

Matemática atuarial

AULA 23- Reservas

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

Reservas

- Uma reserva matemática é um fundo formado pelas seguradoras a partir de parte dos prêmios pagos, como garantia de suas operações.
- As reservas podem ser puras ou carregadas, a depender de quais despesas a reserva se relacionam, se são somente as despesas com benefícios ou com todos os gastos de gestão.

Reservas

- No ramo de seguros, geralmente os planos são com longos períodos de cobertura.
 - Por vezes o que se verifica é que no períodos iniciais ocorre um excedente de prêmios recebidos em relação a benefícios pagos.
- Como exemplo considere que uma pessoa de 40 anos de idade deseja fazer um seguro de vida de benefício unitário ao final do ano de morte, em que possa pagar os prêmios anualmente durante toda a cobertura do seguro que é de 5 anos.

Reservas

➤ Assim ao considerar tábua AT-49 e uma taxa de juros $i = 0,05$ ao ano tem-se:

- **Opção 1**

$$P_{40^{1:\overline{5}|}} = \frac{A_{40^{1:\overline{5}|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0,002395$$

- **Opção 2**

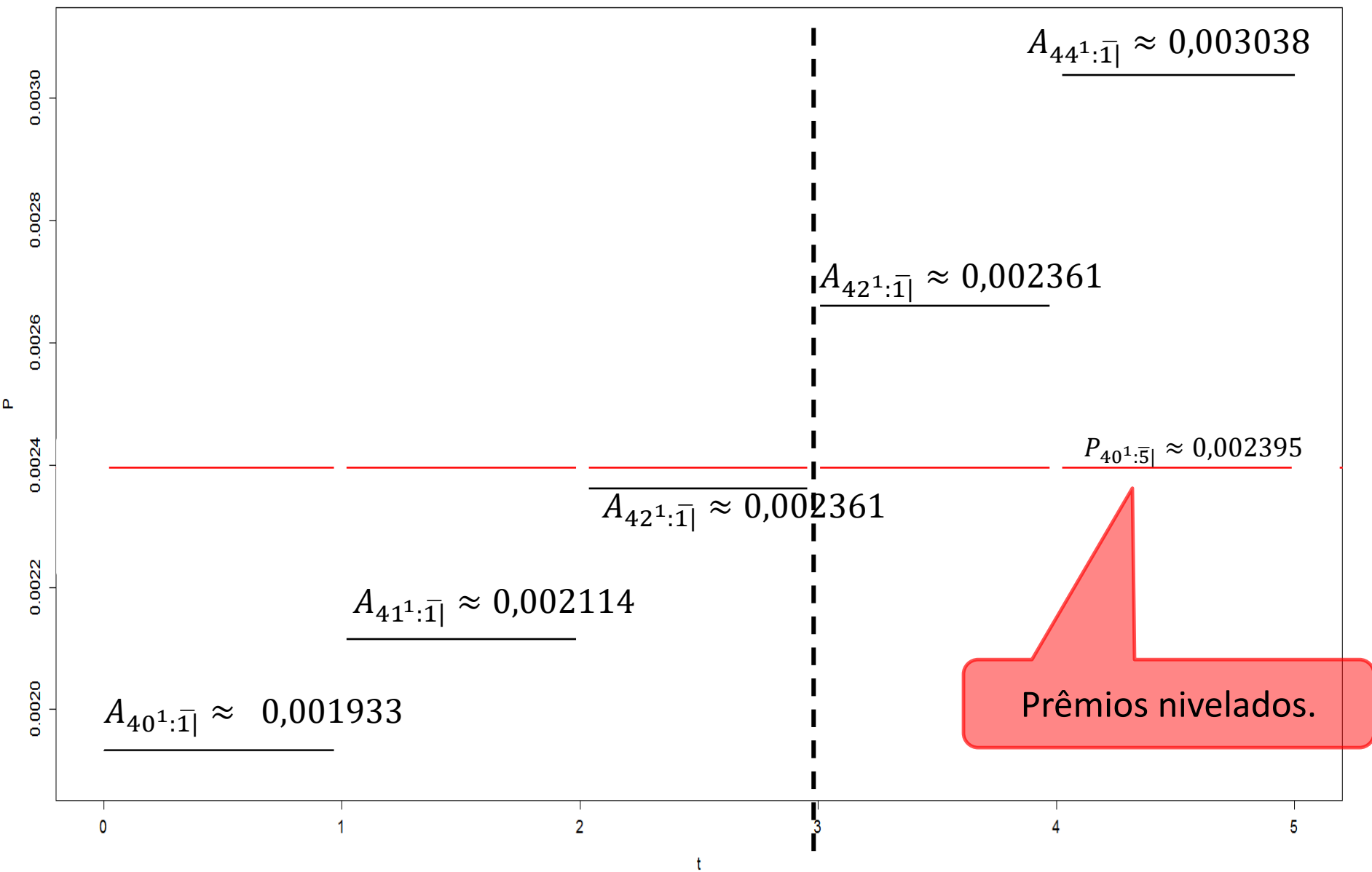
$$A_{40^{1:\overline{1}|}} = v^1 q_{40} \approx 0,001933$$

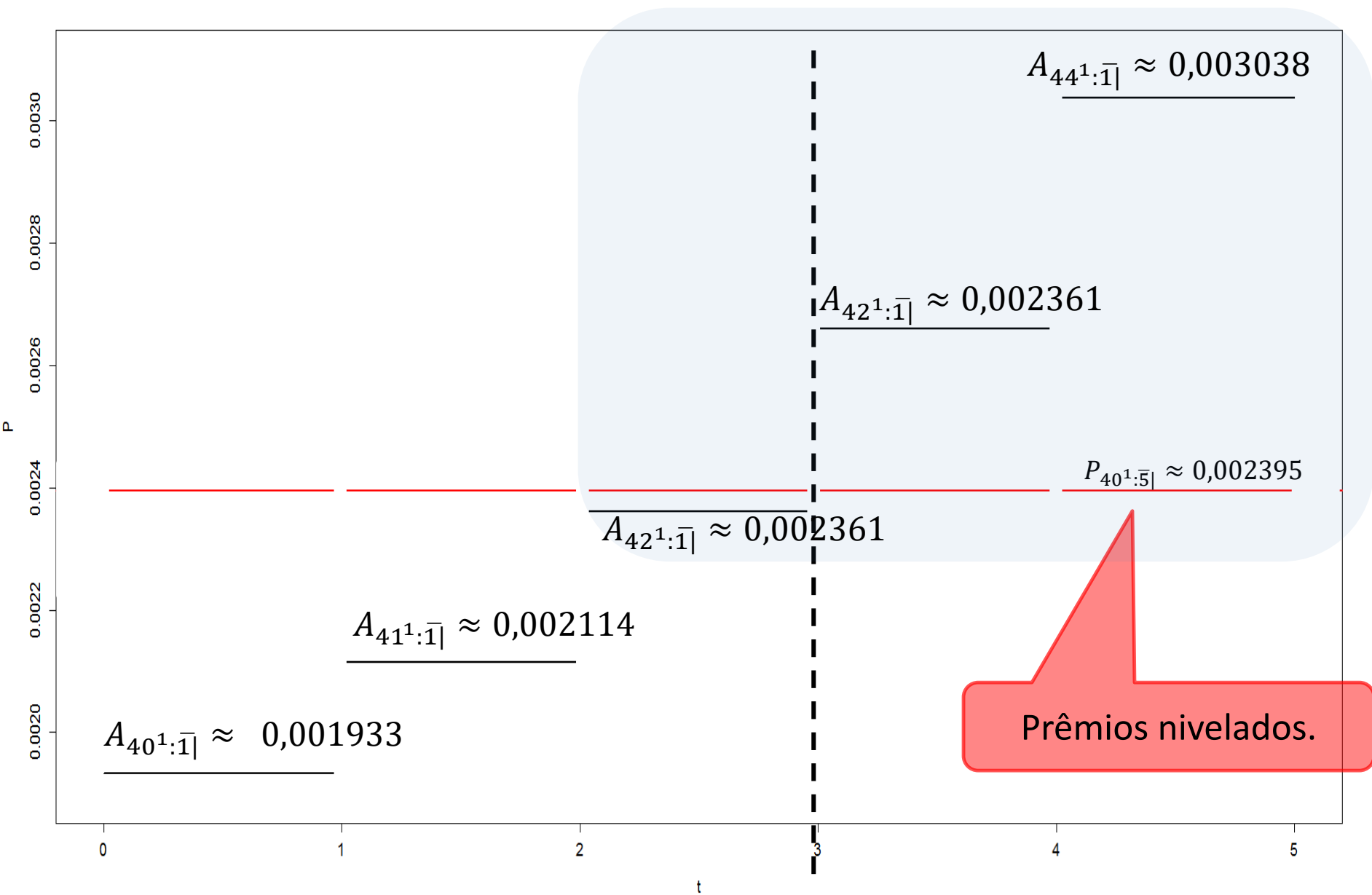
$$A_{41^{1:\overline{1}|}} = v^1 q_{41} \approx 0,002114$$

$$A_{42^{1:\overline{1}|}} = v^1 q_{42} \approx 0,002361$$

$$A_{43^{1:\overline{1}|}} = v^1 q_{43} \approx 0,00266$$

$$A_{44^{1:\overline{1}|}} = v^1 q_{44} \approx 0,003038$$





Reservas

- Apenas as contribuições que faltam ser feitas ao segurado não são suficientes para pagamento de benefício.
- Então parte desse excedente obtido nos primeiros anos é vital para que se possa garantir o pagamento de benefícios que ainda estão por vir,
 -é necessário o uso da Reserva matemática (reserva).

Reservas

- Reserva num determinado momento, é a diferença entre o valor atuarial das responsabilidades futuras da seguradora e o valor das responsabilidades futuras do segurado, a partir desse momento.

$$Rm_t = Rb_t - Rp_t$$

- Rm_t : Reserva média ao tempo t
- Rb_t : O valor atuarial do compromisso da seguradora no instante t
- Rp_t : O valor atuarial do compromisso com os prêmios, vindos do segurado.

Reservas

- Ao considerar o produto atuarial referente a uma pessoa de idade x cujo tempo de vida adicional é T_x .

$$Rm(T_x) = Rb(T_x) - Rp(T_x)$$

$Rb(T)$: variável aleatória valor presente dos benefícios futuros.

$Rp(T)$: variável aleatória valor presente dos prêmios futuros,

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- O método de reservas prospectivo consiste ao valor esperado de $Rm(T_x)$, levando em conta os compromissos futuros.

$$Rm(T) = v^{T+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{T+1}|}$$

$$T > x + t.$$

$$E = [Rm(T)] = {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

P_x : ao prêmio periódico anual $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$.

EXEMPLO 1

Qual a reserva (pura) que deve ser formada depois de 2 anos de um seguro de vida vitalício comprado por um indivíduo com idade 40 de idade? Considere $b = 1$, $i = 5\%$ ao ano e a tábua de vida AT-2000 feminina.



EXEMPLO 1

A Reserva pelo método prospectivo

$${}_2V_{40} = A_{42} - P_{40}\ddot{a}_{42}.$$

Logo

$${}_2V_{40} \approx 0,01375.$$

Lista.

Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida inteiro que paga 1 *u.m.* ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevivência desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano.

$${}_mV_x = A_{x+m} - P\ddot{a}_{x+m}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

a) Calcule o prêmio puro nivelado para esse seguro.

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}}$$

b) Passados 5 anos de vigência do contrato, qual será a reserva que a seguradora deverá ter formado.

$${}_5V_{25} = A_{30} - P_{25}\ddot{a}_{30}$$

c) Passados 10 anos de vigência do contrato, qual será a reserva que a seguradora deverá ter formado.

$${}_{10}V_{25} = A_{35} - P_{25}\ddot{a}_{35}$$

d) Passados 15 anos de vigência do contrato, qual será a reserva que a seguradora deverá ter formado.

$${}_{15}V_{25} = A_{40} - P_{25}\ddot{a}_{40}$$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

$${}_tV_{x^{1:\bar{n}}|} = \begin{cases} A_{x+t^{1:\bar{n}-t}|} - P_{x^{1:\bar{n}}|} \ddot{a}_{x+t^{1:\bar{n}-t}|}, & t < n \\ 0, & t = n \end{cases}$$

$${}_tV_{x:\bar{n}|^1} = \begin{cases} A_{x+t:\bar{n}-t|^1} - P_{x:\bar{n}|^1} \ddot{a}_{x+t:\bar{n}-t|^1}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases}$$

EXEMPLO 2

Passados 2 anos de vigência de um contrato de seguros feito por uma pessoa de 40 anos de idade e cobertura de 5 anos, qual deverá ser o valor da reserva formada? Considere a tábua de vida AT-49 masculina, $b = 1$ e $i = 3\%$ ao ano.



EXEMPLO 2

$${}_2V_{40^{1:\overline{5}}|} = A_{42^{1:\overline{3}}|} - P_{40^{1:\overline{5}}|} \ddot{a}_{42:\overline{3}}|$$

$${}_2V_{40^{1:\overline{5}}|} \approx 0,01507.$$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

- A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

...

$${}_tV_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\bar{n}|} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases}$$

$${}_t^kV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_kP_x \ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|}, & t < k \\ A_{x+t}, & t \geq k \end{cases}$$

EXEMPLO 3

Passados 2 anos de vigência de um contrato de seguro de vida com cobertura de 5 anos, qual deverá ser o valor da reserva formada? Considere $x = 40$, tábua de vida AT-49 masculina, $b = 1$ e $i = 3\%$ ao ano, e que a seguradora cobre uma taxa de 0,005 ao ano referente a gastos de gestão.

$${}_2V_{40^{1:\overline{5}}|}^{\gamma} = \Pi^{\gamma} - P^{\gamma} \ddot{a}_{42:\overline{3}}|$$

$${}_2V_{40^{1:\overline{5}}|}^{\gamma} \approx (A_{42^{1:\overline{3}}|} + 0,005 \ddot{a}_{42:\overline{3}}|) - (P_{40^{1:\overline{5}}|} + 0,005) \ddot{a}_{42:\overline{3}}|$$

$${}_2V_{40^{1:\overline{5}}|}^{\gamma} \approx 0,00082$$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

T_x contínuo

- A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$${}_m\bar{V}_x = \bar{A}_{x+m} - \bar{P}_x \bar{a}_{x+m}$$

$${}_m\bar{V}_{x:1:\bar{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m:1:\bar{n}-m|} - \bar{P}_n \bar{a}_{x+m:\bar{n}-m|}, & m < n \\ 0, & m = n \end{cases}$$

$${}_m\bar{V}_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m:\bar{n}-m|} - \bar{P}_{x:\bar{n}|} \bar{a}_{x+m:\bar{n}-m|}, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

EXEMPLO 4

Passados 2 anos de vigência do contrato, qual será a reserva ${}_2\bar{V}_{40}$ que a seguradora deverá ter formado? Considere $\delta = 0,06$ ao ano e que $T_0 \sim U_C(0,120)$.

Solução:

$${}_2\bar{V}_{40} = \bar{A}_{42} - \bar{P}_{40} \bar{a}_{42}$$

$${}_tp_{42} = \frac{P(T > t+42)}{P(T > 42)} = \frac{\int_{t+42}^{120} \frac{1}{120} dt}{\int_{42}^{120} \frac{1}{120} dt} = \frac{\frac{120-42-t}{120}}{\frac{120-42}{120}} = \frac{78-t}{78} \quad {}_tq_{42} = 1 - \frac{78-t}{78} = \frac{t}{78}$$

Considerando que $\frac{\partial F_{T_x}(t)}{\partial t} = f_{T_x}(t)$, assim:

$$\frac{\partial F_{T_{42}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{78} \right) = \frac{1}{78} = f_{T_{42}}(t)$$

Logo

$$\mu(42+t) = \frac{f_{T_{42}}(t)}{1 - F_{T_{42}}(t)} = \frac{\frac{1}{78}}{\frac{78-t}{78}} = \frac{1}{78-t}$$

$$\bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} {}_tp_{42} \mu(42+t) dt$$

$$\bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} {}_tp_{42} dt$$

Solução:

$${}_2\bar{V}_{40} = \bar{A}_{42} - \bar{P}_{40}\bar{a}_{42}$$

$$\bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} {}_tp_{42}\mu(42+t)dt$$

$$\bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} {}_tp_{42}dt$$

$$\bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} \left(\frac{1}{78}\right) dt \approx 0,211693$$

$$\bar{a}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} \left(\frac{78-t}{78}\right) dt = \int_0^{78} \frac{(1-e^{-0,06t})}{0,06} \left(\frac{1}{78}\right) dt \approx 13,1385$$

$${}_2\bar{V}_{40} = 0,211693 - \bar{P}_{40}13,1385$$

Solução:

$${}_2\bar{V}_{40} = 0,211693 - \bar{P}_{40} 13,1385$$

$$\bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0,06t} \left(\frac{80-t}{80} \right) \frac{1}{80-t} dt$$

$$\bar{a}_{40} = \int_0^{80} e^{-0,06t} \left(\frac{80-t}{80} \right) dt$$

$$\bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0,06t} \frac{1}{80} dt \approx 0,206619$$

$$\bar{a}_{40} = \int_0^{80} e^{-0,06t} \left(\frac{80-t}{80} \right) dt = \int_0^{80} \frac{(1-e^{-0,06t})}{0,06} \left(\frac{1}{80} \right) dt \approx 13,223$$

$${}_2\bar{V}_{40} = 0,211693 - \left(\frac{0,206619}{13,223} \right) 13,1385 \approx 0,006394374$$

Solução:

$${}_2\bar{V}_{40} = 0,211693 - \left(\frac{0,206619}{13,223} \right) 13,1385 \approx 0,006394374$$

$$\bar{A}_{40} = \int_0^{80} e^{-0,06t} \frac{1}{80} dt \approx 0,206619$$

$$\bar{A}_{42} = \int_0^{78} e^{-0,06t} \left(\frac{1}{78} \right) dt \approx 0,211693$$

$$\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1$$

$$\bar{a}_{40} = \frac{1-0,206619}{0,06} \approx 13,22302$$

$$\bar{a}_{42} = \frac{1-0,211693}{0,06} \approx 13,3185$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

- A reserva pelo método **retrospectivo** é calculada a partir dos compromissos passados da seguradora.
- Para exemplificar, considere

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{A_{x^{1:\overline{t}|}} + {}_t|A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|} + {}_t|\ddot{a}_x}$$

$$P_x = \frac{A_{x^{1:\overline{t}|}} + v^t {}_tp_x A_{x+t}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|} + v^t {}_tp_x \ddot{a}_{x+t}}$$

$$0 = (A_{x^{1:\overline{t}|}} + v^t {}_tp_x A_{x+t}) - P_x (\ddot{a}_{x:\overline{t}|} + v^t {}_tp_x \ddot{a}_{x+t})$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$0 = A_{x^{1:\bar{t}}|} - P_x \ddot{a}_{x:\bar{t}} + v^t {}_t p_x (A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t})$$

Como ${}_t V_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$, então

$$0 = A_{x^{1:\bar{t}}|} - P_x \ddot{a}_{x:\bar{t}} + v^t {}_t p_x ({}_t V_x),$$

Logo

$${}_t V_x = \frac{P_x \ddot{a}_{x:\bar{t}} - A_{x^{1:\bar{t}}|}}{A_{x:\bar{t}}|1}$$

EXEMPLO 5

Qual a reserva (pura) que deve ser formada depois de 2 anos de um seguro de vida vitalício comprado por um indivíduo com idade 40 de idade? Considere $b = 1$, $i = 5\%$ ao ano e a tábua de vida AT-2000 feminina.



EXEMPLO 5

A reserva pelo método retrospectivo

$${}_2V_{40} = \frac{P_{40}\ddot{a}_{40:\overline{2}|} - A_{40}{}^1\overline{2}|}{A_{40:\overline{2}|}{}^1},$$

$${}_2V_{40} = \frac{0,007053 (1,951736) - 0,001308}{0,905752} \approx 0,01375.$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$${}_tV_x = \frac{P_x \ddot{a}_{x:\bar{t}|} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}^1}$$

$${}_tV_{x^1:\bar{n}|} = \frac{P_{x^1:\bar{n}|} \ddot{a}_{x:\bar{t}|} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}^1}$$

$${}_tV_{x:\bar{n}|} = \frac{P_{x:\bar{n}|} \ddot{a}_{x:\bar{t}|} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}^1}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$${}_tV_x = \frac{P\ddot{a}_{x:t} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}} = \frac{P\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}} - \frac{A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}$$

P é o prêmio periódico de uma modalidade qualquer.

Considerando $t = n$.

$${}_nV_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}{A_{x:\bar{n}|^1}} - \frac{A_{x^1:\bar{n}|}}{A_{x:\bar{n}|^1}}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$${}_nV_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{A_{x:\overline{n}|}^1} - \frac{A_{x^1:\overline{n}|}}{A_{x:\overline{n}|}^1}$$

Em que $\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{v^n {}_np_x}$ é conhecida como **anuidades “tontineira” (tontine)**.

Em que $\frac{A_{x^1:\overline{n}|}}{v^n {}_np_x}$ é o **custo acumulado do seguro**.

Reservas

- A anuidades “tontineira” foi concebida para pagar benefícios a sobreviventes da seguinte forma:
- Um grupo de participantes se une e faz pagamentos regulares ao fundo. Os participantes que morrem ao longo do período deixam de contribuir, ...
 - o benefício que já foi pago por eles será dividido aos sobreviventes passados n anos

$${}_n\ddot{S}_x = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{A_{x:\overline{n}|}^1}$$

Reservas

- A anuidade **tontineira** é o valor acumulado dos prêmios sujeitos a juros e sobrevivência.
- Este tipo de seguro pode ser um incentivo ao homicídio de pessoas próximo ao período final de contribuição e, por isso, não pode ser comercializado.

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.

