Matemática Atuarial II

Aula 8

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Status vida conjunta-função densidade

A densidade de $T_{x,y}$ é obtida por meio de:

$$f_{T_{x,y}}(t) = \frac{\partial F_{T_{x,y}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \ {}_tq_{x,y}}{\partial t} = \frac{\partial \left[{}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x \, {}_tq_y \right]}{\partial t}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = \frac{\partial \left[F_{T_x}(t) + F_{T_y}(t) - F_{T_x}(t) \, F_{T_y}(t) \right]}{\partial t}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - \left[f_{T_x}(t) F_{T_y}(t) + f_{T_y}(t) F_{T_x}(t) \right]$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_x}(t) F_{T_y}(t) - f_{T_y}(t) F_{T_x}(t)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) \left[1 - F_{T_y}(t) \right] + f_{T_y}(t) \left[1 - F_{T_x}(t) \right]$$

Status vida conjunta-função densidade

$$\ldots$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t)\left[1 - F_{T_y}(t)\right] + f_{T_y}(t)[1 - F_{T_x}(t)]$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t)\left(1 - {}_t q_y\right) + f_{T_y}(t)(1 - {}_t q_x)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t)\ {}_t p_y + f_{T_y}(t)\ {}_t p_x$$

Status vida conjunta-força de mortalidade

$$\mu(x+t, y+t) = \frac{f_{T_{x,y}}(t)}{{}_tp_{x,y}}$$

$$\mu(x+t, y+t) = \frac{f_{T_x}(t)\ {}_tp_y + f_{T_y}(t)\ {}_tp_x}{{}_tp_x\ {}_tp_y} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x} + \frac{f_{T_y}(t)}{{}_tp_y}$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

Importante notar que:

$$f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x\ {}_tp_y[\mu(x+t) + \mu(y+t)]$$

Resumo

Seja $T_{x,y} = min\{T_x, T_y\}$ então:

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x \, {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x \, {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - {}_t p_{x,y}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = f_{T_x}(t) \, {}_t p_y + f_{T_y}(t) \, {}_t p_x = {}_t p_x \, {}_t p_y [\mu(x+t) + \mu(y+t)]$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

EXEMPLO 1: Determine a função sobrevivência e a função acumulada (mortalidade) para o status de vida conjunta composto por (x, y) tal que, seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

EXEMPLO 1:

$$f(t)=\begin{cases}0{,}02(10-t) & 0<t<10\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

$$_{t}q_x = {}_{t}\,q_y = \int_0^t 0{,}02(10-u)du = 0{,}02[10u-0{,}5u^2]_{u=0}^{u=t}$$

$$\boldsymbol{_{t}q_x = {}_{t}\,q_y = \begin{cases}0 & t\le 0\\ 0,2\left(t-0,05t^2\right) & 0<t<10\\ 1 & t>10\end{cases}}$$

$$_{t}p_x = {}_{t}\,p_y = \int_t^{10} 0{,}02(10-u)du = 0{,}02[10u-0{,}5u^2]_{u=t}^{u=10}$$

$$\boldsymbol{_{t}p_x = {}_{t}\,p_y = \begin{cases}1 & t\le 0\\ 1-0,2\left(t-0,05t^2\right) & 0<t<10\\ 0 & t>10\end{cases}}$$

$$
{}_t q_x = {}_t q_y = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0{,}2(t - 0{,}05t^2) & 0 < t < 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases}
$$

$$
{}_t p_x = {}_t p_y = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2) & 0 < t < 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases} = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 0{,}01(10 - t)^2 & 0 < t < 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases}
$$

$$
{}_t p_{x,y} = {}_t p_x \, {}_t p_y = [1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)][1 - 0{,}2(t - 0{,}05t^2)]
$$

$$
\boldsymbol{{}_t p_{x,y} = \left[1 - 0{,}2\left(t - 0{,}05t^2\right)\right]^2 = \left[0{,}01(10 - t)^2\right]^2}
$$

E

$$
F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_{x,y} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x \, {}_t q_y = 1 - {}_t p_{x,y}
$$

$$
{}_t q_{x,y} = 0{,}2(t - 0{,}05t^2) + 0{,}2(t - 0{,}05t^2) - [0{,}2(t - 0{,}05t^2)]^2
$$

$$
\boldsymbol{{}_t q_{x,y} = 0{,}4\left(t - 0{,}05t^2\right) - 0{,}04\left(t - 0{,}05t^2\right)^2 = 1 - \left[0{,}01(10 - t)^2\right]^2}
$$

EXEMPLO 2: Ainda com os dados do exemplo 1 determine a força de mortalidade ,função de densidade e a expectativa de vida para o status de vida conjunta composto por (x, y).

EXEMPLO 2:

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_t p_x} = \frac{0{,}02(10-t)}{0{,}01(10-t)^2} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10-t}} = \mu(y+t) \quad 0 < t < 10$$

$$\mu(x+t, y+t) = \frac{2}{10-\mathrm{t}} + \frac{2}{10-\mathrm{t}} = \frac{4}{10-\mathrm{t}}$$

EXEMPLO 2: $f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x \, {}_t p_y [\mu(x+t) + \mu(y+t)]$

$$f_{T_{xy}}(t) = [0{,}01(10-t)^2][0{,}01(10-t)^2]\left[\frac{2}{10-t} + \frac{2}{10-t}\right]$$

$$\boldsymbol{f_{T_{x,y}}(t) = \left[0{,}01(10-t)^2\right]^2 \frac{4}{10-t}, \qquad 0 < t < 10.}$$

ou

$$\boldsymbol{f_{T_{x,y}}(t) = \left[1 - 0{,}2\left(t - 0{,}05t^2\right)\right]^2 \frac{4}{10-t}, \qquad 0 < t < 10.}$$

EXEMPLO 2:

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\infty} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x \, dt$$

$$e_{x,y} = E\left(T_{x,y}\right) = \int_0^{\infty} t f_{T_{x,y}}(t) dt = \int_0^{\infty} {}_t p_{x,y} \, dt$$

$$e_{x,y} = \int_0^{10} [0{,}01(10-t)^2]^2 dt = \int_0^{10} 0{,}0001(10-t)^4 dt$$

$$e_{x,y} = \int_0^{10} 0{,}0001(10000 - 4000t + 600t^2 - 40t^3 + t^4) dt = \mathbf{2}$$

EXEMPLO 3: Calcule

$$g(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+s,y+s)ds}$$

em que $\mu(x+s, y+s) = \frac{4}{10-s}$

EXEMPLO 3: Calcule

$$g(t) = e^{-\int_0^t \mu(x+s,y+s)ds}$$

em que$\mu(x+s, y+s) = \frac{4}{10-s}$

$$g(t) = e^{-\int_0^t \left(\frac{4}{10-s}\right)ds} = e^{-4\int_0^t \left(\frac{1}{10-s}\right)ds} = e^{-4[-\ln(10-s)]_{s=0}^{s=t}}$$

$$g(t) = e^{-4[-\ln(10-t)+\ln(10)]} = e^{4\ln(10-t)}\ e^{-4\ln(10)}$$

$$g(t) = \left[e^{\ln(10-t)}\ \right]^4 \left[e^{\ln(10)}\ \right]^{-4} = \frac{(10-t)^4}{10000}$$

$$g(t) = 0{,}0001(10-t)^4 = {}_t\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$$

Status vida conjunta

$$ {}_tp_{x,y} = e^{-\int_0^t \mu(x+s,y+s)ds} $$

$$ {}_tp_{x,y} = {}_tp_x \times {}_tp_y $$

$$ {}_tq_{x,y} = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+s,y+s)ds} $$

$$ {}_tq_{x,y} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x \, {}_tq_y $$

$$ {}_tq_{x,y} = 1 - {}_tp_{x,y} $$

$$ \mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) $$

$$ f_{T_{x,y}}(t) = {}_tp_{x,y} \, \mu(x+t, y+t) $$

$$ e_{x,y} = \int_0^\infty t f_{T_{x,y}}(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_{x,y} \, dt $$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

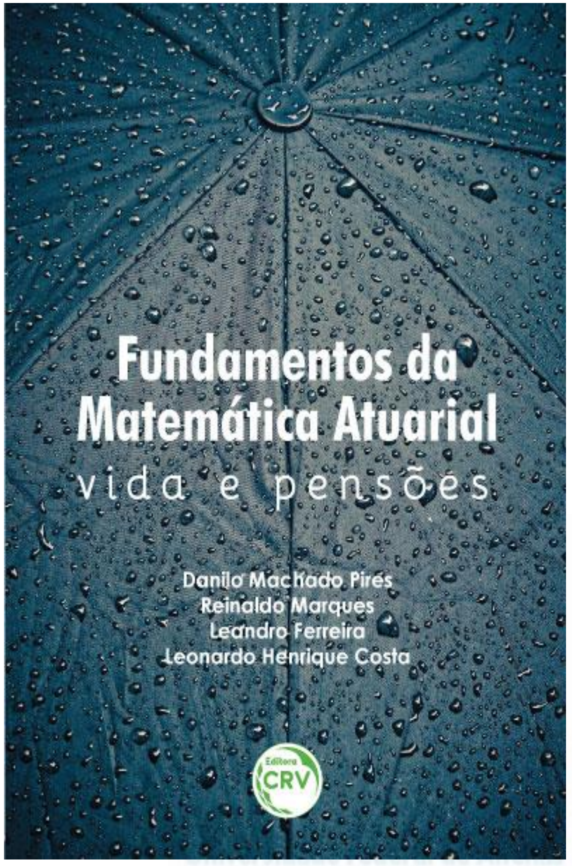
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Matemática Atuarial II

Aula 9

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Status vida conjunta (Seguro vitalício pago no momento da "falha")

Seja $T_{x,y}$ a variável aleatória associada ao tempo adicional do status vida conjunta, onde T_x e T_y são as variáveis aleatórias contínuas e independentes entre si, então o prêmio puro único do seguro de vida vitalício com efeito imediato e benefício (unitário) pago no momento da falha do status é dado por:

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{x,y}}(t)dt$$

em que $f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_{x,y}[\mu(x+t) + \mu(y+t)]$

EXEMPLO 1: Seja o tempo de vida futuro ao nascer dos indivíduos x e y, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$$

Determine o premio puro único para um seguro vitalício para o status $u = \{x, y\}$. Considere δ.

EXEMPLO 1:

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \; {}_t p_{x,y} \mu(x+t, y+t) dt$$

$${}_t p_x = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha t} = {}_t p_y$$

$$\mu(x+t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} = -\frac{-\alpha e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t}} = \alpha = \mu(y+t)$$

EXEMPLO 1:

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_tp_x \, {}_tp_y [\mu(x+t) + \mu(y+t) \,] dt$$

Como ${}_tp_u = {}_t\,p_{x,y} = {}_t\,p_x \, {}_tp_y$ e$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} \left(e^{-t\delta}\right)(e^{-\alpha t})^2 (2\alpha) dt$$

$$\bar{A}_{x,y} = (2\alpha) \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+2\alpha)} dt$$

$$\bar{A}_{x,y} = 2\alpha \left[-\frac{1}{(2\alpha+\delta)e^{t(2\alpha+\delta)}} \right]_0^{\infty} = \frac{2\alpha}{2\alpha+\delta}$$

Status vida conjunta (Seguro temporário pago no momento da "falha")

Caso o seguro for temporário por n anos, temos:

$$\bar{A}_{u^1:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t} f_{T_u}(t)dt$$

em que $u = \{x, y\}$.

EXEMPLO 2: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10-t) & 0 < t < 10 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Determine O valor presente atuarial temporário por 5 anos para o status $u = \{x, y\}$, considere $\delta = 0{,}05$.

EXEMPLO 2: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine O valor presente atuarial temporário por 5 anos para o status $u = \{x, y\}$, considere $\delta = 0{,}05$.

Resp

$$\bar{A}_{u^1:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-\delta t} f_{T_u}(t) dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\overline{5}|} = \int_0^5 \mathrm{e}^{-\delta t} \ {}_t p_{x,y} [\mu(x + t) + \mu(y + t)] dt$$

EXEMPLO 2:

$$\bar{A}_{u^1:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-\delta t} f_{T_u}(t)dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\overline{5}|} = \int_0^5 \mathrm{e}^{-\delta t}\ {}_t p_{x,y}[\mu(x+t)+\mu(y+t)]dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\overline{5}|} = \int_0^5 (e^{-t0{,}05})(0{,}01)^2(10-t)^4\left(\frac{4}{10-\mathrm{t}}\right)dt$$

$$\bar{A}_{u^1:\overline{5}|} = 0{,}0004\int_0^5 (e^{-t0{,}05})(10-t)^3 dt \approx 0{,}86143$$

Status vida conjunta

$$\bar{A}_{x,y} \approx \frac{i}{\delta} A_{x,y}$$

$$\bar{A}_{u^{1}:\overline{n|}} \approx \frac{i}{\delta} A_{u^{1}:\overline{n|}}$$

em que $u = \{x, y\}$.

Dotal puro/Dotal misto

O dotal puro aplicado ao status vida conjunta se caracteriza por pagar o benefício somente se todos os indivíduos do status sobreviverem ao período contratado. Já o seguro dotal misto garante que o benefício será pago caso o status falhe dentro do período de cobertura n, ou todos os indivíduos sobrevivam a esse período.

$$\bar{A}_{u:\bar{n}|^{1}} = v^{n}\ {}_{n}p_{x,y} = v^{n}\ {}_{n}p_{x}\ {}_{n}p_{y}$$

$$\bar{A}_{u:\bar{n}|} = \bar{A}_{u:\bar{n}|^{1}} + \bar{A}_{u^{1}:\bar{n}|}$$

em que $u = \{x, y\}$.

EXEMPLO 3: Qual o valor do prêmio puro único calculado para um dotal misto aplicado ao status vida conjunta composto por duas vidas, tal que, $T_x \sim Exp(0{,}028)$ e $T_y \sim Exp(0{,}025)$? Considere a taxa de juros instantânea de $\delta = 0{,}06$ e 5 anos de cobertura .

$$\bar{A}_{u:\overline{5}|} = \bar{A}_{u:\overline{5}|^1} + \bar{A}_{u^1:\overline{5}|}$$

em que $u = \{x, y\}$.

$$\bar{A}_{u:\overline{5}|^1} = e^{-0,06\times 5}\ {}_5p_x\ {}_5p_y$$

$$\bar{A}_{u:\overline{5}|^1} = e^{-0,06\times 5}\int_5^\infty 0,028e^{-0,028t}dt\int_5^\infty 0,025e^{-0,025t}dt \approx 0,569$$

$$\bar{A}_{\mathrm{u}^1:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-0,06t}\ {}_tp_{x,y}[\mu(x+t)+\mu(y+t)]dt,$$

$$\bar{A}_{\mathrm{u}^1:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-0,06t}\,e^{-0,028t}e^{-0,025t}[0,028+0,025]dt$$

$$\bar{A}_{\mathrm{u}^1:\overline{5}|} = \int_0^5 e^{-0,113t}\,0,053dt \approx 0,2024$$

$$\bar{A}_{u:\overline{5}|} = \bar{A}_{u:\overline{5}|^1} + \bar{A}_{u^1:\overline{5}|}$$

em que $u = \{x, y\}$.

$$\bar{A}_{u:\overline{5}|^1} \approx 0{,}569 \qquad \bar{A}_{\mathrm{u}^1:\overline{5}|} \approx 0{,}2024$$

$$\bar{A}_{u:\overline{5}|} \approx 0{,}569 + 0{,}2024 \approx 0{,}7714$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022