Curso Python

2023

MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODO DE EULER

ALGORITMO El método de Euler

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

El método de Euler con tamaño de paso h consiste en aplicar la fórmula iterativa

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (n \geq 0) \tag{3}$$

para calcular aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de los valores (reales) $y(x_1)$, $y(x_2), y(x_3), \ldots$ de la solución (exacta) $y = y(x)$ en los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ respectivamente.

MÉTODO DE EULER

- Ejemplo 1):
- $dy/dx = x + y/5$

x	Aprox. y con $h = 0.2$	Aprox. y con $h = 0.02$	Aprox. y con $h = 0.002$	Valor real de y
0	−3.000	−3.000	−3.000	−3.000
0.2	−3.120	−3.104	−3.102	−3.102
0.4	−3.205	−3.172	−3.168	−3.168
0.6	−3.253	−3.201	−3.196	−3.195
0.8	−3.263	−3.191	−3.184	−3.183
1	−3.234	−3.140	−3.130	−3.129

FIGURA 2.4.4. Aproximaciones de Euler con tamaños de paso $h = 0.2$, $h = 0.02$ y $h = 0.002$.

MÉTODO DE EULER

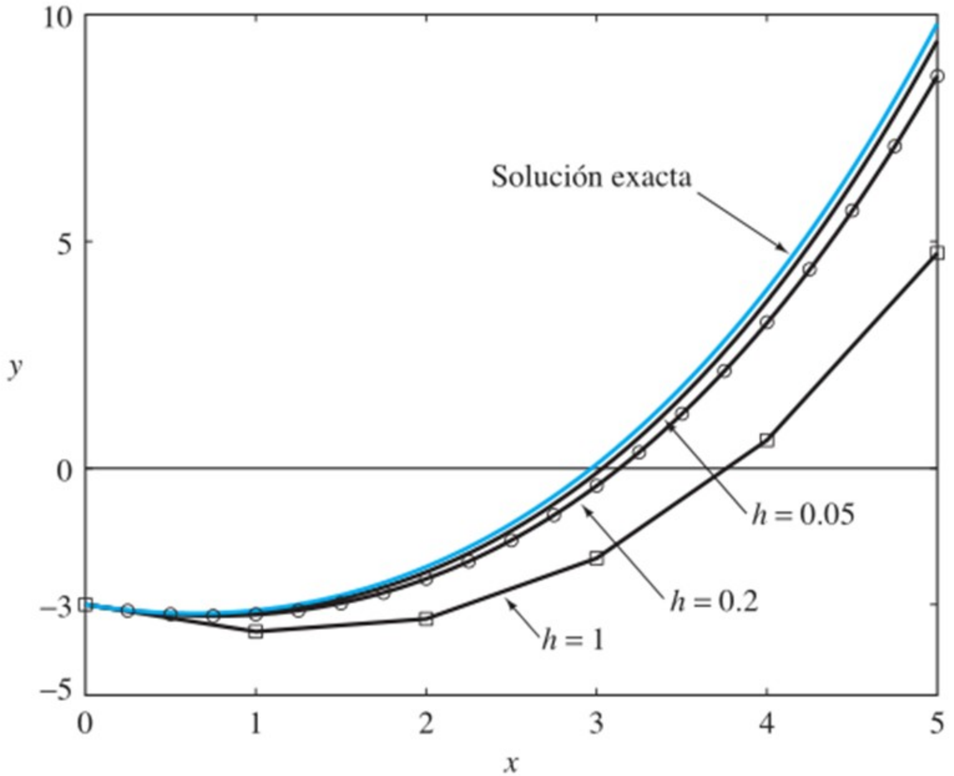


FIGURA 2.4.3. Gráficas de las aproximaciones de Euler para tamaños de paso $h = 1$, $h = 0.2$ y $h = 0.05$.

MÉTODO DE EULER MEJORADO

ALGORITMO Método de Euler mejorado

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

el **método de Euler mejorado con tamaño de paso** h consiste en aplicar las fórmulas iterativas

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ u_{n+1} &= y_n + h \cdot k_1, \\ k_2 &= f(x_{n+1}, u_{n+1}), \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \tag{5}$$

para calcular aproximaciones sucesivas y_1, y_2, $y_3\ldots$ a los valores (reales) $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)\ldots$ de la solución (exacta) $y = y(x)$ en los puntos $x_1, x_2, x_3\ldots$, respectivamente.

MÉTODO DE EULER MEJORADO

- Ejemplo 2):

x	y con $h=0.1$	y con $h=0.02$	y con $h=0.005$	y con $h=0.001$	Real y
0.1	1.1000	1.1082	1.1098	1.1102	1.1103
0.2	1.2200	1.2380	1.2416	1.2426	1.2428
0.3	1.3620	1.3917	1.3977	1.3993	1.3997
0.4	1.5282	1.5719	1.5807	1.5831	1.5836
0.5	1.7210	1.7812	1.7933	1.7966	1.7974
0.6	1.9461	2.0227	2.0388	2.0431	2.0442
0.7	2.1974	2.2998	2.3205	2.3261	2.3275
0.8	2.4872	2.6161	2.6422	2.6493	2.6511
0.9	2.8159	2.9757	3.0082	3.0170	3.0192
1.0	3.1875	3.3832	3.4230	3.4238	3.4266

FIGURA 2.4.8. Aproximación de la solución de $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$ con tamaños de paso sucesivamente más pequeños.

MÉTODO RUNGE-KUTTA

Valor nuevo = valor viejo + pendiente * (tamaño_paso)

$$y_{k+1} = y_k + \varphi * h$$

y_{k+1} valor nuevo, y_k valor viejo

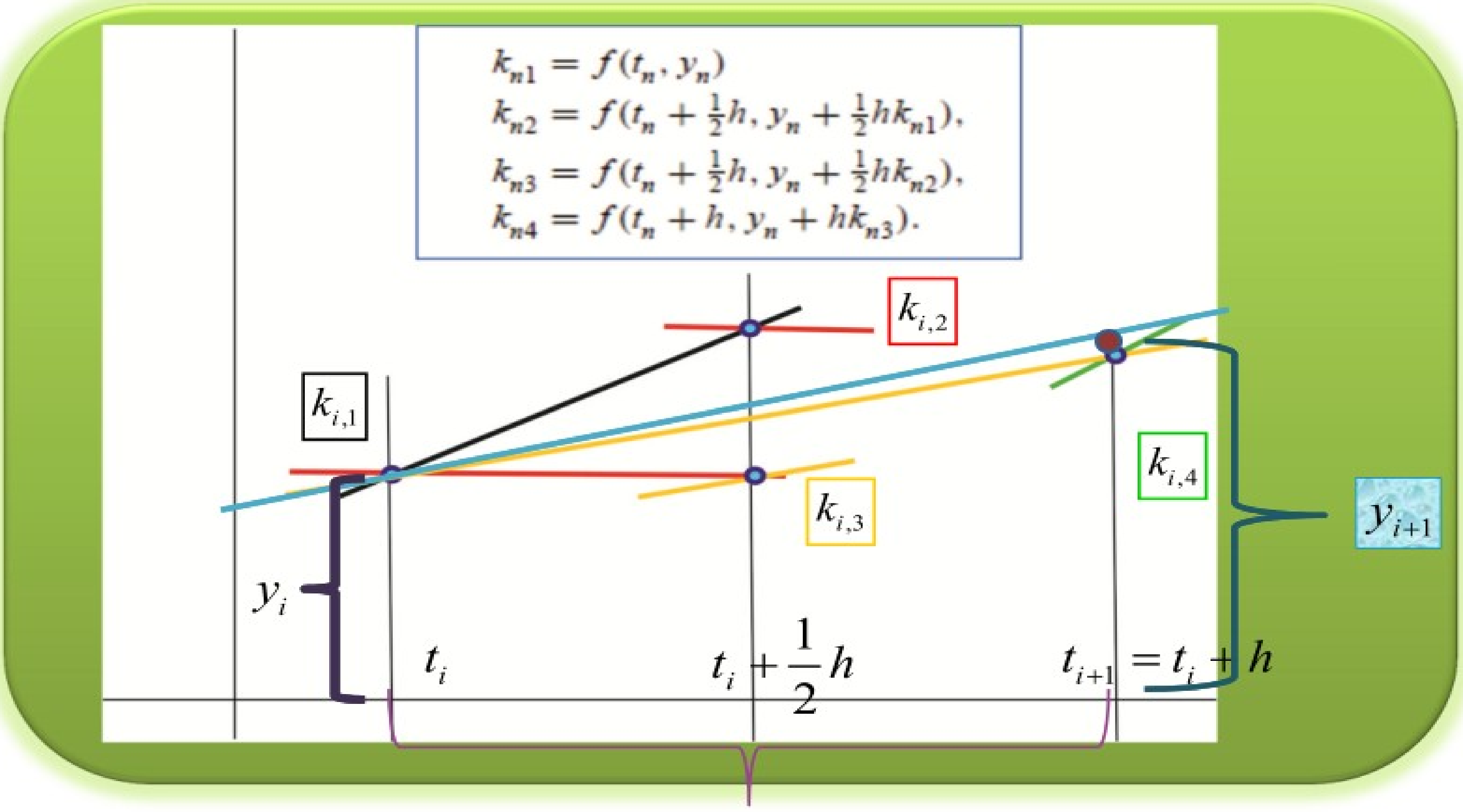
φ pendiente, h tamaño de paso

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6}\right),$$

$$k_{n1} = f(t_n, y_n)$$
$$k_{n2} = f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}),$$
$$k_{n3} = f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}),$$
$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}).$$

MÉTODO RUNGE-KUTTA

$$y_{k+1} = y_k + \varphi * h, \quad \varphi = \frac{1}{6}\left(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}\right)$$



MÉTODO RUNGE-KUTTA

Ejemplo Runge Kuta Cuarto Orden

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1.$$

$$f(t, y) = 1 - t + 4y$$

Tamaño de paso: $\boxed{h = 0.2}$

$$\begin{aligned}
k_{01} &= f(0, 1) = 5; \qquad hk_{01} = 1.0, \\
k_{02} &= f(0 + 0.1, 1 + 0.5) = 6.9; \qquad hk_{02} = 1.38, \\
k_{03} &= f(0 + 0.1, 1 + 0.69) = 7.66; \qquad hk_{03} = 1.532, \\
k_{04} &= f(0 + 0.2, 1 + 1.532) = 10.928.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + \frac{0.2}{6}[5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928] \\
&= 1 + 1.5016 = 2.5016.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t_1) &= y(t_0 + h) = y(0 + 0.2) \\
&= y(0.2) \cong y_1 \cong 2.5016
\end{aligned}$$

MÉTODO RUNGE-KUTTA

Otro ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1 \qquad \boxed{y(1) = ?}$$

Tamaño de paso $\boxed{h = 0.5,}$

Es necesario realizar dos "juegos" de cálculos

Calculamos las cuatro pendientes

$$k_1 = 0 + 1 = 1,$$
$$k_2 = (0 + 0.25) + (1 + (0.25) \cdot (1)) = 1.5,$$
$$k_3 = (0 + 0.25) + (1 + (0.25) \cdot (1.5)) = 1.625,$$
$$k_4 = (0.5) + (1 + (0.5) \cdot (1.625)) = 2.3125,$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.5}{6}[1 + 2 \cdot (1.5) + 2 \cdot (1.625) + 2.3125] \approx 1.7969.$$

Repitiendo el proceso $y_2 \approx 3.4347.$

MÉTODO RUNGE-KUTTA

- Ejemplo 3):
- $dy/dx = 2xy \quad y(0)=1 \quad h=0.1$

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417
4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

MÉTODO RUNGE-KUTTA

En el ejemplo 4 de la sección 2.3 se consideró una nave espacial que al inicio está cayendo libremente hacia la superficie de la Luna. Sus retropropulsores, al quemarse, provocan una desaceleración de $T = 4\ \text{m/s}^2$. Se encontró que un descenso suave sobre el satélite se obtiene por la ignición de los retropropulsores cuando la nave está a una altura de 41,870 m (justo arriba de 26 mi) sobre la superficie y entonces desciende a una velocidad de 450 m/s.

Ahora determínese el *tiempo de descenso* de la nave espacial. Sea la distancia $x(t)$ de la nave al centro de la Luna medida en m y el tiempo t en s. De acuerdo con el análisis de la sección 2.3 [donde se empleó $r(t)$ en vez de $x(t)$], $x(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2} = 4 - \frac{4.9044 \times 10^{12}}{x^2}, \tag{19}$$

$$x(0) = R + 41870 = 1{,}781{,}870, \quad x'(0) = -450$$

donde $G \approx 6.6726 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot(\text{m/kg})^2$ es la constante de gravitación universal y $M = 7.35 \times 10^{22}$ kg y $R = 1.74 \times 10^6$ m son la masa y el radio de la Luna. Encuéntrese el valor de t cuando $x(t) = R = 1{,}740{,}000$.

El problema en (19) es equivalente al sistema de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad x(0) = 1{,}781{,}870; \tag{20}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - \frac{4.9044 \times 10^{12}}{x^2}, \quad y(0) = -450.$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

- Descenso de nave

t (s)	x (m)	v (m/s)
0	1,781,870	−450.00
20	1,773,360	−401.04
40	1,765,826	−352.37
60	1,759,264	−303.95
80	1,753,667	−255.74
100	1,749,033	−207.73
120	1,745,357	−159.86
140	1,742,637	−112.11
160	1,740,872	−64.45
180	1,740,059	−16.83
200	1,740,199	30.77

t (s)	x (m)	v (m/s)
180	1,740,059	−16.83
181	1,740,044	−14.45
182	1,740,030	−12.07
183	1,740,019	−9.69
184	1,740,011	−7.31
185	1,740,005	−4.93
186	1,740,001	−2.55
187	1,740,000	−0.17
188	1,740,001	2.21
189	1,740,004	4.59
190	1,740,010	6.97

DIFERENCIAS FINITAS

Aproximación de derivadas

La forma más simple de representar derivadas es aproximarlas por expresiones finitas basadas en los valores de las variables dependientes en los nodos de la grilla.

Esta técnica se denomina **Diferencias Finitas**.

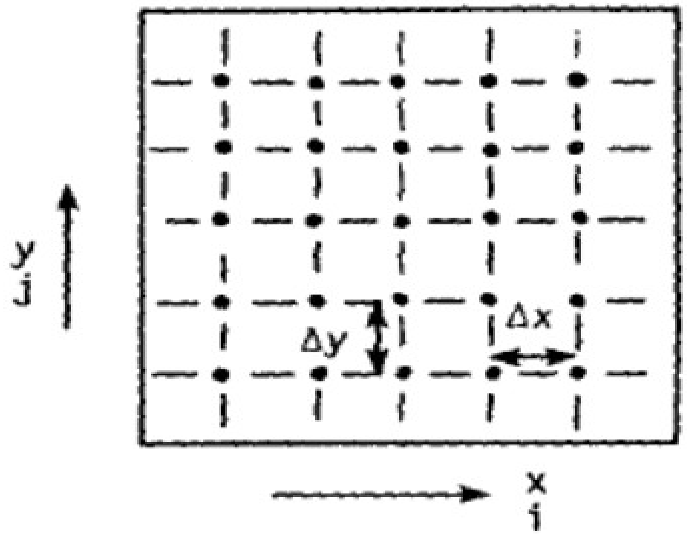
Por ejemplo, tomando una grilla bidimensional con espaciamiento $\Delta x = \Delta y = \Delta$, tenemos

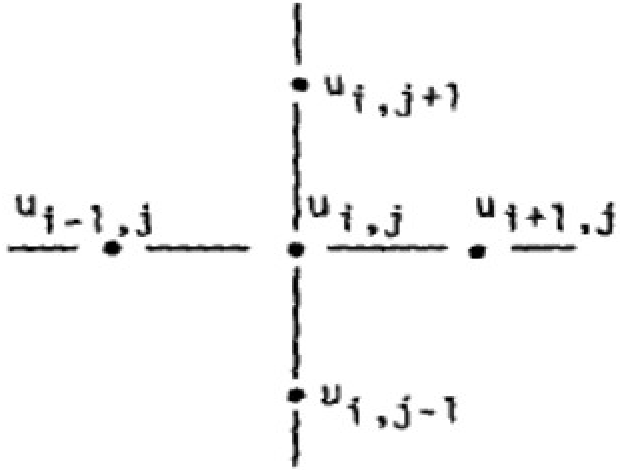
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i + \Delta, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta}$$

Notación: $u(x_i, y_j) \equiv u_{i,j}$ y $u(x_i + \Delta, y_j) \equiv u_{i+1,j}$

DIFERENCIAS FINITAS

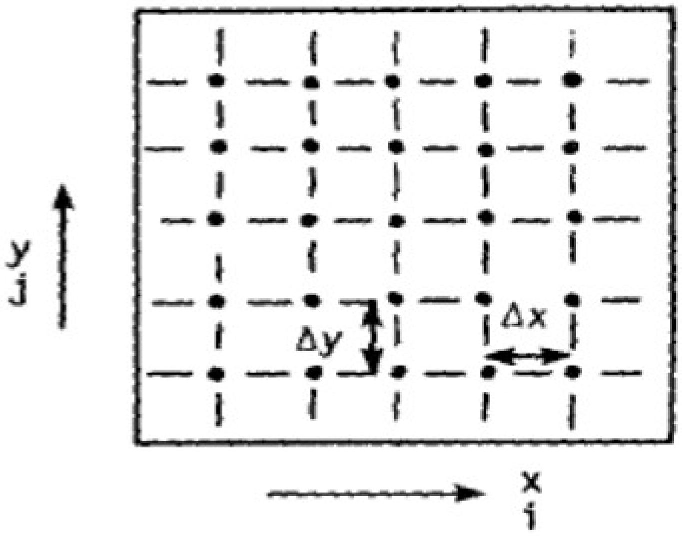
Grilla numérica

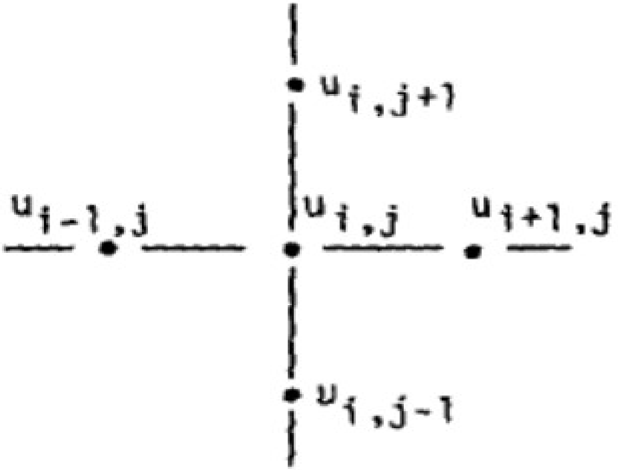




DIFERENCIAS FINITAS

Grilla numérica





DIFERENCIAS FINITAS

Diferencias Finitas

Aplicando series de Taylor,

$$u(x_i + \Delta x, y_j) = u_(x_i, y_i) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_i, y_i} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_i, y_i} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

Entonces podemos encontrar una aproximación para la primera derivada,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

El término $O(\Delta x)$ corresponde al **error de truncación** de la aproximación de diferencia finita de la derivada. En este caso el **error es orden Δx**.

DIFERENCIAS FINITAS

Diferencias Finitas (cont.)

Otras aproximaciones para la primera deriva también pueden ser derivadas a partir de la serie de Taylor.

Por ejemplo,

$$u(x_i - \Delta x, y_j) = u(x_i, y_i) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_i, y_i} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_i, y_i} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

Entonces, la aproximación hacia atrás de la primera derivada usando diferencias finitas es,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

DIFERENCIAS FINITAS

Diferencias Finitas (cont.)

También es posible derivar aproximaciones de más alto orden.

Por ejemplo, restando las aproximaciones para $u(x_i + \Delta x, y_i)$ y $u(x_i - \Delta x, y_0)$ obtenemos,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left((\Delta x)^2\right)$$

Este aproximación es de segundo orden en Δx. Esto quiere decir que el error de truncación (ET) de la aproximación satisface,

$$|ET| \leq C|\Delta x|^2 \qquad \Delta x \to 0$$

DIFERENCIAS FINITAS

Diferencias Finitas (cont.)

También podemos encontrar expresiones para derivadas de más alto orden.

Por ejemplo, sumando las aproximaciones para $u(x_i + \Delta x, y_i)$ y $u(x_i - \Delta x, y_i)$ obtenemos,

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O\left((\Delta x)^2\right)$$

De esta forma se pueden derivar expresiones con errores de truncación de distinto orden para aproximar derivadas de distinto orden.

DIFERENCIAS FINITAS

Diferencias Finitas: Aproximaciones

Derivada	Aproximación	Error
$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_i$	$\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta}$	$O(\Delta)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta}$	$O(\Delta)$
	$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta}$	$O\left(\Delta^2\right)$
$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_i$	$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta^2}$	$O(\Delta^2)$
	$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16ui-1-u_{i-2}}{12\Delta^2}$	$O(\Delta^4)$
$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_i$	$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+2u_{i-1}-u_{i-2}}{2\Delta^3}$	$O(\Delta^2)$

La gran mayoría de las EDPs que describen procesos que nos interesan son solo de **segundo orden**.

ESTO ES TODO AMIGOS!!