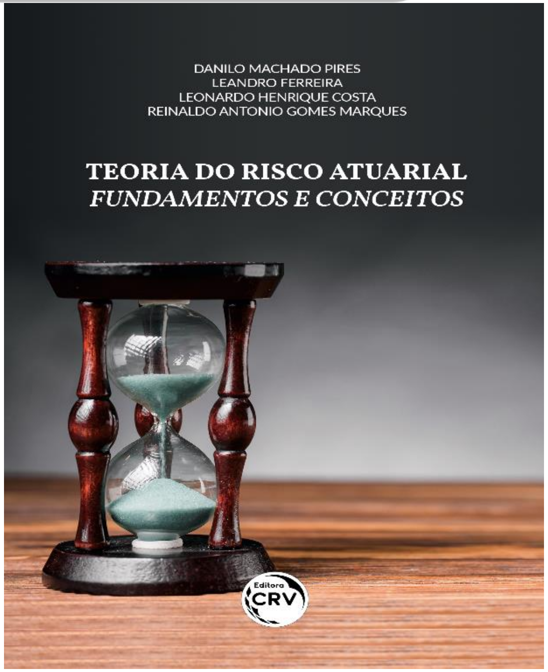
Teoria do Risco
Aula 11

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



https://atuaria.github.io/portalhalley/

Modelos de risco Coletivo

- Diferente da abordagem do modelo de risco individual, no modelo de risco coletivo o valor total das indenizações é calculado a partir de uma soma aleatória de variáveis aleatórias.

- O modelo de risco coletivo se diferencia do modelo de risco individual por modelar, de maneira conjunta, o número de sinistros e sua severidade.

Modelos de risco Coletivo

- O objetivo central da teoria do risco coletivo aplicada a seguros e danos é a modelagem matemática do comportamento probabilístico de S_{col}.

- $S_{col.}$ → é o montante agregado relativo aos sinistros ocorridos no ano.

- $\mathrm{X_i}$ → é o montante relativo ao i-ésimo sinistro ocorrido.

- N → o número de sinistros para o mesmo período em analise.

Modelos de risco Coletivo

- S_{col} é condicionado a X_i e a N.

$$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$S_{col} > 0 \; se \; N > 0$$

$$S_{col} = 0 \; se \; N = 0$$

Modelos de risco Coletivo

- O número de vezes que os sinistros ocorrem e seus valores serão expressos pelas ocorrências verificadas no conjunto das apólices que a compõem.

- Assumindo que $N = n$, então $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídos.

- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ e N são mutualmente independentes.

Modelos de risco Coletivo

- ...qualquer sinistro ocorrido não pode sofrer interferência de outros eventos de mesma espécie e o número de sinistros (N) não tem efeito sobre o montante deles $(\{\mathrm{X_i}\}_{\mathrm{i}=1}^{\infty})$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{S_{col}}) = \mathrm{E}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X_i}\right)$$

- X_i → é a variável aleatória que representa a sinistralidade da apólice i-ésima.
- N →variável aleatória que representa o número de sinistros na carteira em um dado intervalo de tempo.

Modelos de risco Coletivo

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
X_i, B_i, I_i	X_i, N

Modelos de risco Coletivo -A distribuição de S_{col}, os sinistros coletivos.

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N
  - Um método interativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado poder computacional,

- Método da função geradora de momentos.
  - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos.

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t)\,)$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = E\left[e^{t(X_1+X_2+\dots X_N)}\right] = E[e^{tX_1}e^{tX_2}\dots e^{tX_N}] = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})$$

Como X_is são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$\ldots$$

$$E(e^{tS_{col}}|N) = \prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i}) = M_X(t)^N$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E[M_X(t)^N]$$

$$M_{S_{col}}(t) = E\left[e^{ln\, M_X(t)^N}\right] = E\left[e^{N\, ln\, M_X(t)}\right]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t))$$

EXEMPLO

Calcule $E(S_{col})$ por meio de $M_{S_{col}}(t)$, dado que X possui distribuição Exponencial (α) e N possui distribuição de Poisson(λ).

Se $\mathrm{N} \sim \mathrm{poisson}(\lambda)$, então

$$\mathrm{M_N(t)} = E(e^{tN}) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e^t}-1)}$$

Se $\mathrm{X} \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \qquad M_X(t) = \frac{\alpha}{(\alpha-t)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t)\,)$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda\left[e^{ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)}-1\right]} = e^{\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}-1\right)} = e^{(\alpha-t)^{-1}\lambda\alpha-\lambda}$$

$$M'_{scol}(t) = \frac{dM_{scol}(t)}{dt} = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-t)^2}\, e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-t}-\lambda}$$

$$M'_{scol}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-0)^2}\, e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-0}-\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

EXEMPLO 1

Seja N com distribuição $Binomial\,(n, q)$. Determine uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$ $\qquad$ $M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$

Assim:

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left[qe^{\ln M_X(t)} + 1 - q\right]^n}$$

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n}$$

EXEMPLO 2

Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro (sem dedução da franquia) obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos de momentos do total agregado de sinistros S_{col}, dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $B\ (n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col}.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n \qquad M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{S}_{\mathrm{col}}}(\mathrm{t}) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^n$$

Assim:

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n} = [q\alpha^{r}(\alpha - t)^{-r} + 1 - q]^{n}}$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} q\alpha^{r}(-\boldsymbol{r})(\alpha - t)^{-r-1}(-\boldsymbol{1})$$

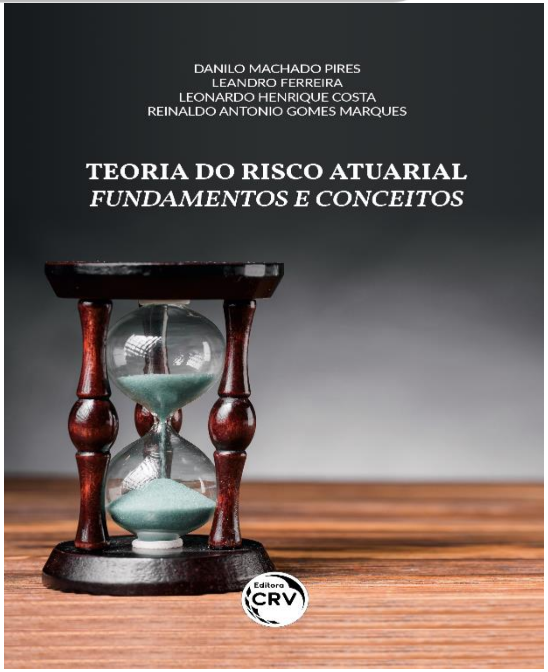
$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^{r}}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - 0}\right)^{r} + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^{r}}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$\boldsymbol{E(S_{col})} = n(q + 1 - q)^{n-1}\frac{rq}{\alpha} = \boldsymbol{\frac{nqr}{\alpha}}$$

Teoria do Risco

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



https://atuaria.github.io/portalhalley/

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$	$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln M_X(t))\,\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = \frac{dM_{S_{col}}(0)}{dt} = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) \;= E(N)E(X)$$

$$\frac{d^2M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(\ln M_X(t))\,\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}\,\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(\ln M_X(t))\left[\frac{M''_X(t)M_X(t) - M'_X(t)M'_X(t)}{M_X(t)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(\ln M_X(0))\,\frac{M'_X(0)}{M_X(0)}\,\frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(\ln M_X(0))\left[\frac{M''_X(0)M_X(0) - M'_X(0)M'_X(0)}{M_X(0)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0)E(X)\,E(X) + M'_N(0)\left[E(X^2) - E(X)^2\right]$$

$$E\left(S_{col}^2\right) = E(N^2)E(X)^2 \; + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$var(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[var(X)] - E(N)^2E(X)^2$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\,[E(N^2) - E(N)^2] + E(N)var(X)$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo

Exemplo 3

Encontre os valores de $\mathrm{E}(S_{col})$ e $var(S_{col})$ para as situações dos itens a seguir:

a) $\mathrm{N} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ e $\mathrm{X} \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$.

b) $\mathrm{N} \sim \mathrm{Binomial}(\mathrm{n}, \mathrm{q})$ e $\mathrm{X} \sim \mathrm{Gama}(\mathrm{r}, \alpha)$.

Exemplo

a) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, então:

$$E(N) = \lambda \qquad E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Logo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$var(N) = \lambda \text{ e } var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = var(X)E(N) + E(X)^2 var(N)$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{\alpha^2}\lambda + \frac{1}{\alpha^2}\lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Exemplo

b) $N \sim B\ (n, q)$ e $\mathrm{X} \sim \mathrm{Gama}(\mathrm{r}, \alpha)$, então:

$$E(N) = nq \qquad E(X) = \frac{r}{\alpha}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{nqr}{\alpha}$$

$$var(N) = nq(1 - q) \ \text{e}\ var(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = \frac{r}{\alpha^2}nq + \frac{r^2}{\alpha^2}nq(1 - q) = \frac{nqr[1 + r(1 - q)]}{\alpha^2}$$

Exemplo 4

Suponha uma carteira de seguros cuja número de sinistros seja caracterizada pela variável aleatória $N \sim Po(12)$ e os valores dos sinistros seja $X \sim U_c(0,1)$, calcule $P(S_{col} \leq 10)$ utilizando uma aproximação pela distribuição normal.

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(N)E(X)}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N)var(X)}$$

Exemplo

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = 12 \times \frac{1}{2} = 6}$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = \frac{1}{4}12 + 12\frac{1}{12} = 4}$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-6}{2}\right)$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P(Z \leq 2) = 0{,}97725$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E[E(S_{col}|N)]$$

$$E(S_{col}) = E[E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N | N = n)]$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N | N = n)\, p(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\, p(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) p(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(X)\, p(N = n) = E(X) \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(N = n)$$

- Logo

$$\boldsymbol{E(S_{col}) = E(X)E(N)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E[var(S_{col}|N)] + var[E(S_{col}|N)]$$

Primeiro iremos trabalhar $\boldsymbol{E[var(S_{col}|N)]}$, assim:

$$E[var(S_{col}|N)] = E[var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N|N = n)]$$

$$E[var(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} var(X_1 + X_2 + \cdots + X_N|N = n)\, p(N = n)$$

$$E[var(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\, p(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) p(N = n)$$

$$E[var(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, var(X)\, p(N = n) = var(X) \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(N = n)$$

$$\boldsymbol{E[var(S_{col}|N)] = var(X)E(N)}$$

Agora para $var\big(E(S_{col}|N)\big)$, tem-se:

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E[var(S_{col}|N)] + var[E(S_{col}|N)]$$

$$E[var(S_{col}|N)] = var(X)E(N)$$

Agora para $\boldsymbol{var[E(S_{col}|N)]}$, tem-se:

$$var[E(S_{col}|N)] = var[E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N|N = n)] = var[NE(X)]$$

$$var[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 var(N)$$

Logo

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)}$$