Matemática atuarial

Anuidades Vitalícia (aula10)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Anuidades

- Sucessão de pagamentos (ou recebimentos) equidistantes (termos), efetuados por uma dada entidade a outrem.

- **IMEDIATAS**

  Os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

- **DIFERIDAS**

  Os termos são exigíveis após um diferimento

- **ANTECIPADA** (Quando os termos ocorrem no início de cada período)

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^{n-1}}$$

- **POSTECIPADA** (Quando os termos ocorrem ao final de cada período)

$$VP = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

$\boldsymbol{R=1}$	$\boldsymbol{v=\frac{1}{1+i}}$	$\boldsymbol{i=\frac{1-v}{v}}$

- Fluxo Antecipado

$$VP=\frac{R[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^{n-1}}=\frac{(v^{-n}-1)v}{(1-v)v^{-n+1}}$$

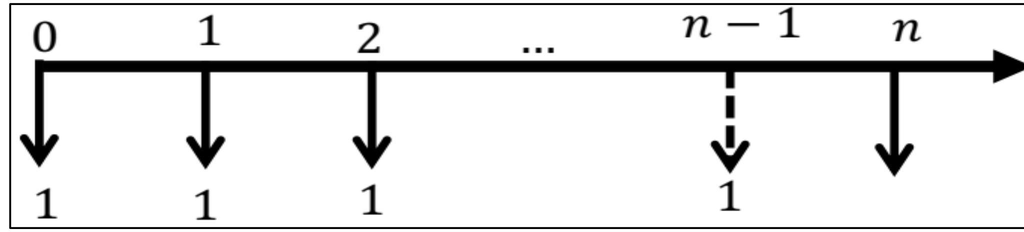
$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{1-v}, n\geq 1}$$

- Fluxo Postecipado

$$VP=\frac{R[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^{n}}=\frac{v(v^{-n}-1)}{(1-v)v^{-n}}$$

$$\boldsymbol{a_{\overline{n}|}=v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right), n\geq 1}$$

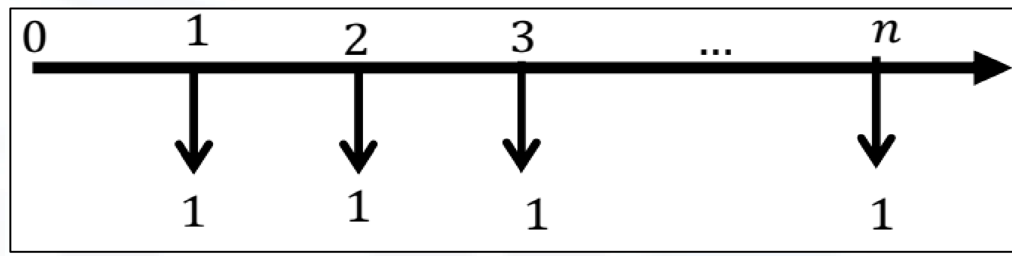
➢Fluxo Antecipado



$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, n \geq 1$$

➢Fluxo Postecipado



$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n$$

$$a_{\overline{n|}} = v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right), n \geq 1$$

Anuidades

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$a_{\overline{n-1|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n|}} - a_{\overline{n-1|}} = 1}$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Estamos trabalhando com o valor presente de uma série de pagamentos.

- De fato, as anuidades apresentadas são anuidades certas. Uma série de pagamentos sendo realizados ao longo do tempo

- É preciso o reconhecimento da "natureza" aleatória do número de termos.

Anuidades vitalícias imediatas

- No processo de compra de um produto atuarial ou de concessão de benefício, existe risco.

  - A seguradora não sabe se vai receber todos os prêmios do segurado (este pode morrer antes do período de cobertura).
  - A seguradora não sabe ao certo quanto irá gastar com previdência uma vez que uma pessoa se aposentou e entrou em gozo de benefício.

- Reconhecer a anuidade como um produto atuarial é reconhecer que:
  - A seguradora (ou fundo de pensão) não saberá ao certo quando x irá falecer.

Anuidades (Rendas)

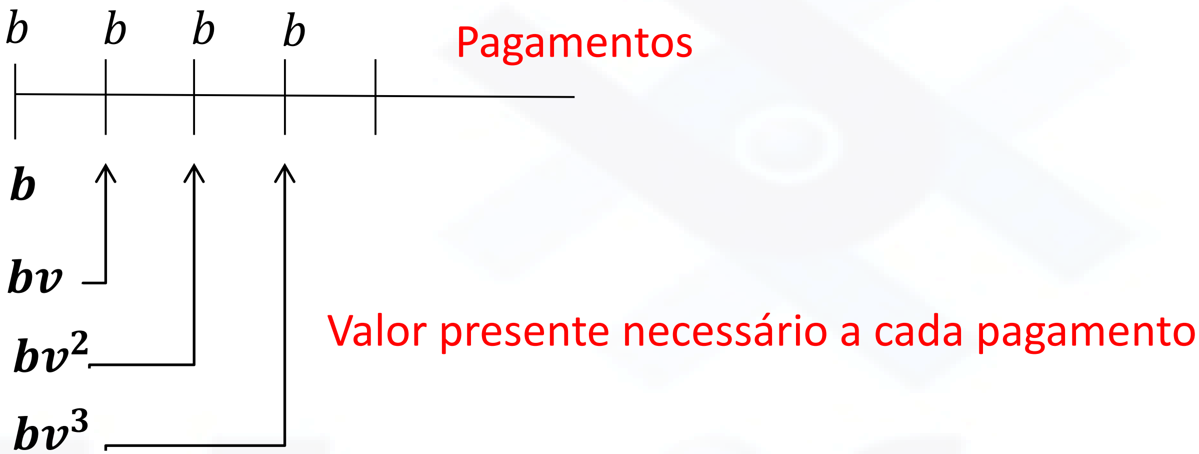
- Anuidade é um produto atuarial ligado a previdência.
  - Plano de previdência: A ideia é formar uma reserva financeira para lidar com situações futuras.

- Anuidade (renda sobre a vida)
  - Aposentadoria: pagamentos até o momento da morte
  - Cobertura: por período determinado.

- São interrompidos em caso de morte...

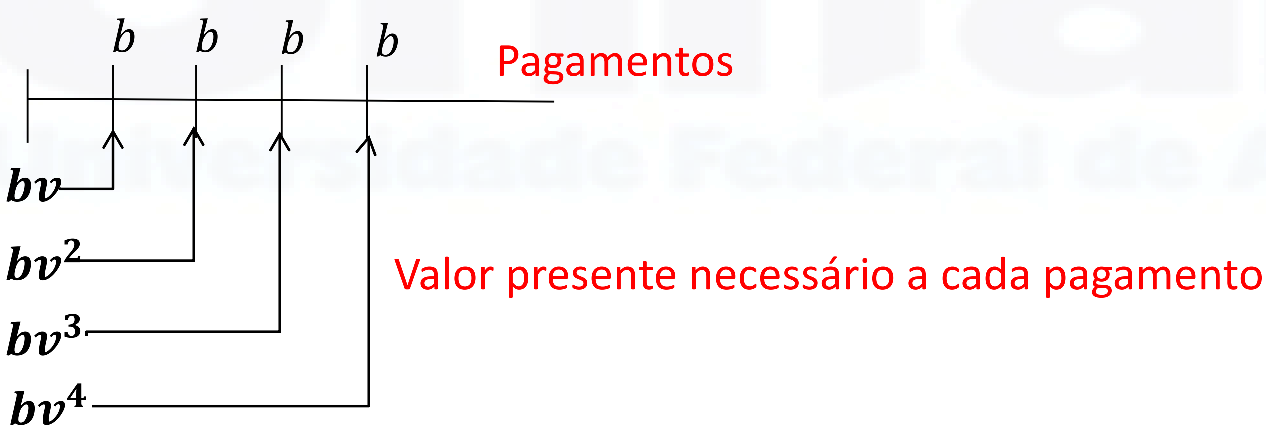
Anuidades imediatas

- Pagamentos **Antecipados** (Os pagamentos começam no primeiro período).



$$F_0 = b\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

- Pagamentos **Postecipados** (Os pagamentos começam no final de cada período).



Anuidades vitalícias imediatas

- Seja T_x a variável aleatória discreta associada **ao maior inteiro contido** na sobrevida de x logo:

- Antecipada (benefício unitário)

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}} = \frac{1 - v^{T_x+1}}{1 - v}, T_x \geq 0$$

- Postecipada (benefício unitário)

$$a_{\overline{T_x|}} = v\frac{1 - v^{T_x}}{1 - v}, T_x \geq 0$$

Anuidades vitalícias imediatas

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **ANTECIPADO** para uma pessoa de idade x corresponde ao valor esperado da anuidade imediata antecipada:

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \ddot{a}_x$$

- O valor atuarial de anuidade imediata vitalícia e com pagamento **POSTECIPADO** para uma pessoa de idade x corresponde ao valor esperado da anuidade imediata postecipada:

$$E\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = a_x$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Anuidade vitalícia antecipada

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{T_x+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\; p(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\;\; {}_tp_x q_{x+t}$$

- Anuidade vitalícia antecipada Postecipada

$$E\left(a_{\overline{T_x|}}\right) = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\, p(T_x = t)$$

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t}|}\;\, {}_tp_x q_{x+t}$$

EXEMPLO 1

Considere uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = E\left(\ddot{a}_{\overline{T+1|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_{40} q_{40+t} = \ddot{a}_{\overline{1|}}\ {}_0 p_{40} q_{40} + \ddot{a}_{\overline{2|}}\ p_{40} q_{41} + \ddot{a}_{\overline{3|}}\ {}_2 p_{40} q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = \frac{1-v^1}{1-v}\ {}_0 p_{40} q_{40} + \frac{1-v^2}{1-v} p_{40} q_{41} + \frac{1-v^3}{1-v}\ {}_2 p_{40} q_{42} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 17{,}67 u.m.$$

EXEMPLO 2

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t|}}\ {}_t p_{40} q_{40+t} = a_{\overline{1|}}\ p_{40} q_{41} + a_{\overline{2|}}\ {}_2 p_{40} q_{42} + a_{\overline{3|}}\ {}_3 p_{40} q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = \frac{v(1-v^1)}{1-v}\ p_{40} q_{41} + \frac{v(1-v^2)}{1-v}\ {}_2 p_{40} q_{42} + \frac{v(1-v^3)}{1-v}\ {}_3 p_{40} q_{43} + \cdots$$

$$a_{40} = 16{,}67\text{u.m.}$$

Anuidades vitalícias imediatas

- Outras alternativas para o calculo do V.P.A. serão:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \, {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_t p_x q_{x+t}$$

e

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \, {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t|}} \, {}_t p_x q_{x+t}$$

Demonstração

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\ {}_tp_x(1-p_{x+t})$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\left({}_tp_x - {}_tp_x p_{x+t}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\left({}_tp_x - {}_{t+1}p_x\right)$$

$$\ddot{a}_x = v^0({}_0p_x - {}_1p_x) + (v^0+v)({}_1p_x - {}_2p_x) + (v^0+v+v^2)({}_2p_x - {}_3p_x) + \cdots$$

Assim

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x$$

EXEMPLO 3

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_{40} = 1 + v\ \ p_{40} + v^2\ {}_2p_{40} + v^3\ {}_3p_{40} + \cdots$$

$$\ddot{a}_{40} = 1 + v\ \ p_{40} + v^2\ \ p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots \approx 17{,}67u.m.$$

Postecipado,

$$a_{40} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\ {}_tp_{40} = v\ \ p_{40} + v^2\ {}_2p_{40} + v^3\ {}_3p_{40} + \cdots$$

$$a_{40} = v\ \ p_{40} + v^2\ \ p_{40}p_{41} + v^3 p_{40}p_{41}p_{42} + \cdots \approx 16{,}67u.m.$$

Anuidades vitalícias imediatas

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia antecipada.

Valor atuarial de uma anuidade vitalícia Postecipada.

Anuidades vitalícias imediatas

- Então, para o caso discreto, o V.P.A. será dado por:

  - Anuidade **Antecipada** (Variável aleatória discreta)

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{t+1}}{1-v} \, {}_tp_x q_{x+t}$$

  - Anuidade **Postecipada** (Variável aleatória discreta)

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \, {}_tp_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} a_{\overline{t|}} \, {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} v\left(\frac{1-v^t}{1-v}\right) {}_tp_x q_{x+t}$$

Aula 11 - Anuidade Imediata

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Anuidades temporárias imediatas

- No caso de anuidades temporárias, essas são válidas enquanto a pessoa de idade x for viva até no máximo n anos.
  - Então, para o caso discreto, o V.P.A. de anuidades temporárias temos:

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_{t}p_{x} q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \, {}_{n}p_{x}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & se\ 0 < T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & se\ \ T \geq n \end{cases}$$

$$E(Y) = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P_x(T = t) + \sum_{t=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n|}}\, P_x(T = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P_x(T = t) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \sum_{t=n}^{\infty} P_x(T = t)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\, P_x(T = t) + \ddot{a}_{\overline{n|}} P_x(T \geq n)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}}\ {}_t p_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_n p_x}$$

Anuidades temporárias imediatas

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \; {}_{t}p_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n|}} \; {}_{n}p_x$$

EXEMPLO 4

Uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 40 anos. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 feminina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$\ddot{a}_{25:\overline{40|}} = \left(\sum_{t=0}^{39} \frac{1-v^{t+1}}{1-v}\, {}_{t}p_{25}\, q_{25+t}\right) + \left(\frac{1-v^{40}}{1-v}\right) {}_{40}p_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{40|}} = 1{,}0584 + 16{,}78173 = 17{,}8402$$

Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1}|} & 0 \leq T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_t p_x q_{x+t}\right) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E(Y)} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t E_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_t p_x$$

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} a_{\overline{T}|} & 0 \leq T < n \\ a_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_t p_x q_{x+t}\right) + a_{\overline{n}|}\ {}_n p_x$$

$$\boldsymbol{a_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \sum_{t=1}^{n} {}_t E_x = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_t p_x}$$

EXEMPLO 5:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{4-1} {}_t\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{30}} = \sum_{t=0}^{3} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}}\ {}_t\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{30}}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + vp_{30} + v^2\ {}_2p_{30} + v^3\ {}_3p_{30}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 1 + \frac{1}{1{,}05}p_{30} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32}$$

$$p_{30}p_{31}p_{32} = \frac{l_{33}}{l_{30}}$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{4}|} = 3{,}71$$

EXEMPLO 6:

Seja uma pessoa de 30 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$a_{30:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^{4} {}_tE_{30} = \sum_{t=1}^{4} v^t \; {}_tp_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = vp_{30} + v^2 \; {}_2p_{30} + v^3 \; {}_3p_{30} + v^4 \; {}_4p_{30}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = \frac{1}{1,05} p_{30} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 p_{30}p_{31} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 p_{30}p_{31}p_{32} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 p_{30}p_{31}p_{32}p_{33}$$

$$a_{30:\overline{4}|} = 3,52$$

EXEMPLO 7:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado** por um período de 5 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{5-1} {}_tE_{25} = \sum_{t=0}^{4} v^t \, {}_tp_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + vp_{25} + v^2 \, {}_2p_{25} + v^3 \, {}_3p_{25} + v^4 \, {}_4p_{25}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 1 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right) p_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$\ddot{a}_{25:\overline{5}|} = 4{,}53$$

EXEMPLO 8:

Seja uma pessoa de 25 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. com pagamento **postecipado** por um período de 4 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

Idade	q_x	p_x	l_x
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$a_{25:\overline{4}|} = \sum_{t=1}^{4} {}_t\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{25}} = \sum_{t=0}^{4} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}}\ {}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{25}}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = vp_{25} + v^2\ {}_2p_{25} + v^3\ {}_3p_{25} + v^4\ {}_4p_{25}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = \left(\frac{1}{1,05}\right)p_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 \frac{l_{27}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 \frac{l_{28}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}}$$

$$a_{25:\overline{4}|} = 3,53$$

Anuidades temporárias imediatas

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + v^4\ {}_4p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$a_{x:\overline{n-1|}} = vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + v^4\ {}_4p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

Anuidades temporárias imediatas- Tempo discreto

- VPA de uma anuidade antecipada.

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T+1|}} & 0 \le T < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & T \ge n \end{cases}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E(Z)} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{t+1|}} \, {}_tp_x q_{x+t} \right) + \ddot{a}_{\overline{n|}} \, {}_np_x$$

- VPA de uma anuidade Postecipada.

$$Z = \begin{cases} a_{\overline{T|}} & 0 \le T < n \\ a_{\overline{n|}} & T \ge n \end{cases}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_x$$

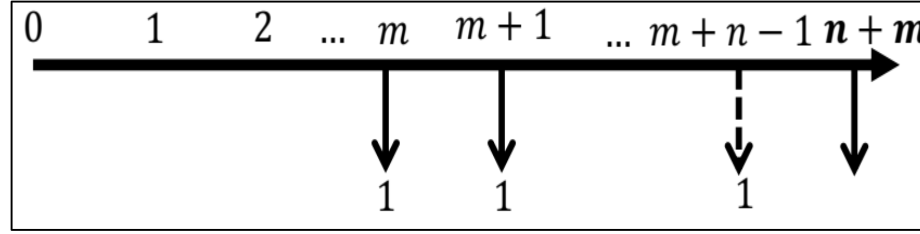
$$a_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=1}^{n-1} a_{\overline{t|}} \, {}_tp_x q_{x+t} \right) + a_{\overline{n|}} \, {}_np_x$$

Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

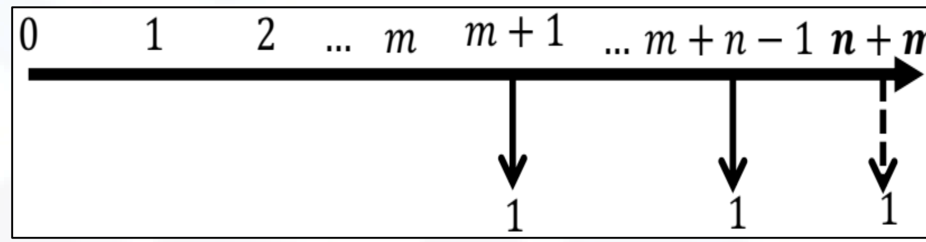
- Fluxo Antecipado



$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{m} + v^{m+1} + v^{m+2} + \cdots + v^{m+n-1} $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{m}\frac{1-v^{n}}{1-v} $$

- Fluxo Postecipado



$$ {}_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1} + v^{m+2} + v^{m+3} + \cdots + v^{m+n} $$

$$ {}_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m}v\left(\frac{1-v^{n}}{1-v}\right) $$

- Fluxo Antecipado

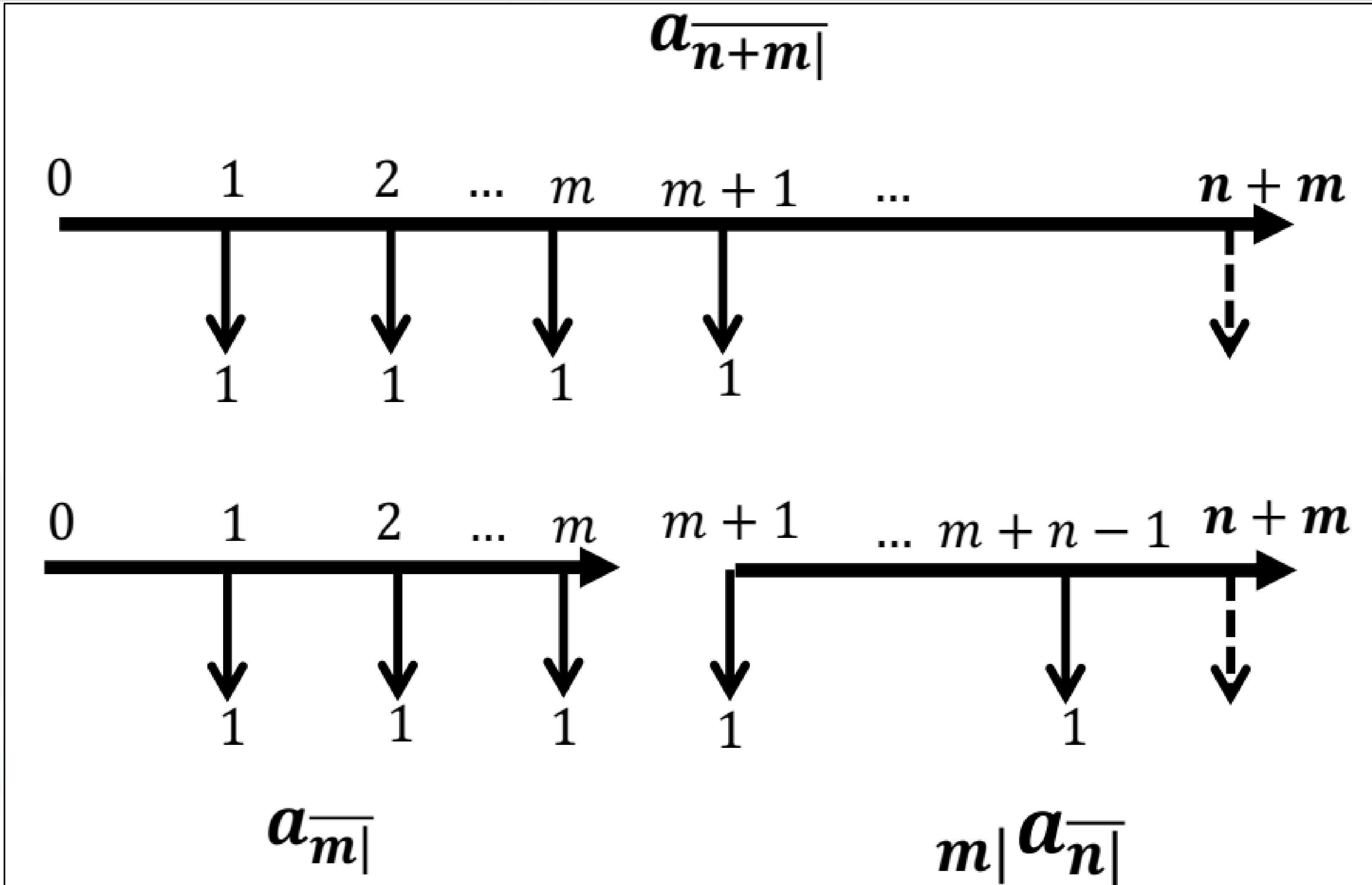
$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{m}\,\frac{1-v^{n}}{1-v} = v^{m}\ddot{a}_{\overline{n|}} \quad (m=0) \rightarrow \quad \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^{n}}{1-v} $$

- Fluxo Postecipado

$$ {}_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1}\left(\frac{1-v^{n}}{1-v}\right) = v^{m}a_{\overline{n|}} \quad (m=0) \rightarrow \quad a_{\overline{n|}} = v\left(\frac{1-v^{n}}{1-v}\right) $$

$$ \boldsymbol{{}_{m+1|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = {}_{m|}\,a_{\overline{n|}}} $$

Anuidades



$a_{\overline{n+m}|}$
0
1
2
...
m
$m+1$
...
$n+m$
1
1
1
1
0
1
2
...
m
$m+1$
...
$m+n-1$
$n+m$
1
1
1
1
1
$a_{\overline{m}|}$
$_{m|}a_{\overline{n}|}$

- FLUXO ANTECIPADO

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^m \frac{1 - v^n}{1 - v} = v^m \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n+m|}} - \ddot{a}_{\overline{m|}}$$

- FLUXO POSTECIPADO

$$_{m|}a_{\overline{n|}} = v^{m+1} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right) = v^m a_{\overline{n|}}$$

$$_{m|}a_{\overline{n|}} = a_{\overline{n+m|}} - a_{\overline{m|}}$$

EXEMPLO 9

Uma loja de departamentos está vendendo um conjunto de cadeiras. A forma de pagamento proposta pela loja consiste 8 prestações de $R\$\ 6000{,}00$ e só comece a pagar a partir do início do 4° ano após adquirir o produto, considerando uma taxa de juros de $1{,}25\%$ a.a., em regime de juros compostos. Determine o quanto custaria essas cadeiras caso fosse pago a vista.

SOLUÇÃO

$$ {}_{4|}\ddot{a}_{\overline{8|}} = v^4 \frac{1 - v^8}{1 - v} \approx 7{,}29127 $$

Assim o valor das cadeiras a vista é dado por:

$$ 6000 \times {}_{4|}\ddot{a}_{\overline{8|}} = R\$43747{,}62 $$

SOLUÇÃO (Caso Postecipado)

$$_{4|}a_{\overline{8|}} = v^5 \left(\frac{1 - v^8}{1 - v} \right) \approx 7{,}201254$$

$$6000 \times {}_{4|}\, a_{\overline{8|}} = R\$43207{,}52$$

Anuidades Diferidas

- Na prática, planos de aposentadoria são comprado anos antes do início dos recebimentos dos benefícios.

  - Anuidades diferidas são pagas passado um determinado prazo, diferentemente das anuidades imediatas.

  - Caso o participante faleça antes do início do recebimento da anuidade (antes de aposentadoria) a seguradora não terá que pagar nada ao segurado (considerando que não existe reversão para pensão).

Anuidades vitalícias Diferidas, Antecipado

$$E\left({}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}\right) = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^{t+m}\ {}_{t+m}p_x$$

- Lembrando que ${}_{t+m}p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$$E\left({}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^t v^m\ {}_mp_x\ {}_tp_{m+x}$$

$$E\left({}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}\right) = v^m\ {}_mp_x \sum_{t=0}^{\omega-x-m} v^t\ {}_tp_{m+x}$$

$$E\left({}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}\right) = {}_mE_x\ddot{a}_{x+m}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x\ddot{a}_{x+m}$$

Anuidades vitalícias Diferidas, Postecipado

$$E\left({}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}}\right) = \sum_{t=m+1} v^t \,{}_tp_x = \sum_{t=1} v^{t+m} \,{}_{t+m}p_x$$

- Lembrando que ${}_{t+m}p_x = {}_m p_x \times {}_t p_{x+m}$

$$E\left({}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}}\right) = \sum_{t=1} v^t v^m \,{}_mp_x \,{}_tp_{m+x}$$

$$E\left({}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}}\right) = v^m \,{}_mp_x \sum_{t=1} v^t \,{}_tp_{m+x}$$

$$E\left({}_{m|}a_{\overline{T_x - m|}}\right) = {}_mE_x a_{x+m}$$

$${}_{m|}a_x = {}_mE_x a_{x+m}$$

➢FLUXO ANTECIPADO

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{T_x+1-m|}}; & T_x \geq m \\ 0\,; & c.c. \end{cases}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^t \;{}_t p_x$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_m E_x \ddot{a}_{x+m}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^m \frac{1-v^{t-m+1}}{1-v} \;{}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m|}}$$

➢FLUXO POSTECIPADO

$$Y = \begin{cases} {}_{m|}a_{\overline{T_x-m|}}; & T_x \geq m \\ 0\,; & c.c. \end{cases}$$

$$_{m|}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x-m} v^t \;{}_t p_x$$

$$_{m|}a_x = {}_m E_x a_{x+m}$$

$$_{m|}a_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-m} v^{m+1} \left(\frac{1-v^{t-m}}{1-v}\right) {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m|}}$$

EXEMPLO 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 20 anos, que paga 1 u.m. com pagamento **antecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento imediato.

$$_{20|}\ddot{a}_{40} = \sum_{t=20}^{\omega-60} v^{t}\ {}_{t}p_{40}$$

$$_{20|}\ddot{a}_{40} = {}_{20}E_{40}\ddot{a}_{60} = v^{20}\ {}_{20}p_{40}\left(\sum_{t=0}^{\omega=60} v^{t}\ {}_{t}p_{60}\right)$$

EXEMPLO 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$$_{19|}a_{40} = v^{19}\ _{19}p_{40}\left(\sum_{t=1} v^{t}\ _{t}p_{59}\right)$$

$$_{19|}a_{40} = v^{19}\ _{19}p_{40}\left(\sum_{t=0} v^{t+1}\ _{t+1}p_{59}\right) = v^{19}\ _{19}p_{40}\left(\sum_{t=0} v^{t}v^{1}\ _{1}p_{59}\ _{t}p_{59+1}\right)$$

$$_{19|}a_{40} = v^{19}\ _{19}p_{40}v^{1}\ _{1}p_{59}\left(\sum_{t=0} v^{t}\ _{t}p_{59+1}\right) = v^{20}\ _{19}p_{40}\ _{1}p_{40+19}\left(\sum_{t=0} v^{t}\ _{t}p_{59+1}\right)$$

$$_{19|}a_{40} = v^{20}\ _{20}p_{40}\left(\sum_{t=0} v^{t}\ _{t}p_{59+1}\right) = \ _{20|}\ddot{a}_{40}$$

EXEMPLO 10

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade vitalícia diferida por 19 anos, que paga 1 u.m. com pagamento **Postecipado**. Considerando a tábua de mortalidade AT-2000 masculina e uma taxa de juros de 5% a.a., calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido.

$$_{19|}a_{40} = \sum_{t=19+1} v^t \ _tp_{40} = \sum_{t=20} v^t \ _tp_{40} = \ _{20|}\ddot{a}_{40}$$

Anuidades Diferidas Temporárias

- VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento antecipado, $\mathrm{b} = 1\ u.m.$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = {}_{m}E_x \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = {}_{m}E_x \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_{t}p_{x+m}$$

- VPA de uma anuidade temporária por n anos, diferida por m anos com pagamento postecipado, $\mathrm{b} = 1\ u.m.$

$$_{m|}a_{x:\overline{n|}} = {}_{m}E_x a_{x+m:\overline{n|}} = {}_{m}E_x \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_{t}p_{x+m}$$

EXEMPLO 11

Seja uma pessoa de 40 anos que queira comprar uma anuidade que paga 1 u.m. no período de 3 anos. No entanto essa anuidade é diferida por 3 anos. Considerando a tábua de mortalidade dada e uma taxa de juros de 5% a.a., Calcule o Prêmio Puro Único a ser pago pelo segurado para comprar essa anuidade com pagamento diferido, antecipado e postecipado.

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

SOLUÇÃO Pagamento Antecipado, $b = 1\ u.m,\ m = 3, n = 3,\ \ i = 0{,}05$

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = {}_{m}E_{x}\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = {}_{3}E_{40}\ddot{a}_{43:\overline{3}|}$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^{3}\ {}_{3}p_{40}\sum_{t=0}^{3-1} v^{t}\ {}_{t}p_{43}$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = v^{3}\ {}_{3}p_{40}(1 +\ v\, p_{43} + v^{2}\ {}_{2}p_{43})$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{3} p_{40}p_{41}p_{42}\left[1 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right) p_{43} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} p_{43}p_{44}\right]$$

$$_{3|}\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = 2{,}457604$$

SOLUÇÃO Pagamento Postecipado, $b = 1\, u.m,\ m = 3, n = 3,\ \ i = 0{,}05$

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_{m}E_{x}a_{x+m:\overline{n}|}$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = {}_{3}E_{40}a_{43:\overline{3}|}$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = v^3\ {}_{3}p_{40}\sum_{t=1}^{3} v^t\ {}_{t}p_{43}$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = v^3\ {}_{3}p_{40}(v\, p_{43} + v^2\ {}_{2}p_{43} + v^3\ {}_{3}p_{43})$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{40}p_{41}p_{42}\left[\left(\frac{1}{1{,}05}\right)p_{43} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 p_{43}p_{44} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 p_{43}p_{44}p_{45}\right]$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = 0{,}8591533 \times 2{,}71444$$

$$_{3|}a_{40:\overline{3}|} = 2{,}33212$$

EXEMPLO 12 : Mostre um exemplo que verifica-se a relação:

$$_{m+1|}\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = {}_{m|}a_{x:\bar{n}|}$$

x	qx	px	lx
35	0,000792	0,999208	978890,5
36	0,000794	0,999206	978115,2
37	0,000823	0,999177	977338,6
38	0,000872	0,999128	976534,2
39	0,000945	0,999055	975682,7
40	0,001043	0,998957	974760,7
41	0,001168	0,998832	973744
42	0,001322	0,998678	972606,7
43	0,001505	0,998495	971320,9
44	0,001715	0,998285	969859
45	0,001948	0,998052	968195,7
46	0,002198	0,997802	966309,7
47	0,002463	0,997537	964185,7
48	0,00274	0,99726	961810,9
49	0,003028	0,996972	959175,6
50	0,00333	0,99667	956271,2
51	0,003647	0,996353	953086,8
52	0,00398	0,99602	949610,9
53	0,004331	0,995669	945831,5
54	0,004698	0,995302	941735,1
55	0,005077	0,994923	937310,8