# Teoria do Risco
# Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br


https://atuaria.github.io/portalhalley/

# Medida de Risco

- Ao se assumir um risco deve-se ter em mente a incerteza sobre o possível retorno.

- Busca-se estabelecer métodos e critérios para que se possa entender ou até mesmo antever situações futuras.

- De uma forma muito simplificada associa-se o risco a uma variável aleatória $X$ que assume valores reais em algum conjunto de possíveis cenários financeiros.

# Medida de Risco

- Em um modelo probabilístico para o Risco $(X)$, pode-se voltar às atenções para a distribuição resultante de $\mathrm{X}$ e tentar mensurar o risco em termos de momentos ou quantis.

- As formas mais conhecidas e praticadas para a medida de riscos utilizam essa abordagem.

# Medida de Risco

- O coeficiente de variação em uma carteira de seguros serve como medida de risco para cada risco avaliado. Assim o coeficiente de variação associado ao Risco X é dado por:

$$Cv_X = \frac{\sqrt{var(X)}}{E(X)}$$

- É um indicador do grau de dispersão de valores, independentemente de sua escala e unidades de medida.
  - O coeficiente de variação pode ser usado para comparar a variação de vários processos e fenômenos.

# Medida de Risco

- Exemplo

Considere dois **segurados** (I e II) que têm as distribuições de danos a veículos como mostradas por $P_I(x)$ e $P_{II}(x)$.

Qual segurado representa maior risco para o segurador?

$$P_I(x) = \begin{cases} 0{,}75 & x = 0 \\ 0{,}15 & x = 5000 \\ 0{,}08 & x = 10000 \\ 0{,}02 & x = 15000 \end{cases} \qquad P_{II}(x) = \begin{cases} 0{,}80 & x = 0 \\ 0{,}08 & x = 5000 \\ 0{,}07 & x = 10000 \\ 0{,}05 & x = 15000 \end{cases}$$

- À primeira vista supõem que o segurado $II$ apresenta melhores chances imediatas de não sofrer sinistros...

$$E(X_I) = 0{,}75(0) + 0{,}15(5000) + 0{,}08(10000) + 0{,}02(15000) = R\$1850{,}00$$

$$E(X_{II}) = 0{,}8(0) + 0{,}08(5000) + 0{,}07(10000) + 0{,}05(15000) = R\$1850{,}00$$

- A primeira vista supõem que o segurado $II$ apresenta melhores chances imediatas de não sofrer sinistros...

$$E(X_I) = 0{,}75(0) + 0{,}15(5000) + 0{,}08(10000) + 0{,}02(15000) = R\$1850{,}00$$
$$E(X_{II}) = 0{,}8(0) + 0{,}08(5000) + 0{,}07(10000) + 0{,}05(15000) = R\$1850{,}00$$

- A identificação do segurado que represente maior risco, ficará a cargo da variância verificada em cada uma das funções relativas aos segurados $I$ e $II$.

$$E(X_I^2) = 0{,}75(0^2) + 0{,}15(5000^2) + 0{,}08(10000^2) + 0{,}02(15000^2) = 16250000{,}00$$
$$E(X_{II}^2) = 0{,}8(0^2) + 0{,}08(5000^2) + 0{,}07(10000^2) + 0{,}05(15000^2) = 20250000{,}00$$

$$var(X_I) = 16250000{,}00 - (1850{,}00)^2 = 12826500{,}00$$
$$var(X_{II}) = 20250000{,}00 - (1850{,}00)^2 = 16827500{,}00$$

- Com o uso do coeficiente de variação, pode-se obter a medida de risco:

$$CV_I = \frac{\sqrt{12826500}}{1850,00} = \frac{3581,55}{1850,00} = 1,93597$$

$$CV_{II} = \frac{\sqrt{16827500}}{1850,00} = \frac{4102,13}{1850,00} = 2,21737$$

- Conclui-se então que o segurado $II$ representa maior risco ao segurador.

- O coeficiente de variação então estabelece uma relação da variabilidade dos dados em unidades de sua média. Assim quanto maior a variabilidade maior será o seu coeficiente de variação.

# EXEMPLO

- Considere duas carteiras de seguros A e B, sendo que as distribuições do total de indenizações para as duas carteiras são dadas por:

$$f_A(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}$$

com

$$M_{S_A}(t) = \frac{3}{(1-t)} - \frac{6}{(2-t)} + \frac{3}{(3-t)}$$

e

$$P_B(s) = \begin{cases} 0,14 & s = 0 \\ 0,2279 & s = 1 \\ 0,2075 & s = 2 \\ 0,1625 & s = 3 \\ 0,1078 & s = 4 \\ 0,0627 & s = 5 \\ 0,0369 & s = 6 \\ 0,0265 & s = 7 \\ 0,0148 & s = 8 \\ 0,0072 & s = 9 \\ 0,0038 & s = 10 \\ 0,0011 & s = 11 \\ 0,0003 & s = 12 \\ 0,001 & s = 13 \end{cases}$$



- Qual dessas carteiras representa maior risco para o segurador?

- Embora as carteiras apresentem diferentes valores é preciso calcular o custo de risco para cada uma delas na forma:

$$E(S_A) = \left.\frac{dM_{S_A}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{3}{(1-t)^2} - \frac{6}{(2-t)^2} + \frac{3}{(3-t)^2}\right|_{t=0} = 3 - \frac{6}{4} + \frac{3}{9} \approx \mathbf{1{,}833}$$

$$E(S_B) = 0 + 0{,}2279 + 0{,}4150 + 0{,}4875 + 0{,}4312 + 0{,}3135 + 0{,}2214 + 0{,}1855 + 0{,}1184 + 0{,}0648 + 0{,}0380 + 0{,}0121 + 0{,}0036 + 0{,}0130 = \mathbf{2{,}53}$$

- Baseado no primeiro momento verifica-se que o esperado de indenizações em $B$ é substancialmente maior que $A$ ....

$$E(S_A) \approx 1{,}833 \qquad E(S_B) = 2{,}53$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{S}_\mathrm{A}^2\right) = \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{M}_{\mathrm{S}_\mathrm{A}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}\bigg|_{\mathrm{t}=0} = \frac{6}{(1-\mathrm{t})^3} - \frac{12}{(2-\mathrm{t})^3} + \frac{6}{(3-\mathrm{t})^3}\bigg|_{\mathrm{t}=0} = 6 - \frac{12}{8} + \frac{6}{27} \approx 4{,}73$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{S}_\mathrm{B}^2\right) = 0 + 0{,}2279 + 0{,}8300 + 1{,}4625 + 1{,}7248 + 1{,}5675 + 1{,}3284 + 1{,}2985 + \ 0{,}94720{,}5832 + 0{,}38 + 0{,}1331 + 0{,}0432 + 0{,}1690 = 10{,}6953$$

- Assim

$$var(S_A) = 4{,}73 - (1{,}83)^2 = 1{,}372$$

$$var(S_B) = 10{,}69 - (2{,}53)^2 = 4{,}2891$$

- Com o uso do coeficiente de variação, pode se obter o maior risco ao segurador

$$\boldsymbol{CV_A = \frac{\sqrt{1{,}372}}{1{,}833} = 0{,}639 \qquad CV_B = \frac{\sqrt{4{,}2891}}{2{,}53} = 0{,}8185}$$

- Agora sim é possível afirmar que a carteira B possui maior risco que a Carteira A.

# Medida de Risco

- Na teoria do portfólio, o coeficiente de variação é usado como uma medida relativa do risco associado ao investimento em um ativo específico ou carteira de ativos.

- O coeficiente de variação é particularmente útil em uma situação em que duas apólices tem diferentes níveis de risco (desvio padrão).

# Medida de Risco

- Em geral, uma medida de risco é uma função mapeando um risco $X$ em um número real não-negativo $\rho(X)$.

# Medida de Risco

- A medida de risco para uma variável aleatória $X$ é matematicamente um mapeamento funcional a um número real.

  - Uma das possibilidades é o preço pago para a cobertura de um risco financeiro ( prêmio).

  - Outra é a probabilidade de ruína para um determinado capital inicial dado.

# Medida de Risco

- O matemático Philippe Artzner (1999) elencou alguns axiomas que torna uma **medida de risco coerente**.

  - Transitividade invariante,
  - Subaditividade,
  - Homogeneidade positiva e
  - Monotonicidade.

# Medida de Risco

- **Transitividade invariante**

  Se $c$ é uma constante, temos que

$$\rho(X + \mathrm{c}) = \rho(X) - \mathrm{c}$$

- **Subaditividade**

  Para todo $\mathrm{X}_1$ e $\mathrm{X}_2$,

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

- **Homogeneidade Positiva**

  Para todo $\lambda \geq 0$ e todo $X$,

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$$

- **Monotonicidade**

  Para todo $X$ e $Y$ com $X \leq Y$ com probabilidade 1, temos que

$$\rho(X) \leq \rho(Y)$$