Matemática Atuarial II

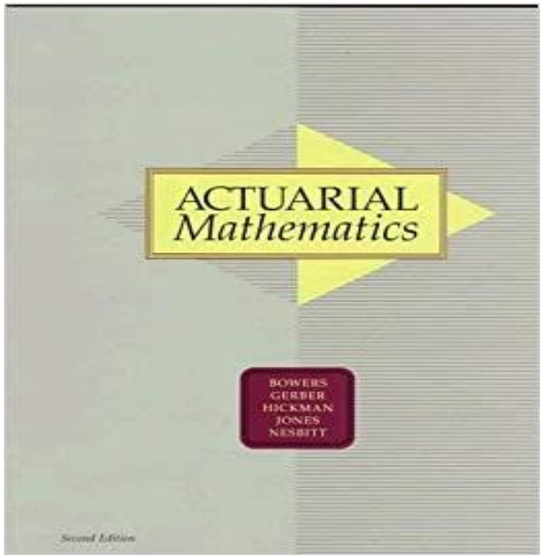
AULA-1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

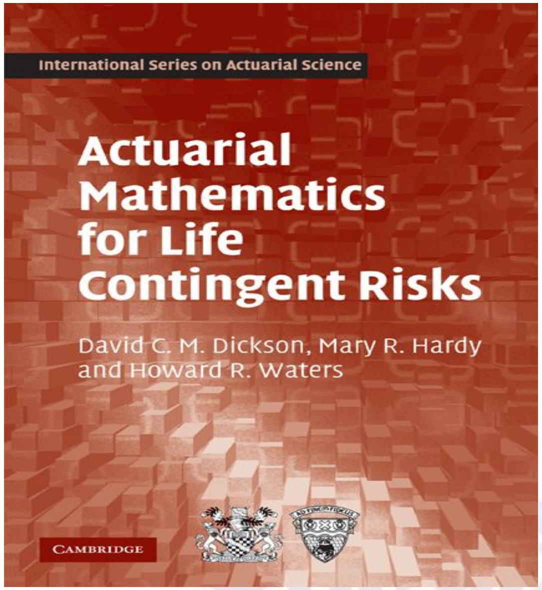
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Bibliografia

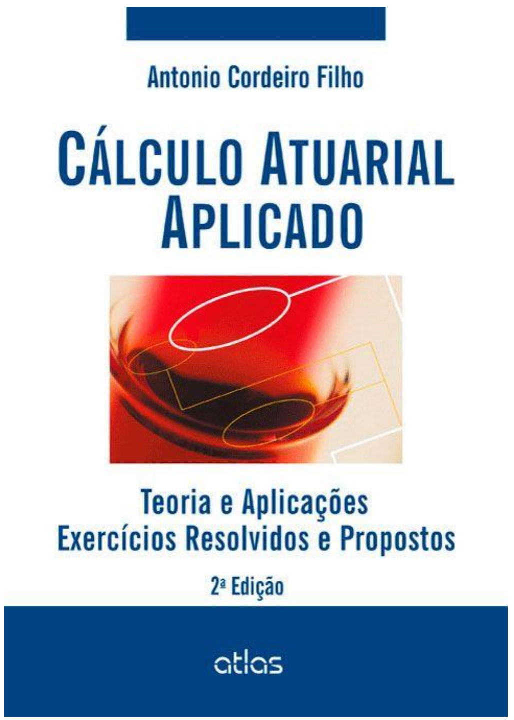
BOWERS, N. et al. **Actuarial mathematics. 2**. ed. Ilinois: The Society of Actuaries, 1997



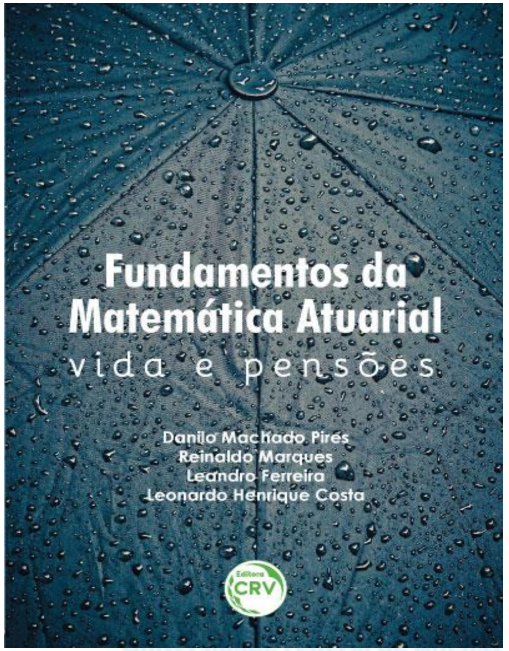
D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, Cambridge, 2013



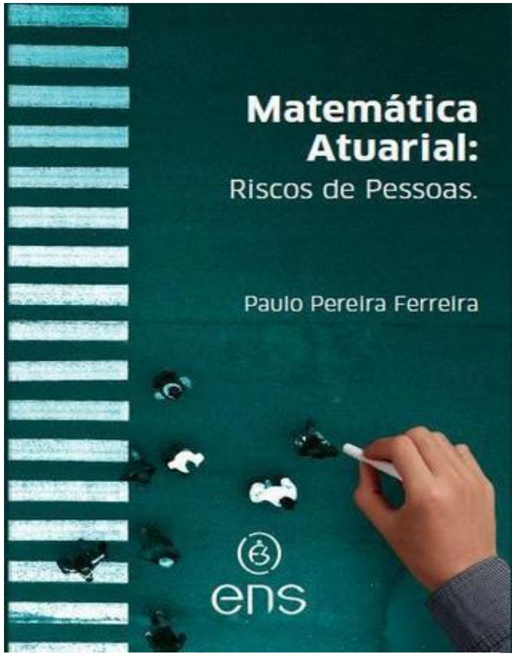
CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.



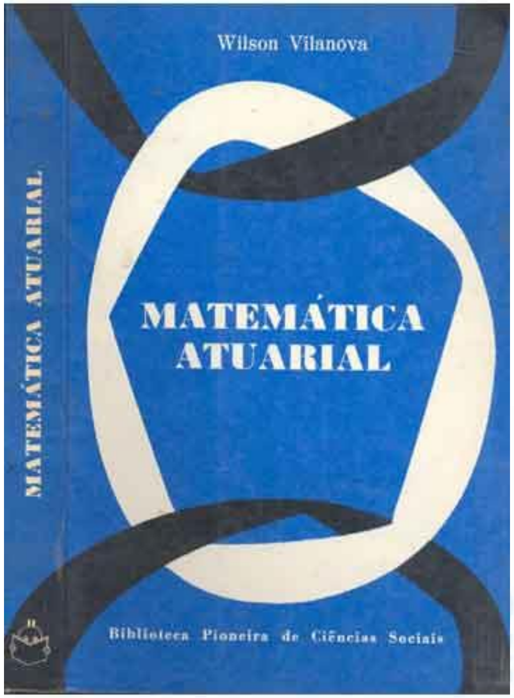
PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019



VILANOVA, Wilson**. Matemática atuarial: destinado aos cursos de ciências econômicas, contábeis e atuariais.** Liv. Pioneira, Ed. da Universidade, 1969.



Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
  - Avaliar riscos
  - Avaliar sistemas de investimentos
  - ...
  - Produtos atuariais do ramo vida
    - Seguros
    - Planos de previdência
    - Planos de benefício

Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte.
  - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
  - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
  - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.

Seguro de vida-Benefício(constante) igual a b

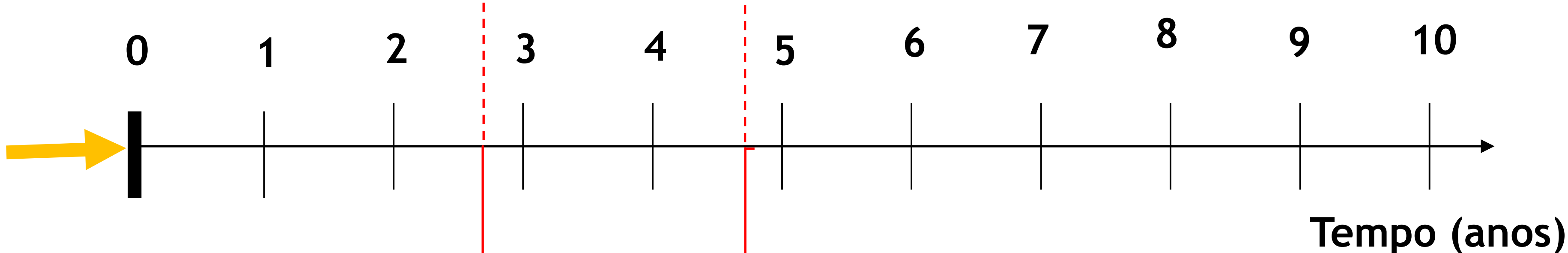
$$Z = be^{-\delta(4,7\ldots)}$$

$$E(VP) = bE\left(e^{-\delta T}\right)$$

$$Z = be^{-\delta(2,8\ldots)}$$

$$Z_T = be^{-\delta T}$$

$$\delta = ln(1+i)$$



$$Z = b\frac{1}{(1+i)^{2+1}}$$

$$Z_T = bv^{T+1}$$

$$E(VP) = bE(v^{T+1})$$

$$Z = b\frac{1}{(1+i)^{4+1}}$$

SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt \qquad \bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

$$\boxed{{}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt}}$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(T_x = t) \qquad A_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} v^{t+1} P(T_x = t)$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

Expectativa de vida

A expectativa de vida de uma pessoa de idade x, mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = E(T_x) = \sum_{t=0}^{\omega-x} t\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tp_x$$

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\, dt$$

A expectativa de vida completa de uma pessoa de idade x, admitindo que a distribuição das mortes ao longo do ano é uniforme, é dada por:

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

EXEMPLO 1: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos? Considere um benefício igual a $\$1$, com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

x	q_x	p_x	l_x
		...	
110	0,60392	0,39608	305,008
111	0,66819	0,33181	120,808
112	0,73948	0,26052	40,0852
113	0,81825	0,18175	10,443
114	0,90495	0,09505	1,89801
115	1,00000	0,00000	0,18041

$$A_{110} = \sum_{t=0}^{115-110} v^{t+1}({}_{t}p_{110})\,(q_{110+t}) \approx 0{,}9403557 u.m$$

EXEMPLO 2: Seja uma carteira com 100 apólices de seguro de vida vitalício com benefício pago no momento da morte, em que todas as apólices são independentes e identicamente distribuídas. Assumindo $x = 60$ o tempo de vida adicional é modelado de tal forma que ${}_tp_{60} = e^{-0,04t}$e $\mu(60 + t) = 0,04$. Considerando que $b = 1$ e $\delta = 0,06$ qual é o valor do prêmio Π (utilizando aproximação normal) cuja probabilidade de que o total de indenizações dessa carteira o supere seja de 5%, ou seja $P(S \leq \Pi) = 0,95$.

$$P(S \leq \Pi) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} \leq \frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$P\left(W \leq \frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{var(Z_T)}} = w_\alpha$$

SOLUÇÃO Para cada apólice

$$\overline{\mathrm{A}}_{60} = \int_0^{\infty} e^{-0{,}06t}\, 0{,}04 e^{-0{,}04t} dt = \mathbf{0{,}4}$$

$$var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{60} - (\overline{\mathrm{A}}_{60})^2$$

$$var(Z_T) = \int_0^{\infty} e^{-0{,}12t}\, 0{,}04 e^{-0{,}04t} dt - (0{,}4)^2 \approx \mathbf{0{,}09}$$

Logo $\boldsymbol{E(S) = 40}$ e $\boldsymbol{var(S) = 9.}$

$$P(S \leq \Pi) = 0{,}95 \qquad P\left(W \leq \frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}95$$

Como $W \sim N(0{,}1)$, então

$$\frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}} = w_{0{,}95} = 1{,}645$$

$$\Pi = 44{,}93.$$

Seguros com benefício crescente

- Contratos de seguro com alta procura são aqueles em que o benefício pago pela seguradora varia conforme o tempo em relação a data do contrato.

- Algumas opções nesse sentido são aquelas em que ocorre um acréscimo ou decréscimo no benefício (anual) de acordo com uma progressão aritmética.
  - A importância segurada aumenta segundo uma progressão aritmética.

Produtos Atuariais com benefício crescente

Seguro de vida vitalício

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1+t)v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}A_x$$

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} te^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt = \int_0^{\infty} {}_{s|}\bar{A}_x\, ds.$$

Seguro de vida temporário

$$(IA)_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t)v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}A_{x^1:\overline{n-t|}}$$

$$(I\bar{A}\,)_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^{n} te^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

EXEMPLO 3: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0{,}9403557$$

EXEMPLO 3: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere um com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0{,}9403557$$

Solução:

$$(IA)_{110} = \sum_{t=0}^{5} {}_{t|}A_{110} = A_{110} + {}_{1|}A_{110} + {}_{2|}A_{110} + {}_{3|}A_{110} + {}_{4|}A_{110} + {}_{5|}A_{110} \approx 1{,}4482.$$

$$(IA)_{110} \approx 1{,}4482$$

EXEMPLO 4: Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano, $i = 4\%$ ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^1:\overline{5}|} \approx 0{,}003788.$$

Solução:

$$(IA)_{25^1:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} {}_{t|}A_{x^1:\overline{5-t}|} = A_{25^1:\overline{5}|} + {}_{1|}A_{25^1:\overline{4}|} + {}_{2|}A_{25^1:\overline{3}|} + {}_{3|}A_{25^1:\overline{2}|} + {}_{4|}A_{25:\overline{1}|}$$

$$(IA)_{25^1:\overline{5}|} \approx 0{,}01178.$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$E(Z_T) = \sum_t v^{t+1} \, P(T_x = t)$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

$$E(Z_T) = \int e^{\delta t} f_{T_x}(t) \, dt$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x + t)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,\dots,n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \; T = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n \quad, T = n, \; n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = A_{x^1:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}^1}$$

$$Z_T = v^{T+1} \quad, T \geq m$$

$$_{m|}A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$_{m|}A_x = v^m \; {}_m p_x A_{x+m}$$

$$_{m|}A_x = A_x - A_{x^1:\overline{m|}}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1} \;, \quad m \leq T < (m+n) \\ 0, \quad c.c. \end{cases}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n|}} = v^m \; {}_m p_x A_{x^1+m:\overline{n|}}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n|}} = A_{x^1:\overline{m+n|}} - A_{x^1:\overline{m|}}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1 \dots. \\ 0, T = 0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = Z_T \; {}_n p_x$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,\dots,n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \; T = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n \;, T = n, \; n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^1}$$

$$Z_T = v^{T+1} \;, T \geq m$$

$$ {}_{m|}A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$ {}_{m|}A_x = v^m \; {}_m p_x A_{x+m}$$

$$ {}_{m|}A_x = A_x - A_{x^1:\overline{m}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1} \;, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$ {}_{m|}A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T \; {}_t p_x q_{x+t}$$

$$ {}_{m|}A_{x^1:\overline{n}|} = v^m \; {}_m p_x A_{x^1+m:\overline{n}|}$$

$$ {}_{m|}A_{x^1:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{m+n}|} - A_{x^1:\overline{m}|}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1 \dots. \\ 0 \;, T = 0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|^1} = Z_T \; {}_n p_x$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0 \;, T < n \end{cases} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n}|^1} = Z_T \; {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T \; {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = \int_0^n Z_T \; {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$z_T = \begin{cases} e^{-\delta T} \;, \; T \leq n \\ e^{-\delta n} \;, T > n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x^1:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|^1}$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, \; T \geq m$$

$$ {}_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\infty} Z_T \; {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T} \;, m \leq T \leq m+n$$

$$ {}_{m|}\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta T} \; {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,\dots,n-1 \\ 0, T = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \; T = 0,1,\dots,n-1 \\ v^n \;, T = n, \; n+1, \dots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^1}$$

$$Z_T = v^{T+1} \;, T \geq m$$

$$_{m|}A_x = \sum_{t=m}^{\infty} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$_{m|}A_x = v^m \, {}_m p_x A_{x+m}$$

$$_{m|}A_x = A_x - A_{x^1:\overline{m}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & m \leq T < (m+n) \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} Z_T \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n}|} = v^m \, {}_m p_x A_{x^1+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n}|} = A_{x^1:\overline{m+n}|} - A_{x^1:\overline{m}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^n, T = n, n+1 \dots. \\ 0 \,, T = 0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|^1} = Z_T \, {}_n p_x$$

$$E(Z_T)$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x^1:\bar{n}|} = A_{x^1:\bar{n}|} \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x:\bar{n}|} = A_{x^1:\bar{n}|} \frac{i}{\delta} + A_{x:\bar{n}|^1}$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x$$

$$(I\bar{A})_{x^1:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} (IA)_{x^1:\overline{n}|}$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta n}, T \geq n \\ 0 \,, T < n \end{cases} \qquad \bar{A}_{x:\overline{n}|^1} = Z_T \, {}_n p_x$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} = \int_0^n Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$z_T = \begin{cases} e^{-\delta T} \;, \; T \leq n \\ e^{-\delta n} \;, T > n \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x^1:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|^1}$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, \; T \geq m$$

$$_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\infty} Z_T \, {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = e^{-\delta T} \;, m \leq T \leq m+n$$

$$_{m|}\bar{A}_{x^1:\bar{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta T} \, {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

Comutação- Seguro de vida

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}^1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$$_{m|}A_{x^1:\overline{n|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

$$(IA)_{x^1:\overline{n|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \times M_{x+n}}{D_x}$$

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} - \frac{1}{2}$$

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

- **Portal Halley : https://atuaria.github.io/portalhalley/**

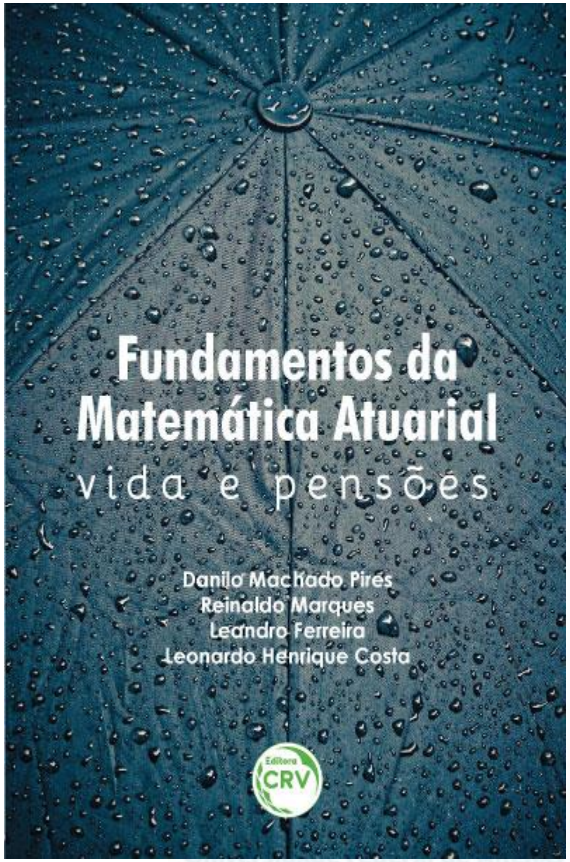
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Matemática Atuarial II

AULA-2

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Anuidades (Rendas)

- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras (previdência privada-complementar).

- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte.
  - Cobertura: por período determinado.

- São interrompidos em caso de morte...

Anuidades (Rendas)

Anuidade **vitalícia** antecipada

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ P(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

Anuidade **vitalícia** postecipada

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\, P(T_x = t)$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

Anuidade **temporária** antecipada

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_tp_x$$

Anuidade **temporária** postecipada

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_x$$

EXEMPLO 1: Considere uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 $u.m.$ em fluxo de caixa **antecipado/postecipado.** Considerando a tábua AT-2000 masculina e $i = 5\%$ ao ano, calcule o valor do prêmio puro único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E\left(\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_{t}p_{40}q_{40+t} = \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_{0}p_{40}q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2|}}\ p_{40}q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3|}}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1-v^1}{1-v}\ {}_{0}p_{40}q_{40} + \frac{1-v^2}{1-v} p_{40}q_{41} + \frac{1-v^3}{1-v}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \cdots \approx 17{,}67$$

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_{t}p_{40} = 1 + v\ p_{40} + v^2\ {}_{2}p_{40} + v^3\ {}_{3}p_{40} + \cdots \approx 17{,}67.$$

Postecipado,

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t|}}\ {}_{t}p_{40}q_{40+t} = a_{\overline{1|}}\ p_{40}q_{41} + a_{\overline{2|}}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + a_{\overline{3|}}\ {}_{3}p_{40}q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = \frac{v(1-v^1)}{1-v}\ p_{40}q_{41} + \frac{v(1-v^2)}{1-v}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \frac{v(1-v^3)}{1-v}\ {}_{3}p_{40}q_{43} + \cdots \approx 16{,}67$$

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_{t}p_{40} = v\ p_{40} + v^2\ {}_{2}p_{40} + v^3\ {}_{3}p_{40} + \cdots \approx 16{,}67.$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$_{m+1|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{m|}a_{x:\overline{n}|}$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_tp_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x$$

$$_{m|}a_x = {}_mE_x a_{x+m}$$

$$_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|}$$

EXEMPLO 2: Considere que uma pessoa de 40 anos tenha interesse no dotal misto, porém em caso de sobreviver a cobertura (25 anos) ele terá direito a **renda vitalícia** (anuidade postecipada) unitária. Considere a tábua de mortalidade AT-49 masculina e a taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 2: $x = 40 \;, n = 25$

$$z_{T_{40}} = \begin{cases} v^{T+1} & T = 0,1,2\ldots,24 \\ {}_{25|}a_{\overline{T_{40}-25|}} & T \geq 25 \end{cases}$$

$$\Pi = E\left(z_{T_{40}}\right) = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1}\ {}_{t}p_{40}q_{40+t} + \sum_{t=25+1}^{\omega-40-25} v^{t}\ {}_{t}p_{40}$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{24} v^{t+1}\ {}_{t}p_{40}q_{40+t} + v^{25}\ {}_{25}p_{40}\left(\sum_{t=1}^{\omega-65} v^{t}\ {}_{t}p_{65}\right)$$

$$\Pi = A_{40^{1}:\overline{25|}} + {}_{25|}a_{40}$$

Comutação-Anuidades

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \left(\frac{N_{x+m}}{D_x}\right)$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$_{m|}a_x = \left(\frac{N_{x+m+1}}{D_x}\right)$$

$$_{m|}a_{x:\bar{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\bar{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \times N_{x+n}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \times N_{x+n+1}}{D_x}$$

Relações entre Seguros e Anuidades

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|^1} + iA_{x^1:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|}\, i = 1$$

$$A_{x:\overline{n}|} + iA_{x^1:\overline{n}|} + ia_{x:\overline{n}|} = 1$$

Anuidades temporárias fracionadas	Anuidades vitalícias fracionadas

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx a_{x:\bar{n}|} + (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq a_x^{(m)} \geq a_x}$$

Anuidade Contínua

- O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Diferida

$${}_{m|}\bar{a}_x = \int_m^\infty v^m \bar{a}_{\overline{t-m}|} \, {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_m^\infty e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

$${}_{m|}\bar{a}_x = {}_m E_x \, \bar{a}_{x+m} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \, {}_t p_x \mu(x+t) dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \, {}_n p_x = \int_0^n e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Diferida

$${}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

$${}_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = {}_m E_x \, \bar{a}_{x+m:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\overline{m}|}$$

				Fracionadas	Contínuas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$\bar{a}_x$
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n}\vert}$	$a_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_x$	${}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}$	${}_{m\vert}\bar{a}_x$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_x$	${}_{k\vert}a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	${}_{m\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	${}_{m\vert}\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}$
		Postecipada	${}_{m\vert}a_{x:\overline{n}\vert}$	${}_{k\vert}a_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}$	

Planos	Prêmio Puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.	$P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_kP_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$P_{x^1:\overline{n}\|} = \dfrac{A_{x^1:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = \dfrac{A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$
...	

EXEMPLO 3: Um segurado adquire um seguro dotal misto que funciona da seguinte forma:

- Caso o segurado sobreviva ao período de n anos, então a seguradora irá pagar 1 u.m.

- Caso o segurado faleça neste período, a seguradora irá pagar **85%** da quantidade de prêmios pagos pelo segurado (considerando P por cada prêmio pago, sem capitalização) ao final do ano de morte.

Os prêmios serão pagos antecipadamente durante os n anos de vigência do seguro.

Qual deverá ser o prêmio pago pelo segurado considerando que ele tem hoje 50 anos e deseja um seguro de 15 anos de vigência, podemos modelar seu tempo de vida adicional por uma AT-49 e a seguradora se compromete a pagar uma taxa de juros anual de 5%?

Compromisso do Segurado (Y)

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T|}} \text{ , } 0 < T < n \\ P\ \ddot{a}_{\overline{n|}} \quad \text{ , } se\ T \geq n \end{cases}$$

$$\mathrm{E(Y)} = P\ddot{a}_{50:\overline{n|}}$$

Compromisso do Segurador (Z)

Caso $t = 0$ então a seguradora deve ter hoje $0{,}85(P)v$
Caso $t = 1$ então a seguradora deve ter hoje $0{,}85(2P)v^2$
Caso $t = 2$ então a seguradora deve ter hoje $0{,}85(3P)v^3$

...

Caso $t = n$ então a seguradora deve ter hoje $0{,}85(n+1)Pv^{n+1}$

$$Z = \begin{cases} 0{,}85(t+1)Pv^{(t+1)} & se\ \ t = 0{,}1{,}2, \ldots, n-1 \\ v^n & se\ \ t \geq n \end{cases}$$

$$E(Z) = 0{,}85P \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)v^{t+1}\ {}_{t}p_{50}q_{50+t} + v^n\ {}_{n}p_{50}$$

É necessário achar um prêmio tal que $E(L) = 0$

$$E(Y) = E(Z)$$

$$P \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_{50} = 0{,}85P \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+1} \, {}_tp_{50} q_{50+t} + v^n \, {}_np_{50}$$

$$P = \frac{v^n \, {}_np_{50}}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_{50} - 0{,}85 \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+1} \, {}_tp_{50} q_{50+t}}$$

$$P = \frac{v^{15} \, {}_{15}p_{50}}{\sum_{t=0}^{14} v^t \, {}_tp_{50} - 0{,}85 \sum_{t=0}^{14} (t+1) v^{t+1} \, {}_tp_{50} q_{50+t}} \approx 0{,}041877$$

PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_k\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{k}\vert}}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^1:\overline{n}\vert} = \dfrac{\bar{A}_{x^1:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}\vert^1} = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert^1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}\vert} = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
...	

Prêmios -Anuidades

Planos	Prêmio puro
Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\|}\ddot{a}_x\right) = \dfrac{{}_{k\|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}}$
Anuidade antecipada vitalícia diferida por n anos, com prêmios limitados a k anos. $(k \leq n)$	$P\left({}_{n\|}\ddot{a}_x\right)_k = \dfrac{{}_{n\|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}}$
Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}\right) = \dfrac{{}_{k\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}}$
Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\|}\ddot{a}_x^{(m)}\right) = \dfrac{{}_{k\|}\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}^{(m)}}$
...	

EXEMPLO 4: Suponha que uma pessoa de 18 anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir mensalmente por um período de 33 anos para sua aposentadoria (que também será mensal e vitalícia). Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de $\$10000{,}00$ e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 3% ao ano?

(considere a Tábua AT-49)

SOLUÇÃO:

$$P\left({}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)}\right) = \frac{m \times {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)}}{m \times \ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}}$$

$$P\left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}\right) = \frac{{}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$${}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33}\left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{24}\right) \approx 6{,}01$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - (1 - {}_{33}p_{18}v^{33})\left(\frac{11}{24}\right) \approx 20{,}76$$

$$P\left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}\right) \approx \frac{6{,}01}{20{,}76} \approx 0{,}289$$

Logo o valor pago mensalmente será de **$2890**

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi_x + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$\Pi = \begin{cases} \text{Seguro temporário} \\ \text{Seguro inteiro} \\ \text{Seguro dotal misto} \\ \text{Seguro dotal puro} \\ \text{Anuidades*} \end{cases}$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi + V_{\alpha}$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

k **pagamentos**

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$\Pi^{c} = \Pi + V_{\gamma} + V_{\alpha}$$

$$P^{c} = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

EXEMPLO 5: Qual o valor do prêmio anual a ser cobrado de um segurado de 22 anos, que deseja adquirir um dotal misto com 10 anos de cobertura e benefício unitário? Utilize a tábua de vida AT-49 e considere que a seguradora trabalha com uma taxa de juros de 3% ao ano. Considere que esse produto requer um gastos anual de $0{,}005$ com despesas administrativas e um gasto com despesas médicas de $0{,}002$ que deve ser pago nos dois primeiros anos.

EXEMPLO 5

$$P^c = P_{x:\overline{n}|} + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}},$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}} \approx 0{,}09107441.$$

Reservas

- Uma reserva matemática é um fundo formado pelas seguradoras a partir de parte dos prêmios pagos, como garantia de suas operações.

- No ramo de seguros, geralmente os planos são com longos períodos de cobertura.

  - Por vezes o que se verifica é que no períodos iniciais ocorre um excedente de prêmios recebidos em relação a benefícios pagos.

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t} $$

$$ {}_tV_{x^1:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t^1:\overline{n-t}|} - P_{x^1:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 0, & t = n \end{cases} $$

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|^1} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|^1} - P_{x:\overline{n}|^1}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases} $$

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases} $$

$$ {}_t^kV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_kP_x\, \ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|}, & t < k \\ A_{x+t}, & t \geq k \end{cases} $$

Reservas de prêmios puros (método prospectivo)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$ {}_m\bar{V}_x = \bar{A}_{x+m} - \bar{P}_x \bar{a}_{x+m} $$

$$ {}_m\bar{V}_{x^1:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m^1:\overline{n-m}|} - \bar{P}_n \bar{a}_{x+m:\overline{n-m}|}, & m < n \\ 0, & m = n \end{cases} $$

$$ {}_m\bar{V}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|} - \bar{P}_{x:\overline{n}|} \bar{a}_{x+m:\overline{n-m}|}, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases} $$

EXEMPLO 6: Qual o valor das reservas formadas depois de 5, 10 e 15 anos, de um seguro de vida vitalício? Considere que $x = 40$, $i = 3\%$, $b = 1$, tábua AT-49 e que os prêmios sejam pagos em 11 parcelas iguais.

SOLUÇÃO

$$_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11|}}} \approx 0,03974$$

EXEMPLO 6: Qual o valor das reservas formadas depois de 5, 10 e 15 anos, de um seguro de vida vitalício? Considere que $x = 40$, $i = 3\%$, $b = 1$, tábua AT-49 e que os prêmios sejam pagos em 11 parcelas iguais.

SOLUÇÃO

$$_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0{,}03974$$

$$^{11}_{5}V_{40} = A_{45} - {}_{11}P_{40}\left(\ddot{a}_{45:\overline{6}|}\right) \approx 0{,}2056$$

$$^{11}_{10}V_{40} = A_{50} - {}_{11}P_{40}\left(\ddot{a}_{50:\overline{1}|}\right) \approx 0{,}4953$$

$$^{11}_{15}V_{40} = A_{55} \approx 0{,}5350$$

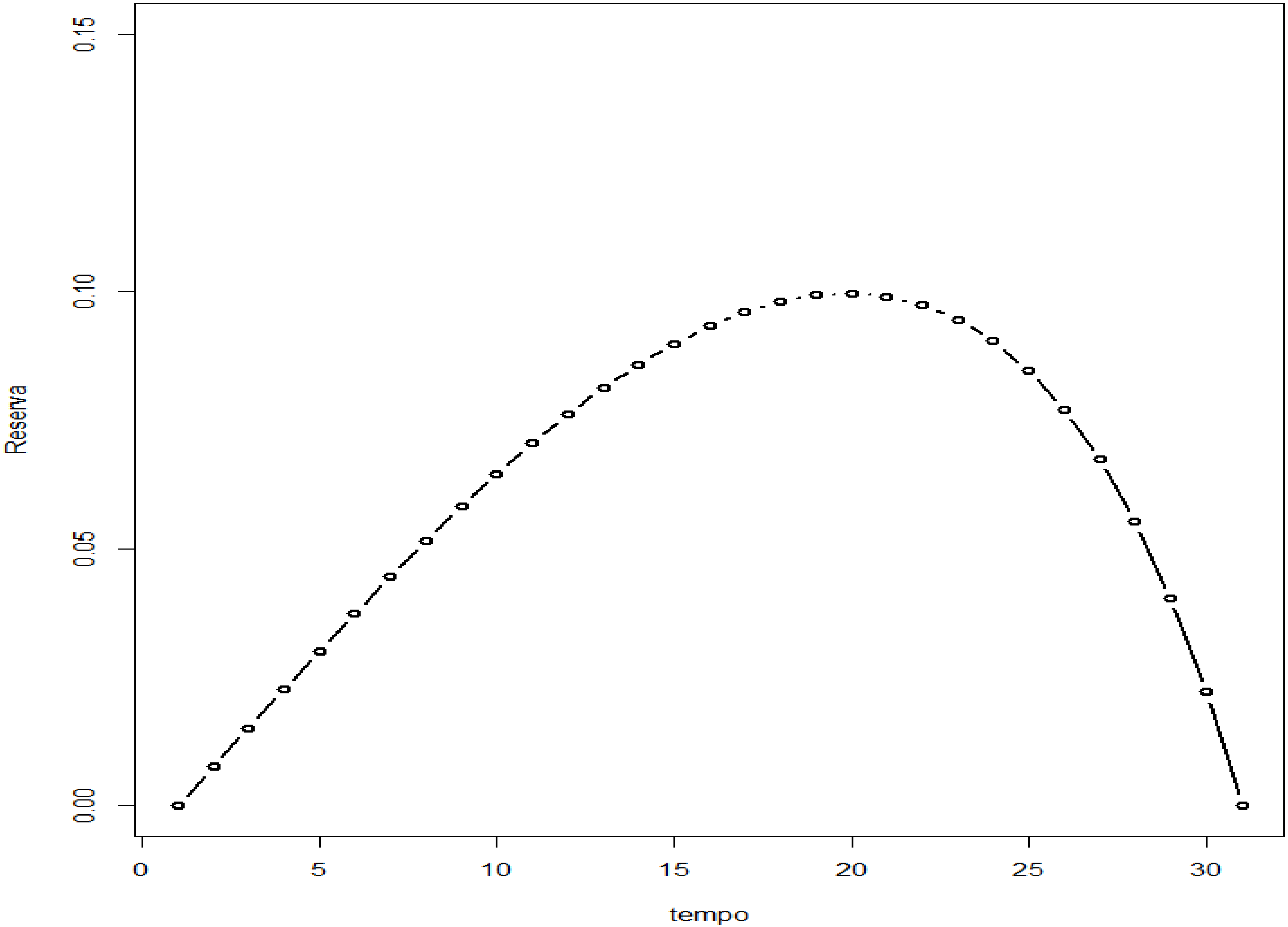
EXEMPLO 7: Considere um seguro temporário por 40 anos, para um segurado de 30 anos, qual seria a evolução da reserva com o tempo? Considere $i = 3\%$ e AT-49.

SOLUÇÃO

$$ {}_{t}V_{40^{1}:\overline{30|}} = A_{40+t^{1}:\overline{30-t|}} - P_{40^{1}:\overline{30|}}\, \ddot{a}_{40+t:\overline{30-t|}} $$

$$ {}_{t}V_{40^{1}:\overline{30|}} = \frac{(M_{40+t} - M_{70}) - P_{40^{1}:\overline{30|}}(N_{40+t} - N_{70})}{D_{40+t}} $$

EXEMPLO 7:

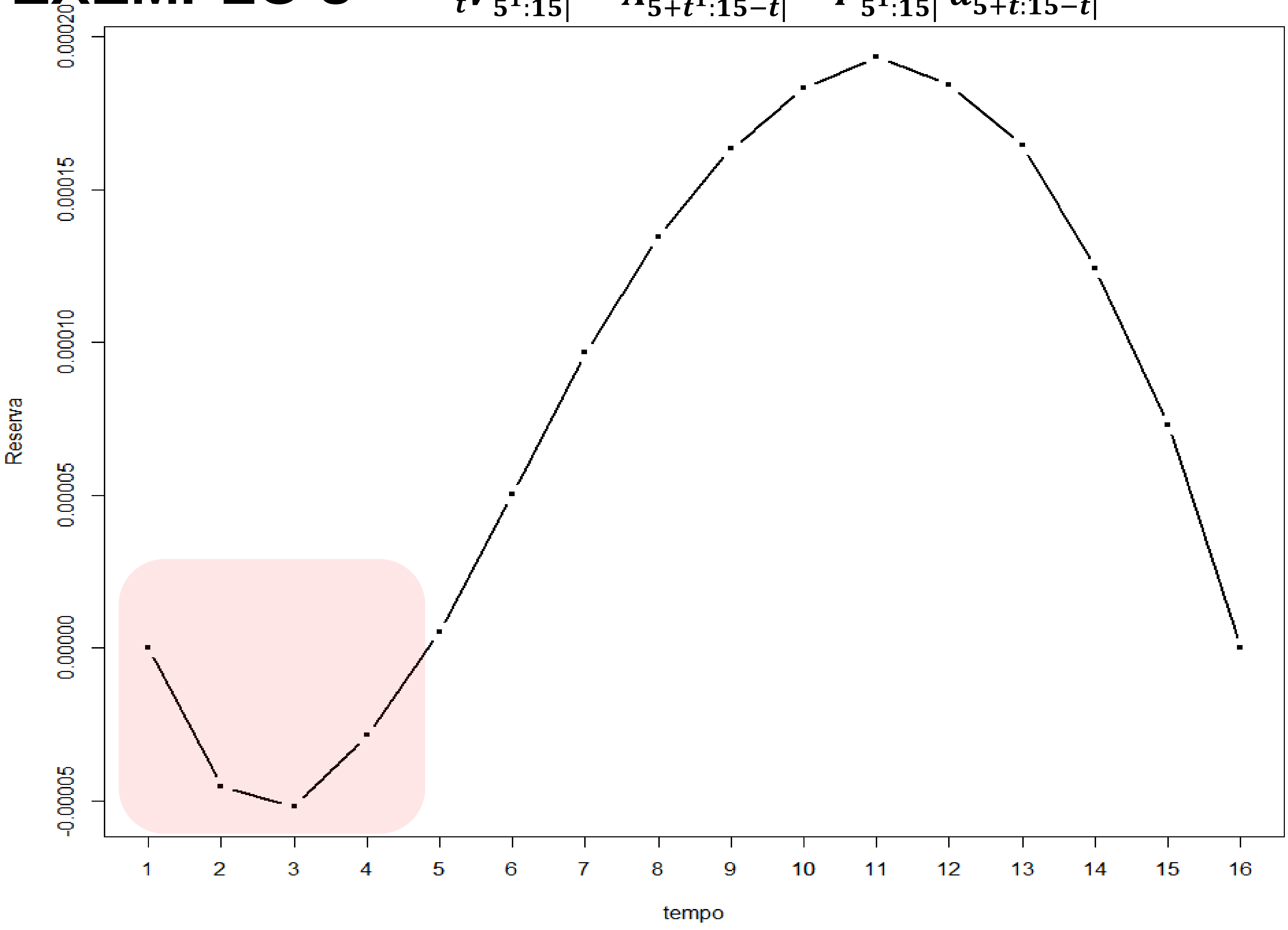


EXEMPLO 8: Considere um seguro temporário por 15 anos, para um segurado de 5 anos, qual seria a evolução da reserva com o tempo? Considere $i = 3\%$ e AT-49.

SOLUÇÃO

EXEMPLO 8

$$ {}_tV_{5^1:\overline{15}|} = A_{5+t^1:\overline{15-t}|} - P_{5^1:\overline{15}|}\, \ddot{a}_{5+t:\overline{15-t}|} $$



Reservas de prêmios puros (anuidades)

A Reserva pelo método prospectivo é calculada a partir de compromissos futuros da seguradora e do segurado.

$$ {}_tV\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right) = \begin{cases} {}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, & t < m \\ \ddot{a}_{x+t}, & t \geq m \end{cases} $$

$$ {}_tV\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right) = \begin{cases} {}_{m-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n}|} - P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, & t < m \\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n+m-t}|}, & m \leq t < m+n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} $$

EXEMPLO 9: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos e 21 anos?

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right) = {}_{10|}\,\ddot{a}_{30:\overline{30|}} - P\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right)\ddot{a}_{30:\overline{10|}} $$

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right) = \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{30}} - \left(\frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}}\right)\frac{N_{30} - N_{40}}{D_{30}} \approx \mathbf{7,884} $$

$$ {}_{21}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}}\right) = \ddot{a}_{41:\overline{29|}} = \frac{N_{41} - N_{70}}{D_{41}} \approx \mathbf{18,2263} $$

EXEMPLO 10: Qual reserva deve ser formada após 30 e 50 anos de uma anuidade vitalícia (antecipada) contratada por uma pessoa de 30 anos de idade que decida aposentar aos 70 anos? Considere que $b = 1$, tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

SOLUÇÃO:

$$_{30}V\left(_{40|}\ddot{a}_{30}\right) = {}_{10|}\ddot{a}_{60} - P\left(_{40|}\ddot{a}_{30}\right)\ddot{a}_{60:\overline{10}|}$$

$$_{30}V\left(_{40|}\ddot{a}_{30}\right) = \frac{N_{70}}{D_{60}} - \left(\frac{N_{70}}{N_{30} - N_{70}}\right)\frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}}$$

$$_{50}V\left(_{40|}\ddot{a}_{30}\right) = \ddot{a}_{80} = \frac{N_{80}}{D_{80}}$$

EXEMPLO 11: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos e 21 anos?

EXEMPLO 11: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos e 21 anos?

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30}|} \right) = {}_{10|}\,\ddot{a}_{30:\overline{30}|} - P\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30}|} \right) \ddot{a}_{30:\overline{10}|} $$

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30}|} \right) = \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{30}} - \left(\frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}} \right) \frac{N_{30} - N_{40}}{D_{30}} \approx \mathbf{7,884} $$

$$ {}_{21}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30}|} \right) = \ddot{a}_{41:\overline{29}|} = \frac{N_{41} - N_{70}}{D_{41}} \approx \mathbf{18,2263} $$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$_tV_x = \frac{P_x \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}}$$

$$_tV_{x^1:\overline{n|}} = \frac{P_{x^1:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}}$$

$$_tV_{x:\overline{n|}} = \frac{P_{x:\overline{n|}} \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x^1:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}^1}}$$

Reservas de prêmios puros (método retrospectivo)

$$
{}_{t}V\left({}_{m|}\ddot{a}_{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x}\right)\ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}}^{1}}, & t<m\\[2ex]\dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x}\right)\ddot{a}_{x:\overline{m|}}-{}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{t-m|}}}{A_{x:\overline{t|}}^{1}}, & t\geq m\end{cases}
$$

$$
{}_{t}V\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\right)=\begin{cases}\dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\right)\ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{A_{x:\overline{t|}}^{1}}, & t<m\\[2ex]\dfrac{P\left({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\right)\ddot{a}_{x:\overline{m|}}-{}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{t-m|}}}{A_{x:\overline{t|}}^{1}}, & m\leq t<m+n\end{cases}
$$

EXEMPLO 12: Qual a reserva (pura) que deve ser formada depois de 2 anos de um seguro de vida vitalício comprado por um indivíduo com idade 40 de idade? Considere $b = 1$, $i = 5\%$ ao ano e a tábua de vida AT-2000 feminina.

$$ {}_2V_{40} = \frac{P_{40}\ddot{a}_{40:\overline{2|}} - A_{40^1:\overline{2|}}}{A_{40:\overline{2|}^1}}, $$

$$ {}_2V_{40} = \frac{0{,}007053\ (1{,}951736) - 0{,}001308}{0{,}905752} \approx 0{,}01375. $$

EXEMPLO 13: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos?

EXEMPLO 13: Suponha que uma pessoa de 20 anos deseje receber por 30 anos um benefício igual a 1 (anuidade antecipada), para isso ele irá pagar um prêmio periódico fixo por 20 anos. Considerando a taxa de juros de 3% ao ano, a tabua AT-49 qual deverá ser a reserva formada para esse produto após (a contar a partir do contrato) 10 anos?

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}} \right) = \frac{P\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}} \right) \ddot{a}_{20:\overline{10|}}}{A_{20:\overline{10|}^{1}}} $$

$$ {}_{10}V\left({}_{20|}\ddot{a}_{20:\overline{30|}} \right) = \frac{\left(\frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}} \right) \left(\frac{N_{20} - N_{30}}{D_{20}} \right)}{\left(\frac{D_{30}}{D_{20}} \right)} \approx \left(\frac{N_{40} - N_{70}}{N_{20} - N_{40}} \right) \left(\frac{N_{20} - N_{30}}{D_{30}} \right) \approx \mathbf{7,884} $$

Estrutura da seguridade social e da previdência no Brasil

SILVA, L. G. C. E. Estudo da mortalidade dos servidores públicos civis do estado de São Paulo: tábua de mortalidade destinada aos regimes próprios de previdência social. **Anais do XX Encontro Nacional de Estudos Populacionais**, 2011.

Estrutura da seguridade social e da previdência no Brasil

Lei n° 9.717, (Lei dos RPPS's) *estabelece que todas as Unidades Federativas que possuam Regime Próprio de Previdência Social, têm por obrigação proceder a avaliações atuariais com periodicidade anual conforme as normas legais.*

Equilíbrio Financeiro Atuarial "EFA": *Reserva Matemática (RMBC+RMBAC) é equivalente ao atual patrimônio constituído pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS).*

- **Portal Halley : https://atuaria.github.io/portalhalley/**

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.