Teoria do Risco
Aula 18

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Outra propriedade importante do processo de Poisson Homogêneo vem do fato de que sua intensidade λ ser constante no tempo permite que o tempo entre sinistros obedece uma distribuição exponencial.

- Considere a probabilidade de que não ocorra sinistros dentre de um intervalo t:

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Ao se definir N_t e N_{t+s} como a frequência de sinistros ocorridos até os instantes t e $t+s$, tem-se:

$$P(N_{t+s} - N_t = 0) = P(N_s = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!}$$

- Esse resultado pode ser entendido como a probabilidade de espera entre um sinistro e outro (evento), neste caso, pode-se dizer que o tempo necessário para ocorrer um sinistro é maior que s.

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Ao se definir uma variável aleatória T como o intervalo de tempo entre dois sinistros, tem-se:

$$P(T > s) = P(N_s = 0) = P(N_{t+s} - N_t = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

- A probabilidade de que o tempo entre dois sinistros seja menor que um intervalo s, implica que o número de sinistros ocorridos nesse intervalo é maior que 0.

$$P(T < s) = P(N_s > 0) = 1 - e^{-\lambda s}$$

Portanto T possui distribuição exponencial com média $\frac{1}{\lambda}$, $t > 0$ e $\lambda > 0$.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Portanto ao se definir $\{N_t, t \geq 0\}$ como um processo de Poisson homogêneo com intensidade λ, é estabelecido que o tempo entre dois sinistros, T, possui distribuição exponencial com parâmetro λ, logo:

$F_T(t) = 1 - e^{-t\lambda}$ Distribuição acumulada de T.

$\bar{F}_T(t) = e^{-t\lambda}$ Função de sobrevivência de T (Excesso de Danos).

$f_T(t) = \lambda e^{-t\lambda}$ Função densidade de T.

$E(T) = \frac{1}{\lambda}$ Valor esperado de T.

$var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ Variância de T.

$M_T(r) = \frac{\lambda}{r-\lambda}$ Função geradora de momentos de T.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

O fato da distribuição do tempo entre dois sinistros ser dado por um modelo de distribuição exponencial implica em dizer que:

- I) A probabilidade do tempo de espera entre dois sinistros decai exponencialmente com o passar do tempo.

- II)A variável aleatória que representa a soma de durações exponencialmente distribuídas (idênticas), $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, apresenta distribuição gama com parâmetros n e λ:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$$

em que $\Gamma(n) = (n-1)!$, uma vez que n é um inteiro positivo.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- III) A probabilidade de que seja necessário esperar mais s até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de t, é a mesma de que esse evento ocorra depois dos s iniciais.

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

*Propriedade da perda de memória: Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

Consequentemente

$$E(T) = E(T | T > s)$$

EXEMPLO 1

Denote por T como o tempo decorrido entre $k-1$ ésimo sinistro e do k-ésimo sinistro de uma carteira de seguros. Suponha que o tempo decorrido entre sinistros independentes e identicamente distribuídos seguindo a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_T(t) = 0{,}04861e^{-0{,}04861t}, \mathrm{t} > 0.$$

Em que t é mensurado em lapsos de meia hora. Sendo assim calcule a probabilidade de que pelo menos um sinistro será processado nas próximas duas horas e trinta minutos.

Solução:

Uma vez que a distribuição do tempo decorrido entre dois sinistros é uma exponencial, logo:

$$\lambda = 0{,}04861.$$

Como a função densidade de probabilidade está descrita em duas e trinta minutos, então deve-se calcular a probabilidade considerando-se essa ordem de medida. Dessa forma:

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - P(N_5 = 0)$$

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - e^{-0{,}04861 \times 5} = 1 - e^{-0{,}24305} \approx 0{,}2157 \approx 21{,}57\%$$

EXEMPLO 2

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

EXEMPLO

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036$$

EXEMPLO

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja menor que 8 meses.

$$\overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036$$

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

$10\ meses = \frac{5}{6}\ anos$ e $2\ meses = \frac{1}{6}\ anos.$

$$P\left(T > \frac{5}{6} \middle| T > \frac{1}{6}\right) = \frac{e^{-5\left(\frac{5}{6}\right)}}{e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}} = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036 = \overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Processo estocástico de sinistros agregados

- Os processos não homogêneos também apresentando muitas aplicações na análise de risco.

- Processos não Homogêneos (Intensidade λ variar no tempo)
  - Acarretando em uma não estacionaridade e/ou
  - não independência nos incrementos.
  - ...Processo misto (intensidade definida por uma variável aleatória)

Processo estocástico de sinistros agregados

Processo de Poisson misto de Pólya,

$$\Lambda \sim Gama\ (r, \alpha)$$

$$P(N_t = n) = \binom{n+\alpha-1}{n}\left(\frac{t}{t+r}\right)^n\left(\frac{r}{t+r}\right)^\alpha$$

- *"...não obedece ao critério de independência nos incrementos, de que modo que não deveria ser classificado como um processo de Poisson (contagem)."*

Processo estocástico de sinistros agregados

$$S_{ind.t} = X_{1.t} + X_{2.t} + X_{3.t} + \cdots + X_{n.t}$$

$$S_{Col.t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$\{N_t, t \geq 0\}$: Processo de contagem **(Processo de Poisson)**

$\{S_{Col.t}, t \geq 0\}$: Processo estocástico de sinistros agregados

X_i : Representa a severidade do $i - ésimo$ sinistro.

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Definindo-se $S_{col.t}$ como a severidade acumulada no intervalo de tempo t de acordo como o modelo de risco agregado.

$$S_{col.t} = S_t$$

- O processo estocástico $\{S_t, t > 0\}$ é dito ser um processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo da seguinte forma:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo.

- $\{X_i, i > 0\}$ é uma sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $\{N_t, t > 0\}$.

- $S_t = 0$ se $N_t = 0$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

A função distribuição convoluta de S_t é será dada por:

$$F_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \, \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, e^{-\lambda t}$$

Em que $P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k < s)$

Consequentemente temos que :

$$p_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \, \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, e^{-\lambda t}$$

Em que $p^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k = s)$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Sua esperança e variância são dadas por:

$$E(S_t) = \lambda t E(X)$$

$$var(S_t) = \lambda t E(X^2)$$

- Esperança matemática e variância do sinistro agregado para o intervalo de tempo t de um processo estocástico Poisson Homogêneo.

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t[M_X(r)-1]}$$

EXEMPLO 3

Considere uma carteira de n apólices idênticas de seguros de dano em que a frequência histórica relativa de ocorrência de sinistros é de 5 sinistros por ano obedecendo uma distribuição Poisson com valor de intensidade constante. Considere que a distribuição de probabilidades de severidades tem um comportamento descrito pela distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 100$ e $\beta = 2$, $X \sim Gama(100, 2)$. Supondo que este comportamento se mantenha constante no período de análise e que todas as apólices são renovadas a cada ano. Obtenha a fórmula genérica da função geradora de momentos, esperança matemática e do desvio padrão da distribuição convoluta de sinistros agregados.

- Resp.:

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha} \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

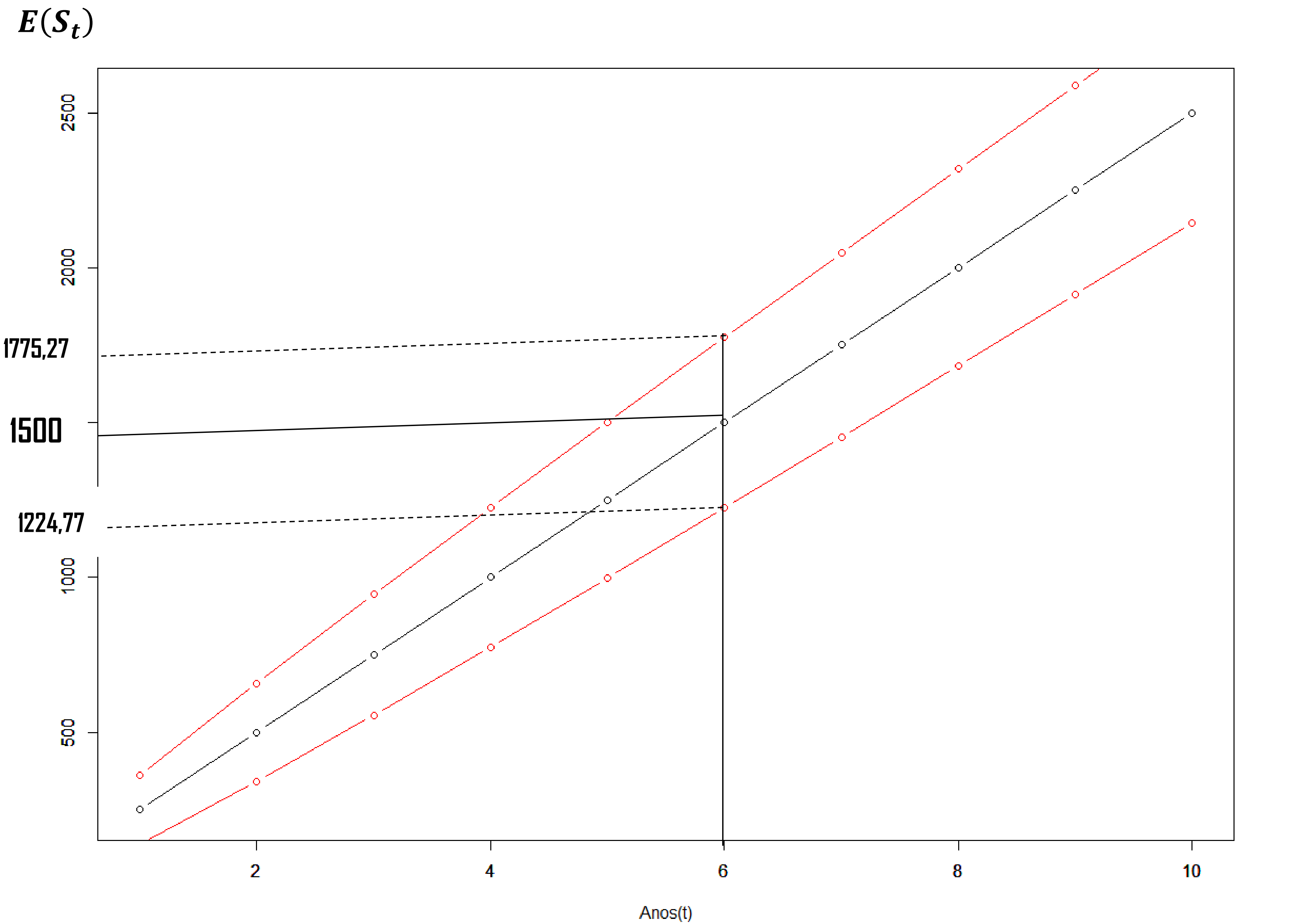
Logo,

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t\left[\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha}-1\right]} = e^{5t\left[\left(\frac{2}{2-r}\right)^{100}-1\right]}$$

$$E(S_t) = \frac{\lambda t \alpha}{\beta} = 5t\left(\frac{100}{2}\right) = 250t$$

$$var(S_t) = \lambda t\left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) = 5t(25 + 50^2) = 12625t$$

$$\sigma_{S_t} = 112{,}361\sqrt{t}$$



$E(S_t)$
2500
2000
1775,27
1500
1224,77
1000
500
2
4
6
8
10
Anos(t)