

Matemática atuarial

AULA 20- Prêmios periódicos (Seguros)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>

Prêmios

- O prêmio poderá ser pago de 3 formas:
 - Um único pagamento.
 - Valor esperado da função valor presente.
 - Valor atuarial.
 - Prêmios periódicos de valor constante no tempo (prêmios nivelados).
 - Prêmios periódicos de quantidade variável.
- Princípio básico que governar qualquer seguro é a equivalência.
 - O compromisso da seguradora (gastos com benefícios) deve ser equivalente ao valor das contribuições individuais (pagamento de prêmios).

Prêmio Puro periódico Anual

A ideia básica do princípio da equivalência é que, uma os compromissos da seguradora e o segurado a data 0 , determinamos uma função perda " L ", tal que:

$$L = \text{Compromissos com benefícios} - \text{Compromissos com prêmios}$$

Esperamos que $E(L) = 0$, logo

$$E(\text{Compromissos com benefícios}) = E(\text{Compromissos com prêmios})$$

Exemplo: Seja um seguro de vida vitalício feito por uma pessoa de x anos, então temos que os compromisso (a data 0) do segurado e da seguradora são dados por:

Compromisso com benefício

$$Z_{T_x} = v^{T+1}, T \geq 0$$

Compromisso com prêmio

$$Y = P$$

Logo

$$E(\text{Compromissos com benefícios}) = E(\text{Compromissos com prêmios})$$

$$E(v^{T+1}) = E(P)$$

$$P = A_x$$

P é o valor do prêmio puro único.

Prêmio Puro periódico Anual

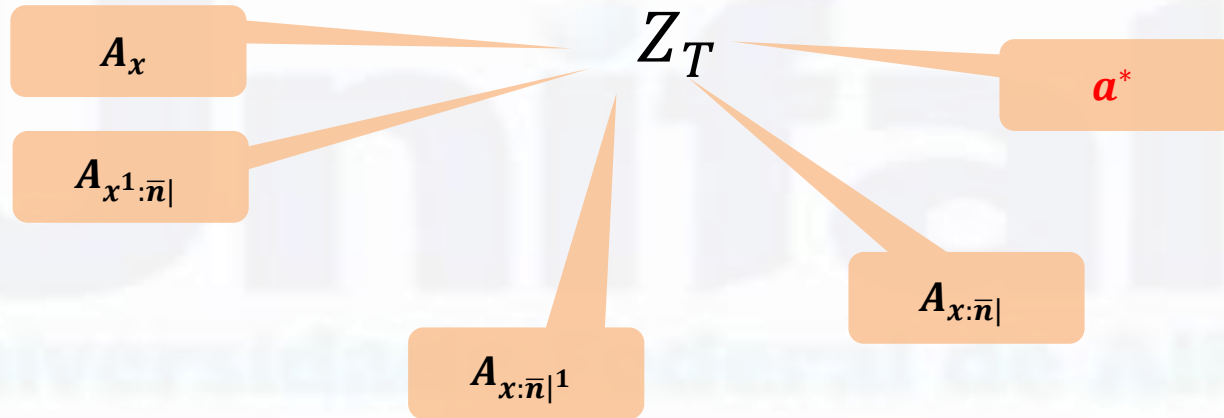
Considere um contrato que estipula que o segurado deverá pagar uma série de prêmios constantes iguais a P (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver. Logo o valor presente do compromisso desse segurado é descrito pela variável aleatória Y , tal que:

$$Y = P + Pv + v^2 + \dots + Pv^k = P(1 + v + v^2 + \dots + v^{k-1} + v^k)$$

$$Y = P \left(\frac{1 - v^{k+1}}{1 - v} \right) = P \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$

Prêmio Puro periódico Anual

Por outro lado o valor presente do benefício que será pago pela seguradora por uma dada modalidade de seguro é representado por Z_T . Então, o compromisso em valor presente do **SEGURADOR** é:



Prêmio Puro periódico Anual

A ideia básica do cálculo do valor de P , está em igualar o compromisso do segurado ao compromisso do segurador, a data 0. Tal que

L = Compromisso do segurador – Compromissos do segurado

$$L = Z_T - Y$$

Princípio da Equivalência, $E(L) = 0$

$$E(L) = 0 = E(Z_T - Y)$$

$$E(Z_T) = E(Y)$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$E(Y) = E(Z_T)$$

$$E(P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = E(Z_{T_x})$$

Dado que $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, $K \geq 0$, então:

$$P\ddot{a}_x = E(Z_{T_x})$$

$$P = \frac{E(Z_{T_x})}{\ddot{a}_x}$$

Prêmio Puro periódico Anual- A_x

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x \text{ e } \ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$P_x = \frac{(1 - v)A_x}{1 - A_x}$$

EXEMPLO 1: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevivência desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1 - v)A_{25}}{1 - A_{25}}$$



EXEMPLO 1: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevivência desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{0,2492899} \quad \ddot{a}_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{25,774389} \quad v \approx 0,9708738$$

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} \approx \mathbf{0,00967}$$

$$P_{25} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}} \approx \mathbf{0,00967}$$

EXEMPLO 1: Caso o segurado queira que o beneficiário receba R\$1000,00 neste seguro de vida inteira, então:

$$1000P_{25} = 1000(0,00967)$$

$$1000P_{25} = R\$ 9,67$$

Prêmio Puro periódico Anual- A_x

pagamentos limitados

No caso dos pagamentos estarem limitados a um período $k < \omega - x$, tem-se:

$${}_kP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Número de
pagamentos

EXEMPLO 2: Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?



Unifal
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 2: Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?

$${}_4P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{4}|}} = \frac{0,24929}{3,82415} \approx 0,06519$$

Prêmio Puro periódico Anual- $A_{x^1:\bar{n}|}$

$$P_{x^1:\bar{k}|} = \frac{A_{x^1:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

EXEMPLO 3: Qual o valor do prêmio puro anual pago durante a vigência de um seguro com cobertura de 5 anos, feito por uma pessoa de 40 anos de idade? Considere a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 3:

$$A_{40:1:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^4 v^{T+1} {}_t p_{40} q_{40+t} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^4 v^t {}_t p_{40} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}$$

$$P_{40:1:\overline{5}|} = \frac{A_{40:1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0,002452$$

Prêmio Puro periódico Anual

A teoria até agora nos levou ao cálculo do Prêmio nivelado a ser pago pelo segurado uma vez escolhido o valor do benefício.

- Pensemos agora na seguinte situação:
- Um segurado procura está disposto a pagar anualmente um dado valor de prêmio, este segurado gostaria então de saber qual o benefício ele poderá contratar por este valor.

Prêmio Puro periódico Anual

Neste caso, conhecemos o valor do Prêmio nivelado, porém, não conhecemos o valor do benefício a ser pago.

...não estamos querendo calcular o prêmio que, em média seja o suficiente para pagamento de sinistros.

...queremos calcular o benefício que em média a seguradora não tenha nem ganho nem perda financeira.

EXEMPLO 4: Um segurado de 40 anos quer comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado se propõe a pagar por 5 anos um prêmio de \$0,003 a contar do dia do contrato. Qual deverá ser o benefício contratado nesse seguro? Use a tábua $AT - 49$ e uma taxa de juros de 3% ao ano.



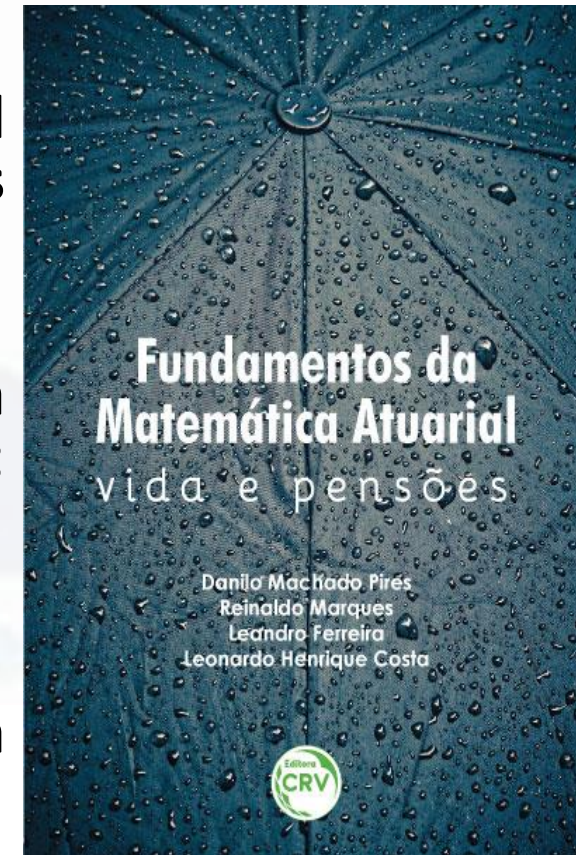
EXEMPLO 4 -Solução

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} bv^{T+1} & \text{se } 0 \leq T < 5 \\ 0 & \text{se } T \geq 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} 0,003 \ddot{a}_{\overline{T_x}|} & \text{se } 0 \leq T < 5 \\ 0,003 \ddot{a}_{\overline{5}|} & \text{se } T \geq 5 \end{cases}$$

Valor de $P_{40:1:\overline{5}|}$ é conhecido. Então:

$$b = \frac{0,003 \ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{A_{40:\overline{5}|}} = \frac{0,003(4,696544)}{0,0115156} \approx 1,22$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



Aula 21

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portahalley>



Seja uma pessoa de 40 anos que queira pagar por um seguro que paga 1 *u.m.* Considerando a tábua de mortalidade AT-49 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação (3%).

- a) Calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado?
- b) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante toda a vigência do seguro?
- c) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante 15 anos?

d) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado?

e) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos com benefício de $R\$50000,00$. Qual o valor da parcela do Prêmio puro único a ser pago pelo segurado, para o caso excepcional, do segurado poder pagar por 10 anos?

f) Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga R\$ 250 mil se o segurado sobreviver durante o período de 3 anos. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago pelo segurado?

Prêmio Puro periódico Anual fracionado

Esses prêmios podem ser pagos de forma fracionadas ao longo do ano.

$$P_x^{(m)} = \frac{E(Z_{T_x})}{m \ddot{a}_{x:\bar{k}|}^{(m)}}$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n) \left(\frac{m-1}{2m} \right)$$

EXEMPLO 1: Uma pessoa de 40 anos decide adquirir um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato, um prêmio fixo mensal. Qual o valor do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando a tábua AT-49 e uma taxa de juros 3% ao ano?



SOLUÇÃO

$$A_{40^{1:\overline{5}|}} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40^{1:\overline{5}|}}^{(12)} \approx \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - (1 - {}_5p_{40}v^5) \left(\frac{12 - 1}{2 \times 12} \right)$$

$$P_{40^{1:\overline{5}|}}^{(12)} = \frac{A_{40^{1:\overline{5}|}}}{12\ddot{a}_{40^{1:\overline{5}|}}^{(12)}} \approx 0,0002$$

Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.

$${}_kP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura

$$P_{x^{1:\overline{n}}|} = \frac{A_{x^{1:\overline{n}}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}|}$$

Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.

$$P_{x:\overline{n}}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$$

Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.

$$P_{x:\overline{n}} = \frac{A_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$$

...

Lista (entregar) Considere AT-49 e $i = 3\%$

- 1) Considere quem uma pessoa de 40 anos contrate um seguro de vida temporário por 5 anos e para isso irá pagar um prêmio puro ao longo de toda a cobertura, qual o valor desse prêmio?
- 2) Considere os dados da questão 1 calcule o quanto é a diferença dos compromisso da seguradora e o compromisso do segurado ano a ano (dado que não ocorreu sinistro).

$$A_{40^{1:\overline{5}|}} - P_{40^{1:\overline{5}|}}(\ddot{a}_{40^{1:\overline{5}|}}) = 0 \rightarrow \text{data 0}$$

$$A_{41^{1:\overline{4}|}} - P_{40^{1:\overline{5}|}}(\ddot{a}_{41^{1:\overline{4}|}}) = ? \rightarrow \text{após 1 ano}$$

$$A_{42^{1:\overline{3}|}} - P_{40^{1:\overline{5}|}}(\ddot{a}_{42^{1:\overline{3}|}}) = ? \rightarrow \text{após 2 anos}$$

$$A_{43^{1:\overline{2}|}} - P_{40^{1:\overline{5}|}}(\ddot{a}_{43^{1:\overline{2}|}}) = ? \rightarrow \text{após 3 anos}$$

$$A_{44^{1:\overline{1}|}} - P_{40^{1:\overline{5}|}}(\ddot{a}_{44^{1:\overline{1}|}}) = ? \rightarrow \text{após 4 anos}$$

Considere os dados da questão 1 calcule o quanto é a diferença dos compromisso da seguradora e o compromisso do segurado ano a ano (dado que não ocorreu sinistro).

$$A_{40^1:\bar{5}|} - P_{40^1:\bar{5}|}(\ddot{a}_{40:\bar{5}|}) = 0 \rightarrow \text{data 0}$$

$$P_{40^1:\bar{5}|} \approx 0,002452$$

$$A_{41^1:\bar{4}|} - P_{40^1:\bar{5}|}(\ddot{a}_{41:\bar{4}|}) \approx 0,000497 \rightarrow \text{após 1 ano}$$

$$A_{42^1:\bar{3}|} - P_{40^1:\bar{5}|}(\ddot{a}_{42:\bar{3}|}) \approx 0,000819 \rightarrow \text{após 2 anos}$$

$$A_{43^1:\bar{2}|} - P_{40^1:\bar{5}|}(\ddot{a}_{43:\bar{2}|}) \approx 0,000891 \rightarrow \text{após 3 anos}$$

$$A_{44^1:\bar{1}|} - P_{40^1:\bar{5}|}(\ddot{a}_{44:\bar{1}|}) \approx 0,000645 \rightarrow \text{após 4 anos}$$

Exemplo 2: Considere quem uma pessoa de 40 anos contrate um seguro de vida vitalício. Qual o valor do prêmio puro pago ao longo de 11 anos? Use a tábua AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

Exemplo 3: Calcule o quanto é a diferença dos compromisso da seguradora e o compromisso do segurado ano a ano (dado que não ocorreu sinistro), considere que passaram-se 10 e 15 anos.

Exemplo 2: Considere quem uma pessoa de 40 anos contrate um seguro de vida vitalício. Qual o valor do prêmio puro pago ao longo de 11 anos? Use a tábua AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

$${}_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0,03974$$

Exemplo 3: Calcule o quanto é a diferença dos compromisso da seguradora e o compromisso do segurado ano a ano (dado que não ocorreu sinistro), considere que passaram-se 10 e 15 anos.

$$A_{50} - {}_{11}P_{40}(\ddot{a}_{50:\overline{1}|}) \approx 0,4953$$

$$A_{55} \approx 0,5350$$

PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_k\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{k} }}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^{1:\overline{n}} } = \frac{\bar{A}_{x^{1:\overline{n}} }}{\bar{a}_{x:\overline{n}} }$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}}^1 = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}}^1}{\bar{a}_{x:\overline{n}} }$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}} }$
...	

EXEMPLO 4: Considere que um indivíduo de idade x , decida fazer um seguro de vida temporário por 10 anos, que pague um benefício unitário no momento da morte do segurado. Dado que o tempo de vida adicional possa ser modelado pela distribuição exponencial, $T_x \sim \text{Exp}(0,02)$, calcule o prêmio $\bar{P}_{x^{1:\overline{10}|}}$ anual, que deverá ser pago pelo segurado. Considere $\delta = 0,06$.

EXEMPLO 4

$$\bar{P}_{x^{1:\overline{10}|}} = \frac{\bar{A}_{x^{1:\overline{10}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{10}|}},$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} \frac{(1-e^{-\delta t})}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{(1-e^{-\delta 10})}{\delta} e^{-\alpha 10}$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{10}|}} = \int_0^{10} e^{-\delta t} \alpha e^{-\alpha t} dt$$

Após resolver as integrais acima e substituir $\delta = 0,06$ e $\alpha = 0,02$.

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} \approx 6,8834$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{10}|}} \approx 0,13766$$

$$\bar{P}_{x^{1:\overline{10}|}} \approx \frac{0,13766}{6,8834} \approx 0,01999$$

Relações importantes

$$\bar{P}_x = \frac{i}{\delta} P_x$$

$$\bar{P}_{x^{1:\bar{n}}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^{1:\bar{n}}|}$$

$$\bar{P}_{x:\bar{n}} = \frac{i}{\delta} P_{x^{1:\bar{n}}|} + P_{x:\bar{n}}^1$$

A busca do valor da parcela do prêmio através do princípio da equivalência, estabelece uma paridade entre os gastos do segurado e da seguradora. Contudo ...

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P(Z_{T_x} > Y) = \epsilon$$

Prêmio Puro periódico Anual

Como $L = Z_{T_x} - Y$ para o caso em que trata-se do prêmio relacionado seguros de vida, tem-se:

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P\left(b e^{-\delta T} > \bar{P} \left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \right)\right) = \epsilon$$

$$P\left(\delta b e^{-\delta T} > \bar{P}(1 - e^{-\delta T})\right) = \epsilon$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$P\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} > e^{\delta T}(1 - e^{-\delta T})\right) = \epsilon \qquad P\left(T < \frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta}\right) = \epsilon$$

$$P\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1 > e^{\delta T}\right) = \epsilon$$

$$\frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta} = t_{\epsilon}$$

$$P\left(\ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right) > \delta T\right) = \epsilon$$

$$\bar{P} = \frac{\delta b}{e^{\delta t_{\epsilon}} - 1}$$

$$P\left(\frac{\ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta} > T\right) = \epsilon$$

Prêmios

Anuidades

- Com exceção do seguro diferido, os prêmios de seguro serão pagos durante o período de cobertura do mesmo.
- No caso das anuidades em geral os prêmios são pagos antes do período de sua vigência.

Prêmios Anuidades

A função perda, L , da seguradora que relaciona os compromissos do segurado com os pagamentos dos prêmios e o compromisso da seguradora com os pagamentos de benefícios é dada por:

$$L = Y_b - Y_p$$

$$Y_p = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} & T = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ P\ddot{a}_{\overline{k}|} & T = k, k+1, \dots \end{cases} : \text{compromisso do segurado por } k \text{ anos,}$$

Y_b : compromisso da seguradora (alguma modalidade de anuidade diferida).

$$E(L) = 0$$

$$P(Y_b) = \frac{E(Y_b)}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Prêmios Anuidades

Planos

Prêmio puro

Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P({}_k|\ddot{a}_x) = \frac{k|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia diferida por n anos, com prêmios limitados a k anos. ($k \leq n$)

$$P({}_n|\ddot{a}_x)_k = \frac{n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P({}_k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.

$$P({}_k|\ddot{a}_x^{(m)}) = \frac{k|\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}}$$

...

EXEMPLO 5: Suponha que uma pessoa de 18 anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir **anualmente** por um período de 33 anos para sua aposentadoria vitalícia que será recebida **mensalmente**. Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de \$10000,00 e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 3% ao ano? (considere a Tábua AT-49)

SOLUÇÃO:

$$P = \left[\frac{{}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \times 12}{{}_{18:\overline{33|}}\ddot{a}} \right] 10000$$

$${}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33} \left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{22} \right) \approx 6$$

$${}_{18:\overline{33|}}\ddot{a} \approx 21,0905$$

$$P \approx \frac{6 \times 120000}{21,0905} \approx 34138,59$$

Logo o valor pago anualmente será de **\$34138,59**

EXEMPLO 6: Suponha que uma pessoa de 18 anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir **mensalmente** por um período de 33 anos para sua aposentadoria (que também será mensal e vitalícia). Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de \$10000,00 e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 3% ao ano? (considere a Tábua AT-49)

SOLUÇÃO:

$$P \left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \right) = \frac{{}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$${}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18}v^{33} \left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{22} \right) \approx 6$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - (1 - {}_{33}p_{18}v^{33}) \left(\frac{11}{22} \right) \approx 20,76$$

$$P \left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \right) \approx \frac{6}{20,76} \approx 0,288$$

Logo o valor pago mensalmente será de **\$2880**

EXEMPLO 7: Uma pessoa de 20 anos de idade, decide comprar uma anuidade vitalícia que pague um benefício igual a 1, caso chegue vivo à idade de 60 anos. Qual o valor do prêmio puro pago por essa pessoa para adquirir esse plano? Considere a tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

SOLUÇÃO:

*Não faz sentido adquirir rendas vitalícias imediatas a prêmios periódicos, todavia, é justificável adquirir rendas vitalícias diferidas. Assim:

EXEMPLO 7

$$P({}_{40|}\ddot{a}_{20}) = \frac{{}_{40|}\ddot{a}_{20}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{v^{40} {}_{40}p_{20} \ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}}}{\frac{(N_{20}-N_{60})}{D_{20}}} = \frac{N_{60}}{(N_{20}-N_{60})}$$

$$P({}_{40|}\ddot{a}_{20}) \approx 0,157468$$

Caso o segurado tenha interesse de receber \$25000,00 ao ano, então:

$$25000P({}_{40|}\ddot{a}_{20}) \approx 25000(0,157468) \approx 3936,711$$

Lista (entregar)

1) Considere uma pessoa de idade 30 que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga R\$1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição Uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja, $T \sim U(0, 70)$. Suponha que $i = 5\% a.a.$

Calcule o prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

2) Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de $P = 0,157468$.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do benefício contratado pelo segurado?

3) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga R\$ 1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(\alpha)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

4) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que paga R\$ 1,00 no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(0,02)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado, considere $\delta = 0,06$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

