

# Teoria do Risco

## Aula 14

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley>



## Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial para N

- Seja uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso constante  $q$  para cada ensaio.
- Seja  $N$  o número total de sucessos obtidos, na realização de  $n$  ensaios de Bernoulli independentes.

$$N \sim B(n, q).$$

$$P(N = k) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k} I_{\{0,1,\dots,n\}}(k)$$

$$E(N) = nq ; \quad \text{var}(N) = nq(1 - q) ; \quad M_N(t) = (1 - q + qe^t)^n$$

$$E(N) > \text{var}(N)$$

Quando N tem distribuição de Binomial, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \textcolor{red}{nq}E(X)$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 nq(1 - q) + nq\text{var}(X) = nq[E(X^2) - E(X)^2 q]$$

$$M_{S_{col}}(t) = [1 - q + qM_X(t)]^n$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}$$

## Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para $N$

- Seja uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso constante  $q$  para cada ensaio.
- Considere a variável aleatória  $N$  definida como sendo igual ao número de fracassos requeridos para que ocorra o  $r$  — *ésimo* sucesso,
- - *Nota-se que ocorrem  $k$  fracassos e  $r - 1$  sucessos antes do  $r$  — *ésimo* sucesso no último ensaio*
  - ..Representa o número de falhas que podem ocorrer numa sequência de ensaios de Bernoulli antes um número de sucessos **alvo** for atingido.

## Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

$N \sim BN(r, q)$  é dita variável aleatória discreta de tempo de espera.

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} q^r (1 - q)^k$$

$k = 0, 1, 2, 3 \dots$  representa o número de falhas até a ocorrência do  $r$  — *ésimo* sucesso,  $r > 0$  e  $0 < q < 1$ ,

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \quad \text{var}(N) = \frac{r(1-q)}{q^2} \quad M_N(t) = \left[ \frac{q}{1-(1-q)e^t} \right]^r$$

$$\text{var}(N) > E(N)$$

Quando  $N$  tem distribuição binomial negativa, dizemos que  $S_{col}$  tem distribuição binomial negativa composta, sendo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{r(1-q)}{q}E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X) = E(X)^2 \left[ \frac{r(1-q)^2}{q^2} \right] + E(X^2) \left[ \frac{r(1-q)}{q} \right].$$

$$\mathbf{M}_{S_{col}}(\mathbf{t}) = \left[ \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{q})\mathbf{M}_X(\mathbf{t})} \right]^r$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \binom{k+r-1}{k} q^r (1-q)^k$$

## Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

- ...expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo (espaço, região...) se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.
- ...surge como um modelo adequado para descrição de frequência de eventos de baixa probabilidade de ocorrência, porém sujeitos a um grande número de experimentos.

## Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para $N$

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} I_{\{0,1,\dots\}}(k)$$

→ Onde  $N$  expressa a ocorrência de um dado número de eventos

→  $\lambda$  (intensidade da distribuição Poisson), é um parâmetro que indica a taxa de ocorrência desses eventos

$$E(N) = \lambda \quad \text{var}(N) = \lambda \quad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$E(N) = \text{var}(N)$$



Quando  $N$  tem distribuição de Poisson, dizemos que  $S_{col}$  tem distribuição de Poisson composta, em que  $\lambda > 0$ , no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X) = \lambda E(X^2)$$

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

## Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

- Para fenômenos com a mesma esperança matemática de frequência, o ajuste de um modelo binomial apresentaria menor variância que a do modelo de Poisson e este último apresentaria menor variância do que o ajuste com um modelo binomial negativo.

$$\sigma_B^2 < \sigma_P^2 < \sigma_{NB}^2$$

- As distribuições Binomial , Poisson e Binomial negativa podem ser satisfatoriamente aproximadas pela distribuição normal..

$$N \sim N(nq, nq(1 - q))$$

$$N \sim N(\lambda, \lambda)$$

$$N \sim N\left(\frac{r(1 - q)}{q}, \frac{r(1 - q)}{q^2}\right)$$

## Exemplo 1

Considere que uma carteira de seguros em que o número de sinistros obedeça a uma **distribuição binomial negativa**, cuja probabilidade de ocorrência de cada sinistro seja de 0,8 e tenha como **número esperado de sinistros** igual a 500 sinistros. Considere também que os sinistros individuais tenham distribuição exponencial com  $\alpha = 0,01$ . Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \frac{r(1 - q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \frac{r(1 - q)^2}{q^2} + E(X^2) \frac{r(1 - q)}{q}$$

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \quad 500 = \frac{r(1-0,8)}{0,8}$$

$$r = 2000 \log_2 N \sim BN(2000; 0,8)$$

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q} E(X) = 500 \frac{1}{0,01} = 50000$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \frac{r(1-q)^2}{q^2} + E(X^2) \frac{r(1-q)}{q}$$

$$var(S_{col}) = 10000 \times 125 + \left[ \frac{1}{0,01^2} + \frac{1}{0,01^2} \right] 500 = 11250000$$

## Exemplo 2

Considere que os sinistros de uma carteira tenham distribuição Poisson Composta com  $\lambda = 150$  (número médio de sinistros por ano) e que o montante dos sinistros individuais tenham distribuição de Pareto com parâmetros  $\alpha = 3$  e  $\beta = 2000$ . Calcule a esperança e a variância desta carteira.

- Lembrando que:

$$E(S_{col}) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$f(X) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, x > 0 \ (\alpha, \beta > 0)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}$$

$$var(X) = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)},$$

$$\alpha > 2$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \quad \text{e} \quad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}; \quad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$$

■ Assim

$$E(S_{col}) = \lambda \frac{\beta}{(\alpha - 1)} = 150 \frac{2000}{2} = 150000$$

$$var(S_{col}) = \lambda \left\{ \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} + \left[ \frac{\beta}{(\alpha - 1)} \right]^2 \right\} = 150 \left[ \frac{3 \times 2000^2}{4} + \left( \frac{2000}{2} \right)^2 \right]$$

$$var(S_{col}) = 150 \left( \frac{3 \times 2000^2}{4} + \frac{2000^2}{4} \right) = 600\,000\,000$$

## Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

### Exemplo 3

Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,99 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Qual a probabilidade de que a segunda falha de freios ocorra no **décimo** carro testado?

*r = número de falhas*

*K = número de casos que não tiveram falhas*

$$N \sim BN(2, 0,99)$$

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} q^r (1 - q)^k$$

## Exemplo 3

Pelo enunciado tem-se que o número de carros testados será 10, e a pergunta pode ser lida como, qual a probabilidade de se encontrar 2 falhas em 10 carros. Assim  $r = 2$  sucessos (sucesso pois o escopo do estudo é o número de falhas encontradas.) e  $k = 8$  fracassos. Logo :

$$P(N = 8) = \binom{8 + 2 - 1}{8} 0,01^2 (0,99)^8 \approx 0,00083$$

A probabilidade de se encontrar o segundo carro com freios defeituosos antes de 8 carros passarem no teste é de 0,083%.