Aula 15-Implementação

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

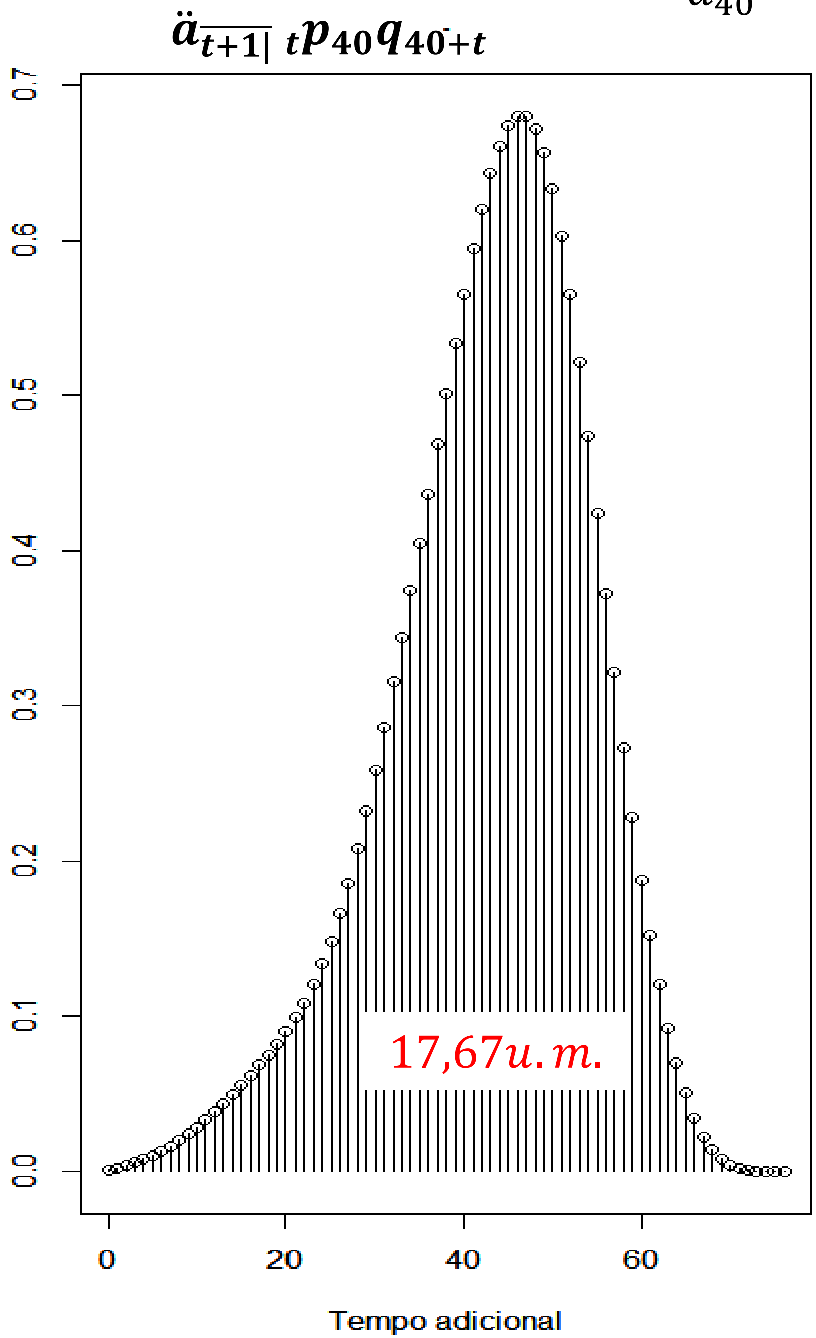
```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){
 v <- 1/(1+i)
px            <- 1-qx
pxx           <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]) )
t            <- (0:(length(pxx)-1))
a             <- (1-v^(t+1))/(1-v)
ax            <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
return(ax)
}
```

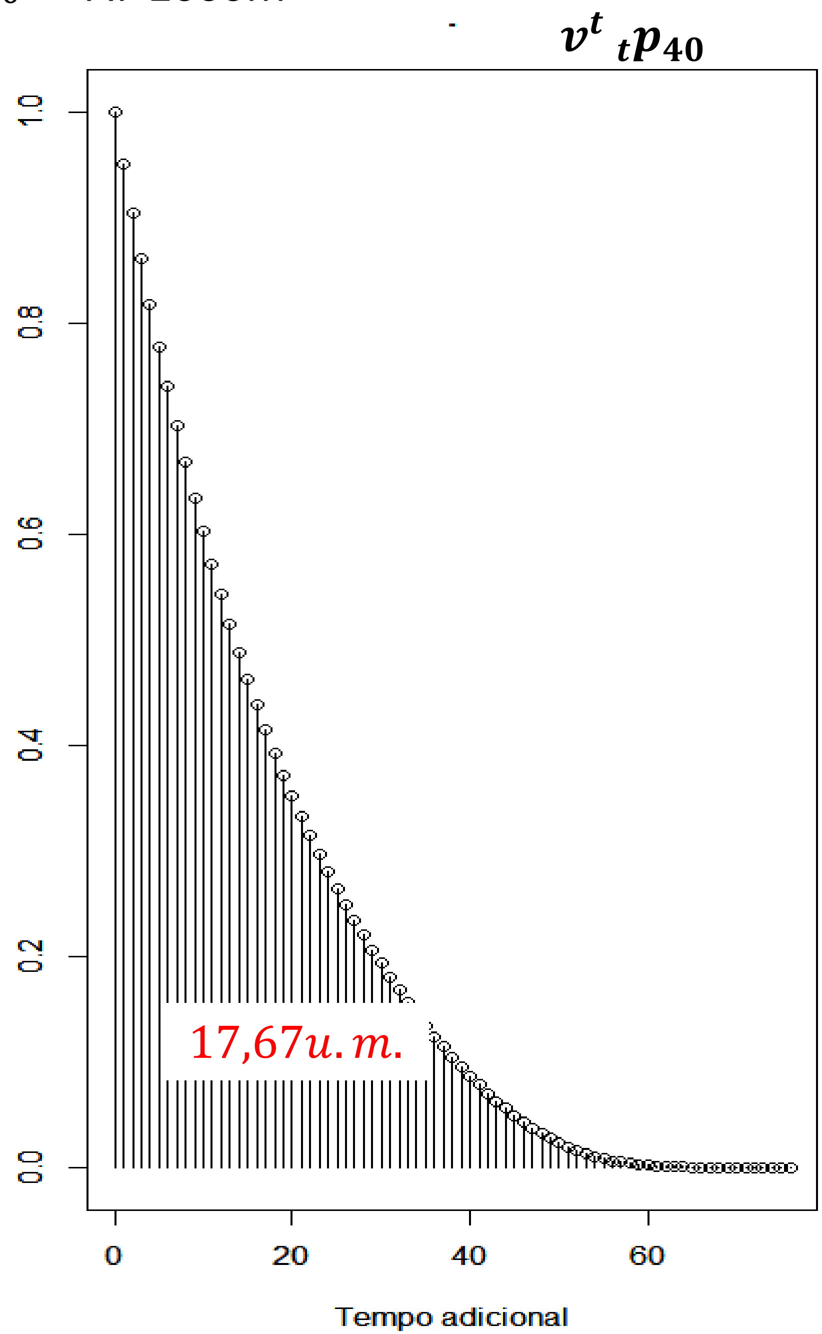
Anuidade imediata vitalícia antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} v^t \ {}_t p_x$$

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){

v <- 1/(1+i)
px          <- 1-qx
pxx          <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
t           <- (0:(length(pxx)-1))
bx          <- b*sum(v^(t)*pxx)
return(bx)
}
```

$\ddot{a}_{40}$ $i = 5\%$ AT-2000M





Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} a_{\overline{t|}} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

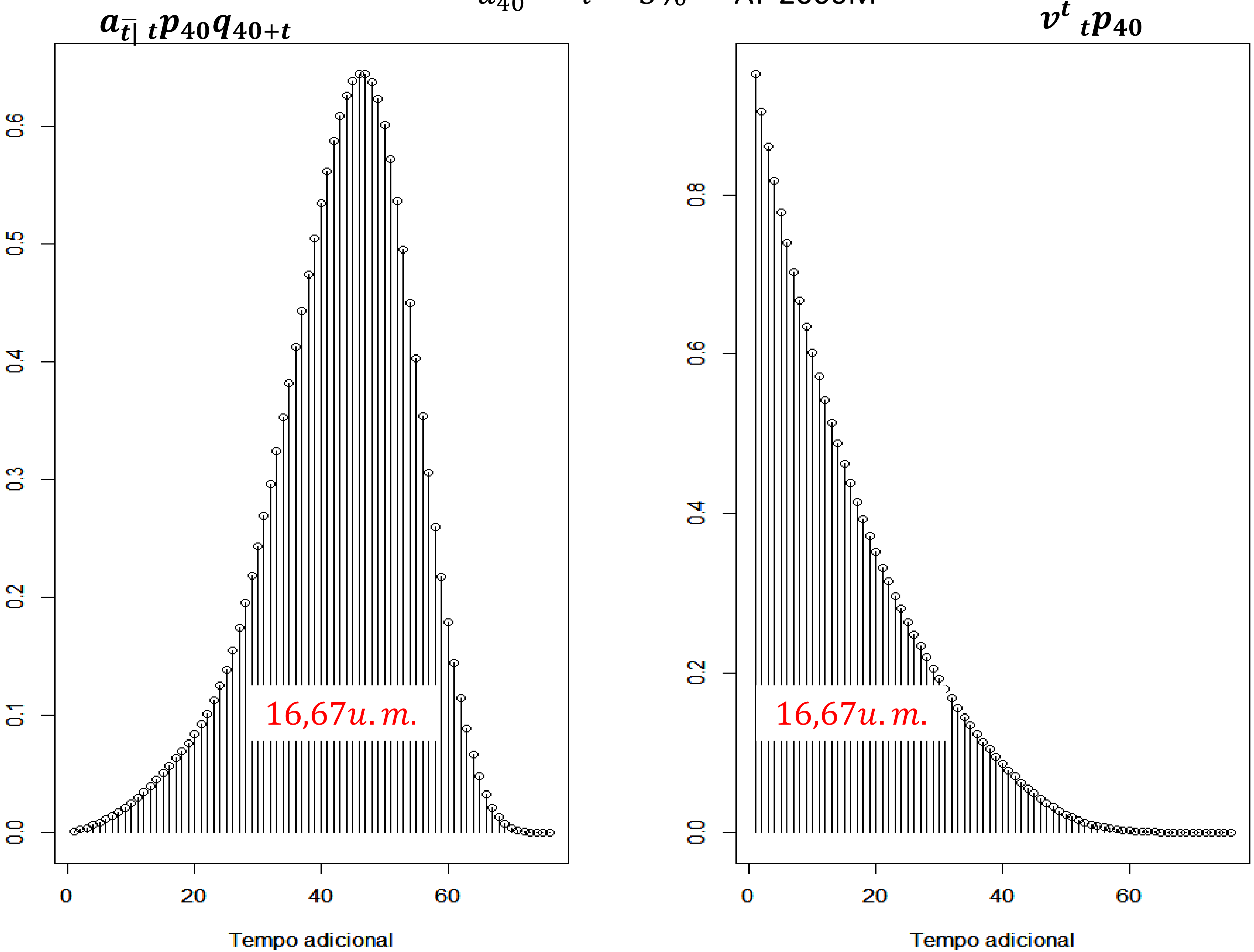
```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){

  v<- 1/(1+i)
  px      <- 1-qx
  pxx     <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])
 ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))
t          <- (1:(length(pxx)))
 ## t      <- (0:(length(pxx)-1))
  a         <- v*(1-v^t)/(1-v)
  ## a     <- (1-v^(t+1))/(1-v)
   ax           <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])
 ## ax             <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
  return(ax)
}
```

Anuidade imediata vitalícia postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \ {}_t p_x$$

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){
v<- 1/(1+i)
  px          <- 1-qx
  pxx          <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
 ## pxx          <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
  t           <- (1:(length(pxx)))
 ## t          <- (0:(length(pxx)-1))
  bx          <- b*sum(v^(t)*pxx)
  return(bx)
}
```

a_{40} $i = 5\%$ AT-2000M



Anuidade imediata Temporária

```
AnuiAntTemp<-function(i,idade,n,b){
        v      <- 1/(1+i)
        px     <- 1-qx
        pxx    <- c(1, cumprod(px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
        t      <- (0:(length(pxx)-1))
        ax     <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_t p_x$$

```
AnuiPostTemp<-function(i,idade,n,b){
        v     <- 1/(1+i)
         px   <- 1-qx
        pxx   <- cumprod(px[(idade+1):(idade+n)])
        t     <- 1:length(pxx)
         ax   <- b*sum(v^(t)*pxx)
        return(ax)
}
```

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_t p_x$$

EXEMPLO 13:

Seja uma pessoa $x = 25$ anos, e considerando a tábua AT-2000 masculina e uma taxa de juros anual de 5% ao ano. Calcule A_{25}, $\ddot{a}_{25}$ e a_{25}

EXEMPLO 13:

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05} \right)^{t+1} \quad {}_{t}p_{25} q_{25+t}$$

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05} \right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05} \right)^{t} {}_{t}p_{25}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} = 0{,}08320205$$

```
prêmio<-function(b,idade,i){
  f.desconto <- 1/(1+i)
  v <- f.desconto^(1:((idademaxima - idade)+1))
  pxx <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]))
  qxx <- c(qx[(idade+1):idademaxima],1)
  Ax <- b*sum(v*pxx*qxx)
  return(Ax)
 }
```

$$\ddot{a}_{25} = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 19{,}25276$$

```
AuiAnt<-function(i,idade,b){
 f.desconto <- 1/(1+i)
 px          <- 1-qx
 pxx          <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t          <- (0:(length(pxx)-1))
 bx          <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

$$a_{25} = \sum_{t=1} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{t} {}_{t}p_{25} = 18{,}25276$$

```
AnuiPost<-function(i,idade,b){
 f.desconto <- 1/(1+i)
 px          <- 1-qx
 pxx          <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
 t          <- (1:(length(pxx)))
 bx          <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```

Exemplo de Cálculo de seguros

- PortalHalley

https://phalley.shinyapps.io/interface-atuarial/

- AppCATU

https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/1992?locale=pt_BR

- R (Lifecontingencies)

https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf

Aula 16-Relações entre Anuidade e seguro pago ao final do ano de morte

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Relações entre Seguros e Anuidades

- Consideramos um seguro de vida inteiro com tempo discreto (seguro pago no final do ano da morte):

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x (1 - p_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} [v^{t+1} \, {}_tp_x - v^{t+1} \, {}_tp_x (p_{x+t})]$$

- Assim:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x p_{x+t}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t+1}p_x$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_tp_x - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x = v\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x \qquad a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

$$A_x = v\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x - \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

$$\boxed{A_x = v\ddot{a}_x - a_x}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

EXEMPLO 14

Determine a variância das seguintes variáveis aleatórias.

$a)\ \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} =$

$b)\ a_{\overline{T_x}|} =$

SOLUÇÃO (Letra a)

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$
$$A_x = v\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

Logo

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}} = \frac{1 - Z_T}{1 - v}$$

$$var\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = var\left(\frac{1 - v^{T_x+1}}{1 - v}\right) = \frac{var(v^{T_x+1})}{(1 - v)^2}$$

$$\boldsymbol{var\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(1 - v)^2}}$$

SOLUÇÃO (Letra b)

$$1 + a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}$$

Logo

$$a_{\overline{T_x|}} = \frac{v - Z_T}{1 - v}$$

$$var\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = var\left(\frac{v - Z_T}{1 - v}\right) = \frac{var(v^{T_x+1})}{(1 - v)^2}$$

$$\boldsymbol{var}\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \frac{{}^2\boldsymbol{A_x} - (\boldsymbol{A_x})^2}{(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v})^2}$$

Variância (Anuidade Vitalícia)

$$var\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = var\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right)$$

$$\boldsymbol{var}\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \frac{{}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A_x} - (\boldsymbol{A_x})^{\mathbf{2}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{v})^{\mathbf{2}}}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^1} + iA_{x^1:\overline{n}|} + i = 1$$

Aula 17-Anuidades fracionadas

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{mn-1} v^{\frac{t}{m}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} v^{t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + \cdots + v + \cdots + v^{1+\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^{mn}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidades fracionadas

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{T+\frac{1}{m}}|} = \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^{T+\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 0$$

$$a^{(m)}_{\overline{T}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\left(\frac{1-v^{T}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right), T \geq 1$$

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}}\ {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$a^{(m)}_x = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}}\ {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a^{(m)}_x \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Anuidades vitalícias fracionadas

- Relação 1.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \; {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \; {}_t p_x q_{x+t}$$

- Relação 2.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} v \left(\frac{1-v^t}{1-v} \right) {}_t p_x q_{x+t}$$

EXEMPLO 15

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Antecipado e postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro fracionado em pagamentos mensais, a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = R\$17{,}67$$

$$\ddot{a}_{40}^{(12)} \approx 17{,}67 - \frac{12-1}{2 \times 12} = R\$\ 17{,}21$$

Como $\ddot{a}_x = a_x + 1$

$$a_{40} = R\$16{,}67$$

$$a_{40}^{(12)} \approx 16{,}67 + \frac{12-1}{2 \times 12} = R\$17{,}12$$

Anuidades temporárias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

Anuidades vitalícias diferidas fracionadas

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(\ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right) $$

De forma idêntica

$$ {}_{k|}a_x^{(m)} \approx {}_k p_x v^k \left(a_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \right) $$