

Teoria do Risco

Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley/>

➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. Modelo de risco coletivo: FGM. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portahalley/notas_TR.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

S_{ind}, X_i, B_i, I_i

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n q_i E(B_i)$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 var(I_i)$$

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

S_{col}, X_i, N

$$E(S_{col}) = E(X)E(N)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$$

Modelos de risco Coletivo -Distribuição de S_{col}

- O método da convolução a partir da distribuição de X e N
 - Um método iterativo por vezes se tornar bastante penoso, exigindo elevado custo computacional,
- Método da função geradora de momentos.
 - Requer o conhecimento prévio das funções geradoras de momentos dos riscos envolvidos como o método da função geradora de momentos.

Modelos de risco Coletivo-Pelo método da Função Geradora de Momentos

Uma alternativa a utilização do método da convolução está relacionada com a função geradora de momentos.

Dado

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad M_N(t) = E(e^{tN})$$

Tem-se que:

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)]$$

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\{E[e^{t(X_1+X_2+\dots+X_N)}]\} = E[E(e^{tX_1}e^{tX_2} \dots e^{tX_N})]$$

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\prod_{i=1}^N E(e^{tX_i})\right]$$

Como X_{i_s} são independentes e identicamente distribuídos. Tem-se:

$$E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\prod_{i=1}^N E(e^{tX_i})\right] = E[M_X(t)^N]$$

Demonstração:

$$M_{S_{col}}(t) = E(e^{tS_{col}}) = E[E(e^{tS_{col}}|N)] = E\left[\prod_{i=1}^N E(e^{tX_i})\right] = E[M_X(t)^N]$$

Logo

$$M_{S_{col}}(t) = E\left[e^{\ln(M_X(t))^N}\right] = E\left[e^{N \ln(M_X(t))}\right]$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

EXEMPLO 1: Calcule $E(S_{col})$ por meio de $M_{S_{col}}(t)$, dado que $X \sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$.

Se $N \sim Po(\lambda)$, então

$$M_N(t) = E(e^{tN}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Se $X \sim Exp(\alpha)$, então:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{(\alpha-t)}$$

Como $M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t)))$, então:

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda[e^{\ln(\frac{\alpha}{\alpha-t})}-1]} = e^{\lambda(\frac{\alpha}{\alpha-t}-1)}$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{scol}(t)}{dt} = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-t)^2} e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-t}-\lambda}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = E(S_{col}) = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha-0)^2} e^{\frac{\lambda\alpha}{\alpha-0}-\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

EXEMPLO 2: Seja N com distribuição $B(n, q)$. Determine uma expressão para a função geradora de momentos de S_{col} em função de n, q e da função da geradora de momentos de X .

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t)))$$

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = [qe^{\ln(M_X(t))} + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

EXEMPLO 3: Suponha uma carteira de apólices de seguros de automóvel. Assuma que a severidade bruta do sinistro (*sem dedução da franquia*) obedece a uma distribuição $Gama(r, \alpha)$. Determine a função geradora de momentos de momentos do total agregado de sinistros S_{col} , dessa carteira dado que o número de ocorrências N obedeça a uma distribuição $B(n, q)$. Obtenha o primeiro momento de S_{col} .

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r$$

Assim:

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n \quad M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r$$

$$M_{S_{col}}(t) = [qM_X(t) + 1 - q]^n$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^n$$

Assim:

$$M_{S_{col}}(t) = \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^n$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} q \alpha^r (-r) (\alpha - t)^{-r-1} (-1)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} \frac{rq \alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}}$$

$$M'_{S_{col}}(0) = n \left[q \left(\frac{\alpha}{\alpha - 0} \right)^r + 1 - q \right]^{n-1} \frac{rq \alpha^r}{(\alpha - 0)^{r+1}}$$

$$E(S_{col}) = n(q + 1 - q)^{n-1} \frac{rq}{\alpha} = \frac{nqr}{\alpha}$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0)$$

$$M'_{S_{col}}(t) = \frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln(M_X(t))) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$E(S_{col}) = M'_{S_{col}}(0) = M'_N(0)M'_X(0) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$var(S_{col}) = E(S_{col}^2) - E(S_{col})^2$$

$$\frac{dM_{S_{col}}(t)}{dt} = M'_N(\ln(M_X(t))) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

$$\frac{d^2 M_{S_{col}}(t)}{dt^2} = M''_N(\ln(M_X(t))) \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} + M'_N(\ln(M_X(t))) \left[\frac{M''_X(t) M_X(t) - M'_X(t) M'_X(t)}{M_X(t)^2} \right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(\ln(M_X(0))) \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(\ln(M_X(0))) \left[\frac{M''_X(0) M_X(0) - M'_X(0) M'_X(0)}{M_X(0)^2} \right]$$

$$M''_{S_{col}}(0) = M''_N(0) M'_X(0) \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} + M'_N(0) [M''_X(0) - M'_X(0)^2]$$

$$E(S_{col}^2) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)var(X)$$

Modelos de risco Coletivo (Resultados importantes)

$$\text{var}(S_{col}) = E(S_{col}^2) - E(S_{col})^2$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(N^2)E(X)^2 + E(N)\text{var}(X) - E(N)^2E(X)^2$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 [E(N^2) - E(N)^2] + E(N)\text{var}(X)$$

$$\text{var}(S_{col}) = E(X)^2 \text{var}(N) + E(N)\text{var}(X)$$

Modelo de Risco individual

X_i Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

S_{ind}, X_i, B_i, I_i

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n q_i E(B_i)$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 var(I_i)$$

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Modelo de Risco coletivo

X_i Independentes e identicamente distribuídas

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$

S_{col}, X_i, N

$$E(S_{col}) = E(X)E(N)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X)$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N(\ln(M_X(t)))$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Deiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

