Matemática Atuarial II

Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Status vida conjunta (Anuidades)

No caso do status de vida conjunta, as anuidades são calculadas considerando que os benefícios serão pagos caso todos elementos do status estejam vivos

- Podem cessar ao fim do período de cobertura no caso da modalidade temporária

Status vida conjunta (Anuidades)

Anuidades imediatas vitalícias antecipadas para o status de vida conjunta

$$\ddot{a}_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v} \, {}_tp_{x,y} \, q_{x+t,y+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_tp_{x,y}$$

Anuidades imediatas temporárias antecipadas para o status de vida conjunta

$$\ddot{a}_{u:\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_{x,y} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_{x,y}$$

em que $u = \{x, y\}$.

EXEMPLO 1: Seja duas vidas que têm como probabilidades de mortes modeladas pela seguinte tábua

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00107

Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento antecipado).

EXEMPLO 1: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento antecipado).

Idade	$\boldsymbol{q_x}$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00107

x	y	T. vida adicional	Z_t	$S_{T_{30,28}}(t) = {}_t p_{30}\ {}_t p_{28}$
30	28	$t > 0$	1	$T_{30} > 0\ e\ T_{28} > 0$
31	29	$t > 1$	v	$T_{30} > 1\ eT_{28} > 1$
32	30	$t > 2$	v^2	$T_{30} > 2\ eT_{28} > 2$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = P\left(T_{30,28} > 0\right) + v^1 P\left(T_{30,28} > 1\right) + v^2 P\left(T_{30,28} > 2\right)$$

em que $u = \{30{,}28\}$.

EXEMPLO 1: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento antecipado).

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = P\left(T_{30,28} > 0\right) + v^1 P\left(T_{30,28} > 1\right) + v^2 P\left(T_{30,28} > 2\right)$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = 1\ {}_0p_{30:28} + v\ {}_1p_{30:28} + v^2\ {}_2p_{30:28}$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^{2} v^t\ {}_tp_{30:28} \approx 2{,}88$$

em que $u = \{30{,}28\}$.

Status vida conjunta (Anuidades).

Anuidades imediatas vitalícias postecipadas para o status de vida conjunta

$$a_{x,y} = \sum_{t=1}^{\infty} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_tp_{x,y}q_{x+t,y+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_{x,y}$$

Anuidades imediatas temporárias postecipadas para o status de vida conjunta

$$a_{u:\bar{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_{x,y} = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{x,y}$$

em que $u = \{x, y\}$.

EXEMPLO 2: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento postecipado).

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00107

EXEMPLO 2: Considerando uma taxa de juros de 4% ao ano, calcule o V.P.A. de uma anuidade temporária por 3 anos considerando um status vida conjunta de uma pessoa de 30 anos de idade e outra de 28 anos de idade (pagamento postecipado).

Idade	q_x
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00107

$$a_{u:\overline{3}|} = vP(T_{30,28} > 1) + v^2P(T_{30,28} > 2) + v^3P(T_{30,28} > 3)$$

$$a_{u:\overline{3}|} = vp_{30:28} + v^2\ {}_2p_{30:28} + v^3\ {}_3p_{30:28}$$

$$a_{u:\overline{3}|} = \sum_{t=1}^{3} v^t\ {}_tp_{30:28} \approx 2{,}713$$

em que $u = \{30{,}28\}$.

Status vida conjunta (Anuidades)

- *n* vidas

$$\ddot{a}_{x_1,x_2,\dots,x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \, {}_t p_{x_1,x_2,\dots,x_n} \, q_{x_1+t,x_2+t,\dots,x_n+t}$$

$$\ddot{a}_{x_1,x_2,\dots,x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_{x_1,x_2,\dots,x_n}$$

Status vida conjunta (Anuidades)

- *n* vidas

$$\ddot{a}_{x_1,x_2,\ldots,x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \, {}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_n} \, q_{x_1+t,x_2+t,\ldots,x_n+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$$

$${}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_n} = P\left(T_{x_1} > t \text{ e } T_{x_1} > t \text{ e } \ldots \text{e } T_{x_1} > t\right)$$

$${}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_n} = {}_t p_{x_1} \, {}_t p_{x_2} \cdots {}_t p_{x_n}$$

$${}_t q_{x_1,x_2,\ldots,x_n} = 1 - {}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$$

Status vida conjunta (Anuidades)

- **Para *n*=3 vidas**

$$\boldsymbol{{}_tp_{x_1,x_2,x_3} = {}_tp_{x_1}\, {}_tp_{x_2}\, {}_tp_{x_3}}$$

$${}_tq_{x_1,x_2,x_3} = 1 - {}_tp_{x_1}\, {}_tp_{x_2}\, {}_tp_{x_3}$$

$${}_tq_{x_1,x_2,x_3} = 1 - (1 - {}_tq_{x_1})(1 - {}_tq_{x_2})(1 - {}_tq_{x_3})$$

$${}_tq_{x_1,x_2,x_3} = 1 - (1 - {}_tq_{x_1} - {}_tq_{x_2} - {}_tq_{x_3} + {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_2} + {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_3} + {}_tq_{x_2}\, {}_tq_{x_3} - {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_2}\, {}_tq_{x_3})$$

$$\boldsymbol{{}_tq_{x_1,x_2,x_3} = {}_tq_{x_1} + {}_tq_{x_2} + {}_tq_{x_3} - {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_2} - {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_3} - {}_tq_{x_2}\, {}_tq_{x_3} + {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_2}\, {}_tq_{x_3}}$$

Status vida conjunta (Anuidades)

$$\ddot{a}_{x_1,x_2,x_3} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1 - v^{t+1}}{1 - v}\ {}_t p_{x_1,x_2,x_3}\ q_{x_1+t,x_2+t,x_3+t} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_t p_{x_1,x_2,x_3}$$

$$a_{x_1,x_2,x_3} = \sum_{t=1}^{\infty} v \frac{1 - v^{t}}{1 - v}\ {}_t p_{x_1,x_2,x_3}\ q_{x_1+t,x_2+t,x_3+t} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_t p_{x_1,x_2,x_3}$$

$$A_{x_1,x_2,x_3} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ {}_t p_{x_1,x_2,x_3}\ q_{x_1+t,x_2+t,x_3+t}$$

EXEMPLO 3: Considerando uma taxa de juros de 3% ao ano e a tabua AT-49 calcule o que se pede: (entregar)

a) $\ddot{a}_{41,39,40:\overline{4}|}$

b) $a_{41,39,40:\overline{3}|}$

c) $A_{41,39,40:\overline{3}|}$

Status vida conjunta (Produtos diferidos)

- Plano vitalício diferido por m anos, com pagamento antecipado

$$_{m|}\ddot{a}_{x,y} = \left(v^m\ {}_m p_{x,y}\right)\ddot{a}_{x+m,y+m}$$

- Plano temporário por n anos, diferido por m anos, com pagamento antecipado

$$_{m|}\ddot{a}_{u:\bar{n}|} = \left(v^m\ {}_m p_{x,y}\right)\ddot{a}_{w:\overline{n}|}$$

- Plano vitalício diferido por m anos, com pagamento postecipado

$$_{m|}a_{x,y} = \left(v^m\ {}_m p_{x,y}\right)a_{x+m,y+m}$$

- Plano temporário por n anos, diferido por m anos, com pagamento postecipado

$$_{m|}a_{u:\bar{n}|} = \left(v^m\ {}_m p_{x,y}\right)a_{w:\overline{n}|}$$

*Considerando um benefício unitário, $T_{x,y} = min\{T_x, T_y\}$, $u = \{x, y\}$ e $w = \{x + m, y + m\}$

Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

Não se faz distinção entre fluxo de caixa *antecipado* ou *postecipado*.

Dado o tempo de vida adicional de um status vida conjunta, T_u, em que $u = \{x, y\}$, o plano vitalício e o plano temporário com cobertura de n anos, tem o prêmios calculados respectivamente por:

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_u dt = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} f_{T_u}(t) dt$$

$$\bar{a}_{u:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_u dt$$

Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

$$\bar{a}_{x,y} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_{x,y}dt = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta} f_{T_{x,y}}(t)dt$$

$$\bar{a}_{x,y} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_{x,y}dt = \int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta}\ {}_tp_{x,y}\mu(x+t,y+t)dt$$

$${}_tp_{x,y} = {}_tp_x\ {}_tp_y$$

$$\mu(x+t,y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

Status vida conjunta (Anuidades-tempo contínuo)

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} f_{T_{x,y,z}}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,y,z} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta}\ {}_t p_{x,y,z} \mu(x+t, y+t, z+t) dt$$

$${}_t p_{x,y,z} = {}_t p_x\ {}_t p_y\ {}_t p_z$$

$$\mu(x+t, y+t, z+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \mu(z+t)$$

EXEMPLO 3: Considere um status vida conjunta composto por x, y e z, tal que $T_x \sim Exp(0{,}022), T_y \sim Exp(0{,}025)$ e $T_z \sim Exp(0{,}05)$. Calcule $\bar{a}_{x,y,z}$ usando uma taxa de juros instantânea de 3% ao ano.

EXEMPLO 3: Considere um status vida conjunta composto por x, y e z, tal que $T_x \sim Exp(0{,}022), T_y \sim Exp(0{,}025)$ e $T_z \sim Exp(0{,}05)$. Calcule $\bar{a}_{x,y,z}$ usando uma taxa de juros instantânea de 3% ao ano.

$$ {}_t p_{x,y,z} = {}_t p_x \, {}_t p_y \, {}_t p_z = e^{-t(0{,}022+0{,}025+0{,}05)} = e^{-t0{,}097} $$

$$ \mu(x+t, y+t, z+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) + \mu(z+t) = 0{,}022 + 0{,}025 + 0{,}05 = 0{,}097 $$

$$ \bar{a}_{x,y,z} = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, {}_t p_{x,y,z} dt = \int_0^\infty e^{-0{,}03t} e^{-t0{,}097} dt $$

$$ \bar{a}_{x,y,z} = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \, {}_t p_{x,y,z} \mu(x+t, y+t, z+t) dt = \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-0{,}03t}\right)}{0{,}03} e^{-t0{,}097} 0{,}097 \, dt $$

Status vida conjunta (Produtos diferidos)

- Anuidades diferidas vitalícias

$$_{m|}\bar{a}_{x,y} = \left(v^m \,_m p_{x,y}\right)\bar{a}_{x+k,y+k}$$

- Anuidades diferidas temporárias

$$_{m|}\bar{a}_{u:\bar{n}|} = \left(v^m \,_m p_{x,y}\right)\bar{a}_{w:\bar{n}|}$$

em que $u = \{x, y\}, w = \{x + m, y + m\}, m$ igual ao período de diferimento e n igual ao período de cobertura.

Status vida conjunta (Relações importantes)

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t}p_{x,y})\left(q_{x+t,y+t}\right)$$

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t}p_{x,y})\left(1 - p_{x+t,y+t}\right) = \sum_{t=0}^{\infty}[v^{t+1}\ ({}_{t}p_{x,y}) - v^{t+1}p_{x+t,y+t}]$$

$$A_{x,y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t}p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t+1}p_{x,y})$$

$$A_{x,y} = v\sum_{t=0}^{\infty} v^{t}\ ({}_{t}p_{x,y}) - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t+1}p_{x,y})$$

...

Status vida conjunta (Relações importantes)

…

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t+1}p_{x,y}) = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=1}^{\infty} v^{t}\ ({}_{t}p_{x,y})$$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ ({}_{t+1}p_{x,y}) = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

$$\boldsymbol{A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}}$$

Como $a_{x,y} = \ddot{a}_{x,y} - 1$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - (\ddot{a}_{x,y} - 1)$$

Status vida conjunta (Relações importantes)

...

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - (\ddot{a}_{x,y} - 1)$$

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - \ddot{a}_{x,y} + 1$$

$$\boldsymbol{A_{x,y} = \ddot{a}_{x,y}(v - 1) + 1}$$

Status vida conjunta (Relações importantes)

Verifique com exemplos que:

$$A_{x,y} = v\ddot{a}_{x,y} - a_{x,y}$$

$$A_{x,y} = \ddot{a}_{x,y}(v - 1) + 1$$

Entregar!!!

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.