Линейни изображения

Нека V и W са линейни пространства над едно и също числово поле F и нека $\varphi: V \to W$ е изображение. φ е линейно изображение, ако е изпълнено $\forall\, v_1, v_2 \in V$ и $\lambda \in F$:

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ \varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1)+\varphi(v_2) \\ &2)\ \varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1). \end{aligned}}$$

φ запазва операциите.
Записване $\varphi \in Hom(V, W)$

Еквивалентно:

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n)$$
$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F, \quad v_1, \dots, v_n \in V$$

Свойства:

1) $\varphi(0_V) = 0_W$
2) $\varphi(-v) = -\varphi(v), \ \forall v \in V$
3) Нека $v_1, v_2, \dots, v_n$ – линейно зависими вектори
$\Rightarrow \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)$ – линейно зав. в-ри.

Нека $\varphi: V \to V$ е лин. изображение, тогава φ се нарича линеен оператор – $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

Примери:

1) $\varphi: V \to V$, $\varphi(v) = kv$, $\forall v \in V$, $k \in F$, $k=0$ – нулев оператор
$k=1$ – идентитет

2) $\varphi: V \to V$

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k,$$

$1 \le k \le n$, k – фикс.

$\Rightarrow \varphi$ е оператор на проектиране

Теорема: Нека V и W са линейни пространства и нека $\dim V = n < \infty$. Тогава за всеки базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ на V и произволни n-вектора $v_1, v_2, \dots, v_n \in W$ съществува единствено лин. изображение $\varphi: V \to W$, такова че $\varphi(e_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Определение Нека V и W са линейни пространства и $\varphi: V \to W$ е изображение. φ е изоморфизъм, ако:

1) φ е линейно изображение
2) φ е биекция

Записване: $V \cong W$

Твърдение: При изоморфизъм образ на линейно независима система в-ри също е линейно независима с-ма в-ри.

Теорема: Две крайномерни над F пространства V и W са изоморфни тогава и само тогава, когато имат еднакви размерности: $\dim V = \dim W$.

Забележка: Всяко n-мерно пространство е изоморфно на F^n

Проверете, че $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}_4[x] \cong M_2(\mathbb{R})$!

Нека $\varphi \in Hom(V,W)$, $\dim V = n$, $\dim W = m$ и нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис на V, $f_1, f_2, \dots, f_m$ - базис на W. Изпълнено е:

$$\varphi(e_1) = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \dots + \alpha_{m1} f_m$$
$$\varphi(e_2) = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \dots + \alpha_{m2} f_m$$
$$\vdots$$
$$\varphi(e_n) = \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \dots + \alpha_{mn} f_m$$

$$A = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ \varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad\quad \varphi(e_n) \end{array}$$

<u>Определение</u>: Матрицата $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ наричаме матрица на линейното изображение φ спрямо фиксираните базиси $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ на V и W.

В случая, когато φ е линеен оператор, т.е. $\varphi \in Hom(V)$ матрицата на φ спрямо фиксиран базис на

V e:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in F.$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{array}$$

$$\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n, \quad i = 1, \ldots, n$$

Нека $\varphi \in Hom(V, W)$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис на V, а $f_1, f_2, \ldots, f_m$ – базис на W и нека $A \in F_{m\times n}$ е матр. на φ спрямо двата базиса. Тогава:

$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i \Rightarrow A\xi = \eta$,

където $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$

<u>Задача 1</u>: Да се докаже, че в пространството $F^{n+1}[x]$ (полиномите от степен $\leq n$) с базис $e_1 = 1, e_2 = x, \ldots, e_{n+1} = x^n$, изображението "диференциране" е зададено с равенството

$$D(f(x)) = f'(x), \quad f(x) \in F^{n+1}[x].$$

Да се докаже, че $D(f(x))$ е линеен оператор и да се напише матрицата му в базиса на $F^{n+1}[x]$.

<u>Реш.</u> Проверяване, че $D(f(x))$ е

линейно изображение и тъй като $D: F^{n+1}[x] \longrightarrow F^{n+1}[x] \Rightarrow D$ е линеен оператор.

$$1)\ D\big((f+g)(x)\big) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) =$$
$$= D\big(f(x)\big) + D\big(g(x)\big),\quad f(x), g(x) \in F^{n+1}[x];$$
$$2)\ D\big(\lambda f(x)\big) = (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) = \lambda D\big(f(x)\big).$$

За да намерим матрицата на оператора е необходимо да намерим образите на базисните в-ри.

$$D(e_1) = D(1) = 0 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+1})$$
$$D(e_2) = D(x) = x' = 1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$
$$D(e_3) = D(x^2) = (x^2)' = 2x = (0, 2, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$D(e_{n+1}) = D(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1} = (0, 0, 0, \dots, n, 0)$$

Матрицата на оператора D е:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n+1 \times n+1}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ D(e_1) & D(e_2) & D(e_{n+1}) \end{array}$$

Задача 2: Да се докаже, че в пространството $M_2(F)$, с базис E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, изображението $\varphi(A) = A - A^t$, $A \in M_2(F)$ е линеен оператор. Да се намери матрицата на φ в базиса. Изображението $\psi(A) = A - E$ дали е линеен оператор?

Реш: Самостоятелно за φ!

Матр. на φ е:

$$\varphi(E_{11}) = E_{11} - E_{11}^t = (0,0,0,0)$$
$$\varphi(E_{12}) = E_{12} - E_{12}^t = E_{12} - E_{21} = (0,1,-1,0)$$
$$\varphi(E_{21}) = E_{21} - E_{21}^t = -E_{12} + E_{21} = (0,-1,1,0)$$
$$\varphi(E_{22}) = E_{22} - E_{22}^t = (0,0,0,0)$$
$$M_\varphi(E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка за ψ, не е оператор, защото:

$$\psi(A+B) = A+B-E \neq$$
$$\psi(A) + \psi(B) = A - E + B - E = A + B - 2E$$

Действия с линейни изображения

Нека $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Дефинираме операциите:

1) $(\varphi+\psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$
2) $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$

, $\forall v, u \in \mathrm{Hom}(V,W), \lambda, \mu \in F$

1.1) $(\varphi+\psi)(u+v) = \varphi(u+v) + \psi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) + \psi(u) + \psi(v) =$
$= \varphi(u+v) + \psi(u+v)$

1.2) $(\varphi+\psi)(\lambda v) = \varphi(\lambda v) + \psi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) + \lambda\psi(v) =$
$= \lambda(\varphi+\psi)(v) \Rightarrow \varphi+\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

2.1) $(\lambda\varphi)(u+v) = \dots = \lambda\varphi(u+v)$

2.2) $(\lambda\varphi)(\mu v) = \dots = \lambda(\mu\varphi(v))$ $\Rightarrow \lambda\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

Относно така въведените

операции $Hom(V,W)$ се превръща в лин. пространство над полето F.

Теорема: Нека V и W са крайномерни лин. простр. над числово поле F и $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогава $Hom(V,W) \cong F_{m \times n}$. В частност $Hom\ V \cong M_n(F)$.

Размерността на $Hom(V,W) = n.m$, $\dim Hom V = n^2$

Заб. Проверката за линейност на изображението $\varphi: Hom(V,W) \to F_{m \times n}$ се съгласува с познатите операции събиране на матрици и умножение на матрица с число.

Определение: Нека V, W, U са лин.

пространства и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(W,U)$. Под произведение $\psi\varphi : V \to U$ на φ и ψ ще разбираме тяхната композиция $(\psi\varphi)(a) = \psi(\varphi(a))$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ \psi"'] & W \arrow[r, "\psi"'] & U \end{tikzcd}$$

<u>Теорема</u>: Нека V, W, U са крайномерни линейни пространства, съответно с базиси $e_1, \dots, e_n$, $f_1, \dots, f_m$, $h_1, \dots, h_k$. Нека $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(W,U)$. Тогава, ако $\varphi \to A \in F_{m\times n}$, $\psi \to B \in F_{k\times m}$, то $\psi\circ\varphi \to BA \in F_{k\times n}$.

<u>Забележка</u>: Познатото умножение на матрици по правилото ред по стълб

(със съответното изискване
за брой на редове и стълбове) по
естествен начин произлиза от
умножението на линейни
изображения.

Ранг и дефект на линейно изображение. Обратим линеен оператор.

Нека V и W са линейни пространства, а $\varphi \in Hom(V, W)$.

Определение: Ядро на линейното изображение φ, наричаме множеството:

$$Ker\,\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = o_w\} \leq V$$

$u, v \in Ker\,\varphi$, $\lambda \in F$:

1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) = o + o = o$
2) $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = \lambda o = o$ $\Rightarrow Ker\,\varphi \leq V$

Образ на φ ще наричаме

множеството:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{ w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w \} \leq W$$

$w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi$, $\lambda \in F$:

$\exists\, v_1, v_2 \in V$: $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$

1) $w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(\underbrace{v_1 + v_2}_{v_3}) = \varphi(v_3) = w_3 \in \operatorname{Im}\varphi$

2) $\lambda w_1 = \lambda \varphi(v_1) = \varphi(\underbrace{\lambda v_1}_{u}) = \varphi(u) = w \in \operatorname{Im}\varphi$

$\xRightarrow{1),2)} \operatorname{Im}\varphi \leq W$

<u>Забележка:</u> Едно лин. изображение φ е инективно точно когато $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
Едно лин. изображение $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ е сюрективно точно когато $\operatorname{Im}\varphi = W$.

<u>Определение:</u> Под ранг на φ ще

разбираме числото $r(\varphi) = \dim \operatorname{Im} \varphi$. Под дефект на φ ще разбираме числото $d(\varphi) = \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

<u>Твърдение 1</u>: Ако V и W са крайномерни простр. и A е матрицата на φ в кои да е два базиса на V и W, то $r(\varphi) = r(A)$.

<u>Док.</u> Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_m$ са базиси на V и W и A е матрицата на φ в тези базиси. Знаем, че $r(A)$ = ранг с-ма вектор-редове = ранг с-ма вектор-стълбове =

$= r(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = \dim \ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$.

Всеки вектор от $\operatorname{Im}\varphi$ има вида:

$$\operatorname{Im}\varphi \ni w = \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \lambda_2 \varphi(e_2) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) \in \ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$$

$$\varphi(e_i) \in \operatorname{Im}\varphi, \ i = 1, \dots, n \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = r(A).$$

Теорема за ранга и дефекта:
Ако $\dim V = n < \infty$, то $r(\varphi) + d(\varphi) = n$.

Доказателство:

- Ако $\operatorname{Im}\varphi = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = V$ и $d(\varphi) = n$,

проверете, че в случая на

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\} \Rightarrow r(\varphi) = n.$

- Нека $e_1, e_2, \dots, e_d$ – базис на $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Допълваме $e_1, e_2, \dots, e_d,$ $\underline{e_{d+1}, \dots, e_n}$ до базис на V.
- Проверяваме дали $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образува

базис на $\mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow n = d(\varphi) + r(\varphi)$

$$\forall w \in \mathrm{Im}\,\varphi \ \exists v \in V : w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) =$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \varphi(e_i)}_{=0} + \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \ell(\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n))$$

Остава да проверим, че $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)$ са линейно независими:

$\mu_{d+1}\varphi(e_{d+1}) + \dots + \mu_n\varphi(e_n) = 0 \Rightarrow \varphi(\mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n) = 0$

$\Rightarrow \mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow \exists\, \mu_1, \dots, \mu_d \in F: \ \mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_d e_d$

$\Rightarrow \mu_1 e_1 + \dots + \mu_d e_d - \mu_{d+1}e_{d+1} - \dots - \mu_n e_n = 0$, но

$e_1, \dots, e_n$ - базис на $V \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_d = \mu_{d+1} = \dots = \mu_n = 0$

Обратим линеен оператор

Нека V – лин. пространство и $\dim V = n < \infty$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$.

Наричаме φ – обратим лин. оператор, ако $\exists$ лин. оператор $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}(V)$:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathcal{E} = id.$$

Обратният лин. оператор φ^{-1} еднозначно се определя от φ.

Всеки обратим лин. оператор е биекция $\Rightarrow$ той е изоморфизъм.

<u>Твърдение 2:</u> Нека φ е обратим линеен оператор във V. Ако в даден базис на V на φ съответства матрица A, то A е обратима матрица и в същия базис на φ^{-1} съответства матрицата A^{-1}.

<u>Доказателство:</u> Директно!

<u>Твърдение 3:</u> Нека $\varphi \in Hom\ V$. Следните условия са еквивалентни:

1) φ е обратим линеен оператор;
2) $Ker\ \varphi = \{0\}$;
3) $Im\ \varphi = V$;
4) φ преобразува кой да е базис

на V в базис на V;

5) матрицата на φ във всеки базис на V е обратима.

Доказателство: 1) $\Rightarrow$ 2) Нека $v \in \operatorname{Ker} \varphi$. Тогава:

$$v = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(v) = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$$

2) $\Rightarrow$ 3) $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \Rightarrow d(\varphi) = 0$

$\Rightarrow n = r(\varphi)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \varphi = V$

3) $\Rightarrow$ 4) Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис на V. Тъй като

$\operatorname{Im}\varphi = V \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = r(\varphi) = \dim V = n \Rightarrow$
$\dim \ell(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \dim \ell(e_1, \ldots, e_n) = n$
$\Rightarrow \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ – базис на V

4) $\Rightarrow$ 5) Нека $e_1, \ldots, e_n$ – базис на V
и A е матрицата
на φ в този базис. $r(A) =$ ранг на
с-ма вектор стълбове $= r(\varphi(e$
$_1), \ldots, \varphi(e_n)) \Rightarrow r(A) = \dim \ell(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = n$.
$\Rightarrow \det A \neq 0$ и A е обратима матрица.
5) $\Rightarrow$ 1) Нека $e_1, \ldots, e_n$ е базис
на V и A е
матрицата на φ в този базис.
Тъй като A е
обратима, то $\exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$
и нека на
A^{-1} съответства лин. оператор φ'
$\Rightarrow \varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi = \varepsilon$
$\Rightarrow \varphi' = \varphi^{-1}$ и φ е обратим лин.

оператор.

Забележка: Нека V е безкрайномерно пространство и $V = \{(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) \mid e_i \in F\}$. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom} V$: $\varphi(e_i) = e_{i+1}$. Очевидно $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, но $\operatorname{Im} \varphi \neq V$: $e_1 \notin \operatorname{Im} \varphi$ и $\nexists\, \varphi^{-1}$ $(\varphi^{-1}(e_1) = ?)$.

Нека сега $V = \mathbb{R}[x]$ – безкрайномерно лин. пространство на полиномите с реални коефициенти. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$:
$\varphi(f(x)) = f'(x)$ – оператор диференциране. Очевидно $\operatorname{Im} \varphi = V$, но $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{0\}$ $(\varphi(c) = 0$, където $c = \text{const})$. Операторът φ не е обратим. Двата примера показват, че при

безкрайномерно пространство от 2) и 3) не следва, че операторът е обратим.

Забележка: Нека V и W са крайномерни лин. пространства.
Може да се дефинира понятието обратимо лин. изображение $\varphi \in Hom(V, W) \Leftrightarrow \exists \varphi' \in Hom(W, V)$:
$\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi = \varepsilon \Rightarrow \varphi' = \varphi^{-1}$. Казваме, че φ е обратимо $\Leftrightarrow \varphi$ е биекция $\Rightarrow \dim V = \dim W$.

Докажете, че ако $\dim V > \dim W$, то $\varphi: V \to W$ не е инективно изображение. Ако $\dim V < \dim W$, то $\varphi: V \to W$ не е сюрективно изображение.

Задача 3 (5.16.а)): Нека e_1, e_2, e_3, e_4 е базис на V и линейният оператор

$\varphi \in \operatorname{Hom} V$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

в този базис. Да се намерят базиси на подпространствата $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$.

Реш.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow Av = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. трябва да намерим ФСР

на матр. A.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \ & p & q & \ \end{array} \end{array}$$

1) $p = 1,\ q = 0$

$v_1 = (-2, 1, 0, 0)$

2) $p = 0,\ q = 1$

$v_2 = (-1, 0, 1, -1)$

Векторите v_1 и v_2 са базис на $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Един вектор $u \in \mathrm{Im}\,\varphi \iff u \in l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$

$\Rightarrow$ за да намерим базис на $\mathrm{Im}\,\varphi$, търсим МЛНЗП на A^t:

$$\begin{array}{c} \times(-2) \\ \times(-3) \\ \times(-2) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = (-1, 0, 1, -1), \quad u_2 = (0, 1, -1, 1)$$

Векторите u_1 и u_2 образуват базис на $\operatorname{Im} \varphi$.

$$\operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Im} \varphi = \ell(v_1, v_2) + \ell(u_1, u_2) = \ell(v_1, v_2, u_1, u_2),$$

т.е. търсим МЛНЗП на с-мата вектора $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$.

$$
\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to w_1 \\ \to w_2 \\ \to w_3 \end{array}
$$

Очевидно векторите w_1, w_2, w_3 образуват МЛНЗП на системата $\Rightarrow$ те са базис на $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$.

За да намерим базис на $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ трябва да представим и двете пространства като пространства от решения на хомогенни системи.

Знаем, че:

$$\operatorname{Ker}\varphi: \left| \begin{array}{l} \qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 0 \end{array} \right.$$

За да представим $\operatorname{Im}\varphi$ като пространство от реш. на ХСЛУ трябва да решим обратната задача за ФСР!

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\quad \uparrow \;\; \uparrow \\ \qquad\quad p \;\;\; q \end{array}$$

1) $p = 1, q = 0 \Rightarrow s_1 = (1, 1, 1, 0)$

2) $p = 0, q = 1 \Rightarrow s_2 = (-1, -1, 0, 1)$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ -x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Обединяваме двете системи и търсим ФСР, което е базис на $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = 1 \Rightarrow t_1 = (0, 0, 1, -1)$$

Получихме, че векторът t_1 е базис на $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$. Правим проверка по размерностите на подпространствата:

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi) = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi - \dim \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$$

$$3 = 2 + 2 - 1$$

Задача 2: Да се намери базис на

ядрото и
образа на лин. оператор $\varphi \in Hom(M_2(F))$, където
$\varphi(A) = A - A^t$, $A \in M_2(F)$. Дали φ е обратим
оператор?

Решение: Получихме за матрицата на φ в
базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$:

$$M_\varphi(E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Ker\,\varphi = \{ A \in M_2(F) \mid \varphi(A) = 0 \}$$

Търсим ФСР от матр. M_φ

(E)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} p & & q & r \end{array} \end{array}$$

1) $p=1,\ q=r=0$

$v_1=(1,0,0,0)$

2) $p=0,\ q=1,\ r=0$

$v_2=(0,1,1,0)$

3) $p=q=0,\ r=1$

$v_3=(0,0,0,1)$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \varphi = 3$

$v_1 \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 \to A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ v_3 \to A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базис на $\operatorname{Ker} \varphi$ образуват матриците

A_1, A_2, A_3.

$\operatorname{Im} \varphi$ – МЛНЗП на $M_e(E)^t$:

$$M_e(E)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 = (0, 1, -1, 0)$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = 1$$

$$v_4 \to A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис на $\operatorname{Im} \varphi$ образува матрицата A_4. φ не е обратим лин. оператор $(\det M_e(E) = 0)$.