Teoria do Risco
Aula 16

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

Medida de Risco

De uma forma muito simplificada associa-se o risco a uma variável aleatória que assume valores reais em algum conjunto de possíveis cenários financeiros.

Ao se assumir um risco deve-se ter em mente a incerteza sobre o possível retorno.

Busca-se estabelecer métodos e critérios para que se possa entender ou até mesmo antever determinadas situações.

Medida de Risco

Em um modelo probabilístico para o Risco, pode-se voltar às atenções para a distribuição resultante e tentar mensurar o risco em termos de momentos ou quantis (formas mais comuns).

- Uma medida de risco é um número real associado ao risco.
- Quantifica o "perigo" que representa para a seguradora um determinado risco.
- Um valor de prêmio é também uma medida de risco.
- Valores de prêmios e medidas de risco são sensíveis ao "peso" da cauda da distribuição da indenizações.

Quanto maior o valor da medida de risco associada ao risco, mais arriscado se torna assegurar esse risco.

Medida de Risco

O coeficiente de variação em uma carteira de seguros serve como medida de risco para cada risco avaliado. Assim o coeficiente de variação associado ao Risco X é dado por:

$$Cv_X = \frac{\sqrt{var(X)}}{E(X)}$$

É um indicador do grau de dispersão de valores, independentemente de sua escala e unidades de medida.

O coeficiente de variação pode ser usado para comparar a variação de vários processos e fenômenos.

EXEMPLO 1: Considere dois segurados (I e II) que têm as distribuições de danos a veículos como mostradas por $P_I(x)$ e $P_{II}(x)$. Qual segurado representa maior risco para o segurador?

$$P_I(x) = \begin{cases} 0,75 & x = 0 \\ 0,15 & x = 5000 \\ 0,08 & x = 10000 \\ 0,02 & x = 15000 \end{cases} \qquad P_{II}(x) = \begin{cases} 0,80 & x = 0 \\ 0,08 & x = 5000 \\ 0,07 & x = 10000 \\ 0,05 & x = 15000 \end{cases}$$

A primeira vista supõem que o segurado II apresenta melhores chances imediatas de não sofrer sinistros...

$$E(X_I) = 0,75(0) + 0,15(5000) + 0,08(10000) + 0,02(15000) = 1850,00$$

$$E(X_{II}) = 0,8(0) + 0,08(5000) + 0,07(10000) + 0,05(15000) = 1850,00$$

A primeira vista supõem que o segurado II apresenta melhores chances imediatas de não sofrer sinistros...

$$E(X_I) = 0{,}75(0) + 0{,}15(5000) + 0{,}08(10000) + 0{,}02(15000) = 1850{,}00$$
$$E(X_{II}) = 0{,}8(0) + 0{,}08(5000) + 0{,}07(10000) + 0{,}05(15000) = 1850{,}00$$

A identificação do segurado que represente maior risco, ficará a cargo da variância verificada em cada uma das funções relativas aos segurados I e II.

$$E(X_I^2) = 0{,}75(0^2) + 0{,}15(5000^2) + 0{,}08(10000^2) + 0{,}02(15000^2) = 16250000{,}00$$
$$E(X_{II}^2) = 0{,}8(0^2) + 0{,}08(5000^2) + 0{,}07(10000^2) + 0{,}05(15000^2) = 20250000{,}00$$

$$var(X_I) = 16250000{,}00 - (1850{,}00)^2 = 12826500{,}00$$
$$var(X_{II}) = 20250000{,}00 - (1850{,}00)^2 = 16827500{,}00$$

Com o uso do coeficiente de variação, pode-se obter a medida de risco:

$$CV_I = \frac{\sqrt{12826500}}{1850,00} = \frac{3581,55}{1850,00} \approx 1,93597$$

$$CV_{II} = \frac{\sqrt{16827500}}{1850,00} = \frac{4102,13}{1850,00} \approx 2,21737$$

Conclui-se então que o segurado II representa maior risco ao segurador.

O coeficiente de variação então estabelece uma relação da variabilidade dos dados em unidades de sua média. Assim quanto maior a variabilidade maior será o seu coeficiente de variação.

EXEMPLO

Considere duas carteiras de seguros A e B, sendo que as distribuições do total de indenizações para as duas carteiras são dadas por:

$$f_A(s) = 3e^{-3s} - 6e^{-2s} + 3e^{-s}$$

com

$$M_{S_A}(t) = \frac{3}{(1-t)} - \frac{6}{(2-t)} + \frac{3}{(3-t)}$$

e

$$P_B(s) = \begin{cases} 0{,}14 & s = 0 \\ 0{,}2279 & s = 1 \\ 0{,}2075 & s = 2 \\ 0{,}1625 & s = 3 \\ 0{,}1078 & s = 4 \\ 0{,}0627 & s = 5 \\ 0{,}0369 & s = 6 \\ 0{,}0265 & s = 7 \\ 0{,}0148 & s = 8 \\ 0{,}0072 & s = 9 \\ 0{,}0038 & s = 10 \\ 0{,}0011 & s = 11 \\ 0{,}0003 & s = 12 \\ 0{,}001 & s = 13 \end{cases}$$

Qual dessas carteiras representa maior risco para o segurador?

Embora as carteiras apresentem diferentes valores é preciso calcular o custo de risco para cada uma delas na forma:

$$E(S_A) = \left.\frac{dM_{S_A}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{3}{(1-t)^2} - \frac{6}{(2-t)^2} + \frac{3}{(3-t)^2}\right|_{t=0} = 3 - \frac{6}{4} + \frac{3}{9} \approx \mathbf{1{,}833}$$

$$E(S_B) = 0 + 0{,}2279 + 0{,}4150 + 0{,}4875 + 0{,}4312 + 0{,}3135 + 0{,}2214 + 0{,}1855 + 0{,}1184 + 0{,}0648 + 0{,}0380 + 0{,}0121 + 0{,}0036 + 0{,}0130 = \mathbf{2{,}53}$$

Baseado no primeiro momento verifica-se que o esperado de indenizações em B é substancialmente maior que A ....

$$E(S_A) \approx 1{,}833 \qquad E(S_B) = 2{,}53$$

$$\mathrm{E}(S_A^2) = \left.\frac{d^2\, M_{S_A}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{6}{(1-t)^3} - \frac{12}{(2-t)^3} + \frac{6}{(3-t)^3}\right|_{t=0} = 6 - \frac{12}{8} + \frac{6}{27} \approx 4{,}73$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{S}_\mathrm{B}^2\right)$$
$$= 0 + 0{,}2279 + 0{,}8300 + 1{,}4625 + 1{,}7248 + 1{,}5675 + 1{,}3284 + 1{,}2985$$
$$+\ 0{,}94720{,}5832 + 0{,}38 + 0{,}1331 + 0{,}0432 + 0{,}1690 = 10{,}6953$$

Assim

$$var(S_A) = 4{,}73 - (1{,}83)^2 = 1{,}372$$

$$var(S_B) = 10{,}69 - (2{,}53)^2 = 4{,}2891$$

Com o uso do coeficiente de variação, pode se obter o maior risco ao segurador

$$\boldsymbol{CV_A = \frac{\sqrt{1{,}372}}{1{,}833} = 0{,}639} \qquad \boldsymbol{CV_B = \frac{\sqrt{4{,}2891}}{2{,}53} = 0{,}8185}$$

Agora sim é possível afirmar que a carteira B possui maior risco que a Carteira A.

Medida de Risco

Em geral, uma medida de risco é uma função mapeando um risco X em um número real não-negativo $\rho(X)$.

- Desvio padrão

$$\rho(X) = \sqrt{var(X)}$$

- Coeficiente de variação

$$\rho(X) = \frac{\sqrt{var(X)}}{E(X)}$$

- Função utilidade

$$\rho(X) = -E\left[\mu\left(X - E(X)\right)\right]$$

- Value-at-Risck

$$VaR(X;q) = F_X^{-1}(q) = \inf\{x: F_X \geq q\}$$

Medida de Risco

A medida de risco para uma variável aleatória X é matematicamente um mapeamento funcional a um número real.

- Uma das possibilidades é o preço pago para a cobertura de um risco financeiro (prêmio).

$$\Pi_S = E(S); \quad \Pi_S = E(S) + var(S)\alpha; \Pi_S = E(S) + \sigma_S\beta \ldots$$

- Outra é a probabilidade de ruína para um determinado capital inicial dado.

Medida de Risco

O matemático Philippe Artzner (1999) elencou alguns axiomas que torna uma medida de risco coerente.

- Transitividade invariante,
- Subaditividade,
- Homogeneidade positiva e
- Monotonicidade.

Medida de Risco

➢ **Transitividade invariante**

Se c é uma constante, temos que

$$\rho(X + \mathrm{c}) = \rho(X) + \mathrm{c}$$
$$\rho(X - \mathrm{c}) = \rho(X) - \mathrm{c}$$

"Aumentando ou subtraindo uma certa quantidade à variável aleatória X, a medida de risco aumenta ou diminui pela certa quantidade. Redução de risco por alocação"

Medida de Risco

- **Subaditividade**

Para todo X_1 e X_2,

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

"A combinação de riscos deverá acarretar em vantagens, ou seja, a medida do risco total da carteira... é menor ou igual que a medida do risco da soma individual dos ativos da carteira"

Medida de Risco

Homogeneidade Positiva (de grau 1)

Para todo $\lambda \geq 0$ e todo X,

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$$

“Se possíveis indenizações de um risco são sempre modificadas tal que λX, então o valor da medida de risco de X é modificada em igual proporção.”

Medida de Risco

Monotonicidade

Para todo X e Y com $X \leq Y$ com probabilidade 1, temos que

$$\rho(X) \leq \rho(Y)$$

"Se um risco tem sempre perdas superiores às de outro risco (em todos os cenários), então a medida do risco do primeiro deverá ser o superior à do segundo."

Medida de Risco

- A redução do risco diminui a probabilidade da ruína de uma segurada...
  - Resseguro
  - Franquia

$$Y = Max(0; X - d) = (X - d)_+$$

$$Y = (X - d)|(X > d)$$

  - ...

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- DA ROCHA, José Eduardo Nunes. **Sistema Inteligente de Diagnósticos Energéticos e de Análise de Investimentos em Projetos de Eficiência Energética Gerenciados pelo Lado da Demanda**. 2013. Tese de Doutorado. PUC-Rio.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.