

# Matemática Atuarial II

## Aula 9

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br  
Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L.H. Status vida conjunta: Anuidades. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: [https://atuaria.github.io/portahalley/notas\\_MatAtuarial2.html](https://atuaria.github.io/portahalley/notas_MatAtuarial2.html). Acessado em: 28 jun. 2025.

# Status vida conjunta (Anuidades)

No caso do status de vida conjunta, as anuidades são calculadas considerando que os benefícios serão pagos caso todos os elementos do status estejam vivos

Podem cessar ao fim do período de cobertura no caso da modalidade temporária

# Status vida conjunta (Anuidades)

Anuidades imediatas vitalícias antecipadas para o status de vida conjunta

$$\ddot{a}_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x,y} q_{x+t,y+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x,y}$$

Anuidades imediatas temporárias antecipadas para o status de vida conjunta

$$\ddot{a}_{u:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_{x,y} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{x,y}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .

**EXEMPLO 1:** Sejam duas vidas que têm como probabilidades de mortes modeladas pela seguinte tabela

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade ( pagamento antecipado).

**EXEMPLO 1:** Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade ( pagamento antecipado).

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

$x$	$y$	T. vida adicional	$Z_t$	$S_{T_{30,28}}(t) = {}_t p_{30} {}_t p_{28}$
30	28	$t > 0$	1	$T_{30} > 0$ e $T_{28} > 0$
31	29	$t > 1$	$v$	$T_{30} > 1$ e $T_{28} > 1$
32	30	$t > 2$	$v^2$	$T_{30} > 2$ e $T_{28} > 2$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = P(T_{30,28} > 0) + v^1 P(T_{30,28} > 1) + v^2 P(T_{30,28} > 2)$$

em que  $u = \{30,28\}$ .

**EXEMPLO 1:** Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade ( pagamento antecipado).

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = P(T_{30,28} > 0) + v^1 P(T_{30,28} > 1) + v^2 P(T_{30,28} > 2)$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = 1 \cdot {}_0p_{30:28} + v \cdot {}_1p_{30:28} + v^2 \cdot {}_2p_{30:28}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^2 v^t \cdot {}_tp_{30:28} \approx 2,88$$

em que  $u = \{30,28\}$ .

# Status vida conjunta (Anuidades).

Anuidades imediatas vitalícias postecipadas para o status de vida conjunta

$$a_{x,y} = \sum_{t=1}^{\infty} v \left( \frac{1 - v^t}{1 - v} \right) {}_t p_{x,y} q_{x+t,y+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{x,y}$$

Anuidades imediatas temporárias postecipadas para o status de vida conjunta

$$a_{u:\bar{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t E_{x,y} = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_{x,y}$$

em que  $u = \{x, y\}$ .



**EXEMPLO 2:** Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade ( pagamento **postecipado**).

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

**EXEMPLO 2:** Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade ( pagamento **postecipado**).

$$a_{u:\overline{3}|} = vP(T_{30,28} > 1) + v^2P(T_{30,28} > 2) + v^3P(T_{30,28} > 3)$$

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,001
31	0,00107

$$a_{u:\overline{3}|} = vp_{30:28} + v^2 {}_2p_{30:28} + v^3 {}_3p_{30:28}$$

$$a_{u:\overline{3}|} = \sum_{t=1}^3 v^t {}_t p_{30:28} \approx 2,713$$

em que  $u = \{30,28\}$ .

# Status vida conjunta (Anuidades)

- $n$  vidas

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} q_{x_1+t, x_2+t, \dots, x_n+t}$$

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

# Status vida conjunta (Anuidades)

- $n$  vidas

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} q_{x_1+t, x_2+t, \dots, x_n+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

$${}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} = P(T_{x_1} > t \text{ e } T_{x_2} > t \text{ e } \dots \text{ e } T_{x_n} > t)$$

$${}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n} = {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \cdots {}_t p_{x_n}$$

$${}_t q_{x_1, x_2, \dots, x_n} = 1 - {}_t p_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

# Status vida conjunta (Anuidades)

■ Para  $n=3$  vidas

$${}_t p_{x_1, x_2, x_3} = {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} {}_t p_{x_3}$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = 1 - {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} {}_t p_{x_3}$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = 1 - (1 - {}_t q_{x_1})(1 - {}_t q_{x_2})(1 - {}_t q_{x_3})$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = 1 - (1 - {}_t q_{x_1} - {}_t q_{x_2} - {}_t q_{x_3} + {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} + {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_3} + {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3} - {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3})$$

$${}_t q_{x_1, x_2, x_3} = {}_t q_{x_1} + {}_t q_{x_2} + {}_t q_{x_3} - {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} - {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_3} - {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3} + {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} {}_t q_{x_3}$$

# Status vida conjunta (Anuidades)

$$\ddot{a}_{x_1, x_2, x_3} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, x_3} q_{x_1+t, x_2+t, x_3+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, x_3}$$

$$a_{x_1, x_2, x_3} = \sum_{t=1}^{\infty} v \frac{1 - v^t}{1 - v} {}_t p_{x_1, x_2, x_3} q_{x_1+t, x_2+t, x_3+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{x_1, x_2, x_3}$$

$$A_{x_1, x_2, x_3} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x_1, x_2, x_3} q_{x_1+t, x_2+t, x_3+t}$$

**EXEMPLO 3:** Considerando uma taxa de juros de 3% ao ano e a tabua AT-49 calcule o que se pede: (entregar)

a)  $\ddot{a}_{41,39,40:\overline{4}|}$

b)  $a_{41,39,40:\overline{3}|}$

c)  $A_{41,39,40:\overline{3}|}$

# Status vida conjunta (Produtos diferidos)

- Plano vitalício diferido por  $m$  anos, com pagamento antecipado

$${}_m|\ddot{a}_{x,y} = (v^m {}_mp_{x,y})\ddot{a}_{x+m,y+m}$$

- Plano temporário por  $n$  anos, diferido por  $m$  anos, com pagamento antecipado

$${}_m|\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = (v^m {}_mp_{x,y})\ddot{a}_{w:\overline{n}|}$$

- 
- Plano vitalício diferido por  $m$  anos, com pagamento postecipado

$${}_m|a_{x,y} = (v^m {}_mp_{x,y})a_{x+m,y+m}$$

- Plano temporário por  $n$  anos, diferido por  $m$  anos, com pagamento postecipado

$${}_m|a_{u:\overline{n}|} = (v^m {}_mp_{x,y})a_{w:\overline{n}|}$$

\*Considerando um benefício unitário,  $T_{x,y} = \min\{T_x, T_y\}$ ,  $u = \{x, y\}$  e  $w = \{x + m, y + m\}$



# Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

Não se faz distinção entre fluxo de caixa *antecipado* ou *postecipado*.

Dado o tempo de vida adicional de um status vida conjunta,  $T_u$ , em que  $u = \{x, y\}$ , o plano vitalício e o plano temporário com cobertura de  $n$  anos, tem o prêmios calculados respectivamente por:

$$\bar{a}_u = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_u dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T_u}(t) dt$$

$$\bar{a}_{u:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_u dt$$

# Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

$$\bar{a}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T_{x,y}}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_{x,y} \mu(x+t, y+t) dt$$

$${}_t p_{x,y} = {}_t p_x {}_t p_y$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

# Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} f_{T_{x,y,z}}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_{x,y,z} \mu(x+t, y+t, z+t) dt$$

$${}_t p_{x,y,z} = {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z$$

$$\mu(x+t, y+t, z+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \mu(z+t)$$

**EXEMPLO 3:** Considere um status vida conjunta composto por  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tal que  $T_x \sim \text{Exp}(0,022)$ ,  $T_y \sim \text{Exp}(0,025)$  e  $T_z \sim \text{Exp}(0,05)$ . Calcule  $\bar{a}_{x,y,z}$  usando uma taxa de juros instantânea de 3% ao ano.

**EXEMPLO 3:** Considere um status vida conjunta composto por  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tal que  $T_x \sim \text{Exp}(0,022)$ ,  $T_y \sim \text{Exp}(0,025)$  e  $T_z \sim \text{Exp}(0,05)$ . Calcule  $\bar{a}_{x,y,z}$  usando uma taxa de juros instantânea de 3% ao ano.

$${}_t p_{x,y,z} = {}_t p_x {}_t p_y {}_t p_z = e^{-t(0,022+0,025+0,05)} = e^{-t0,097}$$

$$\mu(x+t, y+t, z+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \mu(z+t) = 0,022 + 0,025 + 0,05 = 0,097$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^{\infty} e^{-0,03t} e^{-t0,097} dt$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_{x,y,z} \mu(x+t, y+t, z+t) dt = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-0,03t})}{0,03} e^{-t0,097} 0,097 dt$$

# Status vida conjunta (Produtos diferidos)

- Anuidades diferidas vitalícias

$${}_m|\bar{a}_{x,y} = (v^m {}_m p_{x,y}) \bar{a}_{x+k,y+k}$$

- Anuidades diferidas temporárias

$${}_m|\bar{a}_{u:\bar{n}}| = (v^m {}_m p_{x,y}) \bar{a}_{w:\bar{n}}|$$

em que  $u = \{x, y\}$ ,  $w = \{x + m, y + m\}$ ,  $m$  igual ao período de diferimento e  $n$  igual ao período de cobertura.

# Status vida conjunta (Relações importantes)

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x,y} (q_{x+t,y+t})$$

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x,y} (1 - p_{x+t,y+t}) = \sum_{t=0}^{\infty} [v^{t+1} {}_t p_{x,y} - v^{t+1} p_{x+t,y+t}]$$

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1} p_{x,y}$$

$$A_{x,y} = v \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1} p_{x,y}$$

...

# Status vida conjunta (Relações importantes)

$$\dots$$
$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_{t+1}p_{x,y}) = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=1}^{\infty} v^t ({}_tp_{x,y})$$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_{t+1}p_{x,y}) = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

Como  $a_{x,y} = \ddot{a}_{x,y} - 1$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - (\ddot{a}_{x,y} - 1)$$



# Status vida conjunta (Relações importantes)

$$A_{x,y} = v \ddot{a}_{x,y} - (\ddot{a}_{x,y} - 1)$$

$$A_{x,y} = v \ddot{a}_{x,y} - \ddot{a}_{x,y} + 1$$

$$A_{x,y} = \ddot{a}_{x,y}(v - 1) + 1$$

# Status vida conjunta (Relações importantes)

Verifique com exemplos que:

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

$$A_{x,y} = \ddot{a}_{x,y}(v - 1) + 1$$

Entregar!!!

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.

