

Matemática atuarial

Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Revisão de probabilidade

- A ciência objetiva a coleta de informações na natureza e a formulação de modelos ... que expliquem parte dos fenômenos ou permitam a sua previsão.
- Método científico,
 - Conjunto de regras para obtenção do conhecimento durante a investigação científica...
 - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.
- Modelo e realidade por vezes são erroneamente confundidos.

Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre contará com incerteza.
- Modelos determinísticos
 - Condições bastante controladas,
 - Variações desprezadas
- Modelos probabilísticos
 - Controle total e inviabilizado
 - Variações não podem ser ignoradas.

Revisão de probabilidade

- **Fenômeno aleatório** é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
- Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico**.

Revisão de probabilidade

- **Espaço amostral (Ω)** é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.
- **Definição** Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento.
 - Ω é o evento certo,
 - \emptyset o evento impossível.
 - Se $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

Revisão de probabilidade

EXEMPLO 1:

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

$$A = \{1, 6 \leq x \leq 1, 7\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$

$$A = \{0 \leq t \leq 30\}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade é chamado evento aleatório.

Revisão de probabilidade-Conceito de Probabilidade

➤ Teoria clássica

Dado o espaço de resultados Ω , constituído por um número finito de n elementos igualmente prováveis,..., define-se a probabilidade de acontecimento de A , como sendo a razão de resultados favoráveis A e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados de } A}{n^{\circ} \text{ de resultados possíveis}}$$

...se conhece fatos decisivos sobre o mecanismo ou processo que produz os resultados

Revisão de probabilidade-Conceito de Probabilidade

➤ Teoria Frequentista

- Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento A é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

em que n_A é o número de ensaios em que o evento A foi observado, e n o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com que se realiza A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.

Revisão de probabilidade-Conceito de Probabilidade

- Probabilidade subjetiva e lógica
 - Define-se como uma medida do grau de confiança em relação a uma proposição.
 - Ela é função da quantidade de informação disponível ...
 - Julgamento pessoal .
 - Pensamento Bayesiano.
 - Possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de probabilidade

➤ Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto $P()$ que associa a subconjuntos A de Ω um número real $P(A)$ que satisfaz os axiomas a seguir.

- Para todo $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Se A_1, A_2, \dots, A_n forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
 - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.
- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de Ω um número real.

EXEMPLO 2: Sabe-se que em uma fábrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos $\left(D \rightarrow P(D) = \frac{1}{4}\right)$

Itens perfeitos $\left(Pe \rightarrow P(Pe) = \frac{3}{4}\right)$

Revisão de probabilidade

Para uma amostra $n = 2$ peças retiradas é possível construir uma tabela onde X é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e $P(X)$ será a probabilidade do resultado.

X	0	1	2
	(Pe, Pe)	$(D, Pe)(Pe, D)$	(D, D)
$P(X)$	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Revisão de probabilidade

➤ Variáveis Aleatórias Discretas

- $P(X = x)$ Função de probabilidade.
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todo i .
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

➤ Variáveis aleatórias contínuas

- $f(x)$ Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

EXEMPLO 3:

a)

X	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

c)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,7 & \text{se } x = 0 \\ 0,5 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) = \frac{6}{5} \left(\frac{5}{6} \right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty}$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left(-\frac{1}{e^{2 \times 0}} \right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}dx + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}dx$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10} \Big|_{x=0}^{x=2} + \left(-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20} \right) \Big|_{x=2}^{x=6}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Revisão de probabilidade

Função de distribuição de probabilidade (função de distribuição).
Em geral ela é representada por $F_X(x)$.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$$

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i)$$

O complementar da função acumulada, também chamada de função de sobrevivência, ou função de excesso de danos é representada por $S_X(x)$ ou $\bar{F}_X(x)$.

$$S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

Revisão de probabilidade

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0;$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1;$
 - Se $x_1 \leq x_2$, então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, $F_X(x)$ é uma função crescente de x ;
 - $P_X(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1);$
-
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} S_X(x) = 1;$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} S_X(x) = 0;$
 - Se $x_1 > x_2$, então $S_X(x_1) > S_X(x_2)$, $S_X(x)$ é uma função decrescente de x ;

Esperança de variáveis aleatórias

- ...forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.
- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.
- ...parâmetro para vários modelos probabilísticos.

Esperança de variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \mu_X$$

Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_X$$

Esperança de variáveis aleatórias

Seja X uma variável aleatória e $g(\cdot)$ uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função $g(X)$ denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j) P(X = x_j)$$

Exemplo 4: Segundo determinada tábua de vida, o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?
- b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

Exemplo 4: Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução

a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?

$$E(T) = \sum tP(T = t) = 0,4622$$

b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

$$E[g(T)] = E(v^{T+1}) = \sum v^{t+1}P(T = t) = 0,9866602$$

Esperança de variáveis aleatórias

Seja L um valor limite dentro do domínio de X , e seja Y uma variável aleatória “Valor de X sujeito ao limite L ”. Então:

$$Y = \begin{cases} X, & X < L \\ L, & X \geq L \end{cases}$$

Logo, para o caso de X se contínuo tem-se que:

$$E(Y) = E(X; L) = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + \int_L^{\infty} L f_X(x) dx = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + L S_X(L)$$

E no caso de X se discreto, tem-se:

$$E(Y) = E(X; L) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + \sum_{x_i = L}^{\infty} L P_X(x_i) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + L P_X(X \geq L)$$

Exemplo 5: Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) Determinado produto oferecido por uma seguradora tem um prêmio calculado a partir do valor esperado da variável aleatória $g(T) = v \frac{1-v^T}{1-v}$, em que $v = \frac{1}{1,03}$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no valor esperado de $g(T)$, sujeito a um limite técnico $g(2)$. Calcule o prêmio sujeito a esse limite.

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} g(T), & g(T) < g(2) \\ g(2), & g(T) \geq g(2) \end{cases}$$

Equivalente a

$$Y = \begin{cases} g(T), & T < 2 \\ g(2), & T \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E[g(T); g(2)]$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(T) P(T) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T)$$

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(T) P(T) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T)$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 v \frac{1 - v^t}{1 - v} P(T) + v \frac{1 - v^2}{1 - v} \sum_{t=2}^3 P(T) \approx 0,4376311$$

Universidade Federal de Alfenas

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2^a edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.

