

# Teoria do Risco

## Aula 13

**Danilo Machado Pires**  
**danilo.pires@unifal-mg.edu.br**

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



**Modelo de Risco individual** $X_i$  Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

 $S_{ind}, X_i, B_i, I_i$ 

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i) q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 q_i (1 - q_i)$$

**Modelo de Risco coletivo** $X_i$  Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

 $S_{col}, X_i, N$ 

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

## Modelos de risco Coletivo- A distribuição de $S_{col}$ , os sinistros coletivos.

➤ O método da convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p(N = k) \quad P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p(N = k) \quad p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

# Modelos de risco Coletivo

O processo de convolução no modelo de risco coletivo leva em consideração a convolução entre os sinistros ocorridos dado que quantidade ocorrida também é uma variável aleatória.

Modelo de risco individual	Modelo de risco coletivo
$F^{(k)} = F_k * F^{(k-1)}$	$P^{(k)} = P_k * P^{(k-1)}$
$F_{S_{ind}}^{(2)}(s) = \sum_{j=0}^s F_X(s - y_j) p_Y(y_j)$	$F_{S_{col}}^{(2)}(s) = \sum_{k=0}^s P^{*k}(s) p_N(k)$

$X$  (discreto)  $\rightarrow S_{col}$  (discreto)

$X$  (contínuo)  $\rightarrow S_{col}$  (contínuo)

# Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

$X$  contínuo.

$$P^{*k}(s) = \int_0^s P^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$P^{*k-1} * p$

$$p^{*k}(s) = \int_0^s p^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$p^{*k-1} * p$

## Exemplo 1

Calcular  $F_{S_{col}}(s)$ , quando  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$  e  $N \sim \text{Po}(\lambda)$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p(N = k)$$

$$P^{*k}(s) = \int_0^s P^{*k-1}(s-h)p(h)dh$$

*Assim:*

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

## Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$P(x) = 1 - e^{-\alpha x} ; x > 0$$

$$P^{*k}(s) = \int_h P^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$P^{*(2)}(s) = \int_0^s P^{*2-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s P(s-h) p(h) dh$$

$$P^{*(2)}(s) = \int_0^s [1 - e^{-\alpha(s-h)}] \alpha e^{-\alpha h} dh$$

$$P^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s} (1 + \alpha s)$$

$$P^{*3}(s) = \int_0^s P^{*3-1}(s-h)p(h)dh = \int_0^s P^{*2}(s-h)p(h)dh$$

$$P^{*3}(s) = \int_0^s \{1 - e^{-\alpha(s-h)}[1 + \alpha(s-h)]\}\alpha e^{-\alpha h}dh$$

...

$$P^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s} \left[ 1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!} \right]$$



- Desta forma, então, chega-se à seguinte formula de  $P^{*n}$

$$P(s) = 1 - e^{-\alpha s}$$

$$P^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s}(1 + \alpha s)$$

$$P^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s} \left[ 1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!} \right]$$

...

$$P^{*k}(s) = 1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!}$$

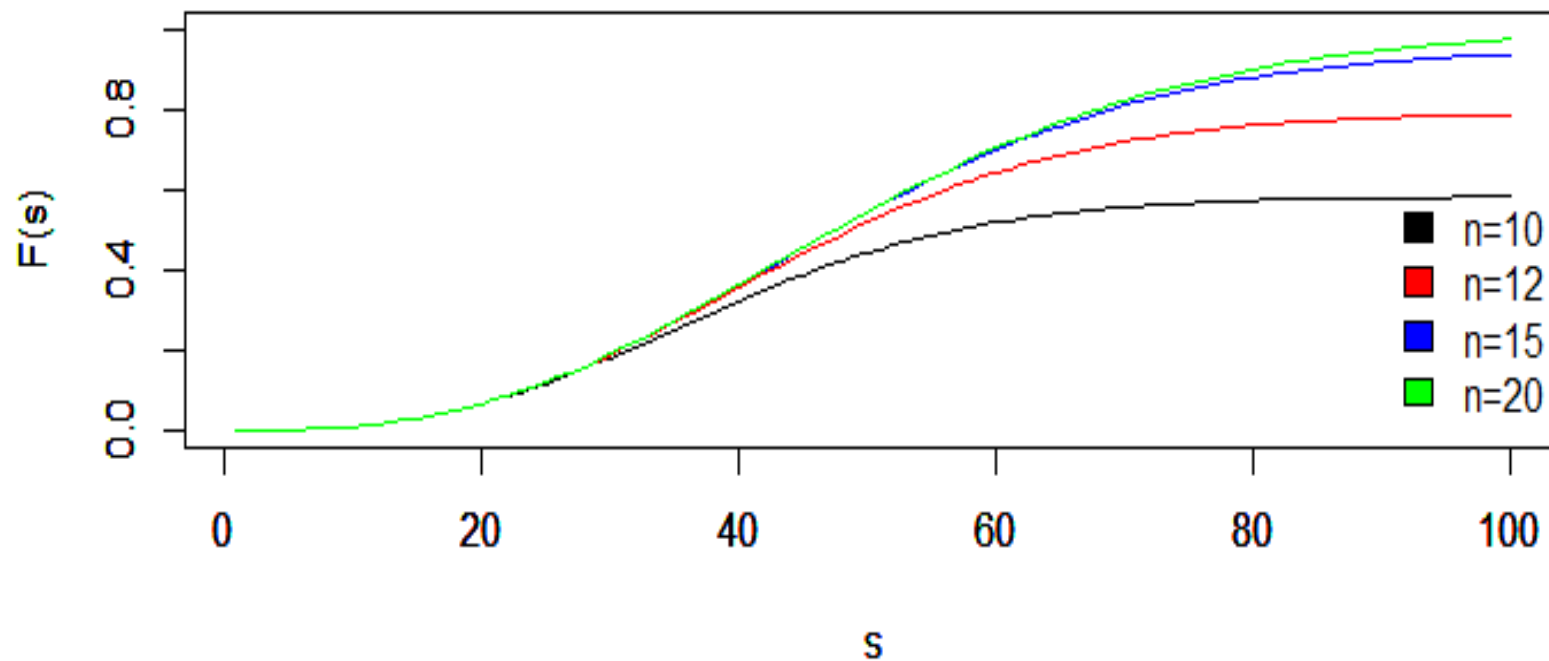
Como:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n P^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Tem-se que:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n \left[ 1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!} \right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n \left[ 1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!} \right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$



Comportamento de  $F_{s_{col}}(S)$  com  $\alpha = 0,2, \lambda = 10$  para diferentes quantidade de apólices  $n$ .

## Exemplo 2

Adicionalmente pode-se calcular  $p^{*k}$  e  $f_{S_{col}}(s)$ , quando  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$  e  $N \sim \text{Po}(\lambda)$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

## Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; x > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s p^{*2-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s p(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s [\alpha e^{-\alpha(s-h)}] \alpha e^{-\alpha h} dh = \alpha^2 s e^{-\alpha s},$$

## Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; x > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \alpha^2 s e^{-\alpha s}$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s p^{*3-1}(s-h) p(h) dh = \int_0^s p^{*2}(s-h) p(h) dh$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s \alpha^2 (s-h) e^{-\alpha(s-h)} \alpha e^{-\alpha h} dh = \frac{\alpha^3 s^2 e^{-\alpha s}}{2}$$

## Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; x > 0$$

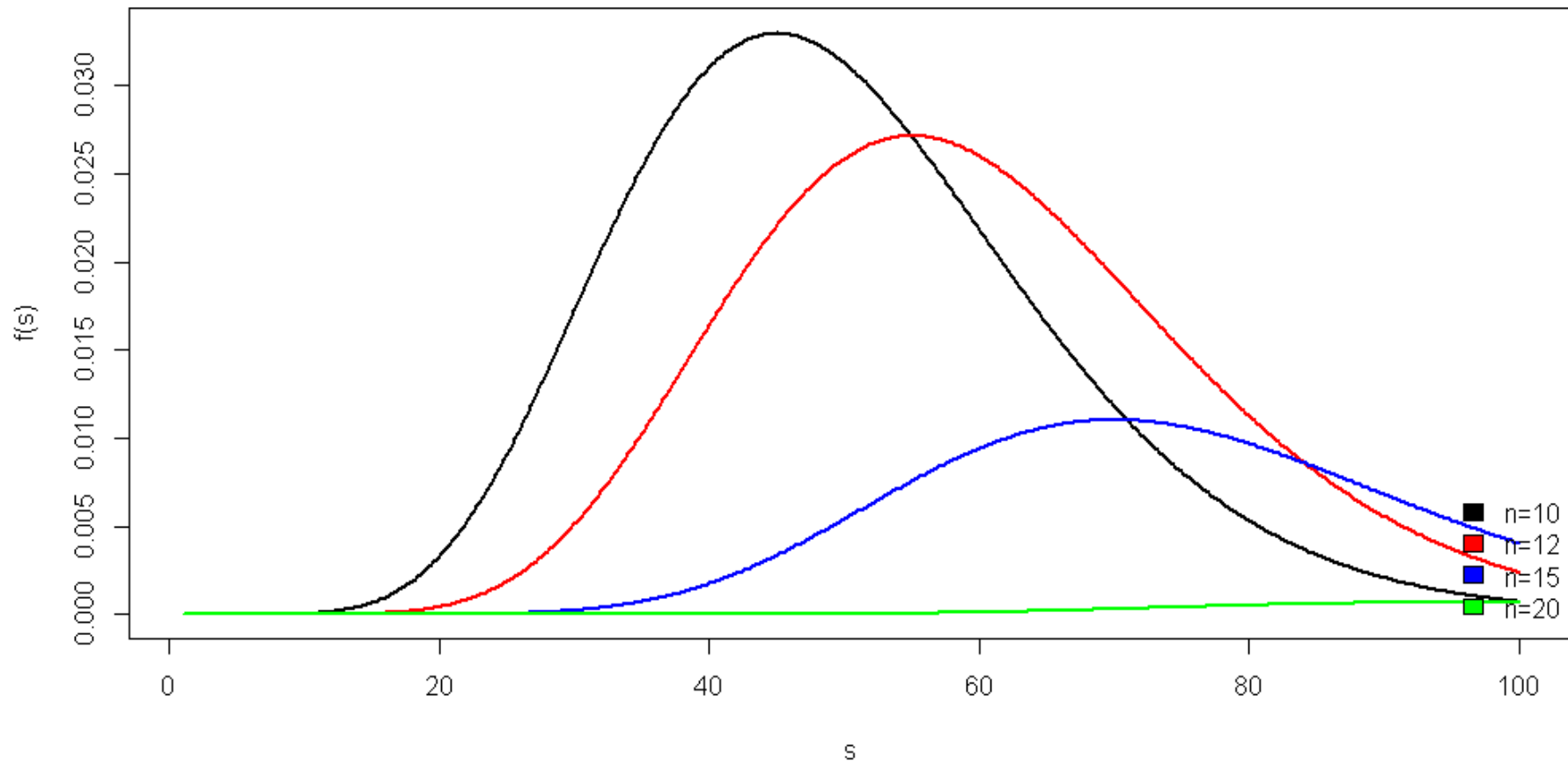
$$p^{*(2)}(s) = \alpha^2 s e^{-\alpha s},$$

$$p^{*3}(s) = \frac{\alpha^3 s^2 e^{-\alpha s}}{2}$$

...

$$p^{*n}(s) = \frac{\alpha^n s^{n-1} e^{-\alpha s}}{(n-1)!}$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!} \right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$



**Comportamento de  $f_{s_{col}}(S)$  com  $\alpha = 0,2, \lambda = 10$  para diferentes quantidade de apólices  $n$ .**



# Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

# Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de  $X$  e  $N$ .

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

Quando  $X$  é discreto tem-se

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h) p(h)$$

*Considere  $h$  como um dos valores possíveis para  $X$ .*

## Exemplo 4

Uma carteira de seguros produz 0,1 ou 2 sinistros com as respectivas probabilidades: 20%,50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores  $R\$100$ ,  $R\$200$  ou  $R\$300$ , com as respectivas probabilidades: 20%, 70% e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados  $S_{col}$ .

$X_i$	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

$N$	$P(N)$	$S_{col}$
0	0,2	$S_{col} = 0$
1	0,5	$S_{col} = X_1 \quad \{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2 \quad \{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$

Em primeiro lugar, computemos todas as combinações possíveis de frequência e severidades e assim explicitemos os valores possíveis de sinistros agregados e associados as probabilidades de ocorrência

Por definição tem-se que  $p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0 \end{cases}$

▪ Logo para  $k = 0$ :

$$p^{*0}(0) = 1$$

$$p^{*0}(100) = 0$$

$$p^{*0}(200) = 0$$

$$p^{*0}(300) = 0$$

$$p^{*0}(400) = 0$$

$$p^{*0}(500) = 0$$

$$p^{*0}(600) = 0$$

Para  **$k = 1$** :

Usando  $p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s - h)p(h)$  sendo  $k$  os possíveis valores assumidos por  $N$ .

$$p^{*1}(0) = \sum_{h=0}^0 p^{*1-1}(0 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(100) = \sum_{h=0}^{100} p^{*1-1}(100 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(200) = \sum_{h=0}^{200} p^{*1-1}(200 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(300) = \sum_{h=0}^{300} p^{*1-1}(300 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(400) = \sum_{h=0}^{400} p^{*1-1}(400 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(500) = \sum_{h=0}^{500} p^{*1-1}(500 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(600) = \sum_{h=0}^{600} p^{*1-1}(600 - h)p(h)$$

$$p^{*1}(0) = p^{*0}(0)p(0) = 0$$

$$p^{*1}(100) = p^{*0}(100)p(0) + p^{*0}(0)p(100) = 0,2$$

$$p^{*1}(200) = p^{*0}(200)p(0) + p^{*0}(100)p(100) + p^{*0}(0)p(200) = 0,7$$

$$p^{*1}(300) = p^{*0}(300)p(0) + p^{*0}(200)p(100) + p^{*0}(100)p(200) + p^{*0}(0)p(300) = 0,1$$

$$p^{*1}(400) = p^{*0}(400)p(0) + p^{*0}(300)p(100) + p^{*0}(200)p(200) + p^{*0}(100)p(300) + p^{*0}(0)p(400) = 0$$

$$p^{*1}(500) = p^{*0}(500)p(0) + p^{*0}(400)p(100) + p^{*0}(300)p(200) + p^{*0}(200)p(300) + p^{*0}(100)p(400) + p^{*0}(0)p(500) = 0$$

$$p^{*1}(600) = p^{*0}(600)p(0) + p^{*0}(500)p(100) + p^{*0}(400)p(200) + p^{*0}(300)p(300) + p^{*0}(200)p(400) + p^{*0}(100)p(500) + p^{*0}(0)p(600) = 0$$

$S_{col}$	$N = 0$	$N = 1$
<b>0</b>	$\mathbf{p^{*0}(0) = 1}$	$\mathbf{p^{*1}(0) = 0}$
<b>100</b>	$\mathbf{p^{*0}(100) = 0}$	$\mathbf{p^{*1}(100) = 0, 2}$
<b>200</b>	$\mathbf{p^{*0}(200) = 0}$	$\mathbf{p^{*1}(200) = 0, 7}$
<b>300</b>	$\mathbf{p^{*0}(300) = 0}$	$\mathbf{p^{*1}(300) = 0, 1}$
<b>400</b>	$\mathbf{p^{*0}(400) = 0}$	$\mathbf{p^{*1}(400) = 0}$
<b>500</b>	$\mathbf{p^{*0}(500) = 0}$	$\mathbf{p^{*1}(500) = 0}$
<b>600</b>	$\mathbf{p^{*0}(600) = 0}$	$\mathbf{p^{*1}(600) = 0}$

Para  **$k = 2$** :

$$p^{*2}(\mathbf{0}) = \sum_{h=0}^0 p^{*2-1}(0-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{100}) = \sum_{h=0}^{100} p^{*2-1}(100-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{200}) = \sum_{h=0}^{200} p^{*2-1}(200-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{300}) = \sum_{h=0}^{300} p^{*2-1}(300-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{400}) = \sum_{h=0}^{400} p^{*2-1}(400-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{500}) = \sum_{h=0}^{500} p^{*2-1}(500-h)p(h)$$

$$p^{*2}(\mathbf{600}) = \sum_{h=0}^{600} p^{*2-1}(600-h)p(h)$$



Para  **$k = 2$** :

$$p^{*2}(0) = p^{*1}(0)p(0) = 0$$

$$p^{*2}(100) = p^{*1}(100)p(0) + p^{*1}(0)p(100) = 0$$

$$p^{*2}(200) = p^{*1}(200)p(0) + p^{*1}(100)p(100) + p^{*1}(0)p(200) = 0,04$$

$$p^{*2}(300) = p^{*1}(300)p(0) + p^{*1}(200)p(100) + p^{*1}(100)p(200) + p^{*1}(0)p(300) = 0,28$$

$$p^{*2}(400) = p^{*1}(400)p(0) + p^{*1}(300)p(100) + p^{*1}(200)p(200) + p^{*1}(100)p(300) + p^{*1}(0)p(400) = 0,53$$

$$p^{*2}(500) = p^{*1}(500)p(0) + p^{*1}(400)p(100) + p^{*1}(300)p(200) + p^{*1}(200)p(300) + p^{*1}(100)p(400) + p^{*1}(0)p(500) = 0,14$$

$$p^{*2}(600) = p^{*1}(600)p(0) + p^{*1}(500)p(100) + p^{*1}(400)p(200) + p^{*1}(300)p(300) + p^{*1}(200)p(400) + p^{*1}(100)p(500) + p^{*1}(0)p(600) = 0,01$$

$S_{col}$	$P(N = 0) = 0,2$	$P(N = 1) = 0,5$	$P(N = 2) = 0,3$
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
<b>0</b>	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$	$p^{*2}(0) = 0$
<b>100</b>	$p^{*0}(100) = 0$	$p^{*1}(100) = 0,2$	$p^{*2}(100) = 0$
<b>200</b>	$p^{*0}(200) = 0$	$p^{*1}(200) = 0,7$	$p^{*2}(200) = 0,04$
300	$p^{*0}(300) = 0$	$p^{*1}(300) = 0,1$	$p^{*2}(300) = 0,28$
400	$p^{*0}(400) = 0$	$p^{*1}(400) = 0$	$p^{*2}(400) = 0,53$
500	$p^{*0}(500) = 0$	$p^{*1}(500) = 0$	$p^{*2}(500) = 0,14$
600	$p^{*0}(600) = 0$	$p^{*1}(600) = 0$	$p^{*2}(600) = 0,01$
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

Agora se faz necessário sumarizar todas as combinações que resultam no mesmo valor de sinistros.

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s)p_N(k)$$

Logo

$$P_{S_{col}}(\mathbf{0}) = p^{*0}(0)p_N(0) + p^{*1}(0)p_N(1) + p^{*2}(0)p_N(2) = 0,2$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{100}) = p^{*0}(100)p_N(0) + p^{*1}(100)p_N(1) + p^{*2}(100)p_N(2) = 0,1$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{200}) = p^{*0}(200)p_N(0) + p^{*1}(200)p_N(1) + p^{*2}(200)p_N(2) = 0,362$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{300}) = p^{*0}(300)p_N(0) + p^{*1}(300)p_N(1) + p^{*2}(300)p_N(2) = 0,134$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{400}) = p^{*0}(400)p_N(0) + p^{*1}(400)p_N(1) + p^{*2}(400)p_N(2) = 0,159$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{500}) = p^{*0}(500)p_N(0) + p^{*1}(500)p_N(1) + p^{*2}(500)p_N(2) = 0,042$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{600}) = p^{*0}(600)p_N(0) + p^{*1}(600)p_N(1) + p^{*2}(600)p_N(2) = 0,003$$

$$p_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,04 \\ 0 & 0,1 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,53 \\ 0 & 0 & 0,14 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow P_N(0) \\ \longrightarrow P_N(1) \\ \longrightarrow P_N(2) \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p^{*0}(s) & p^{*1}(s) & p^{*2}(s) \end{matrix}$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{0}) = 1 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 0 \times 0,3 = 0,2$$

$$P_{S_{col}}(\mathbf{100}) = 0 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 + 0 \times 0,3 = 0,1$$

...

$$P_{S_{col}}(\mathbf{600}) = 0 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 0,01 \times 0,3 = 0,003$$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,2 & s = 0 \\ 0,1 & s = 100 \\ 0,362 & s = 200 \\ 0,134 & s = 300 \\ 0,159 & s = 400 \\ 0,042 & s = 500 \\ 0,003 & s = 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,2 & 0 \leq s < 100 \\ 0,2 + 0,1 = 0,3 & 100 \leq s < 200 \\ 0,3 + 0,362 = 0,662 & 200 \leq s < 300 \\ 0,662 + 0,134 = 0,796 & 300 \leq s < 400 \\ 0,796 + 0,159 = 0,955 & 400 \leq s < 500 \\ 0,955 + 0,042 = 0,997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

# Modelos de risco Coletivo-Convolução

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq s)$$

Quando  $X$  é discreto tem-se

$$P^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \\ 1 & \text{se } s > 0 \end{cases}$$

$$P^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} P^{*k-1}(s-h) p(h)$$

Considere  $h$  como um dos valores possíveis para  $X$ .

## Exemplo 5

Uma carteira de seguros produz 0,1 ou 2 sinistros com as respectivas probabilidades: 20%, 50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores R\$100, R\$200 ou R\$300, com as respectivas probabilidades: 20%, 70% e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados  $S_{col}$ .

$X_i$	R\$100	R\$200	R\$300
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

$N$	$P(N)$	$S_{col}$
0	0,2	$S_{col} = 0$
1	0,5	$S_{col} = X_1 \quad \{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2 \quad \{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$

Por definição tem-se que  $P^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \\ 1 & \text{se } s > 0 \end{cases}$

Logo para  $k = 0$ :

$$P^{*0}(0) = 0$$

$$P^{*0}(100) = 1$$

$$P^{*0}(200) = 1$$

$$P^{*0}(300) = 1$$

$$P^{*0}(400) = 1$$

$$P^{*0}(500) = 1$$

$$P^{*0}(600) = 1$$



Para  **$k = 1$** :

Usando  $P^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} P^{*k-1}(s - h)p(h)$  sendo  $k$  os possíveis valores assumidos por  $N$ .

$$P^{*1}(0) = \sum_{h=0}^0 P^{*1-1}(0 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(100) = \sum_{h=0}^{100} P^{*1-1}(100 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(200) = \sum_{h=0}^{200} P^{*1-1}(200 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(300) = \sum_{h=0}^{300} P^{*1-1}(300 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(400) = \sum_{h=0}^{400} P^{*1-1}(400 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(500) = \sum_{h=0}^{500} P^{*1-1}(500 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(600) = \sum_{h=0}^{600} P^{*1-1}(600 - h)p(h)$$

$$P^{*1}(0) = P^{*0}(0)p(0) = 0$$

$$P^{*1}(100) = P^{*0}(100)p(0) + P^{*0}(0)p(100) = 0$$

$$P^{*1}(200) = P^{*0}(200)p(0) + P^{*0}(100)p(100) + P^{*0}(0)p(200) = 0,2$$

$$P^{*1}(300) = P^{*0}(300)p(0) + P^{*0}(200)p(100) + P^{*0}(100)p(200) + P^{*0}(0)p(300) = 0,9$$

$$P^{*1}(400) = P^{*0}(400)p(0) + P^{*0}(300)p(100) + P^{*0}(200)p(200) + P^{*0}(100)p(300) + P^{*0}(0)p(400) = 1$$

$$P^{*1}(500) = P^{*0}(500)p(0) + P^{*0}(400)p(100) + P^{*0}(300)p(200) + P^{*0}(200)p(300) + P^{*0}(100)p(400) + P^{*0}(0)p(500) = 1$$

$$P^{*1}(600) = P^{*0}(600)p(0) + P^{*0}(500)p(100) + P^{*0}(400)p(200) + P^{*0}(300)p(300) + P^{*0}(200)p(400) + P^{*0}(100)p(500) + P^{*0}(0)p(600) = 1$$

$S_{col}$	$N = 0$	$N = 1$
0	$P^{*0}(0) = 0$	$P^{*1}(0) = 0$
100	$P^{*0}(100) = 1$	$P^{*1}(100) = 0$
200	$P^{*0}(200) = 1$	$P^{*1}(200) = 0,2$
300	$P^{*0}(300) = 1$	$P^{*1}(300) = 0,9$
400	$P^{*0}(400) = 1$	$P^{*1}(400) = 1$
500	$P^{*0}(500) = 1$	$P^{*1}(500) = 1$
600	$P^{*0}(600) = 1$	$P^{*1}(600) = 1$

Para  **$k = 2$** :

$$P^{*2}(0) = \sum_{h=0}^0 P^{*2-1}(0-h)p(h)$$

$$P^{*2}(100) = \sum_{h=0}^{100} P^{*2-1}(100-h)p(h)$$

$$P^{*2}(200) = \sum_{h=0}^{200} P^{*2-1}(200-h)p(h)$$

$$P^{*2}(300) = \sum_{h=0}^{300} P^{*2-1}(300-h)p(h)$$

$$P^{*2}(400) = \sum_{h=0}^{400} P^{*2-1}(400-h)p(h)$$

$$P^{*2}(500) = \sum_{h=0}^{500} P^{*2-1}(500-h)p(h)$$

$$P^{*2}(600) = \sum_{h=0}^{600} P^{*2-1}(600-h)p(h)$$

Para  **$k = 2$** :

$$P^{*2}(0) = P^{*1}(0)p(0) = 0$$

$$P^{*2}(100) = P^{*1}(100)p(0) + P^{*1}(0)p(100) = 0$$

$$P^{*2}(200) = P^{*1}(200)p(0) + P^{*1}(100)p(100) + P^{*1}(0)p(200) = 0$$

$$P^{*2}(300) = P^{*1}(300)p(0) + \mathbf{P^{*1}(200)p(100)} + P^{*1}(100)p(200) + P^{*1}(0)p(300) = 0,04$$

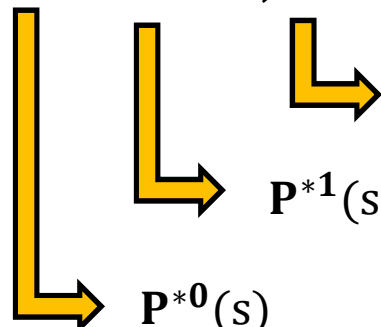
$$P^{*2}(400) = P^{*1}(400)p(0) + \mathbf{P^{*1}(300)p(100)} + \mathbf{P^{*1}(200)p(200)} + P^{*1}(100)p(300) + P^{*1}(0)p(400) = 0,32$$

$$P^{*2}(500) = P^{*1}(500)p(0) + \mathbf{P^{*1}(400)p(100)} + \mathbf{P^{*1}(300)p(200)} + \mathbf{P^{*1}(200)p(300)} + P^{*1}(100)p(400) + P^{*1}(0)p(500) = 0,85$$

$$P^{*2}(600) = P^{*1}(600)p(0) + \mathbf{P^{*1}(500)p(100)} + \mathbf{P^{*1}(400)p(200)} + \mathbf{P^{*1}(300)p(300)} + P^{*1}(200)p(400) + P^{*1}(100)p(500) + P^{*1}(0)p(600) = 0,99$$

$s_{col}$	$P(N = 0) = 0,2$	$P(N = 1) = 0,5$	$P(N = 2) = 0,3$
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
0	$P^{*0}(0) = 0$	$P^{*1}(0) = 0$	$P^{*2}(0) = 0$
100	$P^{*0}(100) = 1$	$P^{*1}(100) = 0$	$P^{*2}(100) = 0$
200	$P^{*0}(200) = 1$	$P^{*1}(200) = 0,2$	$P^{*2}(200) = 0$
300	$P^{*0}(300) = 1$	$P^{*1}(300) = 0,9$	$P^{*2}(300) = 0,04$
400	$P^{*0}(400) = 1$	$P^{*1}(400) = 1$	$P^{*2}(400) = 0,32$
500	$P^{*0}(500) = 1$	$P^{*1}(500) = 1$	$P^{*2}(500) = 0,85$
600	$P^{*0}(600) = 1$	$P^{*1}(600) = 1$	$P^{*2}(600) = 0,99$

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0,9 & 0,04 \\ 1 & 1 & 0,32 \\ 1 & 1 & 0,85 \\ 1 & 1 & 0,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow P_N(0) \\ \longrightarrow P_N(1) \\ \longrightarrow P_N(2) \end{matrix}$$



$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n P^{*k}(s) p_N(k)$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,2 & 0 \leq s < 100 \\ 0,3 & 100 \leq s < 200 \\ 0,662 & 200 \leq s < 300 \\ 0,796 & 300 \leq s < 400 \\ 0,955 & 400 \leq s < 500 \\ 0,997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0,2 & 0 \leq s < 100 \\ 0,2 + 0,1 = 0,3 & 100 \leq s < 200 \\ 0,3 + 0,362 = 0,662 & 200 \leq s < 300 \\ 0,662 + 0,134 = 0,796 & 300 \leq s < 400 \\ 0,796 + 0,159 = 0,955 & 400 \leq s < 500 \\ 0,955 + 0,042 = 0,997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$



➤ Exemplo 6

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

$X_i$	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco individual**.  
Obtenha a função de probabilidade de  $S_{ind}$ .

$X_i$	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

$$p_S(s) = p_{X_1} * p_{X_2}(s) = \sum_{\forall x_1 \leq s} p_{X_2}(s - x_1) p_{X_1}(x_1)$$

$S$	$S(X_1, X_2)$	$P_S$
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

## ➤ Exemplo 6

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

$X_i$	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco coletivo**. Obtenha a função de probabilidade de  $S_{col}$ .

Solução:

$X_i$	$P(X_i = x_i)$	$I_i$	$P(I_i = i_i)$	$B_i = (X_i   I_i = 1)$	$P(B_i = b_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6		
R\$1000,00	0,02	1	0,4	R\$1000,00	$\frac{0,02}{0,4} = 0,05$
R\$2000,00	0,06			R\$2000,00	$\frac{0,06}{0,4} = 0,15$
R\$3000,00	0,32			R\$3000,00	$\frac{0,32}{0,4} = 0,8$

$N$	$P(N) = \binom{2}{n} 0,4^n 0,6^{2-n}$	$S_{col}$	Possíveis valores para $S_{col}$ .
0	0,36	$S_{col} = 0$	
1	0,48	$S_{col} = X_i \quad \forall i = 1, 2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \dots + X_k = s)$$

**Quando X é discreto tem-se**

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h)p(h)$$

*Considere  $h$  como um dos valores possíveis para  $X$ .*

$S_{col}$	$P(N = 0) = 0,36$	$P(N = 1) = 0,48$	$P(N = 2) = 0,16$
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
0	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$	$p^{*2}(0) = 0$
1000	$p^{*0}(1000) = 0$	$p^{*1}(1000) = 0,05$	$p^{*2}(1000) = 0$
2000	$p^{*0}(2000) = 0$	$p^{*1}(0200) = 0,15$	$p^{*2}(2000) = 0,0025$
3000	$p^{*0}(3000) = 0$	$p^{*1}(3000) = 0,8$	$p^{*2}(3000) = 0,015$
4000	$p^{*0}(4000) = 0$	$p^{*1}(4000) = 0$	$p^{*2}(4000) = 0,1025$
5000	$p^{*0}(5000) = 0$	$p^{*1}(5000) = 0$	$p^{*2}(5000) = 0,24$
6000	$p^{*0}(6000) = 0$	$p^{*1}(6000) = 0$	$p^{*2}(6000) = 0,64$
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) p_N(k)$$

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,04 \\ 0 & 0,1 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0,53 \\ 0 & 0 & 0,14 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,48 \\ 0,16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow P_N(0) \\ \longrightarrow P_N(1) \\ \longrightarrow P_N(2) \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p^{*0}(s) & p^{*1}(s) & p^{*2}(s) \end{matrix}$

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$S$	$S(X_1, X_2)$	$P_S$
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

$$p_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^2 E(B_i)q_i$$

$$E(S_{ind}) = \mathbf{2200}$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^2 [var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)]$$

$$var(S_{ind}) = \mathbf{3860000}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = \mathbf{2200}$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$$

$$var(S_{col}) = \mathbf{3860000}$$