Matemática Atuarial II

AULA-3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L.H. Múltiplas vidas. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_MatAtuarial2.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Introdução

- Ao longo do curso de Matemática Atuarial I a teoria desenvolvida foi pensada somente na vida de uma única pessoa.
  - No entanto, a maioria dos produtos atuariais do ramo vida (podem envolver) envolvem mais de uma vida.

  - Planos de previdência que são revertidos em pensão

  - Seguros (considerando a vida do beneficiário)

- ...

Vetor aleatório

Diferentes fatores observados na mesma unidade amostral ou então o mesmo fator em unidades amostrais diferentes

Definição: Vetor aleatório (variável aleatória multidimensional ou variável aleatória multivariada) *Sejam* $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ *variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade, então* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ *corresponde a um vetor aleatório.*

.

Vetor aleatório

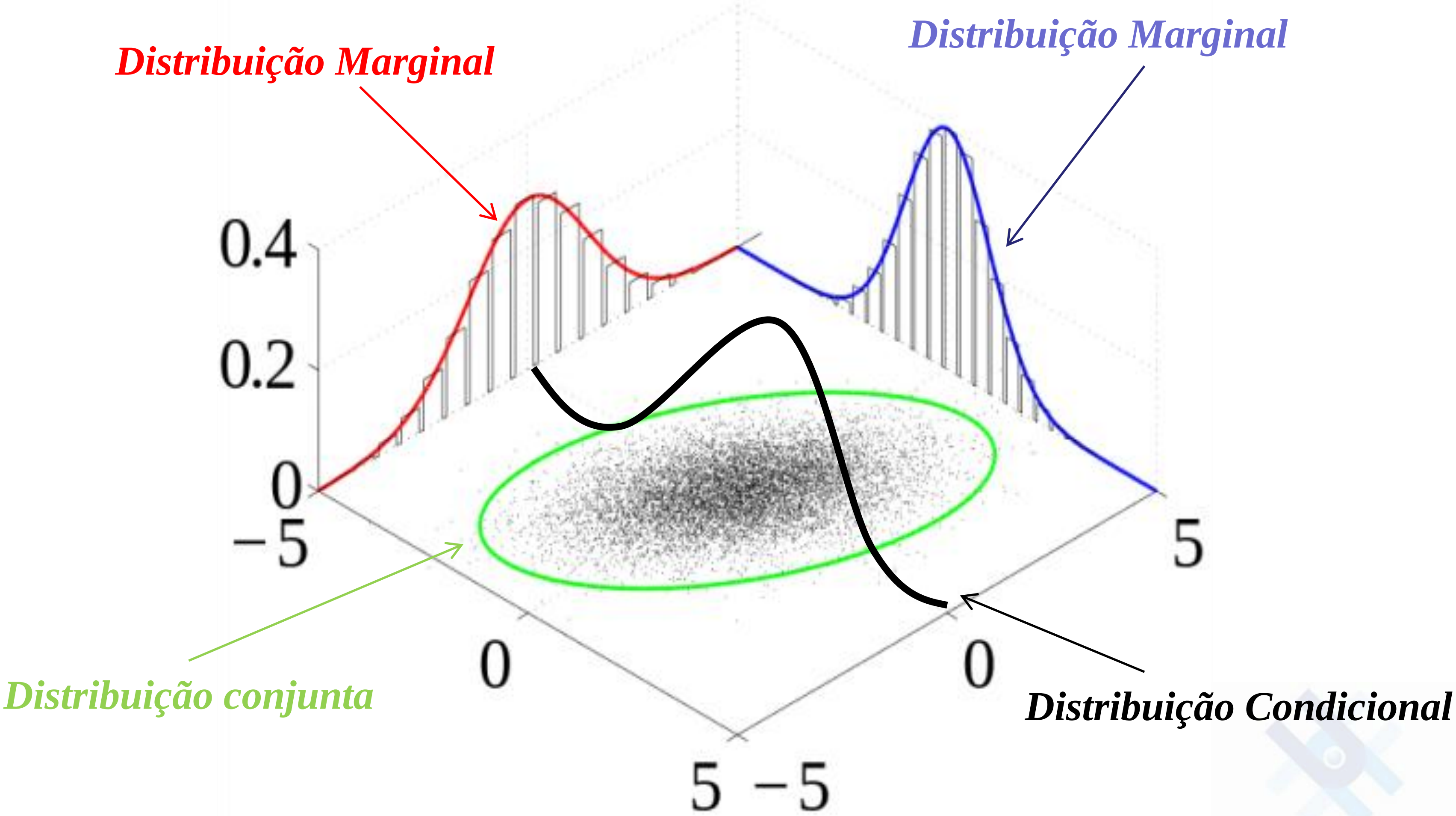
Ao se trabalhar com vetores aleatórios, surge a noção de três tipos de modelos probabilísticos.

- A distribuição conjunta: Descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

- A distribuição marginal: Descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

- A distribuição condicional: Descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.

Vetor aleatório



Variável aleatória discreta bidimensional

Definição: (Variável aleatória discreta bidimensional) *Seja a variável aleatória* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$, *onde* X_1 *e* X_2 *são duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Então* $\boldsymbol{X}$ *é uma variável aleatória bidimensional e a função de probabilidade conjunta* $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ *definida para cada par* (x_1, x_2) *é dada por:*

$$P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, \mathrm{X}_2 = x_2)$$

em que $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ para todo (x, y) e $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(x_{1i}, x_{2j}\right) = 1$

.

Variável aleatória contínua bidimensional

Definição: (Variável aleatória contínua bidimensional) Seja a variável aleatória $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$,onde X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Então $\boldsymbol{X}$ é uma variável aleatória bidimensional. A função de densidade conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ definida para cada par (x_1, x_2) é dada por:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) > 0 \text{ para todo } (x_1, \mathrm{x}_2) \in \mathbb{R}.$$

em que $\int\int f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1 d\mathrm{x}_2 = 1.$

EXEMPLO 1: Considere duas pessoas cujo tempo de vida adicional pode ser modelado pela distribuição de probabilidade expressa na tabela abaixo:

$X \rightarrow$ Tempo de vida adicional da pessoa 1.

$Y \rightarrow$ Tempo de vida adicional da pessoa 2.

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Observe que $\sum\sum P(x,y) = \sum P(x) = \sum P(y) = 1$

Função de distribuição Conjunta

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2, \dots, Y_n \le y_n)$$

- $F(-\infty, y_2, \dots, y_n) = F(y_1, -\infty, \dots, y_n) = F(y_1, y_2, \dots, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$
- F é não-decrescente e contínua à direita, com respeito a cada um dos eixos associados a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$
- F é tal que, para $\forall\, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sendo $a_i < b_i$ e $1 \le i \le n$ então:

$$P(a_1 < Y_1 \le b_1, a_2 < Y_2 \le b_2, \dots, a_n < Y_n \le b_n) \ge 0$$

EXEMPLO 2: Sejam dois indivíduos, cujo tempo de vida adicional para cada um possa ser representado pelas variáveis aleatórias T_x e T_y, respectivamente. Considere ainda que T_x e T_y possam ser modelados pela seguinte função distribuição de densidade conjunta:

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $F_{T_x}(t)$ e $F_{T_x,T_y}(t,s)$.

EXEMPLO 2: Calcule $F_{T_x}(t)$

$$f_{T_x}(t) = \int_0^{10} f_{T_x,T_y}(t,s)ds = 0{,}0006\left(t^2 s - \frac{2ts^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_{s=0}^{s=10}$$

$$\boldsymbol{f_{T_x}(t) = 0{,}002\left(3t^2 - 30t + 100\right), \qquad 0 < t < 10}$$

$$F_{T_x}(t) = \int_0^{t} f_{T_x}(u)\,du = 0{,}002\,(u^3 - 15u^2 + 100u)\Big|_{u=0}^{u=t}$$

$$\boldsymbol{F_{T_x}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 0{,}002\left(t^3 - 15t^2 + 100t\right), & 0 < t \le 10 \\ 1, & t > 10 \end{cases}}$$

EXEMPLO 2: Calcule $F_{T_xT_y}(t,s)$

$$F_{T_x,T_y}(t,s)=\int_0^t\int_0^s f_{T_x,T_y}(u,v)\,dv\,du = \int_0^t 0{,}0006\left[u^2v-uv^2+\frac{v^3}{3}\right]_{v=0}^{v=s}du$$

$$F_{T_x,T_y}(t,s)=\int_0^t 0{,}0006\left(u^2s-us^2+\frac{s^3}{3}\right)du$$

$$F_{T_x,T_y}(t,s)=0{,}0006\left[\frac{u^3}{3}s-\frac{u^2}{2}s^2+\frac{s^3}{3}u\right]_{u=0}^{u=t}$$

$$F_{T_x,T_y}(t,s)=0{,}0006\left(\frac{t^3s}{3}-\frac{t^2s^2}{2}+\frac{s^3t}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{F_{T_x,T_y}(t,s)=\begin{cases}0{,}0001\left(2t^3s-3t^2s^2+2s^3t\right), & 0<s\le 10, 0<t\le 10\\ 0{,}001\left(200s-30s^2+2s^3\right), & 0<s\le 10, t>10,\\ 0{,}001\left(2t^3-30t^2+200t\right), & s>10, 0<t\le 10.\\ 1, & s>10, t>10.\end{cases}}$$

EXEMPLO 2: Lembrando que $F_{T_x,T_y}(t,10) = F_{T_x}(t)$, assim:

$$F_{T_x}(t) = 0{,}0001(2t^3 10 - 3t^2 100 + 2t1000)$$

$$F_{T_x}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 0{,}001(2t^3 - 30t^2 + 200t), & 0 < t \leq 10 \\ 1, & t > 10 \end{cases}$$

Variável aleatória bidimensional

Como no caso unidimensional, a função de sobrevivência também está presente para os modelos conjuntos. Assim dado o vetor aleatório (T_x, T_y), então:

$$S_{T_x,T_y}(t,s) = 1 - F_{T_x,T_y}(t,s) = P\left(T_x > t\,, T_y > s\right)$$

EXEMPLO 4: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y, tal que:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determina a função acumulada conjunta e a função de sobrevivência conjunta.

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_{T_xT_y}(t,s) = \int_0^t \int_0^s 0{,}0004(10-u)(10-v)\,dv\,du$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_{T_xT_y}(t,s) = \int_0^t \int_0^s 0{,}0004(10-u)(10-v)\,dv\,du$$

$$\boldsymbol{F_{T_xT_y}(t,s)} = \begin{cases} \mathbf{0{,}04}\left(\boldsymbol{s} - \mathbf{0{,}05}\boldsymbol{s^2}\right)\left(\boldsymbol{t} - \mathbf{0{,}05}\boldsymbol{t^2}\right), & \mathbf{0} < \boldsymbol{s} \leq \mathbf{10}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \mathbf{10}, \\ \mathbf{0{,}2}(\boldsymbol{s} - \mathbf{0{,}05}\boldsymbol{s^2}) & \mathbf{0} < \boldsymbol{s} \leq \mathbf{10}, \boldsymbol{t} > \mathbf{10} \\ \mathbf{0{,}2}\left(\boldsymbol{t} - \mathbf{0{,}05}\boldsymbol{t^2}\right), & \boldsymbol{s} > \mathbf{10}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \mathbf{10} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{s} \geq \mathbf{10}, \boldsymbol{t} \geq \mathbf{10} \end{cases}$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{T_xT_y}(t,s) = \int_t^{10}\int_s^{10} f_{T_x,T_y}(u,v)\,dv\,du$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_xT_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0004(10-t)(10-s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{T_xT_y}(t,s) = \int_t^{10}\int_s^{10} f_{T_x,T_y}(u,v)\,dv\,du$$

$$\boldsymbol{S_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0001(10-s)^2(10-t)^2, & 0 < s \leq 10, 0 < t \leq 10, \\ 0,01(10-s)^2 & 0 < s \leq 10, t < 0 \\ 0,01(10-t)^2 & s < 0, 0 < t \leq 10 \\ 0 & s \geq 10, t \geq 10 \end{cases}}$$

Valor esperado - Variável aleatória bidimensional

Seja (X_1, X_2) um vetor de bidimensional. A esperança ou valor esperado da função $g(x_1, x_2)$, denotada por $E[g(X_1, X_2)]$ é definida por:

$$E[g(X_1, X_2)] = \sum \sum g(x_1, x_2)\, P(x_1, x_2),$$

se as variáveis são discretas

$$E[g(X_1, X_2)] = \int \int g(x_1, x_2) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

se as variáveis são contínuas.

EXEMPLO 5: Calcule o valor esperado de $g(T_x, T_y) = T_x T_y$ tal que:

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Resp:

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10}\int_0^{10} st\, 0,0006(t-s)^2 ds\, dt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t0,0006 \int_0^{10} t^2 s - 2ts^2 + s^3\, dsdt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t0,0006 \left[\frac{t^2 s^2}{2} - \frac{2ts^3}{3} + \frac{s^4}{4}\right]_{s=0}^{s=10} dt$$

EXEMPLO 5:

$$E\left[g\left(T_x,T_y\right)\right]=\int_0^{10} t0,0006\left(t^2 50-\frac{2000t}{3}+2500\right)dt$$

$$E\left[g\left(T_x,T_y\right)\right]=\int_0^{10} t^3 0,03-t^2 0,4+t1,5\,dt$$

$$E\left[g\left(T_x,T_y\right)\right]=\left[\frac{t^4 0,03}{4}-\frac{t^3 0,4}{3}+\frac{t^2 1,5}{2}\right]_{t=0}^{t=10}=75-\frac{400}{3}+75$$

$$E\left[g\left(T_x,T_y\right)\right]=\frac{50}{3}$$

Distribuição condicional-Variável aleatória bidimensional

Função probabilidade de X_1 dado X_2, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias discretas

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}$$

Função densidade de X_1 dado X_2, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias contínuas

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Independência de variáveis aleatórias

A independência permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Independência entre variáveis aleatórias.

Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

- Para as variáveis aleatórias discretas,

$$P(X = x|Y = y) = P(X = x)$$

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$$

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \textbf{ independentes } \Leftrightarrow \boldsymbol{P_{X,Y}(x, y)} \equiv \boldsymbol{P_X(x)P_Y(y)}, \forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}.$$

- Para as variáveis aleatórias contínuas,

$$f_{X|Y}(X|Y) = f_X(x)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$$

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \textbf{ independentes } \Leftrightarrow \boldsymbol{f_{X,Y}(x, y)} \equiv \boldsymbol{f_X(x)f_Y(y)}, \forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2$$

Independência de variáveis aleatórias

- Para as variáveis aleatórias discretas,

X, Y independentes $\Leftrightarrow \boldsymbol{P_{X,Y}(x,y) \equiv P_X(x)P_Y(y)}, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2.$

- Para as variáveis aleatórias contínuas,

X, Y independentes $\Leftrightarrow \boldsymbol{f_{X,Y}(x,y) \equiv f_X(x)f_Y(y)}, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{F_{X,Y}(x,y) \equiv F_X(x)F_Y(y)}$$

$$\boldsymbol{S_{X,Y}(x,y) \equiv S_X(x)S_Y(y)}$$

EXEMPLO 6: Determine se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sendo que:

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

EXEMPLO 6: Determine se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sendo que:

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

EXEMPLO 7: Seja o tempo de vida futuro T_{45} e T_{50} independentes, obtenha as expressões pedidas:

a) A probabilidade de que ambos vivam pelo menos mais 10 anos.

b) A probabilidade de que ao menos um esteja morto ao fim de 30 anos.

c) A probabilidade de que ambos alcancem a idade de 60 anos.

d) A probabilidade de que um faleça antes de alcançar 65 anos e de que o outro faleça exatamente 40 anos após a data 0.

EXEMPLO 7:

a) A probabilidade de que ambos vivam pelo menos mais 10 anos.

$$S_{T_{45}T_{50}}(10,10) = S_{T_{45}}(10)S_{T_{50}}(10) = {}_{10}p_{45}\,{}_{10}p_{50}$$

b) A probabilidade de que ao menos um esteja morto ao fim de 30 anos.

$$P(T_{45} \leq 30 \text{ ou } T_{50} \leq 30) = P(T_{45} \leq 30) + P(T_{50} \leq 30) - P(T_{45} \leq 30 \text{ e } T_{45} \leq 30)$$

$$P(T_{45} \leq 30 \text{ ou } T_{50} \leq 30) = {}_{30}q_{45} + {}_{30}q_{50} - {}_{30}q_{45}\,{}_{30}q_{50}$$

EXEMPLO 7:

c) A probabilidade de que ambos alcancem a idade de 60 anos.

$$P(T_{45} > 15 \text{ e } T_{50} > 10) = S_{T_{45}}(15)S_{T_{50}}(10) = {}_{15}p_{45}\,{}_{10}p_{50}$$

d) A probabilidade de que um faleça antes de alcançar 65 anos e de que o outro faleça exatamente 40 anos após a data 0.

$$P[\,(T_{45} \leq 20 \text{ e } T_{50} = 40) \text{ ou } (T_{45} = 40 \text{ e } T_{50} \leq 15)\,]$$

$$= P[(T_{45} \leq 20 \text{ e } T_{50} = 40)] + P[(T_{45} = 40 \text{ e } T_{50} \leq 15)]$$

$$= P(T_{45} \leq 20\,)P(T_{50} = 40) + P(\,T_{50} \leq 15)P(T_{45} = 40\,)$$

$$= {}_{20}q_{45}[\,{}_{40}p_{50}q_{90}] + {}_{15}q_{50}[\,{}_{40}p_{45}q_{85}]$$

- **Portal Halley : https://atuaria.github.io/portalhalley/**

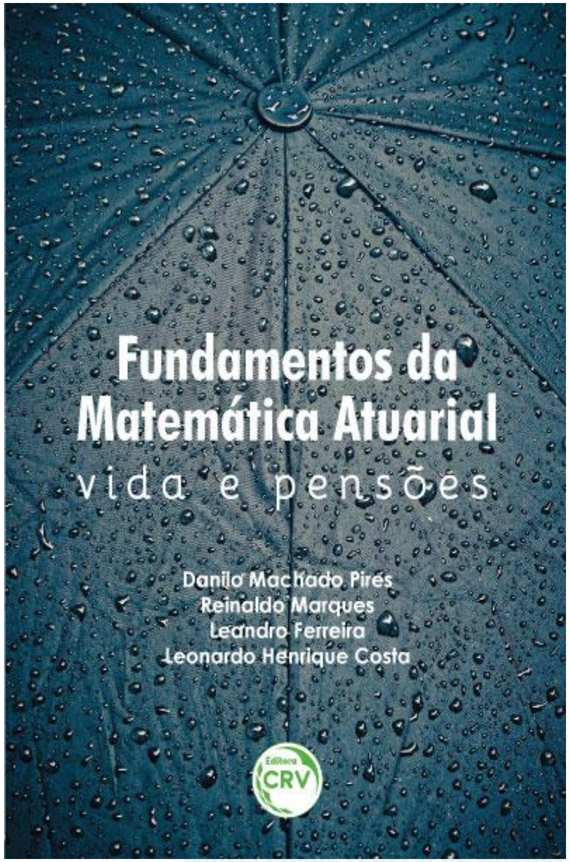
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Matemática Atuarial II

AULA-4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

São ferramentas importantes da inferência quando se tem interesse no estudo de valores extremos e quantis (ou funções destes).

Considere o vetor aleatório $n-$dimensional $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ é então possível definir:

$$X_{(1)} = min(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

e

$$X_{(n)} = max(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

Cujos valores assumidos são os valores extremos dentre as n variáveis.

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

Para o caso em que $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sejam independentes, então:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(x)]$$

e

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^{n} [F_{X_i}(x)]$$

Demonstração:

Se $P(X_{(1)} > x)$ então $P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x, \dots, X_n > n)$, assim:

$$P\left(X_{(1)} > x\right) = P(X_1 > x)P(X_2 > x)\dots P(X_n > x)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_{X_i}(x)\right]$$

Se $P(X_{(n)} \leq x)$ então $P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x, \dots, X_n \leq n)$, assim:

$$P\left(X_{(n)} \leq x\right) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)\dots P(X_n \leq x)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^{n}\left[F_{X_i}(x)\right]$$

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

Para o caso em que $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sejam independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^{\mathrm{n}}$$

e

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n$$

EXEMPLO 1: Considere um seguro de vida feito por um grupo de 4 pessoas de mesma idade e mesmo sexo, em que o benefício somente será pago caso todas as pessoas venham a falecer. Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada um dos membros desse grupo seja modelado pela variável aleatória $Y_i, i = 1,2,3,4$ e que sejam independentes e identicamente distribuídas, tal que $Y_i \sim Exp(0{,}02)$.

Solução

EXEMPLO 1: Considere um seguro de vida feito por um grupo de 4 pessoas de mesma idade e mesmo sexo, em que o benefício somente será pago caso todas as pessoas venham a falecer. Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada um dos membros desse grupo seja modelado pela variável aleatória $Y_i, i = 1,2,3,4$ e que sejam independentes e identicamente distribuídas, tal que $Y_i \sim Exp(0{,}02)$.

Solução

$$F_{Y_{(n)}}(10) = P\left(Y_{(n)} \leq 10\right) = \prod_{i=1}^{4}\left[F_{X_i}(10)\right]$$

$$F_{Y_{(n)}} = (1 - e^{-10\times 0{,}02})^4 \approx 0{,}107\%$$

EXEMPLO 2: Refaça o exemplo 1 porém considere que o seguro é pago assim que a primeira pessoa do grupo vir a óbito.

Solução

EXEMPLO 2: Refaça o exemplo 1 porém considere que o seguro é pago assim que a primeira pessoa do grupo vir a óbito.

Solução

$$F_{Y_{(1)}}(10) = P\left(Y_{(1)} \leq 10\right) = 1 - \prod_{i=1}^{4}\left[1 - F_{X_i}(10)\right]$$

$$F_{Y_{(1)}}(10) = 1 - (e^{-10\times 0,02})^4 \approx 55,06\%$$

COVARIÂNCIA

- A covariância é o valor esperado do produto dos desvios de cada variável em relação à suas médias.

- Medida de "intensidade" da dependência *linear* entre as variáveis e pode assumir valores de qualquer sinal.

  - Quando duas variáveis aleatórias X e Y são dependentes, geralmente é de interesse avaliar quão fortemente estão relacionadas uma com a outra.

COVARIÂNCIA

A covariância entre as variáveis aleatórias X e Y (num mesmo espaço de probabilidades) é dada por:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

ou

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação ($\rho_{X,Y}$ ou $\rho(X,Y)$) é uma medida que também descreve o relacionamento entre variáveis aleatórias, sendo que seu valor está entre -1 e 1. Assim:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \qquad -1 < \rho_{X,Y} < 1$$

Dado que σ_X e σ_Y existem, e $\sigma_Y > 0$ e $\sigma_X > 0$

Valores próximos de ± 1 indicam boa tendência de alinhamento.
$|\rho_{X,Y}| = 1$ se uma variável for função linear da outra.

EXEMPLO 3: Um agência de seguros presta serviços a diversos clientes que compraram uma apólice residencial e outra de automóvel da mesma seguradora. Para uma apólice de automóvel as opções de indenização são representadas pela variável aleatória X , enquanto, para uma apólice residencial, as opções são caracterizadas pela variável aleatória Y. Suponha que a função de probabilidade conjunta seja dada pela tabela abaixo.

Y/X	100	250
0	0,2	0,05
100	0,10	0,15
200	0,2	0,3

Calcule a covariância e a correlação entre as variáveis.

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$E(X) = 100(0{,}5) + 250(0{,}5) = \mathbf{175}$$

$$E(Y) = 0(0{,}25) + 100(0{,}25) + 200(0{,}5) = \mathbf{125}$$

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mathbf{175})(Y - \mathbf{125})]$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$Cov(X,Y) = \sum_x \sum_y (X-175)(Y-125)P(x,y)$$

$$\begin{aligned} &Cov(X,Y) \\ &= (100-175)(0-125)P(100{,}0) + (100-175)(100-125)P(100{,}100) \\ &+ (100-175)(200-125)P(100{,}200) + (250-175)(0-125)P(250{,}0) \\ &+ (250-175)(100-125)P(250{,}100) + (250-175)(200-125)P(250{,}200) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Cov(X,Y) = 1875}$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$E(X^2) = 100^2(0{,}5) + 250^2(0{,}5) = 36250$$

$$\boldsymbol{var(X) = 36250 - 175^2 = 5625}$$

$$E(Y^2) = 0^2(0{,}25) + 100^2(0{,}25) + 200^2(0{,}5) = 22500$$

$$\boldsymbol{var(Y) = 22500 - 125^2 = 6875}$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1875}{\sqrt{5625}\sqrt{6875}} = 0{,}3015$$

EXEMPLO 4: Sejam dois indivíduos, cujo tempo de vida adicional para cada um possa ser representado pelas variáveis aleatórias T_x e T_y, respectivamente. Considere ainda que T_x e T_y possam ser modelados pela seguinte função distribuição de densidade conjunta:

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a correlação entre T_x e T_y

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(T_x T_y) - E(T_x)E(T_y)}{\sqrt{[E(T_x^2) - E(T_x)^2]\left[E(T_y) - E(T_y)^2\right]}}$$

$$f_{T_x}(t) = 0{,}002(3t^2 - 30t + 100), \qquad 0 < t < 10$$

$$f_{T_y}(s) = 0{,}002(3s^2 - 30s + 100), \qquad 0 < s < 10$$

$$E(T_x) = \int_0^{10} t\, f_{T_x}(t)dt = E\left(T_y\right) = \int_0^{10} s\, f_{S_x}(s)ds = \mathbf{5}$$

$$E(T_x^2) = \int_0^{10} t^2\, f_{T_x}(t)dt = E\left(T_y^2\right) = \int_0^{10} s^2\, f_{S_x}(s)ds = \frac{\mathbf{110}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{var(T_x) = \frac{110}{3} - 5^2 = \frac{35}{3} var\left(T_y\right)}$$

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(T_xT_y) = \int_0^{10}\int_0^{10} ts f_{T_x,T_y}(t,s)\,dt\,ds = \frac{50}{3}$$

$$\boldsymbol{Cov(T_xT_y) = \frac{50}{3} - 25 = -\frac{25}{3}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{X,Y} = \frac{-\frac{25}{3}}{\frac{35}{3}} = -\frac{5}{7}}$$

EXEMPLO 5 : As variáveis aleatórias T_x e T_y são associadas ao tempo de vida de x e y, cuja modelo de probabilidade conjunto é dado por

$\mathbf{T_y}/T_x$	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	**0, 25**
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	**0, 26**
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	**0, 25**
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	**0, 24**
	0, 03	**0, 08**	**0, 16**	**0, 21**	**0, 24**	**0, 028**	

- Qual o valor atuarial de um seguro feito por y?
- Qual o valor atuarial para um seguro feito por y que pague a x caso ele esteja vivo ao final do ano de morte de y?

*Considere $i = 5\%$ ao ano e $b = 1$.

EXEMPLO 5: Qual o valor atuarial de um seguro feito por y que pague $b = 1$?

$$A_y = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1} P(T_y = t).$$

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	**0, 25**
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	**0, 26**
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	**0, 25**
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	**0, 24**
	0, 03	**0, 08**	**0, 16**	**0, 21**	**0, 24**	**0, 028**	

$$A_y = v^1 P(T_y = 0) + v^2 P(T_y = 1) + v^3 P(T_y = 2) + v^4 P(T_y = 3)$$

$$A_y = v^1(0{,}25) + v^2(0{,}26) + v^3(0{,}25) + v^4(0{,}24) \approx \mathbf{0{,}88733}$$

EXEMPLO 5: Qual o valor atuarial para um seguro feito por y que pague a x um benefício $b = 1$ caso ele esteja vivo ao final do ano de morte de y?

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	**0,25**
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	**0,26**
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	**0,25**
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	**0,24**
	0,03	**0,08**	**0,16**	**0,21**	**0,24**	**0,028**	

$$VPA = v^1 P(T_y = 0) P(T_x \geq 1) + v^2 P(T_y = 1) P(T_x \geq 2) + v^3 P(T_y = 2) P(T_x \geq 3) + v^4 P(T_y = 3) P(T_x \geq 4)$$

EXEMPLO 5:

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	$\mathbf{0,26}$
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	$\mathbf{0,25}$
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	$\mathbf{0,24}$
	$\mathbf{0,03}$	$\mathbf{0,08}$	$\mathbf{0,16}$	$\mathbf{0,21}$	$\mathbf{0,24}$	$\mathbf{0,28}$	

$$VPA = v^1 P(T_y = 0)P(T_x \geq 1) + v^2 P(T_y = 1)P(T_x \geq 2) + v^3 P(T_y = 2)P(T_x \geq 3) + v^4 P(T_y = 3)P(T_x \geq 4) + 0[P(T_y = 0)P(T_x < 1) + P(T_y = 1)P(T_x < 2) + P(T_y =$$

Força de mortalidade

- A força de mortalidade é a taxa na qual as pessoas em uma determinada população estão morrendo em um período de tempo específico.
  - Função risco $h(x)$
  - Taxa de falha
  - Valor pequeno para função implica em unidade exposta a menor quantidade de risco...

Força de mortalidade

- Para T_x e T_y serem independentes e esses resultados podem ser estendidos para n variáveis, o mesmo raciocínio vale para o cálculo da força de mortalidade conjunta, assim

$$\mu(x+t, y+s) = \frac{f_{T_x,T_y}(t,s)}{S_{T_x,T_y}} = \left[\frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)}\right]\left[\frac{f_{T_y}(s)}{S_{T_y}(s)}\right] = \mu(x+t)\mu(y+s)$$

EXEMPLO 6: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0{,}02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determina a força de mortalidade conjunta.

Como já visto anteriormente

$$S_{T_x,T_y}(t,s) = \begin{cases} 0{,}0001(10-s)^2(10-t)^2, & 0 < s \leq 10{,}0 < t \leq 10, \\ 0{,}01(10-s)^2 & 0 < s \leq 10, t < 0 \\ 0{,}01(10-t)^2 & s < 0, 0 < t \leq 10 \\ 0 & s \geq 10, t \geq 10 \end{cases}$$

Então

$$S_{T_x}(t) = 0{,}01(10-t)^2 \qquad \text{e} \qquad S_{T_y}(t) = 0{,}01(10-s)^2$$

Logo

...

Como já visto anteriormente

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{0{,}02(10-t)}{0{,}01(10-t\ )^2} = \frac{2}{10-t}, \qquad 0 < t < 10$$

$$\mu(y+s) = \frac{f_{T_y}(s)}{S_{T_y}(s)} = \frac{0{,}02(10-s)}{0{,}01(10-s\ )^2} = \frac{2}{10-s}, \qquad 0 < s < 10.$$

$$\mu(x+t, y+s) = \frac{4}{(10-t)(10-s)}, 0 < t < 10, 0 < s < 10.$$

- **Portal Halley : https://atuaria.github.io/portalhalley/**

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.