Aula 16 – Anuidades Contínuas (Diferidas)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades vitalícias contínua Diferidas

$$_{m|}\bar{a}_x = \int_m^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_m^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_tp_x dt$$

$$_{m|}\bar{a}_x = v^m\ {}_mp_x \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_tp_{x+m} \mu_{x+m+t} dt$$

$$_{m|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

Relação matemática importante

Dado que:

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\bar{t}|} + e^{-\delta t} = 1$$

- Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E\left(\delta \bar{a}_{\bar{T}|} + e^{-\delta t}\right)$$

$$1 = E\left(\delta \bar{a}_{\bar{T}|}\right) + E\left(e^{-\delta t}\right)$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Anuidades Contínuas

- Exemplo 23

Considerando que a densidade do tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x possa ser modelado por:

$f_{T(x)}(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ para $t > 0$ calcule $\bar{a}_x$ e $\bar{A}_x$ e verifique a relação:

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Exemplo 23

Lembrando que

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta}$$

$$e^{-\delta} = 1 + i$$

$${}_{t}p_{x} = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

$$\mu_{x+\mathrm{t}} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

Temos que :

$$\bar{a}_{x} = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

- Exemplo 23

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha+\delta)}\, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$\bar{A}_x = \frac{\alpha}{\delta + \alpha}$$

- Exemplo 23

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha} \qquad \bar{A}_x = \frac{\alpha}{\delta+\alpha}$$

$$\left(\frac{1}{\delta + \alpha}\right)\delta + \frac{\alpha}{\delta + \alpha} = 1$$

$$\frac{\delta}{\delta + \alpha} + \frac{\alpha}{\delta + \alpha} = 1$$

$$\frac{\delta + \alpha}{\delta + \alpha} = 1$$

$$1 = 1$$

Relação matemática importante

A Relação entre anuidades e seguros também é satisfeita para o caso temporário.

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente m parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora pagará 1 u.m. caso o segurado esteja vivo.

- Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{m}|} + \left(\bar{a}_{\bar{t}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}\right), & T > m \end{cases}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{m}|} + \left(\bar{a}_{\overline{t}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}\right), & T > m \end{cases}$$

- Caso o segurado morra antes do tempo m a segurora precisa ter o valor presente necessário a m pagamentos .
- Caso o segurado morra após m anos, a seguradora devererá ter o necessário a pagar os m pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

- Em resumo, tem-se:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{t}|}, & T > m \end{cases}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_T(t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_m^\infty \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_T(t)dt$$

$$\int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t)dt = \bar{a}_{\overline{m}|} \int_0^m f_T(t)dt = \bar{a}_{\overline{m}|}\ {}_m q_x$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \bar{a}_{\overline{m}|}\ {}_m q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta}\ {}_m q_x + \int_m^\infty \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Anuidades Contínuas

- Exemplo 24

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora pagará 1 u.m. caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adiconal modelado por:

$f_{T(x)}(t) = 0{,}016e^{-0{,}016t}$ para $t > 0$

E considere também $\delta = 0{,}10$

➢ Exemplo 24

Lembrando que ${}_mq_x = F_{T(x)}(m)$, temos que:

$$ {}_mq_x = 1 - e^{-0{,}016m} $$

Assim a partir de

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta m}\right)}{\delta}\, {}_mq_x + \int_m^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt $$

Tem-se:

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1}\left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + \int_{30}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-0{,}1t}\right)}{0{,}1} 0{,}016 e^{-0{,}016t} dt $$

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1}\left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + 0{,}16 \int_{30}^{\infty} e^{-0{,}016t} - e^{-0{,}116t} dt $$

➢ Exemplo 24

...

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30|}}} = \frac{\left(1 - e^{-0,1(30)}\right)}{0,1}\left(1 - e^{-0,016(30)}\right) + 0,16\int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t}dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30|}}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left[-\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}}\right]_{30}^{\infty}$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30|}}} = (9,502)(0,3812) + 0,016\left(\frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}}\right)$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30|}}} = 9,7675$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$

$$Z_T = \ddot{a}_{\overline{T+1}|} \;;\; T \geq 0 \quad \ddot{a}_x$$

$$Z_T = a_{\overline{T}|} \;;\; T \geq 0 \quad a_x$$

$$Z_T = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} \;;\; 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} ; \quad T \geq n \end{cases} \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$Z = \begin{cases} a_{\overline{T}|} \;;\; 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n}|} \;;\; \quad T \geq n \end{cases} \quad a_{x:\overline{n}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} ; \quad T \geq m \\ 0 \;;\; \quad c.c. \end{cases} \quad {}_{m|}\ddot{a}_x$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = \begin{cases} a_{\overline{T}|} ; \quad T \geq m \\ 0 \;;\; \quad c.c. \end{cases} \quad {}_{m|}a_x$$

$$Z_T = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} ; \quad m \leq T \leq (m+n) \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} \quad c.c. \end{cases}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} a_{\overline{T}|} ; \quad m \leq T \leq (m+n) \\ a_{\overline{n}|} \quad c.c. \end{cases}$$

$${}_{m|}a_{x:\overline{n}|}$$

$$Z_T = \bar{a}_{\overline{T}|} \;;\; 0 \leq t \leq n \quad \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$Z_T = \bar{a}_{\overline{T}|} \quad T \geq 0 \quad \bar{a}_x$$

$$\boldsymbol{b_T = 1}$$

$$\boldsymbol{P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}}$$

$$\boldsymbol{f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu_{x+t}}$$

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$a_{\overline{n}|} = v \frac{(1 - v^n)}{1 - v}$$