Teoria do Risco
Aula 9

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

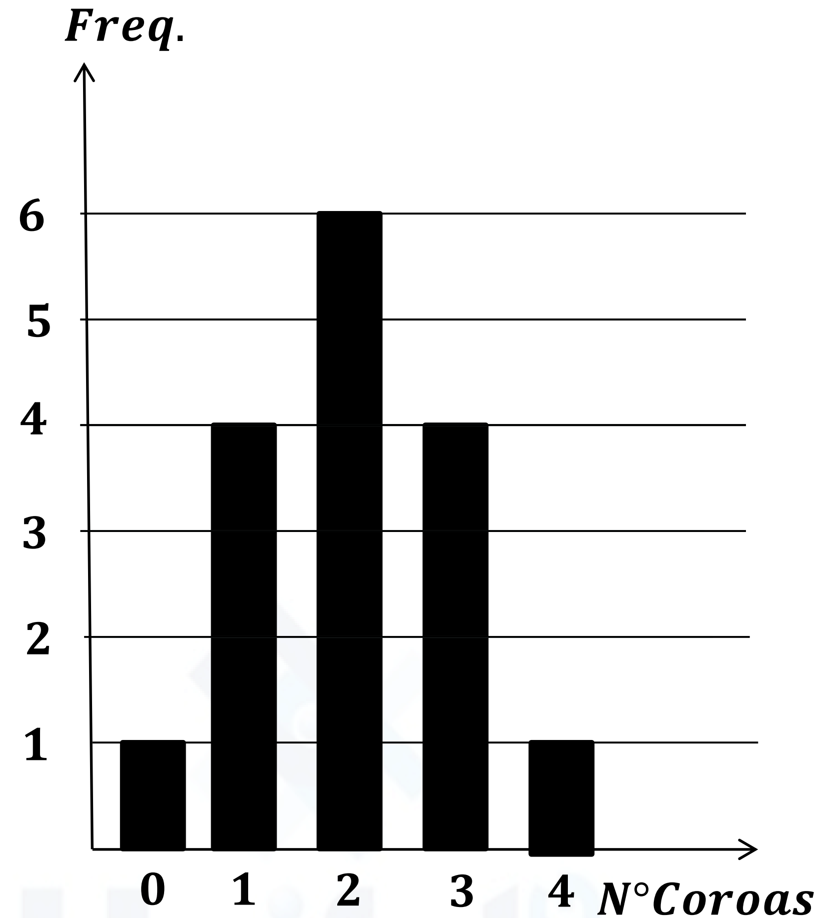
- O teorema central do limite é um poderoso teorema da estatística.

- Em teoria das probabilidades, esse teorema afirma que quando o tamanho da amostra aumenta a distribuição amostral da sua soma aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal consequentemente o teorema se estende a distribuição das médias amostrais.

Exemplo 1

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso), representaremos 1 como os casos que aconteceram coroa e 0 os casos que ocorreram cara, assim vamos avaliar todos os possíveis resultados nesse experimento e avaliar a soma de coroas que podem acontecer:

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas
Cara	Cara	Cara	Cara	0
Coroa	Cara	Cara	Cara	1
Cara	**Coroa**	Cara	Cara	1
Cara	Cara	**Coroa**	Cara	1
Cara	Cara	Cara	**Coroa**	1
Coroa	**Coroa**	Cara	Cara	2
Coroa	Cara	**Coroa**	Cara	2
Coroa	Cara	Cara	**Coroa**	2
Cara	**Coroa**	Cara	**Coroa**	2
Cara	Cara	**Coroa**	**Coroa**	2
Cara	**Coroa**	**Coroa**	Cara	2
Cara	**Coroa**	**Coroa**	**Coroa**	3
Coroa	Cara	**Coroa**	**Coroa**	3
Coroa	**Coroa**	Cara	**Coroa**	3
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	Cara	3
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	**Coroa**	4



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

- Definição:

Seja S_n uma variável aleatória correspondente a uma soma de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança μ e variância σ^2. Então, se n tende ao infinito, a variável:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$Z_n \to Z \sim N(0,1)$$

Logo

$$E(S_n) = n\mu \quad var(S_n) = \sigma^2 n$$

$$S_n \sim N(n\mu, \sigma^2 n\,)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

Então o Teorema central do limite sugere uma metodologia aproximada para a obtenção de valores para distribuição da soma de variáveis independentes, consequentemente também para a distribuição da média de variáveis aleatórias.

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

..Se aplica bem quando não se conhece a distribuição de $\mathrm{S_{ind}}$, ou sua obtenção é trabalhosa.

Condições do Teorema Central do Limite,

→ X_{i} independentes e **identicamente distribuído**s,

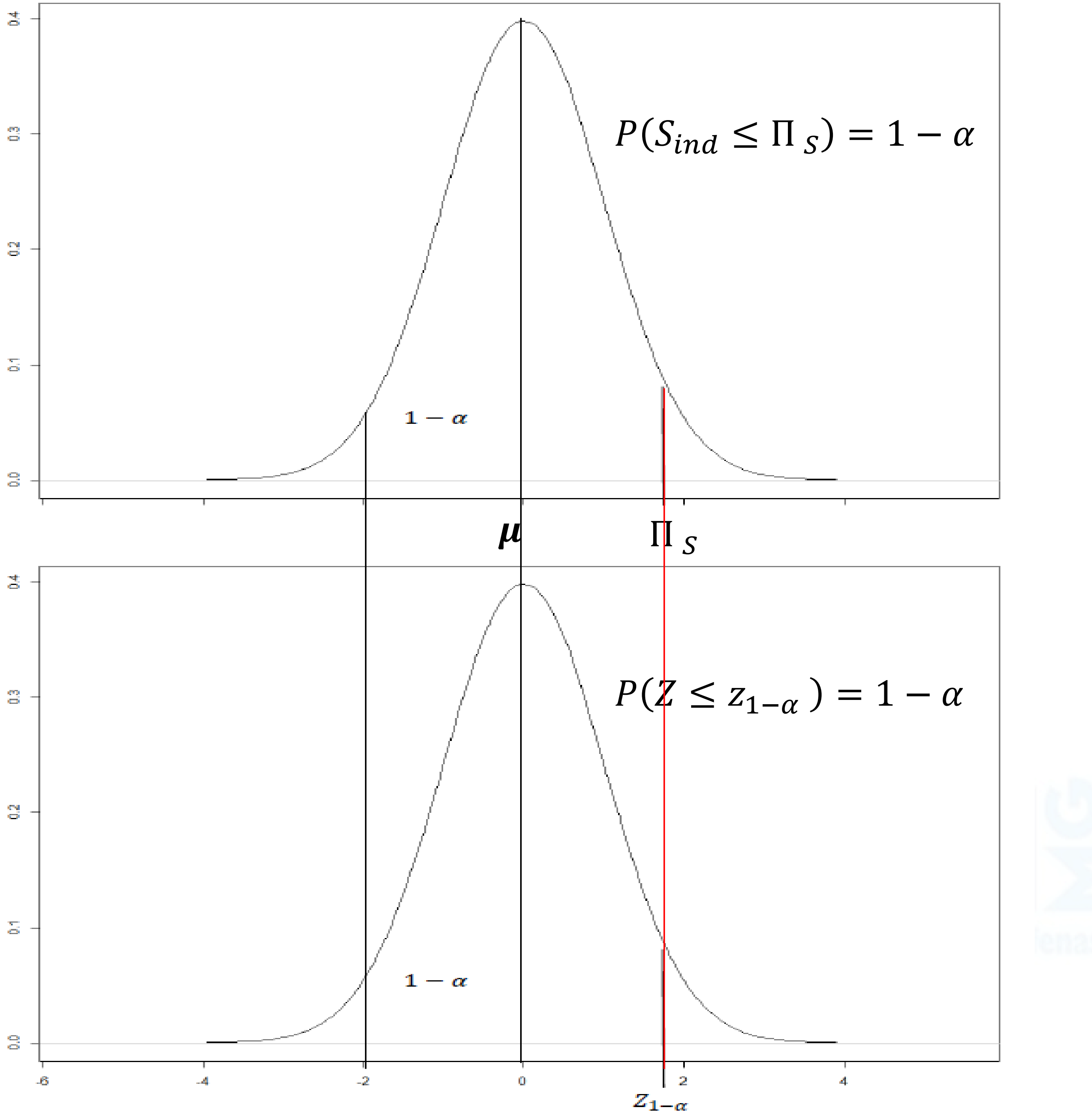
→O número de sinistros tem que ser grande e não somente o número de apólices (n).

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

- Uma interessante aplicação da aproximação de S_{ind} pela distribuição normal é sua utilização para obtenção de um prêmio (Π_S) baseado em uma probabilidade (α) das indenizações superarem esse prêmio.

$$P(S_{ind} \geq \Pi_S) = \alpha$$

*Princípio do percentil


$P(S_{ind} \leq \Pi_S) = 1 - \alpha$
$1 - \alpha$
μ
Π_S
$P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
$1 - \alpha$
$z_{1-\alpha}$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P(S_{ind} \leq \Pi_S) = 1 - \alpha$$

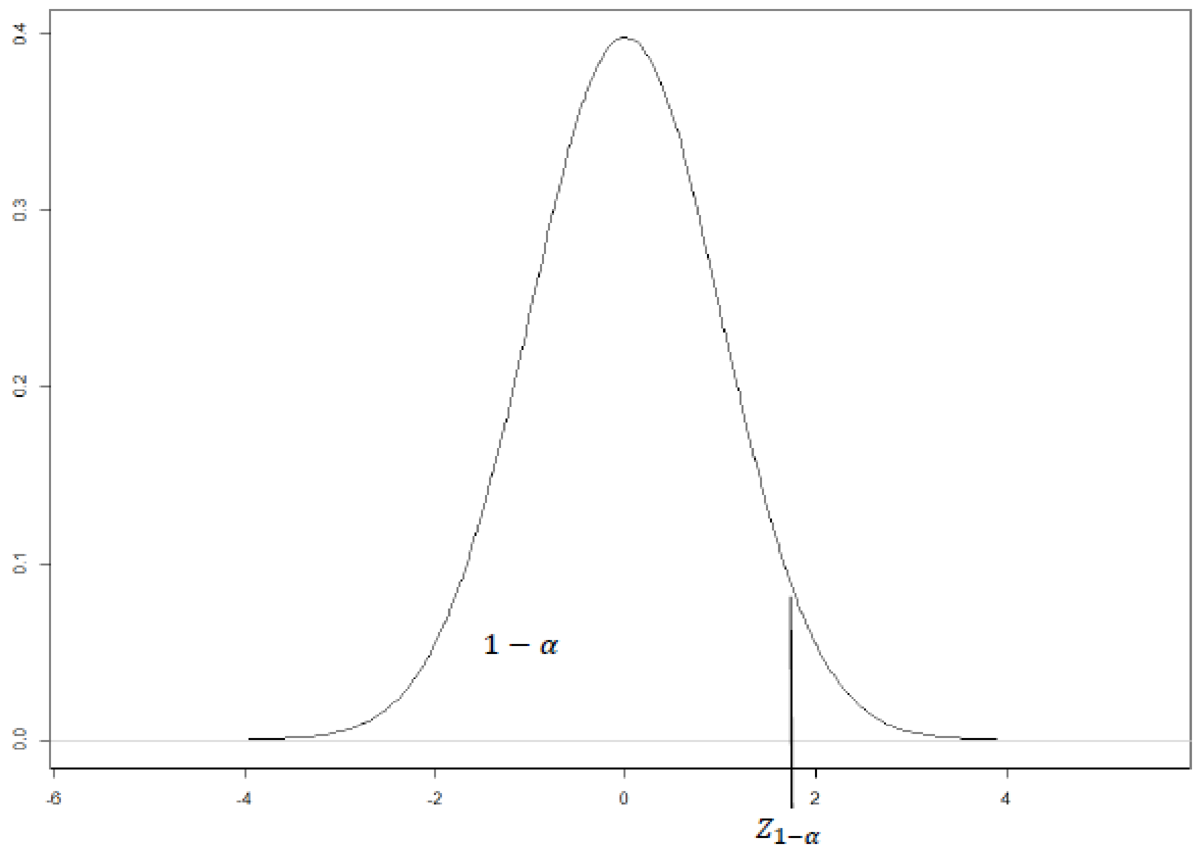
$$P\left(\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} \leq \frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$

Tem-se que $\frac{\mathrm{S_{ind}} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_X}{\sigma_X\sqrt{n}} = Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Pois $\sigma_{S_{ind}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = n\sigma_X^2$, assim $\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{n\sigma_X^2} = \sigma_X\sqrt{n}$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$



Modelos de risco Individual-Aproximação de $\boldsymbol{S_{ind}}$ pela distribuição Normal

$$\frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = z_{1-\alpha}$$

$$\Pi_S = \boldsymbol{z_{1-\alpha}\sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind})}$$

- A partir dessas condições, pode-se calcular o carregamento de segurança (θ) utilizado no principio do prêmio carregado.

$$\Pi_S = E(S_{ind})(1+\theta)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$\Pi_S = z_{1-\alpha}\sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind}) \qquad (1)$$

$$\Pi_S = E(S_{ind}) + \theta E(S_{ind}) \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}}$$

- Quanto menor a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total da carteira, maior terá que ser o carregamento de segurança.

- Quanto maior o desvio padrão do sinistro agregado em relação à média do sinistro, maior será o carregamento de segurança.

- Exemplo 2

Uma carteira de seguro de vida possui 3 faixas de importâncias seguradas, quais sejam: $\mathrm{R\$10\ 000}$, $\mathrm{R\$30\ 000}$ e $\mathrm{R\$50\ 000}$.

O número de apólices em cada faixa é de $200\,000$, $300\,000$ e $100\,000$, respectivamente. Em cada uma dessas 3 faixas a probabilidade de morte em 1 ano é de $0{,}01$, $0{,}005$ e $0{,}02$ respectivamente.

Calcular o carregamento de segurança e o prêmio puro total anual de modo que a probabilidade de que o sinistro agregado não o exceda seja de 5%, utilizando a aproximação Normal para S_{ind}.

$$S_{ind} = [X_1 + X_2 + \cdots + X_{200000}] + [Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{300000}] + [Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100000}]$$

X_i	$P(X_i)$	I_i	$P(I_i)$	B_i	$P(B_i)$
$R\$0$	0,99	0	0,99		
$R\$10000$	0,01	1	0,01	$R\$10000$	1
Y_i	$P(Y_i)$				
$R\$0$	0,995	0	0,995		
$R\$30000$	0,005	1	0,005	$R\$30000$	1
Z_i	$P(Z_i)$				
$R\$0$	0,98	0	0,98		
$R\$50000$	0,02	1	0,02	$R\$50000$	1

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

Lembrando que no caso de seguro de vida, invalidez a indenização B_i é fixa (conhecida antecipadamente a apólice), nesse caso:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} B_i q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} B_i^2 q_i(1 - q_i).$$

$$\mathrm{E}(S_{ind}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{200000} 0{,}01\mathrm{R\$}10000{,}00 + \sum_{\mathrm{i=1}}^{300000} 0{,}005\mathrm{R\$}30000{,}00 + \sum_{\mathrm{i=1}}^{100000} 0{,}02\mathrm{R\$}50000{,}00$$

$$\mathrm{E}(S_{ind}) = R\$165000\,000{,}00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0{,}01 \times 0{,}99 \times (R\$10000{,}00)^2 + \sum_{i=1}^{300000} 0{,}005 \times 0{,}995 \times (R\$30000{,}00)^2 + \sum_{i=1}^{100000} 0{,}02 \times 0{,}98 \times (R\$50000{,}00)^2 = R\$^2 6{,}44125 \times 10^{12}$$

$$\Pi_S = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} Z_{0{,}95} = R\$169\,174\,575{,}64$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})} = \frac{2559297}{165000\,000} 1{,}645 = 2{,}55\%$$

- Exemplo 2

A probabilidade de ocorrer um sinistro devido a um vendaval em um seguro residencial é de $0{,}01$. Seja uma carteira com 200 apólices e com o valor de cada sinistro ocorrendo de acordo com uma distribuição Exponencial $(\alpha = 0{,}0001)$.

Calcular o carregamento de segurança de modo que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total, não exceda a 5% utilizando a aproximação Normal para S_{ind}.

- $E(B_i) = \frac{1}{0,0001} = 10000$ $\quad\quad var(B_i) = (10000)^2$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} 0,01 \times R\$10000,00 = 200 \times 100 = R\$20000,00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200}(10000)^2(0,01) + (10000)^2(0,01)(0,99)$$

$$var(S_{ind}) = R\$^2 398000000$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

$$\theta = \frac{R\$19949,94(1,645)}{R\$20000} = 1,64$$

- Exemplo 3

Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

$IS(\$)$	10000	15000	20000	30000	100000
N° de Apólices	55	70	50	20	5

A probabilidade de ocorrer um desmoronamento em uma residência em 1 ano é de $0{,}01$. Os valores dos sinistros seguem uma distribuição Uniforme $(0, \text{IS})$. Calcule o prêmio puro total anual que a seguradora deve cobrar de modo que a probabilidade do sinistro agregado anual superar o prêmio puro total anual não exceda a 5%, considerando uma aproximação Normal para o sinistro agregado;

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

$IS(\$)$	10000	15000	20000	30000	100000
N° de Apólices	55	70	50	20	5

$$S_{ind} = (X_1 + \cdots + X_{55}) + (Y_1 + \cdots + Y_{70}) + (Z_1 + \cdots + Z_{50}) + (U_1 + \cdots + U_{20}) + (V_1 + \cdots + V_5).$$

Logo

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)E(I_i) \ ,$$

$$E(S_{ind}) = 0{,}01\left(\sum_{i=1}^{55} \frac{10000}{2} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000}{2} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000}{2} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000}{2} + \sum_{i=1}^{5} \frac{100000}{2}\right)$$

$$= \text{R\$}18500{,}00$$

$$S_{ind} = (X_1 + \cdots + X_{55}) + (Y_1 + \cdots + Y_{70}) + (Z_1 + \cdots + Z_{50}) + (U_1 + \cdots + U_{20}) + (V_1 + \cdots + V_5).$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 var(I_i)\,,$$

$$var(S_{ind}) = 0{,}01\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{55} \frac{10000^2}{12} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{70} \frac{15000^2}{12} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{50} \frac{20000^2}{12} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{20} \frac{30000^2}{12} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{5} \frac{100000^2}{12}\right)$$
$$+0{,}0099\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{55}\left(\frac{10000}{2}\right)^2 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{70}\left(\frac{15000}{2}\right)^2 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{50}\left(\frac{20000}{2}\right)^2 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{20}\left(\frac{30000}{2}\right)^2 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{5}\left(\frac{100000}{2}\right)^2\right]$$

$$var(S_{ind}) = \mathbf{361435417}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{S_{ind}}} = \sqrt{\mathbf{361435417}} = \mathbf{19011,45}$$

$$S_{ind} = (X_1 + \cdots + X_{55}) + (Y_1 + \cdots + Y_{70}) + (Z_1 + \cdots + Z_{50}) + (U_1 + \cdots + U_{20}) + (V_1 + \cdots + V_5).$$

$$E(S_{ind}) = \text{R\$}18500{,}00$$

$$var(S_{ind}) = 361435417$$

$$\sigma_{S_{ind}} = 19011{,}45$$

Finalmente o prêmio puro é obtido.

$$\Pi = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} z_{0,95}$$

$$\Pi = R\$18500{,}00 + R\$19011{,}45(1{,}645) = R\$49773{,}84$$