

Matemática atuarial

Introdução

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Matemática atuarial é um ramo da **matemática** que lida com avaliação de riscos de prêmios e reservas em relação às operações de seguros...no ramo vida.

Revisão de probabilidade

- Fenômeno/ Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Variáveis aleatórias Discretas/Contínuas
- Esperança/Variância de variáveis aleatórias

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Revisão de Juros

- Juros Simples e Composto
- Diferentes taxas de juros
- Valor presente/Valor futuro
- Depósitos em série
- Fluxo de caixa

➤ Seguros de vida

- Tempo Discreto/ Contínuo
- Cobertura vitalícia/ temporária
- Efeito imediato /diferido
- Seguro dotal puro/ misto
- Relações entre seguros

➤ Anuidades (planos de renda)

- Cobertura vitalícia/ temporária
- Fluxos de caixa antecipado/postecipado
- Efeito imediato /diferido
- Fracionadas /Contínuas

➤ **Comutação**

- Funções de comutação
- Prêmio puro único para planos de seguro de vida
- Prêmio puro único para planos baseados na sobrevivência

➤ **Prêmios e Benefícios**

- Prêmio carregado

➤ **Reservas**

- Método retrospectivo
- Método prospectivo

Matemática atuarial ramo vida

➤ Seguros de vida

- Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte (invalidez permanente)
- Refletem uma característica única nos seres humanos.

➤ $A_{x:1:\overline{n}|}$

➤ $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

➤ $\bar{A}_{x:1:\overline{n}|}$

➤ $A_{x:\overline{n}|}$

➤ A_x

➤ $m|A_x$

➤ \bar{A}_x

➤ $m|\bar{A}_x$

➤ $A_{x:\overline{n}|}^1$

➤ $m|A_{x:1:\overline{n}|}$

➤ $m|A_{x:\overline{n}|}^1$

➤ \ddot{a}_x

➤ a_x

➤ $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

➤ $a_{x:\overline{n}|}$

➤ $m|\ddot{a}_x$

➤ $m|a_x$

➤ $m|n\ddot{a}_x$

➤ $m|na_x$

➤ $\ddot{a}_x^{(m)}$

➤ $a_x^{(m)}$

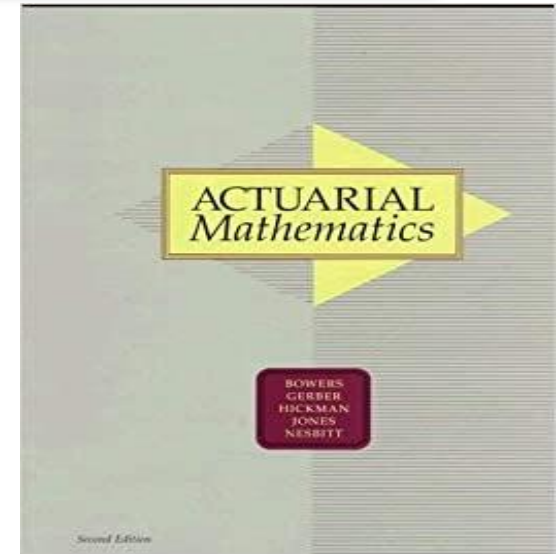
➤ $k|\ddot{a}_x^{(m)}$

➤ $k|a_x^{(m)}$

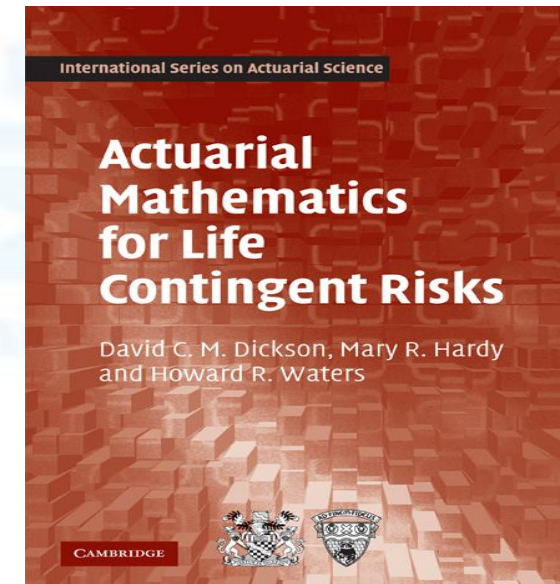
➤ \bar{a}_x

Bibliografia

BOWERS, N. et al. **Actuarial mathematics**. 2. ed.
Illinois: The Society Of Actuaries, 1997



D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters.
Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.
Cambridge University Press, Cambridge, 2013.



CORDEIRO FILHO, Antônio. Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos. São Paulo: Atlas, 2009.

Antonio Cordeiro Filho

CÁLCULO ATUARIAL APLICADO

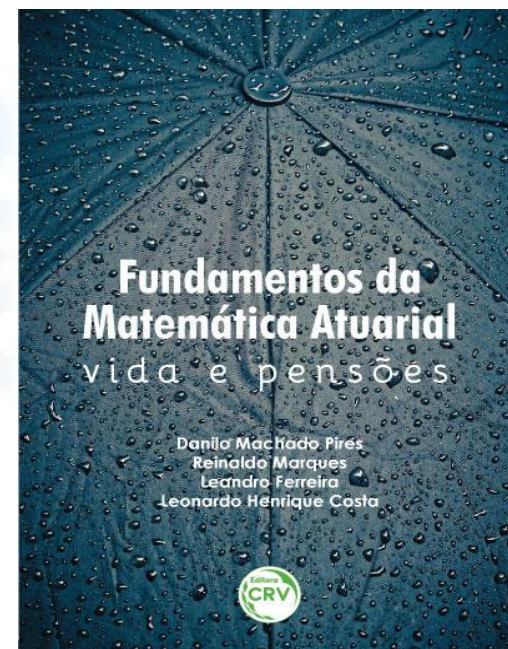


Teoria e Aplicações
Exercícios Resolvidos e Propostos

2ª Edição

atlas

PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões. Curitiba: CRV, 2022.

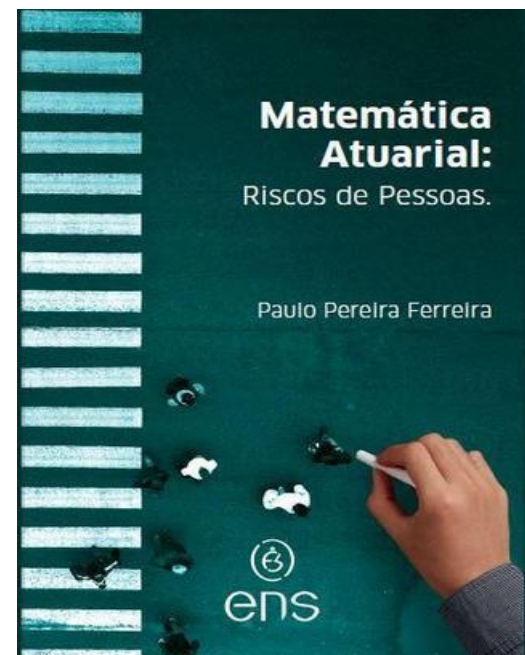


Fundamentos da Matemática Atuarial vida e pensões

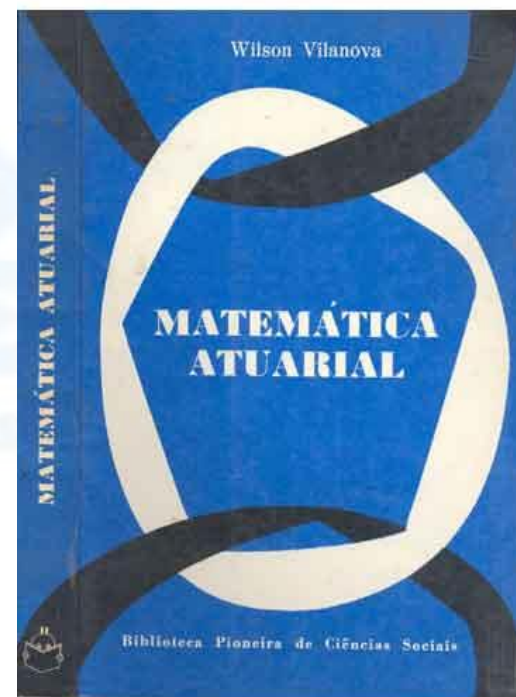
Daniilo Machado Pires
Reinaldo Marques
Leonardo Ferreira
Leonardo Henrique Costa



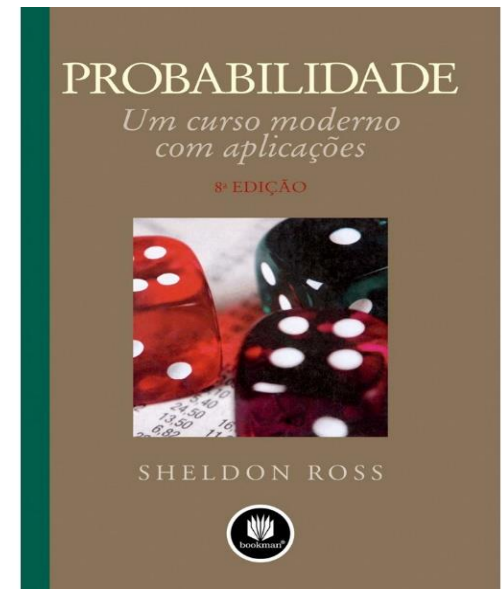
FERREIRA, P. P. Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.
Rio de Janeiro: ENS, 2019



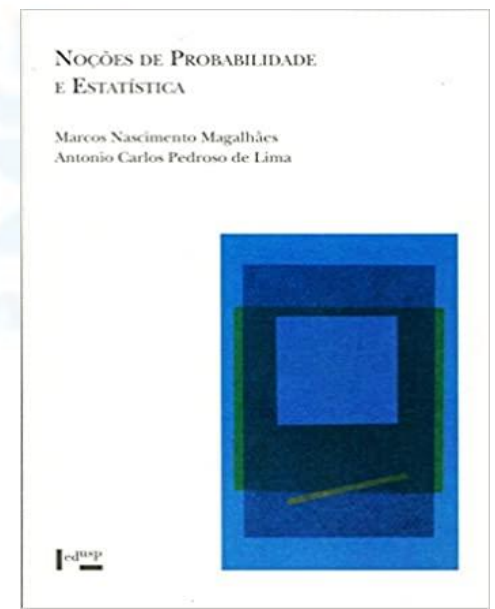
VILANOVA, Wilson. Matemática atuarial: destinado aos cursos de ciências econômicas, contábeis e atuariais. Liv. Pioneira, Ed. da Universidade, 1969.



JAMES,B. R.; Probabilidade: Um Curso em nível intermediário, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004



Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001



Matemática atuarial

Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Revisão de probabilidade

- A ciência objetiva a coleta de informações na natureza e a formulação de modelos ... que expliquem parte dos fenômenos ou permitam a sua previsão.
- Método científico,
 - Conjunto de regras para obtenção do conhecimento durante a investigação científica...
 - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.
- Modelo e realidade por vezes são erroneamente confundidos.

Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre contará com incerteza.
- Modelos determinísticos
 - Condições bastante controladas,
 - Variações desprezadas
- Modelos probabilísticos
 - Controle total e inviabilizado
 - Variações não podem ser ignoradas.

Revisão de probabilidade

- **Fenômeno aleatório** é todo aquele que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
- Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico**.

Revisão de probabilidade

- **Espaço amostral (Ω)** é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.
- **Definição** Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento.
 - Ω é o evento certo,
 - \emptyset o evento impossível.
 - Se $\omega \subset \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

Revisão de probabilidade

EXEMPLO 1:

Defina os seguintes espaços amostrais.

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{ \quad \}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{ \quad \}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{ \quad \}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

$$A = \{1, 6 \leq x \leq 1, 7\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$

$$A = \{0 \leq t \leq 30\}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade é chamado evento aleatório.

Revisão de probabilidade

➤ Conceito de Probabilidade

➤ Teoria clássica

Dado o espaço de resultados Ω , constituído por um número finito de n elementos igualmente prováveis, ..., define-se a probabilidade de acontecimento de A , como sendo a razão de resultados favoráveis A e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados de } A}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

...se conhece fatos decisivos sobre o mecanismo ou processo que produz os resultados

Revisão de probabilidade

➤ Conceito de Probabilidade

➤ Teoria Frequentista

- Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento A é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

em que n_A é o número de ensaios em que o evento A foi observado, e n o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com que se realiza A tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.

Revisão de probabilidade

➤ Conceito de Probabilidade

➤ Probabilidade subjetiva e lógica

- Define-se como uma medida do grau de confiança em relação a uma proposição.
- Ela é função da quantidade de informação disponível ...
- Julgamento pessoal .
- Pensamento *Bayesiano*.
- Possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Revisão de probabilidade

➤ Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral Ω um conjunto não vazio. Uma probabilidade em Ω é uma função de conjunto $P()$ que associa a subconjuntos A de Ω um número real $P(A)$ que satisfaz os axiomas a seguir.

- Para todo $A \subseteq \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Se A_1, A_2, \dots, A_n forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
 - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.
- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de Ω um número real.

EXEMPLO 2:

Sabe-se que em uma fábrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos $(D \rightarrow P(D) = \frac{1}{4})$

Itens perfeitos $(Pe \rightarrow P(Pe) = \frac{3}{4})$

Revisão de probabilidade

Para uma amostra $n = 2$ peças retiradas é possível construir uma tabela onde X é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e $P(X)$ será a probabilidade do resultado.

X	0	1	2
	(Pe, Pe)	$(D, Pe)(Pe, D)$	(D, D)
$P(X)$	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Revisão de probabilidade

➤ Variáveis Aleatórias Discretas

- $P(X = x)$ Função de probabilidade.
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todo i .
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

➤ Variáveis aleatórias contínuas

- $f(x)$ Função de densidade (*f.d.p*)
- $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Revisão de probabilidade

- Função de distribuição de probabilidade (função de distribuição).

Em geral ela é representada por $F_X(x)$.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$$

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i)$$

Revisão de probabilidade

EXEMPLO 3:

a)

X	1	2	3	4
P(X)	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

c)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,7 & \text{se } x = 0 \\ 0,5 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x)dx = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) = \frac{6}{5} \left(\frac{5}{6} \right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty}$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left(-\frac{1}{e^{2 \times 0}} \right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}dx + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}dx$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10} \Big|_{x=0}^{x=2} + \left(-\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20} \right) \Big|_{x=2}^{x=6}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Esperança de variáveis aleatórias

- ...forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.
- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.
- ...parâmetro para vários modelos probabilísticos.

Esperança de variáveis aleatórias

➤ Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \mu_X$$

➤ Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_X$$

Esperança de variáveis aleatórias

- Seja X uma variável aleatória e $g(\cdot)$ uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função $g(X)$ denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j) P(X = x_j)$$

Exemplo 4

Segundo determinada tábua de vida, o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?
- b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

Exemplo 4: Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução

a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?

$$E(T) = \sum tP(T = t) = 0,4622$$

b) Seja $g(T) = v^{T+1}$ calcule $E[g(T)]$, em que $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$.

$$E[g(T)] = E(v^{T+1}) = \sum v^{t+1}P(T = t) = 0,9866602$$

Esperança de variáveis aleatórias

Seja L um valor limite dentro do domínio de X , e seja Y uma variável aleatória “Valor de X sujeito ao limite L ”. Então:

$$Y = \begin{cases} X, & X < L \\ L, & X \geq L \end{cases}$$

Logo, para o caso de X se contínuo tem-se que:

$$E(Y) = E(X; L) = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + \int_L^{\infty} L f_X(x) dx = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + L S_X(L)$$

E no caso de X se discreto, tem-se:

$$E(Y) = E(X; L) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + \sum_{x_i = L}^{\infty} L P_X(x_i) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + L P_X(X \geq L)$$

Exemplo 5

Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma:

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,6751	0,195183	0,1219955	0,0076815

a) Determinado produto oferecido por uma seguradora tem um prêmio calculado a partir do valor esperado da variável aleatória $g(T) = v \frac{1-v^T}{1-v}$, em que $v = \frac{1}{1,03}$. A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no valor esperado de $g(T)$, sujeito a um limite técnico $g(2)$. Calcule o prêmio sujeito a esse limite.

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

Seja Y , tal que:

$$Y = \begin{cases} g(T), & g(T) < g(2) \\ g(2), & g(T) \geq g(2) \end{cases}$$

Equivalente a

$$Y = \begin{cases} g(T), & T < 2 \\ g(2), & T \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E[g(T); g(2)]$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(T) P(T) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T)$$

T	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

Solução:

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(T) P(T) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T)$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 v \frac{1 - v^t}{1 - v} P(T) + v \frac{1 - v^2}{1 - v} \sum_{t=2}^3 P(T) \approx 0,4376311$$

Universidade Federal de Alfenas

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.

