# Matemática atuarial

## Anuidades Vitalícia (aula10)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

# Anuidades

- Sucessão de pagamentos (ou recebimentos) equidistantes (termos), efetuados por uma dada entidade a outrem.

- **IMEDIATAS**

  Os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

- **DIFERIDAS**

  Os termos são exigíveis após um diferimento

- **ANTECIPADA** ( Quando os termos ocorrem no início de cada período)

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$$

- **POSTECIPADA** ( Quando os termos ocorrem ao final de cada período)

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{R = 1}$ | $\boldsymbol{v = \dfrac{1}{1+i}}$ | $\boldsymbol{i = \dfrac{1-v}{v}}$ |

➢Fluxo Antecipado

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}} = \frac{(v^{-n} - 1)v}{(1-v)v^{-n+1}}$$

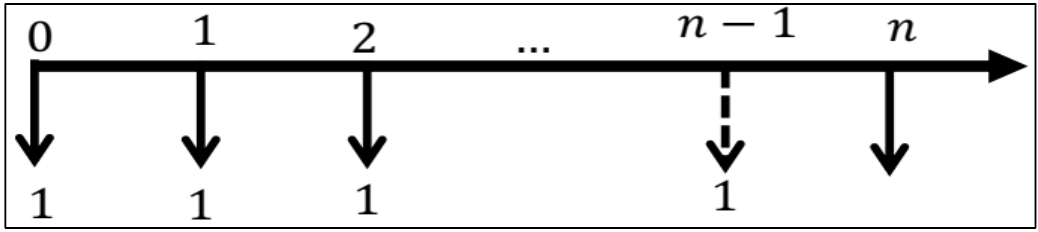
$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, n \geq 1}$$

➢Fluxo Postecipado

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n} = \frac{v(v^{-n} - 1)}{(1-v)v^{-n}}$$

$$\boldsymbol{a_{\overline{n}|} = v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right), n \geq 1}$$

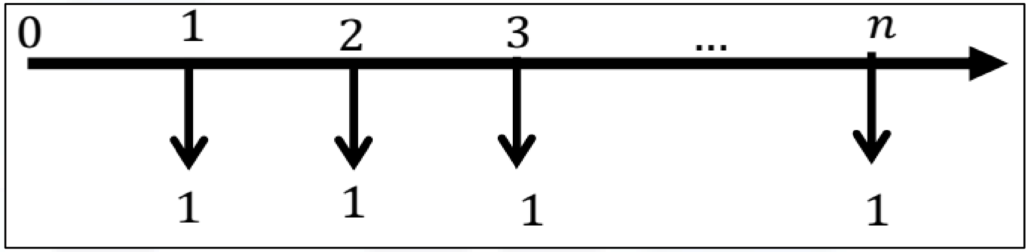
- Fluxo Antecipado




$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, n \geq 1$$

- Fluxo Postecipado




$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n$$

$$a_{\overline{n}|} = v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right), n \geq 1$$

# Anuidades

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$a_{\overline{n-1|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n|}} - a_{\overline{n-1|}} = 1}$$

# Anuidades vitalícias imediatas

- Estamos trabalhando com o valor presente de uma série de pagamentos.
- De fato, as anuidades apresentadas são anuidades certas. Uma série de pagamentos sendo realizados ao longo do tempo
- É preciso o reconhecimento da “natureza” aleatória do número de termos.

# Anuidades vitalícias imediatas

- No processo de compra de um produto atuarial ou de concessão de benefício, existe risco.

  - A seguradora não sabe se vai receber todos os prêmios do segurado (este pode morrer antes do período de cobertura).
  - A seguradora não sabe ao certo quanto irá gastar com previdência uma vez que uma pessoa se aposentou e entrou em gozo de benefício.

- Reconhecer a anuidade como um produto atuarial é reconhecer que:
  - A seguradora (ou fundo de pensão) não saberá ao certo quando $x$ irá falecer.

# Anuidades (Rendas)

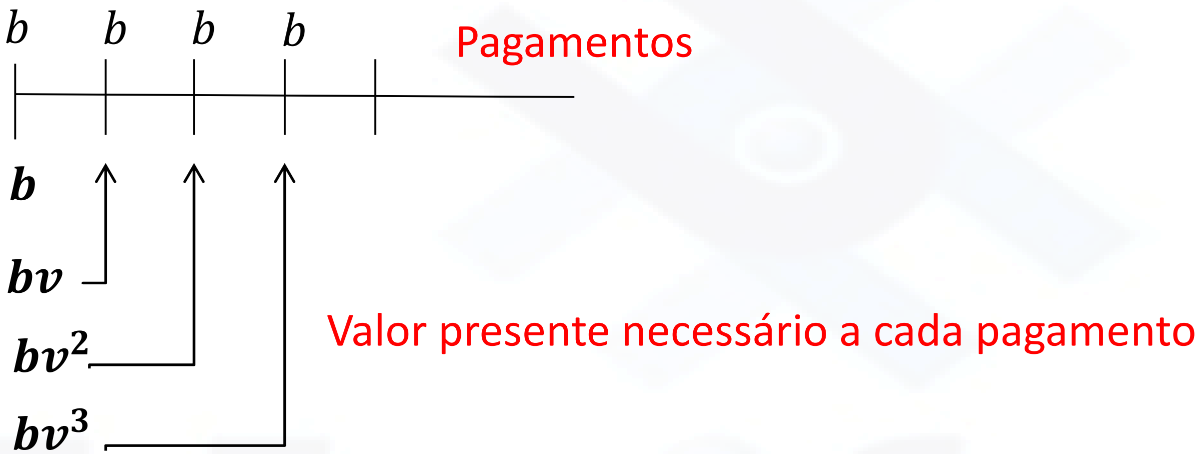
- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras.

- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte
  - Cobertura: por período determinado.

- São interrompidos em caso de morte...

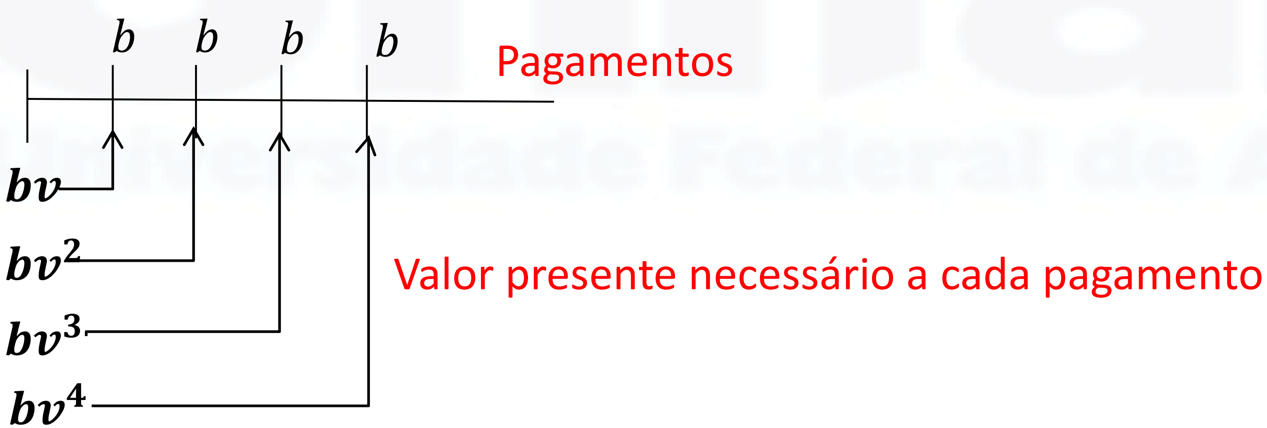
# Anuidades imediatas

- Pagamentos **Antecipados** (Os pagamentos começam no primeiro período).




$$F_0 = b\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

- Pagamentos **Postecipados** (Os pagamentos começam no final de cada período).



# Anuidades vitalícias imediatas

- Seja $T_x$ a variável aleatória discreta associada **ao maior inteiro contido** na sobrevida de $x$ logo:

- Antecipada (benefício unitário)

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}} = \frac{1 - v^{T_x+1}}{1 - v}, T_x \geq 0$$

- Postecipada (benefício unitário)

$$a_{\overline{T_x|}} = v\frac{1 - v^{T_x}}{1 - v}, T_x \geq 0$$

# Anuidades vitalícias imediatas

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **ANTECIPADO** para uma pessoa de idade $x$ corresponde ao valor esperado da anuidade imediata antecipada:

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \ddot{a}_x$$

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **POSTECIPADO** para uma pessoa de idade $x$ corresponde ao valor esperado da anuidade imediata postecipada:

$$E\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = a_x$$

# Anuidades vitalícias imediatas

- Anuidade vitalícia antecipada

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ p(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

- Anuidade vitalícia antecipada Postecipada

$$E\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\bar{t}|}\, p(T_x = t)$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\bar{t}|}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

**EXEMPLO 1**

Considere uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E\left(\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_x q_{x+t} = \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_0 p_{40} q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2|}}\ p_{40} q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3|}}\ {}_2 p_{40} q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1-v^1}{1-v}\ {}_0 p_{40} q_{40} + \frac{1-v^2}{1-v} p_{40} q_{41} + \frac{1-v^3}{1-v}\ {}_2 p_{40} q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 17{,}67 u.m.$$

**EXEMPLO 2**

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t|}} \; {}_{t}p_{x} q_{x+t} = a_{\overline{1|}} \; p_{40} q_{41} + a_{\overline{2|}} \; {}_{2}p_{40} q_{42} + a_{\overline{3|}} \; {}_{3}p_{40} q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = \frac{v(1-v^{1})}{1-v} \; p_{40} q_{41} + \frac{v(1-v^{2})}{1-v} \; {}_{2}p_{40} q_{42} + \frac{v(1-v^{3})}{1-v} \; {}_{3}p_{40} q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = 16{,}67\text{u.m.}$$

# Anuidades vitalícias imediatas

- Outras alternativas para o calculo do V.P.A. serão:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_x$$

e

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_x$$

# Demonstração

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\ {}_t p_x (1 - p_{x+t})$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\ ({}_t p_x - {}_t p_x p_{x+t}) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\ ({}_t p_x - {}_{t+1} p_x)$$

$$\ddot{a}_x = v^0({}_0 p_x - {}_1 p_x) + (v^0 + v)({}_1 p_x - {}_2 p_x) + (v^0 + v + v^2)({}_2 p_x - {}_3 p_x) + \cdots$$

Assim

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_t p_x.$$

**EXEMPLO 3**

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = 1 + v \; p_{40} + v^2 \; {}_2p_{40} + v^3 \; {}_3p_{40} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 1 + v \; p_{40} + v^2 \; p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots \approx 17{,}67 u.m.$$

Postecipado,

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = v \; p_{40} + v^2 \; {}_2p_{40} + v^3 \; {}_3p_{40} + \cdots$$

$$a_{40} = v \; p_{40} + v^2 \; p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots \approx 16{,}67 u.m.$$

# Anuidades vitalícias imediatas

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia antecipada.

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia Postecipada.

# Anuidades vitalícias imediatas

- Então, para o caso discreto, o V.P.A. será dado por:

  - Anuidade **Antecipada** ( Variável aleatória discreta)

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}}\, {}_t\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\, {}_t p_x q_{x+t}$$

  - Anuidade **Postecipada** ( Variável aleatória discreta)

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t|}}\, {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_t p_x q_{x+t}$$

# Aula 11 - Anuidade Imediata

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

# Anuidades temporárias imediatas

- No caso de anuidades temporárias, essas são válidas enquanto a pessoa de idade $x$ for viva até no máximo $n$ anos.
  - Então, para o caso discreto, o V.P.A. de anuidades temporárias temos:

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} \; {}_{t}p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} \; {}_{n}p_x$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & se\ 0 < T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & se\ \ T \geq n \end{cases}$$

$$E(Y) = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P_x(T = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n|}}\, P_x(T = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P_x(T = t) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \sum_{t=n}^{\infty} P_x(T = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P_x(T = t) + \ddot{a}_{\overline{n|}} P_x(T \geq n)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_n p_x}$$

# Anuidades temporárias imediatas

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left( \sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \; {}_tp_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n|}} \; {}_np_x$$

# EXEMPLO 4

Uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 40 anos. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 feminina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40:\overline{40|}} = \left( \sum_{t=0}^{39} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} \, {}_{t}p_{25} q_{25+t} \right) + \left( \frac{1 - v^{40}}{1 - v} \right) {}_{40}p_{25}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{40|}} = 1{,}0584 + 16{,}78173 = 17{,}8402$$

# Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_np_x$$

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{x}:\overline{\boldsymbol{n}|}} = \mathbf{E(Y)} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t\boldsymbol{E}_x = \sum_{t=0}^{n-1} \boldsymbol{v}^t\ {}_t\boldsymbol{p}_x$$

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n|}}\ {}_np_x$$

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{x}:\overline{\boldsymbol{n}|}} = \boldsymbol{E(Y)} = \sum_{t=1}^{n} {}_t\boldsymbol{E}_x = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{v}^t\ {}_t\boldsymbol{p}_x$$

# EXEMPLO 5:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

| Idade | $q_x$ | $p_x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 |

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{4-1} {}_t\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{30}} = \sum_{t=0}^{3} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}}\ {}_t\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{30}}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + vp_{30} + v^2\ {}_2p_{30} + v^3\ {}_3p_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + \frac{1}{1{,}05}p_{30} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 3{,}71$$

# EXEMPLO 6:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

| Idade | $q_x$ | $p_x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 |

$$a_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^{4} {}_t\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{30}} = \sum_{t=1}^{4} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}}\ {}_t\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{30}}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = vp_{30} + v^2\ {}_2p_{30} + v^3\ {}_3p_{30} + v^4\ {}_4p_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = \frac{1}{1,05}p_{30} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 p_{30}p_{31}p_{32}p_{33}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = 3,52$$

# EXEMPLO 7:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 5 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

| Idade | $q_x$ | $p_x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 |

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{5-1} {}_t\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{25}} = \sum_{t=0}^{4} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}}\ {}_t\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{25}}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + vp_{25} + v^2\ {}_2p_{25} + v^3\ {}_3p_{25} + v^4\ {}_4p_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)p_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 4{,}53$$

## EXEMPLO 8:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

| Idade | $q_x$ | $p_x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 |

$$a_{25:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^{4} {}_{t}\boldsymbol{E}_{25} = \sum_{t=0}^{4} \boldsymbol{v}^{t}\ {}_{t}\boldsymbol{p}_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = vp_{25} + v^2\ {}_2p_{25} + v^3\ {}_3p_{25} + v^4\ {}_4p_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)p_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = 3,53$$

# Anuidades temporárias imediatas

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + v^4\ {}_4p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$a_{x:\overline{n-1|}} = vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + v^4\ {}_4p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$$

# Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \le T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \ge n \end{cases}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E(Z)} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_tp_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \, {}_np_x$$

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Z = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \le T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \ge n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_x$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left( \sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \, {}_tp_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n|}} \, {}_np_x$$