

# Matemática Atuarial II

## Aula 17

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

# Status composto

- O status composto refere-se a um produto atuarial que envolve várias vidas, onde se mescla os conceitos do status vida conjunta com os do status último sobrevivente.
- Estruturas mais complexas

## Status composto

Por exemplo, pode-se ter interesse em contratar uma anuidade postecipada cujos benefícios são pagos enquanto  $x$  **ou**  $y$  estiverem vivos desde que  $z$  **ou**  $w$  também estejam, ou seja:

$$a_{\overline{x,y,w,z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,w,z}}$$

Para  $b = 1$ .

# Status composto

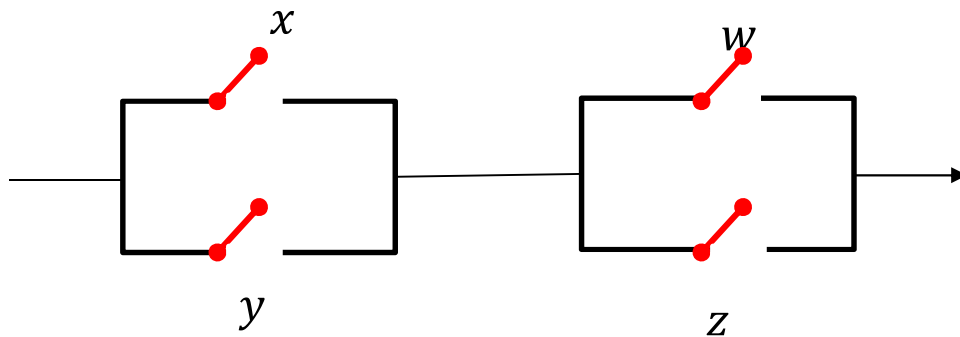
$$a_{\overline{x,y:\overline{w,z}}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,\overline{w,z}}}$$

$a_{\boxed{1}:\boxed{2}}$  O status falha quando o primeiro grupo “falhar”  
(seja o 1 ou o 2 )

$\boxed{1} = \overline{x,y}$  O status falha quando ocorrer a última morte entre  $x$  e  $y$

$\boxed{2} = \overline{w,z}$  O status falha quando ocorrer a última morte entre  $w$  e  $z$

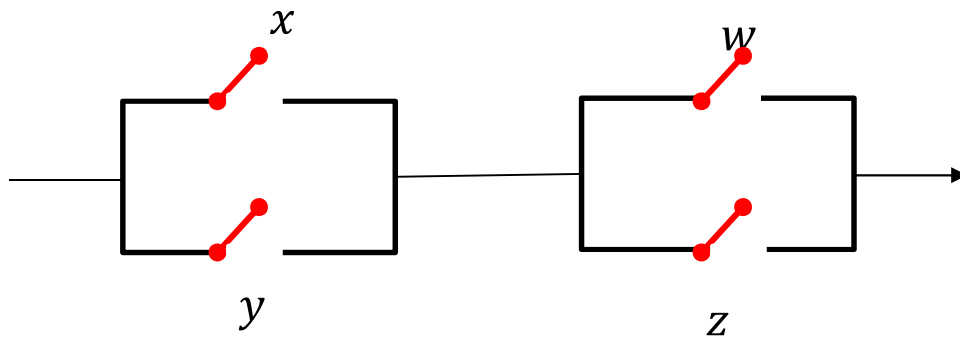
$$a_{\overline{x,y,w,z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,w,z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o fim do pagamento da anuidade

	x	y	w	z
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

$$a_{\overline{x,y,w,z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x,y,w,z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o fim do pagamento da anuidade

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>w</i>	<i>z</i>	
<b>1</b>	1	1	1	1	A
<b>2</b>	0	1	1	1	A
<b>3</b>	1	0	1	1	A
<b>4</b>	1	1	0	1	A
<b>5</b>	1	1	1	0	A
<b>6</b>	1	1	0	0	Falha
<b>7</b>	1	0	1	0	A
<b>8</b>	1	0	0	1	A
<b>9</b>	1	0	0	0	Falha
<b>10</b>	0	1	1	0	A
<b>11</b>	0	1	0	1	A
<b>12</b>	0	1	0	0	Falha
<b>13</b>	0	0	1	1	Falha
<b>14</b>	0	0	1	0	Falha
<b>15</b>	0	0	0	1	Falha
<b>16</b>	0	0	0	0	Falha

# Status composto

$$a_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{x},\overline{y}} {}_t p_{\overline{w},\overline{z}},$$

$$a_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) ({}_t p_w + {}_t p_z - {}_t p_w {}_t p_z),$$

$$a_{\overline{x},\overline{y},\overline{w},\overline{z}} = \sum_{t=1}^{\infty} [v^t ({}_t p_x {}_t p_w) + ({}_t p_x {}_t p_z) - ({}_t p_x {}_t p_w {}_t p_z) + v^t ({}_t p_y {}_t p_w) + v^t ({}_t p_y {}_t p_z) - v^t ({}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z) - v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w) - v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z) + v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z {}_t p_w)]$$

# Status composto

$$\begin{aligned}
 & a_{\overline{x}, \overline{y}, \overline{w}, \overline{z}} \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_w) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_z) - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_w {}_t p_z) \\
 &+ \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_y {}_t p_w) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_y {}_t p_z) - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z) \\
 &- \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w) - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z {}_t p_w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{\overline{x}, \overline{y}, \overline{w}, \overline{z}} \\
 &= a_{x,w} + a_{x,z} - a_{x,w,z} + a_{y,w} + a_{y,z} + a_{y,w} - a_{y,w,z} \\
 &\quad - a_{x,y,w} - a_{x,y,z} + a_{x,y,z,w}
 \end{aligned}$$



# Status composto

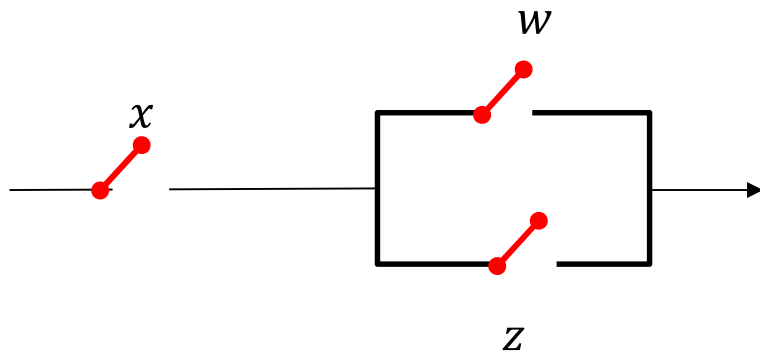
Como será o prêmio puro único de uma anuidade vitalícia de efeito imediato, que paga os benefícios de forma postecipada desde que  $x$  esteja vivo e o último sobrevivente de  $w$  ou  $z$  estiver vivo.

# Status composto

Como será o prêmio puro único de uma anuidade vitalícia de efeito imediato, que paga os benefícios de forma postecipada desde que  $x$  esteja vivo e o último sobrevivente de  $w$  ou  $z$  estiver vivo.

$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$

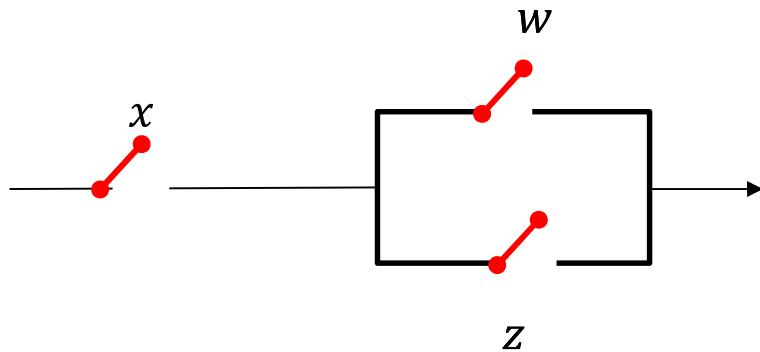
$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$



$x$	$w$	$z$	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

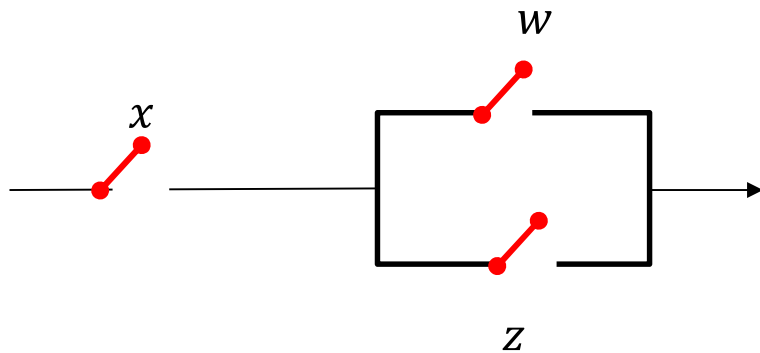
$$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

	$x$	$w$	$z$	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga
2	0	1	1	Falha
3	1	0	1	A/Paga
4	1	1	0	A/Paga
5	1	0	0	Falha
6	0	1	0	Falha
7	0	0	1	Falha
8	0	0	0	Falha

E caso esse status composto fosse feito para um seguro de vida vitalício, como seria os pagamentos?



	$x$	$w$	$z$	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$	$A_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga	A
2	0	1	1	Falha	Falha/Paga
3	1	0	1	A/Paga	A
4	1	1	0	A/Paga	A
5	1	0	0	Falha	Falha/Paga
6	0	1	0	Falha	Falha/Paga
7	0	0	1	Falha	Falha/Paga
8	0	0	0	Falha	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

Como calcular o valor de  $a_{x,\overline{w},\overline{z}}$  e  $A_{x,\overline{w},\overline{z}}$ ?

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



# Matemática Atuarial II

## Aula 18

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

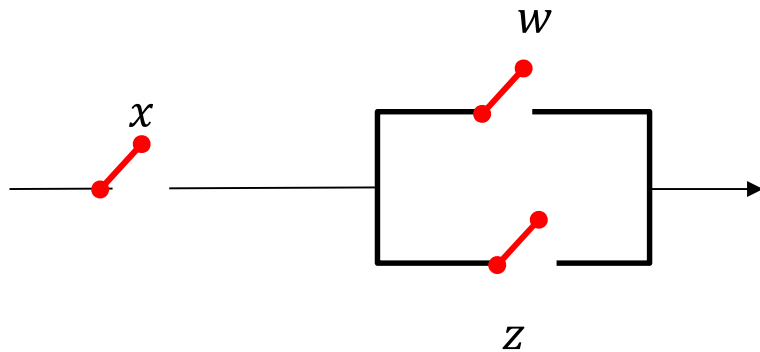
# Status composto

Como será o prêmio puro único de uma anuidade vitalícia de efeito imediato, que paga os benefícios de forma postecipada desde que  $x$  esteja vivo e o último sobrevivente de  $w$  ou  $z$  estiver vivo.

$$a_{x,\overline{w,z}}$$



# Status composto



	$x$	$w$	$z$	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$	$A_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga	A
2	0	1	1	Falha	Falha/Paga
3	1	0	1	A/Paga	A
4	1	1	0	A/Paga	A
5	1	0	0	Falha	Falha/Paga
6	0	1	0	Falha	Falha/Paga
7	0	0	1	Falha	Falha/Paga
8	0	0	0	Falha	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

Como calcular o valor de  $a_{x,\overline{w},\overline{z}}$  e  $A_{x,\overline{w},\overline{z}}$ ?

# Status composto

Para esse cálculo é importante perceber que:

$$\begin{aligned} T_{\overline{w,z}} = T_w \text{ então } T_{w,z} = T_z \quad \text{logo } T_{x,\overline{w,z}} = T_{x,w} \text{ e } T_{x,w,z} = T_{x,z} \\ T_{\overline{w,z}} = T_z \text{ então } T_{w,z} = T_w \quad \text{logo } T_{x,\overline{w,z}} = T_{x,z} \text{ e } T_{x,w,z} = T_{x,w} \end{aligned}$$

Consequentemente

$$T_{x,\overline{w,z}} + T_{x,w,z} = T_{x,w} + T_{x,z}$$

Dessa forma...

$$v^{T_{x,\overline{w,z}}+1} + v^{T_{x,w,z}+1} = v^{T_{x,w}+1} + v^{T_{x,z}+1}$$

Tomando a esperança dos dois lados:

# Status composto

$$E(v^{T_{x,\overline{w,z}}+1}) + E(v^{T_{x,w,z}+1}) = E(v^{T_{x,w}+1}) + E(v^{T_{x,z}+1})$$

$$A_{x,\overline{w,z}} + A_{x,w,z} = A_{x,w} + A_{x,z}$$

em que  $A_{x,\overline{w,z}}$  é um seguro onde o benefício é pago assim que a primeira pessoa morrer entre  $x$  e o último sobrevivente entre  $w$  e  $z$ , e  $A_{x,w,z}$  é o seguro pago assim que ocorrer a primeira morte entre  $x$ ,  $w$  e  $z$ .

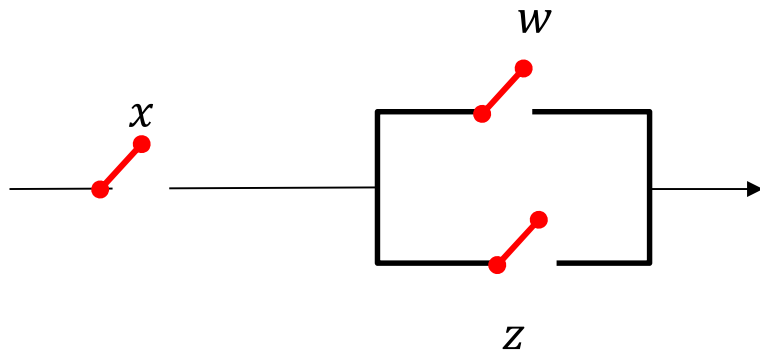
# Status composto

O mesmo raciocínio serve para

$$a_{x,\overline{w,z}} + a_{x,w,z} = a_{x,w} + a_{x,z}$$

em que  $a_{x,\overline{w,z}}$  é uma anuidade paga enquanto  $x$  estiver vivo e pelo menos um entre  $w$  e  $z$  estiver vivo, e  $a_{x,w,z}$  é o anuidade paga enquanto todos os componentes do status ( $x$ ,  $w$  e  $z$ ) estiverem vivos.

# Status composto



	$x$	$w$	$z$	$a_{x,\overline{w},\overline{z}}$	$A_{x,\overline{w},\overline{z}}$
1	1	1	1	A/Paga	A
2	0	1	1	Falha	Falha/Paga
3	1	0	1	A/Paga	A
4	1	1	0	A/Paga	A
5	1	0	0	Falha	Falha/Paga
6	0	1	0	Falha	Falha/Paga
7	0	0	1	Falha	Falha/Paga
8	0	0	0	Falha	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo

$$a_{x,\overline{w},\overline{z}} = a_{x,w} + a_{x,z} - a_{x,w,z}$$

$$A_{x,\overline{w},\overline{z}} = A_{x,w} + A_{x,z} - A_{x,w,z}$$

**Exemplo:** Qual prêmio puro único pago por um seguro de vida vitalício com benefício unitário para o status composto, formado por  $x = 30$  ,  $y = 32$  ,  $w = 12$  e  $z = 10$ . Cujo benefício será pago quando a **segunda** morte ocorrer no par contrário ao da **primeira** morte ou à terceira morte, caso as duas primeiras ocorram no mesmo par?

**Exemplo:** ...cujo benefício será pago quando a **segunda morte ocorrer no par contrário ao da primeira morte** ou à terceira morte, caso as duas primeiras ocorram no mesmo par?

## Solução

Em um primeiro momento é possível identificar dois pares do status status vida conjunta, pois com a primeira morte em um par já busca-busca-se a morte no segundo par, logo

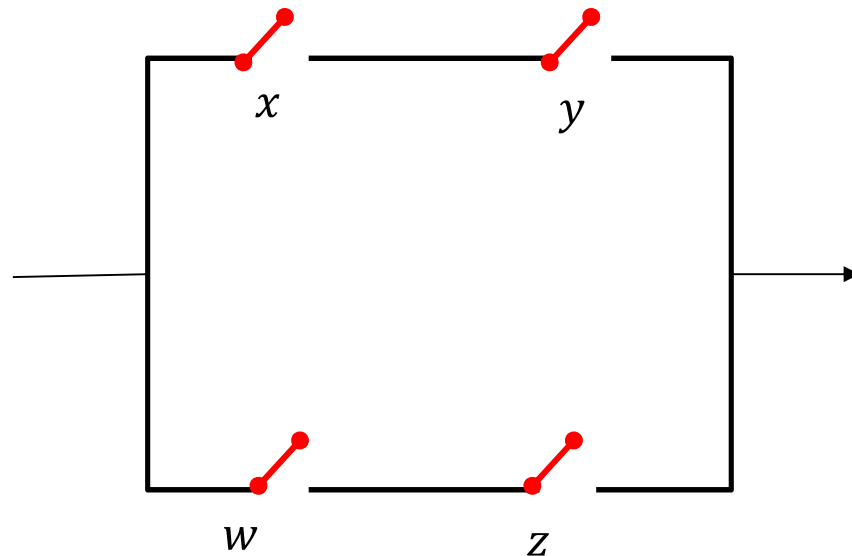
$$(x, y) \text{ e } (w, z)$$

Conclui-se que a relação desse seguro é

$$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$$

...cujo benefício será pago quando a  
segunda morte ocorrer no par contrário  
ao da primeira morte ou à terceira morte,  
caso as duas primeiras ocorram no  
mesmo par?

$$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$$



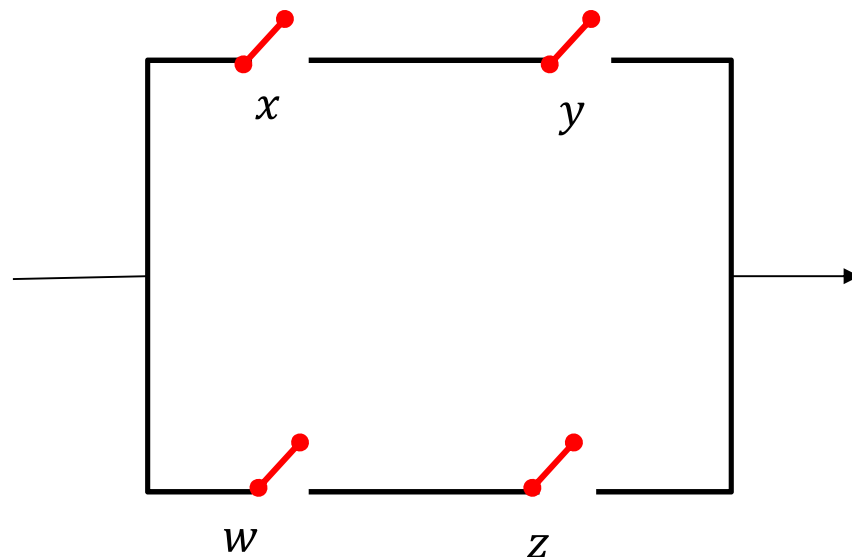
	$x$	$y$	$w$	$z$	$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					

1 indica vivo, 0 indica morto



...cujo benefício será pago quando a  
**segunda morte ocorrer no par contrário**  
**ao da primeira morte** ou à terceira morte,  
 caso as duas primeiras ocorram no  
 mesmo par?

$$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$$



	$x$	$y$	$w$	$z$	$A_{\overline{(x,y),(w,z)}}$
1	1	1	1	1	Ativo
2	0	1	1	1	Ativo
3	1	0	1	1	Ativo
4	1	1	0	1	Ativo
5	1	1	1	0	Ativo
6	1	1	0	0	Ativo
7	1	0	1	0	Falha/Paga
8	1	0	0	1	Falha/Paga
9	1	0	0	0	Falha/Paga
10	0	1	1	0	Falha/Paga
11	0	1	0	1	Falha/Paga
12	0	1	0	0	Falha/Paga
13	0	0	1	1	Ativo
14	0	0	1	0	Falha/Paga
15	0	0	0	1	Falha/Paga
16	0	0	0	0	Falha/Paga

1 indica vivo, 0 indica morto

**Exemplo:** Qual prêmio puro único pago por um seguro de vida vitalício com benefício unitário para o status composto, formado por  $x = 30$  ,  $y = 32$  ,  $w = 12$  e  $z = 10$ . Cujo benefício será pago quando a segunda morte ocorrer no par contrário ao da primeira morte, ou à terceira morte, caso as duas primeiras ocorram no mesmo par?

$$A_{\overline{(30,32),(12,10)}} = A_{30,32} + A_{12,10} - A_{30,32,12,10}.$$

# Status composto

Considere um seguro de vida com benefício pago assim que vier a óbito o **primeiro** entres os segurados  $x$  e  $y$ , desde que o **último** entre  $w$  e  $z$  já tiver falecido, ou o último entre  $w$  e  $z$  vir a óbito desde que o primeiro entre  $x$  e  $y$  já tenha falecido. Ou seja:

# Status composto

Considere um seguro de vida com benefício pago assim que vier a óbito o **primeiro** entres os segurados  $x$  e  $y$ , desde que o **último** entre  $w$  e  $z$  já tiver falecido, ou o último entre  $w$  e  $z$  vir a óbito desde que o primeiro entre  $x$  e  $y$  já tenha falecido. Ou seja:

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$

em que  ${}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = P(T_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = t)$

# Status composto

$$A_{\overline{(x,y), \overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y), \overline{w,z}}}$$

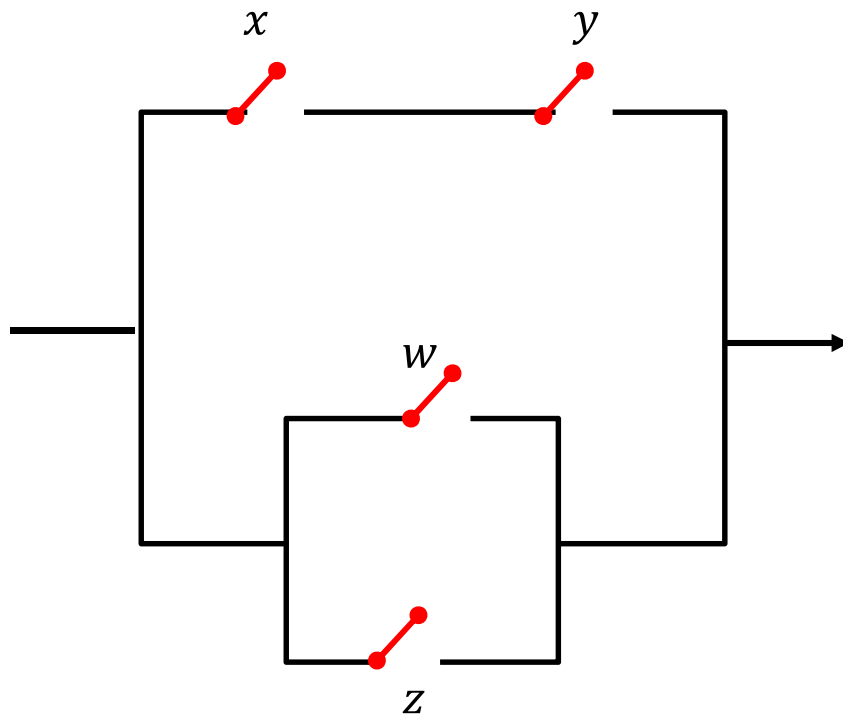
$A_{\overline{1:2}}$  O status falha quando o último grupo “falhar” (seja o 1 ou o 2)

$\overline{1} = x, y$  O status falha quando ocorrer a primeira morte entre  $x$  e  $y$

$\overline{2} = \overline{w, z}$  O status falha quando ocorrer a última morte entre  $w$  e  $z$

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$

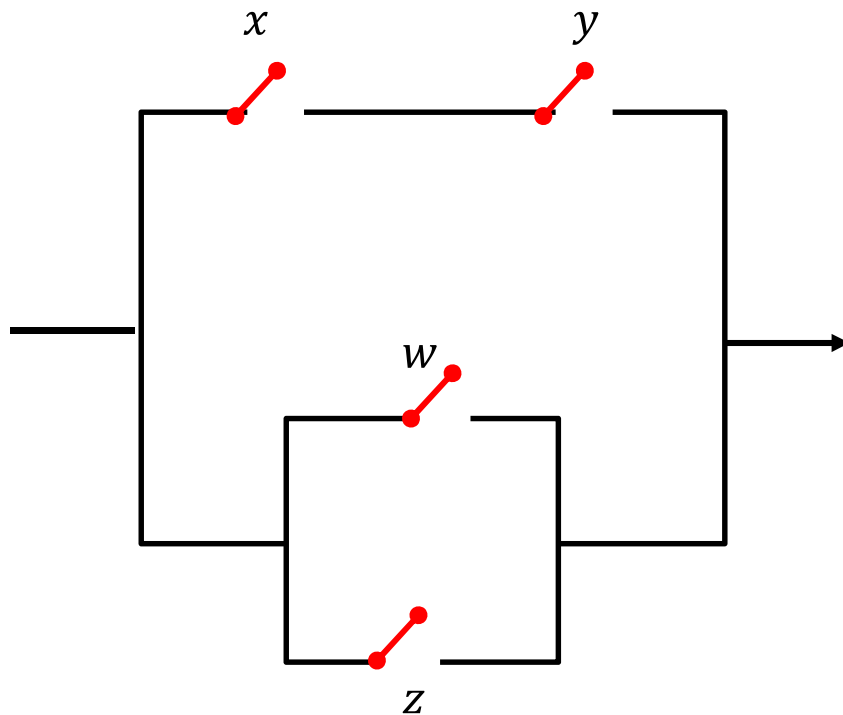
$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o pagamento do seguro

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>w</i>	<i>z</i>
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

$$A_{\overline{(x,y),w,z}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),w,z}}$$



1 indica vivo, 0 indica morto, (A) indica status ativo e a falha indica o pagamento do seguro

	$x$	$y$	$w$	$z$	$A_{\overline{(x,y),w,z}}$
1	1	1	1	1	A
2	0	1	1	1	A
3	1	0	1	1	A
4	1	1	0	1	A
5	1	1	1	0	A
6	1	1	0	0	A
7	1	0	1	0	A
8	1	0	0	1	A
9	1	0	0	0	Falha/Paga
10	0	1	1	0	A
11	0	1	0	1	A
12	0	1	0	0	Falha/Paga
13	0	0	1	1	A
14	0	0	1	0	A
15	0	0	0	1	A
16	0	0	0	0	Falha/Paga



$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}$$

em que  ${}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = P(T_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = t)$ .

Lembrando de matemática atuarial 1:

$${}_t|q_x = P(T_x = t) = P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x = {}_t p_x q_{x+t}$$

Assim  ${}_t|q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = P(T_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = t) = ({}_t p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} - {}_{t+1} p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})$  então:

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} - {}_{t+1} p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})$$

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} - {}_{t+1} p_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})$$

$$A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} [(1 - {}_t q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}}) - (1 - {}_{t+1} q_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}})]$$

$$\begin{aligned} & A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \{ [1 - (1 - {}_t p_{x,y})(1 - {}_t p_{\overline{w,z}})] - [1 - (1 - {}_{t+1} p_{x,y})(1 - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})] \}, \end{aligned}$$

$$= [1 - (1 - {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_t p_{x,y} + {}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}})] - [1 - (1 - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} + {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$= [({}_t p_{\overline{w,z}} + {}_t p_{x,y} - {}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}})] - [({}_{t+1} p_{\overline{w,z}} + {}_{t+1} p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$A_{(x,y),\overline{w,z}}^{\overline{\infty}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \{ [1 - (1 - {}_t p_{x,y})(1 - {}_t p_{\overline{w,z}})] - [1 - (1 - {}_{t+1} p_{x,y})(1 - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})] \},$$

...

$$= [({}_t p_{\overline{w,z}} + {}_t p_{x,y} - {}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}})] - [({}_{t+1} p_{\overline{w,z}} + {}_{t+1} p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$= [({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - ({}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$A_{(x,y),\overline{w,z}}^{\overline{\infty}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} [({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - ({}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})]$$

$$\begin{aligned}
& A_{(x,y),\overline{w,z}}^{\overline{\infty}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} {}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{x,y} {}_{t+1} p_{\overline{w,z}})
\end{aligned}$$

$$= \left[ {}_t p_x {}_t p_y ({}_t p_w + {}_t p_z - {}_t p_w {}_t p_z) - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y ({}_{t+1} p_w + {}_{t+1} p_z - {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z) \right]$$

$$\begin{aligned}
& A_{(x,y),\overline{w,z}}^{\overline{\infty}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \left[ ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w) + ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_z) \right. \\
&\quad \left. - ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w) \\
&- \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_z) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_x {}_t p_y {}_t p_w {}_t p_z - {}_{t+1} p_x {}_{t+1} p_y {}_{t+1} p_w {}_{t+1} p_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w} - {}_{t+1} p_{x,y,w}) \\
&- \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,z} - {}_{t+1} p_{x,y,z}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w,z} - {}_{t+1} p_{x,y,w,z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{\overline{w,z}} - {}_{t+1} p_{\overline{w,z}}) + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y} - {}_{t+1} p_{x,y}) \\
&\quad - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w} - {}_{t+1} p_{x,y,w}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,z} - {}_{t+1} p_{x,y,z}) \\
&\quad + \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_t p_{x,y,w,z} - {}_{t+1} p_{x,y,w,z})
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
& A_{\overline{(x,y),\overline{w,z}}} \\
&= A_w + A_z - A_{w,z} + A_{x,y} - A_{x,y,w} - A_{x,y,z} + A_{x,y,w,z}
\end{aligned}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

