Aula 16 (Parte 1)- Anuidade Contínua

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidade Contínua

- A medida que se aumenta o número de partes ao qual a anuidade foi fracionada, o seu valor converge.

- Caso a anuidade fosse fracionada em infinitas partes, os pagamentos seriam feitos continuamente ao longo do ano.

- Na prática, serve como uma abstração sobre comportamento de pagamentos contínuos.

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{m}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{m}}{1-e^{\frac{1}{m}ln(v)}}\right]$$

Usando a regra de L' Hopital

$$f(m) = \frac{1}{m} \quad \longmapsto \quad f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - e^{\frac{1}{m}ln(v)} \longmapsto \quad g'(m) = -e^{\frac{1}{m}ln(v)}\left[-\frac{\ln(v)}{m^2}\right] = \frac{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}{m^2},$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}\right] = \frac{(1-v^n)}{ln(v)}\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

$$\ldots$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{(1-v^n)}{ln(v)} \lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = -\frac{(1-v^n)}{ln(v)} = -\frac{(1-v^n)}{ln(e^{-\delta})}$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

Anuidade Contínua

Outra forma de encontrar a anuidade contínua pode ser vista a seguir:

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \int_0^n v^t \, dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt \,,$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = -\left.\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\right|_{t=0}^{t=n} = \frac{-e^{-\delta n} + 1}{\delta},$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Assim para um T_x aleatório:

$$\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

$$E\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{T_x}|} f_T(t)dt$$

- O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)}\right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq \bar{a}_x \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- a variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = var\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right) = \frac{var(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{var(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^n e^{-\delta 2t} f_{T_x}(t)dt$$

$$(\bar{A}_x)^2 = \left(\int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right)^2$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 1

Suponha que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ, calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\overline{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x.

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt - \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt\right)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 1

- (i)

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}$$

- (ii)

$$S_{T_0}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\alpha x}\right)} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}}$$

EXEMPLO 1

- (i)

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}$$

- (ii)

$$\boxed{P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}}$$

- (iii)

$$\mu(x+t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}}$$

$$\boxed{\mu(x+t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha}$$

EXEMPLO 1

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)e^{-\alpha t}\alpha}{\delta} dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\int_0^\infty e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)}\, dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)} + \frac{1}{\alpha}\right]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha}}}$$

- ***Observação**

$$ {}_tp_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & caso\ contrário \end{cases} $$

$$ \bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, e^{-\alpha t} dt $$

$$ \bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-t(\delta+\alpha)}\, dt $$

$$ \bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty} $$

$$ \bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha} $$

EXEMPLO 1

$$var(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \frac{var(e^{-\delta t})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{\delta+\alpha}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha\, dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha \left[-\frac{1}{(2\delta+\alpha)e^{t(2\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\alpha}{2\delta+\alpha}}$$

$$\boxed{var(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\alpha}{2\delta+\alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha} \right)^2 \right]}$$

Anuidade Contínua Vitalícia

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade exceda o valor presente esperado, para o caso $T_x \sim Exp(\alpha)$?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta} > \frac{1}{\delta+\alpha}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} > \frac{\delta}{\delta+\alpha} - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} < \frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(-\delta T < ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)$$

Anuidade Vitalícia Contínua

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

EXEMPLO 2

Considerando que o que tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x seja modelado por uma função de densidade exponencial, $T_x \sim Exp(0{,}016)$, dado que $\delta = 0{,}10$, calcule $P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right)$.

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = \left(\frac{0{,}016}{0{,}016+0{,}10}\right)^{\frac{0{,}016}{0{,}1}} \approx 0{,}7283$$

Considerando $\delta = 0{,}01$ e $\alpha = 0{,}033$:

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = \left(\frac{0{,}033}{0{,}033+0{,}10}\right)^{\frac{0{,}033}{0{,}1}} \approx 0{,}4174$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dador valor Π_x?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(1 - e^{-\delta T} \leq \delta\Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} \leq \delta\Pi_x - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta\Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta\Pi_x)]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[T_x \leq -\frac{ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right] = F_T\left(-\frac{ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right)$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dador valor Π_x?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = F_T\left(-\frac{ln(1-\delta\Pi_x)}{\delta}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = 1 - \frac{S_{T_0}\left(x + \left(-\frac{ln(1-\delta\Pi_x)}{\delta}\right)\right)}{S_{T_0}(x)}, \qquad \Pi_x \leq \frac{1-e^{-\delta(\omega-x)}}{\delta}.$$

Anuidades Temporária contínua

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}|} & \text{se} \quad T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t) dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\bar{n}|}\ {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

Anuidades Temporária contínua

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & \text{se} \quad T \geq n \end{cases}$$

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^2}{\delta^2}$$

Anuidade vitalícia contínua, Diferida

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \le T < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T-m}|}, & T \ge m \end{cases}$$

$${}_{m|}\bar{a}_x = \int_m^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_m^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

$${}_{m|}\bar{a}_x = v^m\ {}_m p_x \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_{x+m}\ \mu(x+m+t)dt$$

$${}_{m|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

Anuidade vitalícia contínua, Diferida

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x - m}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$var(Y) = \frac{2}{\delta} v^{2m} \; {}_t p_x (\bar{a}_{x+m} - \; {}^2\bar{a}_{x+\mathrm{m}}) - \left({}_{m|}\bar{a}_x \right)^2$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

Dado que:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T} = 1$$

- Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) + E\left(e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

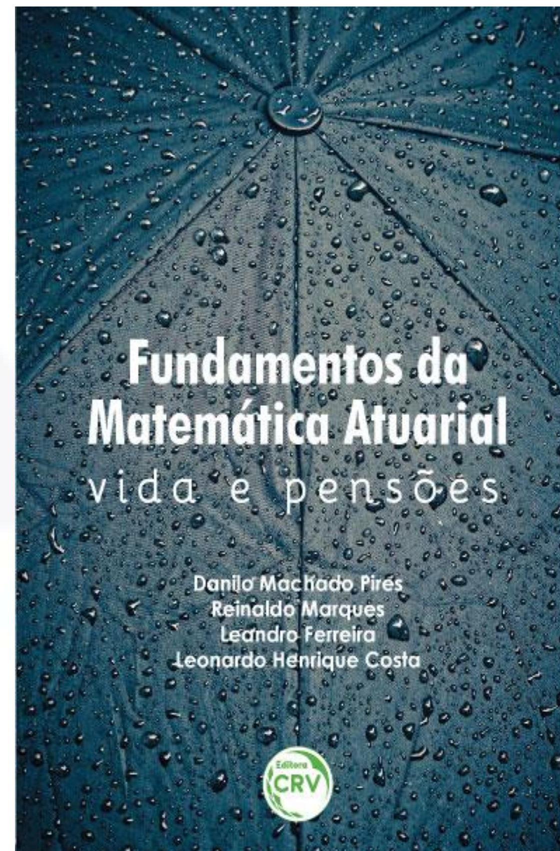
Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

				Fracionadas	Contínuas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$\bar{a}_x$
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	$\ddot{a}_{x:\bar{n}\vert}^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\bar{n}\vert}$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n}\vert}$	$a_{x:\bar{n}\vert}^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_x$	${}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}$	${}_{m\vert}\bar{a}_x$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_x$	${}_{k\vert}a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	${}_{m\vert}\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}a_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics,** 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.



Aula 16 (Parte 2)-Anuidade com pagamentos certos

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente m parcelas para o segurado ou outrem e, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

  - Caso o segurado morra antes do tempo m a seguradora precisa ter o valor presente necessário a m pagamentos .

  - Caso o segurado morra após m anos, a seguradora devererá ter o necessário a pagar os m pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

➢ Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{m}|} + \left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}\right), & T \geq m \end{cases}$$

Ou

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|}, & T \geq m \end{cases}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\bar{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\bar{m}|} f_{T_x}(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\bar{t}|} f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\bar{m}|}} = \int_0^m \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} {}_t p_x \mu(x+t)dt + \int_m^\infty \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T_x}(t)dt$$

$$\int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt = \bar{a}_{\overline{m}|} \int_0^m f_{T_x}(t)dt = \bar{a}_{\overline{m}|}\ {}_m q_x$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \bar{a}_{\overline{m}|}\ {}_m q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta}\ {}_m q_x + {}_{m|}\bar{a}_x$$

EXEMPLO 1

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adiconal modelado por:

$f_{T_x}(t) = 0{,}016e^{-0{,}016t}$ para $t > 0$

E considere também $\delta = 0{,}10$ e o benefício unitário.

EXEMPLO 1

Lembrando que ${}_mq_x = F_{T_x}(m)$, temos que:

$$ {}_mq_x = 1 - e^{-0{,}016m} $$

Assim a partir de

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta m}\right)}{\delta}\, {}_mq_x + \int_m^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta}\, {}_tp_x \mu(x+t)dt $$

Tem-se:

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1}\left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + \int_{30}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-0{,}1t}\right)}{0{,}1} 0{,}016e^{-0{,}016t}dt $$

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1}\left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + 0{,}16\int_{30}^{\infty} e^{-0{,}016t} - e^{-0{,}116t}dt $$

EXEMPLO 1

...

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0,1(30)}\right)}{0,1}\left(1 - e^{-0,016(30)}\right) + 0,16\int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t}dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left[-\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}}\right]_{t=30}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left(\frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}}\right)$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} \approx 9,85$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$

Anuidades com benefício crescente

Produtos Atuariais com benefício crescente

- Anuidade

Os benefícios pagos variam segundo uma progressão aritmética.

A progressão aritmética é uma sequência numérica cujo o $n-ésimo$ termo é dado por $a_n = a + (rn - 1)$, em que a é termo inicial e r é a razão.

Produtos Atuariais com benefício crescente

- Anuidades

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}\ddot{a}_x \qquad (Ia)_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_{t|}a_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}\ddot{a}_{x:\overline{n-t}|} \qquad (Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}a_{x:\overline{n-t}|}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \int_0^{\infty} te^{-\delta t} \, {}_t p_x dt \qquad (\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} te^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Exemplo 2

Calcule os valores atuariais para as anuidades com pagamentos antecipado (postecipado), que sejam adquiridas por pessoas de 40 anos de idade. Considere a tábua de vida AT-2000 Masculina, taxa de juros de 5% ao ano, cobertura de 3 anos e benefício crescente.

Solução:

Exemplo 2

Calcule os valores atuariais para as anuidades com pagamentos antecipado (postecipado), que sejam adquiridas por pessoas de 40 anos de idade. Considere a tábua de vida AT-2000 Masculina, taxa de juros de 5% ao ano, cobertura de 3 anos e benefício crescente.

Solução:

$$(I\ddot{a})_{40:\overline{3}|} = \sum_{\mathrm{t}=0}^{2} {}_{t|}\ddot{a}_{40:\overline{3-t}|} = \ddot{a}_{40:\overline{3}|} + {}_{1|}\ddot{a}_{40:\overline{2}|} + {}_{2|}\ddot{a}_{40:\overline{1}|} \approx 5{,}618$$

$$(Ia)_{40:\overline{3}|} = \sum_{\mathrm{t}=0}^{2} {}_{t|}a_{40:\overline{3-t}|} = a_{40:\overline{3}|} + {}_{1|}a_{40:\overline{2}|} + {}_{2|}a_{40:\overline{1}|} \approx 5{,}343$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.