Matemática atuarial

Seguros Aula 8

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

SEGURO DOTAL PURO

- O seguro Dotal Puro cobre o risco de sobrevida do segurado.

  - O segurado receberá um benefício caso chegue vivo após o período de cobertura do seguro.

SEGURO DOTAL PURO

- A seguradora irá pagar um benefício caso o segurado sobreviva ou não pagará nada caso ele faleça no período de cobertura.

- Os valores possíveis da variável aleatória são:

$$0 \text{ ou } bv^T$$

$$b = \begin{cases} 1 \ , t > n \\ \\ 0 \ , t \leq n \end{cases} \qquad v_t = v^t, t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} v^n \ , T > n \\ \\ 0 \ , T \leq n \end{cases}$$

SEGURO DOTAL PURO

- Esse tipo de seguro poderá ser útil em diversos casos.

  - Para pagamentos de bônus por uma empresa caso o funcionário “sobreviva” nesta empresa por um certo período.

  - Ou ainda, poderá ser utilizada para pagamento da faculdade do filho, caso este sobreviva até a idade para cursar uma faculdade...

  - ...

SEGURO DOTAL PURO

O seguro dotal puro é um produto atuarial onde ${}_{n}p_{x}$ é a probabilidade de sobrevivência do segurado no período de cobertura e $(1 - {}_{n}p_{x})$ a probabilidade de morte.

Valor	Probabilidade
$Z_T = v^n \;\; se \;\; T_x > n$	${}_{n}p_{x}$
$Z_T = 0 \quad se \;\; T_x \leq n$	$1 - {}_{n}p_{x}$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = 0(1 - {}_{n}p_{x}) + v^n \, {}_{n}p_{x}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = v^n \, {}_{n}p_{x} = {}_{n}E_{x}$$

${}_{n}E_{x} = v^n \, {}_{n}p_{x}$: **Fator de desconto atuarial** (o fator de atualização ponderado pela probabilidade do segurado de x anos sobreviver por n anos).

SEGURO DOTAL PURO

$$\boxed{A_{x:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}E_x = v^n \, {}_{n}p_x}$$

$$var(Z_T) = E(Z_T^2) - E(Z_T)^2$$

$$var(Z_T) = 0^2(1 - {}_{n}p_x) + (v^n)^2 \, {}_{n}p_x - (v^n \, {}_{n}p_x)^2$$

$$var(Z_T) = (v^n)^2 \, {}_{n}p_x - (v^n)^2({}_{n}p_x)^2$$

$$var(Z_T) = v^{2n} \, {}_{n}p_x(1 - {}_{n}p_x)$$

$$\boxed{var(Z_T) = v^{2n} \, {}_{n}p_x \, {}_{n}q_x}$$

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

EXEMPLO 1: Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga $\$250$ mil se o segurado sobreviver durante o período de **3 anos**. Se a seguradora compromete-se a remunerar o capital do segurado à uma taxa anual de 3% ao ano, qual deverá ser o prêmio puro único pago pelo segurado?

Para resolução deste exercício considere a tábua de mortalidade CSO-58.

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

$$250000A_{50:\overline{3}|}{}^1 = 250000\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 {}_3p_{50}$$

$$250000A_{50:\overline{3}|}{}^1 = 250000\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 \frac{l_{50+3}}{l_{50}}$$

$$250000A_{50:\overline{3}|}{}^1 = 250000\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 \frac{85242}{87620}$$

$$\boxed{250000A_{50:\overline{3}|}{}^1 \approx \$222576{,}2}$$

ou

$$250000A_{50:\overline{3}|}{}^1 = 250000\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 p_{50}p_{51}p_{52}$$

$$\boxed{250000\,A_{50:\overline{3}|}{}^1 = 250000\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 (1-0{,}00832)(1-0{,}00911)(1-0{,}00996) \approx \$222576{,}2}$$

Adicionalmente

$$var(Z_T) = b^2 v^{2n} \, {}_n p_x \, {}_n q_x$$

$$var(Z_T) = 250000^2 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^6 {}_3 p_{50} (1 - {}_3 p_{50})$$

$$var(Z_T) = 250000^2 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^6 \frac{l_{50+3}}{l_{50}} \left(\frac{l_{50} - l_{50+3}}{l_{50}}\right)$$

$$var(Z_T) \approx 1382024215$$

EXEMPLO 2: Seja um segurado de 47 anos queria receber $100000,00 caso sobreviva nos próximos 10 anos. Considerando a taxa anual de 3%, qual será o prêmio puro único que deverá ser pago pelo segurado?

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

EXEMPLO 2: Seja um segurado de 47 anos queria receber \$100000,00 caso sobreviva nos próximos 10 anos. Considerando a taxa anual de 3%, qual será o prêmio puro único que deverá ser pago pelo segurado?

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

$$100000 A_{47:\overline{10|}^{1}} = 100000 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{10} {}_{10}p_{47}$$

$$10^5 A_{47:\overline{10|}^{1}} = 10^5 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{10} \frac{81059}{89478} \approx \$67408{,}2$$

SEGURO DOTAL PURO

- O exemplo 2 permite concluir que, se o prêmio \$67408,2 for capitalizado em 10 anos a taxa de 3% ao ano, a seguradora teria no prazo final um valor de \$90590,98. Ou seja

  - Caso o segurado sobreviva, $100000 - 90590{,}98 = \$9409{,}02$ de prejuízo com probabilidade ${}_{10}p_{47}$.

  - Caso o segurado não sobreviva $\$90590{,}98$ de lucro com probabilidade ${}_{10}q_{47}$.

SEGURO DOTAL PURO

- Suponhamos agora que a seguradora tenha efetuado 1000 contratos idênticos.
  - N variável aleatória associada ao número de contratos com prejuízo, tal que $N \sim B(1000, {}_{10}p_{47})$, então:

$$P(N = n) = \binom{1000}{n} ({}_{10}p_{47})^{n} ({}_{10}q_{47})^{10000-n}$$

$$E(N) \approx 905{,}9098$$
$$\sigma_N \approx 9{,}2324$$

SEGURO DOTAL PURO

- N: variável aleatória associada ao número de contratos com prejuízo, tal que $N \sim B(1000,\ {}_3p_{50})$, então:

$$E(N) \approx 905{,}9098 \qquad \sigma_N \approx 9{,}2324$$

- L: variável aleatória associada ao lucro da seguradora

$$L = 90590{,}98(1000 - N) - 9409{,}02N$$

- Para haver prejuízo $L < 0$, assim

$$90590{,}98(1000 - N) - 9409{,}02N < 0$$

$$N > 905{,}9098$$

SEGURO DOTAL PURO

Aproximando N pela normal padrão, temos:

$$P(N > 905{,}9098\ ) = P\left(Z > \frac{905{,}9098\ \ - 905{,}9098}{9{,}2324}\right)$$

$$P(N > 905{,}9098\ ) = P(Z > 0) \approx 0{,}5$$

A probabilidade de prejuízo é praticamente igual à probabilidade de lucro.

EXEMPLO 3: Seja um segurado de 47 anos queria receber $\$100000,00$ caso sobreviva nos próximos 10 anos. Considerando a taxa anual de 3%, qual será o prêmio que deverá ser pago pelo segurado, utilizando o princípio abaixo?

$$\Pi = E(Z) + \sigma_Z \beta \text{ considerando } \beta = 1{,}2$$

EXEMPLO 3

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

$$10^5 A_{47:\overline{10}|^1} = 10^5 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{10} {}_{10}p_{47}$$

$$10^5 A_{47:\overline{10}|^1} = 10^5 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{10} \frac{l_{47+10}}{l_{47}}$$

$$10^5 A_{47:\overline{10}|^1} = 10^5 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{10} \frac{81059}{89478} \approx \$67408{,}2$$

$$var(Z_T) = 100000^2 \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{20} \frac{l_{47+10}}{l_{47}} \left(\frac{l_{47} - l_{57}}{l_{47}}\right)$$

$$var(Z_T) \approx 471937753$$

$$\Pi = E(Z_T) + \sigma_{Z_T}\beta$$

$$\Pi = 67408{,}2 + \sqrt{471937753}\,(1{,}2) \approx 93477{,}16$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0, \qquad c.c \end{cases}$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1 \ldots. \\ 0, T = 0,1,2,\ldots,n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = Z_T \; {}_n p_x$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T \; {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n \\ 0, \qquad c.c. \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z_T \; {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T > n \\ 0, T \leq n \end{cases} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n|}^1} = Z_T \; {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

SEGURO DOTAL MISTO (DOTAL)

O benefício é pago se o segurado morrer durante o período de cobertura (pago ao final do ano de morte) ou é pago (...) caso o segurado sobreviva a este período, o que ocorrer primeiro.

b_T ; b_n → benefício;

$$v_T = \begin{cases} v^{t+1}, t = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n, t \geq n \end{cases}$$ → desconto

$$z_T = \begin{cases} b_T v^{T+1},\ T = 0,1,\ldots,n-1 \\ b_n v^n,\ T = n, n+1,\ \ldots \end{cases}$$ → função valor presente

Quando $b_T = b_n = 1$, temos:

$$A_{x:\overline{n|}} = A_{x^1:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^1}$$

EXEMPLO 4: Seja um segurado de 47 anos queria receber $\$100000{,}00$ caso sobreviva nos próximos $5\,anos$ e caso faleça deixa a mesma quantia a um beneficiário. Considerando a taxa anual de 3%, qual será o prêmio puro único que deverá ser pago pelo segurado?

$$Z_T = \begin{cases} 10^5\left(\dfrac{1}{1{,}03}\right)^{T+1} & \text{se } T = 0, 1, \dots, 4 \\ 10^5\left(\dfrac{1}{1{,}03}\right)^{5} & \text{se } T = 5, 6, 7, \dots \end{cases}$$

Temos que :

$$A_{47:\overline{5}|}{}^{1} = \left(\frac{1}{1,03}\right)^{5} {}_{5}p_{47} \approx 0,8275$$

Já para $A_{47^{1}:\overline{5}|}$ temos:

$$A_{47^{1}:\overline{5}|} = \left(\frac{1}{1,03}\right)^{1} q_{47} + \left(\frac{1}{1,03}\right)^{2} {}_{1}p_{47}q_{48} + \left(\frac{1}{1,03}\right)^{3} {}_{2}p_{47}q_{49} + \left(\frac{1}{1,03}\right)^{4} {}_{3}p_{47}q_{50} + \left(\frac{1}{1,03}\right)^{5} {}_{4}p_{47}q_{51} \approx 0,0344$$

Assim:

$$A_{47:\overline{5}|} = A_{47^{1}:\overline{5}|} + A_{47:\overline{5}|}{}^{1} \approx 0,8720099$$

$$VPA = 10^{5} A_{47:\overline{5}|} \approx \$87208,57$$

SEGURO DOTAL MISTO (DOTAL)

Quando a proporção entre o benefício pago em caso de morte e o benefício pago devido a sobrevivência são diferentes é usual a designação de modelo dotal misto generalizado, por exemplo:

$$\Pi = 3A_{x^{1}:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^{1}}$$

O prêmio Π acima diz respeito a um seguro misto que em caso de morte o benefício é o triplo do pago no dotal puro.

Dotal Puro

```
DotP<- function( i, idade, n,b)  {
     v     <- (1/(i+1))^n
     npx  <-  prod( px[(idade+1):(idade+n-1)])
     return (v*npx*b)
                              }
```

Dotal Misto

$$A_{x:\overline{n|}} = \text{AX(i,x,n,b,1)+DotP(i,x,n,b)}$$

SEGURO DOTAL MISTO (DOTAL)-Discreto

$$b_T = b_n = 1$$

$$v_T = \begin{cases} v^{T+1}, \ t = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n, \ t = n, n+1, \ \dots, \end{cases}$$ → desconto

$$z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \ T = 0,1,\dots n-1 \\ v^n, T = n, \ n+1,\dots \end{cases}$$ → valor presente atuarial(VPA)

$$Z_T = Z_1 + Z_2$$

$$z_1 = \begin{cases} v^{T+1}, \ T = 0,1,\dots,n-1 \\ 0, \quad T = n, \ n+1,\dots \end{cases} \longrightarrow A_{x^1:\overline{n|}}$$

$$z_2 = \begin{cases} 0, \ T = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n, T = n, \ n+1,\dots \end{cases} \longrightarrow A_{x:\overline{n|}^1}$$

SEGURO DOTAL MISTO (DOTAL)-Discreto

$$Z_T = Z_1 + Z_2$$

$$z_1 = \begin{cases} v^{T+1}\ ,\ T = 0,1,\dots,n-1 \\ 0\ ,T = n, n+1,\dots\ , \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} 0\ \ ,T = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n\ ,T = n, n+1,\dots, \end{cases}$$

$$var(Z_T) = var(Z_1) + var(Z_2) + 2cov(Z_1Z_2)$$

$$cov(Z_1Z_2) = E(Z_1Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -A_{x^1:\overline{n|}}A_{x:\overline{n|}^1}$$

$$var(Z_T) = \left[\sum_{t=0}^{n-1} v^{2(t+1)}\ {}_tp_x q_{x+t} - \left(\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}\right)^2\right] + v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x - 2\left(\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}\right)\left(v^n\ {}_np_x\right)$$

EXEMPLO 5: Pensemos no caso de uma pessoa de 50 anos que deseja fazer um seguro Dotal por 5 anos. Considere o benefício igual a 1, a taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte e calcule a variância do prêmio puro único:

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

$$Z_{T_{25}} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1{,}04}\right)^{T+1} & \text{se } 0 \leq T < 5 \\ \left(\dfrac{1}{1{,}04}\right)^{5} & \text{se } T \geq 5 \end{cases}$$

$$var(Z_T) = \left[\sum_{t=0}^{4} v^{2(t+1)} \; {}_t p_{50} q_{50+t} - \left(\sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \; {}_t p_{50} q_{50+t}\right)^2\right] + v^{10} \; {}_5 p_{50} \; {}_5 q_{50} - 2\left(\sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \; {}_t p_{50} q_{50+t}\right)\left(v^5 \; {}_5 p_{50}\right)$$

$$var(Z_T) = \left[\sum_{t=0}^{4} v^{2(t+1)} \ {}_tp_{50}q_{50+t} - \left(\sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \ {}_tp_{50}q_{50+t}\right)^2\right] + v^{10} \ {}_5p_{50} \ {}_5q_{50} - 2\left(\sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \ {}_tp_{50}q_{50+t}\right)(v^5 \ {}_5p_{50})$$

x	qx	lx
47	0,00636	89478
48	0,00695	88909
49	0,0076	88291
50	0,00832	87620
51	0,00911	86891
52	0,00996	86100
53	0,01089	85242
54	0,0119	84314
55	0,013	83311
56	0,01421	82228
57	0,01554	81059
58	0,017	79799
59	0,01859	78443
60	0,02034	76985

$$\sum_{t=0}^{4} v^{2(t+1)} \ {}_tp_{50}q_{50+t} = v^2q_{50} + v^4 \ p_{50}q_{51} + v^6 \ {}_2p_{50}q_{52} + v^8 \ {}_3p_{50}q_{53} + v^{10} \ {}_4p_{50}q_{54} \approx 0{,}03862681$$

$$\sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \ {}_tp_{50}q_{50+t} = vq_{50} + v^2p_{50}q_{51} + v^3 \ {}_2p_{50}q_{52} + v^4 \ {}_3p_{50}q_{53} + v^5 \ {}_4p_{50}q_{54} \approx 0{,}04352138$$

$$v^{10} \ {}_5p_{50} \ {}_5q_{50} \approx 0{,}03159438$$

$$v^5 \ {}_5p_{50} \approx 0{,}7814992$$

$$var(Z_T) = 0{,}03862681 - 0{,}04352138^2 + 0{,}03159438 - 2(0{,}04352138)(0{,}7814992) \approx \mathbf{0{,}0003032301}$$

EXEMPLO 6 **(Entregar):** Pensemos no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro Dotal por 5 anos. Considere uma taxa de juros de 3% ao ano, beneficio igual a 1 e as seguintes probabilidade de morte e calcule o prêmio puro único e a variância da função valor presente.

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

SEGURO DOTAL MISTO (DOTAL)

O benefício é pago se o segurado morrer durante um período de cobertura (pago no momento da morte) ou é pago (...) caso o segurado sobreviva a este período, o que ocorrer primeiro.

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}_{x^1:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}^1}$$

$b_T = b_n = 1 \rightarrow$ benefício; $\quad z_T = \begin{cases} b_T\ e^{-\delta T}\ ,\ T \leq n \\ b_n v^n\ \ ,T > n \end{cases}$

EXEMPLO 7: Uma pessoa de 50 anos deseja fazer um seguro dotal puro com cobertura de 5 anos que pague um benefício unitário. Considerando a taxa de juros instantânea de $\delta = 0{,}06$ ao ano e o tempo de vida adicional modelado por uma distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}028$, calcule o prêmio puro único pago por este seguro e a variância de $Z_{T_{50}}$.

O prêmio puro único pago por este seguro.

$$Z_{T_{50}} = \begin{cases} 0, & T < 5, \\ e^{-0,06\times 5}, & T \geq 5, \end{cases}$$

$$\bar{A}_{50:\bar{5}|^1} = e^{-0,06\times 5}\, S_{T_{50}}(5),$$

$$\bar{A}_{50:\bar{5}|^1} = e^{-0,06\times 5} \int_5^{\infty} 0,028 e^{-0,028t}\, dt,$$

$$\bar{A}_{50:\bar{5}|^1} = e^{-0,06\times 5} e^{-0,028\times 5}$$

$$\bar{A}_{50:\bar{5}|^1} \approx 0,644036.$$

O prêmio puro único pago por este seguro.

$$Z_{T_{50}} = \begin{cases} 0, & T < 5, \\ e^{-0,06\times 5}, & T \geq 5, \end{cases}$$

$$\bar{A}_{50:\overline{5|}^{1}} \approx 0,644036.$$

A variância referente ao dotal puro é calculada por:

$$var(Z_{T_{50}}) = e^{-0,6}({}_{5}p_{50})({}_{5}q_{50}) = e^{-0,6} S_{T_{50}}(5) F_{T_{50}}(5),$$

$$var(Z_{T_{50}}) = e^{-0,6} \int_{5}^{\infty} 0,028 e^{-0,028t}\, dt \int_{0}^{5} 0,028 e^{-0,028t}\, dt,$$

$$var(Z_{T_{50}}) = e^{-0,6}(e^{-0,028\times 5})(1 - e^{-0,028\times 5}) \approx 0,06233.$$

EXEMPLO 8: Uma pessoa de 50 anos deseja fazer um seguro dotal misto com cobertura de 5 anos que pague um benefício unitário. Considerando a taxa de juros instantânea de $\delta = 0{,}06$ ao ano e o tempo de vida adicional modelado por uma distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}028$, calcule o que se pede:

a) O prêmio puro único pago por este seguro.

b) A variância de $Z_{T_{50}}$.

a) O prêmio puro único pago por este seguro.

Sabendo que

$$Z_{T_{50}} = \begin{cases} e^{-0,06T}, & T < 5, \\ e^{-0,06\times 5}, & T \geq 5, \end{cases}$$

e

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|} = \bar{A}_{50^1:\overline{5}|} + \bar{A}_{50:\overline{5}|^1}$$

o seguro temporário $\bar{A}_{50^1:\overline{5}|}$ é dado por:

$$\bar{A}_{50^1:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-0,06t}\, 0,028e^{-0,028t} dt,$$

$$\bar{A}_{50^1:\overline{5}|} = \int_0^5 0,028e^{-t0,088}\, dt,$$

$$\bar{A}_{50^1:\overline{5}|} = \frac{0,028}{0,088}\left(-\frac{1}{e^{0,088\times 5}} + \frac{1}{e^{0,088\times 0}}\right)$$

$$\bar{A}_{50^1:\overline{5}|} \approx 0,11326.$$

O seguro dotal puro $\bar{A}_{50:\overline{5}|^1}$ é obtido da seguinte maneira:

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|^1} = e^{-0,06\times 5}\, S_{T_{50}}(5),$$

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|^1} = e^{-0,06\times 5} \int_5^\infty 0,028e^{-0,028t}\, dt,$$

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|^1} = e^{-0,06\times 5} e^{-0,028\times 5}$$

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|^1} \approx 0,644036.$$

Logo,

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|} \approx 0,11326 + 0,644036$$

$$\bar{A}_{50:\overline{5}|} \approx 0,757297.$$

b) A variância de $Z_{T_{50}}$.

$$var\left(Z_{T_{50}}\right)$$
$$= \left[\,\overline{{}^{2}A}_{50^{1}:\overline{5}|} - (0{,}11326)^2\right] + e^{-2\delta 5}\ {}_{5}p_{50}\ {}_{5}q_{50} - 2(0{,}11326)(0{,}644036),$$

É necessário calcular $\overline{{}^{2}A}_{50^{1}:\overline{5}|}$ e $e^{-2\delta 5}\,({}_{5}p_{50})({}_{5}q_{50})$. Portanto:

$$\overline{{}^{2}A}_{50^{1}:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-0{,}12t}\, 0{,}028e^{-0{,}028t} dt = \int_0^5 0{,}028e^{-t0{,}148}\, dt,$$

$$\overline{{}^{2}A}_{50^{1}:\overline{5}|} = \frac{0{,}028}{0{,}148}\left(-\frac{1}{e^{0{,}148\times 5}} + \frac{1}{e^{0{,}148\times 0}}\right) \approx 0{,}0989244.$$

A variância da parte referente ao dotal puro é calculada por:

$$e^{-0{,}6}({}_{5}p_{50})({}_{5}q_{50}) = e^{-0{,}6} S_{T_{50}}(5) F_{T_{50}}(5),$$

$$e^{-0{,}6}\int_5^\infty 0{,}028e^{-0{,}028t}\, dt \int_0^5 0{,}028e^{-0{,}028t}\, dt,$$

$$e^{-0{,}6}(e^{-0{,}028\times 5})(1 - e^{-0{,}028\times 5}) \approx 0{,}06233.$$

Finalmente,

$$var\left(Z_{T_{50}}\right) = [0{,}0989244 - (0{,}11326)^2] + 0{,}06233 - 2(0{,}11326)(0{,}644036),$$
$$var\left(Z_{T_{50}}\right) \approx 0{,}00253954.$$

Adicionalmente podemos calcular a correlação, pois

$$cov(Z_1 Z_2) = -\bar{A}_{50^1:\overline{5}|}\bar{A}_{50:\overline{5}|^1} \approx -0{,}072944.$$

Então:

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{cov(Z_1 Z_2)}{\sqrt{var(Z_1)}\sqrt{var(Z_2)}} \approx \frac{-0{,}072944}{\sqrt{0{,}0860966}\sqrt{0{,}06233}}$$
$$\approx -0{,}995752.$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,\dots,n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \; T = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n \;\; , T = n, \; n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = A_{x^1:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^1}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1 \dots . \\ 0 \, , T = 0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = Z_T \, {}_n p_x$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0 \, , T < n \end{cases} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n|}^1} = Z_T \, {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T} \;, T < n \\ e^{-\delta n} \;\; , T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}_{x^1:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}^1}$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.