Teoria do Risco
Aula 16

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Princípio de cálculo de prêmio

- A defesa, da utilização de um princípio em detrimentos aos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis...

Propriedades

- Carregamento de segurança não-negativo.

$$\Pi_S \geq E(S)$$

  - O prêmio não deve ser menor o valor esperado a ser pago.
  - No caso de uma única apólice esse princípio seria inviável de se manter...

- Aditividade.
  - Se S_1 e S_2 são independentes, o prêmio para o risco combinado, $\Pi_{S_1+S_2}$, é igual a $\Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Propriedades

- Escala invariante.

Se $Z = aS$, em que $a > 0$, então $\Pi_Z = a\Pi_s$.

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

- Consistência.

Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $\Pi_Y = \Pi_s + c$

- Perda máxima.

Seja r_S o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição S, então $\Pi_s \leq r_S$

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

  $$\Pi_s \geq \mathrm{E}(\mathrm{S})$$

- *Aditividade.*

  $$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

- *Escala invariante.*

  Se $\mathrm{Z} = \mathrm{aS}$, em que $\mathrm{a} > 0$, então $E(Z) = aE(S)$

- *Consistência.*

  Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $E(Y) = E(S) + c$

- Perda máxima

  $$\Pi_s \leq \mathrm{r_S}$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_s = \boldsymbol{E(S)(1+\theta)}$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$E(S)(1+\theta) \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

$$E(S_1+S_2)(1+\theta) = E(S_1)(1+\theta) + E(S_2)(1+\theta)$$

- *Escala invariante.*

$$\Pi_Z = (1+\theta)E(Z) = (1+\theta)E(aS)$$

$$\Pi_z = a(1+\theta)E(S)$$

$$\Pi_z = a\Pi_s.$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_s = \boldsymbol{E(S)(1+\theta)}$

- Consistência.

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então

$$\Pi_Y = (1+\theta)E(S+c) = (1+\theta)[E(S)+c],$$
$$\Pi_Y > \Pi_s + c.$$

Como $\Pi_Y \neq \Pi_S + c$, o princípio do prêmio carregado não é consistente.

- Perda máxima

Uma forma de mostrar que o princípio do prêmio puro não satisfaz essa propriedade é através de um exemplo hipotético, em que dado um valor b correspondente a r_S (maior valor pago por S) e supondo que $P(S = b) = 1$, com $b > 0$ e $\theta > 0$, tem-se que

$$\Pi_s = (1+\theta)E(S) = (1+\theta)b > b.$$

Como $\Pi_s > r_S$, essa propriedade não é satisfeita.

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + var(S)\alpha \geq \ E(S)$$

- *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + var(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + E(S_2) + \alpha\ var(S_1) + \alpha\ var(S_2),$$

$$E(S_1 + S_2) + var(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + \alpha\ var(S_1) + E(S_2) + \alpha\ var(S_2),$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, *em que* $a > 0$, *então*

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha\ var(Z) = E(aS) + \alpha\ var(aS),$$
$$\Pi_Z = aE(S) + a^2\alpha\ var(S),$$
$$\Pi_z \neq a\Pi_s$$

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

- *Consistência*

Dado $\mathrm{Y} = \mathrm{S} + \mathrm{c}$, em que $\mathrm{c} > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \alpha\, var(Y),$$
$$\Pi_Y = E(S+c) + \alpha\, var(S+c),$$
$$\Pi_Y = E(S) + c + \alpha\, var(S),$$
$$\Pi_Y = \Pi_s + c.$$

- *Perda máxima*

Dado $\mathrm{P}(\mathrm{S} = 8) = \mathrm{P}(\mathrm{S} = 12) = 0{,}5$ então:

$$E(S) = 10,$$
$$var(S) = 4,$$
$$\Pi_s = 10 + 4\alpha.$$

em que excede 12 quando $\alpha > 0{,}5$.

Princípio do desvio padrão $\Pi_s = E(S) + \sigma_S \beta; \quad \beta > 0$

- *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + \beta\sigma_S \geq E(S).$$

- *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \sqrt{var(S_1 + S_2)}\beta = E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{var(S_1) + var(S_2)}$$

$$E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{var(S_1) + var(S_2)} \neq \left[E(S_1) + \sigma_{S_1}\beta\right] + \left[E(S_2) + \sigma_{S_2}\beta\right]$$

- *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que $a > 0$, então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta\sigma_Z = E(aS) + \beta\sqrt{var(aS)},$$
$$\Pi_Z = aE(S) + \beta\sqrt{a^2 var(S)},$$
$$\Pi_Z = aE(S) + a\beta\sigma_S,$$
$$\Pi_z = a\Pi_s$$

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta; \quad \beta > 0$

- *Consistência*

Dado $\mathrm{Y} = \mathrm{S} + \mathrm{c}$, em que $\mathrm{c} > 0$, então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \beta\sqrt{var(Y)},$$
$$\Pi_Y = E(S+c) + \beta\sqrt{var(S+c)},$$
$$\Pi_Y = E(S) + c + \beta\sqrt{var(S)},$$
$$\Pi_Y = \Pi_s + c.$$

- *Perda máxima*

Dado $P(S=8) = P(S=12) = 0{,}5$ então:

$$\mathrm{E(S)} = 8 \times 0{,}5 + 12 \times 0{,}5 = 10$$
$$var(S) = (8^2 \times 0{,}5 + 12^2 \times 0{,}5) - 10^2 = 104 - 100 = 4$$

$$\sigma = 2$$
$$\Pi_s = 10 + 2\beta.$$

Como na prática o valor de β varia entre 1 e 2,Π_S excede 12 quando $\beta > 1$. A propriedade de perda máxima não é satisfeita.

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Carregamento de segurança não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$\mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_s - \mathrm{s}\ )] \leq\ \mu(\mathrm{E}(\mathrm{W} + \Pi_s - \mathrm{S})\ )$$

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{W}) = \mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_s - \mathrm{S}\ )] \leq -\boldsymbol{\alpha e}^{-\boldsymbol{\alpha}[\mathbf{W}+\Pi_s-\mathbf{E}(\boldsymbol{S})]}$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \leq -\alpha e^{-\alpha[W+\Pi_s-E(X)]}$$

$$ln\, e^{-\alpha W}\ \geq ln\, e^{-\alpha[W+\Pi_s-E(S)]}$$

$$-\alpha W \geq -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$-W \geq -W - \Pi_s + E(S)$$

$$\Pi_s \geq E(S)$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➢ *Aditividade*

Em geral o principio da utilidade zero não é aditivo, mas o principio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln E\left(e^{\alpha(S_1+S_2)}\right)}{\alpha} = \frac{\ln\left\{E\left(e^{\alpha S_1}\right)E\left(e^{\alpha S_2}\right)\right\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln E\left(e^{\alpha S_1}\right)}{\alpha} + \frac{\ln E\left(e^{\alpha S_2}\right)}{\alpha} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

- *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escalava invariante. Suponha que e $\mathrm{S} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $\mathrm{Z} = \mathrm{aS}$, em que $\mathrm{a} > 0$.

Logo

$$\Pi_S = \frac{lnM_S(\alpha)}{\alpha} = \frac{\ln\left(e^{\frac{\delta^2\alpha^2}{2}+\mu\alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 \alpha \neq a\Pi_S$$

➢ *Consistência*

Seja $\mathrm{Y} = \mathrm{S} + \mathrm{c}$, então Π_{Y} é dada por:

$$\mu(\mathrm{W}) = \mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_{\mathrm{Y}} - \mathrm{Y})]$$

$$\mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_{\mathrm{Y}} - \mathrm{Y})] = \mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + (\Pi_{s} + c) - (\mathrm{S} + \mathrm{c}))\ ]$$

$$\mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_{\mathrm{Y}} - \mathrm{Y})] = \mathrm{E}[\mu(\mathrm{W} + \Pi_{s} - \mathrm{S})]$$

Considerando $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$\mu(\mathrm{W} + \Pi - \mathrm{E}(\mathrm{Y})\ ) = \mu(\mathrm{W} + \Pi_{s} - \mathrm{E}(\mathrm{S})\ )$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha[\mathrm{W} + \Pi_{\mathrm{Y}} - \mathrm{E}(\mathrm{Y})]} = \mathrm{e}^{-\alpha[\mathrm{W} + \Pi_{s} - \mathrm{E}(\mathrm{S})]}$$

$$-\alpha[\mathrm{W} + \Pi_{\mathrm{Y}} - \mathrm{E}(\mathrm{Y})] = -\alpha[\mathrm{W} + \Pi_{s} - \mathrm{E}(\mathrm{S})]$$

$$\Pi_{\mathrm{Y}} - \mathrm{E}(\mathrm{Y})\ = \Pi_{s} - \mathrm{E}(\mathrm{S})$$

$$\Pi_{Y}\ = \Pi_{s} - E(S) + E(S) + c,$$

$$\boldsymbol{\Pi_{Y}}\ = \Pi_{s} + \boldsymbol{c}.$$

➢ *Perda máxima.*

Considerando que $\mathrm{r_S}$ é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W + \Pi_s - S)] \geq E[\mu(W + \Pi_s - r_S)]$$

Como $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_s - S)]$, então:

$$\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_s - r_S)$$

Como $\mu'(x) > 0$, tem-se que:

$$W \geq W + \Pi_s - r_S$$
$$\Pi_s - r_S \leq 0$$
$$\Pi_s \leq r_S$$