Matemática atuarial

Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leronardo.costa@unifal-mg.edu.br

Revisão de probabilidade

- A ciência objetiva a coleta de informações na natureza e a formulação de modelos (..) que expliquem parte dos fenômenos ou permitam a sua previsão.

- Método cientifico,
  - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.

- Modelo e realidade sejam por vezes erroneamente confundidos é evidente.

Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre estará envolto por um certo grau de incerteza.

- Modelos determinísticos
  - Condições bastante controladas,
  - Variações desprezadas

- Modelos probabilísticos
  - Controle total e inviabilizado
  - Variações não podem ser ignoradas.

Revisão de probabilidade

- **Fenômeno aleatório** é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
  - Dias de chuva, tempo de vida de uma pessoa....

- Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico.**

  - Lançamento de um dado, lançamento de uma moeda, resultado de uma competição....

Revisão de probabilidade

- **Espaço amostral** $(\boldsymbol{\Omega})$ é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.

  - **Definição** Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento. Ω é o evento certo, $\emptyset$ o evento impossível. Se $\omega \subset \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

Revisão de probabilidade

- EXEMPLO 1:

  Defina os seguintes espaços amostrais.

1) Jogar uma moeda;

$$\Omega = \{ \quad \}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{ \quad \}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{ \quad \}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado;

$$\Omega = \{cara, coroa\}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*;

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1{,}5 \leq x \leq 2\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa;

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

Revisão de probabilidade

2) Altura dos alunos da *Unifal*;

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1{,}5 \leq x \leq 2\}$$
$$\boldsymbol{A = \{1,6 \leq x \leq 1,7\}}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa (você);

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$
$$\boldsymbol{A = \{0 \leq t \leq 30\}}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade será chamado evento aleatório.

Revisão de probabilidade

Conceito de Probabilidade

Teoria clássica

- Dado o espaço de resultados Ω, constituído por um número finito de n elementos igualmente prováveis, todos eles igualmente possíveis, define-se a probabilidade de acontecimento de A, e representa-se por $P(A)$, como sendo a ração de resultados favoráveis A e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{n° de\ resultados\ de\ A}{n°\ de\ resultados\ possíveis}$$

Teoria Frequentista

- Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento A é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

- Em que n_A é o número de ensaios em que o evento A foi observado, e n o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com quer se realiza A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.

Probabilidade subjetiva e lógica

- Define-se como uma medida do grau de confiança de uma pessoa em relação a uma proposição. Ela é função da quantidade de informação disponível pela pessoa, e possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Revisão de probabilidade

- Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto $P(\ )$ que associa a subconjuntos A de Ω um numero real $P(A)$ que satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

I) Para todo $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$;

II) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

III) Se$A \subseteq \Omega$, $\mathrm{B} \subseteq \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

  I) Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ Forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
  - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.

- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de Ω um número real.

- EXEMPLO 2:

Sabe-se que em uma fabrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos $\left(D \to P(D) = \frac{1}{4}\right)$

Itens perfeitos $\left(Pe \to P(Pe) = \frac{3}{4}\right)$

Revisão de probabilidade

Para uma amostra $n = 2$ peças retiradas é possível construir uma tabela onde X é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e $P(X)$ será a probabilidade do resultado.

X	0	1	2
	(Pe, Pe)	$(D, Pe)(Pe, D)$	(D, D)
$P(X)$	$\frac{3}{4}\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Revisão de probabilidade

➢ Variáveis Aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

- $P[X = x]$ Função de probabilidade (fp)
- $P[X = x_i] \geq 0$ para todo i.
- $\sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i] = 1$

➢ Variáveis aleatórias contínuas

Corresponderem aos dados de medida, pertencentes aos $\mathbb{R}$, assim como para variáveis continuas em geral....

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

- Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

Em geral ela é representada por $F(x)$, ou $\Phi(x)$.

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x_k} f_X(z)dz \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) \end{cases}$$

Revisão de probabilidade

- EXEMPLO 3:

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X=x)=\begin{cases} 0{,}6 & se\ x=0 \\ 0{,}4 & se\ x=1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

c)

$$P(X=x)=\begin{cases} 0{,}7 & se\ x=0 \\ 0{,}5 & se\ x=1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

d)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+x) & se\ 0\le x\le 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

e)

$$f(x)=2e^{-2x}, \qquad se\ x\ge 0$$

f)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{10}x+\frac{1}{10}, & se\ 0\le x\le 2 \\ -\frac{3}{40}x+\frac{9}{20}, & se\ 2<x\le 6 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+x)\ se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad c.c. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2+x)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) - \frac{6}{5}\left(\frac{0}{3}+\frac{0}{2}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad se\ x \geq 0$$

$$\int_0^\infty 2e^{-2x}dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left(-\frac{1}{e^{2(0)}}\right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\ , se\ 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, se\ 2 < x \leq 6 \\ 0, \qquad c.c. \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\boldsymbol{dx} + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}\boldsymbol{dx}$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10}\Big|_0^2 + \left(-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20}\right)\Big|_2^6$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Esperança de variáveis aleatórias

- ...a motivação histórica: uma forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.

- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.

- ...serve como parâmetro para vários modelos probabilísticos.

Esperança de variáveis aleatórias

- A esperança de uma variável aleatória X é dada por:

- Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \mu_{\mathrm{X}}$$

- Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_X$$

Esperança de uma função de variáveis aleatórias

- Seja X uma variável aleatória e $g(.)$ uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função $g(X)$. Denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_j g(x_j)P(X = x_j),\ X\ discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx\ , X\ contínuo \end{cases}$$

Variáveis aleatórias

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}6 & se\ x = 0 \\ 0{,}4 & se\ x = 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

c)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad se\ x \geq 0$$

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$$E(X) = 1 * 0{,}1 + 2 * 0{,}2 + 3 * 0{,}3 + 4 * 0{,}4 = 3$$

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}6 & se\ x = 0 \\ 0{,}4 & se\ x = 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$E(X) = 0 * 0{,}6 + 1 * 0{,}4 = 0{,}4$$

c)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad se\ x \geq 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = uv - \int vdu$$

$$u = 2x \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \qquad\qquad dv = e^{-2x}dx \quad \rightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$E(X) = 2x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-2x}}{2}2dx = \left(-xe^{-2x}\Big|_0^{\infty}\right) - \left(\frac{e^{-2x}}{2}\Bigg|_0^{\infty}\right)$$

$$E(X) = \left(-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} + \frac{0}{1}\right) - \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$