

Teoria do Risco

Aula 8

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



<https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html>

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

S_{ind}, X_i, B_i, I_i

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 q_i(1 - q_i)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0, \infty)}(x_i)$$

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 - q_i), & \text{se } x_i = 0 \\ q_i f_{B_i}(x), & \text{se } x_i > 0 \end{cases}$$

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int_0^s f_Y(s - x)f_X(x)dx$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int_0^s F_Y(s - x)f_X(x)dx$$

$$P_S(s) = P_X * P_Y(s) = \sum_{\forall x \leq s} P_Y(s - x)P_X(x)$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \sum_{\forall x \leq s} F_Y(s - x)P_X(x)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

Soluções analíticas com fórmulas fechadas para distribuições resultantes da convolução nem sempre são possíveis...

Sempre que necessário podemos buscamos recorrer a métodos de aproximação para o valor total das indenizações.

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

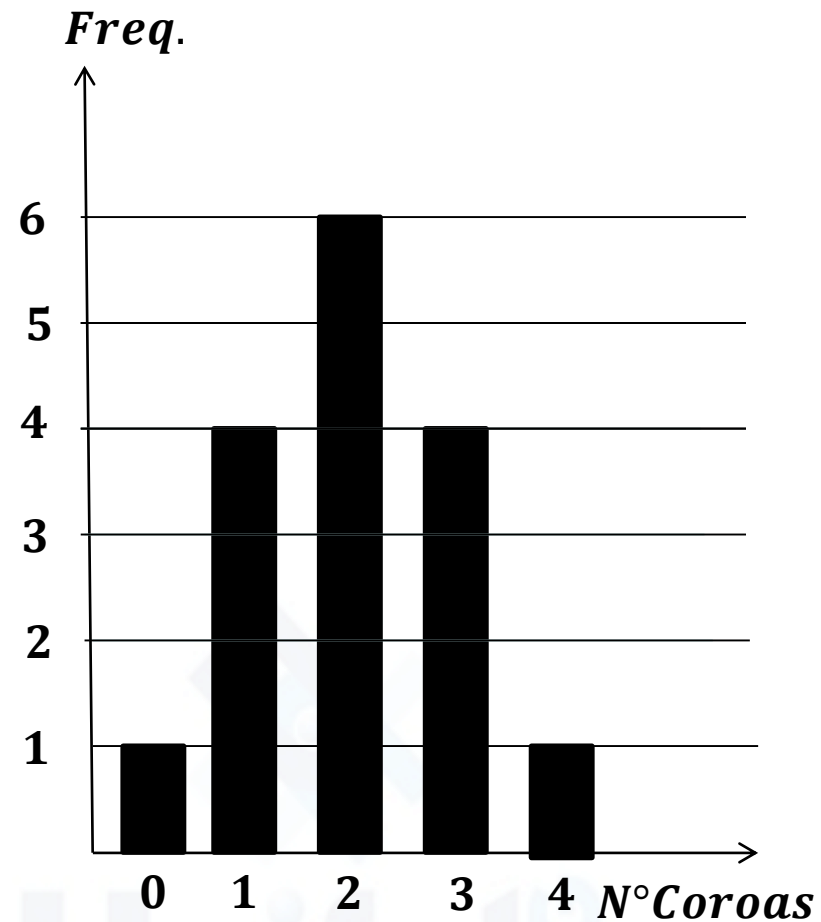
- O teorema central do limite é um poderoso teorema da estatística.

Em teoria das probabilidades, esse teorema afirma que a distribuição da soma amostral aproximasse a distribuição normal a medida que o número de elementos que compõem a soma aumenta, consequentemente o teorema se estende a distribuição das médias amostrais.

EXEMPLO 1: Suponha o lançamento de 4 moedas, representaremos 1 como os casos que aconteceram coroa e 0 os casos que ocorreram cara, assim vamos avaliar todos os possíveis resultados nesse experimento e avaliar a soma de coroas que podem acontecer:

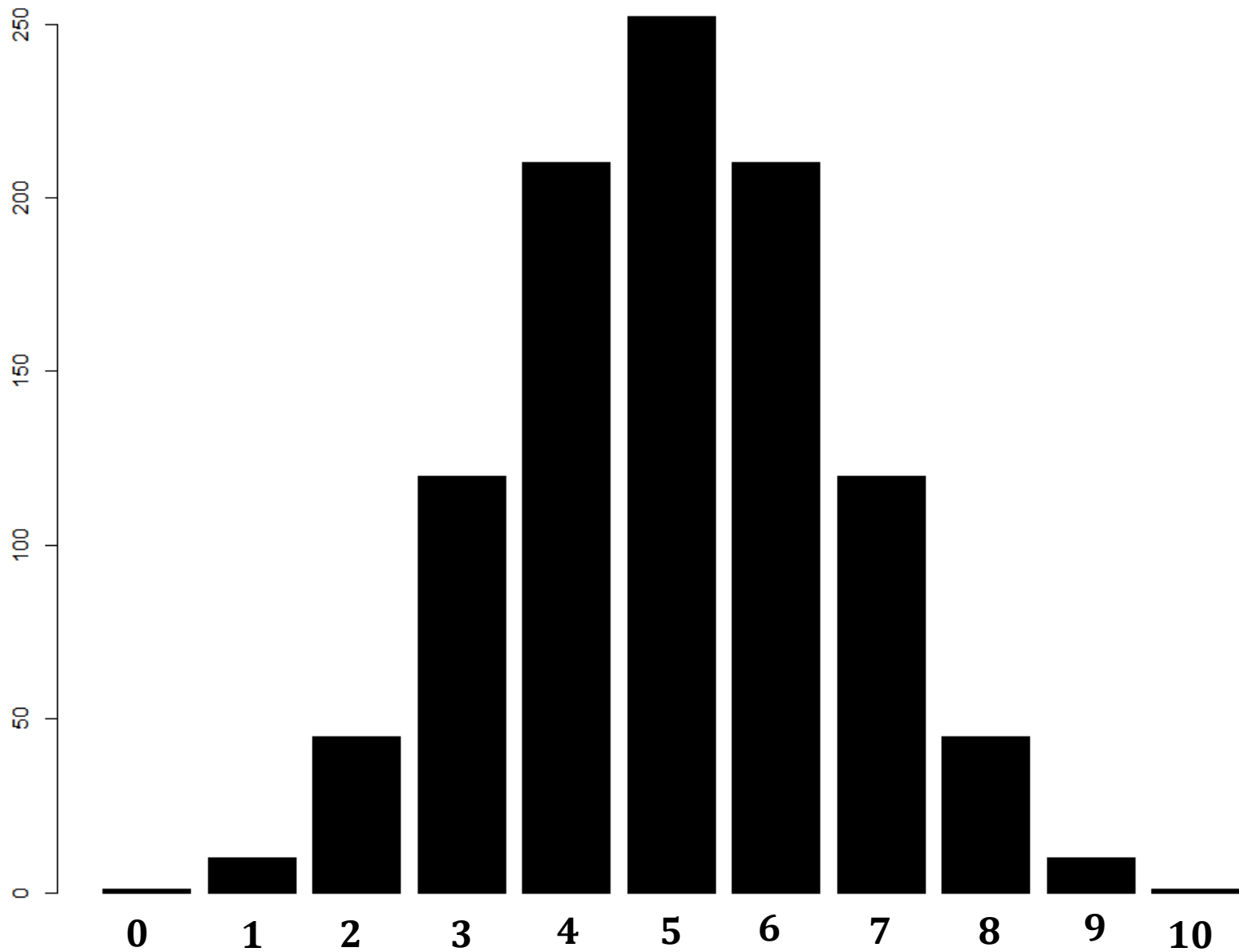


Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	N° de coroas
Cara	Cara	Cara	Cara	0
Coroa	Cara	Cara	Cara	1
Cara	Coroa	Cara	Cara	1
Cara	Cara	Coroa	Cara	1
Cara	Cara	Cara	Coroa	1
Coroa	Coroa	Cara	Cara	2
Coroa	Cara	Coroa	Cara	2
Coroa	Cara	Cara	Coroa	2
Cara	Coroa	Cara	Coroa	2
Cara	Cara	Coroa	Coroa	2
Cara	Coroa	Coroa	Cara	2
Cara	Coroa	Coroa	Coroa	3
Coroa	Cara	Coroa	Coroa	3
Coroa	Coroa	Cara	Coroa	3
Coroa	Coroa	Coroa	Cara	3
Coroa	Coroa	Coroa	Coroa	4



10 moedas

Freq.



N°Coroas

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

➤ Definição:

Seja S_n uma variável aleatória correspondente a uma soma de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança μ e variância σ^2 . Então, se n tende ao infinito, temos:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$Z_n \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Logo

$$E(S_n) = n\mu \quad \text{var}(S_n) = \sigma^2 n$$

$$S_n \sim N(n\mu, \sigma^2 n)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

Então o Teorema central do limite sugere uma metodologia aproximada para a obtenção de valores para distribuição da soma de variáveis independentes, consequentemente também para a distribuição da média de variáveis aleatórias.

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

...se aplica bem quando não se conhece a distribuição de S_{ind} , ou sua obtenção é trabalhosa.

Condições do Teorema Central do Limite,

→ X_i independentes e **identicamente distribuídos**,

→ X_i deve ter variância finita.

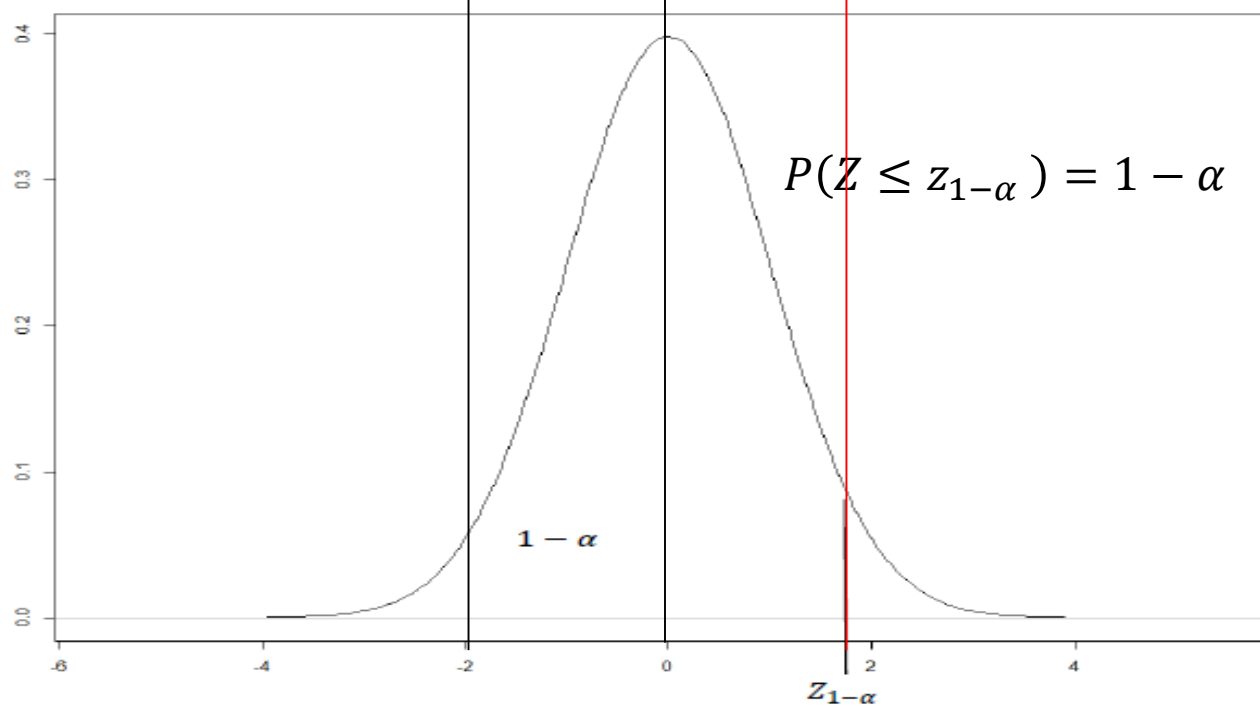
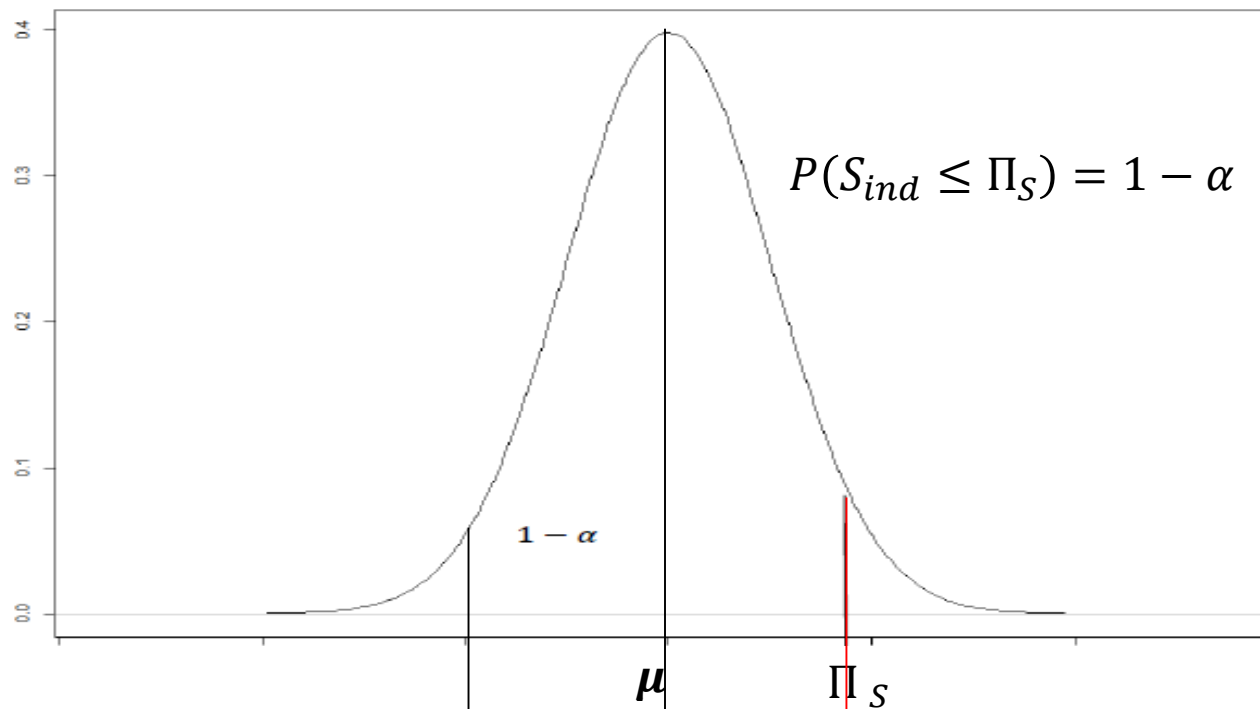
→ O número de sinistros tem que ser grande e não somente o número de apólices (n).

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

Uma interessante aplicação da aproximação de S_{ind} pela distribuição normal é sua utilização para obtenção de um prêmio (Π_S) baseado em uma probabilidade (α) das indenizações superarem esse prêmio.

$$P(S_{ind} \geq \Pi_S) = \alpha$$





Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P(S_{ind} \leq \Pi_S) = 1 - \alpha$$

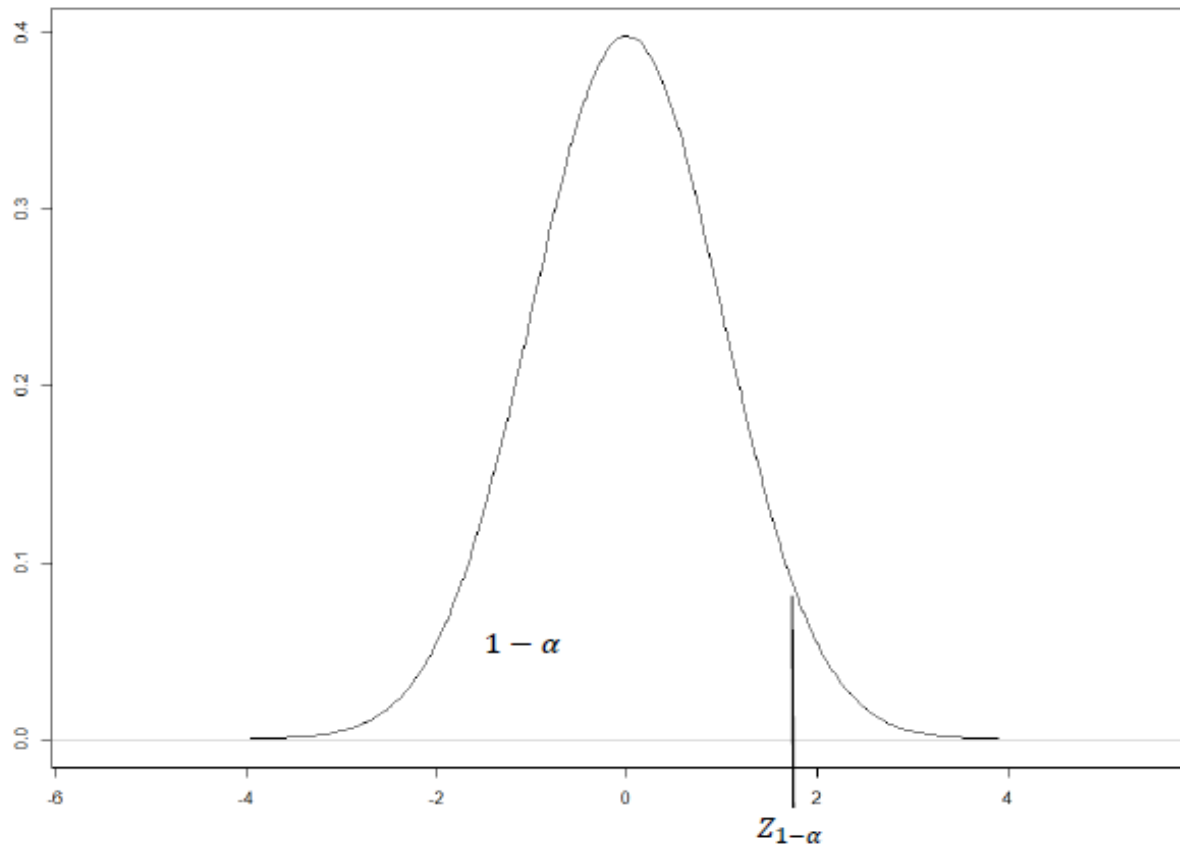
$$P\left(\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} \leq \frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$

Tem-se que $\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} = Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Pois $\sigma_{S_{ind}}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = n\sigma_X^2$, assim $\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{n\sigma_X^2} = \sigma_X \sqrt{n}$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$



Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$\frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = z_{1-\alpha}$$

$$\Pi_S = z_{1-\alpha} \sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind})$$

A partir dessas condições, pode-se calcular o carregamento de segurança (θ) utilizado no princípio do prêmio carregado.

$$\Pi_S = E(S_{ind})(1 + \theta)$$

Modelos de risco Individual-Aproximação de S_{ind} pela distribuição Normal

$$\Pi_S = z_{1-\alpha} \sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind}) \quad (1)$$

$$\Pi_S = E(S_{ind}) + \theta E(S_{ind}) \quad (2)$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

- Quanto menor a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total da carteira, maior terá que ser o carregamento de segurança.
- Quanto maior o desvio padrão do sinistro agregado em relação à média do sinistro, maior será o carregamento de segurança.

EXEMPLO 2: Uma carteira de seguro de vida possui 3 faixas de importâncias seguradas: R\$10 000, R\$30 000 e R\$50 000. O número de apólices em cada faixa é de 200 000, 300 000 e 100 000, respectivamente. Em cada uma dessas 3 faixas a probabilidade de morte em 1 ano é de 0,01 , 0,005 e 0,02 respectivamente.

Calcular o carregamento de segurança e o prêmio puro total anual de modo que a probabilidade de que o sinistro agregado não o exceda seja de 5%, utilizando a aproximação Normal para S_{ind} .

$$S_{ind} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{200000}) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{300000}) + (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{100000})$$

X_i	$P(X_i)$	I_i	$P(I_i)$	B_i	$P(B_i)$
R\$0	0,99	0	0,99		
R\$10000	0,01	1	0,01	R\$10000	1
Y_i	$P(Y_i)$				
R\$0	0,995	0	0,995		
R\$30000	0,005	1	0,005	R\$30000	1
Z_i	$P(Z_i)$				
R\$0	0,98	0	0,98		
R\$50000	0,02	1	0,02	R\$50000	1

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

Lembrando que no caso de seguro de vida, invalidez a indenização B_i é fixa (conhecida antecipadamente a apólice), nesse caso:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i^2 q_i (1 - q_i).$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0,01R\$10000,00 + \sum_{i=1}^{300000} 0,005R\$30000,00 + \sum_{i=1}^{100000} 0,02R\$50000,00$$

$$E(S_{ind}) = R\$165000\ 000,00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0,01 \times 0,99 \times (R\$10000,00)^2 + \sum_{i=1}^{300000} 0,005 \times 0,995 \times (R\$30000,00)^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{100000} 0,02 \times 0,98 \times (R\$50000,00)^2 = R\$^2 6,44125 \times 10^{12}$$

$$\Pi_S = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} z_{0,95} = R\$169\ 174\ 575,64$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})} = \frac{2559297}{165000\ 000} 1,645 = 2,55\%$$

EXEMPLO 3: A probabilidade de ocorrer um sinistro devido a um vendaval em um seguro residencial é de 0,01. Seja uma carteira com 200 apólices e com o valor de cada sinistro ocorrendo de acordo com uma distribuição Exponencial ($\alpha = 0,0001$).

Calcule o carregamento de segurança de modo que a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total, não exceda a 5% utilizando a aproximação Normal para S_{ind} .

$$E(B_i) = \frac{1}{0,0001} = 10000$$

$$var(B_i) = (10000)^2$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} 0,01 \times R\$10000,00 = 200 \times 100 = R\$20000,00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} (10000)^2(0,01) + (10000)^2(0,01)(0,99)$$

$$var(S_{ind}) = R\2398000000$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

$$\theta = \frac{R\$19949,94(1,645)}{R\$20000} = 1,64$$

EXEMPLO 4: Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

$IS(\$)$	10000	15000	20000	30000	100000
Nº de Apólices	55	70	50	20	5

A probabilidade de ocorrer um desmoronamento em uma residência em 1 ano é de 0,01. Os valores dos sinistros seguem uma distribuição Uniforme (0, IS). Calcule o prêmio puro total anual que a seguradora deve cobrar de modo que a probabilidade do sinistro agregado anual superar o prêmio puro total anual não exceda a 5%, considerando uma aproximação Normal para o sinistro agregado;

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

$IS(\$)$	10000	15000	20000	30000	100000
Nº de Apólices	55	70	50	20	5

$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

Logo

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i) ,$$

$$E(S_{ind}) = 0,01 \left(\sum_{i=1}^{55} \frac{10000}{2} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000}{2} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000}{2} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000}{2} + \sum_{i=1}^5 \frac{100000}{2} \right)$$

$$\approx \text{R\$}18500,00$$

$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 var(I_i),$$

$$var(S_{ind}) = 0,01 \left(\sum_{i=1}^{55} \frac{10000^2}{12} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000^2}{12} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000^2}{12} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000^2}{12} + \sum_{i=1}^5 \frac{100000^2}{12} \right) \\ + 0,0099 \left[\sum_{i=1}^{55} \left(\frac{10000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{70} \left(\frac{15000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{50} \left(\frac{20000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{30000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{100000}{2} \right)^2 \right]$$

$$var(S_{ind}) \approx \mathbf{361435417}$$

$$\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{361435417} \approx \mathbf{19011,45}$$

$$S_{ind} = (X_1 + \cdots + X_{55}) + (Y_1 + \cdots + Y_{70}) + (Z_1 + \cdots + Z_{50}) + (U_1 + \cdots + U_{20}) + (V_1 + \cdots + V_5).$$

$$E(S_{ind}) \approx \text{R\$18500,00}$$

$$\text{var}(S_{ind}) \approx 361435417$$

$$\sigma_{S_{ind}} \approx 19011,45$$

Finalmente o prêmio puro é obtido.

$$\Pi = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} Z_{0,95}$$

$$\Pi = \text{R\$18500,00} + \text{R\$19011,45}(1,645) = \text{R\$49773,84}$$

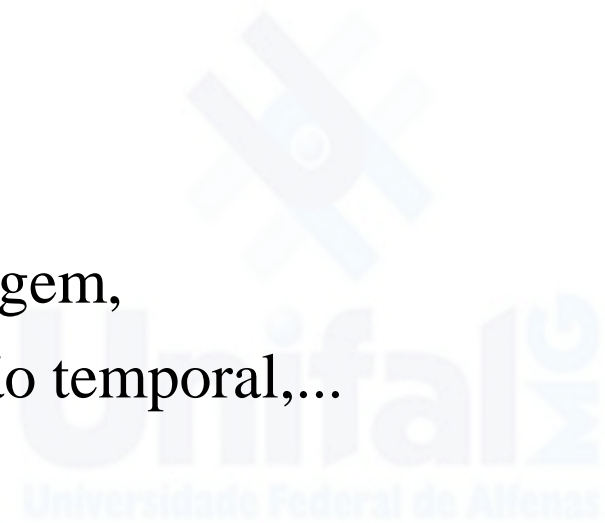
Modelo de Risco Individual

Vantagens

- Precisão,
- Maior controle das variáveis envolvidas,
- Facilidade em “repartir” o prêmio global entre as apólices,

Desvantagem

- Dificuldade no processo de modelagem,
- Não é usual o modelo com evolução temporal,...



- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV, 2020.

