

# Aula 16 – Anuidades Contínuas (Diferidas)

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

Leonardo Henrique Costa

[Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

# Anuidades vitalícias contínua Diferidas

$${}_n|\bar{a}_x = \int_n^{\infty} \bar{a}_{\overline{t-n}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_n^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$${}_n|\bar{a}_x = v^n {}_n p_x \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_{x+n} \mu_{x+n+t} dt$$

$${}_n|\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

# Relação matemática importante

Dado que:

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$\delta \bar{a}_{\bar{t}|} + e^{-\delta t} = 1$$

➤ Caso queiramos obter a Esperança Matemática, tem-se:

$$E(1) = E(\delta \bar{a}_{\bar{T}|} + e^{-\delta t})$$

$$1 = E(\delta \bar{a}_{\bar{T}|}) + E(e^{-\delta t})$$

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

# Anuidades Contínuas

## ➤ Exemplo 23

Considerando que a densidade do tempo de vida adicional de uma pessoa de idade  $x$  possa ser modelado por:

$f_{T(x)}(t) = \alpha e^{-\alpha t}$  para  $t > 0$  calcule  $\bar{a}_x$  e  $\bar{A}_x$  e verifique a relação:

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

## Exemplo 23

Lembrando que

$$\bar{a}_{\bar{t}|} = \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta}$$

$$e^{-\delta} = 1 + i$$

$${}_t p_x = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 1, & c.c \end{cases}$$

$$\mu_{x+t} = \frac{\alpha e^{-\alpha(t+x)}}{e^{-\alpha(x+t)}} = \alpha$$

Temos que :

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha}$$

➤ Exemplo 23

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\alpha t} \alpha dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha+\delta)} dt$$

$$\bar{A}_x = \alpha \left[ -\frac{1}{(\delta + \alpha)e^{t(\delta+\alpha)}} \right]_0^{\infty}$$

$$\bar{A}_x = \frac{\alpha}{\delta + \alpha}$$

➤ Exemplo 23

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta + \alpha} \qquad \bar{A}_x = \frac{\alpha}{\delta + \alpha}$$

$$\left( \frac{1}{\delta + \alpha} \right) \delta + \frac{\alpha}{\delta + \alpha} = 1$$

$$\frac{\delta}{\delta + \alpha} + \frac{\alpha}{\delta + \alpha} = 1$$

$$\frac{\delta + \alpha}{\delta + \alpha} = 1$$

$$1 = 1$$

# Relação matemática importante

A Relação entre anuidades e seguros também é satisfeita para o caso temporário.

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|}$$





# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

- Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente  $m$  parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora pagará 1 u.m. caso o segurado esteja vivo.
- Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\bar{m}|} + (\bar{a}_{\bar{T}|} - \bar{a}_{\bar{m}|}), & T > m \end{cases}$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

➤ Os valores possíveis dessa variável aleatória pode ser descrito por:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{m}|} + 0, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\bar{m}|} + (\bar{a}_{\bar{T}|} - \bar{a}_{\bar{m}|}), & T > m \end{cases}$$

- Caso o segurado morra antes do tempo  $m$  a seguradora precisa ter o valor presente necessário a  $m$  pagamentos .
- Caso o segurado morra após  $m$  anos, a seguradora deverá ter o necessário a pagar os  $m$  pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

➤ Em resumo, tem-se:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\bar{T}|}, & T > m \end{cases}$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

➤ O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t) dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_T(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \frac{(1 - e^{-\delta m})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_m^\infty \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

➤ O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t) dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_T(t) dt$$

$$\int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_T(t) dt = \bar{a}_{\overline{m}|} \int_0^m f_T(t) dt = \bar{a}_{\overline{m}|} {}_m q_x$$

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \bar{a}_{\overline{m}|} {}_m q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{(1 - e^{-\delta m})}{\delta} {}_m q_x + \int_m^\infty \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

# Anuidades Contínuas

## ➤ Exemplo 24

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes (ou para qualquer outra pessoa) e, a partir desse ponto, a seguradora pagará 1 u.m. caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adicional modelado por:

$$f_{T(x)}(t) = 0,016e^{-0,016t} \text{ para } t > 0$$

E considere também  $\delta = 0,10$

## ➤ Exemplo 24

Lembrando que  ${}_m q_x = F_{T(x)}(m)$ , temos que:

$${}_m q_x = 1 - e^{-0,016(m)}$$

Assim a partir de

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \frac{(1 - e^{-\delta m})}{\delta} {}_m q_x + \int_m^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Tem-se:

$$\bar{a}_{x,\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + \int_{30}^{\infty} \frac{(1 - e^{-0,1t})}{0,1} 0,016 e^{-0,016t} dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + 0,16 \int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

➤ Exemplo 24

...

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + 0,16 \int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = (9,502)(0,3812) + 0,16 \left[ -\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}} \right]_{30}^{\infty}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = (9,502)(0,3812) + 0,016 \left( \frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}} \right)$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = 9,7675$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$