Matemática atuarial

AULA 25- Prêmios Carregados

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).

- Para incluirmos as despesas da seguradora no prêmio puro deve-se inicialmente dividir as despesas no que diz respeito à incidência.

- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
  - Comissão de corretagem,
  - Despesas com médicos examinadores,
  - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

Prêmios Carregados

- Em contrapartida, algumas despesas incidem enquanto o segurado estiver ligação com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
  - salários de funcionários,
  - despesas com informática,
  - correspondência,
  - aluguel,
  - impostos, etc.

- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurabilidade para diminuir o risco de insolvência da seguradora a partir da Teoria do Risco de Ruína.

Prêmios Carregados

- Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário.

A obrigação da segurado é, além de pagar as indenizações, pagar também as despesas com administrativas para seu funcionamento (durante o período de vigência do contrato).

b) Prêmio "Zillmerado" (Zilmer,1863).

Este caso, o segurado irá pagar um prêmio durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e, em seguida, pagará um prêmio relativo ao risco.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

Π^{γ} : O prêmio único de inventário

Π : Corresponde ao prêmio puro único de um dado produto atuarial

V_{γ}:O valor atuarial correspondente ao carregamento de gestão

Prêmio de Inventário.

- Como exemplo considere um seguro de vida vitalício feito por x em que a seguradora tem um gasto anual a gestão dessa apólice igual a γ, então:

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \gamma\, \ddot{a}_{\overline{T+1|}} \;, T \geq 0$$

$$E\left(Z_{T_x}\right) = \boldsymbol{\Pi^{\gamma} = A_x + \gamma\, \ddot{a}_x}$$

γ: Carregamento de inventário

Prêmio de Inventário.

- Assim, para

$$L = Y - Z_{T_x}$$

$$E\left(P\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = E\left(v^{T+1} + \gamma\ \ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right)$$

$$P = \frac{A_x + \gamma\ \ddot{a}_{\mathrm{x}}}{\ddot{a}_{\mathrm{x}}} = P^{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = A_x + \gamma$$

➢ Exemplo 9

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $R\$\ 1{,}00$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i\ =\ 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\ 0,005}$** relativos a gastos administrativos.

➢ Exemplo 9

Solução :

$$\Pi^{\gamma} = \mathrm{A}_{40} + \gamma \ddot{a}_{40}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{40}} = \frac{\frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{N_{40}} + 0{,}005$$

- Exemplo 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de temporário por 30 anos que paga $R\$\,1{,}00$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos.

Exemplo 10

$$\Pi^{\gamma} = \mathrm{A}_{40^1:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{\mathrm{M}_{40} - \mathrm{M}_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40} - \mathrm{N}_{70}}{D_{40}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{40:\overline{30}|}} = \frac{\frac{\mathrm{M}_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40} - N_{70}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40} - N_{70}}{D_{40}}} = \frac{\mathrm{M}_{40} - M_{70}}{N_{40} - N_{70}} + 0{,}005$$

➢ Exemplo 11

Uma pessoa de 20 anos decide contratar uma aposentadoria vitalícia que pagará $R\$1{,}00$ ao ano até que este segurado faleça. Ele se aposentará caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado enquanto estiver ativo.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 a taxa de juros de 3% ao ano e considere **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0{,}005}$** relativos a gastos administrativos (gastos que ocorrem desde da assinatura do contrato)., qual será o valor do prêmio a ser pago pelo segurado?

➢ Exemplo 11

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1|}} & se\ 0 < t < 40 \\ P\ddot{a}_{\overline{40|}} & se\ t \geq 40. \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ T > 40 \\ \gamma\ \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 < T \leq 40. \end{cases}$$

$$\Pi^{\gamma} = {}_{\mathbf{40|}}\boldsymbol{\ddot{a}_{20}} + \gamma \ddot{a}_{20}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{N_{60}}{D_{20}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{20}}{D_{20}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{20:\overline{40|}}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{20}}{D_{20}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{20} - N_{60}}{D_{20}}}$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi + V_{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Este prêmio tem esse nome graças as ideias de August Zillmer (1831-1893)
  - Incialmente descreveu um processo para que a seguradora mantenha uma reserva de capital inicial superior ao pagamento dos primeiros prêmios.
- ...o prêmio resultante ao acréscimo de um carregamento de aquisição...
- O prêmio único de Zilmerado é representado por:

$$\boldsymbol{\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}}$$

Prêmio de Inventário.

- Assim, para

$$L = Y - Z_{T_x}$$

$$E\left(P\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = E\left(v^{T+1} + \gamma\ \ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right)$$

$$P = \frac{A_x + \gamma\ \ddot{a}_{\mathrm{x}}}{\ddot{a}_{\mathrm{x}}} = P^{\gamma}$$

$$P^{\gamma} = A_x + \gamma$$

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- No caso de um seguro de vida vitalício (com benefício unitário pago ao final do ano de morte) feito por x, o valor presente relativo as despesas é

$$Z_{T_x} = v^{T+1} + \alpha, \qquad T \geq 0$$

- α Carregamento de aquisição

$$E\left(Z_{T_x}\right) = \mathbf{\Pi^{\alpha} = A_x + \alpha}$$

- O compromisso do segurado é

$$Y = P^{\alpha} Y_1 + P\, Y_2$$

$$Y_1 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & 0 \leq T < s \\ \ddot{a}_{\overline{s}|}, & T \geq s \end{cases} \qquad Y_2 = \begin{cases} {}_{s|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-s}|}; & T \geq s \\ 0\,; & c.c. \end{cases}$$

P^{α} é o prêmio considerando as despesas do período s

P é o prêmio anual nivelado (P_x)

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Assim, para

$$E(Y) = E(Z_{Tx})$$

$$E(P^{\alpha}Y_1 + P\,Y_2) = E(v^{T+1} + \alpha)$$

$$P^{\alpha}\ddot{a}_{x:\overline{s}|} + P_{x\ s|}\ddot{a}_x = A_x + \alpha$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_{x\ s|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P_x\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x = \frac{A_x - P_x\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x$$

Como $A_x - P_x\ddot{a}_x = 0$

$$\boldsymbol{P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P_x}$$

➢ Exemplo 12

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia de $\boldsymbol{R\$\,0{,}005}$** relativos a gastos administrativos, durante 10 anos.

➢ Exemplo 12

Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + P_{22}$$

$$P^{\alpha} = \frac{\mathbf{0,005}}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + \frac{\mathrm{M}_{22}}{N_{22}}$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

k pagamentos sendo

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é aquele que considera todas as cargas ao prêmio puro, no nosso caso o carga de aquisição e a carga de gestão,

$$\Pi^{c} = \Pi + \mathrm{V}_{\gamma} + V_{\alpha}$$

- Π: Prêmio puro periódico de uma dada modalidade

➢ Exemplo 13

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida misto por um período de 10 anos que paga $1\ u.m.$ ao final do ano de morte caso o segurado morra no período de 10 anos, ou receba o mesmo valor caso, sobreviva a esse período. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos, mais gastos adicionais de encardos de $R\$\ 0{,}002$ durante 2 anos.

Exemplo 13

$$P^c = P_{22:\overline{10}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}}$$

$$P^c = \frac{\dfrac{M_{22} - M_{32} + D_{32}}{D_{22}}}{\dfrac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\dfrac{N_{22} - N_{24}}{D_{22}}}$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades}* \end{cases}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} + P$$

k pagamentos sendo

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^{c} = \Pi + \mathrm{V}_{\gamma} + V_{\alpha}$$