

# Teoria do Risco

## Aula 16

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



# Princípio de cálculo de prêmio

- A defesa, da utilização de um princípio em detrimentos aos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis..

# Propriedades

- Carregamento de segurança não-negativo.

$$\Pi_S \geq E(S)$$

- O prêmio não deve ser menor o valor esperado a ser pago.
- No caso de uma única apólice esse princípio seria inviável de se manter...

- Aditividade.

- Se  $S_1$  e  $S_2$  são independentes, o prêmio para o risco combinado,  $\Pi_{S_1+S_2}$ , é igual a  $\Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$ .

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

# Propriedades

## ➤ Escala invariante.

Se  $Z = aS$ , em que  $a > 0$ , então  $\Pi_Z = a\Pi_S$ .

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

## ➤ Consistência.

Se  $Y = S + c$ , em que  $c > 0$ , então  $\Pi_Y = \Pi_S + c$

## ➤ Perda máxima.

Seja  $r_S$  o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição  $S$ , então  $\Pi_S \leq r_S$

## Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_S = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

# Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_s = E(S)$

- *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$\Pi_s \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

$$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

- *Escala invariante.*

$$\text{Se } Z = aS, \text{ em que } a > 0, \text{ então } E(Z) = aE(S)$$

- *Consistência.*

$$\text{Se } Y = S + c, \text{ em que } c > 0, \text{ então } E(Y) = E(S) + c$$

- *Perda máxima*

$$\Pi_s \leq r_s$$

## Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$

➤ *Carregamento de segurança não-negativo.*

$$E(S)(1 + \theta) \geq E(S)$$

➤ *Aditividade.*

$$E(S_1 + S_2)(1 + \theta) = E(S_1)(1 + \theta) + E(S_2)(1 + \theta)$$

➤ *Escala invariante.*

$$\Pi_Z = (1 + \theta)E(Z) = (1 + \theta)E(aS)$$

$$\Pi_Z = a(1 + \theta)E(S)$$

$$\Pi_Z = a\Pi_S.$$

➤ *Consistência*

➤ *Perda máxima*

# Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$

## ➤ Consistência.

Dado  $Y = S + c$ , em que  $c > 0$ , então

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= (1 + \theta)E(S + c) = (1 + \theta)[E(S) + c], \\ \Pi_Y &> \Pi_S + c.\end{aligned}$$

Como  $\Pi_Y \neq \Pi_S + c$ , o princípio do prêmio carregado não é consistente.

## ➤ Perda máxima

Uma forma de mostrar que o princípio do prêmio puro não satisfaz essa propriedade é através de um exemplo hipotético, em que dado um valor  $b$  correspondente a  $r_S$  (maior valor pago por  $S$ ) e supondo que  $P(S = b) = 1$ , com  $b > 0$  e  $\theta > 0$ , tem-se que

$$\Pi_S = (1 + \theta)E(S) = (1 + \theta)b > b.$$

Como  $\Pi_S > r_S$ , essa propriedade não é satisfeita.



➤ *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + \text{var}(S)\alpha \geq E(S)$$

➤ *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \text{var}(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + E(S_2) + \alpha \text{var}(S_1) + \alpha \text{var}(S_2),$$

$$E(S_1 + S_2) + \text{var}(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + \alpha \text{var}(S_1) + E(S_2) + \alpha \text{var}(S_2),$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

➤ *Escala invariante*

➤ *Consistência*

➤ *Perda máxima*

## Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

### ➤ *Escala invariante*

Dado  $Z = aS$ , em que  $a > 0$ , então

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha \text{var}(Z) = E(aS) + \alpha \text{var}(aS),$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a^2\alpha \text{var}(S),$$

$$\Pi_Z \neq a\Pi_S$$

### ➤ *Consistência*

Dado  $Y = S + c$ , em que  $c > 0$ , então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \alpha \text{var}(Y),$$

$$\Pi_Y = E(S + c) + \alpha \text{var}(S + c),$$

$$\Pi_Y = E(S) + c + \alpha \text{var}(S),$$

$$\Pi_Y = \Pi_S + c.$$

## Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

➤ *Perda máxima*

Dado  $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$  então:

$$\begin{aligned} E(S) &= 10, \\ \text{var}(S) &= 4, \\ \Pi_S &= 10 + 4\alpha. \end{aligned}$$

em que excede 12 quando  $\alpha > 0,5$ .

➤ *Carregamento de segurança não-negativo*

$$E(S) + \beta \sigma_S \geq E(S).$$

➤ *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \sqrt{\text{var}(S_1 + S_2)}\beta = E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{\text{var}(S_1) + \text{var}(S_2)}$$

$$E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{\text{var}(S_1) + \text{var}(S_2)} \neq [E(S_1) + \sigma_{S_1}\beta] + [E(S_2) + \sigma_{S_2}\beta]$$

➤ *Escala invariante*

➤ *Consistência*

➤ *Perda máxima*

## Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta; \quad \beta > 0$

### ➤ *Escala invariante*

Dado  $Z = aS$ , em que  $a > 0$ , então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta \sigma_Z = E(aS) + \beta \sqrt{\text{var}(aS)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + \beta \sqrt{a^2 \text{var}(S)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a\beta \sigma_S,$$

$$\Pi_Z = a\Pi_S$$

### *Consistência*

Dado  $Y = S + c$ , em que  $c > 0$ , então:

$$\Pi_Y = E(Y) + \beta \sqrt{\text{var}(Y)},$$

$$\Pi_Y = E(S + c) + \beta \sqrt{\text{var}(S + c)},$$

$$\Pi_Y = E(S) + c + \beta \sqrt{\text{var}(S)},$$

$$\Pi_Y = \Pi_S + c.$$

## Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta; \quad \beta > 0$

➤ *Perda máxima*

Dado  $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$  então:

$$E(S) = 8 \times 0,5 + 12 \times 0,5 = 10$$

$$\text{var}(S) = (8^2 \times 0,5 + 12^2 \times 0,5) - 10^2 = 104 - 100 = 4$$

$$\sigma = 2$$

$$\Pi_S = 10 + 2\beta.$$

Como na prática o valor de  $\beta$  varia entre 1 e 2,  $\Pi_S$  excede 12 quando  $\beta > 1$ . A propriedade de perda máxima não é satisfeita.

## Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➤ *Carregamento de segurança não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$E[\mu(W + \Pi_s - s)] \leq \mu(E(W + \Pi_s - S))$$

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_s - S)] \leq -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \leq -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$\ln e^{-\alpha W} \geq \ln e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$-\alpha W \geq -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$-W \geq -W - \Pi_s + E(S)$$

$$\Pi_s \geq E(S)$$

## Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

### ➤ *Aditividade*

Em geral o principio da utilidade zero não é aditivo, mas o principio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln E(e^{\alpha(S_1+S_2)})}{\alpha} = \frac{\ln\{E(e^{\alpha S_1})E(e^{\alpha S_2})\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln E(e^{\alpha S_1})}{\alpha} + \frac{\ln E(e^{\alpha S_2})}{\alpha} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$



## Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

### ➤ *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escala invariante.

Suponha que  $S \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Z = aS$ , em que  $a > 0$ .

Logo

$$\Pi_S = \frac{\ln M_S(\alpha)}{\alpha} = \frac{\ln\left(e^{\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} + \mu \alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2} \sigma^2 a^2 \alpha \neq a \Pi_S$$

Seja  $Y = S + c$ , então  $\Pi_Y$  é dada por:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_Y - Y)]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + (\Pi_S + c) - (S + c))]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

Considerando  $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$\mu(W + \Pi - E(Y)) = \mu(W + \Pi_S - E(S))$$

$$e^{-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)]} = e^{-\alpha[W + \Pi_S - E(S)]}$$

$$-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)] = -\alpha[W + \Pi_S - E(S)]$$

$$\Pi_Y - E(Y) = \Pi_S - E(S)$$

$$\Pi_Y = \Pi_S - E(S) + E(S) + c,$$

$$\Pi_Y = \Pi_S + c.$$

➤ *Perda máxima.*

Considerando que  $r_S$  é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W + \Pi_S - S)] \geq E[\mu(W + \Pi_S - r_S)]$$

Como  $\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_S - r_S)$ , então:

$$\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_S - r_S)$$

Como  $\mu'(X) > 0$ , tem-se que:

$$W \geq W + \Pi_S - r_S$$

$$\Pi_S - r_S \leq 0$$

$$\Pi_S \leq r_S$$