Teoria do Risco Aula 4

Danilo Machado Pires danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html



Momentos

$$\mu_X = E(X) \implies \text{Valor esperado de X}$$

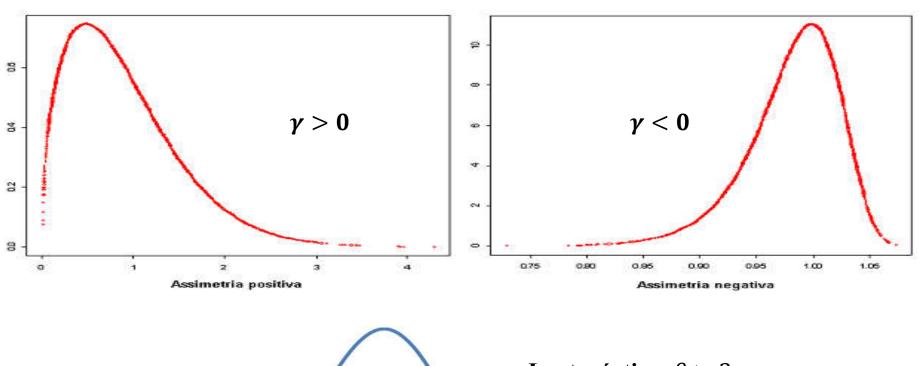
$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow \text{Variância probabilística de } X$$

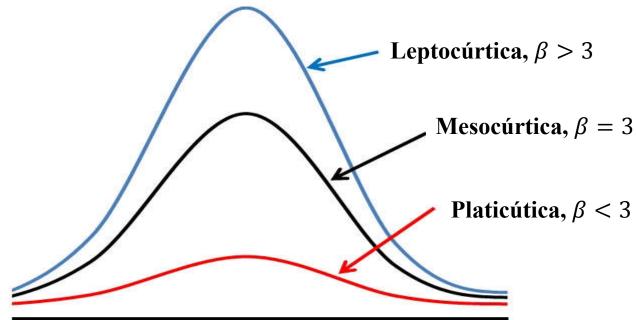
Curtose de X

$$\beta = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^4\right] = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4}{[E(X^2) - E(X)^2]^2}$$

Assimetria de X

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)^3\right] = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{[E(X^2) - E(X)^2]^3}$$





Momentos

 \succ Momento de ordem k ou momentos ordinários de ordem k de uma variável Y (sendo k um inteiro positivo) como:

$$m_k = E(Y^k)$$

$$m_k = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k P(Y = y_i)$$

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y) dy$$



Momentos

$$m_1 = E(Y)$$
 , $m_2 = E(Y^2)$, $m_3 = E(Y^3)$...

$$\beta = \frac{m_4 - 4m_1m_3 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4}{\left[m_2 - m_1^2\right]^2} \implies \text{Curtose de } X$$

$$\gamma_1 = \frac{m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3}{\left[m_2 - m_1^2\right]^3} \Rightarrow \text{Assimetria de } X$$



$$> M_Y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ty_i} P(Y = y_i)$$

$$>M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY})$$



- A geradora de momentos determina completamente a distribuição de probabilidades.
- 2) <u>A função geradora de uma soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções geradoras de cada componente da soma.</u>
- 3) <u>Os momentos de uma variável aleatória podem ser obtidos pela derivação da função geradora.</u>
- 4) A convergência ordinária de uma sequência de funções geradoras corresponde à convergência das correspondentes distribuições.

Exemplo

Seja $Y \sim B(n,q)$ e $X \sim Exp(\lambda)$ vamos obter as respectivas funções geradoras de momentos e o seu primeiro momento.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^{y} (1 - q)^{n - y}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$0 \le Y \le n \in 0 \le x \le \infty$$
.



Seja Y \sim B(n,q) , $0 \le Y \le n$

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^{y} (1 - q)^{n - y}$$

Lembrando que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ e $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{i=1}^n e^{ti} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (e^t q)^i (1-q)^{n-i}$$

$$M_Y(t) = [e^t q + (1-q)]^n$$

$$E(Y) = nq$$



Seja X \sim Exp(λ)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
, $0 \le x \le \infty$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda - t)} dx$$

$$M_X(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda - t)e^{x(\lambda - t)}}\Big|_{x=0}^{x \to \infty} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



Considere X_1,\ldots,X_n v.as definidas num mesmo espaço de probabilidade, com $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ e $Y_i=g_i(X_1,\ldots,X_n)$, $i=1,\ldots,k$.

A função geradora de momentos multidimensional é definida por:

$$M_{Y_1,...,Y_k}(t_1,...,t_k) = E(e^{t_1Y_1+\cdots+t_kY_k})$$

OU

$$M_{Y_1,\dots,Y_k}(t_1,\dots,t_k) = \int \dots \int e^{t_1g_1(X_1,\dots,X_n)+\dots+t_kg_k(X_1,\dots,X_n)} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \prod_{j=1}^n dx_j$$

Obs.:

$$M_{Y_1}(t_1) = M_{Y_1, \dots, Y_k}(t_1, 0, 0, 0, \dots, 0) = \lim_{\substack{t_s' \neq t_1 \to 0}} M_{Y_1, \dots, Y_k}(t_1, \dots, t_k)$$

Exemplo:

Seja uma dada variável aleatória $X \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $Y=g(X)=X^2$, pela técnica da função geradora de momentos.



$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$M_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$M_Y(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{(1 - 2t)^{-1}}}}{(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{(1-2t)^{-1}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx \to X \sim N(0, (1-2t)^{-1})$$

Logo

$$M_Y(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2 \frac{1}{(1 - 2t)^{-1}}}}{(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} dx = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)^{\frac{1}{2}}$$
 para $t < \frac{1}{2}$

$$Y \sim Gama\left(\lambda = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}\right)$$

Universidade Federal de Alfenas

Exemplo:

Seja $X_j \sim N(0,1)$, $j=1,2,\ldots,n$ sendo X_j independentes, então a distribuição de $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ é?



Seja $X_j \sim Bernoulli(q)$, $j=1,2,\ldots,n$ sendo X_j independentes. Então a distribuição de $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ é?

$$M_{X_j}(t) = qe^t + 1 - q$$



Se $a \in b$ constantes, tal que Y = aX + b, então:

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$



Se
$$X \sim Bernoulli(q) \rightarrow M_X(t) = qe^t + 1 - q; \quad 0 \le p \le 1$$

Se
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
 $\rightarrow M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}; \quad -\infty \le \mu \le \infty, \quad \sigma^2 > 0$

Se
$$X \sim Po(\lambda)$$
 $\rightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}; \quad \lambda > 0$

Se
$$X \sim Exp(\lambda)$$
 $\rightarrow M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad \lambda > 0$

Se
$$X \sim Geo(p)$$
 $\rightarrow M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}; \quad 0 \le p \le 1$

Se
$$X \sim Uni_C(a,b)$$
 $\rightarrow M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)t};$ $a < b$

Se
$$X \sim Gama(\lambda, r)$$
 $\rightarrow M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$; $\lambda > 0$, $r > 0$, $t < \lambda$

Universidade Federal de Alfenas

Função Característica

$$\psi_{Y}(t) = E(e^{itY})$$

$$\frac{d^{n}\psi_{Y}(t)}{dt^{n}} \bigg|_{t=0} = i^{n}E(Y^{n})$$

Exemplo:

Seja X \sim N(μ_1 , σ_1^2) e Y \sim N(μ_2 , σ_2^2). Sendo X e Y independentes. Seja $Y_1=X+Y$ e $Y_2=X-Y$. Encontre as distribuições de Y_1 e Y_2 .

Sendo que a função geradora de momentos de uma distribuição normal é $U\sim N(\mu,\sigma^2)$ é dada por: $M_U(t)=\mathrm{e}^{\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)}$

