Teoria do Risco
Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} q_i E(B_i)$	$E(S_{col}) = E(X)E(N)$
$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 \, var(I_i)$	$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$

Modelos de risco Coletivo -Distribuição de S_{col}

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N
  - Um método interativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado custo computacional,

- Método da função geradora de momentos.
  - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t)\,)$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\{E[e^{t(X_1+X_2+\cdots X_N)}]\} = E[E(e^{tX_1}e^{tX_2}\dots e^{tX_N})]$$

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})\right]$$

Como X_{i_s} são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})\right] = E[M_X(t)^N]$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$\cdots$$

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\prod_{i=1}^{N} E(e^{tX_i})\right] = E[M_X(t)^N]$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E[M_X(t)^N]$$

$$M_{S_{col}}(t) = E\left[e^{ln(M_X(t))^N}\right] = E[e^{N\,ln(M_X(t))}]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\,M_X(t)\,)$$

EXEMPLO 1

Calcule $E(S_{col})$ por meio de $M_{S_{col}}(t)$, dado que $X \sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$.

Se $N \sim Po(\lambda)$, então

$$M_N(t) = E(e^{tN}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Se $X \sim Exp(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad M_X(t) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(ln(M_X(t)))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda\left[e^{ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)}-1\right]} = e^{\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}-1\right)}$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{scol}(t)}{dt} = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-t)^2} e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-t}-\lambda}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-0)^2} e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-0}-\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

EXEMPLO 2

Seja N com distribuição $B(n, q)$. Determine uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln(M_X(t)))$ $\qquad$ $M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = \left[qe^{ln(M_X(t))} + 1 - q\right]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

EXEMPLO 3

Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro ***(sem dedução da franquia)*** obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos de momentos do total agregado de sinistros S_{col}, dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $B(n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col}.

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n \qquad M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^n$$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^n$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^{n-1} q\alpha^r(-r)(\alpha - t)^{-r-1}(-1)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = n\left[q\left(\frac{\alpha}{\alpha - 0}\right)^r + 1 - q\right]^{n-1} \frac{rq\alpha^r}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$E(S_{col}) = n(q + 1 - q)^{n-1}\frac{rq}{\alpha} = \frac{nqr}{\alpha}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(ln(M_X(t)))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(ln(M_X(t)))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$\frac{d^2M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(ln(M_X(t)))\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(ln(M_X(t)))\left[\frac{M''_X(t)M_X(t) - M'_X(t)M'_X(t)}{M_X(t)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(ln(M_X(0)))\frac{M'_X(0)}{M_X(0)}\frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(ln(M_X(0)))\left[\frac{M''_X(0)M_X(0) - M'_X(0)M'_X(0)}{M_X(0)^2}\right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0)E(X)\,E(X) + M'_N(0)[E(X^2) - E(X)^2]$$

$$\boldsymbol{E\left(S_{col}^2\right) = E\left(N^2\right)E(X)^2 + E(N)var(X)}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E\left(S_{col}^2\right) - E(S_{col})^2$$

$$var(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)[var(X)] - E(N)^2E(X)^2$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\,[E(N^2) - E(N)^2] + E(N)var(X)$$

$$\boldsymbol{var(S_{col}) = E(X)^2\,var(N) + E(N)var(X)}$$

Modelo de Risco individual	**Modelo de Risco coletivo**
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} q_i E(B_i)$	$E(S_{col}) = E(X)E(N)$
$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2\, var(I_i)$	$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$
$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$	$M_{S_{col}}(t) = M_N\big(\ln\big(M_X(t)\big)\big)$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.