Aula 16-Anuidade Contínua

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{m}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{m}}{1-e^{\frac{1}{m}ln(v)}}\right]$$

Usando a regra de L' Hopital

$$f(m) = \frac{1}{m} \quad \longmapsto \quad f'(m) = -\frac{1}{m^2}$$

$$g(m) = 1 - e^{\frac{1}{m}ln(v)} \longmapsto \quad g'(m) = -e^{\frac{1}{m}ln(v)}\left[-\frac{\ln(v)}{m^2}\right] = \frac{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}{m^2},$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = (1-v^n)\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}ln(v)}\right] = \frac{(1-v^n)}{ln(v)}\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}\right)$$

Anuidade Contínua

Seja $\ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)}$ com $m \to \infty$, então:

...

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = \frac{(1 - v^n)}{ln(v)} \lim_{m\to\infty} \left(- \frac{1}{v^{\frac{1}{m}}} \right)$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\bar{n}|}^{(m)} = - \frac{(1 - v^n)}{ln(v)} = - \frac{(1 - v^n)}{ln(e^{-\delta})}$$

$$\bar{a}_{\bar{n}|} = \frac{(1 - v^n)}{\delta}$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Assim para um T_x aleatório:

$$\bar{a}_{\overline{T_x|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}$$

$$E\left(\bar{a}_{\overline{T_x|}}\right) = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{T_x|}} f_T(t) dt$$

- O valor presente atuarial de anuidade contínua vitalícia pode ser calculada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_t p_x dt$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Importante notar que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\lim_{m \to \infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{m} + a_x^{(m)} \right)$$

$$\bar{\ddot{a}}_x = \bar{a}_x$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- a variância do valor presente de um fluxo contínuo de pagamentos em $[0, t]$ à taxa de 1 real por ano, com juros δ .

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = var\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right)$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{var(1 - e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{var(e^{-\delta T})}{\delta^2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^n e^{-\delta 2t} f_{T_x}(t)dt$$

$$(\bar{A}_x)^2 = \left(\int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right)^2$$

$$var(\bar{a}_{\bar{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 16

Suponha que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

Usando a taxa de juros δ, calcule a esperança e variância de $\bar{a}_{\overline{T}|}$ considerando uma pessoa de idade x.

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T}|}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\int_0^\infty e^{-2\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt - \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt\right)^2}{\delta^2}$$

EXEMPLO 16

- (i)

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}$$

- (ii)

$$S_{T_0}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+t)}\right)}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} = \frac{e^{-\alpha(x+t)}}{e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}}$$

- (i)

$$\boxed{\bar{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{\left(1 - e^{-\delta T}\right)}{\delta}}$$

- (ii)

$$\boxed{P(T_0 > t + x | T_0 > x) = {}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}}$$

- (iii)

$$\mu(x+t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}}$$

$$\boxed{\mu(x+t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha}$$

EXEMPLO 16

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)e^{-\alpha t}\alpha}{\delta}dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\int_0^\infty e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta+\alpha)}\,dt$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} + \frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}}\right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{\delta}\left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)}+\frac{1}{\alpha}\right]}$$

$$\boxed{\bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha}}$$

EXEMPLO 16

$$var(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \frac{var(e^{-\delta t})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \; {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t\delta} e^{-\alpha t} \alpha \, dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[- \frac{1}{(\delta + \alpha) e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\delta + \alpha}}}$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} \; {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t2\delta} e^{-\alpha t} \alpha \, dt$$

$${}^2\bar{A}_x = \alpha \left[- \frac{1}{(2\delta + \alpha) e^{t(2\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty} = \boxed{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2\delta + \alpha}}}$$

$$\boxed{var(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\alpha}{2\delta + \alpha} - \left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha} \right)^2 \right]}$$

$$
{}_{t}p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}
$$

$$
\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_{t}p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, e^{-\alpha t} dt
$$

$$
\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\alpha)}\, dt
$$

$$
\bar{a}_x = \left[-\frac{1}{(\delta+\alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_{t=0}^{t\to\infty}
$$

$$
\bar{a}_x = \frac{1}{\delta+\alpha}
$$

Anuidade Contínua Vitalícia

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade exceda o valor presente esperado, para o caso $T_x \sim Exp(\alpha)$?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta} > \frac{1}{\delta+\alpha}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} > \frac{\delta}{\delta+\alpha} - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} < \frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(-\delta T < ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)$$

Anuidade Vitalícia Contínua

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = P\left(T > -\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta + \alpha}\right)\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} > \bar{a}_x\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\delta}}}$$

EXEMPLO 17

Considerando que o que tempo de vida adicional de uma pessoa de idade x seja modelado por uma função de densidade exponencial, $T_x \sim Exp(0{,}016)$, dado que $\delta = 0{,}10$, calcule $P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right)$.

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = e^{-\alpha\left(-\frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha}{\delta+\alpha}\right)\right)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}}$$

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = \left(\frac{0{,}016}{0{,}016+0{,}10}\right)^{\frac{0{,}016}{0{,}1}} = 0{,}7283$$

- Considerando $\delta = 0{,}01$ e $\alpha = 0{,}033$:

$$P\left(\bar{a}_{\bar{T}|} > \bar{a}_x\right) = \left(\frac{0{,}033}{0{,}033+0{,}10}\right)^{\frac{0{,}033}{0{,}1}} = 0{,}4174$$

Anuidade Vitalícia Contínua

- Qual a probabilidade de que o valor presente de uma anuidade seja menor que um dador valor Π_x?

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \leq \Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(1 - e^{-\delta T} \leq \delta\Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left(-e^{-\delta T} \leq \delta\Pi_x - 1\right) = P\left(e^{-\delta T} \geq 1 - \delta\Pi_x\right)$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P[-\delta T \geq \ln(1 - \delta\Pi_x)]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[-T \geq \frac{\ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right]$$

$$P\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \leq \Pi_x\right) = P\left[T_x \leq -\frac{ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right] = F_T\left(-\frac{ln(1 - \delta\Pi_x)}{\delta}\right)$$

Anuidades Temporária contínua

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x}|} & se\ 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}|} & se \quad T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E(Y) = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\bar{n}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

Anuidades Temporária contínua

- Prêmio puro único para anuidades contínuas em um período de cobertura n.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x|}} & se\ 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & se \quad T \geq n \end{cases}$$

$$var\left(\bar{a}_{\overline{T_x|}}\right) = \frac{{}^2\,\bar{A}_{x:n} - (\bar{A}_{x:n})^2}{\delta^2}$$

Anuidade vitalícia contínua, Diferida

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T-m}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$_{m|}\bar{a}_x = \int_m^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt = \int_m^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

$$_{m|}\bar{a}_x = v^m\ {}_m p_x \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_{x+m} \mu(x+m+t)dt$$

$$_{m|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\bar{m}|}$$

Anuidade vitalícia contínua, Diferida

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq T < m \\ v^m \bar{a}_{\overline{T_x - m|}}, & T \geq m \end{cases}$$

$$var(Y) = \frac{2}{\delta} v^{2m} \; {}_t p_x (\bar{a}_{x+m} - {}^2\bar{a}_{x+\mathrm{m}}) - \left({}_{m|}\bar{a}_x \right)^2$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

Dado que:

$$\bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T} = 1$$

- Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|} + e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = E\left(\delta \bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) + E\left(e^{-\delta T}\right)$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

Relação entre anuidade e seguro pago no momento da morte.

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|}$$

Anuidade com pagamentos certos

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente m parcelas para o segurado ou outrem e, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

  - Caso o segurado morra antes do tempo m a seguradora precisa ter o valor presente necessário a m pagamentos .

  - Caso o segurado morra após m anos, a seguradora devererá ter o necessário a pagar os m pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{m}|} + \left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}\right), & T \geq m \end{cases}$$

Ou

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|}, & T \geq m \end{cases}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta} \, {}_tp_x \mu(x+t)dt + \int_m^\infty \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} \, {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

- O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T_x}(t)dt$$

$$\int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt = \bar{a}_{\overline{m}|} \int_0^m f_{T_x}(t)dt = \bar{a}_{\overline{m}|}\ {}_m q_x$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \bar{a}_{\overline{m}|}\ {}_m q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta}\ {}_m q_x + {}_{m|}\bar{a}_x$$

EXEMPLO 19

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adiconal modelado por:

$f_{T_x}(t) = 0{,}016e^{-0{,}016t}$ para $t > 0$

E considere também $\delta = 0{,}10$ e o benefício unitário.

EXEMPLO 19

Lembrando que ${}_m q_x = F_{T_x}(m)$, temos que:

$$ {}_m q_x = 1 - e^{-0{,}016m} $$

Assim a partir de

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta m}\right)}{\delta} \, {}_m q_x + \int_m^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t) dt $$

Tem-se:

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1} \left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + \int_{30}^\infty \frac{\left(1 - e^{-0{,}1t}\right)}{0{,}1} 0{,}016 e^{-0{,}016t} dt $$

$$ \bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1} \left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + 0{,}16 \int_{30}^\infty e^{-0{,}016t} - e^{-0{,}116t} dt $$

EXEMPLO 19

...

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0,1(30)}\right)}{0,1}\left(1 - e^{-0,016(30)}\right) + 0,16\int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left[-\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}}\right]_{t=30}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left(\frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}}\right)$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} \approx 9,85$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$