Teoria do Risco
Aula 19

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

Processo de Ruína

- A teoria da ruína está relacionada com o estudo do nível de reserva de uma seguradora ao longo do tempo.
- O termo "ruína", no contexto atuarial está associado ao risco de uma instituição financeira ficar com **reservas** insuficientes ...
- A probabilidade com que a ruína ocorre em determinado cenário também é uma medida de risco.
- Fatores quantitativos, relacionados a ruína

i) Duração do processo;

ii) Carregamento de segurança (compensação dos eventuais desvios aleatórios do risco);

iii) Distribuição do valor total dos sinistros retidos S;

iv) Limite técnico de indenização;

v) Fundo inicial que a seguradora aloca para assumir o risco de ruína U_0.

Processo de Ruína

Pode-se descrever o processo de reserva através do modelo clássico, chamado de modelo de Cramér-Lundberg:

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

$u = U(0)$ representa a reserva inicial da seguradora.

$U(t)$ é o processo estocástico associado ao nível de reserva no tempo t (montante de investimento/ montante da seguradora no instante t).

$U(t) < 0$, é dito então que ocorreu ruína.

Π_t prêmio recebido no intervalo de tempo $(0, t]$ (Incremento a $U(t)$).

$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ Sinistro agregado, sendo N_t o número de indenizações ocorridas no mesmo período de tempo (processo estocástico).

Processo de Ruína

- De maneira simplificada, serão adotados modelos de ruína que envolva os prêmios recebidos a uma taxa constante, isto é.

$$U(t) = u + \Pi_t - S_t$$

- $\Pi_t = ct$

- $c > E(S)$

Na prática utilizam-se percentuais que variam de 25% a 50% patrimônio líquido,

A utilização de um percentual do patrimônio líquido, como reserva de risco, se justifica pelo fato que a perda de uma porcentagem pode levar a falta de liquidez.

Processo de Ruína

Demonstração: Considere $N_t \sim Po(\lambda t)$

$$E[U(t)] = E(u + \Pi_t - S_t) = E(u + ct - S_t)$$

$$E[U(t)] = u + ct - E(S_t) = u + ct - tE(S)$$

$$E[U(t)] = u + t[c - E(S)]$$

Para que $E[U(t)] > 0$ quando $t \to \infty$, precisamos $c - E(S) > 0$. Assim

$$c - E(S) > 0$$

$$c > E(S)$$

Exemplo 1: Um segurador tem uma reserva de risco inicial de 100 e recebe prêmios a uma taxa constante de $c = 40$ por unidade de tempo. O segurador deverá ter uma experiência de sinistros S relativa ao tempo t, com a distribuição expressa pela tabela a seguir.

t	0,8	1,4	2,3	3	4
S	30	40	70	60	s_4

Determine o valor de s_4 para que o segurador não entre em processo de ruína no intervalo de tempo [0,4].

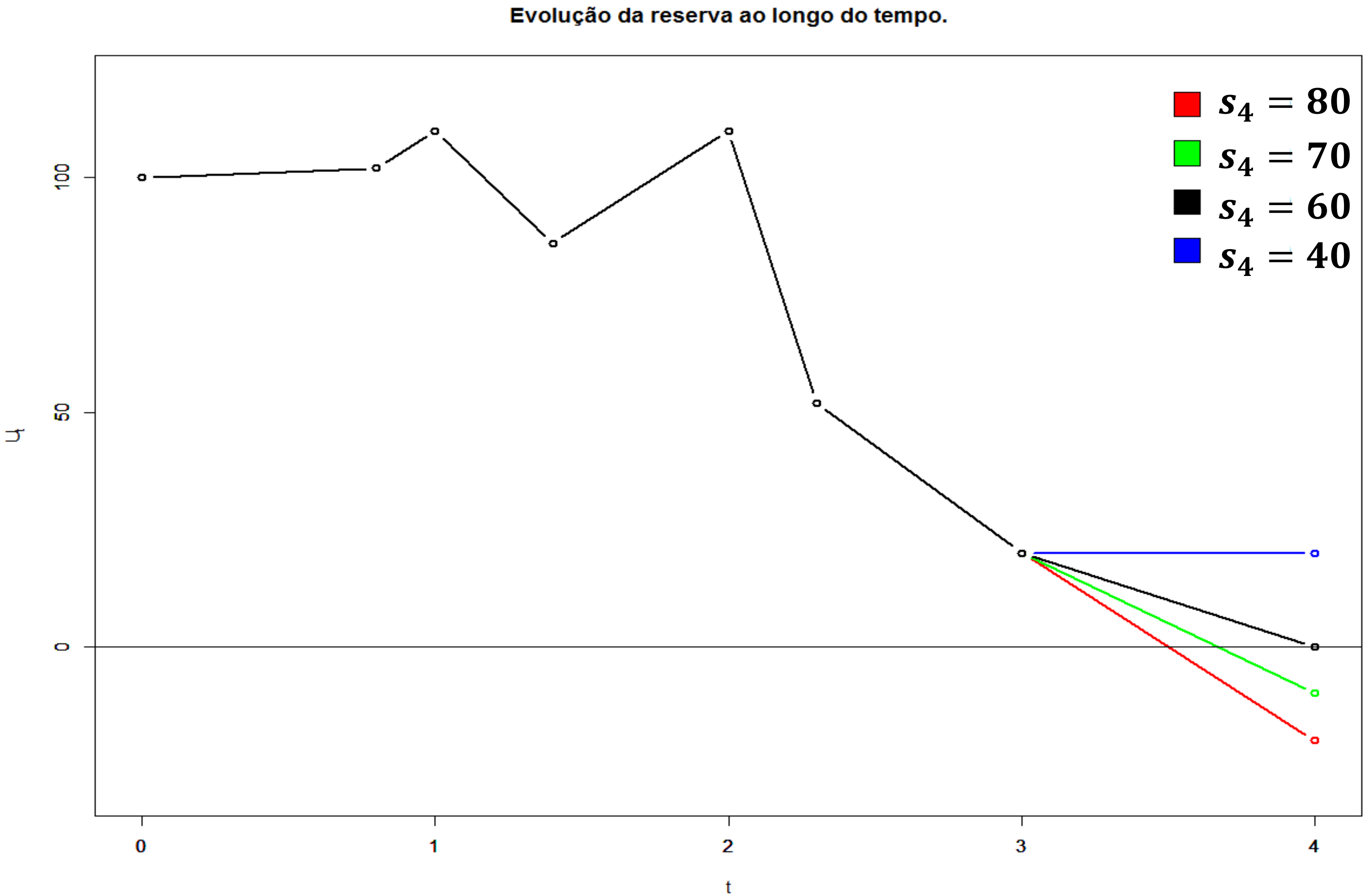
De acordo com o modelo de Cramér-Lundberg $U(t) = u + ct - S_t$ temos que:

$$
\begin{aligned}
U(0) &= 100 = u \\
U(0{,}8) &= 100 + 40(0{,}8) - 30 = \mathbf{102} \\
U(1) &= \mathbf{102} + 40(1 - 0{,}8) - 0 = \mathbf{110} \\
U(1{,}4) &= \mathbf{110} + 40(1{,}4 - 1) - 40 = \mathbf{86} \\
U(2) &= \mathbf{86} + 40(2 - 1{,}4) - 0 = \mathbf{110} \\
U(2{,}3) &= \mathbf{110} + 40(2{,}3 - 2) - 70 = \mathbf{52} \\
U(3) &= \mathbf{52} + 40(3 - 2{,}3) - 60 = \mathbf{20}
\end{aligned}
$$

Para que no tempo $t = 4$, tem-se:

$$U(4) = \mathbf{20} + 40(4 - 3) - s_4 = 60 - s_4$$

Haverá solvência relativa aos ganhos proporcionados por c, estando o segurador limitado a honrar sinistros inferiores a 60,00 (em s_4) .



Comportamento do $U(t)$ para diferentes valores de s_4.

Processo Clássico de Ruína (Modelo de Cramér-Lundberg)

- Tipos de Reserva.

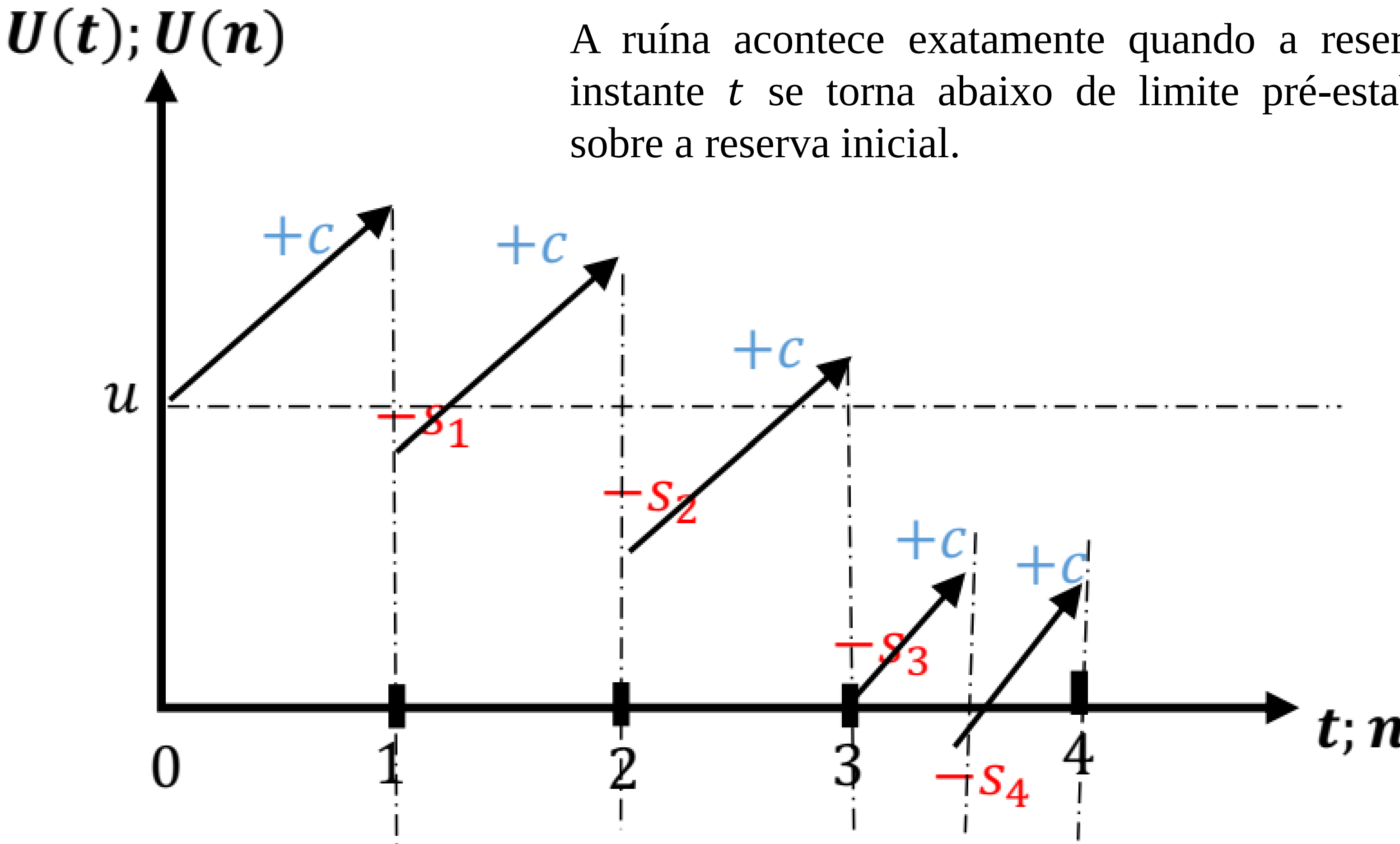
  - Processo em tempo contínuo,

No processo em tempo contínuo, o interesse está no processo de reserva $\{U(t): \mathrm{t} \geq 0\}$, em que $U(t)$ representa a reserva da seguradora até o instante t.

  - Processo em tempo discreto,

No processo em tempo discreto, o tempo t assume valores inteiros (geralmente anos) e o interesse está no processo de reserva $\{U(n): n =$

Processo Clássico de Ruína



A ruína acontece exatamente quando a reserva num instante t se torna abaixo de limite pré-estabelecido sobre a reserva inicial.

RUÍNA EM TEMPO DISCRETO: A ruína não é percebida, pois somente é avaliada em $n = 0,1,2,3, \ldots$

RUÍNA EM TEMPO CONTÍNUO: A ruína é percebida no intervalo [3: 4]

PROBABILIDADE DE RUÍNA

- Uma ruína acontece em t se $U(t) < 0$, ou seja, quando a reserva da seguradora ficar negativa em algum instante, sendo que:

$$T_t = \begin{cases} \min\{t \mid t \geq 0 \ e \ U(t) < 0\} \\ \infty \text{ se } U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \end{cases}$$

Variável aleatória contínua, "tempo para ruína".

- Dessa maneira, pode-se definir a probabilidade de ruína de uma seguradora.

PROBABILIDADE DE RUÍNA-TAMBÉM É UMA MEDIDA DE RISCO

- A probabilidade de ruína no horizonte infinito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u) = P(T_t < \infty) = P(U(t) < 0, \forall\, t \;\; 0 \leq t \; < \infty)$$

- A probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo contínuo é definido por:

$$\psi(u, \tau) = P(T_t < \tau) = P(U(t) < 0, \forall\, t\,, 0 \leq t < \tau)$$

$$\psi(u, \tau) \leq \psi(u)$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

$$\widetilde{T_n} = min\{n : U(n) < 0\}.$$

- A probabilidade de ruína no horizonte infinito em tempo discreto é definida por:

$$\tilde{\psi}(u) = P\left(\widetilde{T_n} < \infty | U(0) = u\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n\,, 0 \leq n < \infty)$$

- A probabilidade de ruína no horizonte finito em tempo discreto é definido por:

$$\tilde{\psi}(u, \tau) = P\left(\widetilde{T_n} < \tau\right) = P(U(n) < 0, \forall\, n, 0 \leq n < \tau)$$

$$\tilde{\psi}(u, \tau) \leq \tilde{\psi}(u)$$

PROBABILIDADE DE RUÍNA

A probabilidade de ruína em 1 ano pode ser expressa por:

$$\psi(u,1) = P(T_t < 1)$$

ou

$$\psi(u,1) = P(U(1) < 0) = P(S_1 > u + \Pi_1)$$

É importante notar que não necessariamente $P(T_t < 1) = P(U(1) < 0)$

- $P(T_t < 1)$ estabelece a probabilidade de ruína a qualquer momento menor que 1 ano.
- $P(U(1) < 0)$ estabelece a probabilidade ruína ao final de 1 ano.

PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA DA SEGURADORA

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte em tempo infinito discreto:

$$\tilde{\varphi}(u) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2,\ldots | u = U(0)) = 1 - \tilde{\psi}(u)$$

- A probabilidade de sobrevivência no horizonte infinito contínuo:

$$\varphi(u) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; t \geq 0 | u = U(0)) = 1 - \psi(u)$$

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo contínuo:

$$\varphi(u,\tau) = P(U(t) \geq 0 \; para \; todo \; 0 \leq t \leq \tau | u = U(0)) = 1 - \psi(u,\tau)$$

- Probabilidade de sobrevivência no horizonte finito em tempo discreto:

$$\tilde{\varphi}(u,\tau) = P(U(n) \geq 0 \; para \; todo \; n = 0,1,2,\ldots,\tau | u = U(0)) = 1 - \tilde{\psi}(u,\tau)$$

EXEMPLO 2: A carteira de um segurador tem distribuição de sinistros dada pela tabela a seguir:

S	$\$1500,00$	$\$3000,00$
$P(s)$	$0,6$	$0,4$

O excedente do segurador é dado pela expressão:

$$U(t) = 900 + 150t - S_t.$$

Determine os possíveis intervalos que irão ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

Como, por hipótese, as únicas indenizações possíveis são no valor de $\$1500,00$ e $\$3000,00$ então a primeira ruína ocorrerá como resultado da menor indenização se:

$$900 + 150t - 1500 < 0$$
$$150t < 600$$
$$t < 4.$$

Caso ocorra sinistro no intervalo (0,4] este ocasionará em um caso de ruína, pois para qualquer sinistro que venha acontecer nesse intervalo não haverá solvência.

Após esse período, a seguradora não estará vulnerável ao evento de custo $1500,00 porém a seguradora ainda tem um risco de solvência caso a indenização seja igual a $3000,00. Nesse caso:

$$900 + 150t - 3000 < 0$$
$$150t < 2100$$
$$t < 14$$

Caso o primeiro sinistro ocorra em $t > 14$ a seguradora não se tornará insolvente. No entanto, se o sinistro ocorrer entre 4 e 14, a seguradora não terá recursos disponíveis para fazer frente à indenização caso o valor do sinistro seja igual a $3000,00.

Ainda para os dados do exemplo anterior. Considere que o tempo entre sinistros possa ser modelado pela distribuição exponencial $T \sim Exp(0{,}1)$. Calcule a probabilidade de ocorrer ruína com o primeiro sinistro.

$$P(U(t) < 0) = P(T < 4, S \neq 0) + P(4 \leq T < 14, S = 3000)$$

$$= P(T < 4)P(S \neq 0|T < 4) + P(4 \leq T < 14)P(S = 3000|4 \leq T < 14)$$

$$= [1 - (e^{-0{,}1\times 4})](0{,}6 + 0{,}4) + \{[1 - (e^{-0{,}1\times 14})]0{,}4 - [1 - (e^{-0{,}1\times 4})]0{,}4\}$$

$$P(U(t) < 0) = (0{,}3298) + 0{,}16948$$

$$P(U(t) < 0) = 0{,}49928$$

EXEMPLO 3: Considere que a variável aleatória S esteja associada aos gastos com indenização no período de 1 ano, em uma carteira de seguros. Considere também que essa carteira tenha sido modelada segundo o modelo de risco coletivo com $N_t \sim Po(200t)$ e $X \sim Exp(0{,}002)$.

Utilizando a aproximação pela distribuição normal determine o valor do prêmio retido, Π, ao longo desse ano de forma que a probabilidade de que essa seguradora entre em ruína não exceda 5%, considere a reserva inicial igual a $U(0) = 5000$.

Solução

$$P(U(1) < 0) = 0{,}05$$

$$P(5000 + \Pi - S_{col} < 0) = 0{,}05$$

$$P(S_{col} > 5000 + \Pi) = 0{,}05$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) = 100000$$

$$\sqrt{var(S_{col})} = \sqrt{\lambda E(X^2)} = 10\,000$$

Lembrando que $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0{,}1)$, tem-se

$$P\left(Z > \frac{(5000 + \Pi) - 100000}{10\,000}\right) = 0{,}05$$

$$\Pi = 100000 - 5000 + 10000(1{,}645) = 111450$$

Ainda com os dados do exemplo anterior determine o valor do prêmio Π considerando um limite técnico para os valores de indenização por apólice de $Li = 550$.

SOLUÇÃO

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li)$$

$$E(S_{col}) = 200\left(\int_{0}^{550} x\,0{,}002e^{-0{,}002x}dx + 550S_X(550)\right)$$

$$E(S_{col}) = 66712{,}8$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li)$$

$$var(S_{col}) = 200\left(\int_{0}^{550} x^2\,0{,}002e^{-0{,}002x}dx + 550^2S_X(550)\right)$$

$$var(S_{col}) = 30097000$$

Solução

$$E(S_{col}) = \lambda E(X; Li) = 66712{,}8$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2, Li) = 30097000$$

Lembrando que $Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0{,}1)$, tem-se

$$\frac{(5000 + \Pi) - 66712{,}8}{\sqrt{30097000}} = z_{95\%}$$

$$\Pi = 66712{,}8 - 5000 + 5486{,}073(1{,}645) = \mathbf{70737{,}39}$$

Ao limitar o valor das indenizações, mantida as mesmas condições o valor do prêmio diminui, isso demonstra a influência no prêmio ao se alterar o limite técnico.

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.