Teoria do Risco
Aula 17

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Modelos de risco Coletivo

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias **indexadas** por elementos t pertencentes a determinado intervalo (temporal ou espacial).

- Intuitivamente, se uma variável aleatória é um número real que varia aleatoriamente, um processo estocástico é uma função que varia aleatoriamente.

Processo estocástico

- Seja γ um conjunto qualquer de indexação então um processo será definido por $\{X_t, t \in \gamma\}$. Assim dados $\gamma = \{L, D, Le, De\}$, $\{X_t, t \in \gamma\} = \{X_L, X_D, X_{Le}, X_{De}\}$.

- N_t pode ser o número de atendimentos em um hospital no intervalo $[0, t]$ $(t \in [0,24])$, ou o número de acidentes no intervalo $[0, S]$ $(s \in [0, km])$ ou N_t pode ser um modelo para o número de impactos de asteroides maiores que certo tamanho desde uma certa data de referência e etc...

Processo de Contagem

Um processo estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ pode ser entendido como um processo de contagem se N_t representa o número de eventos que ocorreram num intervalo de tempo $(0, t]$ e se , para todo $t, s \geq 0$:

- $N_0 = 0$
- $N_t \in \mathbb{N}$
- $N_t \leq N_{t+s}$
- Para $s < t$, $N_t - N_s$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo $(s, t]$.

Processo de Contagem-axiomas

1) Um processo de contagem tem incrementos independentes se os números de eventos durante intervalos disjuntos de tempo são independentes.

N_t (número de eventos ocorridos em t) é independente de $(N_{t+s} - N_t)$ (número de eventos ocorridos no intervalo $(t, t+s]$).

2) A probabilidade de que ocorra algum evento no intervalo $[0, t]$ está entre 0 e 1 nunca assumindo esses valores pois implicaria em certeza absoluta da não ocorrência do evento $P(N_t > 0) = 0$ ou certeza absoluta da ocorrência do evento $P(N_t > 0) = 1$. Assim:

$$\forall, t > 0, \quad 0 < P(N_t > 0) < 1;$$

Processo de Contagem-axiomas

3) A probabilidade de que ocorra mais de um evento em um intervalo s, decresce rapidamente em relação a probabilidade de ocorrer somente um evento nesse mesmo intervalo a medida que s diminui. Tal que:

$$\forall, t > 0 \qquad \lim_{s \to 0} \frac{P(N_{t+s} - N_t > 1)}{P(N_{t+s} - N_t = 1)} = 0;$$

4) $\{\mathrm{N_t}, \mathrm{t} \geq 0\}$ tem incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos não depender do intervalo observado, isto é, o número de eventos no intervalo $(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \mathrm{s}]$, tem a mesma distribuição que o número de eventos no intervalo $(0, \mathrm{t}]$.

$\mathrm{N}_{\mathrm{t}_2+\mathrm{s}} - \mathrm{N}_{\mathrm{t}_1+\mathrm{s}}$ tem a mesma distribuição que $\mathrm{N}_{\mathrm{t}_2} - \mathrm{N}_{\mathrm{t}_1}$

O processo de Poisson

- Na maioria dos casos o processo de ocorrência de sinistros satisfaz às condições do processo de Poisson,

- O processo estocástico de Poisson é um processo de contagem de eventos aleatórios pontuais.

- Também conhecido como processo de "saltos", é um processo onde o próximo evento não depende do histórico acumulado de eventos aleatórios e sim somente de sua última posição atingida.

O processo de Poisson

- É dito que um processo de contagem $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo de intensidade λ, se as seguintes hipóteses estiverem satisfeitas:

a) $N_0 = 0$

b) O processo tem incrementos estacionários e independentes;

c) Se $\forall t, P\left(N_{t,t+s} = 1\right) = \lambda s + o(s)$ $\quad \Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s} = 0$

d) Se $\forall t, P\left(N_{t,t+s} > 1\right) = o(s)$ $\quad \Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s} = 0$

O processo de Poisson

Da condição $c)$ está relacionada a probabilidade de ocorrer um evento no intervalo s decrescer em relação a s a uma taxa constante λ.

$$P(N_{t,t+s} = 1) = \lambda s + o(s)$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{P(N_{t,t+s} = 1)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\lambda s}{s} + \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{P(N_{t,t+s} = 1)}{s} = \lambda$$

O processo de Poisson

Da condição $d)$ estabelece que será nula a probabilidade de ocorrer mais de um evento em um intervalo de tempo s infinitesimal:

$$P\left(N_{t,t+s} > 1\right) = o(s)$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{P\left(N_{t,t+s} > 1\right)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s} = 0$$

A medida que $\mathbf{s}$ se aproxima de $\mathbf{0}$, a probabilidade de ocorrer mais que um evento nesse intervalo decresce rapidamente tendendo a $\mathbf{0}$.

O processo de Poisson

- Em consequência dessas hipóteses, $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson com média λt, para todo $t > 0$

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$E(N_t) = \lambda t = var(N_t), \qquad M_{N_t}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$$

O processo de Poisson (Prova)

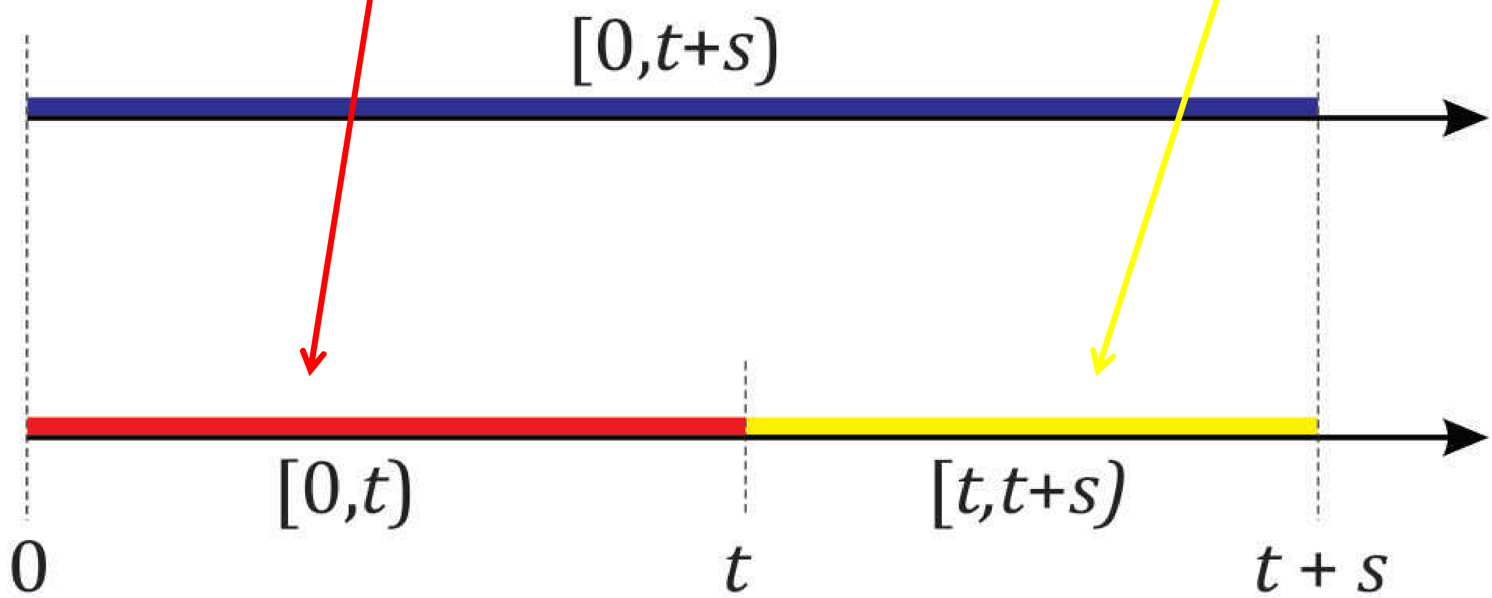
Por conveniência, seja t um valor no tempo após o tempo 0, então o intervalo $(0, t]$ tem amplitude t, e o intervalo $(t, t+s]$ tem amplitude s.

$$P(N_s = n) = P(\boldsymbol{n}\ ocorrências\ em\ um\ intervalo\ de\ tempo\ de\ tamanho\ \boldsymbol{s}).$$

Logo:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(\mathbf{0}\ ocorrências\ no\ intervalo\ de\ tempo\ (0, t+s])$$

$P(N_{t+s} = 0) =$ **P(0 ocorrências no intervalo de tempo $(0, t]$ e 0 ocorrências no intervalo $(t, t+\boldsymbol{s}]$)**



O processo de Poisson (Prova)

Considerando que o processo tem incrementos estacionários e independentes temos que:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0)P(N_s = 0)$$

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0)\{1 - [P(N_s = 1) + P(N_s > 1)]\}$$

Adicionalmente ao se considerara as hipóteses **(c)** e **(d)**, tem-se:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0)\{1 - [\lambda s + o(s) + o(s)]\}$$

Logo:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0) - \lambda s P(N_t = 0) - P(N_t = 0)[o(s) + o(s)]$$

$$P(N_{t+s} = 0\ ) - P(N_t = 0) = -\lambda s P(N_t = 0) - P(N_t = 0)[o(s) + o(s)]$$

O processo de Poisson (Prova)

$$P(N_{t+s} = 0\ ) - P(N_t = 0) = -\lambda s P(N_t = 0) - P(N_t = 0)[o(s) + o(s)]$$

Ao se dividir por s, ambos os lados da equação, chegamos a:

$$\frac{P(N_{t+s} = 0\ ) - P(N_t = 0)}{s} = -\lambda P(N_t = 0) - P(N_t = 0)\,\frac{[o(s) + o(s)]}{s}$$

Quando $s \to 0$

$$\boldsymbol{\frac{dP(N_t = 0)}{dt} = -\lambda P(N_t = 0)}$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

O processo de Poisson (Prova)

$$\frac{dP(N_t = 0)}{P(N_t = 0)} = -\lambda dt$$

$$\int \left(P(N_t = 0)\right)^{-1} dP(N_t = 0) = \int -\lambda dt$$

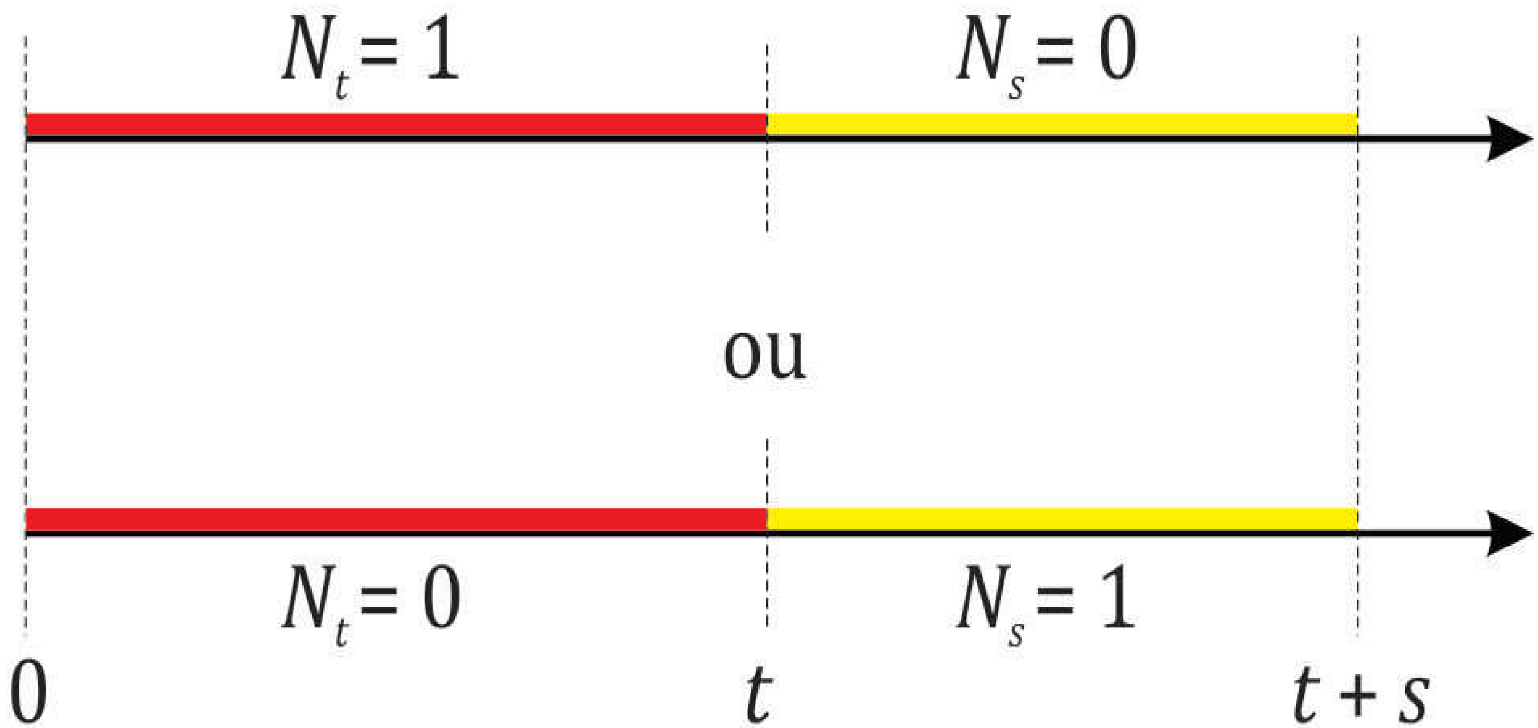
$$ln\, P(N_t = 0) = -\lambda t$$

Logo

$$\boldsymbol{P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}}$$

O processo de Poisson (Prova)

$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1)P(N_s = 0) + P(N_t = 0)P(N_s = 1)$$



$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1)[1 - P(N_s = 1) - P(N_s > 1)] + P(N_t = 0)P(N_s = 1)$$

O processo de Poisson (Prova)

$$P(N_{t+s}=1)=P(N_t=1)[1-P(N_s=1)-P(N_s>1)]+P(N_t=0)P(N_s=1)$$

$$P(N_{t+s}=1)=P(N_t=1)[1-\lambda s-o(s)-o(s)]+P(N_t=0)[\lambda s+o(s)]$$

$$P(N_{t+s}=1)=P(N_t=1)-P(N_t=1)\lambda s-P(N_t=1)[o(s)+o(s)]+P(N_t=0)\lambda s+P(N_t=0)o(s)$$

$$P(N_{t+s}=1)-P(N_t=1)=-P(N_t=1)\lambda s-P(N_t=1)[o(s)+o(s)]+P(N_t=0)\lambda s+P(N_t=0)o(s)$$

Dividindo ambos os lados por s tem-se:

$$\frac{P(N_{t+s}=1)-P(N_t=1)}{s}=-P(N_t=1)\lambda-\frac{P(N_t=1)[o(s)+o(s)]}{s}+P(N_t=0)\lambda+\frac{P(N_t=0)o(s)}{s}$$

Para $s\to 0$

$$\frac{dP(N_t=1)}{dt}=-P(N_t=1)\lambda+P(N_t=0)\lambda$$

O processo de Poisson (Prova)

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} = -P(N_t = 1)\lambda + P(N_t = 0)\lambda$$

Como $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$, temos a seguinte equação diferencial linear, de 1º ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} = -P(N_t = 1)\lambda + \lambda e^{-\lambda t}$$

Fator de integração $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}\frac{dP(N_t = 1)}{dt} + e^{\lambda t}P(N_t = 1)\lambda = e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d\left[P(N_t = 1)e^{\lambda t}\right]}{dt} = e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson (Prova)

$$\frac{d\left[P(N_t = 1)e^{\lambda t}\right]}{dt} = e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\int d\left[P(N_t = 1)e^{\lambda t}\right] = \int \lambda dt$$

$$P(N_t = 1)e^{\lambda t} = \lambda t$$

$$P(N_t = 1) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson (Prova)

$$\frac{dP(N_t = 0)}{dt} = -P(N_t = 0)\lambda \quad \rightarrow \boldsymbol{P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}}$$

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} = -P(N_t = 1)\lambda + P(N_t = 0)\lambda \quad \rightarrow \boldsymbol{P(N_t = 1) = \frac{(\lambda t)^1 e^{-\lambda t}}{1!}}$$

De forma similar para se encontrar n ocorrências no intervalo de tempo t basta resolver a equação diferencial:

$$\frac{dP(N_t = n)}{dt} = -P(N_t = n)\lambda + P(N_t = n-1)\lambda \quad \rightarrow \boldsymbol{P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

$$\boldsymbol{P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

O processo de Poisson

- Em consequência dessas hipóteses, $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson com média λt, para todo $t > 0$

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$E(N_t) = \lambda t = var(N_t), \qquad M_{N_t}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$$

O processo de Poisson

- Exemplo 1

Suponha que a média do número de chamadas telefônicas que uma central telefônica recebe é de 30 chamadas por hora.

a) Qual a probabilidade que não tenha nenhuma chamada em um período de 3 minutos?

b) Qual a probabilidade que ocorra mais que 5 chamadas em um intervalo de 5 minutos?

$$\lambda = \frac{30}{60} = 0{,}5/\, m$$

a)

$$P(N_3 = 0) = \frac{e^{-0{,}5\times 3}(0{,}5 \times 3)^0}{0!} = 0{,}223$$

b)

$$P(N_5 > 5) = 1 - \sum_{n=0}^{5} \frac{e^{-0{,}5\times 5}(0{,}5 \times 5)^n}{n!} = 0{,}42$$