

# Aula 15-Implementação

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

<https://atuaria.github.io/portahalley>

# Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){  
  v <- 1/(1+i)  
  px    <- 1-qx  
  pxx   <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))  
  t     <- (0:(length(pxx)-1))  
  a     <- (1-v^(t+1))/(1-v)  
  ax    <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1]))  
  return(ax)  
}
```

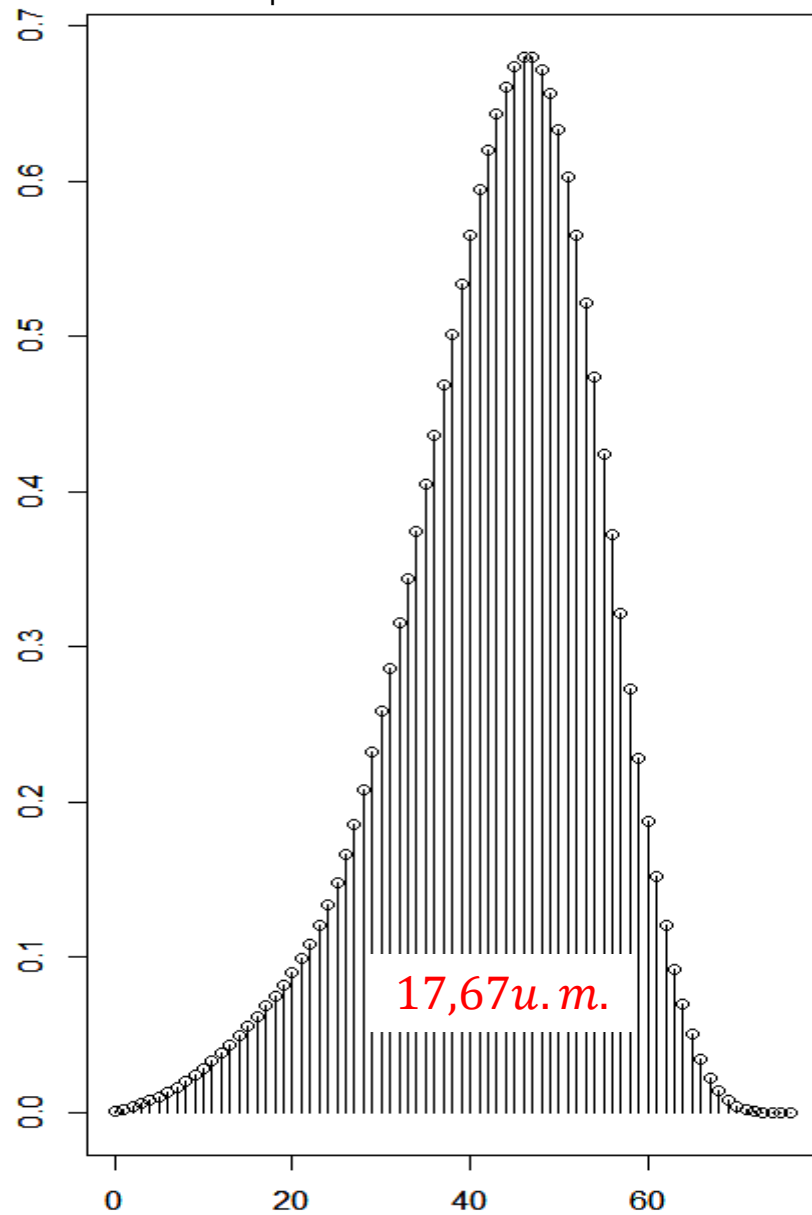
# Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

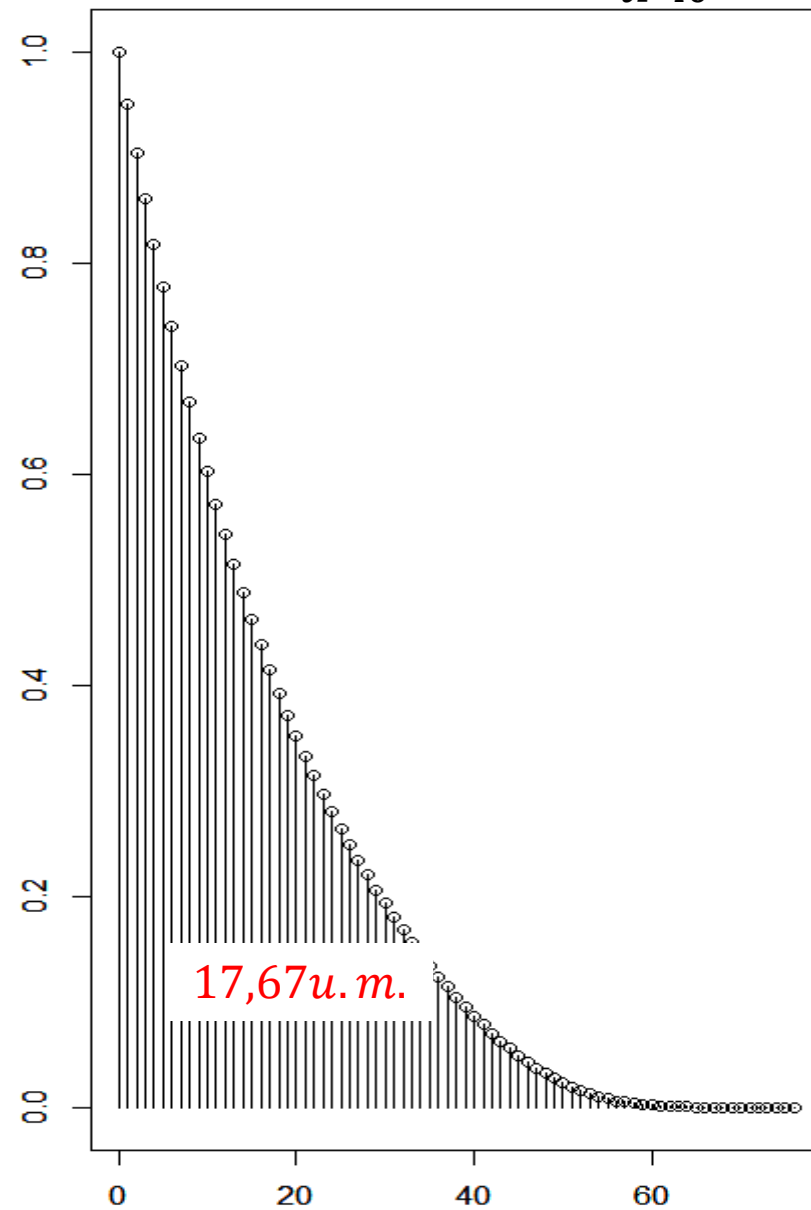
```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){  
  v <- 1/(1+i)  
  px  <- 1-qx  
  pxx <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))  
  t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(bx)  
}
```

$\ddot{a}_{40}$   $i = 5\%$  AT-2000M

$\ddot{a}_{t+1|t} p_{40} q_{40+t}$



$v^t_t p_{40}$



Tempo adicional

Tempo adicional

# Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){  
  
  v<- 1/(1+i)  
  px    <- 1-qx  
  pxx   <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])  
  ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))  
  t     <- (1:(length(pxx)))  
  ## t   <- (0:(length(pxx)-1))  
  a     <- v*(1-v^t)/(1-v)  
  ## a   <- (1-v^(t+1))/(1-v)  
  ax    <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])  
  ## ax  <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])  
  return(ax)  
}
```

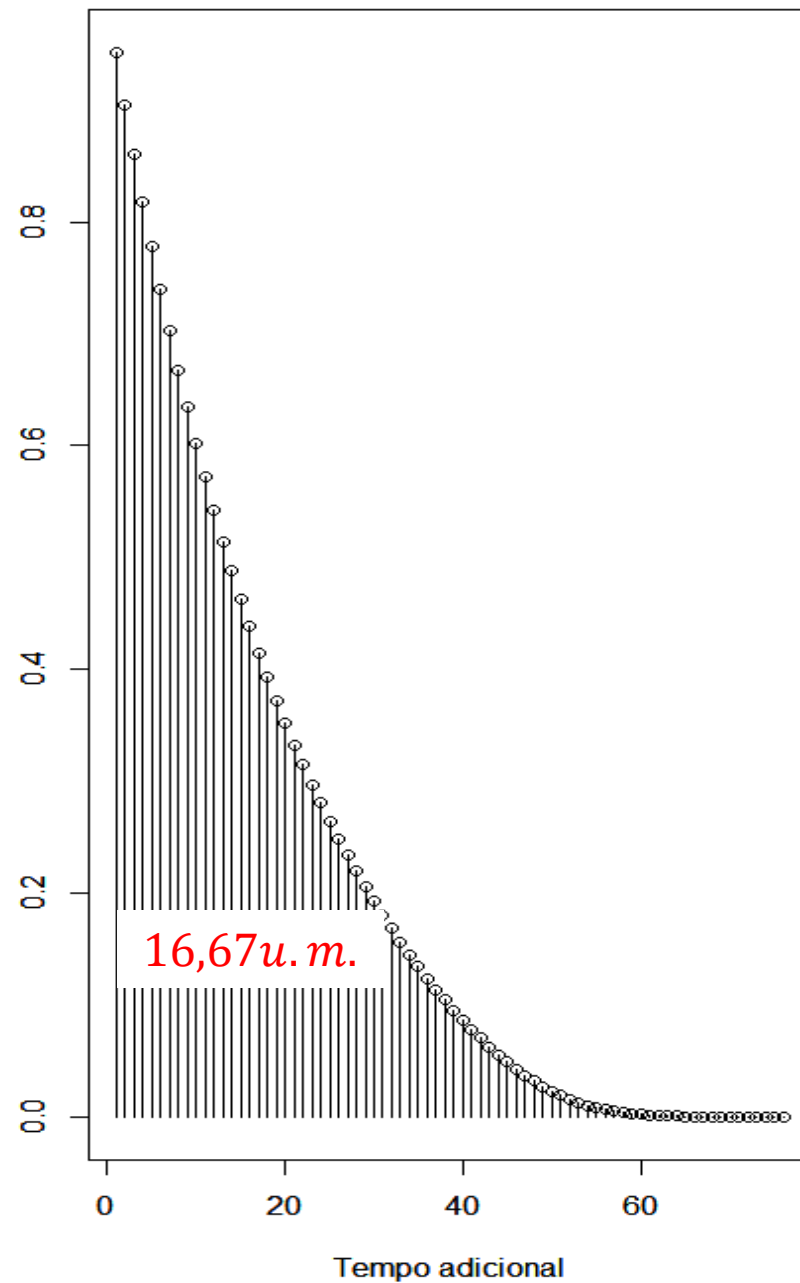
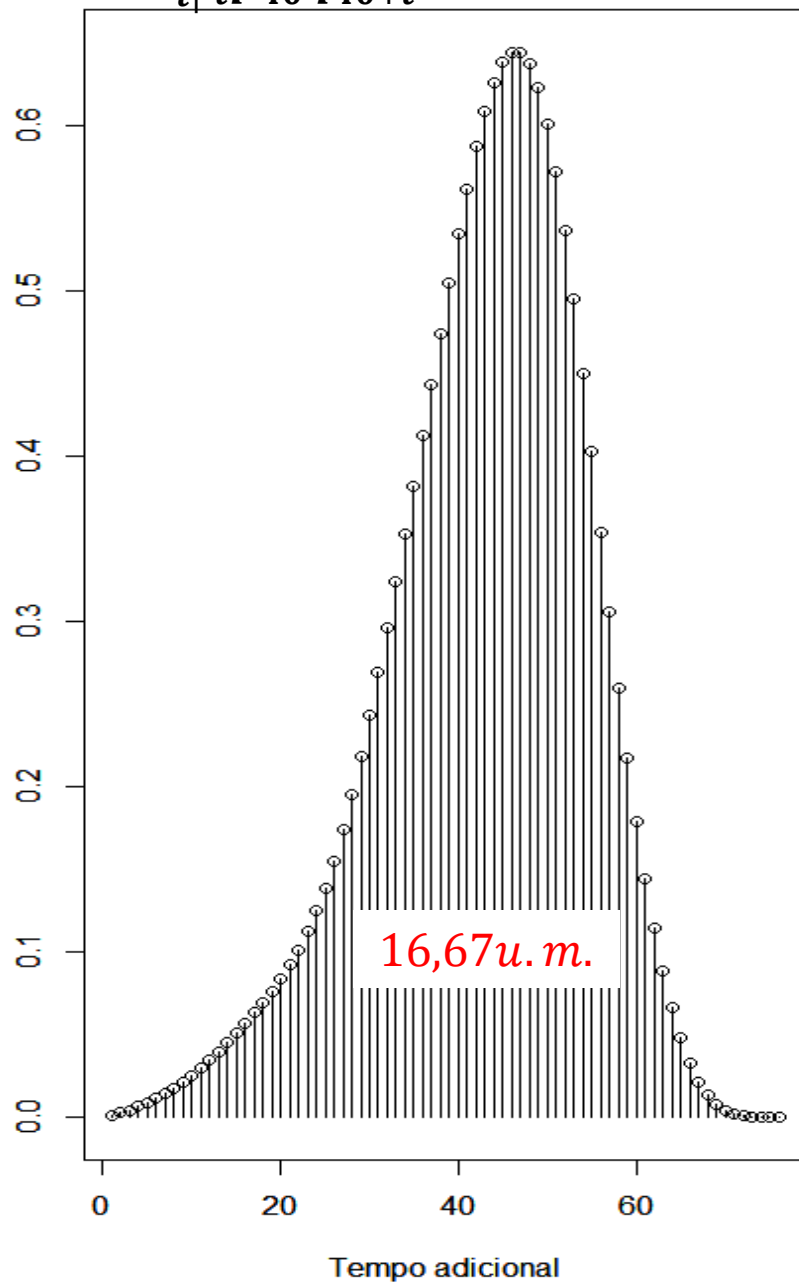
# Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){  
  v      <- 1/(1+i)  
  px     <- 1-qx  
  pxx    <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])  
  ## pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))  
  t      <- (1:(length(pxx)))  
  ## t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  bx     <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(bx)  
}
```

$a_{40}$  $i = 5\%$ 

AT-2000M

 $v^t_{tp_{40}}$  $a_{t|tp_{40}q_{40+t}}$ 

# Anuidade imediata Temporária

```
AnuiAntTemp<-function(i,idade,n,b){  
  v    <- 1/(1+i)  
  px   <- 1-qx  
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):(idade+n-1)]) )  
  t    <- (0:(length(pxx)-1))  
  ax   <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(ax)  
}
```

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

```
AnuiPostTemp<-function(i,idade,n,b){  
  v    <- 1/(1+i)  
  px   <- 1-qx  
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):(idade+n)])  
  t    <- 1:length(pxx)  
  ax   <- b*sum(v^(t)*pxx)  
  return(ax)  
}
```

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_x$$



### EXEMPLO 13:

Seja uma pessoa  $x = 25$  anos, e considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano. Calcule  $A_{25}$ ,  $\ddot{a}_{25}$  e  $a_{25}$

## EXEMPLO 13:

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left( \frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t}$$

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left( \frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25}$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left( \frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} = 0,08320205$$

```

premio<-function(b,idade,i){
  v    <- (1/(1+i)) ^ (1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax   <- b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
}

```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 19,25276$$

$$a_{25} = \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 18,25276$$

```

AnuiAnt<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  t    <- (0:(length(pxx)-1))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

```

AnuiPost<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  t    <- (1:(length(pxx)))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

# Exemplo de Cálculo de seguros

- PortalHalley

<https://phalley.shinyapps.io/interface-atuarial/>

- AppCATU

[https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt\\_BR](https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt_BR)

- R (Lifecontingencies)

<https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf>

# Aula 15-Relações entre Anuidade e seguro pago ao final do ano de morte

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

### EXEMPLO 13:

Dada uma pessoa de 25 anos ( $x = 25$ ), calcule  $A_{25}$ ,  $\ddot{a}_{25}$  e  $a_{25}$ .

Considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano.

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left( \frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} = 0,08320205$$

```

premio<-function(b,idade,i){
  v    <- (1/(1+i)) ^ (1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax   <- b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
}

```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left( \frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 19,25276$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left( \frac{1}{1,05} \right)^t {}_t p_{25} = 18,25276$$

```

AnuiAnt<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  t    <- (0:(length(pxx)-1))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

```

AnuiPost<-function(i,idade,b){
  v    <- 1/(1+i)
  px   <- 1-qx
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  t    <- (1:(length(pxx)))
  bx   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}

```

# Relações entre Seguros e Anuidades

➤ Consideramos um seguro de vida inteiro com tempo discreto (seguro pago no final do ano da morte):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x (1 - p_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} [v^{t+1} {}_t p_x - v^{t+1} {}_t p_x (p_{x+t})]$$

➤ Assim:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x p_{x+t}$$

$${}_t p_x p_{x+t} = P(T_x > t) P(T_{x+1} > 1) = P(T_x > t + 1)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1} p_x$$




# Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t+1} p_x = v \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x$$


$$A_x = v \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x$$

$$A_x = v \ddot{a}_x - a_x$$

# Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1:\bar{n}}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}} - a_{x:\bar{n}}|$$

$$A_{x:\bar{n}}| = v\ddot{a}_{x:\bar{n}} - a_{x:\overline{n-1}}|$$

# EXEMPLO 15

Determine a variância das seguintes variáveis aleatórias.

$$a) \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} =$$

$$b) a_{\overline{T_x}|} =$$

# SOLUÇÃO (Letra a)

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

Logo

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} = \frac{1 - Z_{T_x}}{1 - v}$$

$$\text{var}(\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}) = \text{var}\left(\frac{1 - v^{T+1}}{1 - v}\right) = \frac{\text{var}(v^{T+1})}{(1 - v)^2}$$

$$\text{var}(\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(1 - v)^2}$$

# SOLUÇÃO (Letra b)

$$1 + a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}$$

Logo

$$a_{\overline{T_x|}} = \frac{v - Z_T}{1 - v}$$

$$\text{var}(a_{\overline{T_x|}}) = \text{var}\left(\frac{v - Z_{T_x}}{1 - v}\right) = \frac{\text{var}(v^{T+1})}{(1 - v)^2}$$

$$\text{var}(a_{\overline{T_x|}}) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(1 - v)^2}$$

# Variância (Anuidade Vitalícia )

$$\text{var}(a_{\overline{T_x|}}) = \text{var}(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}})$$

$$\text{var}(a_{\overline{T_x|}}) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(1 - v)^2}$$

# Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} + A_{x:\overline{n}|} + iA_{x^{1:\overline{n}|}} + i = 1$$

# Anuidades fracionadas

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)



# Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{mn-1} v^{\frac{t}{m}}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left( 1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v + \dots + v^{1+\frac{1}{m}} + \dots + v^{n-\frac{1}{m}} \right) = \frac{1}{m} \left( \frac{1 - \left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{k=1}^m v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}}$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} \left( 1 + v^{\frac{1}{m}} + \dots + v + \dots + v^{1+\frac{1}{m}} + \dots + v^{n-\frac{1}{m}} \right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} \left( \frac{1 - \left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

# Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}_{\overline{T+\frac{1}{m}}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left( \frac{1 - v^{T+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right), T \geq 0 \quad a_{\overline{T}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} \left( \frac{1 - v^T}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right), T \geq 1$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \frac{t}{m} p_x$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \frac{t}{m} p_x$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

# Anuidades vitalícias fracionadas

➤ Relação 1.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$
$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} {}_t p_x q_{x+t}$$

➤ Relação 2.

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$
$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v \left( \frac{1-v^t}{1-v} \right) {}_t p_x q_{x+t}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

## EXEMPLO 15

Seja uma pessoa de 40 anos que queira adiquir uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado e postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro fracionado em pagamentos mensais, a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = R\$17,67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17,67 - \frac{12 - 1}{2 \times 12} = R\$ 17,21$$

Como  $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$a_{40} = R\$16,67$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16,67 + \frac{12 - 1}{2 \times 12} = R\$17,12$$

## Anuidades temporárias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n) \left( \frac{m-1}{2m} \right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n) \left( \frac{m-1}{2m} \right)$$

## Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

# Anuidades vitalícias diferidas fracionadas

$${}_k|\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left( \ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right)$$

De forma idêntica

$${}_k|a_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left( a_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \right)$$