

Matemática atuarial

Aula 17 Comutação

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Comutação

- Comutação é a troca de ordem dos elementos, todavia, sem perder a sua realidade.
- No contexto atuarial esse processo é utilizado como forma de simplificar o cálculo do prêmio puro de diversos produtos atuariais,

Comutação

- As funções de comutação são propositadamente elaboradas de forma que seus resultados ao serem combinados levam a alguns valores atuariais conhecidos (Seguros e Anuidades) .
- Essas funções são organizadas numa tabela chamada de Tábua de comutação

Tábuas de comutação

- Johanes Nikolaus Tetens (Alemanha, 1736 - 1807).
 - Matemática e atuário, (1785).



- Griffith Davies (Inglaterra- 1750-1833).
 - Atuário, (1825).



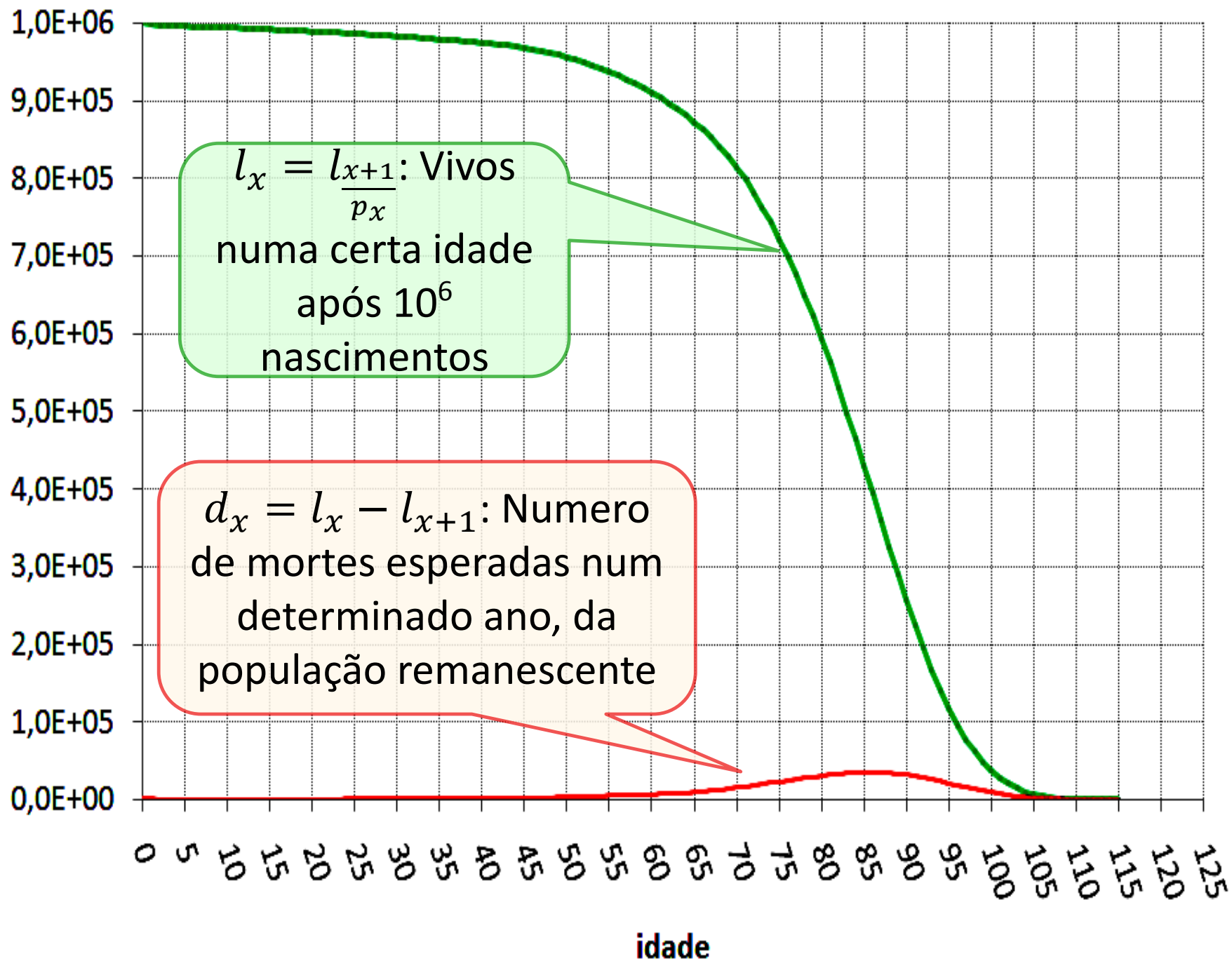
Tábuas de comutação

- A necessidade de se trabalhar com uma taxa de juros constante,
- A tabua de comutação não é adequada ao uso com Tábuas geracionais.
- Perde-se a noção da natureza aleatória dos quais se originam os produtos,

Funções de Comutação

- É o resultado das operações com os dados obtidos das colunas dos valores de l_x e d_x associados algebricamente com o valor da taxa de juros.

Número de indivíduos num grupo
hipotético de 1 milhão de nascidos



Funções de comutação

- Principais funções de comutação (Sistema moderno)

$D_x, N_x, S_x, C_x, M_x, R_x$

- Uma tábua de comutação é constituída a partir de dois elementos:
 - i) Tábua de vida
 - ii) Taxa de juros

Funções de comutação

Idade x , q_x , p_x , d_x e l_x

- q_x : Probabilidade de morte de uma pessoa com idade x antes de completar a idade de $x + 1$ anos.
- p_x : $1 - q_x$: Probabilidade de sobrevivência de uma pessoa com idade x antes de completar a idade $x + 1$.

VARIAÇÕES

- ${}_nq_x$: Probabilidade de uma pessoa com idade x morrer antes de completar a idade de $x + n$ anos.
- ${}_np_x$: Probabilidade que uma pessoa com idade x , sobreviva pelo menos mais n anos.

Funções de comutação

Idade x , q_x , p_x , d_x e l_x

- d_x : Número de pessoas que faleceram entre a idade x e $x + 1$.
- l_x : Número (hipotético) de pessoas vivas com idade x .

RELAÇÕES

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{m+l}p_x = ({}_mp_x)({}_lp_{x+m})$$

Funções de comutação- D_x

➤ Coluna D_x

$$D_x = l_x v^x = \frac{l_x}{(1 + i)^x}$$

Funções de comutação- D_x

Suponha $i = 5\%$ então $D_x = l_x v^x = \frac{l_x}{(1,05)^x}$

| Idade | q_x | p_x | l_x | D_x |
|-------|---------|---------|--------|----------|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 | 29530,28 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 | 28102,42 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 | 26742,51 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 | 25447,38 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 | 24213,73 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 | 23038,72 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 | 21919,60 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 | 20853,35 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 | 19837,55 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 | 18870,06 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 | 17948,10 |

$$D_{25} = \frac{100000}{(1,05)^{25}}$$

$$D_{30} = \frac{23038,72}{(1,05)^{30}}$$

$$D_{35} = \frac{17948,10}{(1,05)^{35}}$$

Funções de comutação- D_x

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|----|----|---------|---------|----------|----------|----------|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | qx | px | lx | vx | Dx | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0.00231 | 0,99769 | 100000 | | 1 | 100000 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 0.00091 | 0,99909 | 99768,9 | 0,952381 | 95018 | | | | | | | | | |
| 4 | 2 | 0.00050 | 0,99950 | 99678,51 | 0,907029 | 90411,35 | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | 0.00041 | 0,99959 | 99628,27 | 0,863838 | 86062,65 | | | | | | | | | |
| 6 | 4 | 0.00036 | 0,99964 | 99587,62 | 0,822702 | 81930,98 | | | | | | | | | |
| 7 | 5 | 0.00032 | 0,99968 | 99552,07 | 0,783526 | 78001,65 | | | | | | | | | |
| 8 | 6 | 0.00030 | 0,99970 | 99519,82 | 0,746215 | 74263,22 | | | | | | | | | |
| 9 | 7 | 0.00029 | 0,99971 | 99489,86 | 0,710681 | 70705,59 | | | | | | | | | |
| 10 | 8 | 0.00033 | 0,99967 | 99461,41 | 0,676839 | 67319,39 | | | | | | | | | |
| 11 | 9 | 0.00036 | 0,99964 | 99428,78 | 0,644609 | 64092,68 | | | | | | | | | |
| 12 | 10 | 0.00039 | 0,99961 | 99392,79 | 0,613913 | 61018,55 | | | | | | | | | |
| 13 | 11 | 0.00041 | 0,99959 | 99354,03 | 0,584679 | 58090,24 | | | | | | | | | |
| 14 | 12 | 0.00043 | 0,99957 | 99312,99 | 0,556837 | 55301,19 | | | | | | | | | |
| 15 | 13 | 0.00045 | 0,99955 | 99270,19 | 0,530321 | 52645,1 | | | | | | | | | |
| 16 | 14 | 0.00046 | 0,99954 | 99225,91 | 0,505068 | 50115,83 | | | | | | | | | |
| 17 | 15 | 0.00047 | 0,99953 | 99180,47 | 0,481017 | 47707,5 | | | | | | | | | |
| 18 | 16 | 0.00048 | 0,99952 | 99133,85 | 0,458112 | 45414,36 | | | | | | | | | |
| 19 | 17 | 0.00050 | 0,99951 | 99086,17 | 0,436297 | 43230,97 | | | | | | | | | |
| 20 | 18 | 0.00051 | 0,99949 | 99037,12 | 0,415521 | 41151,97 | | | | | | | | | |
| 21 | 19 | 0.00053 | 0,99947 | 98986,61 | 0,395734 | 39172,36 | | | | | | | | | |
| 22 | 20 | 0.00055 | 0,99945 | 98934,35 | 0,376889 | 37287,32 | | | | | | | | | |
| 23 | 21 | 0.00057 | 0,99943 | 98880,03 | 0,358942 | 35492,23 | | | | | | | | | |
| 24 | 22 | 0.00060 | 0,99940 | 98823,38 | 0,34185 | 33782,76 | | | | | | | | | |
| 25 | 23 | 0.00063 | 0,99937 | 98764,18 | 0,325571 | 32154,78 | | | | | | | | | |
| 26 | 24 | 0.00066 | 0,99934 | 98702,26 | 0,310068 | 30604,4 | | | | | | | | | |
| 27 | 25 | 0.00069 | 0,99931 | 98637,41 | 0,295303 | 29127,9 | | | | | | | | | |
| 28 | 26 | 0.00071 | 0,99929 | 98569,74 | 0,281241 | 27721,83 | | | | | | | | | |
| 29 | 27 | 0.00074 | 0,99926 | 98499,36 | 0,267848 | 26382,89 | | | | | | | | | |
| 30 | 28 | 0.00076 | 0,99924 | 98426,67 | 0,255094 | 25108,02 | | | | | | | | | |
| 31 | 29 | 0.00077 | 0,99923 | 98352,06 | 0,242946 | 23894,27 | | | | | | | | | |

Fator de atualização
i 5%

$$D_x = v^x l_x$$

$$v^x = \frac{1}{(1+i)^x}$$

$$l_{x+1} = l_x p_x$$

Funções de comutação- N_x

➤ Coluna N_x

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)} = \frac{l_x}{(1+i)^x} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^{x+2}} + \dots + \frac{l_{\omega-x}}{(1+i)^{\omega-x}}$$

➤ ω corresponde a idade máxima atingida

Funções de comutação- N_x

Suponha $i = 5\%$ então: $N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \omega^{-x} D_{(x+t)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{(1,05)^{x+t}}$

| Idade | q_x | p_x | l_x | D_x | N_x |
|-------|---------|---------|---------|----------|---------|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 | 29530,28 | 6928266 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 | 28102,42 | 6573343 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 | 26742,51 | 6235516 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 | 25447,38 | 5913968 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 | 24213,73 | 5607924 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 | 23038,72 | 5316645 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 | 21919,60 | 5039426 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 | 20853,35 | 4775598 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 | 19837,55 | 4524517 |
| ... | | | | | |
| 115 | 1,00000 | 00000 | 0,18042 | 0,000022 | 0,00066 |

$$N_{25} = \sum_{t=0}^{90} D_{(25+t)} = D_{25} + D_{26} + \dots D_{115}$$

$$N_{30} = \sum_{t=0}^{85} D_{(30+t)} = D_{30} + D_{31} + \dots D_{115}$$

$$N_{115} = \sum_{t=0}^0 D_{(115+t)} = D_{115}$$

Funções de comutação- N_x

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|-----|-----|---------|---------|----------|----------|----------|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | qx | px | lx | vx | Dx | Nx | | | | | | | | |
| 89 | 87 | 0,09696 | 0,90304 | 36000,82 | 0,014339 | 516,2302 | | | | | | | | | |
| 90 | 88 | 0,10563 | 0,89437 | 32510,26 | 0,013657 | 443,9786 | | | | | | | | | |
| 91 | 89 | 0,11486 | 0,88514 | 29076,17 | 0,013006 | 378,1721 | | | | | | | | | |
| 92 | 90 | 0,12461 | 0,87539 | 25736,53 | 0,012387 | 318,7962 | | | | | | | | | |
| 93 | 91 | 0,13486 | 0,86514 | 22529,45 | 0,011797 | 265,7813 | | | | | | | | | |
| 94 | 92 | 0,14558 | 0,85443 | 19491,11 | 0,011235 | 218,9884 | | | | | | | | | |
| 95 | 93 | 0,15673 | 0,84327 | 16653,69 | 0,0107 | 178,1992 | | | | | | | | | |
| 96 | 94 | 0,16829 | 0,83171 | 14043,61 | 0,010191 | 143,1148 | | | | | | | | | |
| 97 | 95 | 0,18025 | 0,81976 | 11680,21 | 0,009705 | 113,3619 | | | | | | | | | |
| 98 | 96 | 0,19257 | 0,80744 | 9574,91 | 0,009243 | 88,50381 | | | | | | | | | |
| 99 | 97 | 0,20523 | 0,79477 | 7731,117 | 0,008803 | 68,05817 | | | | | | | | | |
| 100 | 98 | 0,21868 | 0,78132 | 6144,468 | 0,008384 | 51,51491 | | | | | | | | | |
| 101 | 99 | 0,23337 | 0,76663 | 4800,777 | 0,007985 | 38,33284 | | | | | | | | | |
| 102 | 100 | 0,24974 | 0,75026 | 3680,415 | 0,007604 | 27,98768 | | | | | | | | | |
| 103 | 101 | 0,26824 | 0,73176 | 2761,264 | 0,007242 | 19,9981 | =F103+G104 | | | | | | | | |
| 104 | 102 | 0,28931 | 0,71070 | 2020,591 | 0,006897 | 13,93702 | 38,26167783 | | | | | | | | |
| 105 | 103 | 0,31339 | 0,68661 | 1436,024 | 0,006569 | 9,433306 | 24,32465701 | | | | | | | | |
| 106 | 104 | 0,34094 | 0,65906 | 985,987 | 0,006256 | 6,168564 | 14,89135129 | | | | | | | | |
| 107 | 105 | 0,37240 | 0,62760 | 649,8246 | 0,005958 | 3,871861 | 8,722786896 | | | | | | | | |
| 108 | 106 | 0,40821 | 0,59179 | 407,8312 | 0,005675 | 2,314274 | 4,850925899 | | | | | | | | |
| 109 | 107 | 0,44882 | 0,55118 | 241,3504 | 0,005404 | 1,304347 | 2,536651893 | | | | | | | | |
| 110 | 108 | 0,49468 | 0,50532 | 133,0268 | 0,005147 | 0,684691 | 1,232305022 | | | | | | | | |
| 111 | 109 | 0,54623 | 0,45377 | 67,22098 | 0,004902 | 0,329512 | 0,547613599 | | | | | | | | |
| 112 | 110 | 0,60392 | 0,39608 | 30,5028 | 0,004668 | 0,142402 | 0,218101612 | | | | | | | | |
| 113 | 111 | 0,66819 | 0,33181 | 12,08164 | 0,004446 | 0,053717 | 0,075699399 | | | | | | | | |
| 114 | 112 | 0,73948 | 0,26052 | 4,008857 | 0,004234 | 0,016975 | 0,021982164 | | | | | | | | |
| 115 | 113 | 0,81825 | 0,18175 | 1,044375 | 0,004033 | 0,004212 | 0,005006802 | | | | | | | | |
| 116 | 114 | 0,90495 | 0,09506 | 0,189811 | 0,003841 | 0,000729 | 0,000795021 | | | | | | | | |
| 117 | 115 | 1,00000 | 0,00000 | 0,018042 | 0,003658 | 6,6E-05 | 6,59974E-05 | | | | | | | | |
| 118 | | | | | | | | | | | | | | | |

$$N_{103} = \sum_{t=0}^{115-103} D_{(103+t)} = D(103) + [D(114) + \dots D(115)]$$

N_{104}

$$N_{114} = \sum_{t=0}^{115-114} D_{(114+t)} = D(114) + D(115)$$

$$N_{115} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(115+t)} = D(115)$$

Funções de comutação- S_x

➤ Coluna S_x

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t} = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots + N_{\omega-x}$$

➤ ω corresponde a idade máxima atingida.

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \left(\sum_{k=0}^{\omega-x+k} D_{(x+k+t)} \right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \left(\sum_{k=0}^{\omega-x+k} l_{x+k+t} v^{x+k+t} \right)$$

A utilização de S_x pertence ao cálculo de rendas crescentes, assunto que foge ao escopo dessa disciplina.

Funções de comutação- C_x

➤ Coluna C_x

$$C_x = v^{x+1} d_x = \frac{d_x}{(1+i)^{x+1}}$$

Lembrando que $d_x = l_x - l_{x+1}$ e ${}_1q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$, logo :

$$C_x = v^{x+1} q_x l_x$$

Funções de comutação- C_x

Suponha $i = 5\%$ então $C_x = v^{x+1}dx$

| Idade | q_x | p_x | l_x | D_x | C_x |
|-------|---------|---------|--------|----------|--------|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 | 29530,28 | 21,655 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 | 28102,42 | 21,679 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 | 26742,51 | 21,648 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 | 25447,38 | 21,812 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 | 24213,73 | 21,907 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 | 23038,72 | 21,941 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 | 21919,60 | ... |

$$C_{25} = v^{25+1}(l_{25} - l_{26}) = q_{25}l_{25}(v^{26})$$

$$C_{30} = v^{30+1}(l_{30} - l_{31}) = q_{30}l_{30}v^{31}$$

Funções de comutação- C_x

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|----|----|---------|---------|----------|----------|----------|-------------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | qx | px | lx | vx | Dx | Nx | Cx | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0,00231 | 0,99769 | 100000 | 1 | 100000 | 2031767,454 | =E3*B2*D2 | | | | | | | |
| 3 | 1 | 0,00091 | 0,99909 | 99768,9 | 0,952381 | 95018 | 1931767,454 | 81,98696 | | | | | | | |
| 4 | 2 | 0,00050 | 0,99950 | 99678,51 | 0,907029 | 90411,35 | 1836749,454 | 43,39745 | | | | | | | |
| 5 | 3 | 0,00041 | 0,99959 | 99628,27 | 0,863838 | 86062,65 | 1746338,107 | 33,44149 | | | | | | | |
| 6 | 4 | 0,00036 | 0,99964 | 99587,62 | 0,822702 | 81930,98 | 1660275,46 | 27,85653 | | | | | | | |
| 7 | 5 | 0,00032 | 0,99968 | 99552,07 | 0,783526 | 78001,65 | 1578344,477 | 24,06908 | | | | | | | |
| 8 | 6 | 0,00030 | 0,99970 | 99519,82 | 0,746215 | 74263,22 | 1500342,825 | 21,28879 | | | | | | | |
| 9 | 7 | 0,00029 | 0,99971 | 99489,86 | 0,710681 | 70705,59 | 1426079,606 | 19,25885 | | | | | | | |
| 10 | 8 | 0,00033 | 0,99967 | 99461,41 | 0,676839 | 67319,39 | 1355374,02 | 21,0293 | | | | | | | |
| 11 | 9 | 0,00036 | 0,99964 | 99428,78 | 0,644609 | 64092,68 | 1288054,625 | 22,09671 | | | | | | | |
| 12 | 10 | 0,00039 | 0,99961 | 99392,79 | 0,613913 | 61018,55 | 1223961,946 | 22,66403 | | | | | | | |
| 13 | 11 | 0,00041 | 0,99959 | 99354,03 | 0,584679 | 58090,24 | 1162943,395 | 22,84883 | | | | | | | |
| 14 | 12 | 0,00043 | 0,99957 | 99312,99 | 0,556837 | 55301,19 | 1104853,154 | 22,69982 | | | | | | | |
| 15 | 13 | 0,00045 | 0,99955 | 99270,19 | 0,530321 | 52645,1 | 1049551,963 | 22,36163 | | | | | | | |
| 16 | 14 | 0,00046 | 0,99954 | 99225,91 | 0,505068 | 50115,83 | 996906,8625 | 21,86005 | | | | | | | |
| 17 | 15 | 0,00047 | 0,99953 | 99180,47 | 0,481017 | 47707,5 | 946791,0329 | 21,35479 | | | | | | | |
| 18 | 16 | 0,00048 | 0,99952 | 99133,85 | 0,458112 | 45414,36 | 899083,5315 | 20,8041 | | | | | | | |
| 19 | 17 | 0,00050 | 0,99951 | 99086,17 | 0,436297 | 43230,97 | 853669,1707 | 20,38031 | | | | | | | |
| 20 | 18 | 0,00051 | 0,99949 | 99037,12 | 0,415521 | 41151,97 | 810438,2026 | 19,9881 | | | | | | | |
| 21 | 19 | 0,00053 | 0,99947 | 98986,61 | 0,395734 | 39172,36 | 769286,2323 | 19,6981 | | | | | | | |
| 22 | 20 | 0,00055 | 0,99945 | 98934,35 | 0,376889 | 37287,32 | 730113,8678 | 19,49594 | | | | | | | |
| 23 | 21 | 0,00057 | 0,99943 | 98880,03 | 0,358942 | 35492,23 | 692826,552 | 19,36862 | | | | | | | |
| 24 | 22 | 0,00060 | 0,99940 | 98823,38 | 0,34185 | 33782,76 | 657334,3187 | 19,27226 | | | | | | | |
| 25 | 23 | 0,00063 | 0,99937 | 98764,18 | 0,325571 | 32154,78 | 623551,5603 | 19,201 | | | | | | | |
| 26 | 24 | 0,00066 | 0,99934 | 98702,26 | 0,310068 | 30604,4 | 591396,777 | 19,14961 | | | | | | | |
| 27 | 25 | 0,00069 | 0,99931 | 98637,41 | 0,295303 | 29127,9 | 560792,3748 | 19,03023 | | | | | | | |
| 28 | 26 | 0,00071 | 0,99929 | 98569,74 | 0,281241 | 27721,83 | 531664,4747 | 18,85084 | | | | | | | |
| 29 | 27 | 0,00074 | 0,99926 | 98499,36 | 0,267848 | 26382,89 | 503942,6477 | 18,5434 | | | | | | | |
| 30 | 28 | 0,00076 | 0,99924 | 98426,67 | 0,255094 | 25108,02 | 477559,7586 | 18,1256 | | | | | | | |
| 31 | 29 | 0,00077 | 0,99923 | 98352,06 | 0,242946 | 23894,27 | 452451,7409 | 17,61349 | | | | | | | |
| 32 | 30 | 0,00078 | 0,99922 | 98275,84 | 0,231837 | 22738,84 | 428557,4687 | 16,97823 | | | | | | | |

$$C_{10} = v^{10+1} q_{10} l_{10}$$

Funções de comutação- M_x

➤ Coluna M_x

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{\omega-x} = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}$$

$$M_x = v^{x+1}q_x l_x + v^{x+2}q_{x+1} l_{x+1} + v^{x+3}q_{x+2} l_{x+2} + \cdots$$

Funções de comutação- M_x

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|-----|-----|---------|---------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | qx | px | lx | vx | Dx | Nx | Cx | Mx | | | | | | |
| 89 | 87 | 0,09696 | 0,90304 | 36000,82 | 0,014339 | 516,2302 | 2909,279962 | 47,66919 | | | | | | | |
| 90 | 88 | 0,10563 | 0,89437 | 32510,26 | 0,013657 | 443,9786 | 2393,049748 | 44,66467 | | | | | | | |
| 91 | 89 | 0,11486 | 0,88514 | 29076,17 | 0,013006 | 378,1721 | 1949,071114 | 41,36771 | | | | | | | |
| 92 | 90 | 0,12461 | 0,87539 | 25736,53 | 0,012387 | 318,7962 | 1570,898994 | 37,83413 | | | | | | | |
| 93 | 91 | 0,13486 | 0,86514 | 22529,45 | 0,011797 | 265,7813 | 1252,102778 | 34,1367 | | | | | | | |
| 94 | 92 | 0,14558 | 0,85443 | 19491,11 | 0,011235 | 218,9884 | 986,3214621 | 30,36117 | | | | | | | |
| 95 | 93 | 0,15673 | 0,84327 | 16653,69 | 0,0107 | 178,1992 | 767,3330982 | 26,59869 | | | | | | | |
| 96 | 94 | 0,16829 | 0,83171 | 14043,61 | 0,010191 | 143,1148 | 589,1339241 | 22,9379 | | | | | | | |
| 97 | 95 | 0,18025 | 0,81976 | 11680,21 | 0,009705 | 113,3619 | 446,0191126 | 19,45992 | | | | | | | |
| 98 | 96 | 0,19257 | 0,80744 | 9574,91 | 0,009243 | 88,50381 | 332,6571889 | 16,23118 | | | | | | | |
| 99 | 97 | 0,20523 | 0,79477 | 7731,117 | 0,008803 | 68,05817 | 244,1533757 | 13,30239 | | | | | | | |
| 100 | 98 | 0,21868 | 0,78132 | 6144,468 | 0,008384 | 51,51491 | 176,0952078 | 10,72899 | | | | | | | |
| 101 | 99 | 0,23337 | 0,76663 | 4800,777 | 0,007985 | 38,33284 | 124,5802952 | 8,519783 | | | | | | | |
| 102 | 100 | 0,24974 | 0,75026 | 3680,415 | 0,007604 | 27,98768 | 86,24746001 | 6,65683 | | | | | | | |
| 103 | 101 | 0,26824 | 0,73176 | 2761,264 | 0,007242 | 19,9981 | 58,25978086 | 5,108792 | | | | | | | |
| 104 | 102 | 0,28931 | 0,71070 | 2020,591 | 0,006897 | 13,93702 | 38,26167783 | 3,840047 | 12,11497 | | | | | | |
| 105 | 103 | 0,31339 | 0,68661 | 1436,024 | 0,006569 | 9,433306 | 24,32465701 | 2,815536 | 8,274926 | | | | | | |
| 106 | 104 | 0,34094 | 0,65906 | 985,987 | 0,006256 | 6,168564 | 14,89135129 | 2,002962 | 5,45939 | | | | | | |
| 107 | 105 | 0,37240 | 0,62760 | 649,8246 | 0,005958 | 3,871861 | 8,722786896 | 1,373213 | 3,456427 | | | | | | |
| 108 | 106 | 0,40821 | 0,59179 | 407,8312 | 0,005675 | 2,314274 | 4,850925899 | 0,899724 | 2,083215 | | | | | | |
| 109 | 107 | 0,44882 | 0,55118 | 241,3504 | 0,005404 | 1,304347 | 2,536651893 | 0,557544 | 1,183491 | | | | | | |
| 110 | 108 | 0,49468 | 0,50532 | 133,0268 | 0,005147 | 0,684691 | 1,232305022 | 0,322575 | 0,625947 | | | | | | |
| 111 | 109 | 0,54623 | 0,45377 | 67,22098 | 0,004902 | 0,329512 | 0,547613599 | 0,171419 | 0,303372 | | | | | | |
| 112 | 110 | 0,60392 | 0,39608 | 30,5028 | 0,004668 | 0,142402 | 0,218101612 | 0,081904 | 0,131954 | | | | | | |
| 113 | 111 | 0,66819 | 0,33181 | 12,08164 | 0,004446 | 0,053717 | 0,075699399 | 0,034184 | 0,05005 | | | | | | |
| 114 | 112 | 0,73948 | 0,26052 | 4,008857 | 0,004234 | 0,016975 | 0,021982164 | 0,011955 | 0,015866 | | | | | | |
| 115 | 113 | 0,81825 | 0,18175 | 1,044375 | 0,004033 | 0,004212 | 0,005006802 | 0,003282 | 0,003911 | | | | | | |
| 116 | 114 | 0,90495 | 0,09506 | 0,189811 | 0,003841 | 0,000729 | 0,000795021 | 0,000628 | 0,000628 | | | | | | |
| 117 | 115 | 1,00000 | 0,00000 | 0,018042 | 0,003658 | 6,6E-05 | 6,59974E-05 | 0 | 0 | | | | | | |
| 118 | | | | | | | | | | | | | | | |

$M_{102} = C_{102} + [C_{103} + \dots + C_{115}]$
 $M_{114} = C_{114} + C_{115}$
 $M_{115} = C_{115}$

Funções de comutação- R_x

➤ Coluna R_x

$$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} M_{x+t} = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{\omega-x}$$

A utilização de R_x pertence ao cálculo de seguro contra morte de capital crescente, assunto que foge ao escopo dessa disciplina.

Funções de comutação

$$D_x = l_x v^x \quad C_x = v^{x+1} dx$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)} \quad M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}$$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t} \quad R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} M_{x+t}$$