

Teoria do Risco

Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley>

Modelos de risco Coletivo

A distribuição de S_{col} , os sinistros coletivos.

- o método da convolução a partir da distribuição de X e N
 - Um método iterativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado poder computacional,
- método da função geradora de momentos.
 - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos.

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = E[e^{t(X_1+X_2+\dots+X_N)}] = E[e^{tX_1}e^{tX_2} \dots e^{tX_N}] = \prod_{i=1}^N E(e^{tX_i})$$

Como X_i s são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^N E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^N E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E[M_X(t)^N]$$

$$M_{S_{col}}(t) = E[e^{\ln M_X(t)^N}] = E[e^{N \ln M_X(t)}]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

EXEMPLO

Calcule $E(S_{col})$ por meio de $M_{S_{col}}(t)$, dado que X possui distribuição Exponencial (α) e N possui distribuição de Poisson(λ).

Se $N \sim \text{poisson}(\lambda)$, então

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda \left[e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)} - 1 \right]} = e^{\lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha-t} - 1 \right)} = e^{(\alpha-t)^{-1} \lambda \alpha - \lambda}$$

$$\frac{dM_{scol}(t)}{dt} = \frac{\lambda \alpha}{(\alpha - t)^2} e^{\frac{\lambda \alpha}{\alpha - t} - \lambda}$$

$$M'_{scol}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda \alpha}{(\alpha - 0)^2} e^{\frac{\lambda \alpha}{\alpha - 0} - \lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

EXEMPLO 1

Seja N com distribuição *Binomial* (n, q) . Determinar uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X .

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t)) \quad M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = [qe^{\ln M_X(t)} + 1 - q]^n$$

$$\mathbf{M}_{S_{col}}(\mathbf{t}) = [\mathbf{qM}_X(\mathbf{t}) + \mathbf{1} - \mathbf{q}]^n$$

EXEMPLO 2

Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro (sem dedução da franquia) obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos do total agregado de sinistros S_{col} , dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $Binomial(n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col} .

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n \qquad M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^n$$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^n = [q\alpha^r(\alpha - t)^{-r} + 1 - q]^n$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} q\alpha^r(-r)(\alpha - t)^{-r-1}(-1)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} \frac{rq\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(\mathbf{0}) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - 0} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} \frac{rq\alpha^r}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$E(S_{col}) = n(q + 1 - q)^{n-1} \frac{rq}{\alpha} = \frac{nqr}{\alpha}$$

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

S_{ind}, X_i, B_i, I_i

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

S_{col}, X_i, N

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E(S_{col}^2) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t)) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$\frac{d^2 M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(\ln M_X(t)) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(\ln M_X(t)) \left[\frac{M''_X(t) M_X(t) - M'_X(t) M'_X(t)}{M_X(t)^2} \right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(\ln M_X(0)) \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(\ln M_X(0)) \left[\frac{M''_X(0) M_X(0) - M'_X(0) M'_X(0)}{M_X(0)^2} \right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0) E(X) E(X) + M'_N(0) [E(X^2) - E(X)^2]$$

$$E(S_{col}^2) = E(N^2) E(X)^2 + E(N) \text{var}(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E(S_{col}^2) - E(S_{col})^2$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[\text{var}(X)] - E(N)^2E(X)^2$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 [E(N^2) - E(N)^2] + E(N)\text{var}(X)$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 \text{var}(N) + E(N)\text{var}(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo

Exemplo 3

Encontre os valores de $E(S_{col})$ e $var(S_{col})$ para as situações dos itens a seguir:

a) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X \sim \text{Exp}(\alpha)$.

b) $N \sim \text{Binomial}(n, q)$ e $X \sim \text{Gama}(r, \alpha)$.

Exemplo

a) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, então:

$$E(N) = \lambda \quad E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Logo:

$$E(S_{\text{col}}) = E(N)E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\text{var}(N) = \lambda \text{ e } \text{var}(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\text{var}(S_{\text{col}}) = \text{var}(X)E(N) + E(X)^2\text{var}(N)$$

$$\text{var}(S_{\text{col}}) = \frac{1}{\alpha^2}\lambda + \frac{1}{\alpha^2}\lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Exemplo

b) $N \sim \text{Binomial}(n, q)$ e $X \sim \text{Gama}(r, \alpha)$, então:

$$E(N) = nq \quad E(X) = \frac{r}{\alpha}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{nqr}{\alpha}$$

$$\text{var}(N) = nq(1 - q) \text{ e } \text{var}(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$\text{var}(S_{col}) = \frac{r}{\alpha^2} nq + \frac{r^2}{\alpha^2} nq(1 - q) = \frac{nqr[1 + r(1 - q)]}{\alpha^2}$$

Exemplo 4

Suponha uma carteira de seguros cuja frequência de sinistros seja caracterizada pela variável aleatória $N \sim Po(12)$ e os valores dos sinistros seja $X \sim U_c(0,1)$, calcule $P(S_{col} \leq 10)$ utilizando a distribuição normal.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

Exemplo

$$E(S_{col}) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{4} 12 + 12 \frac{1}{12} = 4$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-6}{2}\right)$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P(Z \leq 2) = 0,97725$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E[E(S_{col}|N)]$$

$$E(S_{col}) = E[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)]$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n) p(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) p(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) p(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(X) p(N = n) = E(X) \sum_{n=0}^{\infty} n p(N = n)$$

- Logo

$$E(S_{col}) = E(X)E(N)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E[\text{var}(S_{col}|N)] + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

Primeiro iremos trabalhar $E[\text{var}(S_{col}|N)]$, assim:

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = E[\text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)]$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n) p(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) p(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) p(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \text{var}(X) p(N = n) = \text{var}(X) \sum_{n=0}^{\infty} n p(N = n)$$

$$\mathbf{E[\text{var}(S_{col}|N)] = \text{var}(X)E(N)}$$

Agora para $\text{var}(E(S_{col}|N))$, tem-se:

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E[\text{var}(S_{col}|N)] + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \text{var}(X)E(N)$$

Agora para $\text{var}[E(S_{col}|N)]$, tem-se:

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = \text{var}[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)] = \text{var}[NE(X)]$$

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 \text{var}(N)$$

Logo

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 \text{var}(N) + E(N) \text{var}(X)$$