA)_{110} \approx 1,4482.$$

**EXEMPLO 2:** Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano,  $i = 4\%$  ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,003788.$$

**Solução:**

**EXEMPLO 2:** Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano,  $i = 4\%$  ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,003788.$$

**Solução:**

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} = \sum_{t=0}^4 {}_tA_{x^{1:\overline{5-t}|}} = A_{25^{1:\overline{5}|}} + {}_1A_{25^{1:\overline{4}|}} + {}_2A_{25^{1:\overline{3}|}} + {}_3A_{25^{1:\overline{2}|}} + {}_4A_{25^{1:\overline{1}|}}$$

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,01178.$$



## Seguro de vida com benefício crescente

```
Axc<- function( i, idade, n,b) {  
  v    <- (1+n)*(1/(i+1))^(1:n)  
  pxx  <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )  
  qxx  <- qx[(idade+1):(idade+n)]  
  Axc  <- b* sum(v*pxx*qxx)  
  return (Axc)  
}
```

# Produtos Atuariais com benefício crescente

A notação para os seguros de vida vitalício e temporário, ambos com crescimento limitado a  $k$  anos, são respectivamente,  $(I_{\overline{k}|}A)_x$  e  $(I_{\overline{k}|}A)_{x^{1:\overline{n}|}}$ , tal que:

$$(I_{\overline{k}|}A)_x = (IA)_{x^{1:\overline{k}|}} + k \times {}_k|A_x$$

$$(I_{\overline{k}|}A)_{x^{1:\overline{n}|}} = (IA)_{x^{1:\overline{k}|}} + k \times {}_k|A_{x^{1:\overline{n-k}|}}$$

**Produtos Atuariais com benefício crescente  
benefício pago no momento da morte**

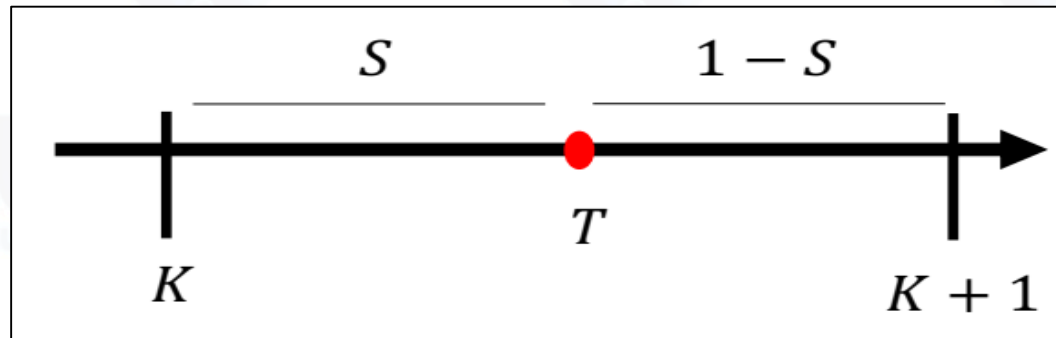
$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} s | \bar{A}_x ds.$$

$$(I\bar{A})_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

# RELAÇÃO ENTRE SEGUROS DE VIDA

<https://atuaria.github.io/portahalley/>

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO



$$T = (K + 1) - (1 - S)$$

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

Assumindo que  $T$  é independente de  $S$  e que  $S \sim U_c(0,1)$ .

Considere o seguro de vida inteira pago no momento de morte:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = E(e^{-\delta T})$$

$$\bar{A}_x = E\{e^{-\delta[(K+1)-(1-S)]}\} = E[e^{-\delta(K+1)} e^{\delta(1-S)}]$$

$$\bar{A}_x = E[e^{-\delta(K+1)}] E[e^{\delta(1-S)}] = E[v^{(K+1)}] E[e^{\delta(1-S)}]$$

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = E[v^{(K+1)}]E[e^{\delta(1-S)}]$$

$$\bar{A}_x = A_x \int_0^1 e^{\delta(1-s)} ds$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{e^{\delta} - 1}{\delta}$$

*Substituindo  $e^{\delta} = 1 + i$ ,*

$$\bar{A}_x = A_x \frac{(1 + i) - 1}{\delta}$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

*$i$ : Taxa de juros discreta*

*$\delta$ : Taxa de juros constante*

**EXEMPLO 3:** Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida inteiro que paga 1 *u.m.* no momento da morte. Calcule o valor aproximado desse prêmio considerando que o prêmio pago para esse seguro com benefício pago ao final do ano de morte é de  $A_{25} \approx 0,11242$ .

Considere que o tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano.



# Seguro de vida Inteiro

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left( \frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0,11242$$

$$\bar{A}_{25} = A_{25} \frac{i}{\delta} = 0,11242 \left[ \frac{0,05}{\ln(1,05)} \right] \approx 0,1152076$$

**EXEMPLO 4:** Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 *u.m.* ao final do ano de morte. Admita  $\bar{A}_{30} \approx 0,28317$  e que  $i = 5\%$ .

**EXEMPLO 4:** Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 u.m. ao final do ano de morte. Admita  $\bar{A}_{30} \approx 0,28317$  e que  $i = 5\%$ .

$$A_{30} = \frac{\delta}{i} \bar{A}_{30} = \frac{\ln(1,05)}{0,05} 0,28317 \approx 0,2763182$$

# RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}|} = A_{x^{1:\bar{n}}|} \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x:\bar{n}} = A_{x^{1:\bar{n}}|} \frac{i}{\delta} + A_{x:\bar{n}}^1$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x$$

$$(I\bar{A})_{x^{1:\bar{n}}|} = \frac{i}{\delta} (IA)_{x^{1:\bar{n}}|}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

