Matemática atuarial

Anuidades Vitalícia (aula10)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Anuidades

- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras.

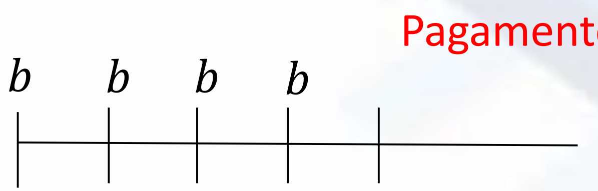
- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Sucessão de pagamentos equidistantes (1 ano), efetuados por uma dada entidade a outrem, no caso, **um segurado**.
    - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte
    - Cobertura: por período determinado.

  - A serie de Prêmios pagos pelo **segurado**, seja para financiar um seguro de vida, seja para financiar a aposentadoria, também podem ser reconhecidos como anuidades.

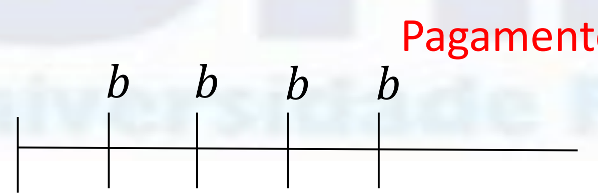
  - O valor pago em cada período é chamado de termo .

Anuidades

- Pagamentos Antecipados (4 pagamentos iguais (b)).
  - Os pagamentos começam no primeiro período



- Pagamentos Postecipados (4 pagamentos iguais (b)).
  - Os pagamentos começam no final de cada período



Anuidades

- Relembrando:
  - Soma finita de $n^* + 1$ elementos de uma progressão geométrica, onde $r \neq 1$:

$S_3 = a + ar + ar^2 + ar^3$
$S_n = \dfrac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$
Contagem começa em $n = 0$

- Assim dado a progressão geométrica $(1,3,9,27,81,243)$, temos:

$$S_5 = \overset{X_0}{1} + \overset{X_1}{3} + \overset{X_2}{9} + \overset{X_3}{27} + \overset{X_4}{81} + \overset{X_5}{243} = \frac{(1 - 3^{5+1})}{1 - 3} = 364$$

* Uma progressão onde n indica a posição do elemento.

Anuidades

- Anuidades vitalícia
  - Apenas termina com a morte da pessoa segurada.
- Anuidades Temporária
  - Termina no fim do prazo estipulado ou com a morte da pessoa segurada.

Anuidades imediatas

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período, elas não têm período de carência.

- É suposto que a reserva necessária ao primeiro pagamento não teve tempo para capitalizar.

- É como se o contrato de "aposentadoria " fosse feito no momento em que a aposentadoria fosse começar.
  - Não é uma prática usual, na prática o valor presente necessário ao primeiro pagamento é menor que o benefício.

- São interrompidos em caso de morte.

- Os pagamentos começam no primeiro período.

- Os pagamentos começam no final de cada período.

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período. Não têm período de carência.

Anuidades imediatas			
Pagamentos Antecipados		Pagamentos Postecipados	
Anuidades vitalícia	Anuidades Temporária	Anuidades vitalícia	Anuidades Temporária

- Apenas termina com a morte da pessoa segurada.

- Termina no fim do prazo estipulado ou com a morte da pessoa segurada.

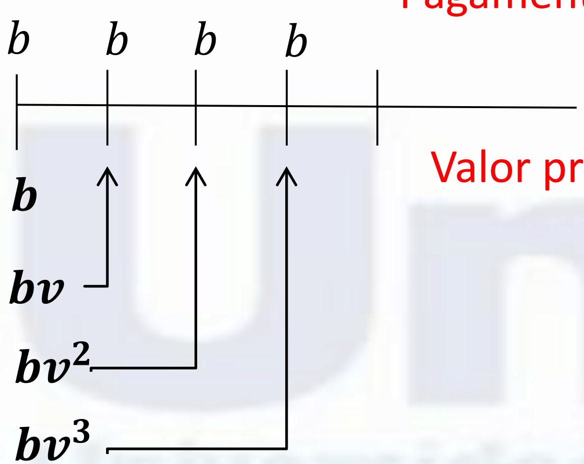
Anuidades imediatas

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período, elas não têm período de carência.

- Pagamentos **Antecipados** (4 pagamentos iguais a “b”)
- Os pagamentos começam no primeiro período.

Pagamentos.

$$F_0 = \boldsymbol{b}\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$



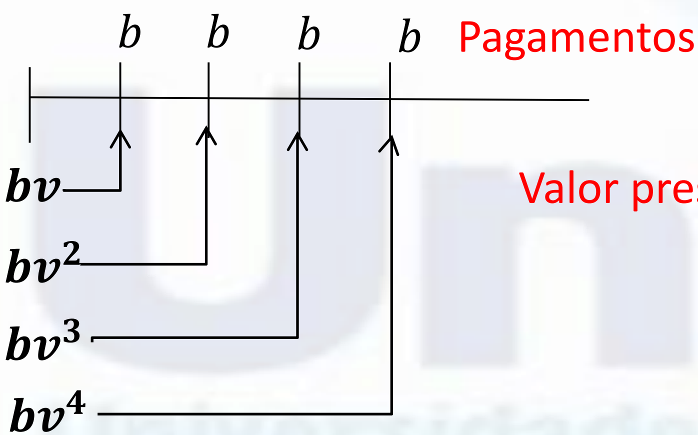
Valor presente necessário a cada pagamento.

- No momento do primeiro pagamento o valor presente necessário tem que ser igual ao próprio benefício.

Anuidades imediatas

- São aquelas anuidades onde os termos são exigíveis a partir do primeiro período, elas não têm período de carência.

- Pagamentos **Postecipados** (4 pagamentos iguais a "b")
  - Os pagamentos começam no final de cada período



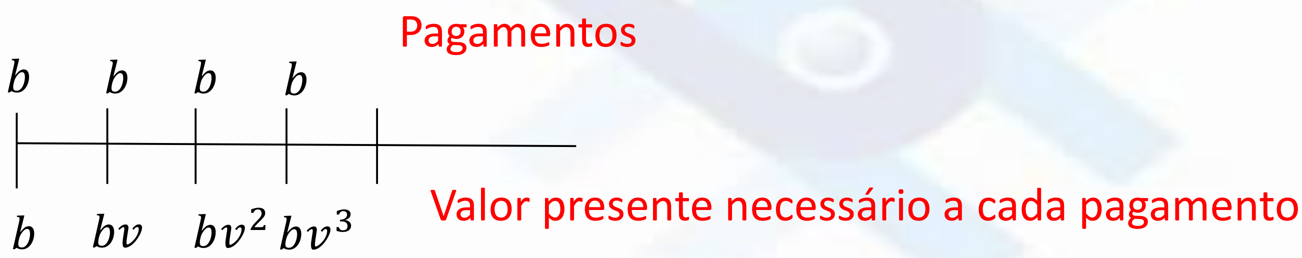
$$F_0 = b\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

Valor presente necessário a cada pagamento

- Diferente do antecipado a seguradora tem carência de um ano.
  - É considerado que o valor presente necessário ao primeiro pagamento teve 1 ano de atualização, assim ele começa em bv.

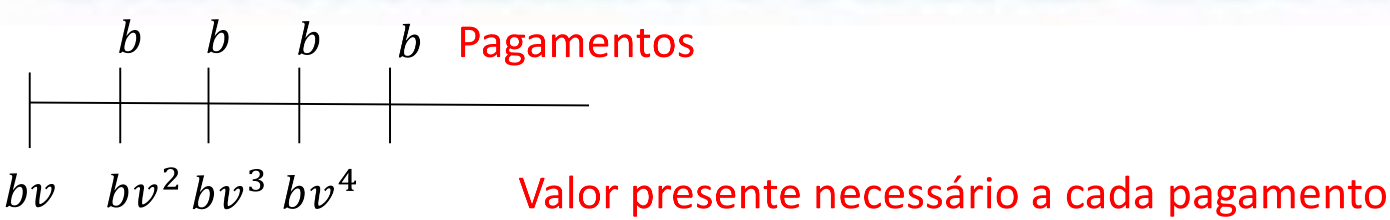
Anuidades imediatas

- Pagamentos **Antecipados** $(4\ pagamentos)$
  - Os pagamentos começam no primeiro período.



- Pagamentos **Postecipados** $(4\ pagamentos)$
  - Os pagamentos começam no final de cada período.

$$\boldsymbol{F_0 = b\left(\frac{1}{1+i}\right)^t}$$



Anuidades imediatas

- A soma de uma anuidade antecipada[1] composta por **4 pagamentos** com $b = 1$. será:

$$1 + v + v^2 + v^3 = \sum_{t=0}^{4-1} v^t$$

- A soma de uma anuidade antecipada[1] composta por $\boldsymbol{n}$ **pagamentos** com $b = 1$. será:

$$1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \frac{\left(1 - v^{(n-1)+1}\right)}{1 - v} = \frac{\mathbf{1 - v^n}}{\mathbf{1 - v}} = \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

1) Os pagamentos começam no primeiro período.

Anuidades imediatas

- A soma de uma anuidade postecipada[2] composta por **4 pagamentos** com $b = 1$. Será:

$$v + v^2 + v^3 + v^4 = \sum_{t=1}^{4} v^t$$

- A soma de uma anuidade postecipada[2] composta por $\boldsymbol{n\ pagamentos}$ com b = 1. Será:

$$v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = v(1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1}) = v\sum_{t=0}^{n-1} v^t$$

$$v(1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1}) = v\frac{\left(1 - v^{(n-1)+1}\right)}{1 - v} = \boldsymbol{v\frac{(1 - v^n)}{1 - v} = a_{\overline{n|}}}$$

2) Os pagamentos começam no final de cada .

Anuidades imediatas

- A soma de uma anuidade antecipada[1] composta por $\boldsymbol{n}$ **pagamentos** com $b = 1$ será:

$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

- A soma de uma anuidade postecipada[2] composta por $\boldsymbol{n\ pagamentos}$ com $b = 1$ será:

$$a_{\overline{n}|} = v\frac{(1 - v^n)}{1 - v}$$

1) Os pagamentos começam no primeiro período.

2) Os pagamentos começam no final de cada .

Anuidades imediatas

Anuidade Antecipada

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} - a_{\overline{n-1|}} = 1$$

Anuidade Postecipada

Pois :

$$\frac{1-v^n}{1-v} - \frac{v(1-v^{n-1})}{1-v} = 1$$

- Note que n representa o maior valor inteiro contido no tempo futuro de vida. Trata-se de uma variável discreta.

Anuidades vitalícias imediatas

- Estamos trabalhando com o valor presente de uma série de pagamentos.

  - Não existe, nos exemplos acima, o reconhecimento de uma variável como tendo “natureza” aleatória.

  - De fato, as anuidades apresentadas são anuidades certas. Uma série de pagamentos sendo realizados ao longo do tempo.

Anuidades vitalícias imediatas

- No processo de compra de um produto atuarial ou de concessão de benefício, existe risco.

  - A seguradora não sabe se vai receber todos os prêmios do segurado (este pode morrer antes do período de cobertura).
  - A seguradora não sabe ao certo quanto irá gastar com previdência uma vez que uma pessoa se aposentou e entrou em gozo de benefício.

- Reconhecer a anuidade como um produto atuarial é reconhecer que:

  - A seguradora (ou fundo de pensão) não saberá ao certo quanto que, o valor de hoje, um segurado irá custar.

Anuidades vitalícias imediatas

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **ANTECIPADO** para uma pessoa de idade x corresponde ao valor esperado da anuidade imediata antecipada:

$$\ddot{a}_x$$

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **POSTECIPADO** para uma pessoa de idade x corresponde ao valor esperado da anuidade imediata postecipada:

$$a_x$$

Anuidades vitalícias imediatas

- T é a variável aleatória associada ao tempo adicional de vida, e determina a quantidade de pagamentos.
  - No caso vitalício, em tese não se sabe o número de pagamentos.

- O valor atuarial da anuidade pode ser calculada diretamente, com base nos valores das anuidades e na distribuição de T.

Imagine que um segurado deseja comprar uma anuidade (**antecipada**) que paga 1 u.m. ao segurado até que ele faleça. Qual deverá ser o valor a ser pago (Prêmio Puro Único) pelo segurado por essa anuidade (suponha o tempo discreto)?

$$\ddot{a}_{\overline{t|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{t-1} = \frac{1 - v^t}{1 - v}$$

$\ddot{a}_{\overline{t|}}$ corresponde a reserva total que a "seguradora" deve ter no inicio dos pagamentos para uma pessoa que viva por um período fixo t.

- Assim para o caso de uma pessoa de idade x viver somente 1 ano a reserva será de:

$$\ddot{a}_{\overline{1|}} = \frac{1 - v^{0+1}}{1 - v} = 1$$

- Viver por 2 anos:

$$\ddot{a}_{\overline{2|}} = \frac{1 - v^{1+1}}{1 - v} = 1 + v$$

- Viver por 3 anos:

$$\ddot{a}_{\overline{3|}} = \frac{1 - v^{2+1}}{1 - v} = 1 + v + v^2$$

...

Anuidades vitalícias imediatas

- Ao se considerar o tempo de vida T como uma variável aleatória temos que para uma pessoa de idade x a probabilidade dela viver o primeiro de pagamento:

$$P(T_x = 0) = {}_0p_x q_x$$

- Viver por 2 anos:

$$P(T_x = 1) = p_x q_{x+1}$$

- Viver por 3 anos:

$$P(T_x = 2) = {}_2p_x q_{x+2}$$

...

Anuidades imediatas

N° do Pagamentos	Tempo de vida adicional (anos)	Probabilidade do tempo de vida adicional.	*Soma dos pagamentos* necessários.
1	$t = 0$	$P(T_x = 0) = {}_0p_x q_x$	$\ddot{a}_{\overline{1}\rvert} = \frac{1 - v^{0+1}}{1 - v} = 1$
2	$t = 1$	$P(T_x = 1) = p_x q_{x+1}$	$\ddot{a}_{\overline{2}\rvert} = \frac{1 - v^{1+1}}{1 - v} = 1 + v$
3	$t = 2$	$P(T_x = 2) = {}_2p_x q_{x+2}$	$\ddot{a}_{\overline{3}\rvert} = \frac{1 - v^{2+1}}{1 - v} = 1 + v + v^2$
…	…	…	…
$n = t + 1$	t	$P(T_x = t) = {}_tp_x q_{x+t}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert} = \ddot{a}_{\overline{t+1}\rvert} = \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v}$

Assim vemos que cada termo $\ddot{a}_{\overline{T+1}\rvert}$ tem probabilidade associado de ${}_tp_x q_{x+t}$.

Anuidades vitalícias imediatas

- Então para o caso do VPA pago por uma anuidade imediata vitalícia **antecipada**, para uma pessoa de idade x, será:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} \, {}_t p_x q_{x+t}$$

Aula 11 - Anuidades

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 1

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

- Exemplo 1

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E\left(\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_{t}p_{x}q_{x+t} = \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_{0}p_{40}q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2|}}\ p_{40}q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3|}}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1-v^{1}}{1-v}\ {}_{0}p_{40}q_{40} + \frac{1-v^{2}}{1-v}p_{40}q_{41} + \frac{1-v^{3}}{1-v}\ {}_{2}p_{40}q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 17{,}67u.m.$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 1

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuidAnt1<-function(i,idade,b){

f.desconto <- 1/(1+i)
px          <- 1-qx
pxx          <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]) )
t          <- (0:(length(pxx)-1))
a          <- (1-f.desconto^(t+1))/(1-f.desconto)
ax          <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
return(ax)
}
```

Anuidades vitalícias imediatas

- Outra alternativa para o calculo do V.P.A. será dado por:

$$\ddot{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots$$

- Como vimos que ${}_nE_x = v^n\,{}_np_x$, então:

$$\ddot{a}_x = E\left(\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\,{}_tp_x$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 2

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}E_{40} = 1 + v\ p_{40} + v^2\ {}_{2}p_{40} + v^3\ {}_{3}p_{40} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 1 + v\ p_{40} + v^2\ p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots = 17{,}67 u.m.$$

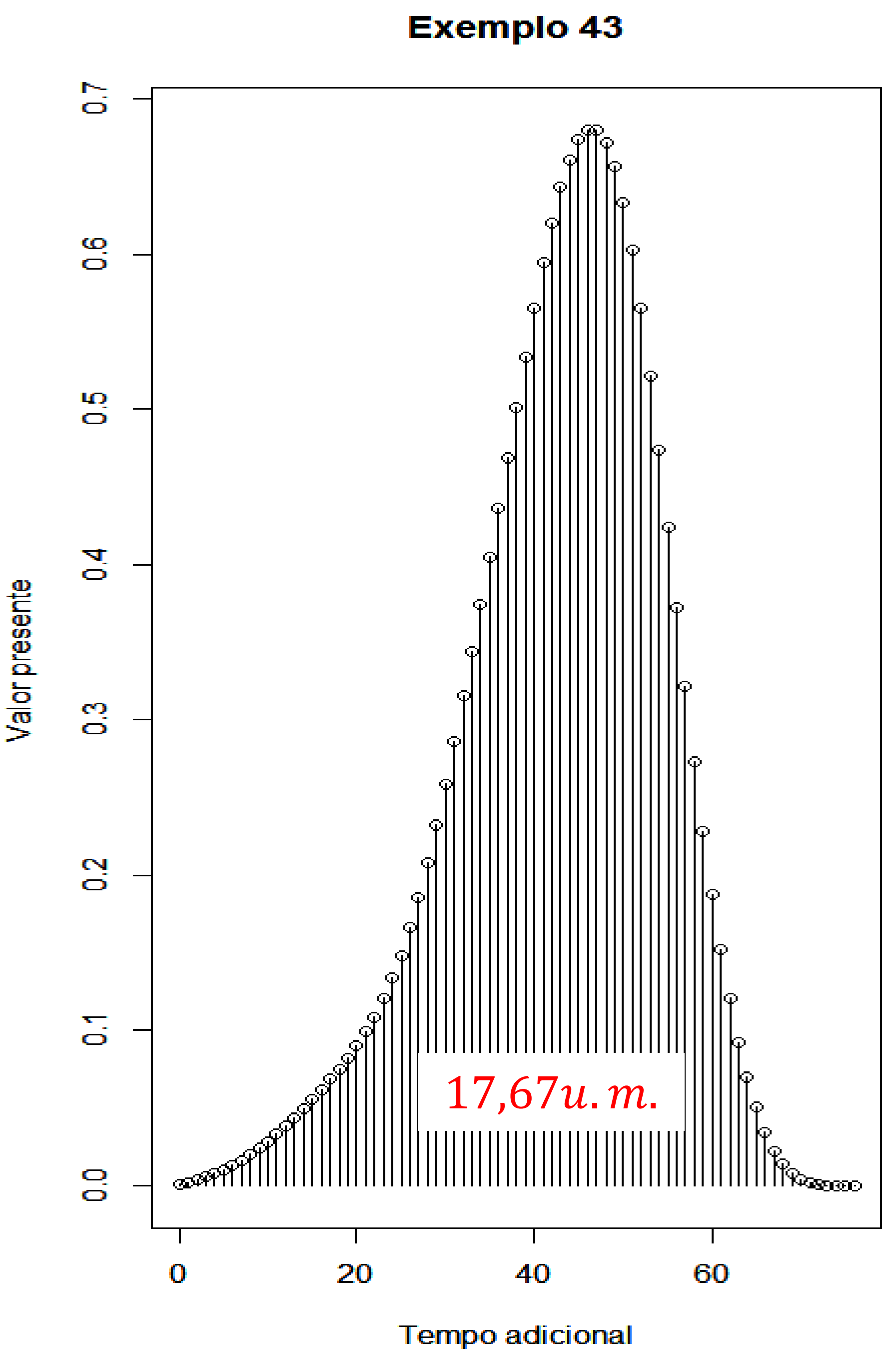
Anuidades vitalícias imediatas

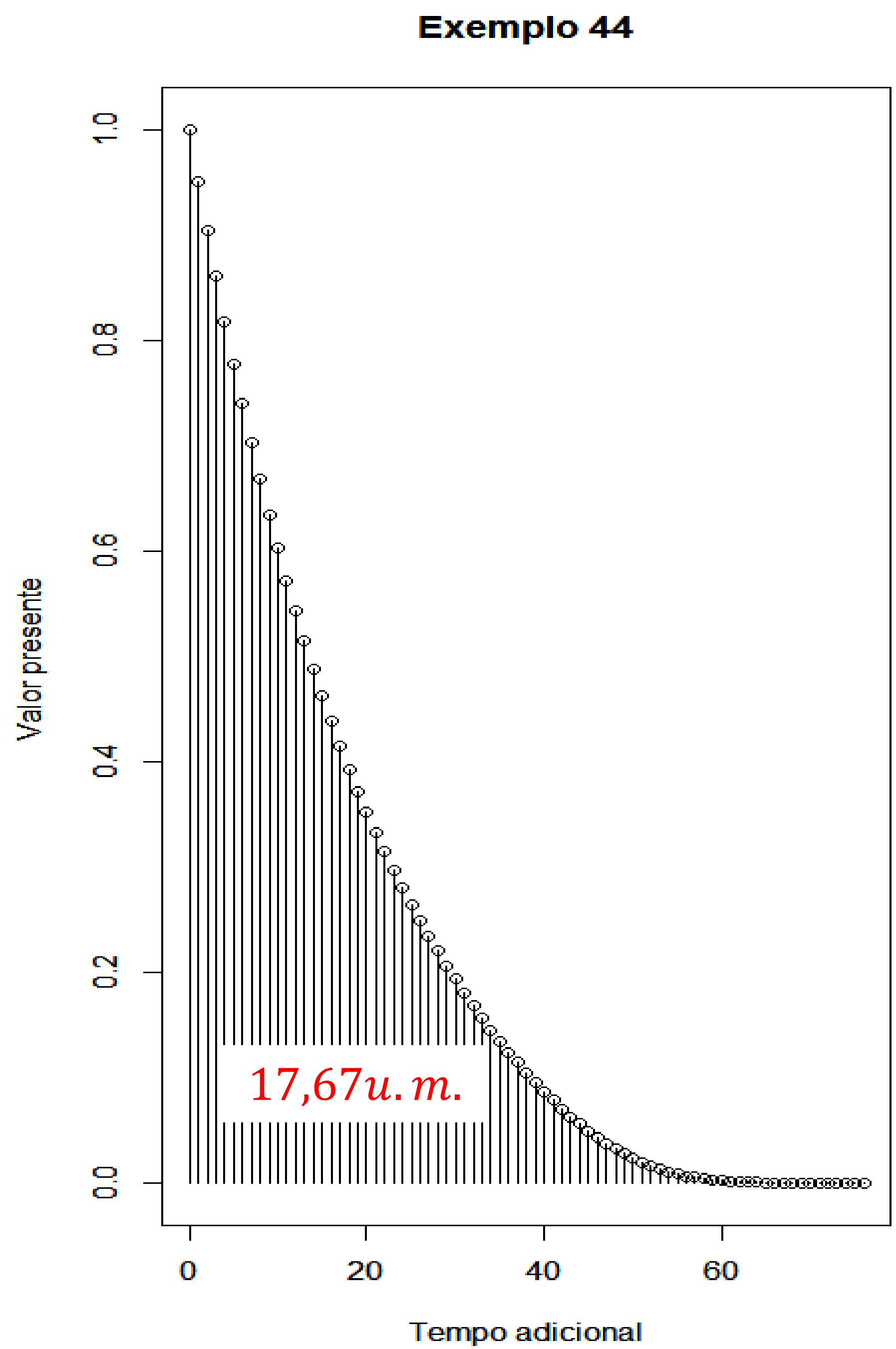
- Exemplo 2

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuiAnt2<-function(i,idade,b){

f.desconto <- 1/(1+i)
px          <- 1-qx
pxx          <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
t          <- (0:(length(pxx)-1))
bx          <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)
return(bx)
}
```


Exemplo 43
Valor presente
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0
20
40
60
Tempo adicional
17,67u.m.


Exemplo 44
Valor presente
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
20
40
60
Tempo adicional
17,67u.m.

Anuidades vitalícias imediatas

- Então para o caso do VPA pago por uma anuidade imediata vitalícia **postecipado**, para uma pessoa de idade x, será:

$$a_x = E\left(a_{\overline{T|}}\right) = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t|}}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{v(1-v^t)}{1-v}\ {}_tp_x q_{x+t}$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 3

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t|}}\ {}_t p_x q_{x+t} = a_{\overline{1|}}\ p_{40} q_{41} + a_{\overline{2|}}\ {}_2 p_{40} q_{42} + a_{\overline{3|}}\ {}_3 p_{40} q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = \frac{v(1-v^1)}{1-v}\ p_{40} q_{41} + \frac{v(1-v^2)}{1-v}\ {}_2 p_{40} q_{42} + \frac{v(1-v^3)}{1-v}\ {}_3 p_{40} q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = 16{,}67\text{u.m.}$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 3

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuidPost1<-function(i,idade,b){

 f.desconto <- 1/(1+i)
 px       <- 1-qx
 pxx      <- cumprod( px[(idade+1):idademaxima])
 ## pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):idademaxima]))
t         <- (1:(length(pxx)))
 ## t     <- (0:(length(pxx)-1))
 a        <- f.desconto *(1-f.desconto^t)/(1-f.desconto)
 ## a     <- (1-f.desconto^(t+1))/(1-f.desconto)
  ax           <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+2):(idademaxima+1)])
 ## ax          <- b*sum(a*pxx*qx[(idade+1):(idademaxima+1)])
 return(ax)
}
```

Anuidades imediatas-Vitalícia

- Para o caso do VPA pago por uma anuidade imediata vitalícia **Postecipada:**

$$a_x = v\ p_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \dots$$

- Então:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_x$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 4

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t}E_{40} = v\ p_{40} + v^2\ {}_{2}p_{40} + v^3\ {}_{3}p_{40} + \cdots$$

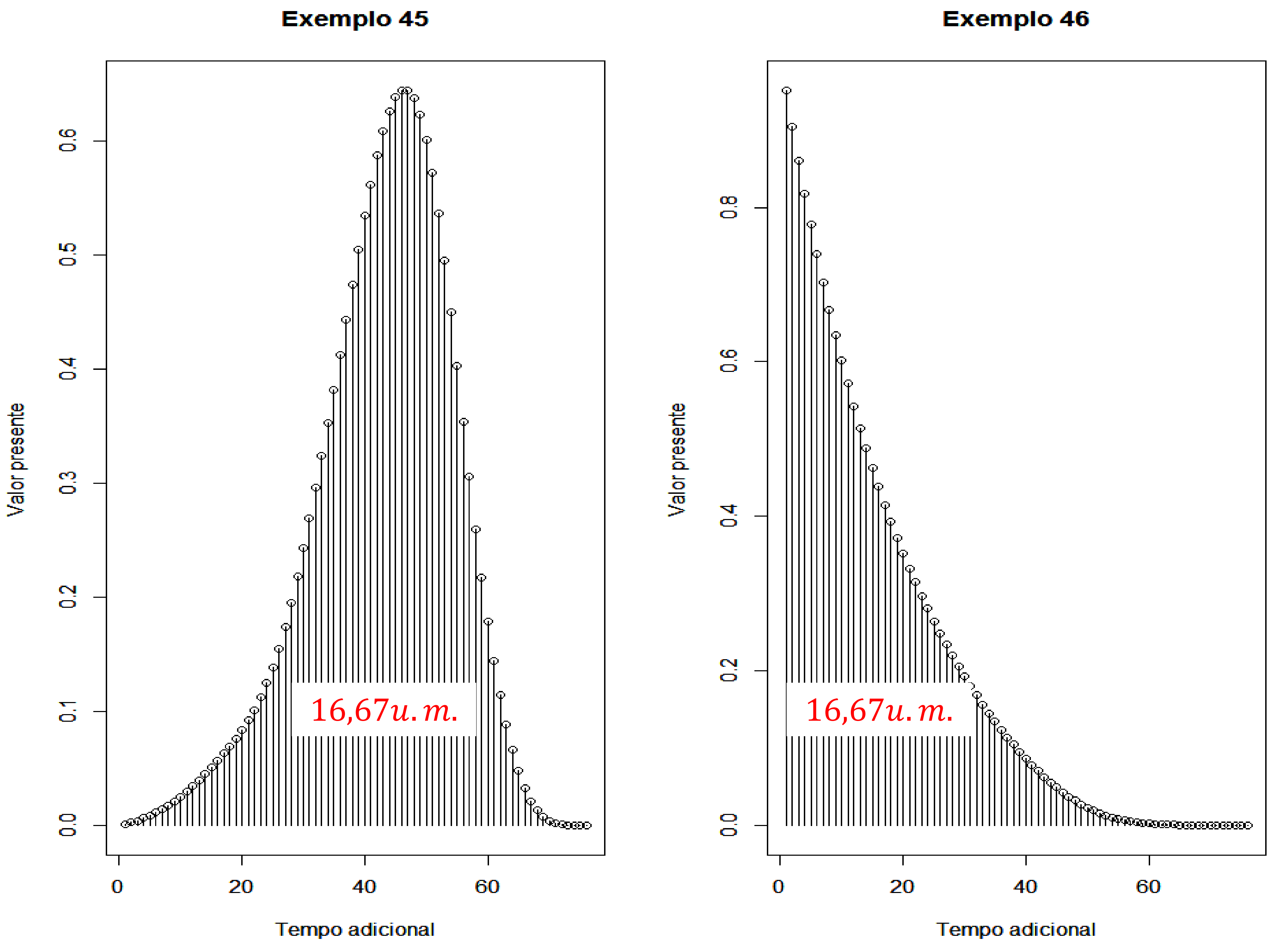
$$a_{40} = v\ p_{40} + v^2\ p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots = 16{,}67 u.m.$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Exemplo 4

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

```
AnuiPost2<-function(i,idade,b){
 f.desconto <- 1/(1+i)
 px           <- 1-qx
 pxx          <- cumprod(px[(idade+1):idademaxima])
 ## pxx          <- c(1, cumprod(px[(idade+1):idademaxima]) )
 t            <- (1:(length(pxx)))
## t             <- (0:(length(pxx)-1))
 bx           <- b*sum(f.desconto^(t)*pxx)
 return(bx)
}
```


Exemplo 45
Exemplo 46
Valor presente
Tempo adicional
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.8
0
20
40
60
16,67u.m.

Anuidades vitalícias imediatas

- Então, para o caso discreto, o V.P.A. será dado por:

  - Anuidade **Antecipada** (Variável aleatória discreta)

$(\omega - x) - 1$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t\boldsymbol{E_x} = \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{v^t}\, {}_t\boldsymbol{p_x} = \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v}\, {}_t p_x q_{x+t}$$

  - Anuidade **Postecipada** (Variável aleatória discreta)

$(\omega - x)$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} a_{\overline{t|}}\, {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v \left(\frac{1 - v^t}{1 - v}\right) {}_t p_x q_{x+t}$$

Anuidades vitalícias imediatas

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia antecipada.

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia Postecipada.