Teoria do Risco
Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Teoria da utilidade

- Teoria da utilidade lida com a medida de satisfação relativa.

- ..um valor subjetivo atribuído a um evento, de forma que sua unidade seja uma grandeza com dimensão ordinal.

- Exemplo:

Se atribuir valor 1 ao bem “banana” e valor 2 ao bem “maça”, saberemos que o agente econômica que tem aquela função utilidade prefere maça a banana.

Função utilidade

- No que diz respeito a analise de riscos os fundamentos da teoria da utilidade dão um norte a tentativa de responder questões relacionadas ao problema de precificação do seguro.

- Uma função que mede o valor (utilidade) que um individuo atribui a quantidade x (monetária)

Função utilidade

- Seja X o conjunto de todas as alternativas disponíveis ao agente econômico uma função $\mu : X \to \mathbb{R}$ é uma função utilidade se atribuir a cada elemento de X um valor numérico.

- Sendo assim a satisfação que um consumidor (agente de decisão) atribui a um bem de serviço é medida por uma função, $\mu(x)$, que faz uma ordenação dos benefícios ...

Função utilidade

- Existem diversas famílias de funções de utilidades com interessantes aplicações e propriedades como por exemplo:

Utilidade linear: $\mu(x) = x$

Utilidade quadrática: $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$

Utilidade logarítmica: $\mu(x) = \log(\alpha + x)\,,\ x > -\alpha$

Utilidade exponencial: $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$

Utilidade potencial fracionária: $\mu(x) = x^c, x > 0, 0 < c \leq 1$

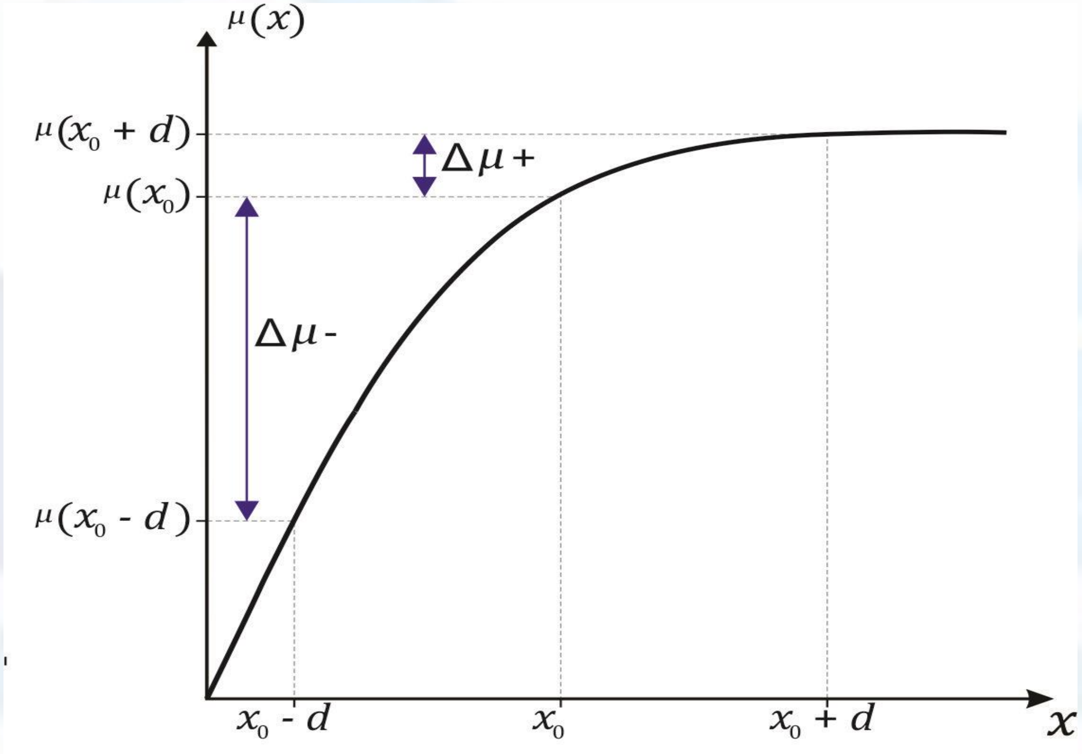
Função utilidade

- ..indivíduos avesso ao risco (agente conservador).

A perda devida a um “mau” resultado não é “compensada” pelo ganho advindo de um “bom” resultado de mesma magnitude.

$$\mu'(x) > 0$$

$$\mu''(x) < 0$$



Grau de aversão ao risco

- O grau de aversão ao risco ou coeficiente de aversão ao risco, $r(x)$, pode ser definido por:

$$r(x) = -\frac{\mu''(x)}{\mu'(x)}$$

Quanto maior for esse coeficiente, maior será aversão ao risco.

Exemplo

Considere as seguintes funções de utilidade

1) $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$

2) $\mu(x) = \log(\alpha + x)\,,\; x > -\alpha$

3) $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$

Obtenha o grau de aversão para cada uma dessas funções.

1) $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$

$$\mu'^{(x)} = 2(\alpha - x) \qquad \mu''^{(x)} = -2$$

$$r(x) = -\frac{(-2)}{2(\alpha - x)} = \frac{1}{\alpha - x}$$

2) $\mu(x) = \log(\alpha + x)\,,\; x > -\alpha$

$$\mu'(x) = \frac{1}{(\alpha+x)} \qquad \mu''^{(x)} = -\frac{1}{(\alpha+x)^2}$$

$$r(x) = -\frac{\left(-\frac{1}{(\alpha+x)^2}\right)}{\frac{1}{(\alpha+x)}} = \frac{1}{\alpha + x}$$

3) $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$

$$\mu'^{(x)} = \alpha^2 e^{-\alpha x} \qquad \mu''(x) = -\alpha^3 e^{-\alpha x}$$

$$r(x) = -\frac{(-\alpha^3 e^{-\alpha x})}{\alpha^2 e^{-\alpha x}} = \alpha$$

Seguro e utilidade

- Seja $\mu(x)$ como uma função utilidade associada a variável aleatória X, dessa forma a utilidade esperada para X é dada por:

$$E[\mu(x)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i) P(X = x_i)\,, para\ x\ discreta \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) f(x) dx\,, \qquad para\ x\ contínua. \end{cases}$$

Seguro e utilidade

- Seja $\mu(x)$ a função utilidade que **o segurado** associa a cada excedente x.
- $\boldsymbol{X}$ representa a variável aleatória associada ao risco (severidade).
- $\boldsymbol{W}$ a riqueza inicial do segurado.
- $\boldsymbol{G}$ o prêmio aceito como bom pelo segurado devido a sua utilidade.

$$\mu(W-G)=E[\mu(W-X)]$$

Seguro e utilidade

Exemplo:

Seja um segurado com uma função utilidade potencial fracionária:

$$\mu(x) = x^{\alpha}, \qquad x > 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Onde a ocorrência dos sinistros obedecem a função uma distribuição Uniforme, $X \sim U(0{,}10)$. Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua função utilidade, dado $\alpha = 0{,}5$ e a riqueza inicial do segurado é de $R\$10{,}00$.

Seguro e utilidade

- Seja $\mu(x)$ a função utilidade associada ao **segurador** e Π o prêmio proposto devido à sua função utilidade. Logo:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi - X)]$$

$\mu(W)$ → utilidade do montante existente se o segurador não aceitar o seguro W (riqueza inicial).

$E[\mu(W + \Pi - X)]$→ utilidade esperada após aceitar assumir o risco do segurado.

Seguro e utilidade

Exemplo:

Se um **segurador** tem a função utilidade de riqueza dada por :

$$\mu\,(x) = 0{,}004(1 - e^{-0{,}004x})$$

E a severidade do dano segurável for probabilística regida por uma distribuição exponencial da seguinte forma particular:

$$f(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}, x > 0$$

Dado que a riqueza inicial do segurador é de $\mathrm{W} = \mathrm{R\$}20000{,}00$ qual deverá ser o prêmio cobrado pelo segurador de forma a não diminuir sua utilidade ao aceitar o risco do segurado?

Seguro e utilidade

- A literatura apresenta que o a situação ideal em que ambas as partes envolvidas no seguro entraram em acordo, será aquela em que $G \geq \Pi \geq E(X)$,

Seguro e utilidade

Exemplo:

Seja um segurado com uma função de utilidade linear:

$$\mu(x) = 0{,}00005x - 1$$

em que a ocorrência dos sinistros segue a distribuição Exponencial, $X \sim Exp(0{,}001)$. Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua função de utilidade. Considere a riqueza inicial do segurado igual a $W = \text{R\$}1000{,}00$.

O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

Solução:

Seja $a = 0{,}00005, b = -1$ e $W = 10000$, assim:

$$\mu(\mathrm{W} - G) = E[\mu(W - X)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aX + b]$$

$$G = E(X)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0{,}001} = R\$\ 1000{,}00$$

Seguro e utilidade

Exemplo:

Suponha um investidor com riqueza W, cuja utilidade atribuída ao seu patrimônio seja dada por $\mu(x) = -e^{-0,002x}$, e este investidor está escolhendo entre dois investimentos que levarão a perdas líquidas aleatórias de $\mathrm{X}_1 \sim \mathrm{N}(10^4, 500^2)$ e $\mathrm{X}_2 \sim \mathrm{N}(1.1 \times 10^4, 2000^2)$. Qual destes investimentos tem maior utilidade esperada para o investidor?

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$E\left[-e^{-0,002(W-X)}\right] = -E\left[e^{-0,002W+0,002X}\right] = -e^{-W0,002}E\left[e^{0,002X}\right]$$

➔ *Investimento 1*

$$= -e^{-W0,002}e^{0,002(10^4)+\frac{500^2(0,002^2)}{2}} = -e^{-w0,002+20,5} = -\frac{e^{20,5}}{e^{w0,002}}$$

➔ Investimento 2

$$= -e^{-W0,002}e^{0,002(1.1\times 10^4)+\frac{2000^2(0,002^2)}{2}} = -e^{-w0,002+30} = -\frac{e^{30}}{e^{w0,002}}$$

- Investir em 1 garante uma utilidade esperada maior que o 2