Teoria do Risco
Aula 1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Introdução

- Desde as antigas civilizações o ser humano sempre se preocupou com as incertezas do futuro ...

- O homem teve a necessidade de criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e para o seu patrimônio.

Introdução

- Os comerciantes mesopotâmicos e fenícios:

- Os hebreus:

Introdução

- Por volta de 1347, na cidade de Gênova as atividades de seguros começam a se popularizar...
  - Início aos primeiros estudos de matemática atuarial e análise de riscos.
  - Sistemas de seguros Europeu declara falência no século XV,
    - Técnicas de gestão pouco elaboradas
    - Técnicas baseadas em intuição

- Desenvolvimento da Teoria de probabilidades
  - 1693: primeira tábua de mortalidade (Edmond Halley).
    - Matemática atuarial ramo vida **(cálculo atuarial).**
    - Risco individual.

- Século XX surge a teoria do risco coletivo.
  - Modelo de Crámer –Lundberg.
  - Ramo vida e ramo não vida **(Matemática atuarial de seguro de danos).**

Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...

  - Avaliar ***riscos.***
  - Avaliar sistemas de investimentos.
  - Estabelecer politicas de investimentos.

  - Estabelecer valor de ***prêmios***
    - Seguro ligados a vida (Cálculo atuarial-longo prazo)
    - Seguro ligado a danos (Teoria do risco –curto prazo)

Teoria do risco

- …reside em estabelecer um modelo de tarifação eficiente frente aos sinistros que chegam ao segurador.

  - …tem como objetivo principal estabelecer para o “bem” sob análise um prêmio justo para um dado futuro mensurável,…

Modelos de Risco

1) Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?

2) Qual o prêmio que a seguradora deve emitir para cobrir os sinistros com uma da margem de segurança?

Dois padrões a serem seguidos!!

Conceitos Estatísticos

- A teoria do risco é inerente à teoria estatística, portanto a compreensão de determinados termos e conceitos estatísticos assim como algumas propriedades, se faz necessária ou até mesmo fundamental.

Conceitos Estatísticos

- Conceitos Estatísticos
  - Variável Aleatória e função de distribuição
    - Variável aleatória Discreta
    - Importantes modelos discretos
    - Variável aleatória contínua
    - Importantes modelos de contínuos
  - Variável aleatória multidimensional
  - Esperança e Variância de variáveis aleatórias.
    - Esperança sujeito a valor limite.
  - Covariância e Correlação entre variáveis aleatórias.
  - Desigualdade de Jensen
  - Momentos ordinários e função Geradora de Momentos

- **MODELOS DE RISCO**
  - Modelo de risco individual anual
    - ...
  - Modelo de risco coletivo anual
    - ...
- **CÁLCULO DE PRÊMIOS**
  - Seguro e utilidade
  - Princípios de cálculos de prêmios
  - Propriedades desejáveis ao prêmio
  - Medida de Risco
- **Processo Estocástico para frequência de sinistros e sinistralidade**
    - ...
- **Processo de ruína**
    - ...

Variável Aleatória

- A variável aleatória pode ser entendida como uma função $X(.)$ que associa a cada evento do espaço de probabilidade um número real.

EXEMPLO 1

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso). Caracterize a variável aleatória número de coroas.

Resp.

$\mathrm{R} = \{0,1,2,3,4\}$, $R \subset \mathbb{R}$

R é a imagem de $X(.)$

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1-q)^4$	$\binom{4}{0}q^0(1-q)^4$
Coroa	Cara	Cara	Cara	1	$q^1(1-q)^3$	$\binom{4}{1}q^1(1-q)^3$
Cara	**Coroa**	Cara	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	**Coroa**	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	Cara	**Coroa**		$q^1(1-q)^3$	
Coroa	**Coroa**	Cara	Cara	2	$q^2(1-q)^2$	$\binom{4}{2}q^2(1-q)^2$
Coroa	Cara	**Coroa**	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Coroa	Cara	Cara	**Coroa**		$q^2(1-q)^2$	
Cara	**Coroa**	Cara	**Coroa**		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Cara	**Coroa**	**Coroa**		$q^2(1-q)^2$	
Cara	**Coroa**	**Coroa**	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Cara	**Coroa**	**Coroa**	**Coroa**	3	$q^3(1-q)^1$	$\binom{4}{3}q^3(1-q)^1$
Coroa	Cara	**Coroa**	**Coroa**		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	**Coroa**	Cara	**Coroa**		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	Cara		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	**Coroa**	**Coroa**	**Coroa**	4	$q^4(1-q)^0$	$\binom{4}{4}q^4(1-q)^0$

EXEMPLO 1

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso). Caracterize a variável aleatória número de coroas.

X ($n°$ de $coroas$)	$P(X)$
0	$(1-q)^4$
1	$4q^1(1-q)^3$
2	$6q^2(1-q)^2$
3	$4q^3(1-q)^1$
4	q^4

Variáveis aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

- $P(X = x)$ Função de probabilidade (fp)
- $P(X = x_i) \geq 0$ para todo i.
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Variáveis aleatórias Contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes a $\mathbb{R}$,...

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Função de distribuição acumulada

Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

Em geral ela é representada por $F(x)$.

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_k} f_X(z)dz \\ \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) \end{cases}$$

$\Phi(x)$

Função de distribuição acumulada

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0;$

- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1;$

- Se $x_1 < x_2$, então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2);$

- $P_X(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1);$

- $F_X(x)$ é uma função crescente de $x;$

Função de distribuição acumulada

- O conhecimento de tal função permite obter qualquer informação sobre a variável.

- A composição das funções de probabilidade faz parte da modelagem teórica das realizações das variáveis aleatórias...

Função Sobrevivência/ Excesso de Danos

$$\bar{F}_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$\bar{F}_X(x) = S_X(x)$$

EXEMPLO 2

Considere a função de sobrevivência dada por:

$$\bar{F}_X(x) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - x)^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq x \leq 115.$$

Calcule $f(x)$. Entregar!!!

Sempre que duas ou mais variáveis aleatórias são levadas em conta, três tipos de distribuição de probabilidade são definidas.

A distribuição conjunta, descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

A distribuição marginal, descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

A distribuição condicional, descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.

Probabilidade condicional

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidades. Definimos a função de probabilidade condicional de X_1 dado X_2, por:

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}$$

onde $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.

Probabilidade condicional

- Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço de probabilidades. Definimos a função de densidade condicional de X_1 dado X_2, por:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

- Em que $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função densidade conjunta de X_1e X_2 e $f_{X_2}(x_2)$ é função densidade marginal de X_2.

Independência de variáveis aleatórias

A independência é um requisito importante que permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: *Duas variáveis aleatórias,* X *e* Y *definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.*

Independência de variáveis aleatórias

- Para variáveis aleatórias discretas:

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow p_{X,Y}(x, y) \equiv p_X(x)p_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Para variáveis aleatórias contínuas:

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) \equiv f_X(x)f_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

EXEMPLO 3

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b. Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/8	0	0
1	0	3/8	0
2	0	0	3/8
3	1/8	0	0

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b. Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = f_Y(y) = 0{,}04e^{-0{,}04y}$$

$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = f_X(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$$

b)

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y=y)$	2/8	3/8	3/8	

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b. Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0{,}0008e^{(-0{,}02x-0{,}04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = f_Y(y) = 0{,}04e^{-0{,}04y}$$

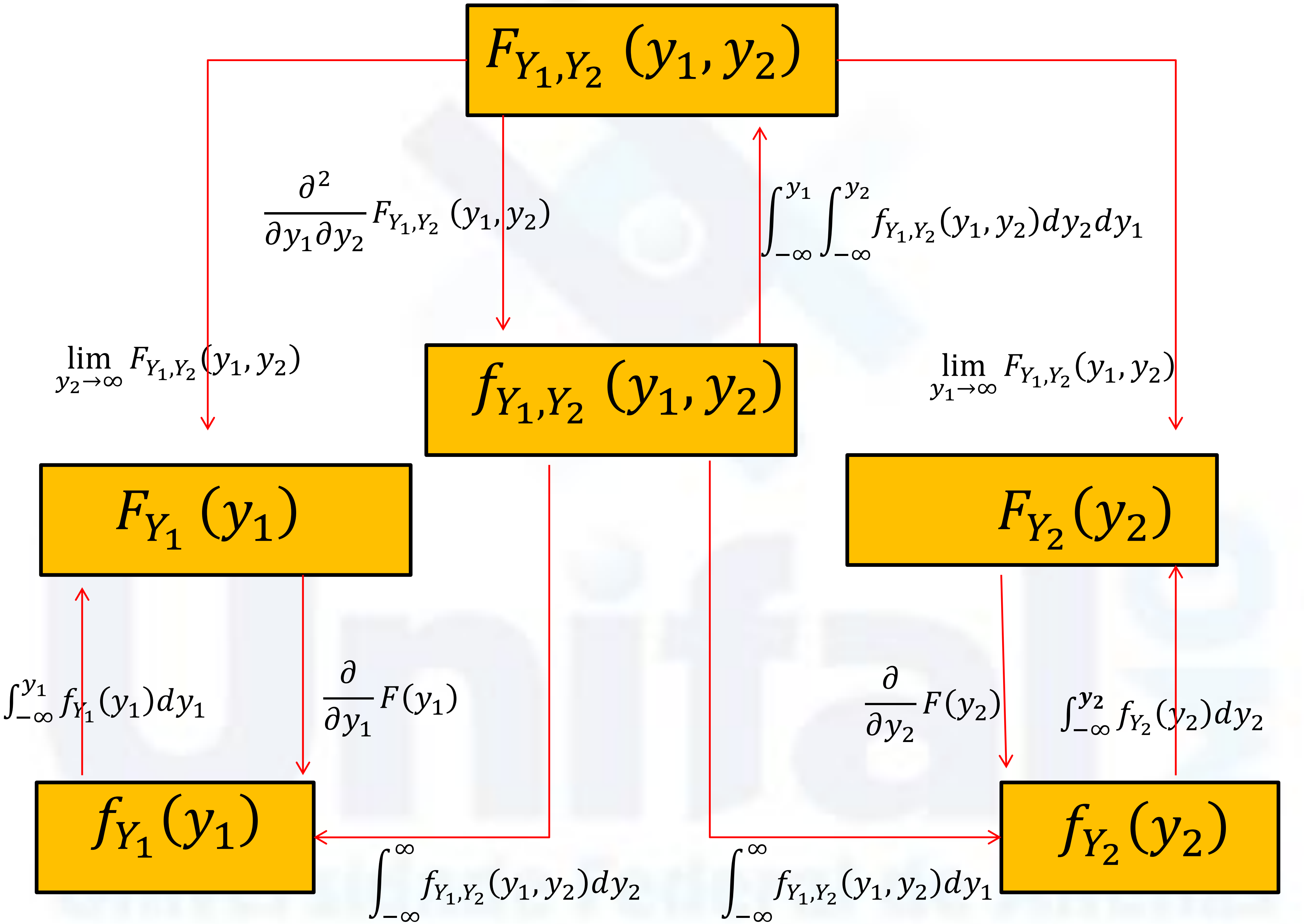
$$\int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = f_X(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$$

$$\boldsymbol{f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_X(x)}$$

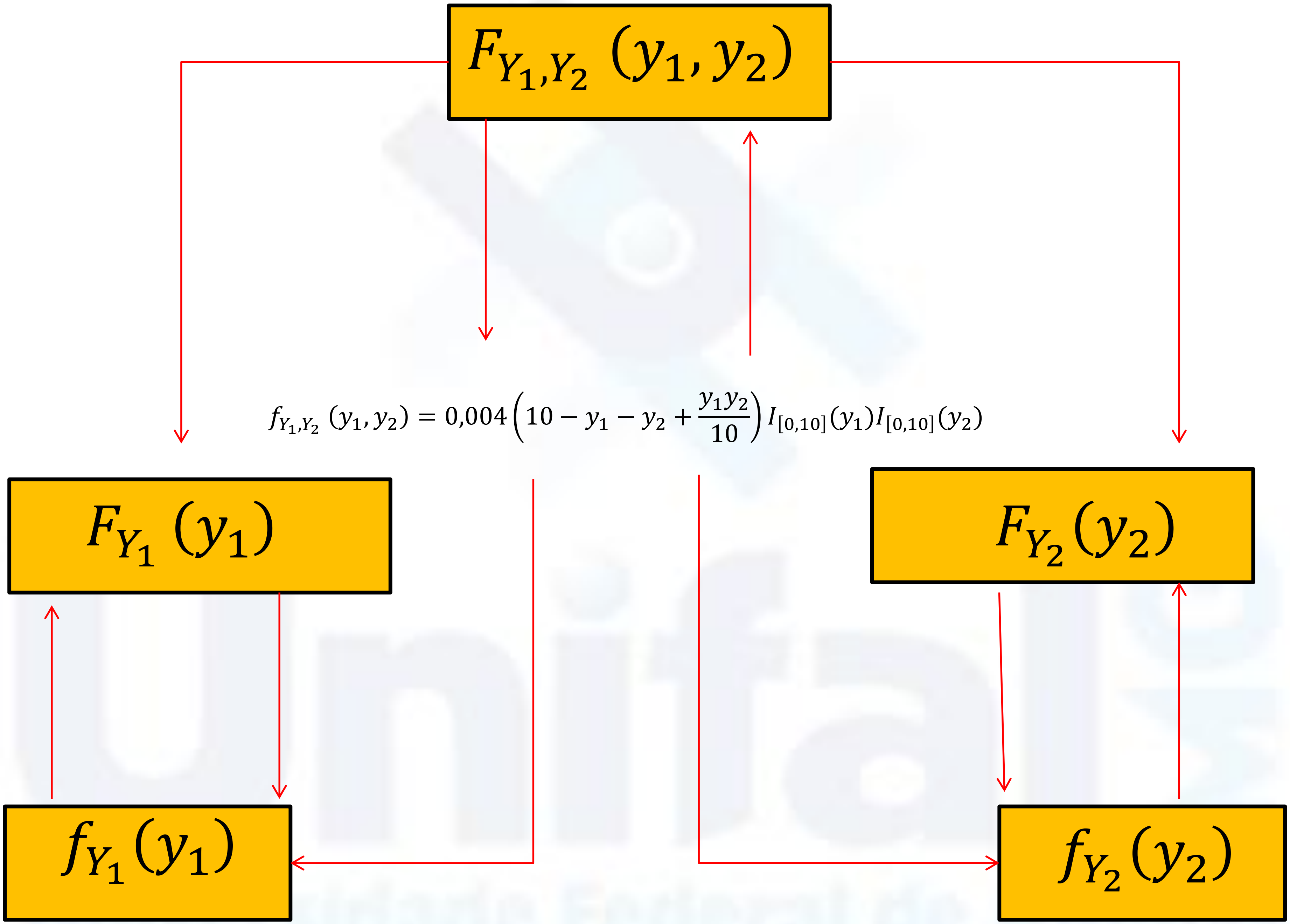
b)

$X\backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	**3/8**	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y=y)$	2/8	3/8	3/8	

$$\boldsymbol{P_{X,Y}(2,2) \neq P_X(2)P_Y(2)}$$



$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1$
$\lim_{y_2\to\infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$\lim_{y_1\to\infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$F_{Y_1}(y_1)$
$F_{Y_2}(y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_1} f_{Y_1}(y_1)\,dy_1$
$\frac{\partial}{\partial y_1} F(y_1)$
$\frac{\partial}{\partial y_2} F(y_2)$
$\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_2}(y_2)\,dy_2$
$f_{Y_1}(y_1)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_1$
$f_{Y_2}(y_2)$


$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$
$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10}\right) I_{[0,10]}(y_1) I_{[0,10]}(y_2)$
$F_{Y_1}(y_1)$
$F_{Y_2}(y_2)$
$f_{Y_1}(y_1)$
$f_{Y_2}(y_2)$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \int_0^{y_2} \int_0^{y_1} 0{,}004\left(10 - u - v + \frac{uv}{10}\right) du dv$$

$$\int_0^{y_1} 0{,}004\left(10 - u - v + \frac{uv}{10}\right) du = 0{,}004\left(10u - \frac{u^2}{2} - uv + \frac{u^2 v}{20}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=y_1} = 0{,}004\left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 v + \frac{y_1^2 v}{20}\right)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \int_0^{y_2} 0{,}004\left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 v + \frac{y_1^2 v}{20}\right) dv$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 0{,}004\left(10y_1 v - \frac{y_1^2}{2} v - \frac{y_1 v^2}{2} + \frac{y_1^2 v^2}{40}\right)\Bigg|_{v=0}^{v=y_2}$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 0{,}004\left(10y_1 y_2 - \frac{y_1^2 y_2}{2} - \frac{y_1 y_2^2}{2} + \frac{y_1^2 y_2^2}{40}\right)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1y_2}{10}\right)I_{[0,10]}(y_1)I_{[0,10]}(y_2)$$

$F_{Y_1}(y_1)$

$F_{Y_2}(y_2)$

$f_{Y_1}(y_1)$

$f_{Y_2}(y_2)$

$$F_{Y_1}(y_1) = \lim_{y_2 \to \infty} F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \lim_{y_2 \to 10} 0{,}004\left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40}\right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}004\left(100y_1 - \frac{10y_1^2}{2} - \frac{100y_1}{2} + \frac{100y_1^2}{40}\right) = 0{,}4\left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} - \frac{y_1}{2} + \frac{y_1^2}{40}\right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}2\left(2y_1 - \frac{y_1^2}{10} - y_1 + \frac{y_1^2}{20}\right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}2\left(y_1 - \frac{y_1^2}{20}\right)$$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 0{,}004\left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40}\right)$$

$$\lim_{y_2\to 10} \boldsymbol{F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)}$$

$$\int_0^{y_1}\int_0^{y_2} \boldsymbol{f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1}$$

$$\boldsymbol{f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)} = 0{,}004\left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1y_2}{10}\right)I_{[0,10]}(y_1)I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0{,}2\left(y_1 - \frac{y_1^2}{20}\right)$$

$$\boxed{F_{Y_2}(y_2)}$$

$$\boxed{f_{Y_1}(y_1)}$$

$$\boxed{f_{Y_2}(y_2)}$$