Matemática atuarial

AULA 19- Prêmios periódicos (Seguros)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Prêmios

- O prêmio poderá ser pago de 3 formas:
  - Um único pagamento.
    - Valor esperado da função valor presente.
    - Valor atuarial.
  - Prêmios periódicos de valor constante no tempo (prêmios nivelados).
  - Prêmios periódicos de quantidade variável.

Prêmio Puro periódico Anual

- O contrato estipula que o **segurado** deverá pagar um prêmio constante $\boldsymbol{P}$ (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver.

  - O primeiro pagamento será uma fração do prêmio pois este será capitalizado pela seguradora e o último pagamento corresponderá ao próprio prêmio.

Prêmio Puro periódico Anual

- O contrato estipula que o **segurado** deverá pagar um prêmio constante $\boldsymbol{P}$ (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver.

  - O compromisso do **SEGURADO ($\boldsymbol{Y}$)**, em valor presente (a data 0) é igual a *:*

$$Y = Pv^k + \cdots + Pv^3 + Pv^2 + Pv + P = P\left(v^k + v^{k-1} + \cdots + v^2 + v + 1\right)$$

Referente ao primeiro dos **k+1 pagamentos**

Referente ao último pagamento

$$Y = P\left(\frac{1 - v^{k+1}}{1 - v}\right)$$

$$Y = P\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$

Prêmio Puro periódico Anual

- Por outro lado o valor presente do benefício que será pago pela seguradora por uma dada modalidade de seguro é representado por Z_T. Então, o compromisso em valor presente do **SEGURADOR** é:

$$Z_T$$

- A_x
- $A_{x^1:\overline{n}|}$
- $A_{x:\overline{n}|^1}$
- $A_{x:\overline{n}|}$
- a^*

Prêmio Puro periódico Anual

- A ideia básica do cálculo do valor de P, está em igualar o compromisso do segurado ao compromisso do segurador, a data 0. Tal que

$$L = \text{Compromissos segurado} - \text{Compromisso do segurador}$$

$$L = Y - Z_T$$

- Princípio da Equivalência, $E(L) = 0$

$$E(L) = 0 = E(Y - Z_T)$$

$$E(Y) = E(Z_T)$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$E(L) = 0 = E(Y - Z_T)$$

$$E(Y) = E(Z_T)$$

$$E\left(P\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}\right) = E\left(Z_{T_x}\right)$$

$$P = \frac{E\left(Z_{T_x}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Prêmio Puro periódico Anual-A_x

$$P_x = \frac{E\left(Z_{T_x}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$\boldsymbol{A_x = v\ddot{a}_x - a_x} \text{ e } \boldsymbol{\ddot{a}_x = a_x + 1}$$

$$P_x = \frac{(1 - v)A_x}{1 - A_x}$$

EXEMPLO 1

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

EXEMPLO 1

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{0,2492899} \quad \ddot{a}_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{25,77438}9 \quad v \approx 0,9708738$$

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} \approx 0,00967 \qquad P_{25} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}} \approx 0,00967$$

EXEMPLO 1

Caso o segurado queira que o beneficiário receba $R\$1000,00$ neste seguro de vida inteira, então:

$$1000P_{25} = 1000(0,00967)$$

$$1000P_{25} = R\$\ 9,67$$

Prêmio Puro periódico Anual-A_x

pagamentos limitados

- No caso dos pagamentos estarem limitados a um período $k < \omega - x$, tem-se:

$$_{k}P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Número de pagamentos

EXEMPLO 2:

Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?

EXEMPLO 2:

Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?

$$ {}_4P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{4|}}} = \frac{0{,}24929}{3{,}82415} \approx 0{,}06519 $$

Prêmio Puro periódico Anual- $A_{x^1:\bar{n}|}$

$$P_{x^1:\overline{k|}} = \frac{bA_{x^1:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

EXEMPLO 3:

Qual o valor do prêmio puro anual pago durante a vigência de um seguro com cobertura de 5 anos, feito por uma pessoa de 40 anos de idade? Considere a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 3:

$$A_{40^1:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{T+1}{}_{t}p_{40}q_{40+t} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{t}{}_{t}p_{40} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}$$

$$P_{40^1:\overline{5}|} = \frac{A_{40^1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0{,}002452$$

Prêmio Puro periódico Anual

- A teoria até agora nos levou ao cálculo do Prêmio nivelado a ser pago pelo segurado uma vez escolhido o valor do benefício.

- Pensemos agora na seguinte situação:

- Um segurado procura um fundo de pensão e sabe quanto ele, o segurado, poderá depositar no fundo de pensão anualmente para adquirir uma anuidade em sua aposentadoria (digamos, daqui a n anos).
  - Este segurado gostaria de saber qual o benefício ele receberá ser fizer os depósitos durante sua vida ativa.

Prêmio Puro periódico Anual

- Neste caso, conhecemos o valor do Prêmio nivelado, porém, não conhecemos o valor do benefício a ser pago.

  - ...não estamos querendo calcular o prêmio que, em média seja o suficiente para pagamento de sinistros.

  - ...queremos calcular o benefício que em média a seguradora não tenha nem ganho nem perda financeira.

EXEMPLO 4:

Um segurado de 40 anos quer comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado se propõe a pagar por 5 anos um prêmio de $\$\,0{,}003$ a contar do dia do contrato. Qual deverá ser o benefício contratado nesse seguro? Use a tábua $AT-49$ e uma taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 4 -Solução

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} bv^{T+1} & se\ 0 \leq T < 5 \\ 0 & se\ \ T > 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} 0{,}003\ \ddot{a}_{\overline{T_x}|} & se\ 0 \leq\ T <\ 5 \\ 0{,}003\ \ddot{a}_{\overline{5}|} & se\ \ T \geq 5 \end{cases}$$

Valor de $P_{40^1:\overline{5}|}$ é conhecido. Então:

$$b = \frac{0{,}003\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{A_{40:\overline{5}|}} = \frac{0{,}003(4{,}696544)}{0{,}0115156} \approx 1{,}22$$

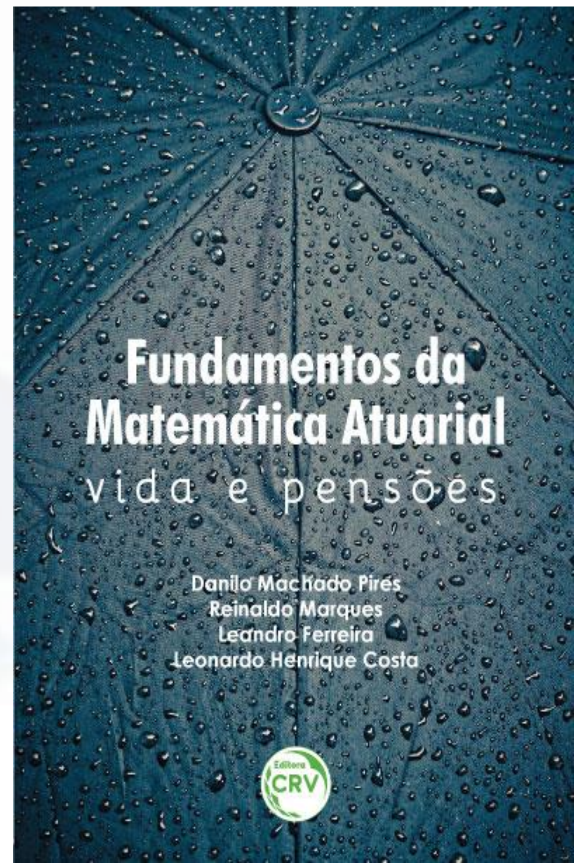
- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Aula 20

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Seja uma pessoa de 40 anos que queira pagar por um seguro que paga 1 *u.m.* Considerando a tábua de mortalidade AT-49 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação (3%).

a) Calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado?

b) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante toda a vigência do seguro?

c) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante 15 anos?

d) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado?

e) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos com benefício de $R\$50000,00$. Qual o valor da parcela do Prêmio puro único a ser pago pelo segurado, para o caso excepcional, do segurado poder pagar por 10 anos?

f) Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga R$ 250 mil se o segurado sobreviver durante o período de 3 anos. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago pelo segurado?

Prêmio Puro periódico Anual fracionado

- Esses prêmios podem ser pagos de forma fracionadas ao longo do ano.

$$P_x^{(m)} = \frac{E\left(Z_{T_x}\right)}{m\,\ddot{a}_{x:\bar{k}|}^{(m)}}$$

- Lembrando que:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 -_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

EXEMPLO 1:

Uma pessoa de 40 anos decide adquirir um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato, um prêmio fixo mensal. Qual o valor do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando a tábua AT-49 e uma taxa de juros 3% ao ano?

SOLUÇÃO

$$A_{40^1:\overline{5}|} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)} \approx \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - (1 -{}_5 p_{40} v^5)\left(\frac{12 - 1}{2 \times 12}\right)$$

$$P_{40^1:\overline{5}|}^{(12)} = \frac{A_{40^1:\overline{5}|}}{12\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)}} \approx 0{,}0002$$

Planos	Prêmio Puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.	$P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_kP_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$P_{x^1:\overline{n}\|} = \dfrac{A_{x^1:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n}\|^1} = \dfrac{A_{x:\overline{n}\|^1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$

PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_k\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{k}\vert}}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^1:\overline{n}\vert} = \dfrac{\bar{A}_{x^1:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}\vert^1} = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert^1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}\vert} = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$

EXEMPLO 2:

Considere que um indivíduo de idade x, decida fazer um seguro de vida temporário por 10 anos, que pague um benefício unitário no momento da morte do segurado. Dado que o tempo de vida adicional possa ser modelado pela distribuição exponencial, $T_x \sim Exp(0{,}02)$, calcule o prêmio $\bar{P}_{x^1:\overline{10}|}$ anual, que deverá ser pago pelo segurado. Considere $\delta = 0{,}06$.

EXEMPLO 2

$$\bar{P}_{x^1:\overline{10}|} = \frac{\bar{A}_{x^1:\overline{10}|}}{\bar{a}_{x:10|}},$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{\left(1-e^{-\delta 10}\right)}{\delta} e^{-\alpha 10}$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-\delta t} \alpha e^{-\alpha t} dt$$

Após resolver as integrais acima e substituir $\delta = 0{,}06$ e $\alpha = 0{,}02$.

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} \approx 6{,}8834$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} \approx 0{,}13766$$

$$\bar{P}_{x^1:\overline{10}|} \approx \frac{0{,}13766}{6{,}8834} \approx 0{,}01999$$

Relações importantes

$$\bar{P}_x = \frac{i}{\delta} P_x$$

$$\bar{P}_{x^1:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|}$$

$$\bar{P}_{x:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|} + P_{x:\overline{n|}^1}$$

- A busca do valor da parcela do prêmio através do princípio da equivalência, estabelece uma paridade entre os gatos do segurado e da seguradora. Contudo ...

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P\left(Y > Z_{T_x}\right) = \epsilon$$

Prêmio Puro periódico Anual

- Como $L = Y - Z_{T_x}$ par o caso em que trata-se do prêmio relacionado seguros de vida, tem-se:

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P\left(\bar{P}\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right) > be^{-\delta T}\right) = \epsilon$$

$$P\left(\bar{P}\left(1 - e^{-\delta T}\right) > \delta be^{-\delta T}\right) = \epsilon$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$P\left(e^{\delta T}\left(1-e^{-\delta T}\right) > \frac{\delta b}{\bar{P}}\right) = \epsilon$$

$$P\left(e^{\delta T} > \frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right) = \epsilon$$

$$P\left(\delta T > ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)\right) = \epsilon$$

$$P\left(T > \frac{ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta}\right) = \epsilon$$

Necessário a distribuição de T o benefício b e a taxa de juros i.

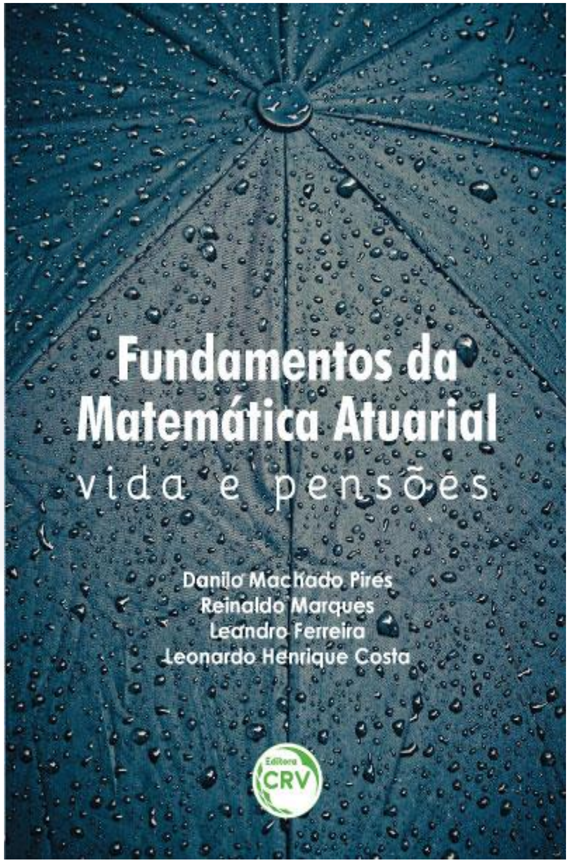
- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Aula 21

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Prêmios Anuidades

- Com exceção do seguro diferido, os prêmios de seguro serão pagos durante o período de cobertura do mesmo.

- No caso das anuidades em geral os prêmios são pagos antes do período de sua vigência.

Prêmios Anuidades

$$L = Y_p - Y_b$$

- $Y_p = b\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$: compromisso do segurado por k anos,
- Y_b: compromisso da seguradora (alguma modalidade de anuidade diferida).

$$E(L) = 0$$

$$P(Y_b) = \frac{E(Y_b)}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Prêmios Anuidades

Planos	Prêmio puro
Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\vert}\ddot{a}_x\right) = \dfrac{{}_{k\vert}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k\vert}}}$
Anuidade antecipada vitalícia diferida por n anos, com prêmios limitados a k anos. $(k \leq n)$	$P\left({}_{n\vert}\ddot{a}_x\right)_k = \dfrac{{}_{n\vert}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k\vert}}}$
Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n\vert}}\right) = \dfrac{{}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n\vert}}}{\ddot{a}_{x:\overline{k\vert}}}$
Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}\right) = \dfrac{{}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{k\vert}}^{(m)}}$
...	

EXEMPLO 1

Uma pessoa de 20 anos de idade, decide comprar uma anuidade vitalícia que pague um benefício igual a 1, caso chegue vivo à idade de 60 anos. Qual o valor do prêmio puro pago por essa pessoa para adquirir esse plano? Considere a tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

SOLUÇÃO:

*Não faz sentido adquiri rendas vitalícias imediatas a prêmios periódicos, todavia, é justificável adquirir rendas vitalícias diferidas. Assim:

EXEMPLO 1

$$P\left({}_{40|}\ddot{a}_{20}\right) = \frac{{}_{40|}\ddot{a}_{20}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{v^{40}\ {}_{40}p_{20}\ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}}}{\frac{(N_{20}-N_{60})}{D_{20}}} = \frac{N_{60}}{(N_{20}-N_{60})}$$

$$P\left({}_{40|}\ddot{a}_{20}\right) \approx 0{,}157468$$

Caso o segurado tenha interesse de receber \$25000,00 ao ano, então:

$$25000P\left({}_{40|}\ddot{a}_{20}\right) \approx 25000(0{,}157468\ ) \approx 3936{,}711$$

EXEMPLO 2

Suponha que uma pessoa de 18 anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir mensalmente para sua aposentadoria (que também será mensal e vitalícia) durante um período de 33 anos. Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de $\$10000,00$ e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 5% ao ano? (considere a Tábua AT-49)

SOLUÇÃO:

$$P\left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}\right) = \frac{{}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$${}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33}\left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{22}\right) \approx 2{,}5516$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - (1 - {}_{33}p_{18}v^{33})\left(\frac{11}{22}\right) \approx 16{,}1999$$

$$P\left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}\right) \approx \frac{2{,}5516}{16{,}1999} \approx 0{,}1575071$$

Logo o valor pago mensalmente será de $\mathbf{\$1575,07}$

Lista (entregar)

1) Considere uma pessoa de idade 30 que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga $R\$1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição Uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja, $T \sim U(0,70)$. Suponha que $i = 5\%\ a.a.$

Calcule o prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

2) Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de $P = 0{,}157468$.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do benefício contratado pelo segurado?

3) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga $R\$\,1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(\alpha)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

4) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que paga $R\$\,1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(0{,}02)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado, considere $\delta = 0{,}06$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.