

Teoria do Risco

Aula 9

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



Modelos de risco Coletivo

- Diferente da abordagem do modelo de risco individual, no modelo de risco coletivo o valor total das indenizações é calculado a partir de uma soma aleatória de variáveis aleatórias.
- O modelo de risco coletivo se diferencia do modelo de risco individual por modelar, de maneira conjunta, o número de sinistros e sua severidade.

Modelos de risco Coletivo

- O objetivo central da teoria do risco coletivo aplicada a seguros e danos é a modelagem matemática do comportamento probabilístico de S_{col} .
- S_{col} . → Montante agregado relativo aos sinistros ocorridos no ano.
- X_i → Montante relativo ao *i-ésimo* sinistro ocorrido.
- N → o número de sinistros para o mesmo período em análise.

Modelos de risco Coletivo

➤ S_{col} é condicionado a X_i e a N

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$S_{col} > 0 \text{ se } N > 0$$

$$S_{col} = 0 \text{ se } N = 0$$

Modelos de risco Coletivo

- O número de vezes que os sinistros ocorrem e seus valores serão expressos pelas ocorrências verificadas no conjunto das apólices que a compõem.
- Assumindo que $N = n$, então $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídos.
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ e N são mutualmente independentes.



Modelos de risco Coletivo

- ...qualquer sinistro ocorrido não pode sofrer interferência de outros eventos de mesma espécie e o número de sinistros (N) não tem efeito sobre o montante deles ($\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$).

$$E(S_{\text{col}}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

$X_i \rightarrow$ é a variável aleatória que representa a sinistralidade da apólice i -ésima.

$N \rightarrow$ variável aleatória que representa o número de sinistros na carteira em um dado intervalo de tempo.

Modelos de risco Coletivo

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

X_i, B_i, I_i

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

X_i, N

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E[E(S_{col}|N)]$$

$$E(S_{col}) = E[E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)]$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n) P(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) P(N = n)$$

$$E(S_{col}) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(X) P(N = n) = E(X) \sum_{n=0}^{\infty} n P(N = n)$$

Logo

$$E(S_{col}) = E(X)E(N)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E[\text{var}(S_{col}|N)] + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

Primeiro iremos trabalhar $E[\text{var}(S_{col}|N)]$, assim:

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = E[\text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n)]$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N | N = n) P(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) P(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \text{var}(X) P(N = n) = \text{var}(X) \sum_{n=0}^{\infty} n P(N = n)$$

$$E[\text{var}(S_{col}|N)] = \text{var}(X)E(N)$$

Agora para $\text{var}(E(S_{col}|N))$, tem-se:

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = \text{var}(X)E(N) + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = E[E(X_1 + \dots + X_N|N = n)^2] - E[E(X_1 + \dots + X_N|N = n)]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \dots + X_N|N = n)^2 P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \dots + X_n)^2 P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(nX)^2 P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N = n) - [E(X)E(N)]^2$$

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 E(N^2) - [E(X)E(N)]^2$$

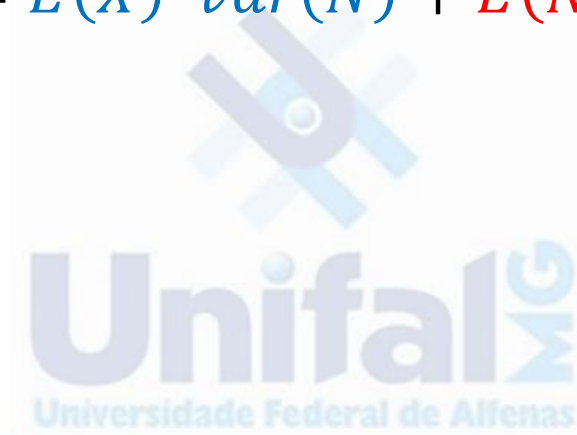
Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = \text{var}(X)E(N) + \text{var}[E(S_{col}|N)]$$

$$\text{var}[E(S_{col}|N)] = E(X)^2 E(N^2) - E(X)^2 E(N)^2 = E(X)^2 [E(N^2) - E(N)^2]$$

Logo

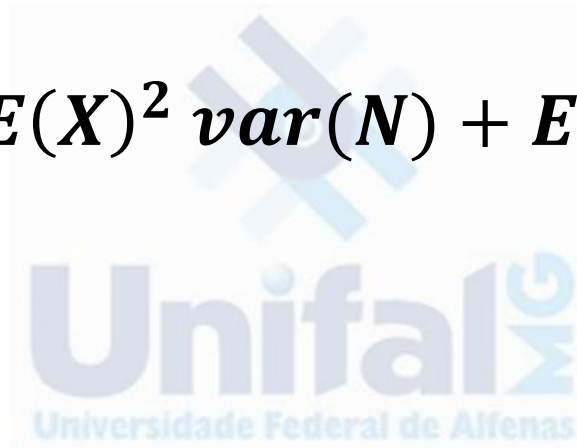
$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 \text{var}(N) + E(N) \text{var}(X)$$



Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$



EXEMPLO 1: Encontre os valores de $E(S_{col})$ e $var(S_{col})$ para as situações dos itens a seguir:

a) $N \sim Po(\lambda)$ e $X \sim Exp(\alpha)$

b) $N \sim B(n, q)$ e $X \sim Gama(r, \alpha)$



EXEMPLO 1

a) $N \sim Po(\lambda)$ e $X \sim Exp(\alpha)$, então:

$$E(N) = \lambda \quad E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Logo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$var(N) = \lambda \text{ e } var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$var(S_{col}) = var(X)E(N) + E(X)^2 var(N)$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{\alpha^2}\lambda + \frac{1}{\alpha^2}\lambda = \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

EXEMPLO 1

b) $N \sim B(n, q)$ e $X \sim \text{Gama}(r, \alpha)$, então:

$$E(N) = nq \quad E(X) = \frac{r}{\alpha}$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{nqr}{\alpha}$$

$$\text{var}(N) = nq(1 - q) \quad \text{e} \quad \text{var}(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

$$\text{var}(S_{col}) = \frac{r}{\alpha^2} nq + \frac{r^2}{\alpha^2} nq(1 - q) = \frac{nqr[1 + r(1 - q)]}{\alpha^2}$$

EXEMPLO 2: Suponha uma carteira de seguros cuja número de sinistros seja caracterizada pela variável aleatória $N \sim Po(12)$ e os valores dos sinistros seja $X \sim U_c(0,1)$, calcule $P(S_{col} \leq 10)$ utilizando uma aproximação pela distribuição normal.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

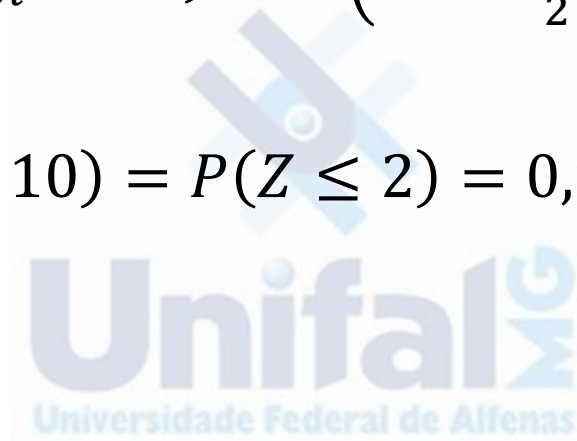
EXEMPLO 2

$$E(S_{col}) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$var(S_{col}) = \frac{1}{4} 12 + 12 \frac{1}{12} = 4$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-6}{2}\right)$$

$$P(S_{col} \leq 10) = P(Z \leq 2) = 0,97725$$



Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

S_{ind}, X_i, B_i, I_i

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n q_i E(B_i)$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 var(I_i)$$

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

S_{col}, X_i, N

$$E(S_{col}) = E(X)E(N)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora.** Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos.** Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

