

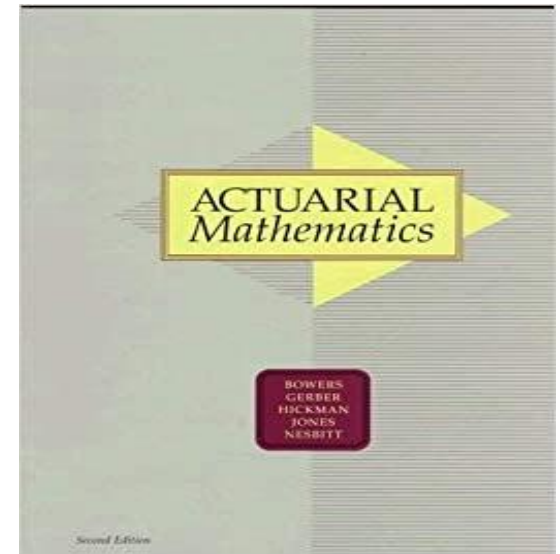
# Matemática Atuarial II

## AULA-1

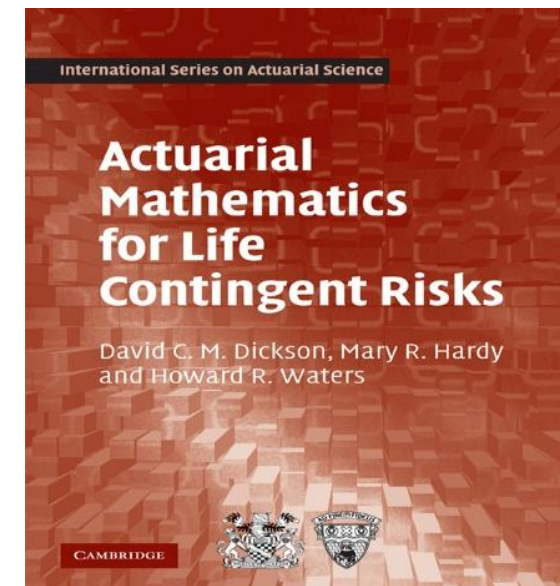
Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br  
Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

# Bibliografia

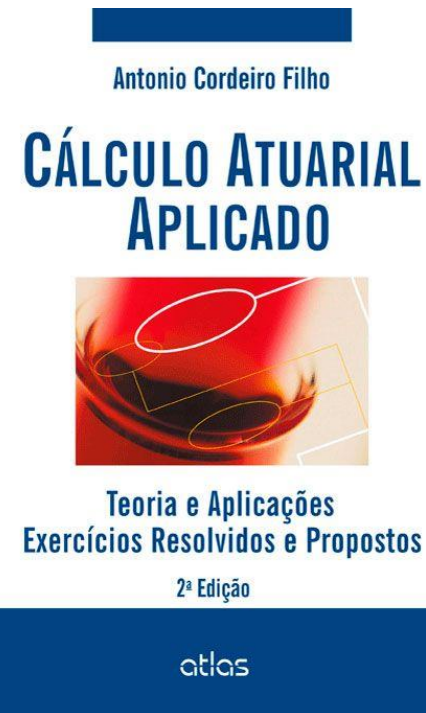
BOWERS, N. et al. **Actuarial mathematics**. 2. ed. Illinois: The Society of Actuaries, 1997



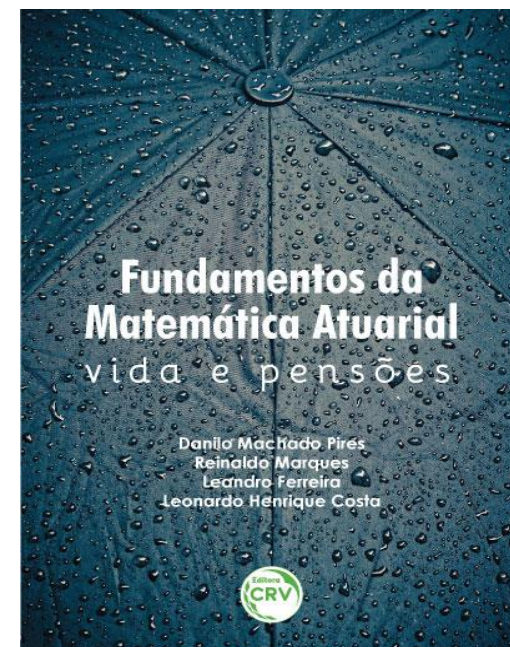
D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, Cambridge, 2013



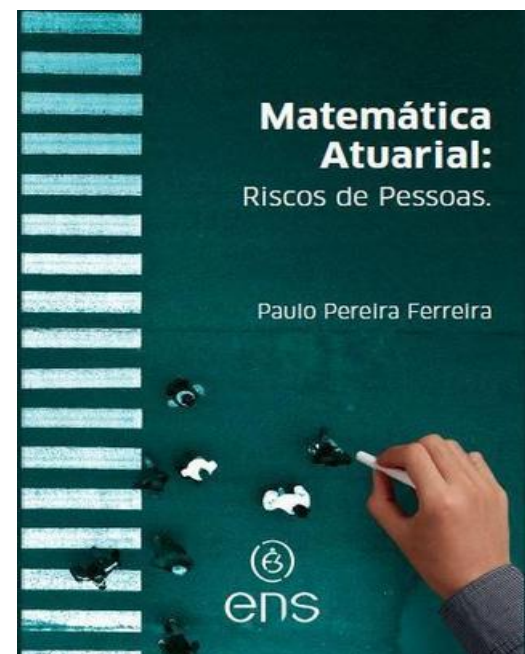
**CORDEIRO FILHO, Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos. São Paulo: Atlas, 2009.**



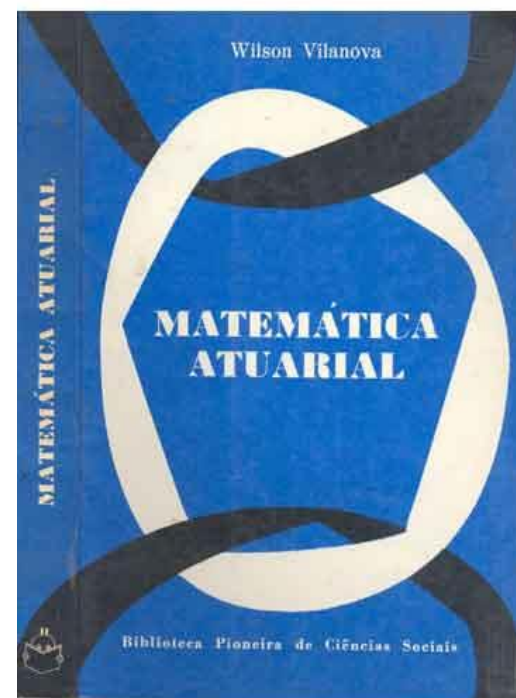
**PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões. Curitiba : CRV, 2022.**



**FERREIRA, P. P. Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019.



**VILANOVA, Wilson. Matemática atuarial: destinado aos cursos de ciências econômicas, contábeis e atuariais.** Liv. Pioneira, Ed. da Universidade, 1969.



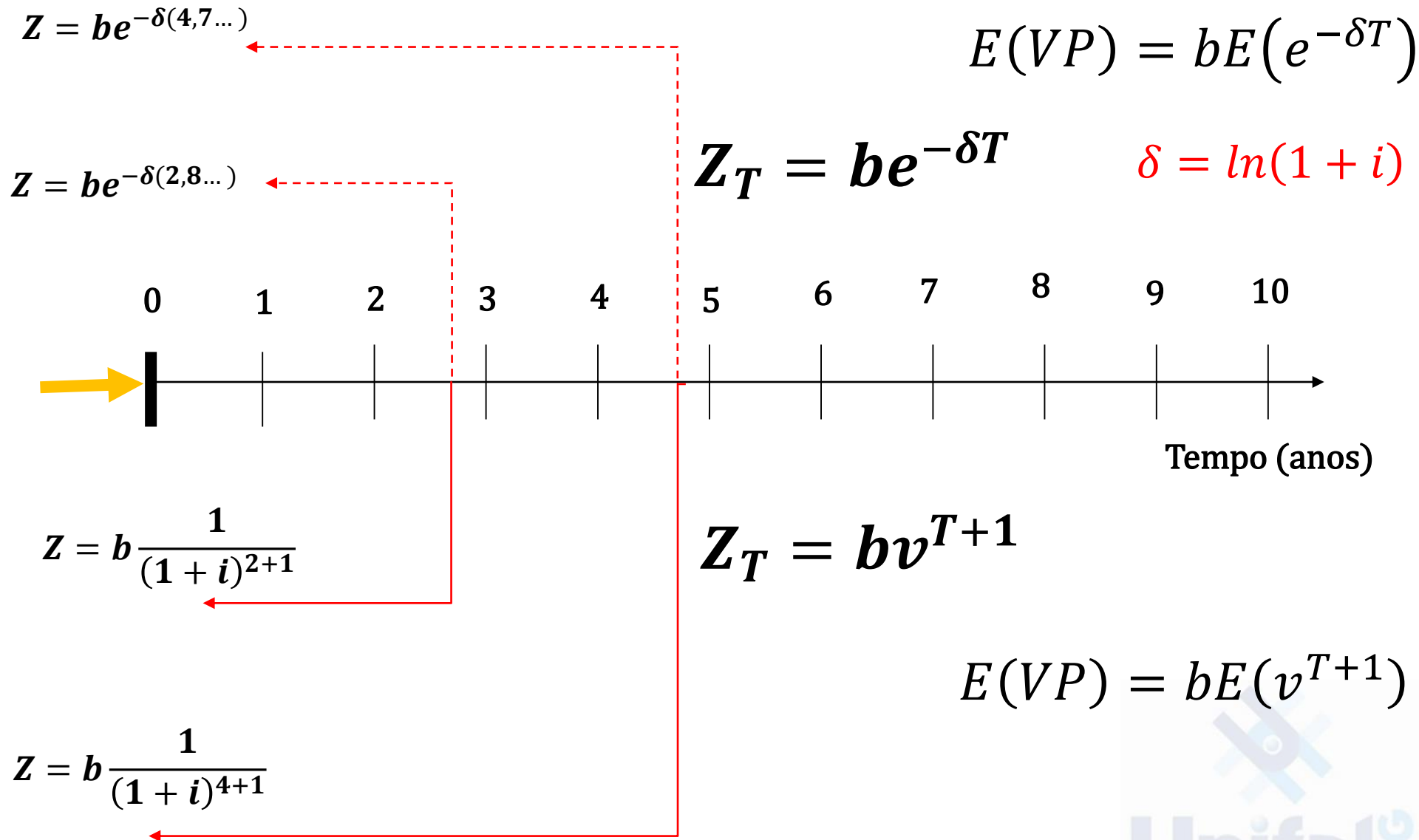
# Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
  - Avaliar riscos
  - Avaliar sistemas de investimentos
  - ...
  - Produtos atuariais do ramo vida
    - Seguros
    - Planos de previdência
    - Planos de benefício

# Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte.
  - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
  - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
  - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.

# Seguro de vida-Benefício(constante) igual a $b$



# SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu(x+t) dt}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(T_x = t)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} P(T_x = t)$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$



# Expectativa de vida

A expectativa de vida de uma pessoa de idade  $x$ , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = E(T_x) = \sum_{t=0}^{\omega-x} t {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t p_x$$

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

A expectativa de vida completa de uma pessoa de idade  $x$ , admitindo que a distribuição das mortes ao longo do ano é uniforme, é dada por:

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

**EXEMPLO 1:** Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos? Considere um benefício igual a \$1, com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$x$	$q_x$	$p_x$	$l_x$
...			
110	0,60392	0,39608	305,008
111	0,66819	0,33181	120,808
112	0,73948	0,26052	40,0852
113	0,81825	0,18175	10,443
114	0,90495	0,09505	1,89801
115	1,00000	0,00000	0,18041

$$A_{110} = \sum_{t=0}^{115-110} v^{t+1} ({}_t p_{110}) (q_{110+t}) \approx 0,9403557 u.m$$

**EXEMPLO 2:** Seja uma carteira com 100 apólices de seguro de vida vitalício com benefício pago no momento da morte, em que todas as apólices são independentes e identicamente distribuídas. Assumindo  $x = 60$  o tempo de vida adicional é modelado de tal forma que  ${}_tp_{60} = e^{-0,04t}$  e  $\mu(60 + t) = 0,04$ . Considerando que  $b = 1$  e  $\delta = 0,06$  qual é o valor do prêmio  $\Pi$  (utilizando aproximação normal) cuja probabilidade de que o total de indenizações dessa carteira o supere seja de 5%, ou seja  $P(S \leq \Pi) = 0,95$ .

$$P(S \leq \Pi) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}} \leq \frac{\Pi - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P\left(W \leq \frac{\Pi - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\Pi - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}} = w_\alpha$$

**SOLUÇÃO** Para cada apólice

$$\bar{A}_{60} = \int_0^{\infty} e^{-0,06t} 0,04 e^{-0,04t} dt = \mathbf{0,4}$$

$$var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{60} - (\bar{A}_{60})^2$$

$$var(Z_T) = \int_0^{\infty} e^{-0,12t} 0,04 e^{-0,04t} dt - (0,4)^2 \approx \mathbf{0,09}$$

Logo  $E(S) = 40$  e  $var(S) = 9$ .

$$P(S \leq \Pi) = 0,95 \quad P\left(W \leq \frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0,95$$

Como  $W \sim N(0,1)$ , então

$$\frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}} = w_{0,95} = 1,645$$
$$\Pi = 44,93.$$

# Seguros com benefício crescente

- Contratos de seguro com alta procura são aqueles em que o benefício pago pela seguradora varia conforme o tempo em relação a data do contrato.
- Algumas opções nesse sentido são aquelas em que ocorre um acréscimo ou decréscimo no benefício (anual) de acordo com uma progressão aritmética.
  - A importância segurada aumenta segundo uma progressão aritmética.

# Produtos Atuariais com benefício crescente

## Seguro de vida vitalício

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_t | A_x$$

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} {}_s | \bar{A}_x ds.$$

## Seguro de vida temporário

$$(IA)_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t | A_{x^{1:\overline{n-t}|}}$$

$$(I\bar{A})_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

**EXEMPLO 3:** Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

**EXEMPLO 3:** Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

**Solução:**

$$(IA)_{110} = \sum_{t=0}^5 {}_t|A_{110} = A_{110} + {}_1|A_{110} + {}_2|A_{110} + {}_3|A_{110} + {}_4|A_{110} + {}_5|A_{110} \\ \approx 1,4482.$$

$$(IA)_{110} \approx 1,4482$$



**EXEMPLO 4:** Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano,  $i = 4\%$  ao ano e utilize a tabela de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,003788.$$

**Solução:**

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} = \sum_{t=0}^4 t|A_{x^{1:\overline{5-t}|}} = A_{25^{1:\overline{5}|}} + {}_1|A_{25^{1:\overline{4}|}} + {}_2|A_{25^{1:\overline{3}|}} + {}_3|A_{25^{1:\overline{2}|}} + {}_4|A_{25^{1:\overline{1}|}}$$

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,01178.$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$E(Z_T) = \sum_t v^{t+1} P(T_x = t)$$

$$E(Z_T)$$

$$E(Z_T) = \int e^{\delta t} f_{T_x}(t) dt$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1, \dots \\ 0, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = Z_T {}_n p_x$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}}|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}} = A_{x^{1:\overline{n}}|} + A_{x:\overline{n}|}^1$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq m$$

$${}_m|A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m|A_x = A_x - A_{x^{1:\overline{m}}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}}|} = v^m {}_m p_x A_{x^{1+m:\overline{n}}|}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}}|} = A_{x^{1:\overline{m+n}}|} - A_{x^{1:\overline{m}}|}$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:1:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}} = A_{x:1:\overline{n}} + A_{x:\overline{n}}^1$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq m$$

$${}_m A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m A_x = A_x - A_{x:1:\overline{m}}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = v^m {}_m p_x A_{x+1+m:\overline{n}}$$

$${}_m A_{x:1:\overline{n}} = A_{x:1:\overline{m+n}} - A_{x:1:\overline{m}}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1, \dots \\ 0, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}}^1 = Z_T {}_n p_x$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0, T < n \end{cases} \quad \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 = Z_T {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x:1:\overline{n}} = \int_0^n Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, T \leq n \\ e^{-\delta n}, T > n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}} = \bar{A}_{x:1:\overline{n}} + \bar{A}_{x:\overline{n}}^1$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq m$$

$${}_m \bar{A}_x = \int_m^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, m \leq T \leq m+n$$

$${}_m \bar{A}_{x:1:\overline{n}} = \int_m^{m+n} e^{-\delta T} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x^{1:\bar{n}}}] = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\bar{n}}] = A_{x^{1:\bar{n}}}] + A_{x:\bar{n}]^1$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq m$$

$${}_m|A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$${}_m|A_x = A_x - A_{x^{1:\bar{m}}}]$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$${}_m|A_{x^{1:\bar{n}}}] = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$${}_m|A_{x^{1:\bar{n}}}] = v^m {}_m p_x A_{x^{1+m:\bar{n}}}]$$

$${}_m|A_{x^{1:\bar{n}}}] = A_{x^{1:\bar{m+n}}}] - A_{x^{1:\bar{m}}}]$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1, \dots \\ 0, T = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\bar{n}]^1 = Z_T {}_n p_x$$

$$E(Z_T)$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}}] = A_{x^{1:\bar{n}}}] \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x:\bar{n}}] = A_{x^{1:\bar{n}}}] \frac{i}{\delta} + A_{x:\bar{n}]^1$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x$$

$$(I\bar{A})_{x^{1:\bar{n}}}] = \frac{i}{\delta} (IA)_{x^{1:\bar{n}}}]$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0, T < n \end{cases} \quad \bar{A}_{x:\bar{n}]^1 = Z_T {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}}] = \int_0^n Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, T \leq n \\ e^{-\delta n}, T > n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\bar{n}}] = \bar{A}_{x^{1:\bar{n}}}] + \bar{A}_{x:\bar{n}]^1$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq m$$

$${}_m|\bar{A}_x = \int_m^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, m \leq T \leq m+n$$

$${}_m|\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}}] = \int_m^{m+n} e^{-\delta T} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

# Comutação- Seguro de vida

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_m|A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$${}_m|A_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

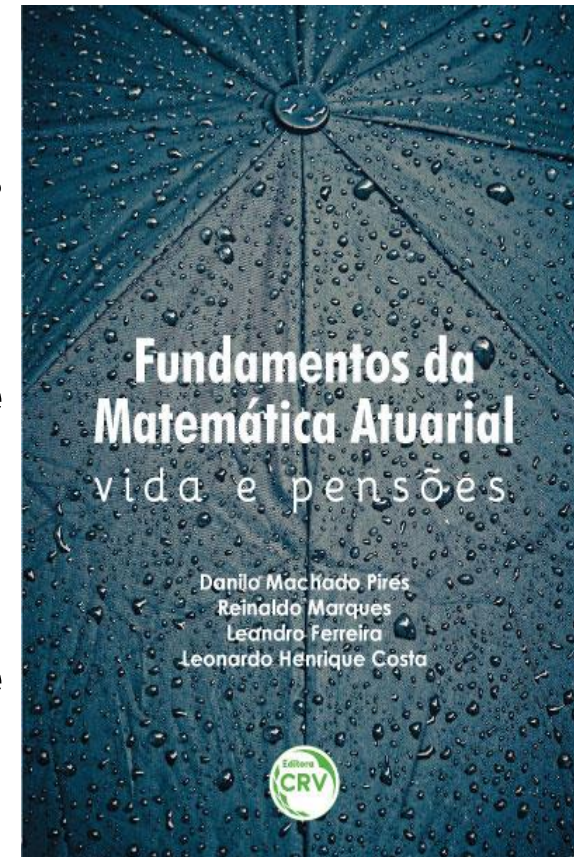
$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

$$(IA)_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \times M_{x+n}}{D_x}$$

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} - \frac{1}{2}$$

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



# Matemática Atuarial II

## AULA-2

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa  
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br



# Anuidades (Rendas)

- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras (previdência privada-complementar).
- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte.
  - Cobertura: por período determinado.
- São interrompidos em caso de morte...

# Anuidades (Rendas)

Anuidade **vitalícia** antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} P(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

Anuidade **vitalícia** postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} P(T_x = t)$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

Anuidade **temporária** antecipada

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

Anuidade **temporária** postecipada

$$a_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_x$$

**EXEMPLO 1:** Considere uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 *u.m.* em fluxo de caixa **antecipado/postecipado**. Considerando a tábua AT-2000 masculina e  $i = 5\%$  ao ano, calcule o valor do prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E(\ddot{a}_{\overline{T+1}|}) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_{40} q_{40+t} = \ddot{a}_{\overline{1}|} {}_0 p_{40} q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2}|} {}_1 p_{40} q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3}|} {}_2 p_{40} q_{42} + \dots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1-v^1}{1-v} {}_0 p_{40} q_{40} + \frac{1-v^2}{1-v} {}_1 p_{40} q_{41} + \frac{1-v^3}{1-v} {}_2 p_{40} q_{42} + \dots \approx 17,67$$

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_{40} = 1 + v {}_1 p_{40} + v^2 {}_2 p_{40} + v^3 {}_3 p_{40} + \dots \approx 17,67.$$

Postecipado,

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} {}_t p_{40} q_{40+t} = a_{\overline{1}|} {}_1 p_{40} q_{41} + a_{\overline{2}|} {}_2 p_{40} q_{42} + a_{\overline{3}|} {}_3 p_{40} q_{43} + \dots$$

$$a_{40} = \frac{v(1-v^1)}{1-v} {}_1 p_{40} q_{41} + \frac{v(1-v^2)}{1-v} {}_2 p_{40} q_{42} + \frac{v(1-v^3)}{1-v} {}_3 p_{40} q_{43} + \dots \approx 16,67$$

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_{40} = v {}_1 p_{40} + v^2 {}_2 p_{40} + v^3 {}_3 p_{40} + \dots \approx 16,67.$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | \ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | \ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$${}_m | \ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_m | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$${}_{m+1} | \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m | a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left( \sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|} {}_t p_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n}|} {}_n p_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t E_x = \sum_{t=1}^n v^t {}_t p_x$$

$${}_m | a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x} v^t {}_t p_x$$

$${}_m | a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$${}_m | a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$${}_m | a_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_m | a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

**EXEMPLO 2:** Considere que uma pessoa de 40 anos tenha interesse em uma variação do seguro dotal misto em que, caso de sobreviver a cobertura (25 anos) ele terá direito a **renda vitalícia** (anuidade postecipada) unitária. Considere a tábua de mortalidade AT-49 masculina e a taxa de juros de 3% ao ano.

**EXEMPLO 2:**

$$x = 40, n = 25$$

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0, 1, 2, \dots, 24 \\ {}_{25|}a_{\overline{T_{40}-25|}} & T \geq 25 \end{cases}$$

$$\Pi = E(Z_{T_{40}}) = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1} {}_t p_{40} q_{40+t} + \sum_{t=25+1}^{\omega-40-25} v^t {}_t p_{40}$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1} {}_t p_{40} q_{40+t} + v^{25} {}_{25} p_{40} \left( \sum_{t=1}^{\omega-65} v^t {}_t p_{65} \right)$$

$$\Pi = A_{40:1:\overline{25|}} + {}_{25|}a_{40}$$

# Comutação-Anuidades

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \left( \frac{N_{x+m}}{D_x} \right)$$

$${}_m|a_x = \left( \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \right)$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_m|\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$${}_m|a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\bar{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \times N_{x+n}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\bar{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \times N_{x+n+1}}{D_x}$$

# Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1:\bar{n}}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}} - a_{x:\bar{n}}|$$

$$A_{x:\bar{n}}| = v\ddot{a}_{x:\bar{n}} - a_{x:\overline{n-1}}|$$

$$A_{x^{1:\bar{n}}|} + A_{x:\bar{n}}| + iA_{x^{1:\bar{n}}|} + a_{x:\bar{n}}| i = 1$$

$$A_{x:\bar{n}}| + iA_{x^{1:\bar{n}}|} + ia_{x:\bar{n}}| = 1$$



## Anuidades temporárias fracionadas

## Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n) \left( \frac{m-1}{2m} \right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n) \left( \frac{m-1}{2m} \right)$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

# Anuidade Contínua

- O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu(x + t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Diferida

$${}_m|\bar{a}_x = \int_m^{\infty} v^m \bar{a}_{t-m} | {}_t p_x \mu(x + t) dt = \int_m^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$${}_m|\bar{a}_x = {}_m E_x \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura  $n$ .

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{t|} {}_t p_x \mu(x + t) dt + \bar{a}_{n|} {}_n p_x = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

Diferida

$${}_m|\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$${}_m|\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \bar{a}_{x+m:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

---

Fracionadas
Contínuas

Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$\bar{a}_x$
		Postecipada	$a_x$	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }$	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\overline{n} }$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n} }$	$a_{x:\overline{n} }^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	$m \ddot{a}_x$	$k \ddot{a}_x^{(m)}$	$m \bar{a}_x$
		Postecipada	$m a_x$	$k a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$m \ddot{a}_{x:\overline{n} }$	$k \ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}$	$m \bar{a}_{x:\overline{n} }$
		Postecipada	$m a_{x:\overline{n} }$	$k a_{x:\overline{n} }^{(m)}$	

Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Seguro vitalício-prêmios pagos durante  $k$  anos.

$${}_kP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura

$$P_{x^{1:\overline{n}|}} = \frac{A_{x^{1:\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

...

**EXEMPLO 3:** Um segurado adquire um seguro dotal misto que funciona da seguinte forma:

- Caso o segurado sobreviva ao período de  $n$  anos, então a seguradora irá pagar 1 u.m.
- Caso o segurado faleça neste período, a seguradora irá pagar **85%** da quantidade de prêmios pagos pelo segurado  $P$  por cada prêmio pago, sem capitalização) ao final do ano de morte.

Os prêmios serão pagos antecipadamente durante os  $n$  anos de vigência do seguro.

Qual deverá ser o prêmio pago pelo segurado considerando que ele tem hoje 50 anos e deseja um seguro de 15 anos de vigência, podemos modelar seu tempo de vida adicional por uma AT-49 e a seguradora se compromete a pagar uma taxa de juros anual de 5%?

## Compromisso do Segurado (Y)

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T|}}, & 0 < T < n \\ P\ddot{a}_{\overline{n|}}, & \text{se } T \geq n \end{cases} \quad E(Y) = P\ddot{a}_{50:\overline{n|}}$$

## Compromisso do Segurador (Z)

Caso  $t = 0$  então a seguradora deve ter hoje  $0,85(P)v$

Caso  $t = 1$  então a seguradora deve ter hoje  $0,85(2P)v^2$

Caso  $t = 2$  então a seguradora deve ter hoje  $0,85(3P)v^3$

...

Caso  $t = n$  então a seguradora deve ter hoje  $0,85(n + 1)Pv^{n+1}$

$$Z = \begin{cases} 0,85(t + 1)Pv^{(t+1)} & \text{se } t = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \\ v^n & \text{se } t \geq n \end{cases}$$

$$E(Z) = 0,85P \sum_{t=0}^{n-1} (t + 1)v^{t+1} {}_t p_{50} q_{50+t} + v^n {}_n p_{50}$$

É necessário achar um prêmio tal que  $E(L) = 0$

$$E(Y) = E(Z)$$

$$P \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{50} = 0,85P \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)v^{t+1} {}_t p_{50} q_{50+t} + v^n {}_n p_{50}$$

$$P = \frac{v^n {}_n p_{50}}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{50} - 0,85 \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)v^{t+1} {}_t p_{50} q_{50+t}}$$

$$P = \frac{v^{15} {}_{15} p_{50}}{\sum_{t=0}^{14} v^t {}_t p_{50} - 0,85 \sum_{t=0}^{14} (t+1)v^{t+1} {}_t p_{50} q_{50+t}} \approx 0,041877$$

# PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante $k$ anos.	${}_k\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{k} }}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^{1:\overline{n} }} = \frac{\bar{A}_{x^{1:\overline{n} }}}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n} ^1} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} ^1}}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n} } = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
...	



# Prêmios -Anuidades

Planos

Prêmio puro

Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P({}_k|\ddot{a}_x) = \frac{{}_k|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia diferida por  $n$  anos, com prêmios limitados a  $k$  anos. ( $k \leq n$ )

$$P({}_n|\ddot{a}_x)_k = \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P({}_k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{{}_k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P({}_k|\ddot{a}_x^{(m)}) = \frac{{}_k|\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}}$$

...

**EXEMPLO 4:** Suponha que uma pessoa de 18 anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir **mensalmente** por um período de 33 anos para sua aposentadoria ( **que também será mensal e vitalícia**). Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de \$10000,00 e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 3% ao ano? Considere a Tábua AT-49

## SOLUÇÃO:

$$P \left( {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \right) = \frac{m \times {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)}}{m \times \ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}}$$

$$P \left( {}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \right) = \frac{{}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$${}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33} \left( \ddot{a}_{51} - \frac{11}{24} \right) \approx 6,01$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - \left( 1 - {}_{33}p_{18}v^{33} \right) \left( \frac{11}{24} \right) \approx 20,76$$

$$P \left( {}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \right) \approx \frac{6,01}{20,76} \approx 0,289$$

Logo o valor pago mensalmente será de **\$2890**

# Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^\gamma = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$P^\gamma = \frac{\Pi^\gamma}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^\alpha = \Pi + V_\alpha$$

$$P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}} + P$$

$k$  pagamentos

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^c = \Pi + V_\gamma + V_\alpha$$

$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}}$$

**EXEMPLO 5:** Qual o valor do prêmio anual a ser cobrado de um segurado de 22 anos, que deseja adquirir um dotal misto com 10 anos de cobertura e benefício unitário? Utilize a tábua de vida AT-49 e considere que a seguradora trabalha com uma taxa de juros de 3% ao ano. Considere que esse produto requer um gastos anual de 0,005 com despesas administrativas e um gasto com despesas médicas de 0,002 que deve ser pago nos dois primeiros anos.

## EXEMPLO 5

$$P^c = P_{x:\bar{n}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{s}|}},$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0,005 + \frac{0,002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}} \approx 0,09107441.$$

# Reservas

- Uma reserva matemática é um fundo formado pelas seguradoras a partir de parte dos prêmios pagos, como garantia de suas operações.
- No ramo de seguros, geralmente os planos são com longos períodos de cobertura.
- Por vezes o que se verifica é que no períodos iniciais ocorre um excedente de prêmios recebidos em relação a benefícios pagos.

## Reservas de prêmios puros ( método prospectivo)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}$$

$${}_tV_{x^{1:\bar{n}}|} = \begin{cases} A_{x+t^{1:\bar{n}-t}|} - P_{x^{1:\bar{n}}|} \ddot{a}_{x+t:\bar{n}-t|}, & t < n \\ 0, & t = n \end{cases}$$

$${}_tV_{x:\bar{n}|^1} = \begin{cases} A_{x+t:\bar{n}-t|}^1 - P_{x:\bar{n}|}^1 \ddot{a}_{x+t:\bar{n}-t|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases}$$

$${}_tV_{x:\bar{n}} = \begin{cases} A_{x+t:\bar{n}-t|} - P_{x:\bar{n}} \ddot{a}_{x+t:\bar{n}-t|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases}$$

$${}_t^kV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_kP_x \ddot{a}_{x+t:\bar{k}-t|}, & t < k \\ A_{x+t}, & t \geq k \end{cases}$$



## Reservas de prêmios puros ( método prospectivo)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$${}_m\bar{V}_x = \bar{A}_{x+m} - \bar{P}_x \bar{a}_{x+m}$$

$${}_m\bar{V}_{x^{1:\bar{n}}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m^{1:\bar{n}-m}|} - \bar{P}_n \bar{a}_{x+m:\bar{n}-m|}, & m < n \\ 0, & m = n \end{cases}$$

$${}_m\bar{V}_{x:\bar{n}} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m:\bar{n}-m|} - \bar{P}_{x:\bar{n}} \bar{a}_{x+m:\bar{n}-m|}, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

**EXEMPLO 6:** Qual o valor das reservas formadas depois de 5, 10 e 15 anos, de um seguro de vida vitalício? Considere que  $x = 40$ ,  $i = 3\%$ ,  $b = 1$ , tábua AT-49 e que os prêmios sejam pagos em 11 parcelas iguais.

**SOLUÇÃO**

$${}_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0,03974$$

**EXEMPLO 6:** Qual o valor das reservas formadas depois de 5, 10 e 15 anos, de um seguro de vida vitalício? Considere que  $x = 40$ ,  $i = 3\%$ ,  $b = 1$ , tábua AT-49 e que os prêmios sejam pagos em 11 parcelas iguais.

**SOLUÇÃO**

$${}_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0,03974$$

$${}_{\textcolor{red}{5}}^{11}V_{40} = A_{45} - {}_{11}P_{40}(\ddot{a}_{45:\overline{6}|}) \approx 0,2056$$

$${}_{\textcolor{red}{10}}^{11}V_{40} = A_{50} - {}_{11}P_{40}(\ddot{a}_{50:\overline{1}|}) \approx 0,4953$$

$${}_{\textcolor{red}{15}}^{11}V_{40} = A_{55} \approx 0,5350$$

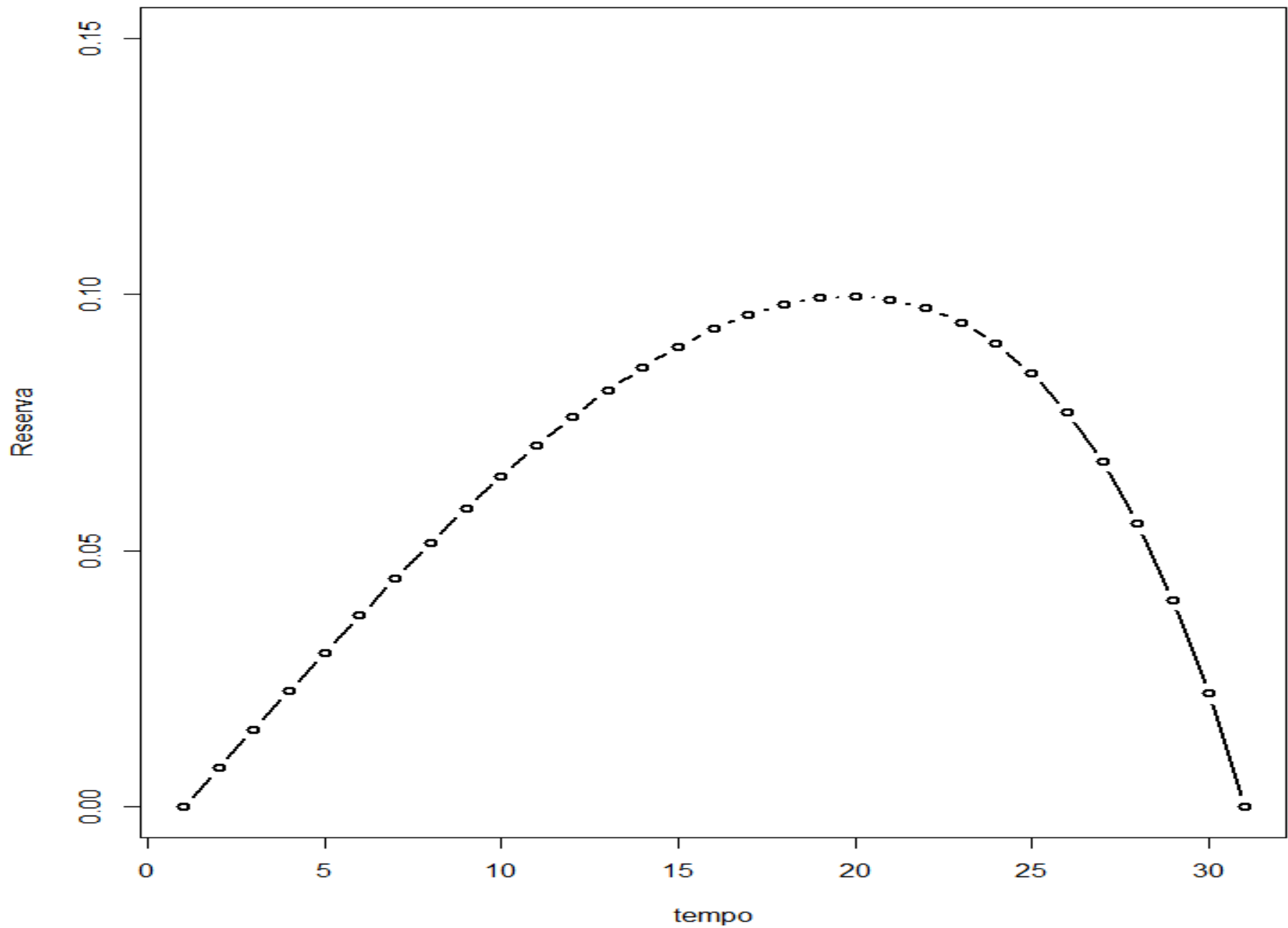
**EXEMPLO 7:** Considere um seguro temporário por 40 anos, para um segurado de 30 anos, qual seria a evolução da reserva com o tempo? Considere  $i = 3\%$  e AT-49.

## SOLUÇÃO

$${}_tV_{40^1:\overline{30}|} = A_{40+t^1:\overline{30-t}|} - P_{40^1:\overline{30}|} \ddot{a}_{40+t:\overline{30-t}|}$$

$${}_tV_{40^1:\overline{30}|} = \frac{(M_{40+t} - M_{70}) - P_{40^1:\overline{30}|} (N_{40+t} - N_{70})}{D_{40+t}}$$

# EXEMPLO 7:



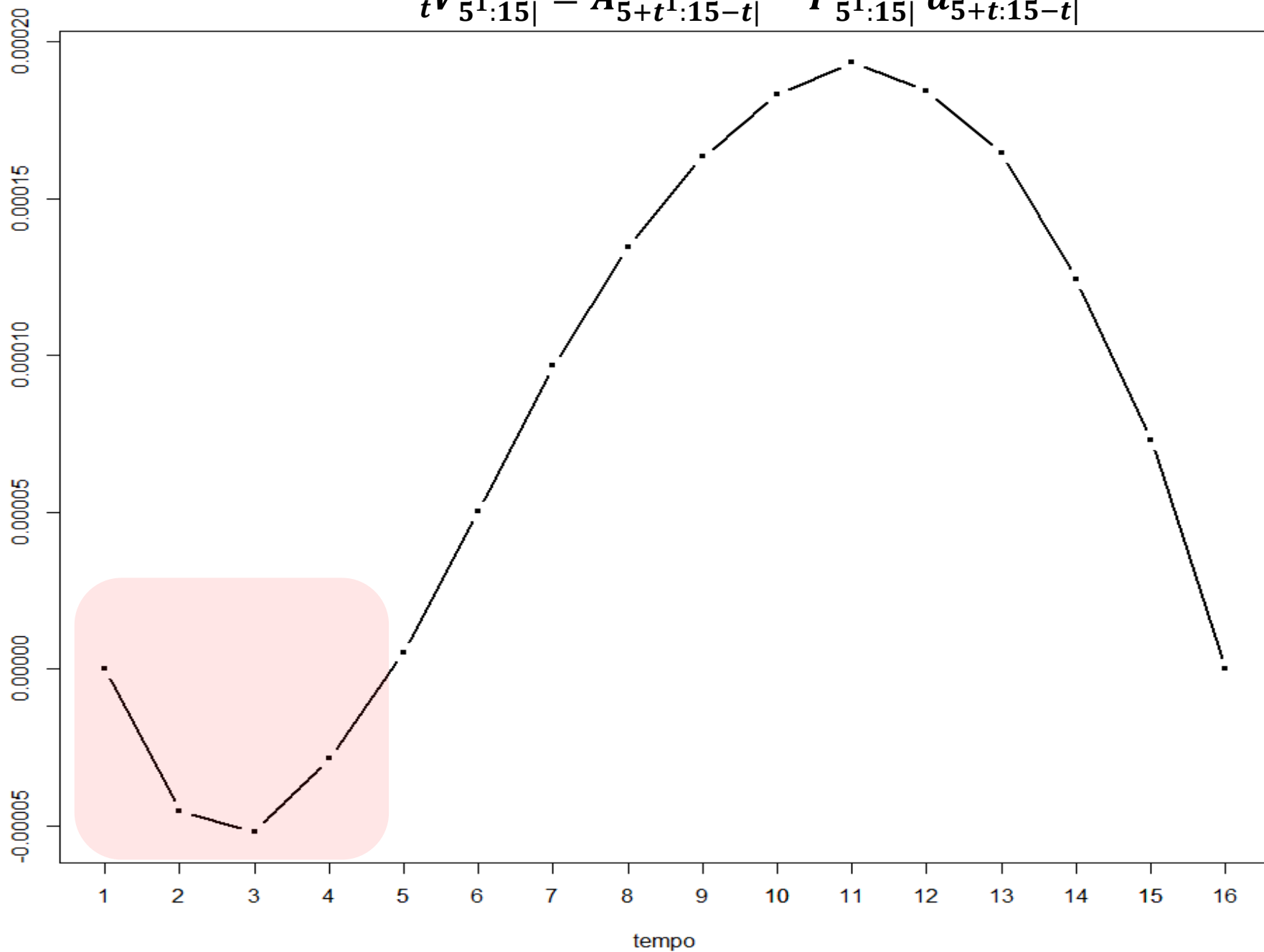
**EXEMPLO 8:** Considere um seguro temporário por 15 anos, para um segurado de 5 anos, qual seria a evolução da reserva com o tempo? Considere  $i = 3\%$  e AT-49.

**SOLUÇÃO**

# EXEMPLO 8

$${}_tV_{5^1:\overline{15}|} = A_{5+t^1:\overline{15-t}|} - P_{5^1:\overline{15}|} \ddot{a}_{5+t:\overline{15-t}|}$$

Reserva



# Reservas de prêmios puros ( anuidades)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$${}_tV({}_m|\ddot{a}_x) = \begin{cases} {}_{m-t}|\ddot{a}_{x+t} - P({}_m|\ddot{a}_x){}_{x+t:\overline{m-t}|}, & t < m \\ \ddot{a}_{x+t}, & t \geq m \end{cases}$$

$${}_tV({}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} {}_{m-t}|\ddot{a}_{x+t:\overline{n}|} - P({}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}){}_{x+t:\overline{m-t}|}, & t < m \\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n+m-t}|}, & m \leq t < m + n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



**EXEMPLO 9:** Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por **30 anos** um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após ( a contar a partir do contrato) 10 anos e 21 anos?

$${}_{10}V({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|}) = {}_{10|\ddot{a}}_{30:\overline{30}|} - P({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|})\ddot{a}_{30:\overline{10}|}$$

$${}_{10}V({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|}) = \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{30}} - \left( \frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}} \right) \frac{N_{30} - N_{40}}{D_{30}} \approx \mathbf{7,884}$$

$${}_{21}V({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|}) = \ddot{a}_{41:\overline{29}|} = \frac{N_{41} - N_{70}}{D_{41}} \approx \mathbf{18,2263}$$

**EXEMPLO 10:** Qual reserva deve ser formada após 30 e 50 anos de uma anuidade vitalícia (antecipada) contratada por uma pessoa de 30 anos de idade que decida aposentar aos 70 anos? Considere que  $b = 1$ , tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

**SOLUÇÃO:**

$${}_{30}V({}_{40|\ddot{a}}_{30}) = {}_{10|\ddot{a}}_{60} - P({}_{40|\ddot{a}}_{30})\ddot{a}_{60:\overline{10}|}$$

$${}_{30}V({}_{40|\ddot{a}}_{30}) = \frac{N_{70}}{D_{60}} - \left( \frac{N_{70}}{N_{30} - N_{70}} \right) \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}}$$

$${}_{50}V({}_{40|\ddot{a}}_{30}) = \ddot{a}_{80} = \frac{N_{80}}{D_{80}}$$

# Reservas de prêmios puros ( método retrospectivo)

$${}_tV_x = \frac{P_x \ddot{a}_{x:\bar{t}|} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}^1}$$

$${}_tV_{x^1:\bar{n}|} = \frac{P_{x^1:\bar{n}|} \ddot{a}_{x:\bar{t}|} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}^1}$$

$${}_tV_{x:\bar{n}|} = \frac{P_{x:\bar{n}|} \ddot{a}_{x:\bar{t}|} - A_{x^1:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|}^1}$$

# Reservas de prêmios puros ( método retrospectivo)

$${}_tV({}_m|\ddot{a}_x) = \begin{cases} \frac{P({}_m|\ddot{a}_x)\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & t < m \\ \frac{P({}_m|\ddot{a}_x)\ddot{a}_{x:\bar{m}|} - {}_m|\ddot{a}_{x:\bar{t-m}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & t \geq m \end{cases}$$

$${}_tV({}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \frac{P({}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & t < m \\ \frac{P({}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x:\bar{m}|} - {}_m|\ddot{a}_{x:\bar{t-m}|}}{A_{x:\bar{t}|^1}}, & m \leq t < m + n \end{cases}$$

**EXEMPLO 11:** Qual a reserva (pura) que deve ser formada depois de 2 anos de um seguro de vida vitalício comprado por um indivíduo com idade 40 de idade? Considere  $b = 1$ ,  $i = 5\%$  ao ano e a tábua de vida AT-2000 feminina.

$${}_2V_{40} = \frac{P_{40} \ddot{a}_{40:\overline{2}|} - A_{40:\overline{1}:\overline{2}|}}{A_{40:\overline{2}|}^1},$$

$${}_2V_{40} = \frac{0,007053 (1,951736) - 0,001308}{0,905752} \approx 0,01375.$$

**EXEMPLO 12:** Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após ( a contar a partir do contrato) 10 anos?

**EXEMPLO 12:** Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após ( a contar a partir do contrato) 10 anos?

$${}_{10}V({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|}) = \frac{P({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|})\ddot{a}_{20:\overline{10}|}}{A_{20:\overline{10}|}^1}$$

$${}_{10}V({}_{20|\ddot{a}}_{20:\overline{30}|}) = \frac{\left(\frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}}\right)\left(\frac{N_{20} - N_{30}}{D_{20}}\right)}{\left(\frac{D_{30}}{D_{20}}\right)} \approx \left(\frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}}\right)\left(\frac{N_{20} - N_{30}}{D_{30}}\right) \approx \mathbf{7,884}$$

# Estrutura da seguridade social e da previdência no Brasil



SILVA, L. G. C. E. Estudo da mortalidade dos servidores públicos civis do estado de São Paulo: tábua de mortalidade destinada aos regimes próprios de previdência social. **Anais do XX Encontro Nacional de Estudos Populacionais**, 2011.



# Estrutura da seguridade social e da previdência no Brasil

*Lei n° 9.717, (Lei dos RPPS's) estabelece que todas as Unidades Federativas que possuam Regime Próprio de Previdência Social, têm por obrigação proceder a avaliações atuariais com periodicidade anual conforme as normas legais.*

*Equilíbrio Financeiro Atuarial “EFA”: Reserva Matemática (RMBC+RMBAC) é equivalente ao atual patrimônio constituído pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS).*

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

