Teoria do Risco
Aula 7

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

07/2023

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para $S_{ind.}$

- Encontrar a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes por convolução, pode ser um processo bastante penoso.

- Uma alternativa bastante interessante está relacionada com a função geradora de momentos.

Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para $S_{ind.}$

Uma função geradora de momentos é o valor esperado de uma transformação da variável aleatória e sob algumas condições determina completamente a distribuição de probabilidade.

$$g(X) = e^{tX}$$

$$E[g(X)] = E(e^{tX}) = M_X(t)$$

Teorema: Unicidade

Se X e Y são duas variáveis aleatórias cujas funções geradoras de momentos, $M_X(t)$ e $M_Y(t)$, existem e são iguais para todo t em um intervalo $-h < t < h$, para algum $h > 0$, então, as distribuições de probabilidades de X e de Y são iguais.

Modelos de risco Individual- Função geradora de momentos para S_{ind}.

Seja $S_{ind} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ com $M_{X_i}(t_i)$, assim $M_{S_{ind}}(t)$ é dada por:

$$M_{S_{ind}}(t) = E(e^{tS_{ind}}) = E\left[e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right]$$

$$M_{S_{ind}}(t) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \ldots E(e^{tX_n})$$

$$M_{S_{ind}}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

EXEMPLO 1: Considere três variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, X_3 para $i = 1,2,3$, X_i tem distribuição exponencial e $E(X_i) = \frac{1}{i}$. Encontre a função geradora de momentos de $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Obs.:

A distribuição exponencial tem parâmetro $\alpha > 0$, com f.d.p dada por:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \text{ e } E(X) = \frac{1}{\alpha} \text{ e } var(X) = \frac{1}{\alpha^2} \; e \; M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}$$

$M_{X_1}(t) = \frac{1}{1-t}$ $\quad M_{X_2}(t) = \frac{2}{2-t}$ $\quad M_{X_3}(t) = \frac{3}{3-t}$

Logo

$$M_S(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)\left(\frac{2}{2-t}\right)\left(\frac{3}{3-t}\right) = \frac{6}{(1-t)(2-t)(3-t)}$$

Coincidindo com a função geradora de momentos encontrada para:

$$f_S(s) = 3\mathrm{e}^{-3s}(e^s - 1)^2$$

Sendo $S = X_1 + X_2 + X_3$

$$M_{X_1}(t) = \frac{1}{1-t} \qquad M_{X_2}(t) = \frac{2}{2-t} \qquad M_{X_3}(t) = \frac{3}{3-t}$$

Logo

$$M_S(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)\left(\frac{2}{2-t}\right)\left(\frac{3}{3-t}\right) = \frac{6}{(1-t)(2-t)(3-t)}$$

Consequentemente:

$$\psi_S(t) = \frac{6}{(1-it)(2-it)(3-it)}$$

EXEMPLO 2: Seja a distribuição do valor total das indenizações na carteira em 1 ano com a seguinte função geradora de momentos:

$$M_{S_{ind}}(t) = (1 - 2t)^{-9}$$

Calcule $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$.

EXEMPLO 2: Seja a distribuição do valor total das indenizações na carteira em 1 ano com função geradora de momentos conforme abaixo:

$$M_{S_{ind}}(t) = (1-2t)^{-9}$$

$$\left.\frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(S_{ind})$$

$$\frac{dM_{S_{ind}}(t)}{dt} = -9(1-2t)^{-10}(-2) = 18(1-2t)^{-10}$$

$$\frac{dM_{S_{ind}}(0)}{dt} = \$\mathbf{18,00}$$

$$var(S_{ind}) = E\left(S_{ind}^2\right) - E(S_{ind})^2$$

$$var(S_{ind}) = \frac{d^2\, M_{S_{ind}}(0)}{dt^2} - (18)^2 = \left. -180(1-2t)^{-11}(-2)\right|_{t=0} - 18^2$$

$$var(S_{ind}) = 360 - 324 = \$^{\mathbf{2}}\mathbf{36,00}$$

Cálculo de $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$ em função de I e B

Considerando $X_i = I_i B_i$ com a variável aleatória I_i independente de B_i. Pode-se obter $E(S_{ind})$ como:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i B_i) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) q_i$$

Cálculo de $E(S_{ind})$ e $var(S_{ind})$ em função de I e B

A variância de S_{ind} , é obtida por:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} [var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)]$$

Demonstração:

Lembrando que dado uma variável aleatória X condicionada a Y,

$var(X) = E[var(X|Y)] + var[E(X|Y)]$.

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \left[E[var(X_i|I_i)] + var[E(X_i|I_i)]\right]$$

$$var(X_i|I_i) = \begin{cases} \sum_x x^2 P(x|I=0) - \left[\sum_x xP(x|I=0)\right]^2 = 0 \\ \sum_x x^2 P(x|I=1) - \left[\sum_x xP(x|I=1)\right]^2 = var(B_i) \neq 0 \end{cases}$$

Vale ressaltar que:

$\sum_x xP(x|I=0) = (\boldsymbol{x_1} = \mathbf{0}) \times\ 1 + x_2 \times 0 + x_3 \times 0 \ldots = 0$

Consequentemente

$\sum_x x^2 P(x|I=0) = (\boldsymbol{x_1} = \mathbf{0})^2 \times 1 + x_2^2 \times 0 + x_3^2 \times 0 \ldots = 0$

Demonstração:

$var(X_i\|I_i)$	$P[var(X_i\|I_i)]$
0	$P(I_i = 0) = 1 - q_i$
$var(B_i)$	$P(I_i = 1) = q_i$

Dessa forma tem-se que:

$$E[var(X_i|I_i)] = var(X_i|I_i = 0)P(I_i = 0) + var(X_i|I_i = 1)P(I_i = 1)$$

$$E[var(X_i|I_i)] = 0(1 - q_i) + var(B_i)q_i = var(B_i)q_i$$

Porém é sabido que quando $I_i = 1$, $X_i = B$, logo:

$$E[var(X_i|I_i)] = var(B_i)q_i$$

Demonstração:

Lembrando que dado uma variável aleatória X condicionada a Y, temos

$$var(X) = E[var(X|Y)] + var[E(X|Y)].$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \{E[var(X_i|I_i)] + var[E(X_i|I_i)]\}$$

...

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \{var(B_i)q_i + var[E(X_i|I_i)]\}$$

Demonstração:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \{var(B_i)q_i + var[E(X_i|I_i)]\}$$

$$E(X_i|I_i) = \begin{cases} \sum_x xP(x|I = 0) = 0 \\ \sum_x xP(x|I = 1) = E(B_i) \neq 0 \end{cases}$$

Vale ressaltar que:

$\sum_x xP(x|I = 0) = (x_1 = 0)1 + x_2 0 + x_3 0 \ldots = 0$

Demonstração:

$E(X_i\|I_i)$	$P[E(X_i\|I_i)]$
0	$P(I_i = 0) = 1 - q_i$
$E(B_i)$	$P(I_i = 1) = q_i$

$$var[E(X_i|I_i)] = E[E(X_i|I_i)^2] - E[E(X_i|I_i)]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = [0^2(1 - q_i) + E(B_i)^2 q_i] - E(X_i)^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 q_i - [E(B_i)E(I_i)]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 q_i - [E(B_i) q_i]^2$$

$$var[E(X_i|I_i)] = E(B_i)^2 \left(q_i - q_i^2\right) = E(B_i)^2 var(I_i)$$

Demonstração:

Logo:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} \{E[var(X_i|I_i)] + var[E(X_i|I_i)]\}$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} [var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)] = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 var(I_i)$$

EXEMPLO 3: Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de R$10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de R$5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002 respectivamente. Obtenha $E(X_1) = 11$ e $var(X_1) = 104879$

$\boldsymbol{X_1} =$		$\boldsymbol{I_1}.$		$\mathbf{B_1}$	
$R\$0,00$	0,9988	0	0,9988		
$R\$5000,00$	0,0002			$R\$5000,00$	0,1667
$R\$10000,00$	0,001	1	0,0012	$R\$10000,00$	0,833

$E(I_1) = 0,0012$ $E(B_1) = R\$9166,67$ $var(I_1) = 0,001199$ $var(\mathrm{B}_1) = 3497768$

EXEMPLO 3: Seja um seguro que cobre morte por qualquer causa com indenização fixa de R\$10000,00 e invalidez total e permanente com indenização fixa de R\$5000,00. As probabilidades anuais de sinistros em cada cobertura são de 0,001 e 0,0002 respectivamente. Obtenha $E(X_1) = 11$ e $var(X_1) = 104879$

$X_1 =$		$I_1.$		B_1	
$R\$0,00$	0,9988	0	0,9988		
$R\$5000,00$	0,0002			$R\$5000,00$	0,1667
$R\$10000,00$	0,001	1	0,0012	$R\$10000,00$	0,833

$E(I_1) = 0{,}0012$ $\quad E(B_1) = R\$9166{,}67$ $\quad var(I_1) = 0{,}001199$ $\quad var(B_1) = 3497768$

Solução:

Considerando $S_{ind} = X_1$, temos:

$$E(S_{ind}) = E(B_1)q_1$$

$$var(S_{ind}) = var(B_1)q_1 + E(B_1)^2 var(I_1)$$

EXEMPLO 4: Dado que a probabilidade de ocorrer sinistros é de 0,01, calcule os valores de $E(X_1)$ e $var(X_1)$ sendo que a densidade do valor de 1 sinistro é:

$$f_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000} & se\ 0 < x \leq 2000 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

EXEMPLO 4: Dado que a probabilidade de ocorrer sinistros é de 0,01, calcule os valores de $E(X_1)$ e $var(X_1)$ sendo que a densidade do valor de 1 sinistro é :

$$f_B(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2000} & se\ 0 < x \leq 2000 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(B) = \frac{2000}{2} \qquad var(B) = \left(\frac{2000^2}{12}\right)$$

$$E(X_1) = \mathrm{E}(I_1)\mathrm{E}(B_1) = 0{,}01\left(\frac{2000}{2}\right) = \$\mathbf{10,00}$$

$$var(X_1) = var(B_1)\mathrm{E}(I_1) + \mathrm{E}(B_1)^2 var(I_1)$$

$$var(X_1) = \left(\frac{2000^2}{12}\right)0{,}01 + \left(\frac{2000}{2}\right)^2 0{,}01(0{,}99) = \$^2\mathbf{13233,33}$$

Modelos de risco Individual

O valor esperado de S_{ind} , é obtida por:

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} q_i B_i$$

A variância de S_{ind} , é obtida por:

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 var(I_i)$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} B_i^2 q_i(1 - q_i)$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras:Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.