Teoria do Risco
Aula 19

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Exemplo Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim \exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda t)$. Encontre o valor não de R considere o prêmio baseado no valor esperado, $c = \dfrac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}$

Solução:

$$M_N(\ln(M_X(r)) = e^{rct}$$

$$\boldsymbol{X \sim \exp(\alpha) \quad N \sim Po(\lambda t) \quad c = \frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}}$$

$$M_N(\ln(M_X(r)) = e^{rct}$$

$$\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}(M_X(r)-1)} = e^{r\frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}t}$$

$$\lambda(M_X(r) - 1) = r\,\frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}$$

$$\frac{\beta\lambda}{\mathrm{r}}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\lambda(M_X(\beta)-1)}\right)$$

$$\frac{\beta\lambda}{\mathrm{r}}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \lambda(M_X(\beta) - 1)$$

$$\frac{\beta}{\mathrm{r}}\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - 1\right)$$

$$\boldsymbol{X \sim \exp(\alpha)} \quad \boldsymbol{N \sim Po(\lambda t)} \quad \boldsymbol{c = \frac{\ln(M_S(\beta))}{\beta}}$$

...

$$\frac{\beta}{\mathrm{r}}\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right)$$

$$\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) = \left(\frac{\mathrm{r}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$r\alpha - r\beta = \mathrm{r}\alpha - \mathrm{r}^2$$

$$r^2 - r\beta = 0$$

- $r = 0$
- $\boldsymbol{R = \beta}$

Probabilidade de Ruína no horizonte infinito no caso Poisson Composto

Um caso especial amplamente abordado na literatura é o caso em que $c = (1+\theta)E(S)$ e $N \sim Po(\lambda t)$, assim:

$$M_N(\ln(M_X(r)) = e^{rct}$$

$$e^{\lambda t(M_X(r)-1)} = e^{r(1+\theta)E(S)t}$$

$$\lambda t(M_X(r) - 1) = r(1+\theta)\lambda E(X)t$$

$$(M_X(r) - 1) = r(1+\theta)E(X)$$

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

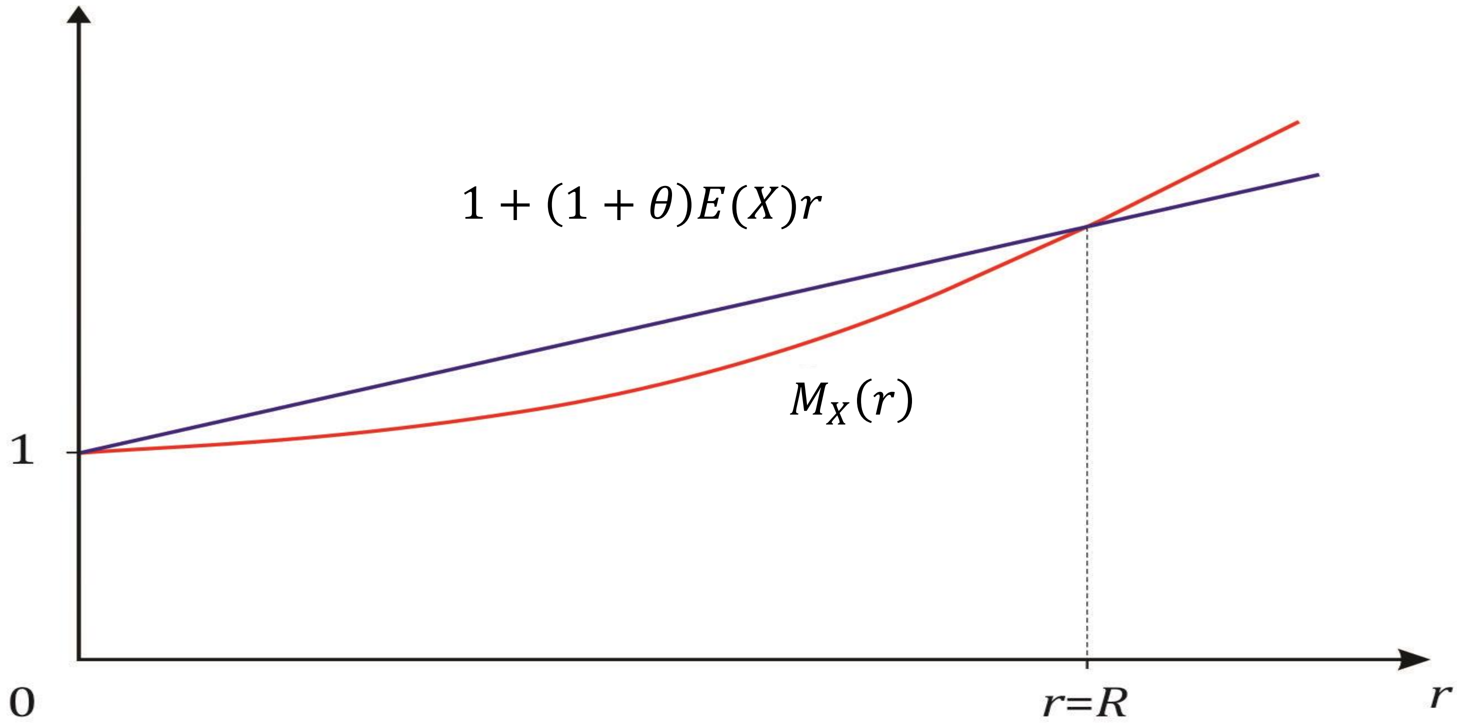
Em que $M_X(r) = E(e^{rX})$, função geradora de momentos de X e θ é o carregamento de segurança.

Probabilidade de Ruína no horizonte infinito no caso Poisson Composto

- Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$

Em que $M_X(r) = E(e^{rX})$, função geradora de momentos de X.



Exemplo:

Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim \exp(\alpha)$. Encontre o valor não de R.

Solução:

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

...

Exemplo:

Considere que a variável aleatória associada a 1 sinistro seja $X \sim \exp(\alpha)$. Encontre o valor não trivial de R.

Solução:

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

$$1 + \frac{(1+\theta)}{\alpha} r = \frac{\alpha}{\alpha - r}$$

$$\alpha^2 + \alpha r + \alpha\theta r - \alpha r - r^2 - \theta r^2 - \alpha^2 = 0$$

$$(1+\theta)r^2 - \theta\alpha r = 0$$

$$R = \frac{\theta\alpha}{1+\theta}$$

Probabilidade de Ruína no horizonte infinito no caso Poisson Composto

- Seja X a variável aleatória que representa o valor de um sinistro, o coeficiente de ajustamento $r = R$ é a menor solução não trivial da equação em r:

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r).$$

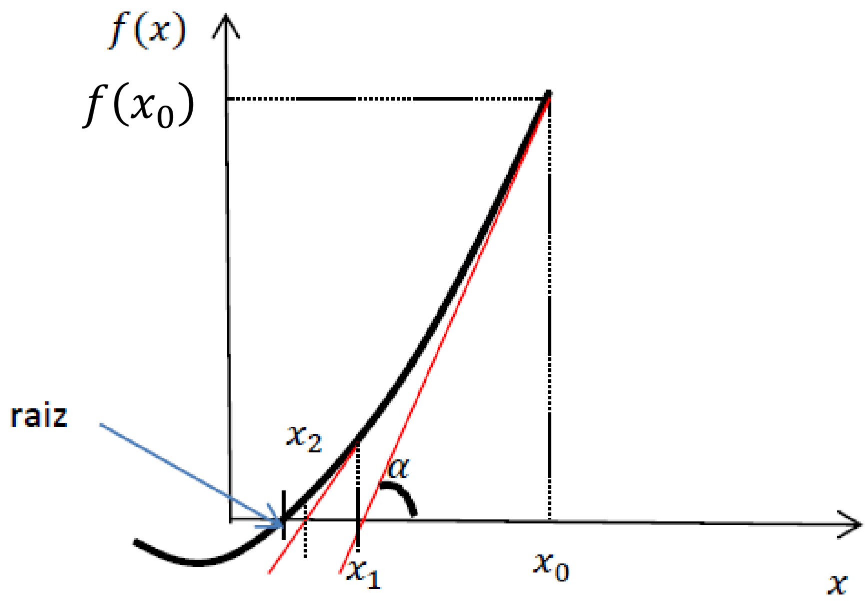
- Dependendo da distribuição de X, não é possível encontrar analiticamente o coeficiente de ajustamento R. Geralmente, **métodos numéricos são utilizados e um valor inicial para R é requerido.**

Método iterativo de Newton-Raphson

- Tem o objetivo estimas as raízes de uma função.
  - Escolhe-se uma aproximação inicial.
  - Calcula-se a equação da reta tangente da função neste ponto e a interseção dela com o eixo das abcissas, afim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

  - Repete-se o processo até a convergência para o valor de x.



$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Logo a reta tangente a $f(x)$ que passa no ponto x_2 é dada por:

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \rightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

De modo geral

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Probabilidade de Ruína no horizonte infinito no caso Poisson Composto

- A velocidade da convergência (caso ocorra) é fortemente relacionada a escolha do valor inicial para x_0.

- No caso da utilização do método para determinar o valor do coeficiente de determinação R o valor indicado como melhor escola é dado por:

$$\frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$$

- Uma vez que esse resultado corresponde ao valor máximo de R, conforme a desigudade:

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$$

Exemplo:

Suponha que o sinistro agregado S tem distribuição de Poisson composta, com parâmetro $\lambda = 4$. Considere que o prêmio recebido é igual a 7 $(c = 7)$ e que a distribuição de X é dada por:

$$P(X = 1) = 0{,}6 \ ; \quad P(X = 2) = 0{,}4.$$

Determine o coeficiente de ajustamento.

Exemplo:

Como o coeficiente de ajustamento é dado como a menor solução positiva da equação $1 + (1+\theta)\mu_X r = M_X(r)$, definimos

$$H(r) = 1 + (1+\theta)\mu_X r - M_X(r)$$

Sendo que o coeficiente de ajustamento $R > 0$ satisfaz $H(R) = 0.$ Para resolver tal equação, pode-se utilizar o método iterativo de Newton-Raphson .

Exemplo:

Como o coeficiente de ajustamento é dado como a menor solução positiva da equação $1+(1+\theta)\mu_X r = M_X(r)$, definimos

$$H(r) = 1 + (1+\theta)\mu_X r - M_X(r)$$

Sendo que o coeficiente de ajustamento $R > 0$ satisfaz $H(R) = 0$. Para resolver tal equação, pode-se utilizar a fórmula de Newton-Raphson (Método iterativo de Newton-Raphson):

$$R_{j+1} = R_j - \frac{H(R_j)}{H'(R_j)}.$$

Considerando o valor inicial $R_0 = \dfrac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

Exemplo:

Considerando o valor inicial $R_0 = \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

$$E(X) = 1(0{,}6) + 2(0{,}4) = 1{,}4$$

$$c = (1+\theta)E(S) = (1+\theta)E(N)E(X) = (1+\theta)\lambda E(X)$$
$$\theta = \frac{c}{\lambda E(X)} - 1 = \frac{7}{4(1{,}4)} - 1 = 0{,}25$$

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \sum_x e^{rX} p(X = x) = 0{,}6e^{r} + 0{,}4e^{2r}.$$

Exemplo:

Dessa maneira.

$$H(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_X r - M_X(r)$$

$$H(r) = 1 + 1{,}75r - 0{,}6e^{r} - 0{,}4e^{2r}$$

$$H'(r) = 1{,}75 - 0{,}6e^{r} - 0{,}8e^{2r}$$

$$R_{j+1} = R_j - \frac{1 + 1{,}75R_j - 0{,}6e^{R_j} - 0{,}4e^{2R_j}}{1{,}75 - 0{,}6e^{R_j} - 0{,}8e^{2R_j}}$$

$$R_{j+1} = 0{,}3182 - \frac{1 + 1{,}75(0{,}3182) - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}4e^{2(0{,}3182)}}{1{,}75 - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}8e^{2(0{,}3182)}}$$

$$R_{j+1} = 0{,}3182 - \frac{1 + 1{,}75(0{,}3182) - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}4e^{2(0{,}3182)}}{1{,}75 - 0{,}6e^{(0{,}3182)} - 0{,}8e^{2(0{,}3182)}}$$

j	R_j	$H(R_j)$	$H'(R_j)$	R_{j+1}
0	0,3182	−0,0238	−0,5865	0,2776
1	0,2776	−0,0031	−0,4358	0,2705
2	0,2705	−0,0001	−0,4106	0,2703
3	0,2703	0,0000	−0,4098	0,2703

Probabilidade de Ruína

- Desigualdade de Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

- Probabilidade de sobrevivência é dada por

$$\phi_n(u) \geq 1 - e^{-Ru}.$$

Exemplo

Em um processo de reserva em tempo contínuo, os sinistros individuais X seguem uma distribuição exponencial com $\lambda = 2$.

Determine a probabilidade de ruína com base no limite superior da desigualdade de Lundberg, sabendo que a reserva inicial é igual a 4 e o carregamento de segurança relacionado ao cálculo do prêmio é 0,2.

Solução:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ e } \quad M_X(r) = \frac{\lambda}{\lambda - r} = \frac{2}{2 - r}$$

$$1 + (1 + \theta)\mu_X R = M_X(r)$$

$$R = \frac{\theta\alpha}{1 + \theta} = \frac{(0{,}2)2}{1 + 0{,}2} = 0{,}333$$

Resolvendo numericamente tal expressão, obtém-se $R = 0{,}333$ e o limite superior da desigualdade de Lundberg são encontrados da seguinte maneira:

$$\psi(u) = e^{-Ru}$$

$$\psi(4) = e^{-0{,}333 \times 4} = 0{,}2636.$$