Cálculo de prêmios
Aula 14

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Cálculo de prêmios

- Um prêmio de seguro é a importância paga por alguém em troca da transferência do risco a que ele está exposto para uma empresa especializada na gestão de risco....

- Para essa empresa, o valor do prêmio, ou do conjunto de sua carteira, deverá cobrir todos os custos com sinistros.

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação:

- **Julgamento ou subjetivo**

É um processo subjetivo, onde a tarifação é definida pelo underwriter através de comparação com riscos similares.

- **Prêmio Puro**

Baseado em uma modelagem probabilística....

- **Método de Rateio**

Dividir diretamente as perdas esperadas ou observadas com sinistros entre os números de expostos aos riscos

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação:

- **PRÊMIO PURO**

  Valor esperado das indenizações

  - **Prêmio puro de risco**

    Valor esperado mais das indenizações acrescidos de um carregamento de segurança

  - **Prêmio carregado com margem de segurança**

    Carregamentos adicionais associados a lucro, e despesas

Princípio de cálculo de prêmio

- O prêmio de uma seguradora é a função que associa a variável aleatória relacionada ao gasto da seguradora com o sinistro (S) de uma determinada apólice com um número real Π_S, tal que:

$$\Pi_S = g(S)$$

  - Π_S é o que o segurador recebe (Fixo).

  - S está relacionado o quanto é pago ao segurado (indenização),

  - O ganho da seguradora é dado por $(\Pi_S - S)$ (Variável aleatória).

*a regra $g(S)$ que atribui um valor numérico a Π_S é o chamado princípio de cálculo de prêmio.

EXEMPLO 1

Determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio Π_S para um risco S é dado por

$$\Pi_S = v^{-1}(E[v(S)])$$

Em que v é uma função tal que $v'(x) > 0$ e $v''(x) \geq 0$ para $x > 0$.

Calcule Π_S quando $v(x) = x^2$ e $v^{-1}(x) = \sqrt{x}$, dado que $S \sim Gamma(2,2)$.

SOLUÇÃO:

$$\Pi_S = \sqrt{E(S^2)} = \sqrt{var(S) + E(S)^2}$$

$S \sim Gamma(\alpha, \beta)$. → $E(S) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $var(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$, então:

$$\Pi_S = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = 1{,}225$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Por vezes as possíveis indenizações a serem pagas são o resultado do somatório de n indenizações individuais.
  - Modelo de risco individual.
  - Após o cálculo do prémio global, o mesmo é distribuído pelas apólices individuais.
  - Não necessariamente o prêmio é dividido em partes iguais.

- No caso do modelo de risco coletivo é sensato pensar no prêmio global como a soma de prêmios idênticos advindos das apólices que compõem a carteira.
  - ...A unidade de tempo considerada é de 1 ano..

Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio do prêmio de risco (prêmio líquido, prêmio puro).**

$$\Pi_S = E(S)$$

O princípio mais simples, baseamento unicamente no valor esperado da variável aleatória das possíveis indenizações.

Desconsidera : gastos administrativos e lucro da seguradora...

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado (princípio do valor esperado)**

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

Melhoria em relação ao prêmio de risco, onde θ representa um carregamento de segurança calculado em função do valor esperado de S.

EXEMPLO 2

Considere uma apólice de seguro que no caso de ocorrência de sinistro, os valores gastos com indenização são modelados por distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}2$. A seguradora determina que irá cobrar um prêmio baseado no quanto se espera gastar com indenizações, porém esse valor não deve exceder $4{,}5$. Calcule o valor esperado sujeito a esse limite técnico.

Solução:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 4{,}5 \\ 4{,}5, & X \geq 4{,}5 \end{cases}$$

...

SOLUÇÃO:

$$Y = \begin{cases} X\,, & X < 4{,}5 \\ 4{,}5\,, & X \geq 4{,}5 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = \int_0^{4{,}5} x f_X(x)dx + 4{,}5\, S_X(4{,}5)$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = \int_0^{4{,}5} x\; 0{,}2\, e^{-0{,}2\,x} dx + 4{,}5 \int_{4{,}5}^{\infty} 0{,}2\, e^{-0{,}2\,x} dx$$

$u = x,$ e $dv = e^{-0{,}2x}dx\,,$ ➔ $du = dx$ e $v = -\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}$

$$0{,}2\int_0^{4{,}5} xe^{-0{,}2x}dx = 0{,}2\left(-x\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}\Bigg|_{x=0}^{x=4{,}5} + \int_0^{4{,}5}\frac{e^{-0{,}2x}}{0{,}2}dx\right)$$

$$= -xe^{-0{,}2x}\Big|_{x=0}^{x=4{,}5} + \left(-\frac{e^{-x0{,}2}}{0{,}2}\Bigg|_{x=0}^{x=4{,}5}\right) = 1{,}13759$$

$$E(Y) = E(X;4{,}5) = 1{,}13759 + 4{,}5\,(e^{-0{,}2\times 4{,}5}) = 2{,}967152$$

EXEMPLO 3

Considere a função de probabilidade:

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Considere que o limite de indenização para essa carteira seja de $R\$4000{,}00$, o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado pode será?

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Seja Y, tal que:

$$Y = \begin{cases} S_{col}, & S_{col} < 4000 \\ 4000, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s\, p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000\, p(s) = R\$1956{,}8$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \qquad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta \qquad \beta > 0$$

- Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha \qquad\qquad P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = \alpha.$$

EXEMPLO 4

Considere a função de probabilidade :

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio de modo que a probabilidade de que o gasto total com sinistros não o exceda, seja de 95%. Utilizando aproximação de S_{col} pela distribuição normal.

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Solução: princípio do percentil

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \le \Pi_S) = 0,95$$

$$P(S_{col} \le \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \le \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688\,(1,645) = R\$5431,91$$

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$F_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0{,}36 & 0 \le s < 1000 \\ 0{,}384 & 1000 \le s < 2000 \\ 0{,}4564 & 2000 \le s < 3000 \\ 0{,}8428 & 3000 \le s < 4000 \\ 0{,}8592 & 4000 \le s < 5000 \\ 0{,}8976 & 5000 \le s < 6000 \\ 1 & s \ge 6000 \end{cases}$$

Solução:

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \le \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P(S_{col} \le \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P\left(Z \le \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964{,}688\ (1{,}645) = \boldsymbol{R\$5431{,}91}$$

Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio da utilidade Zero ou nula.**

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu_{s.o.}(W - S)]$$

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu_{s.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

EXEMPLO 5

Seja um **segurado** com uma função de utilidade linear:

$\mu(x) = 0{,}00005x - 1$, em que $S \sim Exp(0{,}001)$.

Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a utilidade de seu patrimônio. Considere a riqueza inicial do segurado igual a W.

SOLUÇÃO

Seja $a = 0,00005, b = -1$ e W, assim:

$$\mu(\mathrm{W} - G) = E[\mu(W - S)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aS + b]$$

$$G = E(S)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0,001} = R\$\, 1000,00$$

O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

EXEMPLO 6

Seja uma seguradora cuja utilidade é modelada pela função de utilidade exponencial, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$. Determine qual o prêmio Π_S utilizando o princípio da utilidade zero.

Seja, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$ e $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$-\alpha e^{-\alpha W} = E\left[-\alpha e^{-\alpha(W+\Pi_S-S)}\right]$$

$$e^{-\alpha W} = E\left(e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} e^{+\alpha S}\right)$$

$$e^{-\alpha W} = e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} E(e^{\alpha S})$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha \Pi_S}} = E(e^{\alpha S})$$

- Logo

$$ln\, e^{\alpha \Pi_S} = ln\, E(e^{\alpha S})$$

$$\alpha \Pi_S = lnE(e^{\alpha S})$$

$$\Pi_S = \frac{ln(M_S(\alpha))}{\alpha}$$

Conhecido por alguns autores como princípio exponencial.

EXEMPLO 7

Uma seguradora atribuí utilidade ao seu patrimônio através da função $\mu(s) = -\alpha e^{-\alpha s}$, com $\alpha > 0$. De acordo com o princípio da utilidade nula, o prêmio mínimo Π_S, tal que $S \sim N(n\mu, n\sigma^2)$, é dado por?

$$\Pi_S = \frac{ln(M_S(\alpha))}{\alpha} \quad \text{e} \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\Pi_s = \frac{ln\left(e^{n\mu\alpha + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha^2}\right)}{\alpha} = \frac{n\mu\alpha + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha^2}{\alpha}$$

$$\Pi_s = n\mu + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha$$

EXEMPLO 8

Uma seguradora atribuí utilidade ao seu patrimônio através da função $\mu(s) = -0{,}9e^{-0{,}9s}$. De acordo com o princípio da utilidade nula, o prêmio mínimo Π_s que é pedido para um risco S, tal que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$,é dado por?

Considere $X_i \sim Exp(1)$ e $N \sim Po(1)$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t} \text{ e } M_N(t) = e^{(e^t-1)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t)))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\left(\frac{1}{1-t}-1\right)}$$

Assim

$$\Pi_S = \frac{ln(M_S(\alpha))}{\alpha} = \frac{\frac{1}{1-\alpha} - 1}{\alpha} = \frac{1 - 1 + \alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\Pi_S = \frac{1}{1-\alpha}$$

Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio do prêmio de risco.**

$$\Pi_S = E(S)$$

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado**

$$\Pi_S = E(S)(1+\theta)$$

- **Princípio da variância**

$$\Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- **Princípio do Desvio padrão**

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- **Princípio da utilidade Zero ou nula.**

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu_{s.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu_{s.\boldsymbol{o}.}(W - S)]$$

- **Princípio do percentil**

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$