Детерминанта на Грам

Определение: Нека E е Евклидово пространство и $a_1, a_2, \dots, a_k \in E$.
Детерминанта на Грам ще наричаме:

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

Теорема: Нека E е Евклидово пространство и

$a_1, \dots, a_k \in E$, тогава

$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq 0 \quad (\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R})$,
$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0 \iff a_1, a_2, \dots, a_k$ са ЛЗ

Доказателство

1) Нека $a_1, a_2, \dots, a_k$ са линейно зависими

последователно умножаване скаларно с $a_1, a_2, \dots, a_k$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ и поне 1 $\lambda_i \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 (a_1, a_1) + \lambda_2 (a_1, a_2) + \dots + \lambda_k (a_1, a_k) = 0 \\ \lambda_1 (a_2, a_1) + \lambda_2 (a_2, a_2) + \dots + \lambda_k (a_2, a_k) = 0 \\ \overline{\lambda_1 (a_k, a_1) + \lambda_2 (a_k, a_2) + \dots + \lambda_k (a_k, a_k) = 0} \end{cases}$$

ХСЛУ с ненулево решение $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$

ХСЛУ с ненулево решение $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)$

$\iff$ det с-мата $=\Gamma(a_1,a_2,\dots,a_k)=0$

2) Нека сега $a_1,a_2,\dots,a_k$ са линейно независими. Ще докажем, че $\Gamma(a_1,a_2,\dots,a_k)>0$

$e_1,e_2,\dots,e_k$ – ортонормиран базис на $\ell(a_1,a_2,\dots,a_k)$

$$\left|\begin{array}{l} a_1=\lambda_{11}e_1+\lambda_{12}e_2+\dots+\lambda_{1n}e_n \\ \vdots \\ a_k=\lambda_{k1}e_1+\lambda_{k2}e_2+\dots+\lambda_{kn}e_n \end{array}\right.$$

$$\boxed{(a_i,a_j)=\lambda_{i1}\lambda_{j1}+\lambda_{i2}\lambda_{j2}+\dots+\lambda_{in}\lambda_{jn}}$$

$$\Delta=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ - & - & - & - \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}$$

$a_1,\dots,a_k$ – ЛНЗ

$\Rightarrow$ редовете на Δ са ЛНЗ

$$\begin{vmatrix} \ldots & & & \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \ldots & \lambda_{kn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ a_k \end{matrix}$$

са ЛНЗ $\Rightarrow \Delta \neq 0$

$\det A^t = \det A \qquad \Delta . \Delta^t = \Delta^2 = \Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k) > 0$

Следствие: Неравенство на Коши-Буняковски:

Нека E - Евклидово пространство и $a, b \in E$. Тогава е в сила неравенството

$$|(a, b)| \leq |a| |b|$$

Равенство се достига точно когато a и b са колинеарни.

Доказателство:

$$\Gamma(a,b) = \begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix} = (a,a)(b,b) - (a,b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a,b)^2 \leq |a|^2 |b|^2 \Rightarrow |(a,b)| \leq |a||b|$$

Примери:

1) $E = \mathbb{R}^n$, $\begin{array}{l} x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \end{array} \Rightarrow (x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$

$$(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (y,y) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2$$

$$(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad (y,y)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\right)$$

2) $E=C[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$

Като следствие от неравенството на Коши-Буняковски получаваме следната позната формула:

$$|(a,b)| \leq |a||b| \Rightarrow -|a||b| \leq (a,b) \leq |a||b|$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{(a,b)}{|a||b|} \leq 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0,\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{(a,b)}{|a||b|} = \cos\alpha \Rightarrow \boxed{(a,b) = |a||b| \cos\sphericalangle(a,b)}$$

7.1. $\sphericalangle(a,b) = ?$

$a = (2,1,3,2)$

$b = (1,2,-2,1)$

$(a,b) = 0$

$|a| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \cos\sphericalangle(a,b) = 0$

$|b| = \sqrt{10}$ $\quad \sphericalangle(a,b) = \frac{\pi}{2}$

Нека $x, y \in \mathbb{R}^2$. Да се докаже

$\Gamma(x,y) =$ квадрата на лицето на успоредника, построен върху векторите x, y.

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} ; \quad S^2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2 & x_1y_1+x_2y_2 \\ y_1x_1+y_2x_2 & y_1^2+y_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$\boxed{S.S^t \text{ (правило ред по ред)}} = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix} = \Gamma(x,y)$$

$E = \mathbb{R}^3 \quad x,y,z \in \mathbb{R}^3$

$\Gamma(x,y,z) = V^2$, V - обем на паралелепипед

Твърдение: Неравенство на триъгълника:

E – Евклидово пространство, $a, b \in E$. В сила е неравенството

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

Доказателство:

$$\underset{|a+b|^2}{\overset{\shortparallel}{(a+b, a+b)}} = (a,a) + 2(a,b) + (b,b) \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 =$$

$$= (|a|+|b|)^2 \Rightarrow |a+b| \le |a| + |b|$$

$\Rightarrow$ по индукция $\Rightarrow |x_1 + x_2 + \dots + x_k| \le |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|$

Следствие:

$$|a-b| \geq |a|-|b|$$

Задача 7.14. Нека векторите $b_1, b_2, \ldots, b_k$ са получени от ЛНЗ вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с помощта на ортог. по Грам–Шмид. Да се докаже, че:

а) $\Gamma(b_1, b_2, \ldots, b_k) = |b_1|^2 |b_2|^2 \ldots |b_k|^2$

б) $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Gamma(b_1, b_2, \ldots, b_k)$

в) $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k) \geq |a_1|^2 |a_2|^2 \ldots |a_k|^2$ – самостоятелно

Решение:

а) $$\Gamma(b_1, b_2, \dots, b_k) = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \cdots & (b_1, b_k) \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ (b_k, b_1) & (b_k, b_2) & \cdots & (b_k, b_k) \end{vmatrix}$$

$(b_i, b_j) = 0,\ i \neq j$

$(b_i, b_i) = 0$

$$\Rightarrow \Gamma(b_1, b_2, \dots, b_k) = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (b_2, b_2) & \cdots & 0 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ 0 & 0 & \cdots & (b_k, b_k) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma(b_1, b_2, \dots, b_k) = |b_1|^2 |b_2|^2 \cdots |b_k|^2$$

Нека: $a_i' = \frac{1}{|b_i|} a_i \qquad e_i = \frac{1}{|b_i|} b_i$

δ) $a_1, a_2, \dots, a_k$ – ЛНЗ

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 + * b_1 \\ \vdots \\ b_k = a_k + * b_{k-1} + \dots + * b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{|b_1|} \\ a_2 = b_2 + * b_1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{|b_2|} \\ \dots\dots \\ a_k = b_k + \dots + * b_1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{|b_k|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1' = e_1 \\ a_2' = e_2 + * e_1 \\ \vdots \\ a_k' = e_k + * e_{k-1} + \dots + * e_1 \end{cases}$$

$|e_i| = 1$ $\quad (b_i, b_j) = 0$

$(e_i, e_j) = 0$

$i \neq j$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \dots & & & & \\ 1 & * & \dots & * & * \end{vmatrix}_{k \times k} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Rightarrow \Delta^2 = 1$$

$\Delta . \Delta^t$ (ред по ред)

$$\Delta^2 = \Gamma(a_1', a_2', \dots, a_k') = 1$$

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ \dots & & & \end{vmatrix} =$$

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix} =$$

$$\boxed{a_i' = \frac{1}{|b_i|} a_i \quad , \quad (b_i, b_j) = 0, \quad (b_i, b_i) = |b_i|^2}$$

$$= \underbrace{|b_1|^2 \dots |b_k|^2}_{\Gamma(b_1, b_2, \dots, b_k)} \Gamma(\underbrace{a_1', a_2', \dots, a_k'}_{=1}) = \Gamma(a_1, \dots, a_k)$$

✓