Teoria do Risco
Aula 13

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Teoria da utilidade

"... a determinação do valor de um item não pode ser baseado no seu preço, mas sim na utilidade que ele fornece. O preço de um item depende somente do próprio item e é igual para todo mundo; a utilidade, contudo depende das circunstâncias particulares do indivíduo que faz a estimativa." (Bernoulli,1738)

RAMOS, Pedro Alexandre Fernandes Lima. **Princípios de cálculo de prémios e de medidas de risco em modelos atuariais**. 2014. Tese de Doutorado.

Teoria da utilidade

Teoria da utilidade lida com a medida de satisfação relativa.

...um valor subjetivo atribuído a um evento, de forma que sua unidade seja uma grandeza com dimensão ordinal.

EXEMPLO: Se atribuir valor 1 ao bem “lápis” e valor 2 ao bem “caneta”, saberemos que o agente econômica que tem aquela função utilidade prefere caneta a lápis.

Função utilidade

No que diz respeito a analise de riscos os fundamentos da teoria da utilidade dão um norte a tentativa de responder questões relacionadas ao problema de precificação do seguro.

...Fundamentos psicológicos da demanda e oferta de seguros de danos...

Uma função que mede o valor (utilidade) que um indivíduo atribui a quantidade $\boldsymbol{x}$ (monetária).

- Expressa em "bem-estar" um montante $\boldsymbol{x}$ de riqueza.

Função utilidade

Seja X o conjunto de todas as alternativas disponíveis ao agente econômico uma função $\mu : X \to \mathbb{R}$ é uma função utilidade se atribuir a cada elemento de X um valor numérico.

Sendo assim a satisfação que um consumidor (agente de decisão) atribui a um bem de serviço é medida por uma função, $\mu(x)$, que faz uma ordenação dos benefícios ...

Função utilidade

Existem diversas famílias de funções de utilidades com diferentes propriedades

Utilidade linear: $\mu(x) = x$

Utilidade quadrática: $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, \quad x \leq \alpha$

Utilidade logarítmica: $\mu(x) = ln(\alpha + x)\,, \; x > -\alpha$

Utilidade exponencial: $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0$

Utilidade potencial fracionária: $\mu(x) = x^c, \quad x > 0, 0 < c \leq 1$

Função utilidade-Aversão ao risco

A perda devida a um “mau” resultado não é “compensada” pelo ganho advindo de um “bom” resultado de mesma magnitude (Agente conservador).

$\mu'(x) > 0$ A utilidade positiva indica que a satisfação aumenta com a riqueza (positiva).

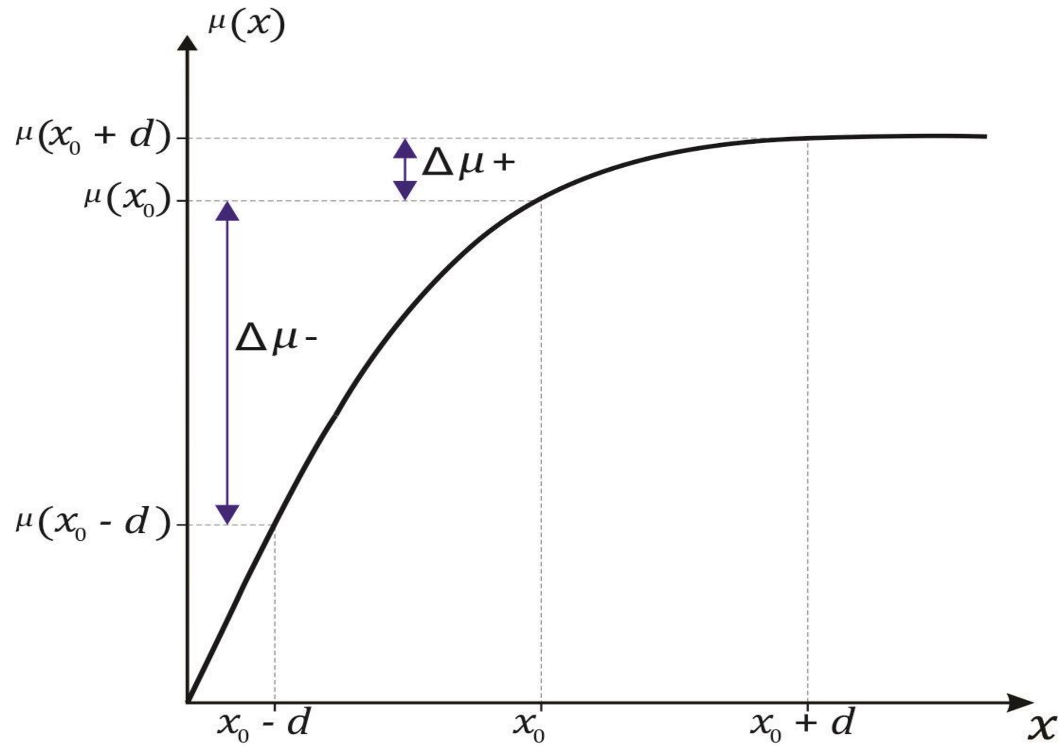
$\mu''(x) \leq 0$ Indica a aproximação de ponto de saturação do indivíduo (côncava).

Função utilidade-Aversão ao risco

A perda devida a um “mau” resultado não é “compensada” pelo ganho advindo de um “bom” resultado de mesma magnitude.

$$\mu'(x) > 0$$

$$\mu''(x) < 0$$



Grau de aversão ao risco

O grau de aversão ao risco ou coeficiente de aversão ao risco, $r(x)$, pode ser definido por:

$$r(x) = -\frac{\mu''(x)}{\mu'(x)}$$

Quanto maior for esse coeficiente, maior será aversão ao risco.

EXEMPLO 1: Considere as seguintes funções de utilidade

1) $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$

2) $\mu(x) = ln(\alpha + x),\ x > -\alpha$

3) $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$

Obtenha o grau de aversão para cada uma dessas funções.

1) $\mu(x) = -(\alpha - x)^2, x \leq \alpha$

$$\mu'(x) = 2(\alpha - x) \qquad \mu''(x) = -2$$

$$r(x) = -\frac{-2}{2(\alpha - x)} = \frac{1}{\alpha - x}$$

2) $\mu(x) = ln(\alpha + x)\,,\; x > -\alpha$

$$\mu'(x) = \frac{1}{(\alpha+x)} \qquad \mu''^{(x)} = -\frac{1}{(\alpha+x)^2}$$

$$r(x) = -\frac{-\frac{1}{(\alpha+x)^2}}{\frac{1}{(\alpha+x)}} = \frac{1}{\alpha + x}$$

3) $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \alpha > 0$

$$\mu'^{(x)} = \alpha^2 e^{-\alpha x} \qquad \mu''(x) = -\alpha^3 e^{-\alpha x}$$

$$r(x) = -\frac{-\alpha^3 e^{-\alpha x}}{\alpha^2 e^{-\alpha x}} = \alpha$$

Seguro e utilidade

Seja $\mu(x)$ como uma função utilidade associada a variável aleatória X, dessa forma a utilidade esperada para X é dada por:

$$E[\mu(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i) P(X = x_i)\,, \text{para } x \text{ discreta.} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) f(x) dx\,, \qquad \text{para } x \text{ contínua.} \end{cases}$$

Seguro e utilidade

Seja $\mu(x)$ a função utilidade que **o segurado** associa a cada excedente x.

$\boldsymbol{X}$ representa a variável aleatória associada ao risco (severidade).

$\boldsymbol{W}$ a riqueza inicial do segurado.

$\boldsymbol{G}$ o prêmio aceito como bom pelo segurado devido a sua utilidade.

$$\mu(W-G)=E[\mu(W-X)]$$

O valor de prêmio que o segurado está disposto a pagar, terá que ser inferior ou igual a utilidade esperada considerando as “perdas” que X pode assumir.

EXEMPLO 2: Seja um segurado com uma função utilidade potencial fracionária:

$$\mu(x) = \sqrt{x}, \qquad x > 0.$$

Considerando que sinistralidade obedece a função uma distribuição Uniforme, $X \sim U_c(0{,}10)$. Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a sua utilidade esperada, dado a riqueza inicial do segurado de $10{,}00\, u.m$.

SOLUÇÃO

Usando $\mu(W-G)=E[\mu(W-X\,)]$,

temos que

$$\mu(10-G)=E[\mu(10-X)],$$

$$\sqrt{10-G}=E\left(\sqrt{10-X}\right),$$

$$\sqrt{10-G}=\int_0^{10}\frac{\left(\sqrt{10-x}\right)}{10}dx,$$

$$10\sqrt{10-G}=\int_0^{10}\left(\sqrt{10-x}\right)dx\,.$$

$u=10-x$ e $du=-dx,$

$$10\sqrt{10-G}=-\int_{x=0}^{x=10}\left(\sqrt{u}\right)du$$

$$10\sqrt{10-G}=-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=10},$$

$$10\sqrt{10-G}=-\frac{2}{3}(10-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=10},$$

$$10\sqrt{10-G}=\frac{2}{3}(10)^{\frac{3}{2}},$$

$$10\sqrt{10-G}=\frac{2}{3}10\sqrt{10},$$

$$10-G=\frac{4}{9}10,$$

$$-G=\frac{4}{9}10-10,$$

$$\boldsymbol{G=5,55.}$$

Seguro e utilidade

Um valor aproximado de G pode ser obtido por

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2} var(X) r\big(\mathrm{W} - \mathrm{E(X)}\big)$$

ou

$$G \approx E(X) - \frac{1}{2} var(X) \frac{\mu''(\mathrm{W} - \mathrm{E(X)})}{\mu'(\mathrm{W} - \mathrm{E(X)})}$$

DEMONSTRAÇÃO

Usando $\mu(W-G)=E[\mu(W-X\ )]$, temos que os dois primeiros termos da série de Taylor em torno de $\big(W-E(X)\big)$ são:

$$\mu(W-G)\approx\mu\big(W-E(X)\big)+\mu'\big(W-E(X)\big)\big(W-G-W+E(X)\big)$$

$$\mu(W-G)\approx\mu\big(W-E(X)\big)+\mu'\big(W-E(X)\big)(E(X)-G)$$

Fazendo o mesmo para $\mu(W-X)$ temos:

$$\begin{aligned}&\mu(W-\mathrm{X})\\&\approx\mu\big(W-E(X)\big)+\mu'\big(W-E(X)\big)\big(W-X-W+E(X)\big)\\&+\frac{1}{2}\mu''\big(W-E(X)\big)\big(W-X-W+E(X)\big)^2\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO

...

$$\mu(W-G) \approx \mu\big(W-E(X)\big) + \mu'\big(W-E(X)\big)\big(E(X)-G\big)$$

...

$$\mu(W-X) \approx \mu\big(W-E(X)\big) + \mu'\big(W-E(X)\big)\big(E(X)-X\big) + \frac{1}{2}\mu''\big(W-E(X)\big)\big(E(X)-X\big)^2$$

Calculando o valor esperado de $\mu(W-X)$, temos :

$$E[\mu(W-X)] \approx \mu\big(W-E(X)\big) + \frac{1}{2}\mu''\big(W-E(X)\big)var(X)$$

Fazendo $\boldsymbol{\mu(W-G) = E[\mu(W-X)]}$, temos:

$$\mu\big(W-E(X)\big) + \mu'\big(W-E(X)\big)\big(E(X)-G\big) = \mu\big(W-E(X)\big) + \frac{1}{2}\mu''\big(W-E(X)\big)var(X)$$

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2}var(X)r\big(W-E(X)\big)$$

EXEMPLO 3: Resolva novamente **o exemplo 2** usando a aproximação para G.

Solução

$$\mu(x) = \sqrt{x}, x > 0 \quad X \sim U_c(0{,}10) \text{ e } W = 10$$

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2} var(X) r\big(\mathrm{W} - \mathrm{E(X)}\big)$$

$$E(X) = \frac{10}{2} = 5; \quad var(X) = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3};$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \frac{d^2\sqrt{x}}{dx^2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$G \approx 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{3}\right)\left(-\frac{1}{4\sqrt{5^3}}\right)\left(2\sqrt{5}\right) \approx 4{,}58$$

SOLUÇÃO

$$G = W - \left(-\frac{2}{30}\left[(\mathrm{W}-10)^{\frac{3}{2}} - W^{\frac{3}{2}}\right]\right)^2$$

$$G = W - \frac{4}{900}\left((\mathrm{W}-10)^{\frac{3}{2}} - W^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

$\text{Para } W = 10 \rightarrow \quad G \approx 5{,}55$

$$G \approx E(X) + \frac{1}{2} var(X) \mathrm{r}(\mathrm{W} - \mathrm{E(X)})$$

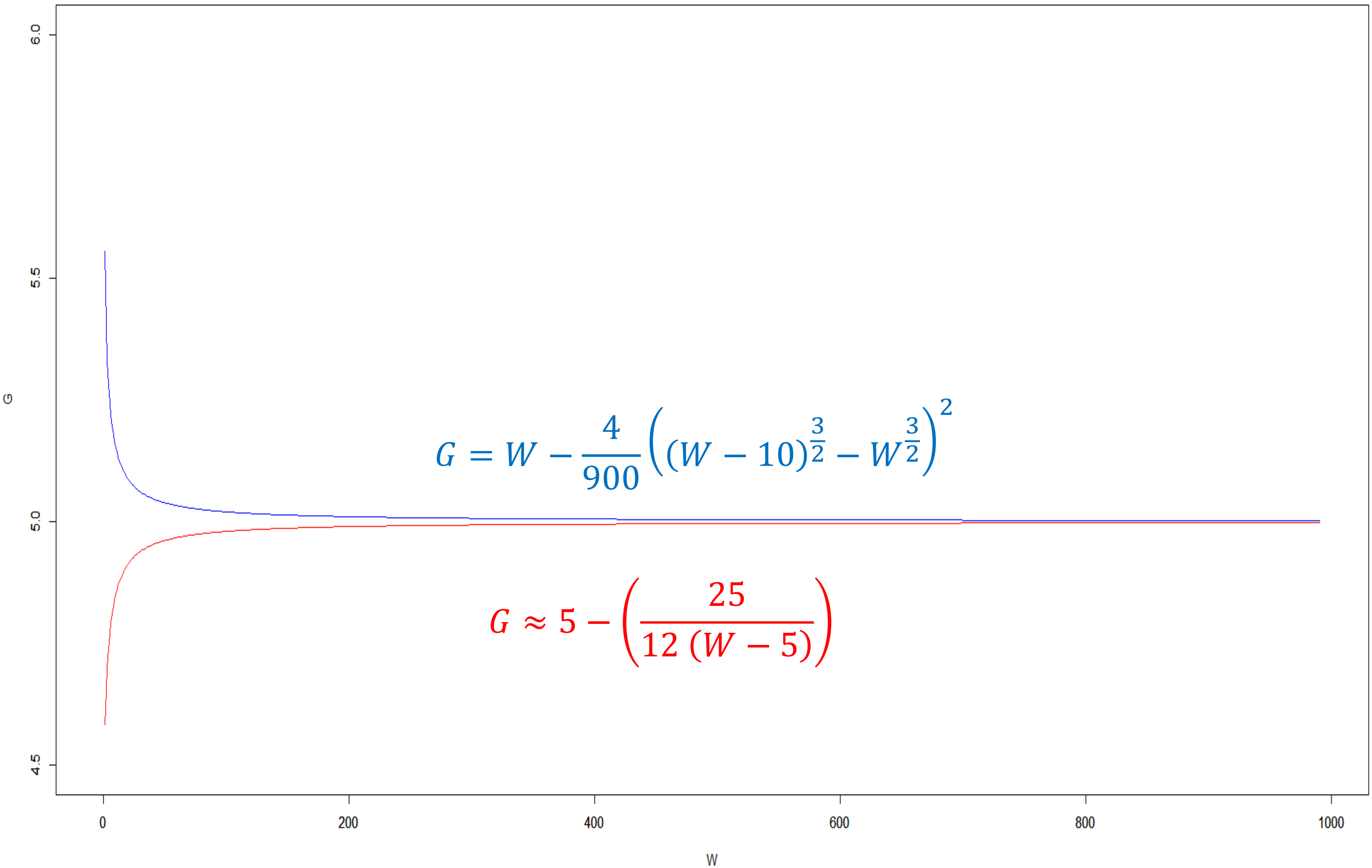
$$E(X) = \frac{10}{2} = 5; \quad var(X) = \frac{10^2}{12} = \frac{25}{3};$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \frac{d^2\sqrt{x}}{dx^2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$G \approx 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{3}\right)\left(-\frac{1}{4\sqrt{(W-5)^3}}\right)\left(2\sqrt{W} - 5\right)$$

$$G \approx 5 - \left(\frac{25}{12\,(W-5)}\right)$$

$\text{Para } W = 10 \rightarrow G \approx 4{,}58$


$G = W - \frac{4}{900}\left((W-10)^{\frac{3}{2}} - W^{\frac{3}{2}}\right)^2$
$G \approx 5 - \left(\frac{25}{12\,(W-5)}\right)$
G
W
4.5
5.0
5.5
6.0
0
200
400
600
800
1000

Seguro e utilidade

Seja $\mu(x)$ a função utilidade associada ao **segurador** e Π, o prêmio proposto devido à sua função utilidade. Logo:

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi - X)]$$

$\mu(W)$:utilidade do montante existente se o segurador não aceitar o seguro W (riqueza inicial).

$E[\mu(W + \Pi - X)]$:utilidade esperada após aceitar assumir o risco do segurado.

EXEMPLO 4: Considere que um **segurador** atribuí utilidade ao seu patrimônio de acordo com:

$$\mu(x) = 0{,}004(1 - e^{-0{,}004x})$$

A severidade do dano segurável é exponencialmente distribuída tal que:

$$f(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}, x > 0$$

Qual deverá ser o prêmio cobrado pelo segurador de forma a não diminuir sua utilidade esperada ao aceitar o risco do segurado?

(W = R$20000,00)

SOLUÇÃO

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi - X)],$$

$$0{,}004(1 - e^{-0{,}004W}) = E\{0{,}004[1 - e^{-0{,}004(W+\Pi-X)}]\},$$

$$0{,}004(1 - e^{-0{,}004W}) = 0{,}004\{1 - E[e^{-0{,}004(W+\Pi-X)}]\},$$

$$e^{-0{,}004W} = E[e^{-0{,}004(W+\Pi-X)}],$$

$$e^{-0{,}004W} = e^{-0{,}004W}e^{-0{,}004\Pi}E(e^{0{,}004X}),$$

$$E(e^{0{,}004X}) = e^{0{,}004\Pi}.$$

SOLUÇÃO

...

Como $X \sim Exp(0{,}02)$, e $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.É possível perceber que $E(e^{0{,}004X}) = M_X(0{,}004)$, logo

$$e^{0{,}004\Pi} = \frac{\lambda}{\lambda - 0{,}004},$$

$$e^{0{,}004\Pi} = \frac{0{,}02}{0{,}02 - 0{,}004} = 1{,}25.$$

Assim

$$\Pi = \frac{ln(1{,}25)}{0{,}004} = R\$55{,}78.$$

Seguro e utilidade

A literatura apresenta que o a situação ideal em que ambas as partes envolvidas no seguro entraram em acordo, será aquela em que :

$$G \geq \Pi \geq E(X)$$

EXEMPLO 5: Considere um segurado com uma função de utilidade linear, tal que: $\mu(x) = 0{,}00005x - 1$. Considere também que a sinistralidade é exponencialmente distribuída, $X \sim Exp(0{,}001)$.

Qual o prêmio G aceito pelo segurado de modo a não diminuir a a sua utilidade esperada, dado que $W = R\$1000{,}00$.

*O usual é a utilização de funções de utilidade que atendam ao perfil de um agente avesso ao risco.

Solução:

Seja $a = 0{,}00005, \; b = -1$ e $W = 10000$, assim:

$$\mu(\mathrm{W} - G) = E[\mu(W - X)]$$

$$aW - aG + b = E[aW - aX + b]$$

$$G = E(X)$$

Logo

$$G = \frac{1}{0{,}001} = R\$\ 1000{,}00$$

EXEMPLO 6: Suponha um investidor com riqueza W, cuja utilidade atribuída ao seu patrimônio seja dada por $\mu(x) = -e^{-0,002x}$, e este investidor está escolhendo entre dois investimentos que levarão a perdas líquidas aleatórias de $\mathrm{X}_1 \sim \mathrm{N}(10^4, 500^2)$ e $\mathrm{X}_2 \sim \mathrm{N}(1.1 \times 10^4, 2000^2)$. Qual destes investimentos tem maior utilidade esperada para o investidor?

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$E\left[-e^{-0{,}002(W-X)}\right] = -E[e^{-0{,}002W+0{,}002X}] = -e^{-W0{,}002}E[e^{0{,}002X}]$$

Investimento 1

$$= -e^{-W0{,}002}e^{0{,}002(10^4)+\frac{500^2(0{,}002^2)}{2}} = -e^{-w0{,}002+20{,}5} = -\frac{e^{20{,}5}}{e^{w0{,}002}}$$

Investimento 2

$$= -e^{-W0{,}002}e^{0{,}002(1.1\times 10^4)+\frac{2000^2(0{,}002^2)}{2}} = -e^{-w0{,}002+30} = -\frac{e^{30}}{e^{w0{,}002}}$$

Investir em 1 garante uma utilidade esperada maior que o 2

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.