Matemática atuarial

AULA 21- Prêmios e Benefícios

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Prêmio Puro periódico Anual

- A teoria até agora nos levou ao cálculo do Prêmio nivelado a ser pago pelo segurado uma vez escolhido o valor do benefício.

- Pensemos agora na seguinte situação:

- Um segurado procura um fundo de pensão e sabe quanto ele, o segurado, poderá depositar no fundo de pensão anualmente para adquirir uma anuidade em sua aposentadoria (digamos, daqui a n anos).
  - Este segurado gostaria de saber qual o benefício ele receberá ser fizer os depósitos durante sua vida ativa.

Prêmio Puro periódico Anual

- Neste caso, conhecemos o valor do Prêmio nivelado, porém, não conhecemos o valor do benefício a ser pago.

  - ...não estamos querendo calcular o prêmio que, em média seja o suficiente para pagamento de sinistros.

  - ...queremos calcular o benefício tal que, em média, a seguradora não tenha nem ganho nem perda financeira.

Prêmio Puro periódico Anual

$$L = Z - Y$$

Em que:

$$Z = \begin{cases} bv^T & se\ T \leq n \\ 0 & se \quad c.c \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ 0 < T < n \\ P\ddot{a}_{\overline{n|}} & se \quad c.c \end{cases}$$

$$E(L) = bE(Z) - PE(Y)$$

$$E(L) = b\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}:\overline{\boldsymbol{n}}|} - P\ddot{a}_{x:\bar{k}|}$$

$$b\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}:\overline{\boldsymbol{n}}|} - P\ddot{a}_{x:\bar{k}|} = 0$$

$$b = \frac{P\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}:\overline{\boldsymbol{n}}|}}$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$b = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}{f(x)}$$

Seguro inteiro

Seguro temporário

Exemplo 1:

Um segurado de 40 anos quer comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado se propõe a pagar um prêmio de $R\$\,0{,}00245194$ em 5 parcelas começando imediatamente. Considerando-se a tábua $AT-49$ e uma taxa de juros de 3% ao ano, qual deveria ser o benefício deste seguro considerando-se que recebe o benefício ao final do ano de morte?

➢ Exemplo -**Solução**

$$Z = \begin{cases} bv^{T+1} & se\ 0 \leq T \leq 5 \\ 0 & se \quad T > 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} 0{,}002518\ \ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ 0 \leq\ T \leq\ 5 \\ 0{,}002518\ \ddot{a}_{\overline{5}|} & se \quad T > 5 \end{cases}$$

Valor de P é conhecido. Então:

$$0 = E(L) = E(Z - Y) = \boldsymbol{bA_{40:\overline{5}|} - P\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}$$

$$b = \frac{0{,}00245194\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{A_{40:\overline{5}|}} = \frac{0{,}00245194(4{,}696544)}{0{,}0115156} \cong 1$$

Seja uma pessoa de 40 anos que queira para por um seguro que que paga 1 u.m. Considerando a tábua de mortalidade AT-49 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação (3%).

a) Calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado.

b) Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante toda a vigência do seguro.

c) Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados anuais durante 15 anos.

d) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado.

e) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos com indenização de $R\$50000{,}00$. Qual o valor da da parcela do Prêmio puro único a ser pago pelo segurado, para o caso excepcional, do segurado poder pagar por 10 anos .

f) Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga R$ 250 mil se o segurado sobreviver durante o período de 3 anos. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago pelo segurado?

Prêmio Puro periódico Anual

$$L = Z - Y$$

Em que:

$$Z = \begin{cases} b\ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ T > n \\ 0 & se \quad c.c \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ 0 < T < n \\ P\ddot{a}_{\overline{n|}} & se \quad c.c \end{cases}$$

Valor de P é conhecido. Então:

$$0 = E(L) = E(Z - Y) = \boldsymbol{b}\ {}_{\boldsymbol{k|}}\boldsymbol{\ddot{a}_x} - \boldsymbol{P\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{P\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}}{{}_{\boldsymbol{k|}}\boldsymbol{\ddot{a}_x}}}$$

Benefícios e Prêmios Caso contínuo

- Para o caso em que T é reconhecida como uma v.a. contínua, pouco muda.

- Pensemos no caso de um segurado que deseja comprar um seguro de vida inteira que paga $R\$\,1{,}00$ ao beneficiário caso o segurado faleça. Para isso, o segurado irá pagar continuamente um prêmio P até o momento de sua morte.

- Qual seria o valor de P?

Benefícios e Prêmios Caso contínuo

- Para o caso em que T é reconhecida como uma v.a. contínua, pouco muda.

- Pensemos no caso de um segurado que deseja comprar um seguro de vida inteira que paga $R\$\,1{,}00$ ao beneficiário caso o segurado faleça. Para isso, o segurado irá pagar continuamente um prêmio P até o momento de sua morte.

- Qual seria o valor de P?

Benefícios e Prêmios Caso contínuo

Queremos um prêmio P tal que $E(L) \;=\; 0$.

- Escrevendo L como:

$$L \;=\; Z - Y$$

Onde

$$Z = v^{T}, para\; T > 0$$
$$Y = P\; \bar{a}_{\overline{T|}}, para\; T > 0$$

Logo

$$0 = E(L) = E(Z - Y) = \boldsymbol{b\; \bar{A}_x - P\bar{a}_x}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}}$$

- Exemplo 2

Considere uma pessoa de idade 30 que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga $R\$1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição Uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja, $T \sim U(0, 70)$.

Suponha que $i = 5\%\, a.a.$, calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

➢ Exemplo 2- Solução

$$\delta = \log(1+i) = \log(1{,}05) \cong 0{,}04879$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{30} = \int_0^{70} z_T f_T(t)dt = \int_0^{70} e^{-0{,}04879t}\frac{1}{70}dt$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{30} = \left.\frac{e^{-0{,}04879t}}{70(-0{,}04879)}\right|_0^{70} = \frac{1}{-3{,}4153}\left[e^{70(-0{,}04879)} - e^{0(-0{,}04879)}\right] \cong 0{,}2831$$

Usando a relação $1 = \delta\bar{a}_x + \bar{\boldsymbol{A}}_x$ tem-se $\bar{a}_{30} = \frac{1-0{,}2831}{0{,}04879} = 14{,}69201$

$$P = \frac{0{,}2831}{14{,}69201} = 0{,}01926898$$

Prêmios $_{\text{Anuidades}}$

- Exemplo 3

Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de $\mathrm{P} = \mathbf{0,157468}$.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do benefício contratado pelo segurado?

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ 0 < T < 40 \\ P\ddot{a}_{\overline{40|}} & se\ T \geq 40. \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} 0 & se\ 0 \leq T < 40 \\ \ddot{a}_{\overline{T+1|}} - \ddot{a}_{\overline{40|}} & 40 < T < 60. \end{cases}$$

Exemplo 3

Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de $\mathrm{P} = \mathbf{0,157468}$.

$$ {}_{k|n}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} $$

$$ b = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}{{}_{k|n}\ddot{a}_x} = \frac{P\ddot{a}_{20:\overline{40}|}}{{}_{40|20}\ddot{a}_{20}} = P\frac{\dfrac{N_x - N_{x+k}}{D_x}}{\dfrac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}} $$

$$ b = P\,\frac{N_x - N_{x+k}}{N_{x+k} - N_{x+k+n}} = P\left(\frac{N_{20} - N_{60}}{N_{60} - N_{80}}\right) $$

➢ Exemplo 4

Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga $R\$\ 1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α, ou seja, $T \sim Exp(\alpha)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

- Exemplo 4

$$\bar{\boldsymbol{A}}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha e^{-\alpha t}dt = \frac{\alpha}{\alpha+\delta}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-\delta t})}{\delta}\alpha e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha+\delta}$$

$$P = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+\delta}}{\frac{1}{\alpha+\delta}} = \alpha$$

Benefícios e Prêmios Caso contínuo

A relação temporária também é valida.

$$P = \frac{\bar{A}_{x^1:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Considerando o período de n anos pagos continuamente.

- Exemplo 5

Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que paga $R\$\ 1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α , ou seja, $T \sim Exp(0{,}02)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado, considere $\delta = 0{,}06$

Solução

$$\boldsymbol{P = \frac{\bar{A}_{x^1:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}}$$

- Exemplo 5

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{T}|} & se\ 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}|} & se \quad T \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E(Y) = \int_0^n \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\bar{n}|} \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$\boldsymbol{\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|} \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\bar{n}|} \,{}_n p_x}$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{\left(1 - e^{-\delta n}\right)}{\delta} e^{-\alpha n}$$

- Exemplo 5

$$\bar{a}_{x:\overline{10|}} = \int_0^{10} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{\left(1 - e^{-\delta 10}\right)}{\delta} e^{-\alpha 10}$$

$$\int_0^{10} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{\alpha}{\delta} \int_0^{10} e^{-\alpha t} - e^{-t(\delta + \alpha)}\, dt$$

$$\int_0^{10} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{0{,}02}{0{,}06} \left(- \frac{1}{0{,}02 e^{0{,}02(10)}} + \frac{1}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}08 e^{(10)0{,}08}} - \frac{1}{0{,}08} \right)$$

$$\int_0^{10} \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{0{,}02}{0{,}06} [-40{,}9365 + 50 + 5{,}6166 - 12{,}5]$$

$$\int_0^{10} \frac{\left(1 - e^{-0{,}06 t}\right)}{0{,}06} 0{,}02 e^{-0{,}02 t} dt = \mathbf{0{,}7267}$$

- Exemplo 5

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = 0{,}7267 + \frac{\left(1 - e^{-(0{,}06)10}\right)}{0{,}06} e^{-(0{,}02)10}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = 0{,}7267 + 6{,}1567 = 6{,}8834$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-\delta t} \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{10} e^{-t0{,}06} e^{-0{,}02t} 0{,}02\, dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} = 0{,}13766$$

$$P = \frac{0{,}13766}{6{,}8834} = 0{,}01999$$

- Obs.:

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\bar{n}|}\ {}_n p_x = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_t p_x dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-0,06t}\ e^{-0,02t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-t(0,08)}\ dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \left[-\frac{1}{0,08e^{t0,08}}\right]_0^{10} = 6,8834$$

Benefícios e Prêmios Caso contínuo

Relações importantes

$$\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{i}{\delta}\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Adicionalmente

$$\frac{\bar{A}_{x^1:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{k}|}} = \frac{i}{\delta}\frac{A_{x^1:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{k}|}} = \frac{i}{\delta}\frac{A_{x^1:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{A_{x:\overline{n}|^1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Prêmios Carregados

- Na prática os prêmios calculados até agora não serão suficientes para pagar despesas administrativas da seguradora (ou fundo de pensão).

- Para incluirmos as despesas da seguradora no prêmio puro deve-se inicialmente dividir as despesas no que diz respeito à incidência.

- Algumas despesas irão ocorrer apenas no momento da aquisição do contrato como:
  - Comissão de corretagem,
  - Despesas com médicos examinadores,
  - Ordenado com empregados ligados à aquisição da apólice.

Prêmios Carregados

- Em contrapartida, algumas despesas incidem enquanto o segurado estiver ligação com a empresa (período de pagamento de prêmio ou recebimento de benefício). Algumas dessas despesas são:
  - salários de funcionários,
  - despesas com informática,
  - correspondência,
  - aluguel,
  - impostos, etc.

- Sobre o prêmio puro, pode-se adicionar carregamentos de segurabilidade para diminuir o risco de insolvência da seguradora a partir da Teoria do Risco de Ruína.

Prêmios Carregados

- Dividiremos os Prêmios carregados em:

a) Prêmio de Inventário.

b) Prêmio “Zillmerado”.

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

Prêmio de Inventário.

- O prêmio de inventário deve ser mensurado para atender às despesas de administração e demais despesas que incidem ao longo do contrato de seguro (além do prêmio de risco).

- Caso o segurado tenha interesse em fazer pagamentos nivelado até o momento de morte, então o prêmio seria:

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

...um prêmio do segurado que, em média, seja suficiente para cobrir os riscos (prêmio puro) e as despesas da seguradora. Ou seja, queremos calcular o Prêmio P^{γ} tal que $E(L) = 0$.

Prêmio de Inventário.

- Lembre-se que:

$$L = Z - Y$$

em que Z é a obrigação da seguradora e Y é a obrigação do segurado.

A obrigação da segurado é, além de pagar as indenizações, pagar também as despesas com administrativas para seu funcionamento (durante o período de vigência do contrato).

Prêmio de Inventário.

- Neste caso, Z (obrigação da seguradora) é uma v.a. cuja função (em relação ao tempo de vida adicional) pode ser descrita como :

$$Z = v^{k+1} + \gamma\, \ddot{a}_{\overline{k+1}|} se\ k \geq 0$$

- Y (obrigação do segurado) . O segurado se compromete a pagar o prêmio enquanto estiver vivo.

$$Y = P^{\gamma} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} se\ k \geq 0$$

Em que P^{γ} é a notação utilizada para designar o prêmio anual de inventário

Prêmio de Inventário.

- Assim, para

$$L = Z - Y$$

$$E(L) = 0 = E(Z) - E(Y)$$

$$E\left(v^{k+1} + \gamma\, \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = E\left(P^{\gamma}\, \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right)$$

$$A_x + \gamma \ddot{a}_x = P^{\gamma} \ddot{a}_x$$

→ $\gamma \ddot{a}_x$ corresponde ao valor atuarial da carga de gestão

→ → $P^{\gamma} \ddot{a}_x$ corresponde ao prêmio puro único de inventário, Π^{γ} .

$$P^{\gamma} \ddot{a}_x = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

$$\Pi^{\gamma} = A_x + \gamma \ddot{a}_x$$

Prêmio de Inventário.

- Alternativamente

$$P^{\gamma}\ddot{a}_x = A_x + \gamma\ddot{a}_x$$

$$P^{\gamma} = \frac{A_x + \gamma\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \gamma$$

$$P^{\gamma} = P + \gamma$$

Prêmio periódico nivelado, puro, de um seguro vitalício.

- Ou

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_x}$$

➢ Exemplo 6

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $R\$\ 1{,}00$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de** $\boldsymbol{R\$\, 0{,}005}$ relativos a gastos administrativos.

➢ Exemplo 6

Solução :

$$\Pi^{\gamma} = \mathrm{A}_{40} + \gamma \ddot{a}_{40}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{40}} = \frac{\frac{\mathrm{M}_{40}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}} = \frac{\mathrm{M}_{40}}{N_{40}} + 0{,}005$$

- Exemplo 7

Considere o exemplo 6 para o caso do seguro ser por 30 anos.

- Exemplo 7

Solução :

$$\Pi^{\gamma} = \mathrm{A}_{40^{1}:\overline{30}|} + \gamma \ddot{a}_{40:\overline{30}|}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{\mathrm{M}_{40} - \mathrm{M}_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40} - \mathrm{N}_{70}}{D_{40}}\right)$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{40:\overline{30}|}} = \frac{\frac{\mathrm{M}_{40} - M_{70}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40} - N_{70}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40} - N_{70}}{D_{40}}} = \frac{\mathrm{M}_{40} - M_{70}}{N_{40} - N_{70}} + 0{,}005$$

- Exemplo 8

Uma pessoa de 20 anos decide contratar uma aposentadoria vitalícia que pagará $R\$1,00$ ao ano até que este segurado faleça. Ele se aposentará caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado enquanto estiver ativo.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 a taxa de juros de 3% ao ano e considere **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos., qual será o valor do prêmio a ser pago pelo segurado?

Exemplo 8

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1|}} & se\ 0 < t < 40 \\ P\ddot{a}_{\overline{40|}} & se\ t \geq 40. \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T|}} & se\ T > 40 \\ \gamma\, \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 < T \leq 40. \end{cases}$$

$$\Pi^{\gamma} = {}_{\mathbf{40|}}\boldsymbol{\ddot{a}_{20}} + \gamma \ddot{a}_{40}$$

$$\Pi^{\gamma} = \frac{N_{60}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right) =$$

$$\mathrm{P}^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{\mathrm{a}}_{40}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{40}} + 0{,}005\left(\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}\right)}{\frac{\mathrm{N}_{40}}{D_{40}}} = \frac{N_{60}}{N_{40}} + 0{,}005$$

Prêmio de Inventário.

Caso o interesse seja calcular o prêmio para produtos atuariais diferentes e forma de pagamento diferentes devem ser feito de forma similar aos exemplos anteriores.

Seguro inteiro

Seguro temporário

$$\Pi^{\gamma} = \Pi(x) + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

Anuidades*

Seguro dotal puro

Seguro dotal misto

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

k pagamentos sendo

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Este tipo de prêmio considera despesas de aquisição.
  - Carregamento destinado a compensar a seguradora pelas despesas de obtenção e emissão de apólices , despesas medicas por exemplo.
  - Financia uma dispensa em um ponto no tempo, exemplo, exames médicos. Custo.

- Neste caso, o segurado irá pagar um prêmio P^{α} durante um período até o pagamento relativo às despesas de aquisição e, em seguida, pagará um prêmio P relativo ao risco.

  - Este tipo de cargas aplica-se em geral, apenas nos primeiros anos de vigência da apólice.

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Calculando, então esses prêmios tais que $E(L) = 0$, tem-se:

$$E(Z) = E(Y)$$

O carregamento tanto pode incidir sobre os valores seguros como sobre os prêmios.

Assim, considerando o caso de um seguro vitalício para uma pessoa de idade x com pagamentos nivelados e considerando as despesas incluída no valor de prêmio, tem-se:

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Gasto relativo ao seguro e a despesas que a seguradora terá no momento de aquisição do contrato, então:

$$E(Z) = A_x + \alpha$$

Em que α é o gasto inicial da seguradora.

- O compromisso do segurado é dado por:

$$E(Y) = P^{\alpha}\ddot{a}_{x:\overline{s}|} + P\ {}_{s|}\ddot{a}_x$$

P^{α} é o prêmio considerando as despesas gastas no período s
(menor que a cobertura).

P é o prêmio periódico nivelado, puro, de um seguro vitalício

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

- Assim, para

$$L = Z - Y$$

Tem-se:

$$E(Z) = E(Y)$$

$$A_x + \alpha = P^{\alpha}\, \ddot{a}_{x:\overline{s}|} + P\ {}_{s|}\ddot{a}_x$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\ {}_{s|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Relembrando que ${}_{s|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Prêmio de Zillmerado (Zilmer,1863)

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\left(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{s}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} - \frac{P\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

$$P^{\alpha} = \frac{A_x - P\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

$$A_x - P\ddot{a}_x = 0$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

Prêmio periódico constante, puro de uma dada modalidade.

- Exemplo 9

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida inteiro que paga $1\,u.m.$ ao final do ano de morte. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0,005}$** relativos a gastos administrativos, durante 10 anos.

➢ Exemplo 9

Solução :

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + P$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{22:\overline{10|}}} + \frac{\mathrm{M}_{22}}{N_{22}}$$

Prêmio Comercial ou de tarifa

- O prêmio comercial é o prêmio que contempla as duas despesas apontadas anteriormente, ou seja, todas as cargas comerciais.

$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

Em que P corresponde ao prêmio puro periódico de uma dada modalidade de seguros.

➢ Exemplo 10

Uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida misto por um período de 10 anos que paga $1\ u.m.$ ao final do ano de morte caso o segurado morra no período de 10 anos, ou receba o mesmo valor caso, sobreviva a esse período. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor do Prêmio a ser pago pelo segurado considerando-se a tabela $AT-49$ e uma taxa de juros $i = 0{,}03$? Considere, para o cálculo do prêmio, **que o segurado deve pagar uma quantia anual de $\boldsymbol{R\$\,0{,}005}$** relativos a gastos administrativos, mais gastos adicionais de encardos de $R\$\ 0{,}002$ durante 2 anos.

- Exemplo 10

$$P^c = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$

$$P^c = \frac{A_{22:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{22:\overline{10}|}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\ddot{a}_{22:\overline{2}|}}$$

$$P^c = \frac{\dfrac{M_{22} - M_{32} + D_{32}}{D_{22}}}{\dfrac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}} + 0{,}005 + \frac{0{,}002}{\dfrac{N_{22} - N_{32}}{D_{22}}}$$

Prêmios Carregados

a) Prêmio de Inventário.

$$\Pi^{\gamma} = \Pi(x) + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$P^{\gamma} = \frac{\Pi^{\gamma}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

b) Prêmio “Zillmerado”.

$$\Pi^{\alpha} = \Pi(x) + \alpha - P\ {}_{s|}\ddot{a}_{x}$$

$$P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}} + P$$

c) Prêmio Comercial ou de tarifa

$$P^{c} = P + \gamma + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}$$