Aula 15 (Parte 1)-Implementação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$_{m+1|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{m|}a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}a_x = {}_mE_x a_{x+m}$$

$$_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n+m}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){
            v <- 1/(1+i)
    px        <- 1-qx
    pxx       <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]) )
    t         <- (0:(length(pxx)-1))
    a         <- (1-v^(t+1))/(1-v)
    ax        <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
    return(ax)
}
```

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \; {}_t p_x$$

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){
        v <- 1/(1+i)
    px     <- 1-qx
    pxx    <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
    t       <- (0:(length(pxx)-1))
    ax     <- b*sum(v^(t)*pxx)
    return(ax)
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} a_{\overline{t|}}\ {}_t p_x q_{x+t}$$

```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){

        v  <- 1/(1+i)
    px      <- 1-qx
    pxx    <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])
        ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))
    t        <- (1:(length(pxx)))
        ## t      <- (0:(length(pxx)-1))
    a         <- v*(1-v^t)/(1-v)
        ## a    <- (1-v^(t+1))/(1-v)
    axp      <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])
        ## ax  <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
    return(axp)
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} v^t \; {}_t p_x$$

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){
    v       <- 1/(1+i)
    px      <- 1-qx
    pxx     <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
        ## pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
    t       <- (1:(length(pxx)))
        ## t    <- (0:(length(pxx)-1))
    axp     <- b*sum(v^(t)*pxx)
    return(axp)
}
```

Anuidade imediata Temporária

```
AnuiAntTemp<-function(i,idade,n,b){
        v      <- 1/(1+i)
        px     <- 1-qx
        pxx    <- c(1, cumprod(px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
        t      <- (0:(length(pxx)-1))
        ax     <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_t p_x$$

```
AnuiPostTemp<-function(i,idade,n,b){
        v      <- 1/(1+i)
         px    <- 1-qx
        pxx    <- cumprod(px[(idade+1):(idade+n)])
        t      <- 1:length(pxx)
         axp <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(axp)
}
```

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_t p_x$$

EXEMPLO 1: Seja uma pessoa $x = 25$ anos, e considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano. Calcule A_{25}, $\ddot{a}_{25}$ e a_{25}.

EXEMPLO 1

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t}$$

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} = 0{,}08320205$$

```
premio<-function(b,idade,i){
  v    <- (1/(1+i))
  pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
   t   <- (1:(length(pxx)))
  Ax   <-  b*sum(v^(t)*pxx*qxx)
   return(Ax)
  }
```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 19{,}25276$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 18{,}25276$$

```
AnuiAnt<-function(i,idade,b){
 v      <-  1/(1+i)
 px     <-  1-qx
 pxx    <-  c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t      <-  (0:(length(pxx)-1))
 ax     <-  b*sum(v^(t)*pxx)
 return(ax)
}
```

```
AnuiPost<-function(i,idade,b){
 v      <- 1/(1+i)
 px     <- 1-qx
 pxx    <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
 t      <- (1:(length(pxx)))
 axp    <- b*sum(v^(t)*pxx)
 return(axp)
}
```

Exemplo de Cálculo de seguros

- PortalHalley

https://phalley.shinyapps.io/interface-atuarial/

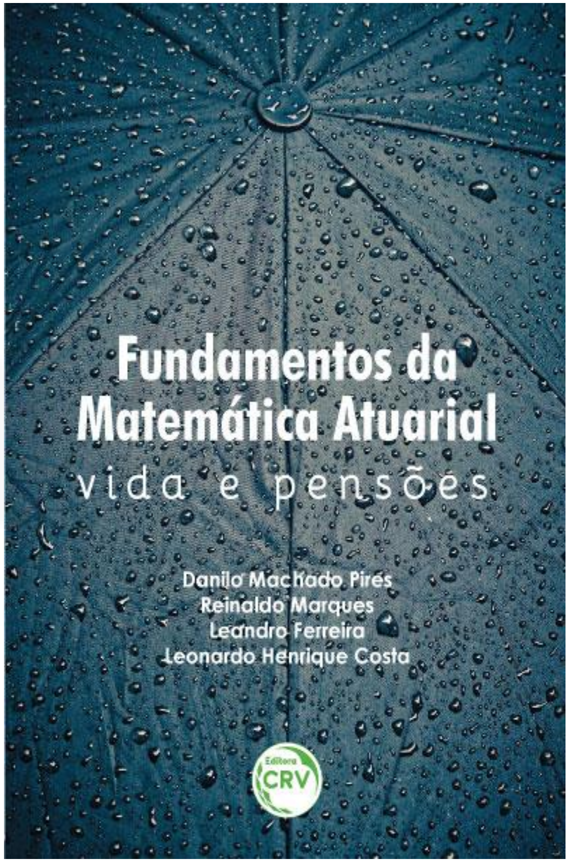
- AppCATU

https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt_BR

- R (Lifecontingencies)

https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, **Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.



Aula 15 (Parte 2)-Relações entre Anuidade e seguro pago ao final do ano de morte

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

EXEMPLO 1 : Dada uma pessoa de 25 anos $(x = 25)$, calcule A_{25}, $\ddot{a}_{25}$ e a_{25}.

Considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano.

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} = 0{,}08320205$$

```
premio<-function(b,idade,i){
  v    <- (1/(1+i))
 pxx  <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx  <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
    t   <- (1:(length(pxx)))
 Ax   <-  b*sum(v^(t)*pxx*qxx)
  return(Ax)
 }
```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 19{,}25276$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 18{,}25276$$

```
AnuiAnt<-function(i,idade,b){
 v       <-  1/(1+i)
 px      <-  1-qx
 pxx     <-  c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t        <-  (0:(length(pxx)-1))
 ax      <-  b*sum(v^(t)*pxx)
 return(ax)
}
```

```
AnuiPost<-function(i,idade,b){
 v      <- 1/(1+i)
  px    <- 1-qx
  pxx  <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
  t      <- (1:(length(pxx)))
  axp   <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(axp)
}
```

Relações entre Seguros e Anuidades

Consideramos um seguro de vida inteiro com tempo discreto (seguro pago no final do ano da morte):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x(1 - p_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} [v^{t+1}\ {}_tp_x - v^{t+1}\ {}_tp_x(p_{x+t})]$$

Assim:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x p_{x+t}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x = v\sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

Lembrando que:

$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$

$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$

$$A_x = v\sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$\boldsymbol{A_x = v\ddot{a}_x - a_x}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$\boldsymbol{\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}}$$

$$1 + a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$\boldsymbol{a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^1:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\bar{n}|}$$

$$A_{x:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$A_{x^1:\bar{n}|} + A_{x:\bar{n}|^1} + iA_{x^1:\bar{n}|} + a_{x:\overline{n}|}\, i = 1$$

$$A_{x:\bar{n}|} + \ iA_{x^1:\bar{n}|} + ia_{x:\overline{n}|} \ = 1$$

Anuidade fracionadas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades Fracionadas

- Muitas anuidades ou rendas, são pagas em frações, de maneira que os pagamentos ocorrem com mais frequência do que a capitalização de juros.

- Cada termo é dividido em m parcelas equidistantes entre si.

Anuidades Fracionadas

Anuidade antecipada com n pagamentos fracionados em m partes ($n \times m$ termos).

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{mn-1} v^{\frac{t}{m}}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\left[\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right]$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^{n}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), n \geq 1$$

Anuidades Fracionadas

Anuidade postecipada com n pagamentos fracionados em m partes($n \times m$ termos).

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}}$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left[\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right]$$

$$a_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-v^{n}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), n \geq 1$$

Anuidades Fracionadas

$$\ddot{a}_{\overline{3}|} = 1 + v + v^2$$

$$\ddot{a}_{\overline{3}|}^{(2)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{v}{2} + \frac{v^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{v^{\frac{5}{2}}}{2}\right)$$

$$a_{\overline{3}|} = v + v^2 + v^3$$

$$a_{\overline{3}|}^{(2)} = \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{v}{2} + \frac{v^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{v^{\frac{5}{2}}}{2} + \frac{v^3}{2}\right)$$

Exemplo 2: Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a $\$500{,}00$, caso fosse fracionada em 12 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado e a taxa de juros de 2% ao ano.

Exemplo 2: Qual o valor de uma anuidade de 6 termos iguais a $\$500{,}00$, caso fosse fracionada em 12 partes? Considere o fluxo de caixa antecipado e a taxa de juros de 2% ao ano.

Solução

$$\ddot{a}_{6|}^{(12)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1-v^6}{1-v^{\frac{1}{12}}}\right) \approx 5{,}6619$$

Portanto, $500\ddot{a}_{6|}^{(12)} \approx \$2830{,}96$ seria o valor presente referente a essa anuidade.

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{T+\frac{1}{m}}|} = \frac{1}{m}\left(\frac{1 - v^{T+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 0$$

$$a^{(m)}_{\overline{T}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1 - v^{T}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 1$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \, {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$a^{(m)}_{x} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \, {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a^{(m)}_{x} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}^{(m)}_{x} \geq a^{(m)}_{x} \geq a_x$$

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\infty} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_tp_x q_{x+t}$$

Anuidades vitalícias fracionadas

Interpolação de Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\left[\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} + ln(1+i)\right]$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}\left[\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} + ln(1+i)\right]$$

EXEMPLO 3: Seja uma pessoa de 40 anos que queira adquirir uma anuidade que paga 1 $u.m.$ .Considerando a tábua de mortalidade mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% ao ano, calcule o valor do prêmio puro único, considere o efeito imediato e que o benefício seja fracionado em pagamentos mensais.

$$\ddot{a}_{40} \approx \$17{,}67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17{,}67 - \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$\,17{,}21$$

Como $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$a_{40} \approx \$16{,}67$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16{,}67 + \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$17{,}12$$

$$\ddot{a}_{40} \approx \$17{,}67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(2)} \approx 17{,}67 - \frac{2-1}{2 \times 2} \approx \$\ 17{,}42$$

$$\ddot{a}_{40}^{(3)} \approx 17{,}67 - \frac{3-1}{2 \times 3} \approx \$\ 17{,}336$$

$$\ddot{a}_{40}^{(4)} \approx 17{,}67 - \frac{4-1}{2 \times 4} \approx \$\ 17{,}295$$

$$\ddot{a}_{40}^{(6)} \approx 17{,}67 - \frac{6-1}{2 \times 6} \approx \$\ 17{,}253$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17{,}67 - \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$\ 17{,}211$$

$$\ddot{a}_{40}^{(365)} \approx 17{,}67 - \frac{365-1}{2 \times 365} \approx \$\ 17{,}17$$

$$a_{40} \approx \$16{,}67$$

$$a_{40}^{(2)} \approx 16{,}67 + \frac{2-1}{2 \times 2} \approx \$16{,}92$$

$$a_{40}^{(3)} \approx 16{,}67 + \frac{3-1}{2 \times 3} \approx \$17{,}003$$

$$a_{40}^{(4)} \approx 16{,}67 + \frac{4-1}{2 \times 4} \approx \$17{,}045$$

$$a_{40}^{(6)} \approx 16{,}67 + \frac{6-1}{2 \times 6} \approx \$17{,}086$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16{,}67 + \frac{12-1}{2 \times 12} \approx \$17{,}128$$

$$a_{40}^{(365)} \approx 16{,}67 + \frac{12-1}{2 \times 365} \approx \$17{,}168$$

Anuidades temporárias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

Anuidades diferidas fracionadas

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(\ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right) $$

$$ {}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} \approx {}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \left(\frac{m-1}{2m} \right) {}_k p_x v^k (1 - {}_n p_{x+k} \times v^n) $$

$$ {}_{k|}a_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(a_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \right) $$

$$ {}_{k|}a_{x:\overline{n|}}^{(m)} \approx {}_{k|}a_{x:\overline{n|}} + \left(\frac{m-1}{2m} \right) {}_k p_x v^k (1 - {}_n p_{x+k} \times v^n) $$

				Fracionadas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	$\ddot{a}_{x:\bar{n}\vert}^{(m)}$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n}\vert}$	$a_{x:\bar{n}\vert}^{(m)}$
Diferida	Vitalícia	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_x$	${}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_x$	${}_{k\vert}a_x^{(m)}$
	Temporária	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}a_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, **Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.** Curitiba :CRV,2022.