Matemática atuarial

Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Juros e inflação

- Inflação
  - Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.
    - FIPE
    - FGV
    - DIEESE
  - É a elevação generalizada dos preços de uma economia.
    - Excesso de gastos
    - Aumento de salários mais rápido do que da produtividade
    - Aumento dos lucros
    - Aumento nos preços das matérias primas
    - ...

Juros e inflação

- Taxa real de juros (t_r)
  - Essa taxa elimina o efeito da inflação
  - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva (i) a taxa de inflação no período (j) e a taxa real (t_r) é dada por:

$$(1 + i) = (1 + t_r)(1 + j)$$

EXEMPLO 1: Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de **15%**. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de **36%** ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?

EXEMPLO 1: Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$\mathrm{i} = \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42{,}58\% \text{ ao ano.}$$

$$(1 + 0{,}4258) = (1 + t_r)(1 + 0{,}15)$$

$$t_r \approx 23{,}98\% \text{ ao ano.}$$

O ganho real do banco terá sido de 23,98% ao ano.

Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1+i)^n$$

O capital P também é chamado de valor presente, $\mathrm{F}_0, (VP)$ e o montante M de valor futuro, F (VF), assim:

$$F = F_0(i+1)^n$$

Logo:

$$F_0 = \frac{1}{(1+i)^n} F$$

$FCC(i, n) = (1+i)^n$: Fator de capitalização (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

$\boldsymbol{FAC(i, n) = v^n = \frac{1}{(1+i)^n}}$: Fator de atualização do capital, **ou fator de desconto** (O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

Juros Compostos- Depósitos em série

Série é a generalização do conceito de soma para uma **sequência** de **infinitos** termos.

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Juros Compostos - Depósitos em série

Se a é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a + ar + ar^2 + \ldots$$

É chamada, **série geométrica de razão r.**

A sequência de elementos de uma série geométrica é chamada de progressão geométrica.

Juros Composto - Depósitos em série

➢A soma de n termos de um progressão geométrica é dada por S_n, tal que

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{\boldsymbol{a(1-r^n)}}{\boldsymbol{1-r}}$$

$para\ r \neq 1$

Demonstração:

$$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão r:

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a(1-r^n)}}{\boldsymbol{(1-r)}}$$

EXEMPLO 2: Usando o conceito série geométrica, mostre que 0,999999999999 ... = 1.

Resp.:

EXEMPLO 2: Usando o conceito série geométrica, mostre que 0,999999999999 ... = 1.

Resp.:

Nota que $0{,}9999999999999 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^i$, em que $a = \frac{9}{10}$ e $r = \frac{1}{10}$.

Como $\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a(1-r^n)}}{\boldsymbol{(1-r)}}$, temos que para $n \to \infty$ e $0 < r < 1$, é igual a

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Logo

$$\boldsymbol{S} = \frac{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}} = \frac{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}} = \mathbf{1}$$

Juros Compostos- Depósitos em série

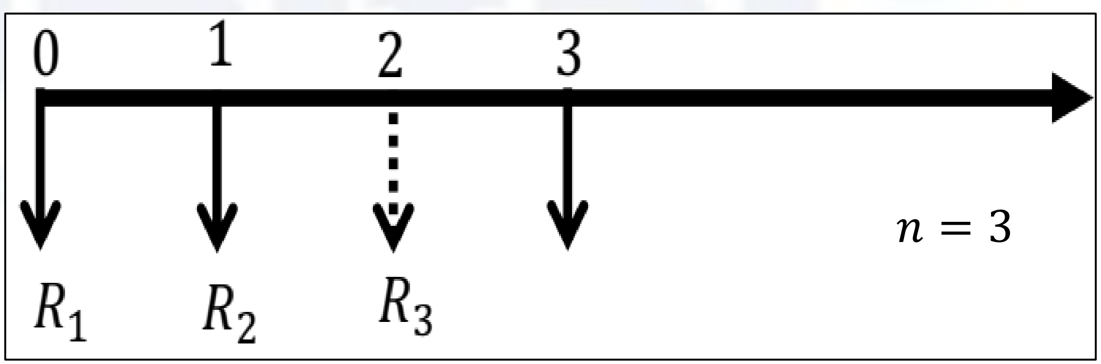
- Depósitos em série correspondem a um conjunto de n depósitos de valores (R_j), distribuídos ao longo do tempo.

  - Depósitos constantes e distintos.

Juros Compostos - Depósitos em série

O movimento de dinheiro devido aos depósitos em série constitui o chamado fluxo de caixa.

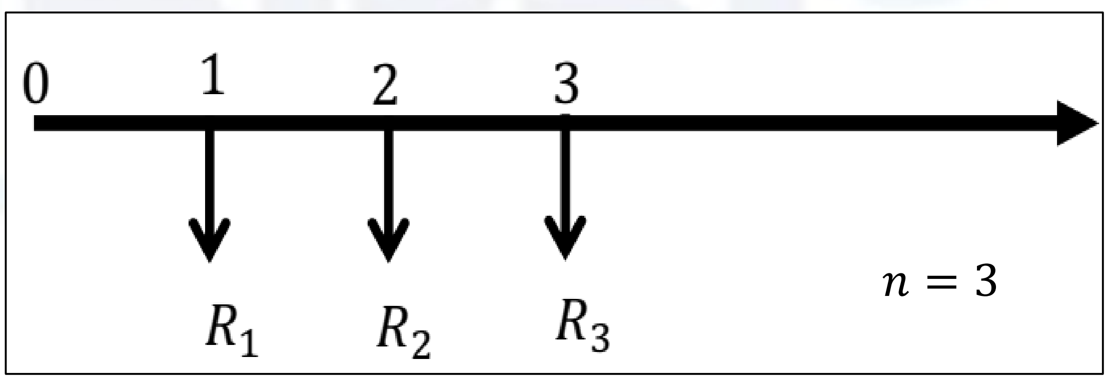
- Fluxo Antecipado: Depósitos no início dos períodos, ou seja, iniciam-se na data zero.
  - Ao fazer n depósitos, o primeiro depósito começa na data 0, e o último é feito na data $n-1$



Juros Compostos - Depósitos em série

O conjunto de depósitos ao longo dos n períodos, constitui-se num fluxo de caixa.

- Fluxo Postecipado: Depósitos no final dos períodos, ou seja, iniciam-se na data um.
  - Ao fazer n depósitos, o primeiro depósito começa na data 1, e o último é feito na data n.



EXEMPLO 3: Qual é o montante **após $\boldsymbol{n}$** depósitos mensais iguais a R, feitos em uma conta poupança que remunera a uma taxa de juros mensal igual a i? **Considere o fluxo antecipado.**

Juros Compostos - Depósitos em série

Data0	R					
Data1		R				
Data2			R			
Data3				R		
…					…	
Data(n-1)	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$	$R(1+i)^{n-3}$	$R(1+i)^{n-4}$		R
	$R(1+i)^{n}$	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$	$R(1+i)^{n-3}$		$R(1+i)$

$$S = F_0 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} F_j$$

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i) = \sum_{j=1}^{n} R(1+i)^j$$

$$S = \sum_{j=1}^{n} R(1+i)^j = (1+i)\sum_{j=1}^{n} R(1+i)^{j-1}$$

$\sum_{j=1}^{n} R(1+i)^{j-1}$ corresponde a soma de n elementos de uma progressão geométrica, o termo inicia (a) é igual a R e a razão (r) é igual a $(1+i)$. Assim:

$$S = \frac{R[1-(1+i)^n]}{[1-(1+i)]}(1+i) = -\frac{R[1-(1+i)^n](1+i)}{i}$$

Logo:

$$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de depósitos variáveis tem-se que (fluxo antecipado *).

  - Fluxo antecipado porém o modelo considera depósito no mês de resgate, dai é um fluxo genérico na verdade.

- Após o primeiro mês o primeiro depósito (F_0) montara á:

$$F_1 = R_0(1+i) + R_1$$

- Após o segundo mês temos:

$$F_2 = F_1(1+i) + R_2$$

Logo,

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3$$
$$F_4 = F_3(1+i) + R_4$$
$$\dots$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Note também que:

$$F_1 = R_0(1+i) + \mathrm{R}_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + \mathrm{R}_2 = [R_0(1+i) + \mathrm{R}_1](1+i) + R_2$$
$$F_2 = R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$
$$F_3 = R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + \mathrm{R}_4 = [R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = R_0(1+i)^4 + (1+i)^3R_1 + (1+i)^2R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

- No tempo n, lembrando o resgate é feito após o último depósito, assim R_n não é depositado.

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- Fluxo Antecipado

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1 + i)^{n-j} \mathrm{R}_j$$

- Fluxo Postecipado

$$S = \sum_{j=1}^{n} (1 + i)^{n-j} R_j$$

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Depósito de valor fixo	$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$	$S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$
Depósito de valor variável	$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} \mathrm{R}_j$	$S = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} R_j$

EXEMPLO 4: Faz-se um depósito mensal de $ 100,00 em uma conta de poupança que paga juros de 0,6% ao mês. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo Antecipado e também Postecipado.

Fluxo Antecipado:

$$S = \frac{100(1+0{,}006)[(1+0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = \$303{,}6144$$

ou

$$S = \sum_{j=0}^{2}(1+0{,}006)^{3-j}100 = 100(1{,}006)^3 + (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100 = \$303{,}6144$$

Fluxo Postecipado:

$$S = \frac{100[(1+0{,}006)^3 - 1]}{0{,}006} = \$301{,}8036$$

ou

$$S = \sum_{j=1}^{3}(1+0{,}006)^{3-j}100 = (1{,}006)^2 100 + (1{,}006)100 + 1\,00 = \$301{,}8036$$

Imagina agora que ao invés do interesse no montante ao fim de n depósitos, queremos saber o valor presente (VP) de todos esses depósitos.

Data 0	R	$R\left(\frac{1}{1+i}\right)$	$R\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$	$R\left(\frac{1}{1+i}\right)^3$	...	$R\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}$
Data1		R				
Data2			R			
Data3				R		
...					...	
Data(n-1)						R

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} R\left(\frac{1}{1+i}\right)^j = \frac{R(1-v^n)}{1-v}$$

Em que $v = \frac{1}{1+i}$

➢ O valor presente de uma série de pagamentos representa por exemplo um valor de financiamento a uma taxa i que será pago em n prestações

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$VP = \frac{R(1-v^n)}{1-v}$	$VP = \frac{Rv(1-v^n)}{1-v}$
Pagamento Variável	$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j$	$VP = \sum_{j=1}^{n} v^j R_j$

EXEMPLO 5: Uma empresa conseguiu um financiamento de $15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga no ato da liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

EXEMPLO 5: Uma empresa conseguiu um financiamento de **$15000,00** a ser liberado em **4** prestações, sendo a primeira <u>paga no ato da liberação dos recursos</u>, a uma taxa de **2%** ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{R(1-v^n)}{1-v} \to R = \frac{VP(1-v)}{1-v^n}$$

Como $v = \frac{1}{1+0,02}$ então

$$R = \frac{15000(1-v)}{1-v^4} = \$3862,11$$

- Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j = R + v\,R + v^2\,R + v^3 R$$

$$R = \frac{VP}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3\right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,0404} + \frac{1}{1,0612}} = \$3862,11$$

EXEMPLO 6: Uma empresa conseguiu um financiamento de $15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga **1 ano após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

EXEMPLO 6: Uma empresa conseguiu um financiamento de $15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 1 ano após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{Rv[1 - v^n]}{1 - v} \rightarrow R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \$\mathbf{3939,356}$$

- Pagamento 30 dias após a liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + i}\right)^j R_j = v\,R + v^2 R + v^3 R + v^4 R$$

$$R = \frac{15000}{\left[\left(\frac{1}{1,02}\right) + \left(\frac{1}{1,02}\right)^2 + \left(\frac{1}{1,02}\right)^3 + \left(\frac{1}{1,02}\right)^4\right]} = \$\mathbf{3939,35}$$

EXEMPLO: Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira **paga 1 mês após a liberação dos recursos**, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

$$R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \$\mathbf{3939,356}$$

Mês	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
				15000
1	$\mathbf{3939,356}$	$15000(0{,}02) = \mathbf{300}$	$3939{,}356 - 300 = \mathbf{3639,356}$	$15000 - 3639{,}356 = \mathbf{11360,644}$
2	$\mathbf{3939,356}$	$11360{,}644(0{,}02) = \mathbf{227,213}$	$3939{,}356 - 227{,}213 = \mathbf{3712,14312}$	$\mathbf{7648,5009}$
3	$\mathbf{3939,356}$	$7648{,}5009(0{,}02) = \mathbf{152,9700176}$	$3939{,}356 - 152{,}9700176 = \mathbf{3786,385982}$	$\mathbf{3862,1149}$
4	$\mathbf{3939,356}$	$3862{,}1149(0{,}02) = \mathbf{77,24229795}$	$3939{,}356 - 77{,}24229795 = \mathbf{3862,113702}$	$\mathbf{0,0011}$

EXEMPLO 7: (Entregar)

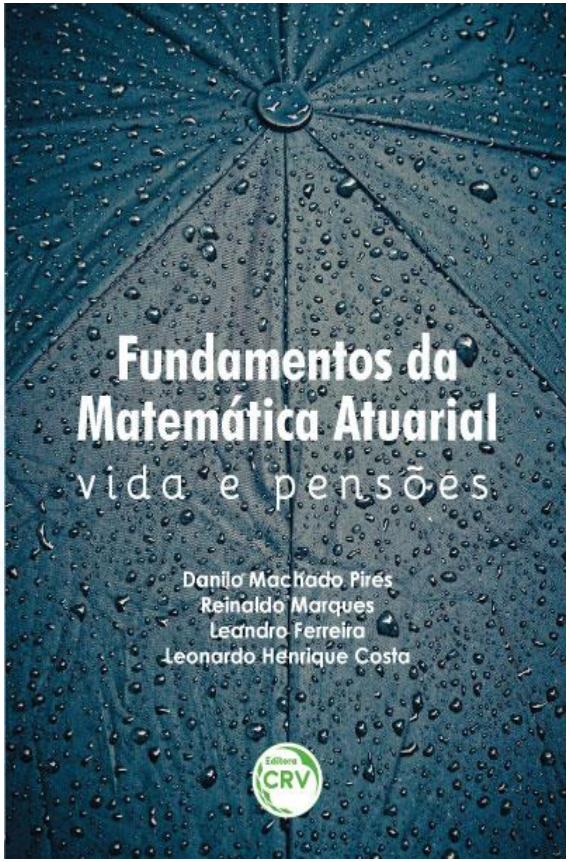
Mostre que $S = (1+i)^n VP$, nas seguintes situações:

a) $S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$ e $VP = \frac{R(1-v^n)}{1-v}$

b) $S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$ e $VP = \frac{Rv(1-v^n)}{1-v}$

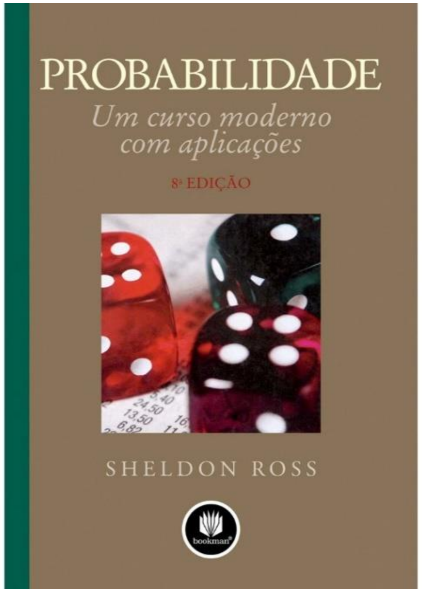
Obs.: $v = \frac{1}{1+i}$ e $R = 1$

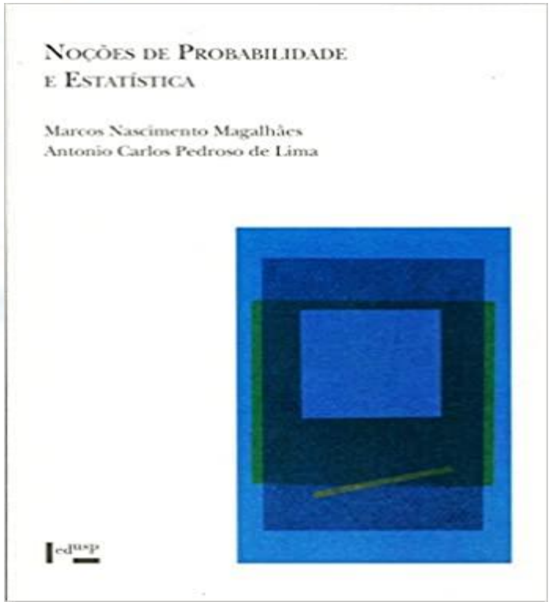
- **Portal Halley** : https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Bibliografia

JAMES,B. R.; Probabilidade: **Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004





Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística,** Editora USP: São Paulo, 2001.