

Teoria do Risco

Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



<https://atuaria.github.io/portahalley/index.html>

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

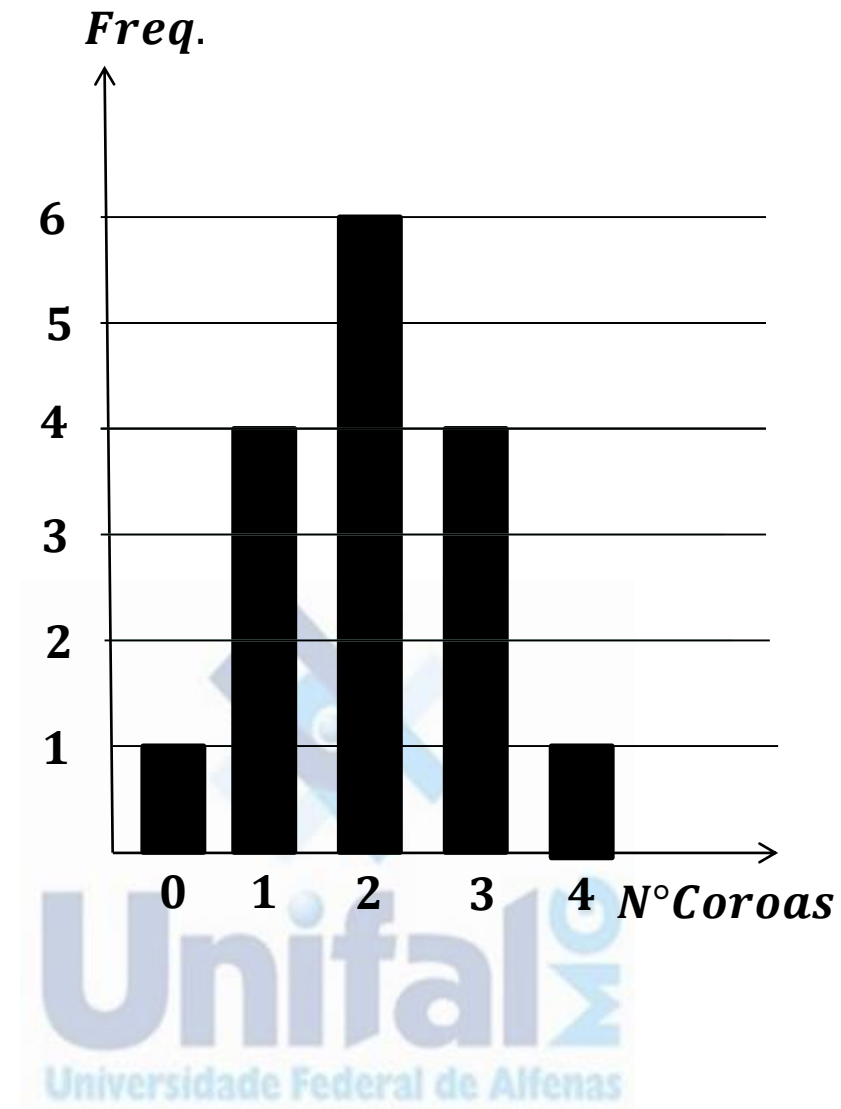
- O teorema central do limite é um poderoso teorema da estatística.
- Em teoria das probabilidades, esse teorema afirma que quando o tamanho da amostra aumenta a distribuição amostral da sua soma aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal consequentemente o teorema se estende a distribuição das médias amostrais.

Exemplo:

Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a p (sucesso) e q (fracasso), representaremos 1 como os casos que aconteceram coroa e 0 os casos que ocorreram cara, assim vamos avaliar todos os possíveis resultados nesse experimento e avaliar a soma de coroas que podem acontecer:



Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	N° de coroas
Cara	Cara	Cara	Cara	0
Coroa	Cara	Cara	Cara	1
Cara	Coroa	Cara	Cara	1
Cara	Cara	Coroa	Cara	1
Cara	Cara	Cara	Coroa	1
Coroa	Coroa	Cara	Cara	2
Coroa	Cara	Coroa	Cara	2
Coroa	Cara	Cara	Coroa	2
Cara	Coroa	Cara	Coroa	2
Cara	Cara	Coroa	Coroa	2
Cara	Coroa	Coroa	Cara	2
Cara	Coroa	Coroa	Coroa	3
Coroa	Cara	Coroa	Coroa	3
Coroa	Coroa	Cara	Coroa	3
Coroa	Coroa	Coroa	Cara	3
Coroa	Coroa	Coroa	Coroa	4



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

➤ Definição:

Seja S_n uma variável aleatória correspondente a uma soma de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança μ e variância σ^2 . Então, se n tende ao infinito, a variável:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$Z_n \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Logo

$$E(S_n) = n\mu \quad \text{var}(S_n) = \sigma^2 n$$

$$S_n \sim N(n\mu, \sigma^2 n)$$



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

Então o Teorema central do limite sugere uma metodologia aproximada para a obtenção de valores para distribuição da soma de variáveis independentes, consequentemente também para a distribuição da média de variáveis aleatórias.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

..Se aplica bem quando não se conhece a distribuição de S_{ind} , ou sua obtenção é trabalhosa.

Condições do Teorema Central do Limite,

→ X_i independentes e **identicamente distribuídos**,

→ o número de sinistros tem que ser grande e não somente o número de apólices (n).



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

- Uma interessante aplicação da aproximação de S_{ind} pela distribuição normal é sua utilização para obtenção de um prêmio (P_S) baseado em uma probabilidade (α) das indenizações superarem esse prêmio.

$$P(S_{ind} \geq P_S) = \alpha$$



*Princípio do percentil

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P(S_{ind} \leq P_S) = 1 - \alpha$$

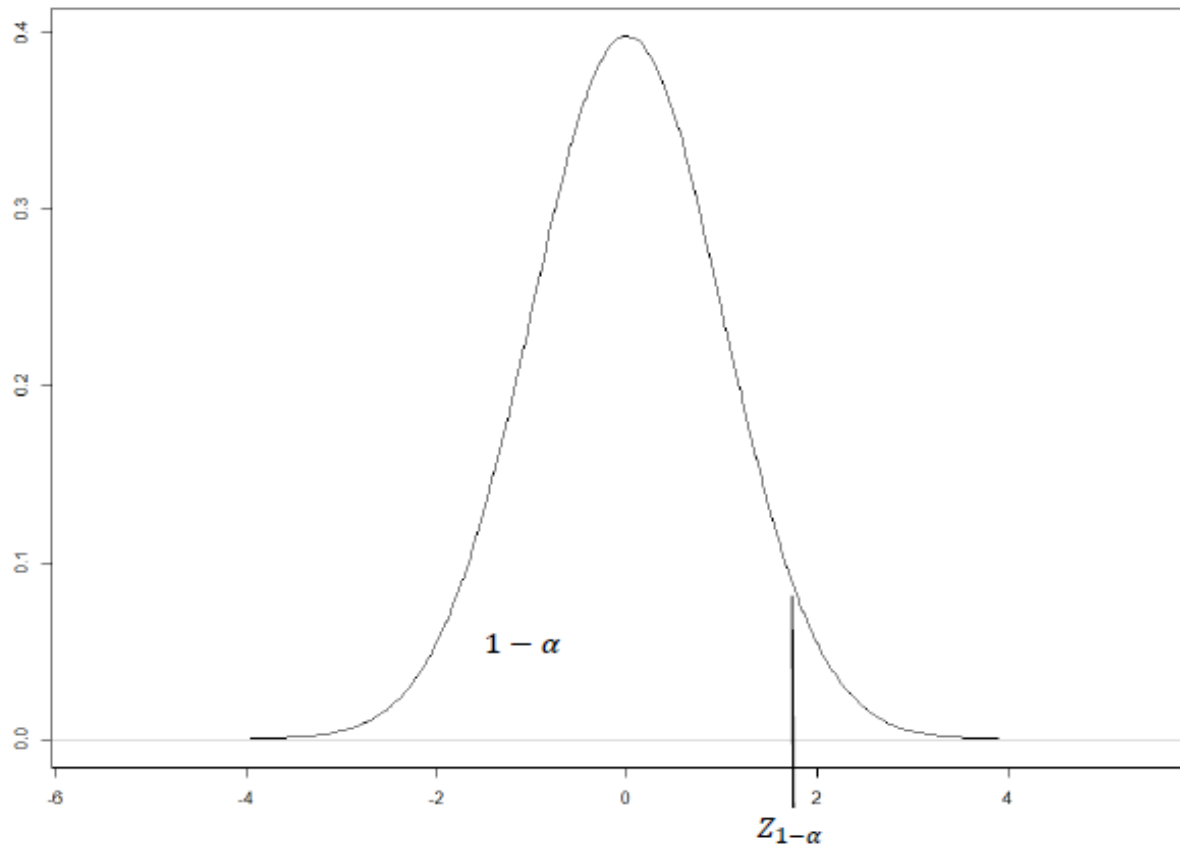
$$P\left(\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} \leq \frac{P_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$

Tem-se que $\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} = Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Pois $\sigma_{S_{ind}}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = n\sigma_X^2$, assim $\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{n\sigma_X^2} = \sigma_X \sqrt{n}$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P\left(Z \leq \frac{P_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$



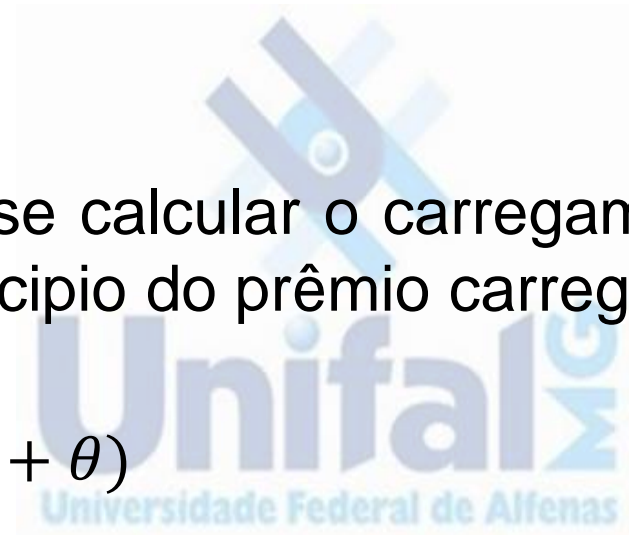
Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$\frac{P_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = Z_{1-\alpha}$$

$$P_S = Z_{1-\alpha} \sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind})$$

- A partir dessas condições, pode-se calcular o carregamento de segurança (θ) utilizado no princípio do prêmio carregado.

$$P_S = E(S_{in})(1 + \theta)$$



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P_S = Z_{1-\alpha} \sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind}) \quad (1)$$

$$P_S = E(S_{ind}) + \theta E(S_{ind}) \quad (2)$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

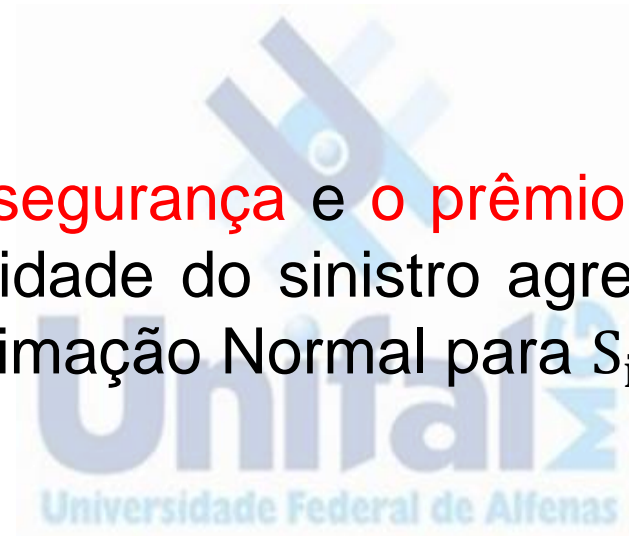
- Quanto menor a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total da carteira, maior terá que ser o carregamento de segurança.
- Quanto maior o desvio padrão do sinistro agregado em relação à média do sinistro, maior será o carregamento de segurança.

- Exemplo

Uma carteira de seguro de vida possui 3 faixas de importâncias seguradas, quais sejam: R\$10 000, R\$30 000 e R\$50 000.

O número de apólices em cada faixa é de 200 000, 300 000 e 100 000, respectivamente. Em cada uma dessas 3 faixas a probabilidade de morte em 1 ano é de 0,01, 0,005 e 0,02 respectivamente.

Calcular o carregamento de segurança e o prêmio puro total anual de modo que a probabilidade do sinistro agregado não exceda a 5%, utilizando a aproximação Normal para S_{ind} .



$$S_{ind} = [X_1 + X_2 + \cdots + X_{200000}] + [Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{300000}] + [Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100000}]$$

X_i	$P(X_i)$	I_i	$P(I_i)$	B_i	$P(B_i)$
R\$0	0,99	0	0,99		
R\$10000	0,01	1	0,01	R\$10000	1
Y_i	$P(Y_i)$				
R\$0	0,995	0	0,995		
R\$30000	0,005	1	0,005	R\$30000	1
Z_i	$P(Z_i)$				
R\$0	0,98	0	0,98		
R\$50000	0,02	1	0,02	R\$50000	1



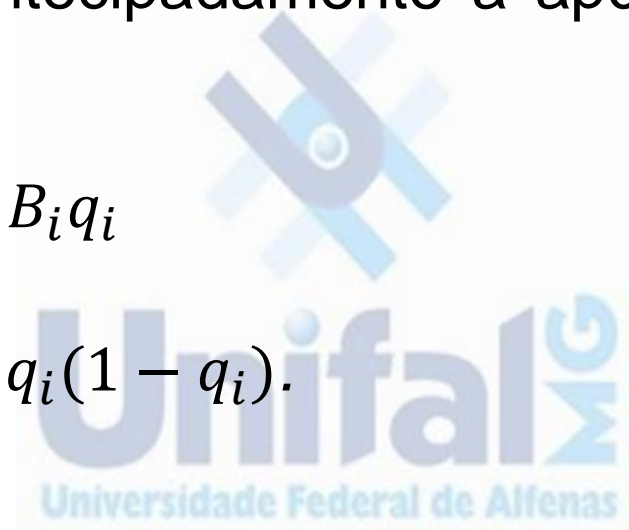
$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n [E(B_i)]^2 var(I_i)$$

Lembrando que no caso de seguro de vida, invalidez a indenização B_i é fixa (conhecida antecipadamente a apólice), nesse caso:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i^2 q_i (1 - q_i).$$



$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0,01R\$10000,00 + \sum_{i=1}^{300000} 0,005R\$30000,00 + \sum_{i=1}^{100000} 0,02R\$50000,00$$

$$E(S_{ind}) = R\$165000\ 000,00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0,01 \times 0,99(R\$10000,00)^2 + \sum_{i=1}^{300000} 0,005 \times 0,995(R\$30000,00)^2 + \sum_{i=1}^{100000} 0,02 \times 0,98(R\$50000,00)^2$$

$$var(S_{ind}) = R\$^2 6,44125 \times 10^{12}$$

$$P_S = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} Z_{0,95} = R\$169174575,64$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})} = \frac{2559297}{165000\ 000} 1,645 = 2,55\%$$

- Exemplo

A probabilidade de ocorrer um sinistro devido a um vendaval em um seguro residencial é de 0,01. Seja uma carteira com 200 apólices e com o valor de cada sinistro ocorrendo de acordo com uma distribuição Exponencial ($\alpha = 0,0001$).

Calcular o carregamento de segurança de modo que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total, não exceda a 5% utilizando a aproximação Normal para S_{ind} .

- $E(B_i) = \frac{1}{0,0001} = 10000$

$$var(B_i) = (10000)^2$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} 0,01 \times R\$10000,00 = 200 \times 100 = R\$20000,00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} (10000)^2(0,01) + \sum_{i=1}^{200} (10000)^2(0,01)(0,99)$$

$$var(S_{ind}) = R\2398000000$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

$$\theta = \frac{R\$19949,94(1,645)}{R\$20000} = 1,64$$

- Exemplo

Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

$IS(\$)$	10000	15000	20000	30000	100000
Nº de Apólices	55	70	50	20	5

A probabilidade de ocorrer um desmoronamento em uma residência em 1 ano é de 0,01. Os valores dos sinistros seguem uma distribuição Uniforme $(0, IS)$. **Calcule o prêmio puro total anual que a seguradora deve cobrar de modo que a probabilidade do sinistro agregado anual superar o prêmio puro total anual não exceda a 5%, considerando uma aproximação Normal para o sinistro agregado;**

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$
$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n [E(B_i)]^2 var(I_i)$$

Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

IS(\$)	10000	15000	20000	30000	100000
Nº de Apólices	55	70	50	20	5

$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

Logo

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i) ,$$

$$E(S_{ind}) = 0,01 \left(\sum_{i=1}^{55} \frac{10000}{2} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000}{2} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000}{2} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000}{2} + \sum_{i=1}^5 \frac{100000}{2} \right)$$

$$= \text{R\$}18500,00$$

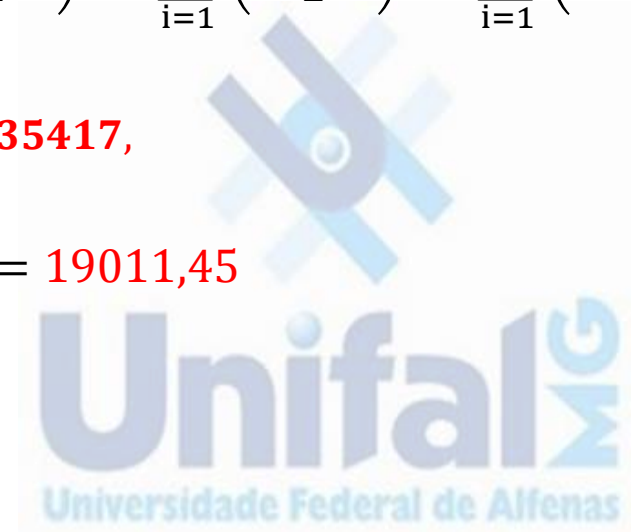
$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 var(I_i),$$

$$var(S_{ind}) = 0,01 \left(\sum_{i=1}^{55} \frac{10000^2}{12} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000^2}{12} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000^2}{12} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000^2}{12} + \sum_{i=1}^5 \frac{100000^2}{12} \right) \\ + 0,0099 \left(\sum_{i=1}^{55} \left(\frac{10000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{70} \left(\frac{15000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{50} \left(\frac{20000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{30000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{100000}{2} \right)^2 \right)$$

$$var(S_{ind}) = \mathbf{361435417},$$

$$\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{361435417} = \mathbf{19011,45}$$



$$S_{ind} = (X_1 + \cdots + X_{55}) + (Y_1 + \cdots + Y_{70}) + (Z_1 + \cdots + Z_{50}) + (U_1 + \cdots + U_{20}) + (V_1 + \cdots + V_5).$$

$$E(S_{ind}) = \text{R\$18500,00.}$$

$$\text{var}(S_{ind}) = 361435417,$$

$$\sigma_{S_{ind}} = 19011,45.$$

Finalmente o prêmio puro é obtido.

$$P = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} Z_{0,95}$$

$$\mathbf{P = R\$18500,00 + R\$19011,45(1,645) = R\$49773,84}$$

