

Cálculo de prêmios

Aula 14

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



Cálculo de prêmios

- Um prêmio de seguro é a importância paga por alguém em troca da transferência do risco a que ele está exposto para uma empresa especializada na gestão de risco....
- Para essa empresa, o valor do prêmio, ou do conjunto de sua carteira, deverá cobrir todos os custos com sinistros.

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação:

➤ Julgamento ou subjetivo

É um processo subjetivo, onde a tarifação é definida pelo underwriter através de comparação com riscos similares.

➤ Prêmio Puro

Baseado em uma modelagem probabilística....

➤ Método de Rateio

Dividir diretamente as perdas esperadas ou observadas com sinistros entre os números de expostos aos riscos

Cálculo de prêmios-Métodos básicos de tarifação:

➤ PRÊMIO PURO

Valor esperado das indenizações

➤ Prêmio puro de risco

Valor esperado mais das indenizações acrescidos de um carregamento de segurança

➤ Prêmio carregado com margem de segurança

Carregamentos adicionais associados a lucro, e despesas

Princípio de cálculo de prêmio

- O prêmio de uma seguradora é a função que associa a variável aleatória relacionada ao gasto da seguradora com o sinistro (S) de uma determinada apólice com um número real Π_S , tal que:

$$\Pi_S = g(S)$$

- Π_S é o que o segurador recebe (Fixo).
- S está relacionado o quanto é pago ao segurado (indenização).
- O ganho da seguradora é dado por $(\Pi_S - S)$ (Variável aleatória).

*a regra $g(S)$ que atribui um valor numérico a Π_S é o chamado princípio de cálculo de prêmio.

EXEMPLO 1

Determinado princípio de precificação estabelece que o prêmio Π_S para um risco S é dado por

$$\Pi_S = v^{-1}(E[v(S)])$$

Em que v é uma função tal que $v'(x) > 0$ e $v''(x) \geq 0$ para $x > 0$.

Calcule Π_S quando $v(x) = x^2$ e $v^{-1}(x) = \sqrt{x}$, dado que $S \sim \text{Gama}(2,2)$.

SOLUÇÃO:

$$\Pi_S = \sqrt{E(S^2)} = \sqrt{\text{var}(S) + E(S)^2}$$

$S \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. $\rightarrow E(S) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\text{var}(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}$, então:

$$\Pi_S = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = 1,225$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Por vezes as possíveis indenizações a serem pagas são o resultado do somatório de n indenizações individuais.
 - Modelo de risco individual.
 - Após o cálculo do prêmio global, o mesmo é distribuído pelas apólices individuais.
 - Não necessariamente o prêmio é dividido em partes iguais.
- No caso do modelo de risco coletivo é sensato pensar no prêmio global como a soma de prêmios idênticos advindos das apólices que compõem a carteira.
 - ...A unidade de tempo considerada é de 1 ano..

Princípio de cálculo de prêmio

- **Princípio do prêmio de risco (prêmio líquido, prêmio puro).**

$$\Pi_S = E(S)$$

□ princípio mais simples, baseamento unicamente no valor esperado da variável aleatória das possíveis indenizações.

Desconsidera: gastos administrativos e lucro da seguradora...

- **Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado (princípio do valor esperado)**

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

Melhoria em relação ao prêmio de risco, onde θ representa um carregamento de segurança calculado em função do valor esperado de S .

EXEMPLO 2

Considere uma apólice de seguro que no caso de ocorrência de sinistro, os valores gastos com indenização são modelados por distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0,2$. A seguradora determina que irá cobrar um prêmio baseado no quanto se espera gastar com indenizações, porém esse valor não deve exceder 4,5 . Calcule o valor esperado sujeito a esse limite técnico.

Solução:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 4,5 \\ 4,5, & X \geq 4,5 \end{cases}$$

...

SOLUÇÃO:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 4,5 \\ 4,5, & X \geq 4,5 \end{cases}$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = \int_0^{4,5} x f_X(x) dx + 4,5 S_X(4,5)$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = \int_0^{4,5} x \, 0,2 \, e^{-0,2x} dx + 4,5 \int_{4,5}^{\infty} 0,2 \, e^{-0,2x} dx$$

$$u = x, \quad \text{e} \quad dv = e^{-0,2x} dx, \quad \rightarrow \quad du = dx \quad \text{e} \quad v = -\frac{e^{-0,2x}}{0,2}$$

$$\begin{aligned} 0,2 \int_0^{4,5} x e^{-0,2x} dx &= 0,2 \left(-x \frac{e^{-0,2x}}{0,2} \Big|_{x=0}^{x=4,5} + \int_0^{4,5} \frac{e^{-0,2x}}{0,2} dx \right) \\ &= -x e^{-0,2x} \Big|_{x=0}^{x=4,5} + \left(-\frac{e^{-x0,2}}{0,2} \Big|_{x=0}^{x=4,5} \right) = 1,13759 \end{aligned}$$

$$E(Y) = E(X; 4,5) = 1,13759 + 4,5 (e^{-0,2 \times 4,5}) = 2,967152$$

EXEMPLO 3

Considere a função de probabilidade:

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Considere que o limite de indenização para essa carteira seja de R\$4000,00, o valor do prêmio puro de risco a ser cobrado pode ser?

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} S_{col}, & S_{col} < 4000 \\ 4000, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000 p(s) = R\$1956,8$$

Princípio de cálculo de prêmio

➤ Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

➤ Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

➤ Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = \alpha.$$

EXEMPLO 4

Considere a função de probabilidade :

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o valor de prêmio de modo que a probabilidade de que o gasto total com sinistros não o exceda, seja de 95%. Utilizando aproximação de S_{col} pela distribuição normal.

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Solução: princípio do percentil

$$F_{S_{col}}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = z_{0,95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = R\$5431,91$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases} \quad F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,36 & 0 \leq s < 1000 \\ 0,384 & 1000 \leq s < 2000 \\ 0,4564 & 2000 \leq s < 3000 \\ 0,8428 & 3000 \leq s < 4000 \\ 0,8592 & 4000 \leq s < 5000 \\ \mathbf{0,8976} & \mathbf{5000 \leq s < 6000} \\ 1 & s \geq 6000 \end{cases}$$

Solução:

$$F_{Scol}(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \mathbf{0,95}$$

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S}\right) = 0,95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S)}{\sigma_S} = \mathbf{Z_{0,95}}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964,688 (1,645) = \mathbf{R\$5431,91}$$

Princípio de cálculo de prêmio

➤ Princípio da utilidade Zero ou nula.

$$\mu_{s.o.}(W - G) = E[\mu_{s.o.}(W - S)]$$

$$\mu_{s.a.}(W) = E[\mu_{s.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

EXEMPLO 5

Seja uma seguradora cuja utilidade é modelada pela função de utilidade exponencial, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$. Determine qual o prêmio Π_S utilizando o princípio da utilidade zero.

Seja, $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$ e $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$-\alpha e^{-\alpha W} = E[-\alpha e^{-\alpha(W + \Pi_S - S)}]$$

$$e^{-\alpha W} = E(e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} e^{+\alpha S})$$

$$e^{-\alpha W} = e^{-\alpha W} e^{-\alpha \Pi_S} E(e^{\alpha S})$$

$$\frac{1}{e^{-\alpha \Pi_S}} = E(e^{\alpha S})$$

Logo

$$\ln e^{\alpha \Pi_S} = \ln E(e^{\alpha S})$$

$$\alpha \Pi_S = \ln E(e^{\alpha S})$$

$$\Pi_S = \frac{\ln(M_S(\alpha))}{\alpha}$$

Conhecido por alguns autores como princípio exponencial.

EXEMPLO 6

Uma seguradora atribuí utilidade ao seu patrimônio através da função $\mu(s) = -\alpha e^{-\alpha s}$, com $\alpha > 0$. De acordo com o princípio da utilidade nula, o prêmio mínimo Π_s é dado por?

Considere $S \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\Pi_S = \frac{\ln(M_S(\alpha))}{\alpha} \quad \text{e} \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\Pi_S = \frac{\ln\left(e^{n\mu\alpha + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha^2}\right)}{\alpha} = \frac{n\mu\alpha + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha^2}{\alpha}$$

$$\Pi_S = n\mu + \frac{1}{2}n\sigma^2\alpha$$

EXEMPLO 7

Uma seguradora atribuí utilidade ao seu patrimônio através da função $\mu(s) = -0,9e^{-0,9s}$. De acordo com o princípio da utilidade nula, o prêmio mínimo Π_S que é pedido para um risco S , tal que $S = \sum_{i=1}^N X_i$, é dado por?

Considere $X_i \sim \text{Exp}(1)$ e $N \sim \text{Po}(1)$

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t} \text{ e } M_N(t) = e^{(e^t-1)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t)))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\left(\frac{1}{1-t}-1\right)}$$

Assim

$$\Pi_S = \frac{\ln(M_S(\alpha))}{\alpha} = \frac{\frac{1}{1-\alpha} - 1}{\alpha} = \frac{1 - 1 + \alpha}{\alpha(1 - \alpha)}$$

$$\Pi_S = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio do prêmio de risco.

$$\Pi_S = E(S)$$

- Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- Princípio da utilidade Zero ou nula.

$$\mu_{S.a.}(W) = E[\mu_{S.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{S.o.}(W - G) = E[\mu_{S.o.}(W - S)]$$

- Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

De uma forma geral as cargas de segurança tem como objetivo, compensar os eventuais desvios aleatórios do risco.

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora.** Deiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos.** Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

