

# Matemática atuarial

## Seguros Aula 4

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

Leonardo Henrique Costa

[leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

# Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
  - Avaliar riscos.
  - Avaliar sistemas de investimentos.
- A matemática atuarial atua fornecendo meios para apuração de prêmios de seguros ligados à vida...
  - Produtos atuariais do ramo vida
    - Seguros,
    - Planos de previdência,
    - Planos de benefício

# Seguros

- *Seguro é todo contrato pelo qual uma das partes (**segurador**) se obriga a pagar um \*benefício a outra (**segurado**) em caso de ocorrência de **sinistro**, em troca do recebimento de um **prêmio** seguro.*
- Características do contrato de seguros
  - Aleatório: Depende de elementos futuros e incertos;
  - Bilateral: Há obrigações para as duas partes;
  - Oneroso: Segurado e segurador possuem ônus e vantagens econômicas;
  - Solene: Há uma formalidade materializada na forma de apólice;

# Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte .
  - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
  - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
  - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.
  - Refletem uma característica única nos seres humanos.

# Seguro de vida

- Para a apuração dos **prêmios** ligados à vida é necessário uma avaliação do **risco** de morte:
- Como o risco é uma probabilidade de ocorrência de eventos desfavoráveis, logo:
  - É necessário identificar e caracterizar a variável aleatória trabalhada.
    - Tempo de vida restante.
- Diferente do risco de danos, no risco de vida (sob certas circunstâncias) a seguradora lida com a certeza que terá que pagar algum dia o valor do benefício

# Seguro de vida

- Suponha que a seguradora deseja guardar o valor presente do gasto que ela terá com o segurado no futuro. Qual deverá ser esse valor?

Lembrando da matemática financeira temos:

$$F_0 = Fv^n = bv^n$$

É usual chamar de  $b$  o benefício pago ao segurado, e  $n$  nesse caso corresponde ao tempo de vida do segurado.

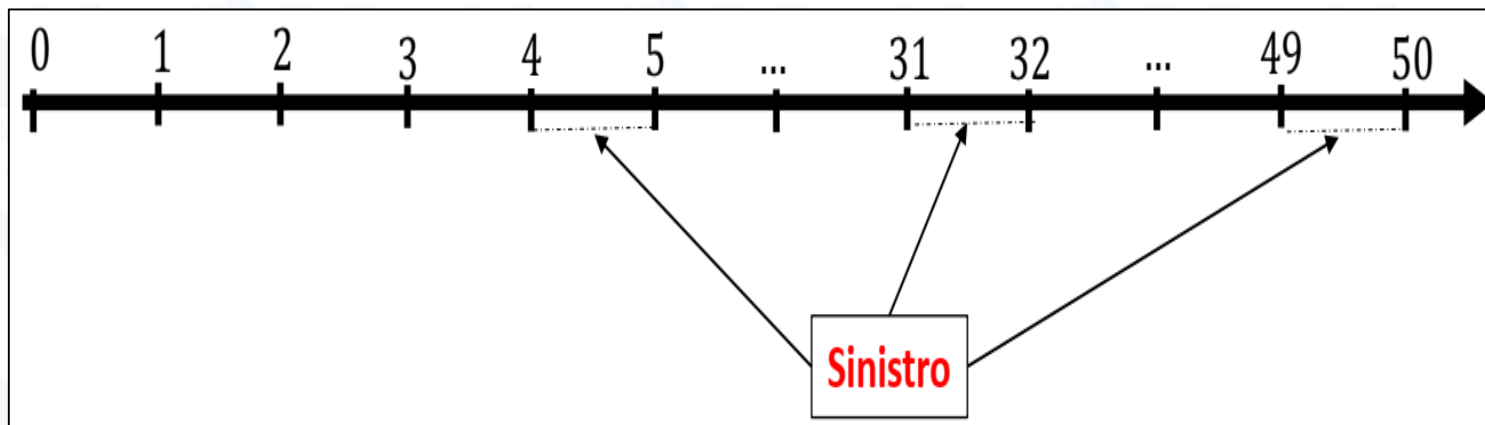
- O tempo de vida futuro (ou adicional ) de um indivíduo de idade  $x$ , que deseja contratar um seguro de vida inteiro (vitalício) é definida por uma variável aleatória, tal que:
  - $T \in (0, \infty)$
  - Tábua de vida.
  - Função de distribuição.

## EXEMPLO 1

Para que um beneficiário receba um valor financeiro de \$100 000,00 ao **final do ano de morte** do segurado, daqui  $T$  anos. Qual deve ser o valor presente ( $VP$ ) ou  $F_0$ ?

Resp.

$$VP = 100000 \left( \frac{1}{1+i} \right)^{T+1} = 100000 v^{T+1}$$



## EXEMPLO 1 (continuação)

Para o caso de  $i = 5\%$  ao ano, então

$$v = \frac{1}{1 + 0,05} = 0,9524$$

Assim pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário a pagar o benefício de \$100 000,00 para os casos em que:

➤ O indivíduo  $x$  (segurado) morra em 4 anos.

$$VP =$$

➤ O indivíduo  $x$  (segurado) morra em 31 anos.

$$VP =$$

➤ O indivíduo  $x$  (segurado) morra em 49 anos.

$$VP =$$



## EXEMPLO 1 (continuação)

Para o caso de  $i = 5\%$  ao ano, então

$$v = \frac{1}{1 + 0,05} = 0,9524$$

Assim pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário a pagar o benefício de \$100 000,00 para os casos em que:

- O indivíduo  $x$  (segurado) morra em 4 anos.

$$VP = 100000v^{4+1} = 100000(0,9524)^5 \approx \$78352,61$$

- O indivíduo  $x$  (segurado) morra em 31 anos.

$$VP = 100000v^{31+1} = 100000(0,9524)^{32} \approx \$20986,61$$

- O indivíduo  $x$  (segurado) morra em 49 anos.

$$VP = 100000v^{49+1} = 100000(0,9524)^{50} \approx \$8720,37$$

# Seguro de vida

- Em resumo temos que a uma taxa de 5% ao ano para um beneficiário poder ganhar  $b = \$100000,00$  reais depois de 4 , 31 e 49 anos, tempos que ter os seguintes valores presentes.

$T(anos)$	$VP(\$)$
4	\$78352,61
31	\$20986,61
49	\$ 8720,37

- Imagine que  $T$  é uma variável aleatória e esses são os únicos valores que ele pode assumir. Então que é o valor presente esperado que o indivíduo  $x$  deveria pagar hoje por este seguro de modo que a seguradora receba o necessário para pagar o benefício de \$100 000,00?

# Seguro de vida

A resposta a essa questão está relacionada a esperança matemática (valor esperado ou média probabilística) de uma função de variável aleatória.

Para o caso em questão seja  $T$  uma variável aleatória e  $V.P = g(T) = bv^{T+1}$  então tem-se que:

$$E[g(T)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f_T(t)dt,$$

$$E[g(T)] = \sum_j g(t_j)P(T = t_j),$$

# Seguro de vida

Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de  $bv^{T+1}$ , logo:

$$E(VP) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

# Seguro de vida

Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser o valor esperado para  $bv^{T+1}$ , logo:

$$E(VP) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

$$E(VP) = 100000(0,9524)^5P(T = 4) + 100000(0,9524)^{32}P(T = 31) + 100000(0,9524)^{50}P(T = 49)$$

$$E(VP) = 100000[(0,9524)^5P(T = 4) + (0,9524)^{32}P(T = 31) + (0,9524)^{50}P(T = 49)]$$

$$E(VP) = 100000E(v^{T+1})$$

Também chamado de **valor presente atuarial VPA**.

# Seguro de vida

*Definição:* Seja  $T$  a variável aleatória associada ao tempo de vida futuro, ou seja, o tempo entre a emissão da apólice do seguro e a morte do segurado, então:

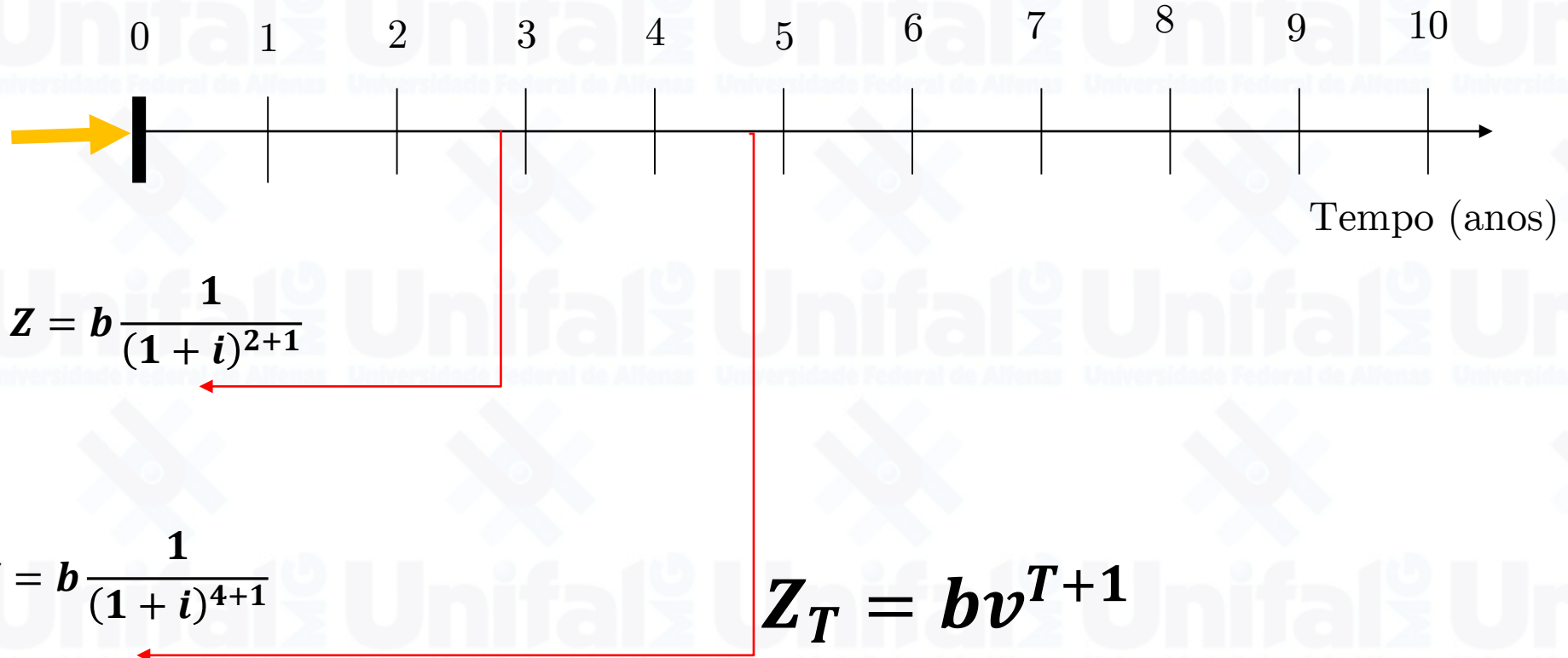
$b_T = b \rightarrow$  Função benefício;

$v_t = v^{t+1} \rightarrow$  Função desconto;

$Z_T = bv^{T+1} \rightarrow$  Função valor presente.

# Seguro de vida pago ao fim do ano de morte

Benefício(constante) igual a  $b$



# Prêmio Puro único

- Chame de **prêmio puro único** a parcela única do prêmio, suficiente para pagar sinistros.
- Neste sentido o **prêmio puro único** é o prêmio que propõe o pagamento de despesas relacionadas ao risco que está sendo assumido pela seguradora.
  - O valor **esperado** do valor presente de todos os benefícios que a seguradora compromete a pagar.
- Em geral é estabelecido em um dado período, normalmente um ano.
- O termo **puro** significa que ao valor considerado não foram adicionadas quaisquer cargas técnicas.
  - De gestão ou comerciais
- O termo **único** se refere ao fato do pagamento do prêmio ser feito mediante um único pagamento.



# Seguro de vida

- Só há equilíbrio entre lucro e prejuízo se houver um elevado número de contratos do mesmo tipo...
- A reserva criada, recebendo apenas como prêmio o valor atuarial do risco coberto, não é suficiente para garantir que a seguradora não venha a ter prejuízos significativos.

# SEGURO DE VIDA VITALÍCIO (INTEIRO)

- No caso de Seguro de Vida Vitalício:
  - Existe incerteza sobre o momento do pagamento, e o benefício será pago não importando quando.
- O valor presente de um benefício unitário pago ao final do ano de morte de um segurado de idade  $x$  será representado pela variável aleatória,  $Z_{T_x}$ , tal que:

$$Z_{T_x} = v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, \omega - x$$

em que  $\omega$  corresponde a última idade da tábua de vida usada como modelo de probabilidade...

## EXEMPLO 2

Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos? Considere um benefício igual a \$1, com taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$x$	$q_x$
...	
110	0,60392
111	0,66819
112	0,73948
113	0,81825
114	0,90495
115	1,00000

➤ Resp.:

$$\omega - x = 5$$

$b_T = \begin{cases} 1, & t = 0, 1, 2, \dots, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow$  Função benefício ( caso o tempo de vida adicional seja menor que o tempo de contrato, caso morra antes);

$v_T = v^{t+1}, t \geq 0 \rightarrow$  Função desconto ( caso o tempo de vida adicional seja maior que zero, caso o segurado não morra no primeiro período do contrato);

$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow$  Função valor presente ( o valor presente necessário para que a seguradora cubra a apólice contratada).

Obs. É normal o uso de  $T_x$  para indicar que a variável  $T$  está vinculada a idade  $x$

$$b_T = 1.u.m, \quad i = 4\%.$$

$x$	$q_x$	$p_x$	$l_x$
...			
110	0,60392	0,39608	305,008
111	0,66819	0,33181	120,808
112	0,73948	0,26052	40,0852
113	0,81825	0,18175	10,443
114	0,90495	0,09505	1,89801
115	1,00000	0,00000	0,18041

$$Z_t = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6\}$$

$$\begin{aligned} E(Z_T) \\ = v^1 P(T_{110} = 0) + v^2 P(T_{110} = 1) + v^3 P(T_{110} = 2) + v^4 P(T_{110} = 3) + v^5 P(T_{110} = 4) \\ + v^6 P(T_{110} = 5) \end{aligned}$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} P(T_{110} = t)$$

**Importante:**  $P(T_x = t)$  corresponde a probabilidade do tempo de vida adicional ser igual a  $t$ , no caso a probabilidade que indivíduo “morra” durante o intervalo  $t$  e  $t + 1$  é determinado

$$P(t < T_x \leq t + 1) = P(T_x > t) - P(T_x > t + 1)$$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x$$

Lembrando da relação  ${}_{m+l} p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_t p_x {}_1 p_{x+t}$$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x (1 - {}_1 p_{x+t})$$

$$P(T_x = t) = ({}_t p_x) (q_{x+t}) = {}_t | q_x$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} ({}_t p_{110}) (q_{110+t})$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} P(T_{110} = t) = \sum_{t=0}^5 v^{t+1} ({}_t p_{110}) (q_{110+t})$$

$$\begin{aligned} E(Z_{T_{110}}) &= v^1 {}_0 p_{110} q_{110} + v^2 {}_1 p_{110} q_{111} + v^3 {}_2 p_{110} q_{112} + v^4 {}_3 p_{110} q_{113} + v^5 {}_4 p_{110} q_{114} \\ &+ v^6 {}_5 p_{110} q_{115} \end{aligned}$$

$$E(Z_{T_{110}}) \approx 0,9403557 u.m.$$

Sabendo que  ${}_0 p_x = P(T_x > 0) = 1$ ,  ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$  e  ${}_{m+l} p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$ , ou seja:

$${}_3 p_{110} = \frac{{}_0 p_{110} = 1}{l_{110}} = ({}_1 p_{110})({}_2 p_{111})({}_3 p_{112})$$

Seguro de vida de uma pessoa de idade  $x$  com cobertura vitalícia, com benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado

$$E(Z_{T_x}) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} P(T_x = t) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t}) = E(Z_{T_x})$$

$$A_{110} \approx 0,9403557u.m.$$



# Observação

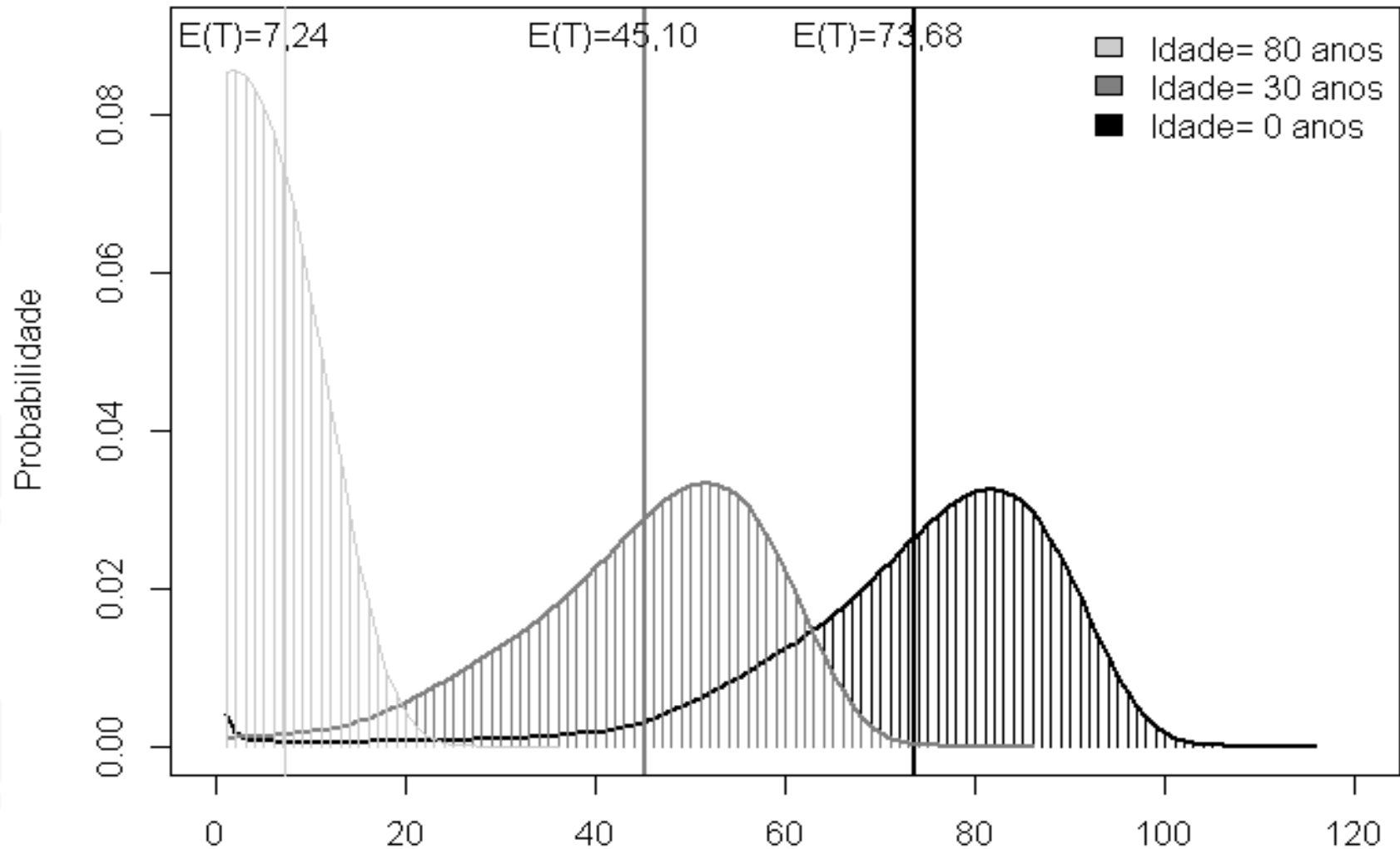
A expectativa de vida de uma pessoa de idade  $x$ , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t p_x$$

A expectativa de vida completa de uma pessoa de idade  $x$ , admitindo que a distribuição das mortes ao longo do ano é uniforme, é dada por:

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

# Probabilidades AT-49 M



# SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- No caso de Seguro de Vida Temporário:
  - Existe a incerteza sobre a ocorrência ou não do pagamento do benefício.
  - Existe incerteza sobre o momento do pagamento.
- Como calcular do VPA desse Benefício?
  - Calcular a esperança matemática da variável aleatória “quanto devo ter hoje para pagar o benefício devido em relação a um segurado?”

**EXEMPLO 3:** Pense no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro onde caso este segurado faleça nos próximos 5 anos, o seu beneficiário receberá uma quantia de *1.u.m.* Considere também uma taxa de juros de 4% ao ano e as seguintes probabilidade de morte. Calcule o valor esperado da função valor presente.

Idade	$q_x$
25	0,00077
26	0,00081
27	0,00085
28	0,00090
29	0,00095
30	0,00100
31	0,00107
32	0,00114
33	0,00121
34	0,00130
35	0,00139

➤ Resp.:

$b_T = \begin{cases} 1, & t = 0, 1, 2, \dots, 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow$  Função benefício ( caso o tempo de vida adicional seja menor que o tempo de contrato, caso morra antes);

$v_T = v^{t+1}, t \geq 0 \rightarrow$  Função desconto ( caso o tempo de vida adicional seja maior que zero, caso o segurado não morra no primeiro período do contrato);

$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow$  Função valor presente ( o valor presente necessário para que a seguradora cubra a apólice contratada).

Obs. É normal o uso de  $T_x$  para indicar que a variável  $T$  está vinculada a idade  $x$

$$b_T = 1.u.m, \quad i = 4\%.$$

Idade	$q_x =_1 q_x$	$p_x =_1 p_x = 1 - q_x$	${}_1l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

$$Z_t = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, 0\}$$

$$E(Z_T) = v^1P(T_{25} = 0) \, + \, v^2P(T_{25} = 1) + v^3P(T_{25} = 2) + v^4P(T_{25} = 3) + v^5P(T_{25} = 4) + [0P(T_{25} = 5) + \cdots]$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 {}_0p_{25}q_{25} + v^2 {}_1p_{25}q_{26} + v^3 {}_2p_{25}q_{27} + v^4 {}_3p_{25}q_{28} + v^5 {}_4p_{25}q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 {}_2p_{25} q_{27} + v^4 {}_3p_{25} q_{28} + v^5 {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1,04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$



$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 {}_2p_{25} q_{27} + v^4 {}_3p_{25} q_{28} + v^5 {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1,04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1,04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1,04}\right) 0,00077 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^2 0,99923 0,00081 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^3 0,99842 0,00085 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^4 0,99757 0,00090 + \left(\frac{1}{1,04}\right)^5 0,99667 0,00095$$

$$E(Z_{T_{25}}) \approx 0,003788 \text{ u.m.}$$

Outra opção seria:

$$b_T = \begin{cases} 1, & t = 0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad v_T = v^{t+1}, t \geq 0 \quad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$VPA = E(Z_T)$$

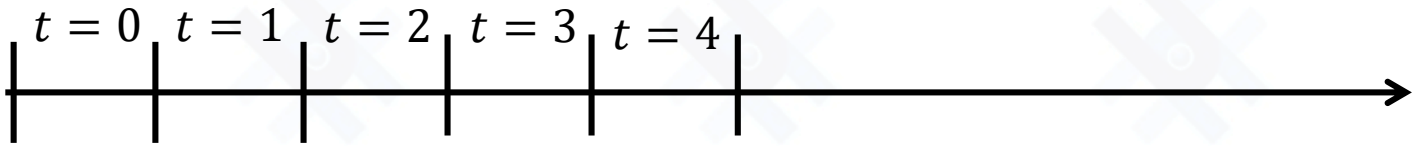
---


$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 {}_2p_{25} q_{27} + v^4 {}_3p_{25} q_{28} + v^5 {}_4p_{25} q_{29}$$

Como  ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$ , então:

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2 p_{25} q_{26} + v^3 p_{25} p_{26} q_{27} + v^4 p_{25} p_{26} p_{27} q_{28} + v^5 p_{25} p_{26} p_{27} p_{28} q_{29}$$

$$E(Z_T) \approx 0,003788 \text{ u.m.}$$



$$E(Z_T) = v^1P(T_{25} = 0) + v^2P(T_{25} = 1) + v^3P(T_{25} = 2) + v^4P(T_{25} = 3) + v^5P(T_{25} = 4)$$

$x$	T. vida adicional	$Z(t)$	$S_T(t) = {}_t p_x$	$F_T(t) = {}_1 q_x$
25	$t = 0$	$v$	$T(25) > 0$	$T(25) \leq 1$
26	$t = 1$	$v^2$	$T(25) > 1$	$T(25) \leq 2$
27	$t = 2$	$v^3$	$T(25) > 2$	$T(25) \leq 3$
28	$t = 3$	$v^4$	$T(25) > 3$	$T(25) \leq 4$
29	$t = 4$	$v^5$	$T(25) > 4$	$T(25) \leq 5$

$$E(Z_T) = \sum_{t=0}^4 v^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0,003788 \text{ u. m.}$$

Seguro de vida de uma pessoa de idade  $x$  com cobertura de  $n$  anos, com benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado.

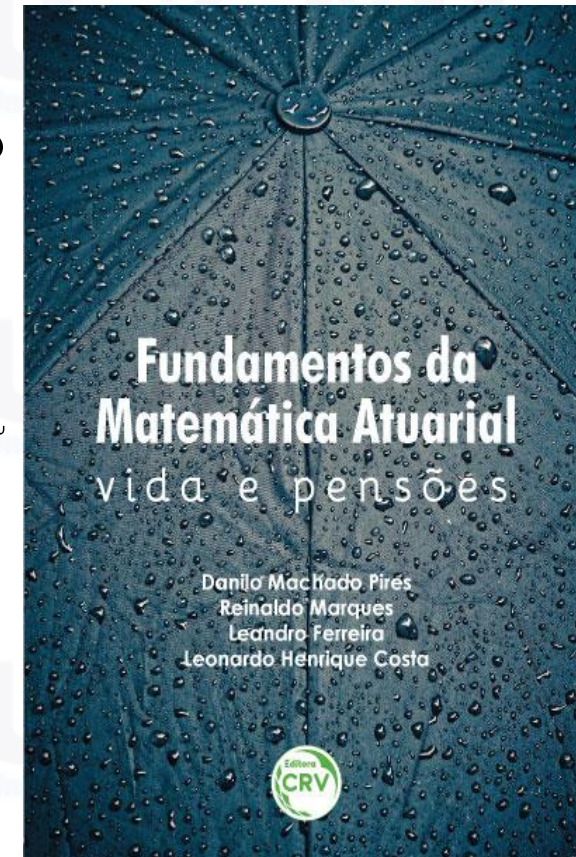
$$E(Z_{T_x}) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(T_x = t) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t})$$

$$A_{x^{\overline{1}:n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_x) (q_{x+t}) = E(Z_{T_x})$$

“1” acima do “ $x$ ” indica que o seguro é pago se “ $x$ ” expirar antes que “ $n$ ”.

$$A_{25^{\overline{1}:5|}} \approx 0,003788 \text{ u.m}$$

- Portal Halley : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2<sup>a</sup> edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.



# Matemática atuarial

## Seguros Aula 5

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

**Exemplo 1:** Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de **vida inteiro** que paga 1 *u.m.* ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevivência desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago por esse segurado?



## Exemplo 1:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left( \frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t}$$

$$A_{25} = \left( \frac{1}{1,05} \right)^1 q_{25} + \left( \frac{1}{1,05} \right)^2 {}_1 p_{25} q_{26} + \left( \frac{1}{1,05} \right)^3 {}_2 p_{25} q_{27} + \cdots + \left( \frac{1}{1,05} \right)^{91} {}_{90} p_{25} q_{115} \approx 0,11242$$



# Exemplo 1:

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^1 q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}^{\textcolor{red}{p}}_{25}q_{26} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^3 {}^{\textcolor{red}{2p}}_{25}q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} {}^{90p}_{25}q_{115} \approx 0,11242$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^1 {}^{\textcolor{red}{1}}q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^2 {}^{\textcolor{red}{p}}_{25}q_{26} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} ({}^{\textcolor{red}{p}}_{25}{}^{\textcolor{red}{p}}_{26}{}^{\textcolor{red}{p}}_{27} \cdots {}^{\textcolor{red}{p}}_{114})q_{115} \approx 0,11242$$

**Exemplo 2:** A seguradora irá pagar um benefício de 1 u.m. por um seguro temporário caso o segurado de 105 anos faleça dentre um período de 4 anos. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e tábua At-2000 Masculina . Calcule o prêmio puro:

	$x$	$q_x$	$p_x$
106	105	0.37240	0.62760
107	106	0.40821	0.59179
108	107	0.44882	0.55118
109	108	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	112	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	114	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

$$A_{105^{1:\overline{4}|}} = v^1 {}_0p_{105}q_{105} + v^2 {}_1p_{105}q_{106} + v^3 {}_2p_{105}q_{107} + v^4 {}_3p_{105}q_{108}$$

$$A_{105^{1:\overline{4}|}} = \sum_{t=0}^3 v^{t+1} {}_tp_{105}q_{105+t}$$

$$v = \{v^1, v^2, v^3, v^4\}$$

$$p_{xx} = \{ {}_0p_{105}, {}_1p_{105}, {}_2p_{105}, {}_3p_{105}\}$$

$$q_{xx} = \{q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}\}$$

$$A_{105^1:\bar{4}|} = \sum_{t=0}^3 v^{t+1} {}_t p_{105} q_{105+t}$$

# Função que recebe como entrada, a taxa de rentabilidade(i) anual, a idade do segurado (idade), o numero de anos de cobertura (n) e o valor do benefício (b).

	$x$	$q_x$	$p_x$
106	105	0.37240	0.62760
107	106	0.40821	0.59179
108	107	0.44882	0.55118
109	108	0.49468	0.50532
110	109	0.54623	0.45377
111	110	0.60392	0.39608
112	111	0.66819	0.33181
113	112	0.73948	0.26052
114	113	0.81825	0.18175
115	114	0.90495	0.09505
116	115	1.00000	0.00000

```
Ax<- function( i, idade, n,b) {
  v    <- (1/(i+1))^(1:n)
  pxx  <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
  # 1, p105, 2 p105, 3 p105
  qxx  <- qx[(idade+1):(idade+n)]
  # q105, q106, q107, q108
  Ax   <- b* sum(v*pxx*qxx)
  return (Ax)
}
```

$A_{105^1:\bar{4}|}$  = premio(0.04,105,4,1)

## SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

➤ Caso discreto

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = A_x(i, x, n, b)$$

## SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

➤ Caso discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_x = A_x(i, x, \max(x) - x, b)$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

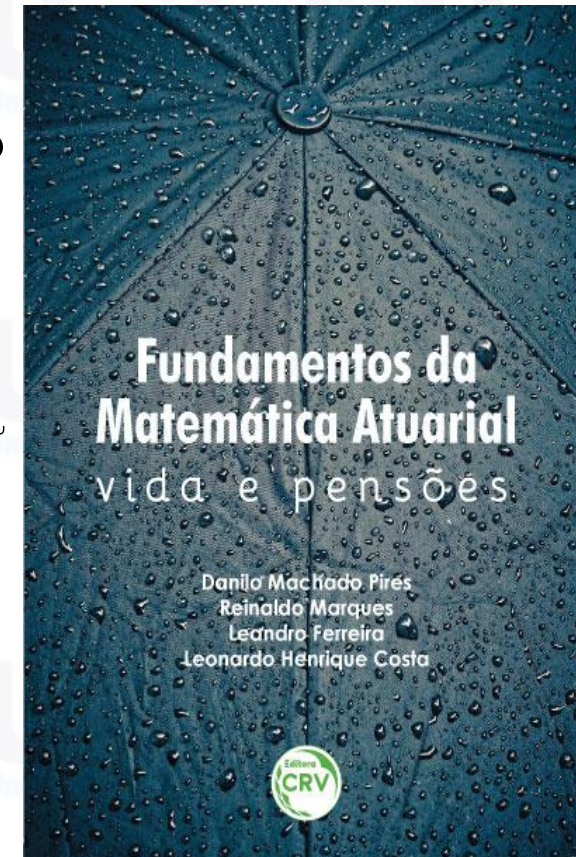
$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & T = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$E(Z_T)$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2<sup>a</sup> edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.



# Matemática atuarial

## Seguros Aula 6

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)



# Seguro de vida pago no momento da morte

Seja  $T$  ou  $T_0$  a variável aleatória associada ao tempo de vida adicional de um indivíduo recém nascido (de idade **0**). Então a função de sobrevivência,  $S_{T_0}(t)$ , é a probabilidade desse indivíduo viver além da idade futura  $t$ , tal que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - F_{T_0}(t) = P(T_0 > t) \quad \text{ou} \quad S_T(t) = 1 - F_T(t) = P(T > t)$$

Seja  $T_x$  a variável aleatória tempo de vida adicional do indivíduo de idade  **$x$** . Então a função de sobrevivência,  $S_{T_x}(t)$ , é a probabilidade de viver além da idade futura  $t$ .

$$S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t) = P(T_x > t)$$



# Seguro de vida pago no momento da morte

- A probabilidade de uma pessoa de idade  $x$  atingir (viva) a idade  $x + t$ , é dada por:

$${}_t p_x = S_{T_x}(t) = p(T_x > t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x)$$

$${}_t p_x = \frac{S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} = \frac{P(T > t + x)}{P(T > x)}$$

- A probabilidade de uma pessoa de idade  $x$  morrer antes de atingir a idade  $x + t$ , é dado por:

$${}_t q_x = 1 - \frac{S_{T_0}(x + t)}{S_{T_0}(x)} = F_{T_x}(t)$$

Logo:

$${}_t q_x + {}_t p_x = 1$$

# Observação

A expectativa de vida de uma pessoa de idade  $x$ , mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\omega-x} t p_x dt$$

Pois

$$E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\omega-x} (1 - F_{T_x}(t)) dt$$

**Exemplo 1:** Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

Calcule  $e_0$ ,  ${}_t p_x$  e  ${}_t q_x$ .

**Exemplo 1:** Nota-se que para  $T_0 \sim U_c(0,140)$  , implica aceitar que  $e_0 = E(T_0) = \frac{140}{2}$ , pois:

$$e_0 = \int_0^{140} t \left( \frac{1}{140} \right) dt$$

$$e_0 = \left[ \frac{t^2}{2} \left( \frac{1}{140} \right) \right]_{t=0}^{t=140} = \frac{140^2}{2} \left( \frac{1}{140} \right) = \frac{140}{2}$$

$$e_0 = 70 \text{ anos}$$

## Exemplo 1

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = {}_t p_x$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x)$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T_0 > x + t, T_0 > x)}{P(T_0 > x)} = \frac{P(T > x + t, T > x)}{P(T > x)}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{\int_{x+t}^{140} \frac{1}{140} dt}{\int_x^{140} \frac{1}{140} dt} = \frac{\frac{140 - (x + t)}{140}}{\frac{140 - (x)}{140}} = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$${}_t p_x = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$${}_t q_x = 1 - \frac{140 - x - t}{140 - x} = \frac{t}{140 - x}$$

## Exemplo 1

$${}_t p_x = \frac{140-x-t}{140-x} \rightarrow {}_t p_0 = \frac{140-t}{140}$$

$$e_0 = \int_0^{140} \frac{140-t}{140} dt$$

$$e_0 = \left[ t - \frac{t^2}{2} \left( \frac{1}{140} \right) \right]_{t=0}^{t=140} = 70 \text{ anos}$$

# Seguro de vida pago no momento da morte

A **força de mortalidade** -transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_x}{h}$$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{P(T_x \leq h)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - P(T_x > h)}{h} \right]$$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \frac{P(T_0 > x + h)}{P(T_0 > x)}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \frac{S_{T_0}(x + h)}{S_0(x)}}{h} \right]$$

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x + h)}{h S_{T_0}(x)} \right]$$

# Seguro de vida pago no momento da morte

...

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \frac{P(T_0 > x+h)}{P(T_0 > x)}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \frac{S_{T_0}(x+h)}{S_{T_0}(x)}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x+h)}{h S_{T_0}(x)} \right]$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{S_{T_0}(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{S_{T_0}(x+h) - S_{T_0}(x)}{h} \right]$$

$$\mu(x) = -\frac{S'_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}$$



# Seguro de vida pago no momento da morte

A **força de mortalidade** - transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se por:

$$\mu(x) = -\frac{S'_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}$$

- É uma medida relativa da mortalidade em que a idade  **$x$**  é atingida, enquanto  **$q_x$**  mede a mortalidade ao longo do ano.
- $\mu(x) \geq 0$ .
- $\mu(x)$  não necessariamente é menor que 1.
- $\mu(x)dx$  representa a probabilidade de morte no intervalo infinitesimal  $(0, dx)$ .

# Seguro de vida pago no momento da morte

Importante notar que:

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}({}_tq_x)$$

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}\right)$$

$$f_{T_x}(t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}$$

$$f_{T_x}(t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)} \times \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} = \left[ -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} \right] \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}$$

$$\mathbf{f_{T_x}(t) = \mu(x+t)({}_tp_x)}$$

**EXEMPLO 2:** Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

Calcule  $\mu(x+t)$ . Lembrando do exercício anterior que:

$${}_t p_x = \frac{140-x-t}{140-x} \quad {}_t q_x = \frac{t}{140-x}$$

## EXEMPLO 2

$${}_t p_x \mu(x+t) = f_{T_x}(t)$$

Então:

$${}_t q_x = \frac{1}{140-x} = F_{T_x}(t)$$

Considerando que  $\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = f_{T_x}(t)$ , assim:

$$\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{140-x} \right) = \frac{1}{140-x} = f_{T_x}(t)$$

Logo

$$\mu(x+t) = \frac{\frac{1}{140-x}}{\frac{140-x-t}{140-x}} = \frac{1}{140-x-t}$$

# Seguro de vida pago no momento da morte

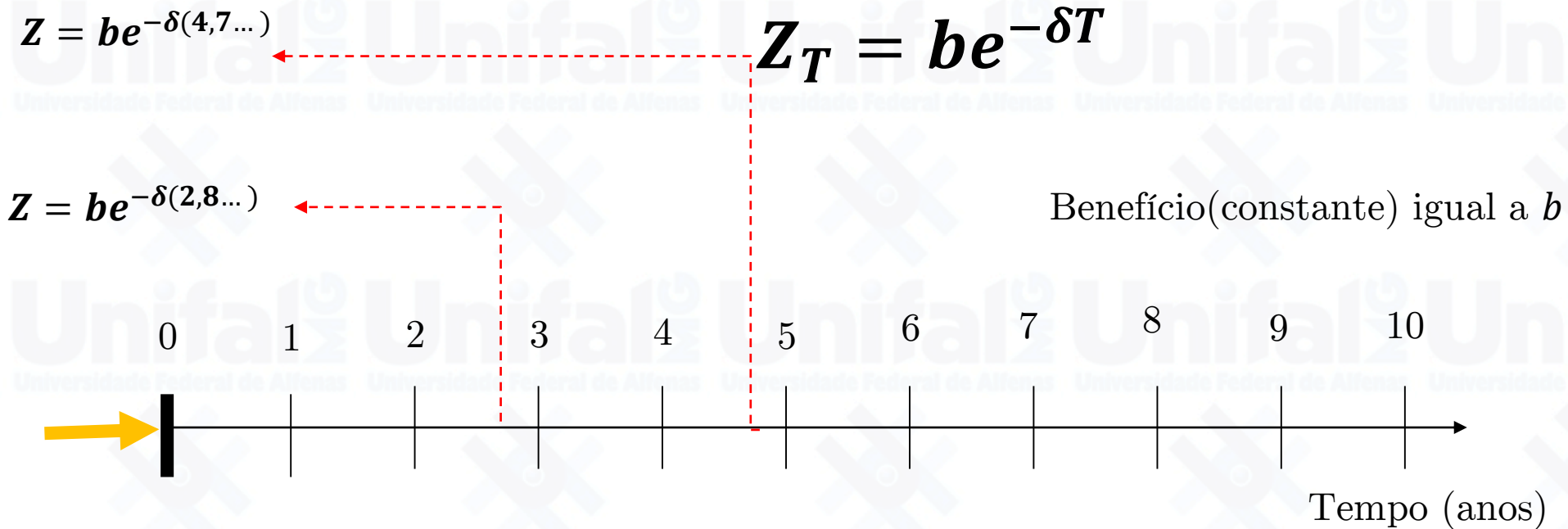
Importante notar que:

$${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt}$$

e

$${}_nq_x = 1 - e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt}$$

# Seguro de vida pago no momento da morte



Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de  $b_t e^{-\delta T}$ , logo:

$$E(VP) = E(b e^{-\delta T}) = b E(e^{-\delta T})$$

Lembrando que  $\delta = \ln(1 + i)$ .

## SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

## SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

$T_x$  Contínuo

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n \textcolor{red}{Z}_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty \textcolor{red}{Z}_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n \textcolor{red}{e}^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty \textcolor{red}{e}^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

**EXEMPLO 3:** Considere que a função de sobrevivência e força de mortalidade de  $x = 30$  em dada população seja de:

$${}_t p_{30} = \frac{70-t}{70} \quad \text{e} \quad \mu(30+t) = \frac{1}{70-t} \quad \text{para } t > 0$$

Esse indivíduo decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que a taxa de rentabilidade constante, e suponha que  $i = 5\%$  ao ano.

Calcule o VPA (prêmio puro) que paga 1 *u.m.* de benefício pago no momento da morte do segurado.



### EXEMPLO 3

$$\bar{A}_{30:1:\overline{20}|}$$

$$i = 5\% \text{ ao ano.}$$

$$v = e^{-\ln(1,05)}$$

$$b = 1, 0 \leq t \leq 20$$

$$v_t = e^{-\delta t}, 0 \leq t \leq 20$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, & 0 \leq T \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

### EXEMPLO 3

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}}, v = e^{-\ln(1,05)}$$

$$VPA = E(Z_T) = \bar{A}_{30^{1:\overline{20}}}$$

$$b = 1, 0 \leq t \leq 20 \quad v_t = e^{-\delta t}, 0 \leq t \leq 20 \quad Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq 20$$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}} = \int_0^{20} e^{-\delta t} f_{T_{30}}(t) dt = \int_0^{20} e^{-\delta t} {}_t p_{30} \mu(30+t) dt = \int_0^{20} e^{-0,04879t} \frac{1}{70} dt$$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}} = \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)} \Big|_{t=0}^{t=20} = \frac{1}{-3,4153} [e^{20(-0,04879)} - e^{0(-0,04879)}]$$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}}} = \frac{1}{-3,4153} (e^{-0,9758} - 1) \approx 0,182446$$

## EXEMPLO 3

Veja que, é suficiente para o segurado pagar  $0,182446 \text{ u.m.}$  hoje de forma a receber (o beneficiário)  $1,00 \text{ u.m.}$  na ocorrência de sinistro.

O exemplo considerou que o benefício seria de  $1 \text{ u.m.}$ , e caso o segurado contratasse um seguro que paga \$ 250000,00 reais no momento de morte? Quanto deveria ser o Prêmio Puro Único pago por ele???

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}|}}, \quad T_{30} \sim U_c(0,70) \text{ e} \quad i = 5\% \text{ a.a.} \quad v = e^{-\ln(1,05)t}$$

$$b = 2500000.$$

$$\bar{A}_{30^{1:\overline{20}|}} \approx 0,182446$$

$$250000 \bar{A}_{30^{1:\overline{20}|}} \approx 45611,53$$

Caso o valor do benefício seja \$ 250000,00, o prêmio a ser pago pelo segurado deverá ser (arredondando no centavo) de \$45611,53 (considerando a mesma taxa de juros).

**EXEMPLO 4:** Para proteger seu filho de 5 anos, uma pessoa de 30 anos decide fazer um contrato de seguro de vida temporário com benefício variável no tempo (**Considere distribuição  $T_{30} \sim U_c(0, 70)$** ).

Considere  $i = 5\%$  ao ano.

- I) Se morrer dentro de 10 anos o benefício será de \$100000,00.
- II) Se morrer entre 10 e 20 anos, o benefício será:  $150000 - 5000t$ .

**EXEMPLO 4:** Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$Z_T = b_T e^{-\delta T} = \begin{cases} 100000 e^{-\ln(1,05)T}, & T \leq 10 \\ (150000 - 5000T) e^{-\ln(1,05)T}, & 10 < T \leq 20 \end{cases}$$

Portanto:

$$VPA = \int_0^{10} \frac{100000 e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t) e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

$$VPA = VPA_1 + VPA_2$$

$$VPA_1 = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

$$VPA_1 = \frac{10000e^{-0,04879t}}{7(-0,04879)} \Bigg|_{t=0}^{t=10} = \frac{10000e^{-0,4879} - 10000}{-0,34153}$$

$$VPA_1 \approx 11304,59$$

## EXEMPLO 4

$$VPA_2 = \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

Por partes:

$$\int u dr = ur - \int r du$$

então

$$u = 150000 - 5000t;$$

→

$$du = -5000dt$$

$$dr = \frac{e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

→

$$r = \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)}$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)} \Bigg|_{t=10}^{t=20} - \int_{10}^{20} - \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)} 5000 dt$$



## EXEMPLO 4

$$VPA_2 = \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

$$\dots$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)} \Big|_{t=10}^{t=20} + \int_{10}^{20} \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)} 5000 dt$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-0,04879t}}{70(-0,04879)} \Big|_{t=10}^{t=20} + \frac{e^{-0,04879t}}{7(-0,04879)^2} 500 \Big|_{t=10}^{t=20}$$

$$VPA_2 = \frac{5000e^{-0,04879(20)} - 10000e^{-0,04879(10)}}{7(-0,04879)} + \frac{500(e^{-0,04879(20)} - e^{-0,04879(10)})}{7(-0,04879)^2}$$

$$VPA_2 \approx 12457,73 - 7112,165 \approx 5345,565$$

**Exemplo 4:** Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$VPA = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1,05)t}}{70} dt$$

$$VPA = VPA_1 + VPA_2$$

$$VPA = 11304,59 + 5345,565 \approx \$16650,15$$

# SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

➤  $T_x$  Contínuo

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n Z_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

➤  $T_x$  discreto

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

# SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

➤  $T_x$  Contínuo

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_t f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

➤  $T_x$  discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$A_{x^{1:\overline{n}}}] = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T {}_t p_x q_{x+t}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x q_{x+t}$$

$$E(Z_T)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

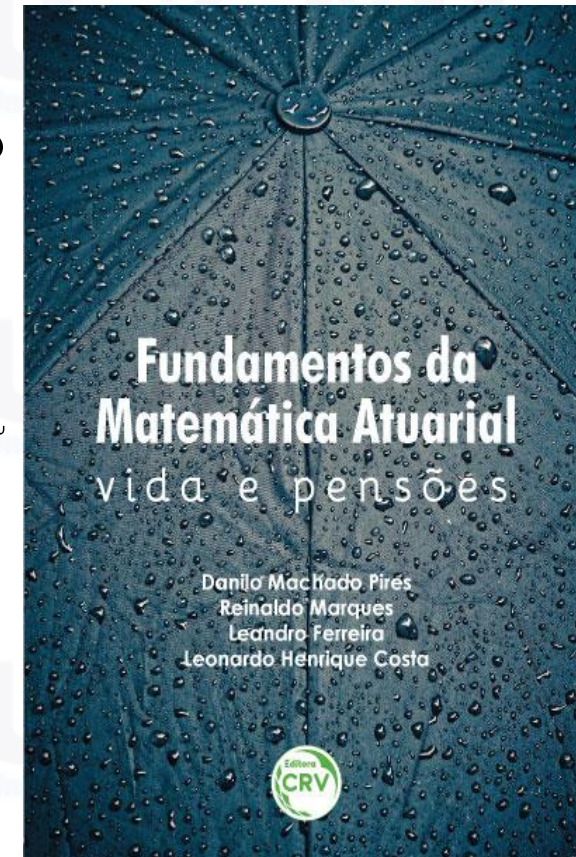
$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x^{1:\overline{n}}}] = \int_0^n Z_T {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu(x+t)$$

- Portal Halley : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2<sup>a</sup> edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.



# Matemática atuarial

## Seguros Aula 7

Danilo Machado Pires

[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)

# Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Uma característica importante de uma variável aleatória é sua variabilidade:
  - Em geral, é avaliada pela discrepância de seus valores em relação à média ou à mediana.
  - A média dos desvios é sempre zero e, portanto, nada informativa.
- Tomando o quadrado dos desvios e, então, calculando o valor esperado, chegamos a uma das mais importantes medidas de variabilidade.



# Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- A definição matemática da variância de uma variável aleatória  $Z_T$  é tal que:

$$\text{var}(Z_T) = E\{[Z_T - E(Z_T)]^2\}$$

- A raiz quadrada da variância é denominada de desvio-padrão e representado por  $\sigma_{Z_T}$ .
- Pode se calcular a variância também por:

$$\text{var}(Z_T) = E(Z_T^2) - E(Z_T)^2$$



## Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

Considerando  $Z_T = bv^{T+1}$ , uma função de variável aleatória e por consequência também uma variável aleatória, tem-se:

$$\text{var}(Z_T) = \text{var}(bv^{T+1}) = b^2 \text{var}(v^{T+1})$$

# Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

➤ Caso de  $T$  discreto:  $var(Z_T) = {}^2A_{x^1:\overline{n}|} - (A_{x^1:\overline{n}|})^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{n-1} w^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} - \left[ \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} \right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$  Fator de desconto

➤ Caso de  $T$  contínuo:  $var(Z_T) = {}^2\bar{A}_{x^1:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x^1:\overline{n}|})^2$

$$var(Z_T) = E(e^{-2\delta T}) - E(e^{-\delta T})^2 = \int_0^n e^{-2\delta t} f_{T_x}(t) dt - \left[ \int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt \right]^2$$

# Cálculo da variância: Seguro de vida inteiro

➤ Caso de  $T$  discreto:  $var(Z_T) = {}^2A_x - (A_x)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{\omega-x} w^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} - \left[ \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} \right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$  Fator de desconto

➤ Caso de  $T$  contínuo:  $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_x - (\overline{A}_x)^2$

$$var(Z_T) = E(e^{-2\delta T}) - E(e^{-\delta T})^2 = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} f_{T_x}(t) dt - \left[ \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x}(t) dt \right]^2$$

**EXEMPLO 1:** Calcule a variância de  $Z_T$ .

$$b = 1, \quad 0 \leq t < 5 \quad v^{t+1}, t \geq 0 \quad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, & 0 \leq T < 5 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Lembramos que  $A_{25^1:\bar{5}|} \approx 0,0037888$  para  $i = 4\%$ .

# Dados do exemplo 1

i = 4%

Idade	$q_x$	$p_x = 1 - q_x$	$l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$
25	0,00077	0,99923	100000
26	0,00081	0,99919	99923
27	0,00085	0,99915	99842
28	0,00090	0,99910	99757
29	0,00095	0,99905	99667
30	0,00100	0,99900	99572
31	0,00107	0,99893	99472
32	0,00114	0,99886	99365
33	0,00121	0,99879	99251
34	0,00130	0,99870	99131
35	0,00139	0,99861	99002

# EXEMPLO 1

$$var(Z_T) = {}^2A_{25^{1:\overline{5}}} - (0,0037888)^2$$

$$var(Z_t) = \sum_{t=0}^4 \left[ \left( \frac{1}{1,04} \right)^2 \right]^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} - (0,0037888)^2$$

$$var(Z_T) = \left[ \left( \frac{1}{1,04} \right)^2 q_{25} + \left( \frac{1}{1,04} \right)^4 {}_1 p_{25} q_{26} + \left( \frac{1}{1,04} \right)^6 {}_2 p_{25} q_{27} + \left( \frac{1}{1,04} \right)^8 {}_3 p_{25} q_{28} + \left( \frac{1}{1,04} \right)^{10} {}_4 p_{25} q_{29} \right] - (0,00337014)^2$$

$$var(Z_T) \approx 0,0033557$$

**EXEMPLO 2:** Considere que uma pessoa de 30 anos decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que o tempo de vida adicional desta pessoa possa ser modelado pela distribuição uniforme contínua de parâmetros 0 e 70, ou seja:

$$T_{30} \sim U_c(0,70).$$

Considere  $i = 5\%$  ao ano.

Sabemos pela resolução do problema que  $\bar{A}_{30:20|} \approx 0,182446$ . A partir dessas informações obtenha a variância para esse seguro.

## EXEMPLO 2

$$b = 1, 0 \leq t \leq 20 \quad e^{-\delta t}, t \geq 0 \quad Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, & 0 \leq T \leq 20 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$\text{var}(Z_T) = \int_0^{20} e^{-2\delta t} \frac{1}{70} dt - 0,182446^2$$

$$\text{var}(Z_T) = \frac{1 - e^{-40\delta}}{140\delta} - 0,182446^2 \approx 0,09231757$$

$$\sigma_{Z_T} = \sqrt{0,09231757} \approx 0,3038381$$



# SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

Considere a situação em que uma pessoa de 30 anos deseja fazer um seguro que pague ao seu beneficiário no momento da morte um valor de \$200 000,00. Para esse cálculo a seguradora considera uma taxa de rentabilidade anual de 5% e que o tempo de vida adicional do segurado seja modelado por um modelo uniforme contínua. Assim:

$$T_{30} \sim U_c(0,70) \quad i = 5\% \text{ ao ano} \quad b_T = R\$200000,00$$

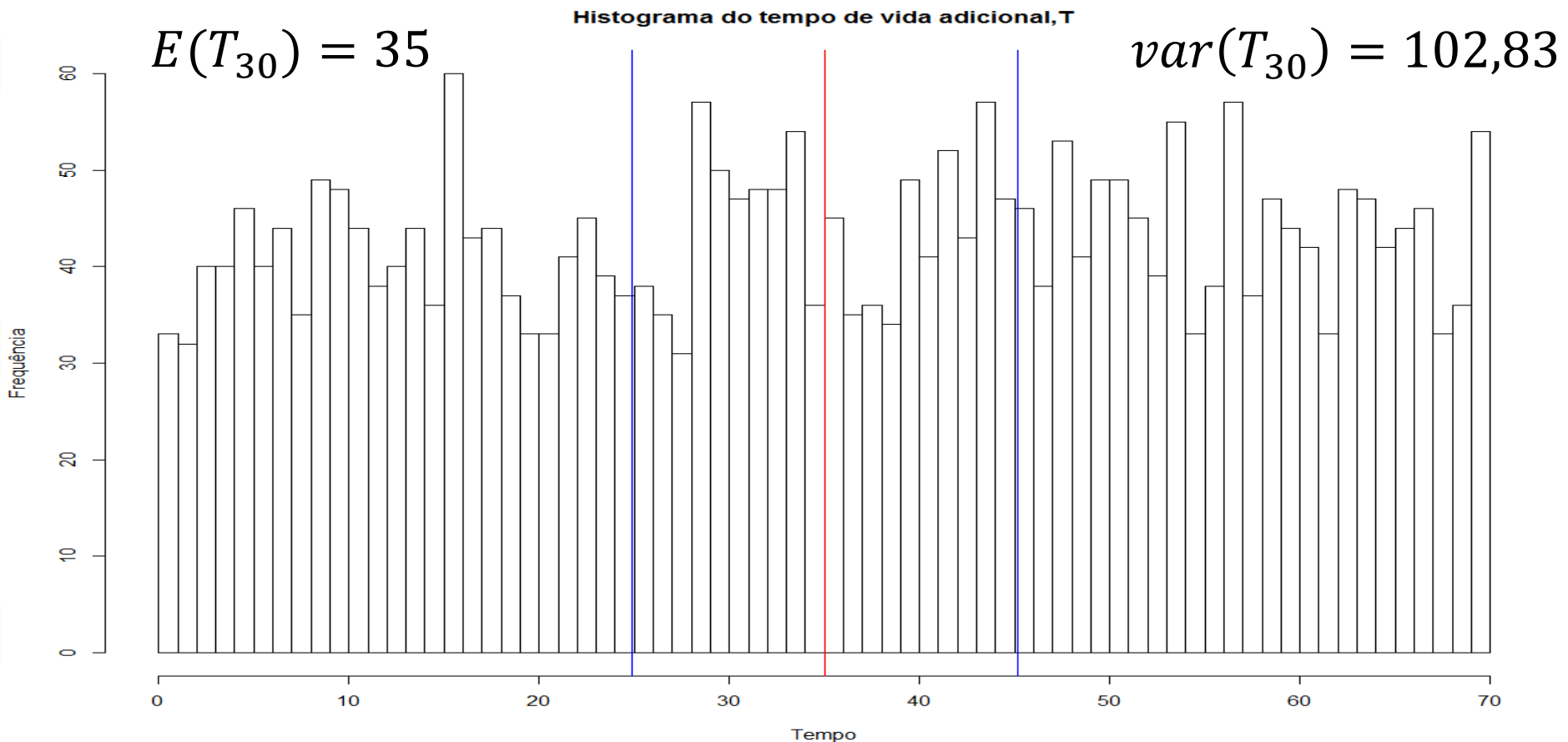
$$VPA = \int_0^{70} z_T f_T(t) dt = \int_0^{70} 200000 e^{-\ln(1,05)t} \frac{1}{70} dt$$

$$VPA = -\frac{200000 e^{-\ln(1,05)t}}{70 \ln 1,05} \Big|_{t=0}^{t=70} = \frac{200000}{70 \ln 1,05} [-e^{-\ln(1,05)70} + e^{-\ln(1,05)0}]$$

$$VPA = 200000 \bar{A}_{30} = 58559,81(-e^{-3,415} + 1) \approx 56634,57$$

# SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

Considere agora que após um determinado tempo observando 3000 pessoas da mesma coorte que fizeram no mesmo ano um seguro de vida vitalício. Seja anotado o tempo gasto para que cada um venha a falecer.



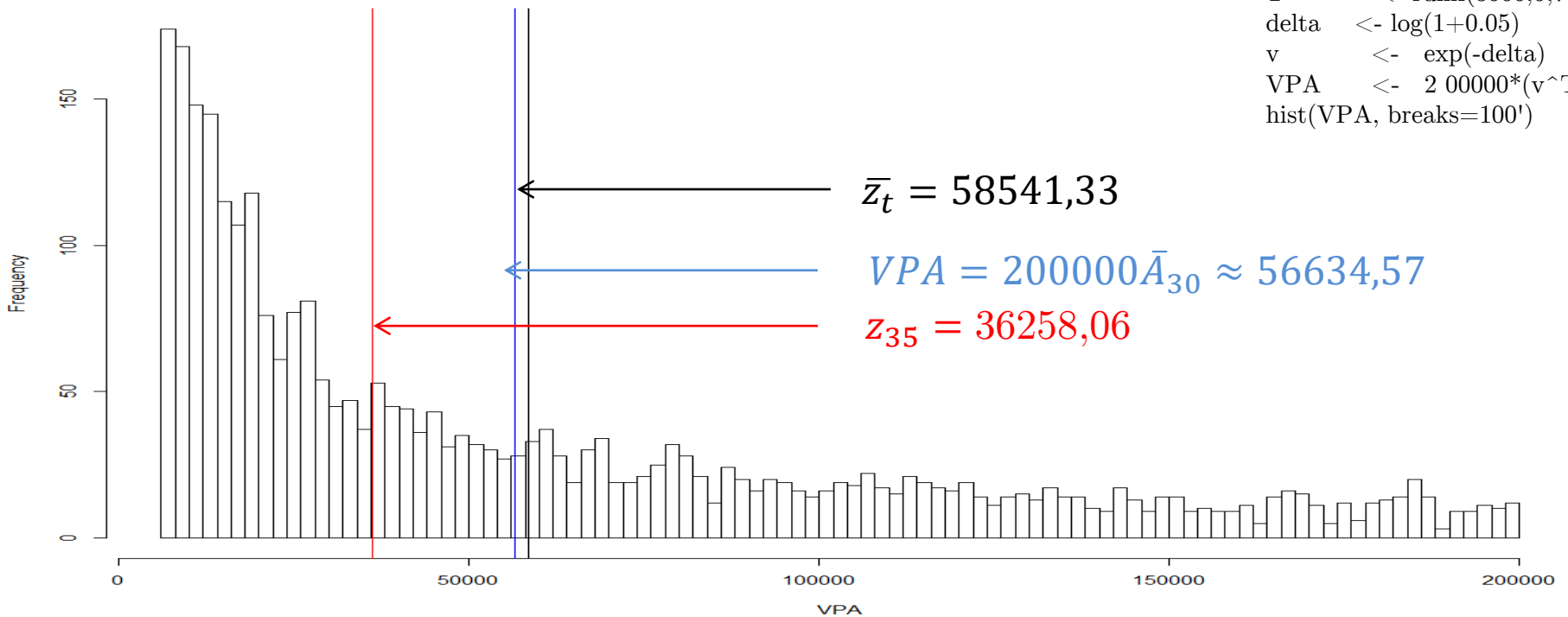
# SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

Levando em consideração que “sabemos” previamente a sobrevida de cada segurado (dados simulados). Os valores presentes necessários ao pagamento do benefício contratado por cada segurado pode ser calculada. Assim:

$$z_t = bv^t = 200000e^{-\delta t} = 200000e^{-\ln(1,05)t}$$

Histograma com os valores presentes dos benefícios futuros para cada um dos 3000 T

```
T <- runif(3000,0,70)
delta <- log(1+0.05)
v <- exp(-delta)
VPA <- 2 00000*(v^T)
hist(VPA, breaks=100')
```



$n = 1865$

$n = 1838$

$n = 1459$

$n = 1135$

$n = 1162$

$n = 1541$

- A distribuição Uniforme para modelar a sobrevida do segurado, leva a um valor de prêmio alto, pois essa supõem que chance da pessoa morrer “cedo” é igual a de morrer “tarde”.
- Apesar das limitações, a estimativa se mostrou próxima da média verificada *a posteriori*.
- *Devido a forte assimetria o valor obtido para VPA está a direita da moda e mediana.*

# Prêmio calculado por percentil

- Considere um prêmio  $\Pi_x$  de um seguro vitalício de forma que:

$$P(Z_{T_x} \leq \Pi_x) = \alpha$$

$$P(b e^{-\delta T_x} \leq \Pi_x) = \alpha$$

$$P\left(e^{-\delta T_x} \leq \frac{\Pi_x}{b}\right) = \alpha$$

$$P\left(-\delta T_x \leq \ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)\right) = \alpha$$

$$P\left(T_x \geq -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}\right) = \alpha$$

# Prêmio calculado por percentil

$$P(Z_T \leq \Pi_{t_\alpha}) = \alpha$$

$$P(T_x \geq t_\alpha) = \alpha$$

$$P\left(T_x \geq -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}\right) = \alpha$$

Como a variável aleatória de comportamento conhecido é o tempo ( $T$ ), é mais conveniente lidar com sua distribuição do que com a distribuição dos valor presente atuarial.

Assim:

$$t_\alpha = -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}$$

# Prêmio calculado por percentil

- Devido à variabilidade elevada, pode ser interessante calcular determinar o valor presente a partir de um quantil predeterminado.
- Obter um valor presente de baseado nas probabilidades dos benefícios futuramente pagos, serem inferiores ao estipulado.

**EXEMPLO 3:** Considere um seguro de vida vitalício feito por  $x = 30$ , com benefício igual a \$200000, dado que  $T_{30} \sim U_c(0,70)$  e  $i = 5\%$  ao ano. Qual seria o valor do prêmio  $\Pi_{30}$  de forma que  $P(Z_T \leq \Pi_{30}) = 0,9$ ?



### EXEMPLO 3

$$b = \$20000,00. \quad T_{30} \sim U_c(0,70) \quad i = 5\% \text{ ao ano} \quad \alpha = 0,9$$

$$P(T_{30} \geq t_{90\%}) = 0,9$$

$$P(T_{30} \geq t_{90\%}) = \int_{t_{90\%}}^{70} \frac{1}{70} dt = \frac{70 - t_{90\%}}{70} = 0,9$$

$$t_{90\%} = 7$$

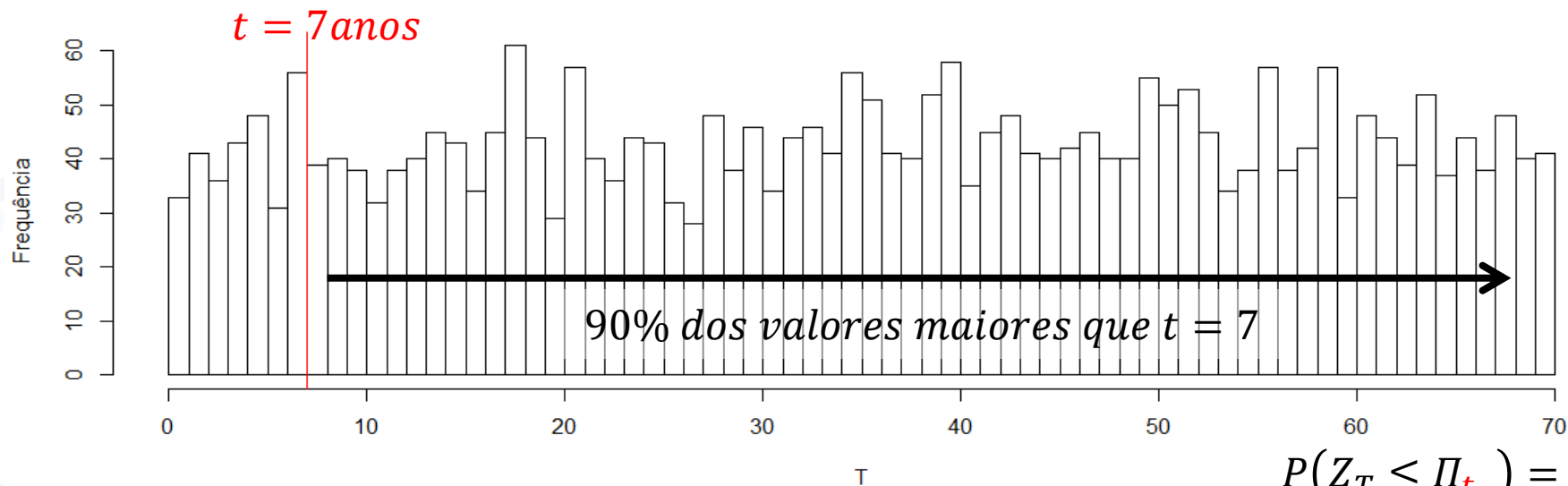
$$P(T_{30} \geq 7) = 0,9$$

$$P(T_{30} \geq 7) = P\left(T_{30} \geq -\frac{\ln\left(\frac{\Pi_{30}}{200000}\right)}{\ln(1,05)}\right) = 0,9$$

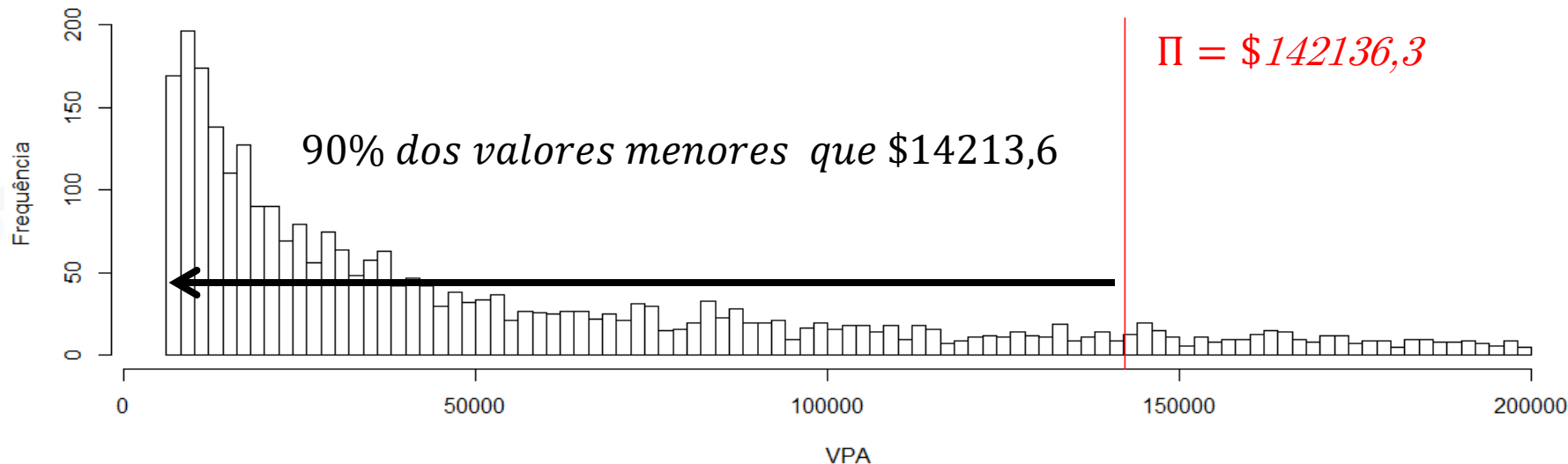
$$-\frac{\ln\left(\frac{\Pi_{30}}{200000}\right)}{\ln(1,05)} = 7$$

$$\Pi_{30,0,9} \approx \$142136,3$$

Histograma do tempo de vida adicional, T



Histograma com os valores presentes dos benefícios futuros para cada um dos 3000 T



- Quanto maior o tempo de vida adicional menor o valor presente.
- Valores grandes de  $t$  geram valores pequenos e próximos de VPA.

**EXEMPLO 4:** O segurado de idade  $x$  decide fazer um seguro de vida vitalício com pagamento de benefício unitário no momento de sua morte. Considere a taxa instantânea de juros,  $\delta = 0,06$  e que  $T_x \sim \text{Exp}(0,04)$ .

$$f_{T_x}(t) = 0,04e^{-0,04t}, \quad t > 0$$

Determine o valor de  $\Pi_x$  tal que  $P(Z_T \leq \Pi_x) = 0,1$ .

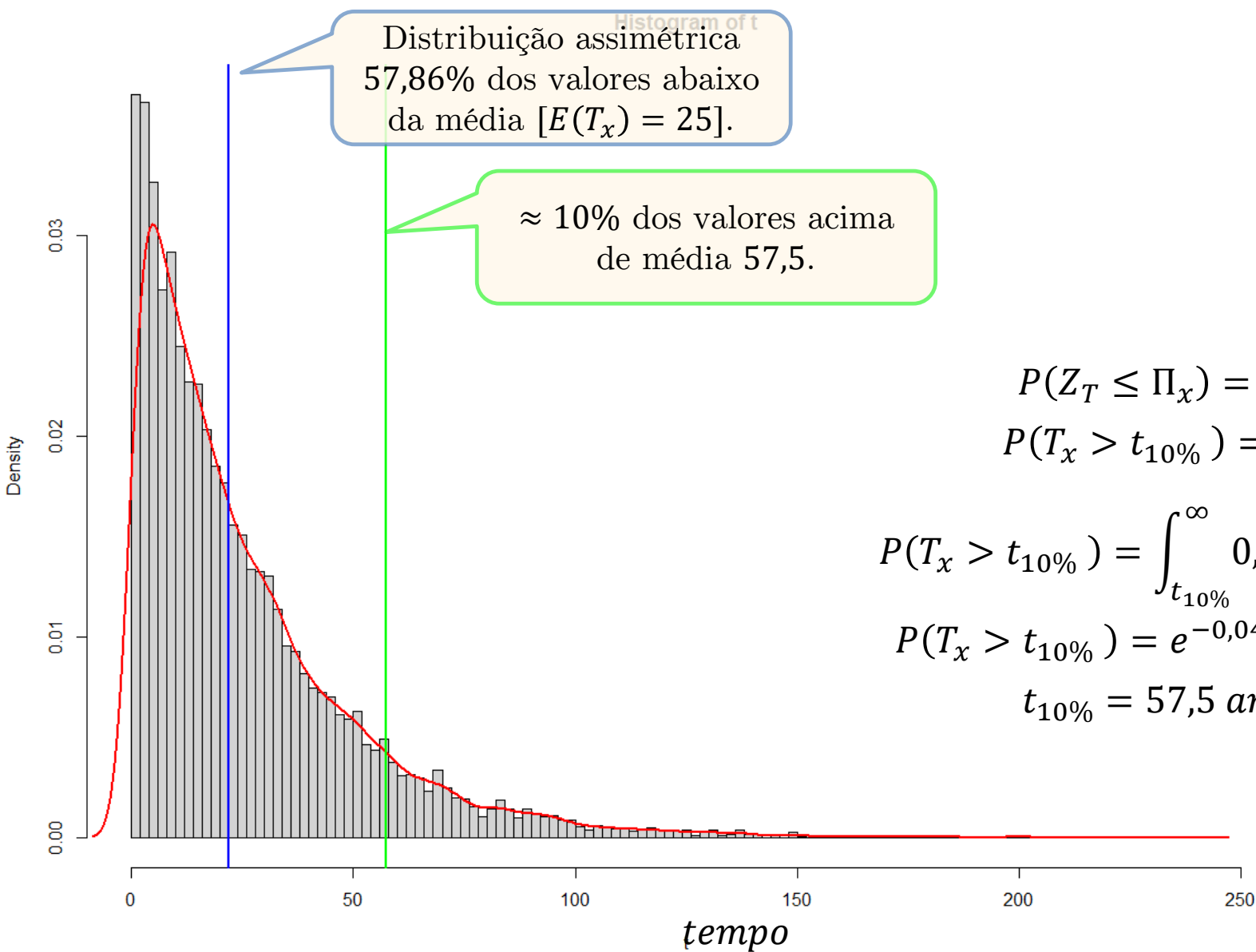
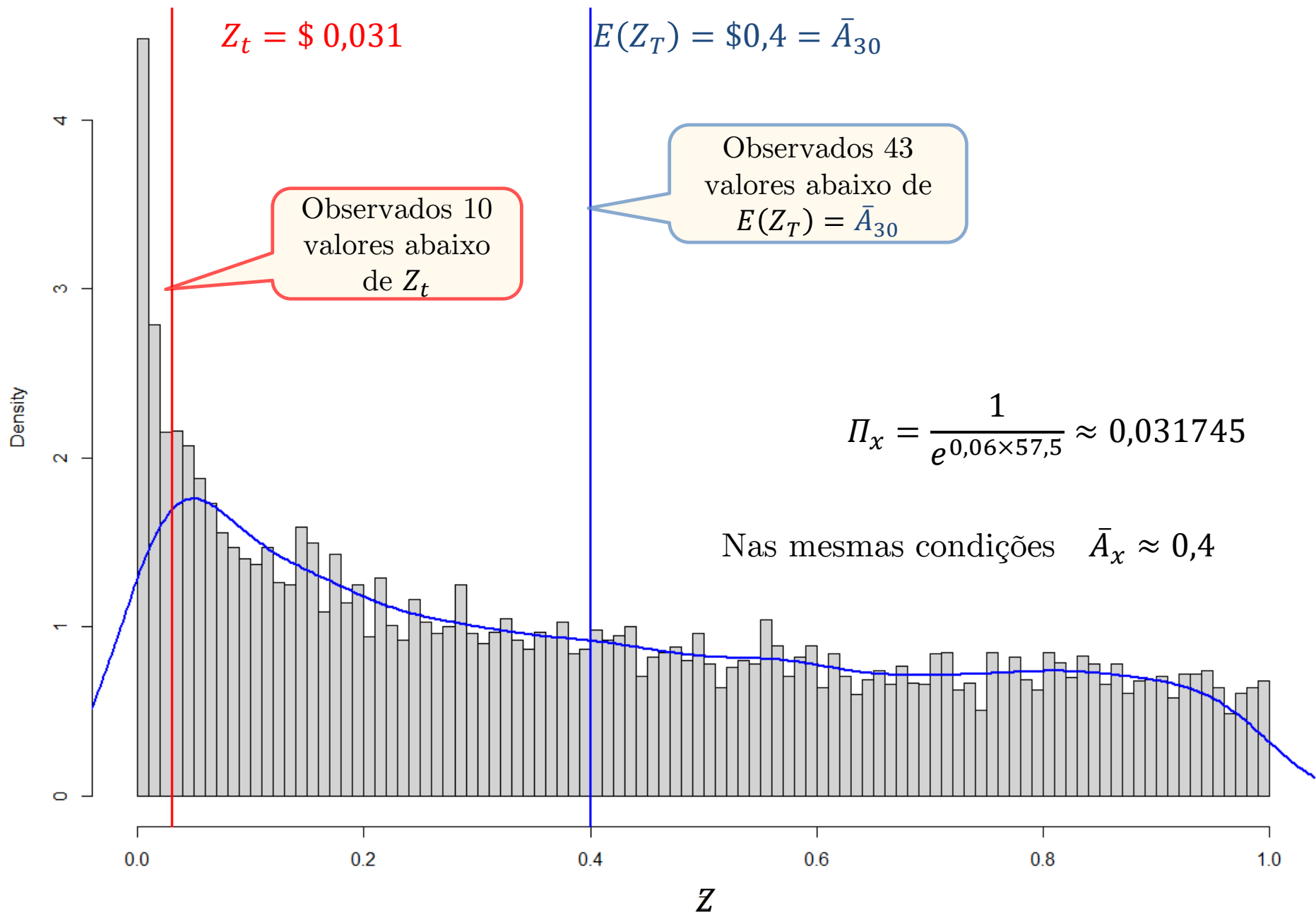


Gráfico da simulação de 1000 apólices com as condições do exemplo 4.

Histogram of Z



# SEGURO DE VIDA INTEIRO

$$P(Z_{T_x} \leq z) = P\left(T_x \geq -\frac{\ln\left(\frac{z}{b}\right)}{\delta}\right)$$

$$P(Z_{T_x} \leq z) = \frac{S_{T_0}\left(x + \left(-\frac{\ln(z)}{\delta}\right)\right)}{S_{T_0}(x)}, \quad e^{-\delta(\omega-x)} \leq z \leq 1$$

**EXEMPLO 5:** Considere a função de sobrevivência dada por:

$$S_{T_0}(t) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - t)^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq t \leq 115.$$

Dado  $x = 40$  e  $i = 4\%$  determine  $P(Z_{T_x} \leq z)$ .

## EXEMPLO 5:

$$P(Z_{T_x} \leq z) = \frac{S_{T_0} \left( 40 - \frac{\ln(z)}{0,04} \right)}{S_{T_0}(40)} = \frac{115^{-\frac{1}{3}} \left( 115 - \left( 40 - \frac{\ln(z)}{0,04} \right) \right)^{\frac{1}{3}}}{115^{-\frac{1}{3}} (115 - 40)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(Z_{T_x} \leq z) = \frac{\left( 75 + \frac{\ln(z)}{0,04} \right)^{\frac{1}{3}}}{(75)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P(Z_{T_x} \leq z) = \left( \frac{3 + \ln(z)}{3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad e^{-3} \leq y \leq 1$$



# Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Considere agora a variável aleatória  $S$  associada a uma carteira de seguros composta por  $k$  apólices (independentes e identicamente distribuídas), isso é

$$S = \sum_{i=1}^k Z_i$$

em que  $Z_i$  corresponde a função valor presente da apólice  $i$ .

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^k Z_i\right) = \sum_{i=1}^k E(Z_i) = kE(Z)$$

$$\text{var}(S) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^k Z_i\right) = \sum_{i=1}^k \text{var}(Z_i) = k \text{var}(Z)$$

# Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Definição: Teorema central do limite.

Seja  $S$  uma variável aleatória correspondente a uma soma de  $k$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Então:

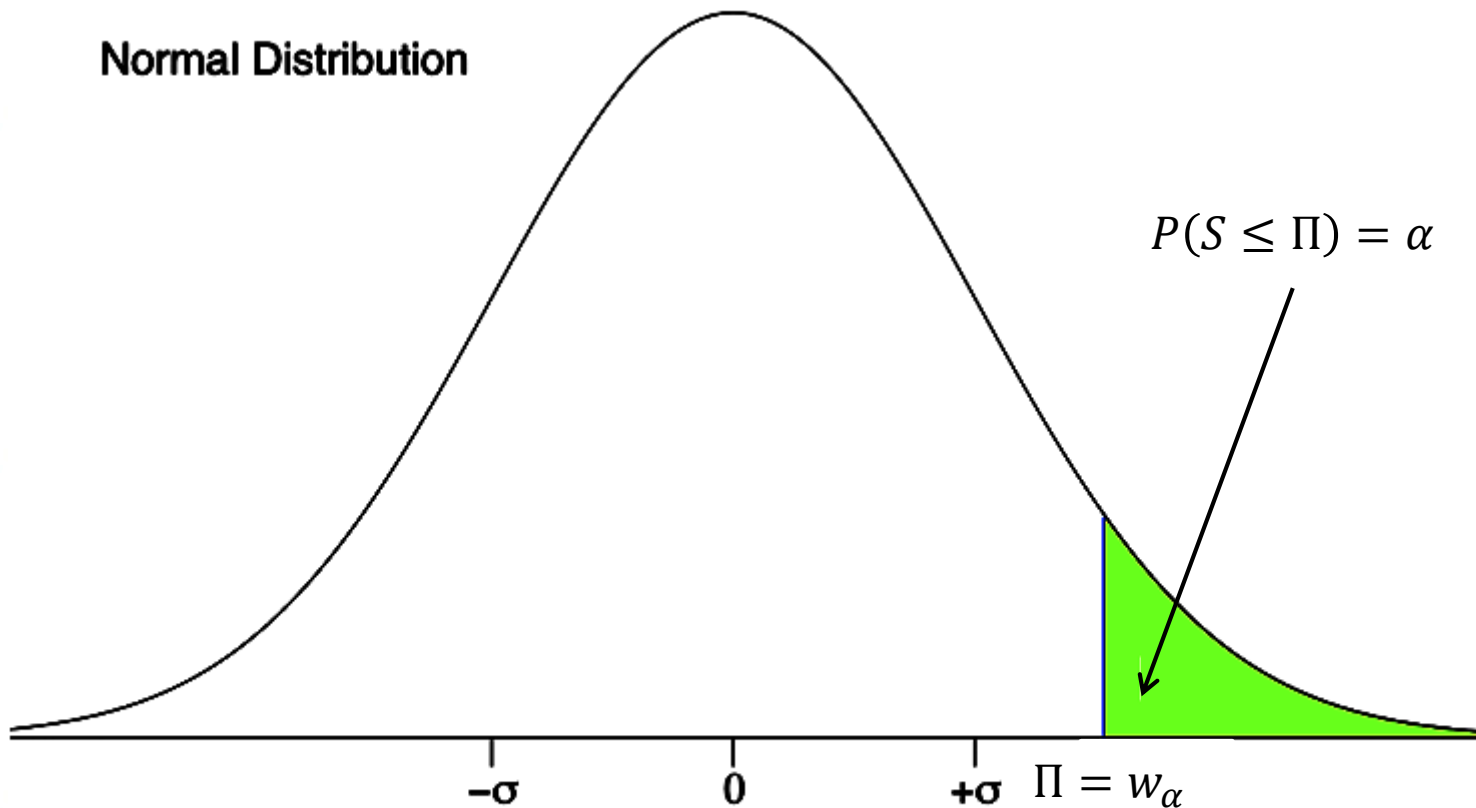
$$W = \frac{S - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \rightarrow W \sim N(0,1)$$

Logo

$$S \sim N(k\mu, k\sigma^2)$$

# Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Chamando de  $S$  a soma dos valores presentes necessários a cobrir os sinistros ocorridos, queremos encontrar o valor  $\Pi$  tal que:



## Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

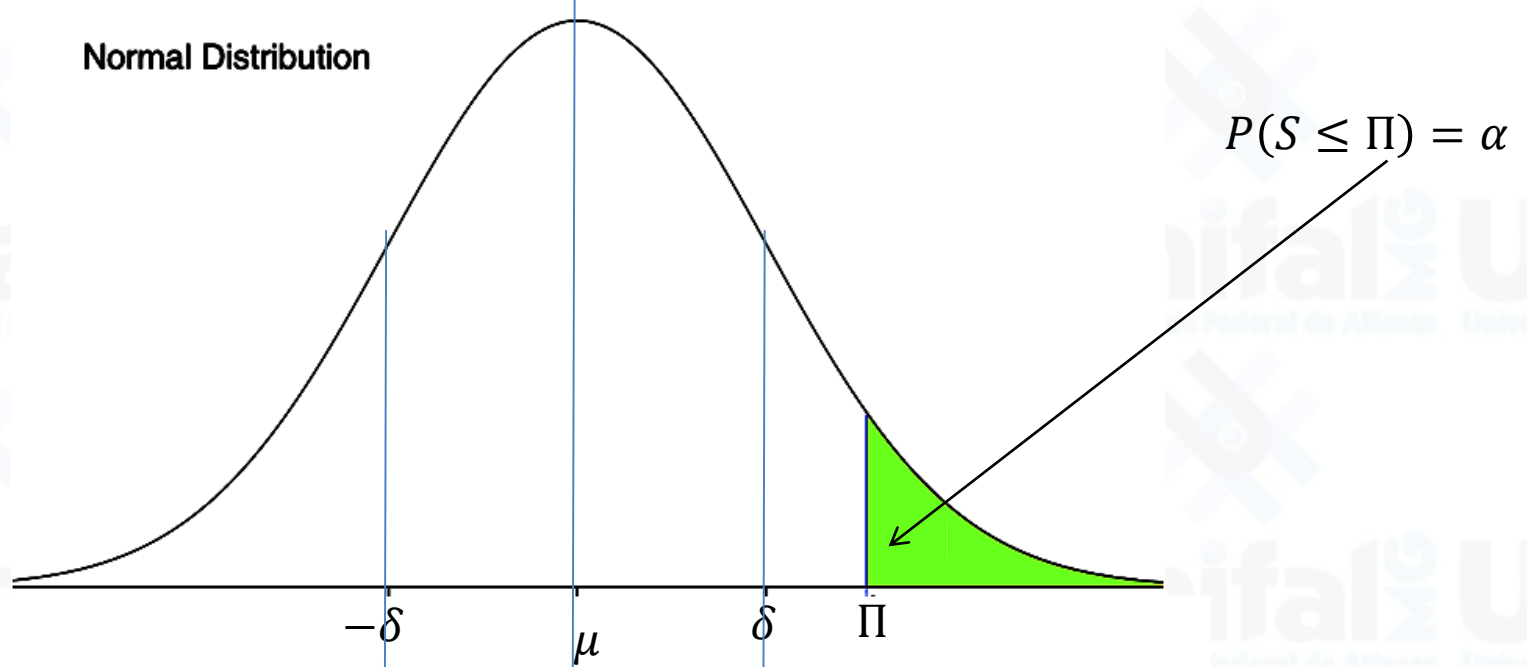
$$P(S \leq \Pi) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - E(Z_T)}{\sqrt{\text{var}(Z_T)}} \leq \frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{\text{var}(Z_T)}}\right) = \alpha$$

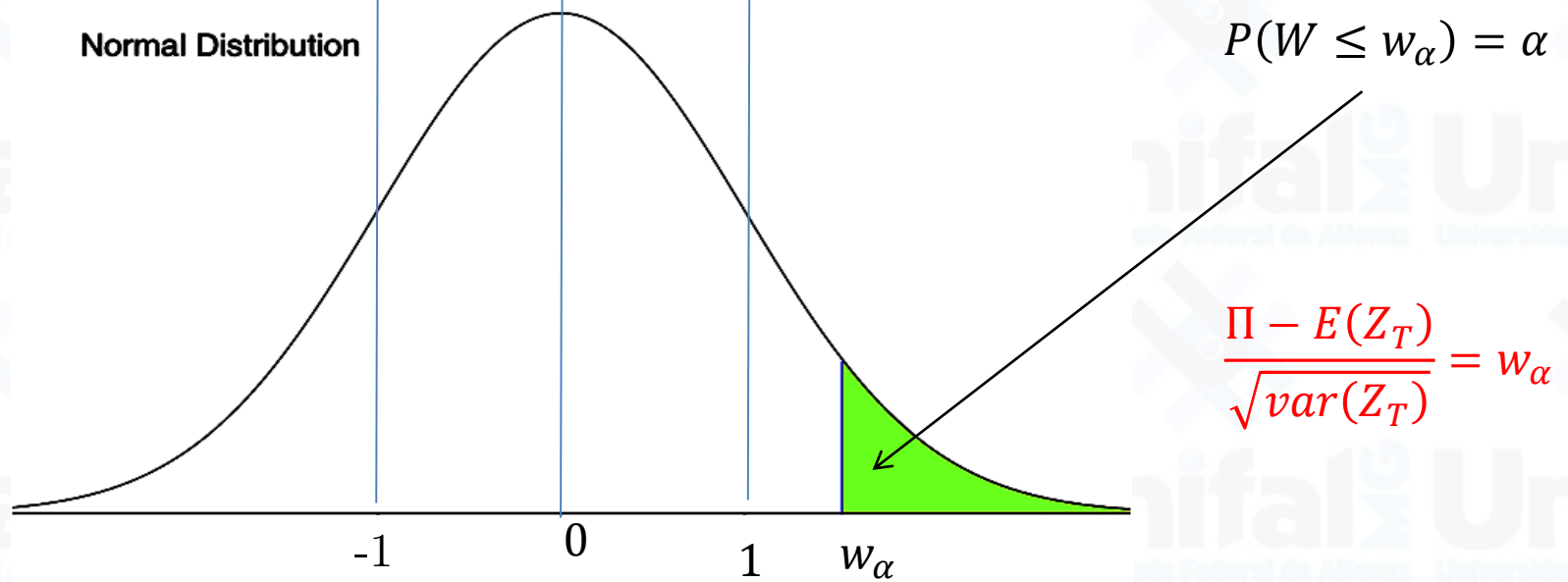
$$P\left(W \leq \frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{\text{var}(Z_T)}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\Pi - E(Z_T)}{\sqrt{\text{var}(Z_T)}} = w_\alpha$$

Normal Distribution



Normal Distribution



**EXEMPLO 6:** Seja uma carteira com 100 apólices de seguro de vida vitalício com benefício unitário pago no momento da morte, em que todas as apólices são independentes e identicamente distribuídas, e cada apólice corresponde ao seguro de vida de  $x = 60$ , e o tempo de vida adicional é modelado de tal forma que  ${}_tp_{60} = e^{-0,04t}$  e  $\mu(60 + t) = 0,04$ . Considerando que  $\delta = 0,06$  qual é o valor do prêmio  $\Pi$  cuja probabilidade de que o total de indenizações dessa carteira o supere seja de 5%, ou seja

$$P(S \leq \Pi) = 0,95.$$

# SOLUÇÃO

Para cada apólice

$$\bar{A}_{60} = \int_0^{\infty} e^{-0,06t} 0,04 e^{-0,04t} dt = 0,4 \text{ u. m.}$$

$$\text{var}(Z_T) = {}^2\bar{A}_{60} - (\bar{A}_{60})^2$$

$$\text{var}(Z_T) = \int_0^{\infty} e^{-0,12t} 0,04 e^{-0,04t} dt - (0,4)^2 \approx 0,09$$

Logo  $E(S) = 40$  e  $\text{var}(S) = 9$ .

# SOLUÇÃO

Para cada apólice

$$\bar{A}_{60} = 0,4 \quad \text{var}(Z_T) = 0,09$$

Logo  $E(S) = 40$  e  $\text{var}(S) = 9$

$$P(S \leq \Pi) = 0,95 \quad P\left(W \leq \frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0,95$$

Como  $W \sim N(0,1)$ , então

$$\frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}} = w_{0,95} = 1,645$$
$$\Pi = 44,93.$$



- Portal Halley : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2<sup>a</sup> edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

