Ортогонални оператори:

Определение: $A \in M_n(\mathbb{R})$ е ортогонална матрица
$$\iff A.A^t = E \iff A^t = A^{-1}$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n} : \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - & - \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A.A^t = E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2x2 редовете и стълбовете на A са ортогонални помежду си $\Rightarrow$ образуват базис на $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 1: В крайномерно Евклидово пространство E, матрицата на прехода от един ортонормиран базис в друг ортонормиран базис е ортогонална.

$e_1, e_2, \dots, e_n$
$f_1, f_2, \dots, f_n$ > ортонормирани базиси на E

$$T_{e\to f} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ - & - & - & - \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \quad & f_n \end{array} \end{array} \qquad \boxed{f_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ki} e_k}$$

$$\delta_{ij} = (f_i, f_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{ki} e_k , \sum_{k=1}^{n} \tau_{kj} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ki} \tau_{kj}$$

$\iff T$ е ортогонална матрица

Свойства на ортогоналните матрици!

1) ако A е ортогонална матрица $\Rightarrow \det A = \pm 1$

$$\det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2 = \det E = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$

2) ако A е ортогонална $\Rightarrow A^{-1}$ е ортогонална

$$A^{-1}A = E \quad \Big|^{\,t}$$

$$(A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t = E, \quad A^t = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}(A^{-1})^t = E$$

$$\Rightarrow A^{-1} \text{ е ортогонална}$$

3) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ - ортогонални $\Rightarrow AB$ е ортогонална

$$AA^t = BB^t = E$$

$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$AA = BB = E$$

$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

V

<u>Определение</u>: Нека E е Евклидово пространство. $\varphi \in \mathrm{Hom}\, E$ и казваме, че φ е ортогонален оператор, ако за $\forall$ 2 вектора a, $b \in E$:

$$(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$$

Нека $\dim E = n < \infty$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис на E

$$a = \sum_i \xi_i e_i \qquad \Longrightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$$

$$b = \sum_j \eta_j e_j \qquad \Rightarrow \left(\sum_i \xi_i \varphi(e_i), \sum_j \eta_j \varphi(e_j)\right) = \left(\sum \xi_i e_i, \sum \eta_j e_j\right)$$

$$\forall i, j \in [1, n] \Longleftrightarrow (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j)$$

Твърдение 2: φ е ортогонален оператор $\Longleftrightarrow$

$$\forall a \in E : (\varphi(a), \varphi(a)) = (a, a),$$

т.е. когато φ запазва дължините на векторите.

Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ φ е ортогонален и нека $a=b$

$$\Rightarrow (\varphi(a), \varphi(a)) = (a,a).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $(\varphi(a), \varphi(a)) = (a,a), \ \forall a \in E.$

$$(\varphi(a+b), \varphi(a+b)) = (a+b, a+b)$$

л.стр. $(\varphi(a)+\varphi(b), \varphi(a)+\varphi(b)) = \underline{(\varphi(a), \varphi(a))} +$

$+ \underline{(\varphi(b), \varphi(b))} + 2\underline{(\varphi(a), \varphi(b))}$

д.стр. $(a+b, a+b) = \underline{(a,a)} + \underline{(b,b)} + 2\underline{(a,b)}$

$$\Rightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) = (a,b), \ \forall a, b \in E$$

$\Rightarrow \varphi$ е ортогонален оператор ✓

Следствие Ако φ е ортогонален оператор, той запазва големината на ъглите между векторите.

$$(a,b) = |a||b|\cos\measuredangle(a,b)$$

$$(\varphi(a),\varphi(b)) = |\varphi(a)||\varphi(b)|\cos\measuredangle(\varphi(a),\varphi(b))$$

Твърдение 3: Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на E и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, E$, а $A_e(\varphi)$ е матр. на φ в базиса. Тогава φ е ортогонален оператор $\Leftrightarrow$ A е ортогонална матрица.

Следователно φ е обратим оператор.

Доказателство:

$$A=(a_{ij})=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \varphi(e_1) \cdots \varphi(e_i) \cdots \varphi(e_n)\end{array} ; \quad \varphi(e_i)=\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$(e_i, e_j)=\delta_{ij}$ – ортон. базис

$$\underline{(\varphi(e_i), \varphi(e_j))} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\right) =$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}} = \underline{(e_i, e_j)}$$

$\Rightarrow A$ е ортогонална $\Leftrightarrow \varphi$ е ортогонален оператор

$\Rightarrow \exists A^{-1}=A^{t} \Rightarrow \exists \varphi^{-1} : \varphi^{-1}\circ\varphi = \varphi\circ\varphi^{-1} = id$

✓

Следствие: φ е ортогонален оператор $\Leftrightarrow$ преобразува ортонормиран базис на E в ортонормиран базис на E.

Твърдение 4 Собствените стойности на ортогонален оператор са равни на ± 1.

Доказателство:

$\varphi \in \mathrm{Hom}\, E$ $\quad$ λ – собствена стойност на φ

v – собствен вектор, съответстващ на λ

$\varphi(v) = \lambda v$

$$(\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v) \Leftrightarrow (\lambda v, \lambda v) = (v, v) \Leftrightarrow \lambda^2 (v, v) = (v, v)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(v, v) = 0 \quad (v - \text{собствен} \Rightarrow v \neq 0 \Rightarrow (v, v) > 0)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

✓

Твърдение 5: Всеки два собствени вектора съответстващи на различни собствени стойности на ортогонален оператор, са ортогонални помежду си.

Доказателство:

$\varphi \in \mathrm{Hom}\, E$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\qquad \varphi(v_1) = \lambda_1 v_1$

$\lambda_1 \leftrightarrow v_1$, $\lambda_2 \leftrightarrow v_2$ $\qquad \varphi(v_2) = \lambda_2 v_2$

$$\big(\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big) = (v_1, v_2) \Leftrightarrow (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = (v_1, v_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1\lambda_2 - 1)(v_1, v_2) = 0, \qquad \lambda_1 = \pm 1,\ \lambda_2 = \pm 1 \text{ и } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1 \Rightarrow -2(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \qquad \checkmark$$

Теорема Нека E е Евклидово пространство, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, E$ е ортогонален оператор. Тогава съществува ортонормиран базис на E, в който матрицата D на φ е клетъчно-диагонална.

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_k \end{pmatrix}, \quad D_i = (1),\ D_i = (-1),$$
$$D_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Доказателство: Индукция по $\dim E = n$.

1) $n = 1$ $\quad v_1$ – базис на E, $|v_1| = 1 \Rightarrow \varphi(v_1) \in E$

$l(v_1) \ni \varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 \Rightarrow \lambda_1$ е собствена стойност на φ

$\Rightarrow \lambda_1 = \pm 1 \Rightarrow D = (1)$ или $D = (-1)$.

2.1) $n = 2$ $\quad \varphi$ има $\lambda \in \mathbb{R}$ – собствена стойност.

$\checkmark$

$\lambda = \pm 1 \Longleftrightarrow v_1'$ – собствен вектор

$v_1 = \frac{1}{|v_1'|} v_1'$ – собствен вектор с дължина 1

$\varphi(v_1) = \lambda v_1$

Нека v_1, v_2 – ортонормиран базис на E.

$\underline{(v_1, v_2) = 0} \Rightarrow E = l(v_1) \oplus \underline{l(v_2)}$ $\quad l(v_1)^\perp = l(v_2)$

φ – инвариантно?

$(v_1, \varphi(v_2)) = \pm(\lambda v_1, \varphi(v_2)) = \pm(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \pm(v_1, v_2) = 0$

$\Rightarrow \varphi(v_2) \in l(v_1)^\perp = l(v_2) \Rightarrow l(v_2)$ е φ-инв. подпр. на E.

$\Rightarrow \varphi(v_2) = \mu v_2$ $\quad \mu = \pm 1$ (φ е ортог. оператор)

$\Rightarrow \varphi(v_2) = \mu v_2$, $\mu = \pm 1$ ($\varphi|_{\ell(v_2)}$ е ортог. оператор)

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vee D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vee D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2) $n=2$ и нека φ няма реални характеристични корени

$\Rightarrow \varphi$ няма собствени стойности.

e_1, e_2 - ортонормиран базис на E

$$A_e(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = \pm 1 = ad - bc$$

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$D = [-(a+d)]^2 - 4\underbrace{(ad-bc)}_{=\pm 1} < 0 \quad \Rightarrow \det A = ad - bc = 1$$

дискриминанта

$$A\text{-ортогонална} \Rightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = d, \; b = -c \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \; a^2 + c^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow a=d,\ b=-c \Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix},\ a^2+c^2=1$$

$\exists\, \alpha$ - ъгъл: $a=\cos\alpha,\ c=\sin\alpha \qquad \alpha \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow A = D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, ако $\alpha = k\pi \Rightarrow c=0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a^2=1$ – случай 2.1)

3) $n>2$ и нека φ има 1-мерно или 2-мерно инвариантно подпространство U.

от 1), 2) $\Rightarrow \varphi|_U$ е ортог. и притежава ортонормиран базис, в който матрицата на φ е от желания вид.

$U^\perp$ – ортог. допълнение на U: $U \oplus U^\perp = E$

? $U^\perp$ е φ-инвариантно подпространство?

? $U^\perp$ е φ-инвариантно подпространство ?

$v \in U^\perp \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(v) \in U^\perp$, $\boxed{(v, U) = 0}$

$u \in U$, $\varphi|_U$ - ортогонален и обратим $\Rightarrow \exists w \in U$:

$$\varphi(w) = u$$

$$(\varphi(v), u) = (\varphi(v), \varphi(w)) = (v, \underset{\in U}{w}) = 0 \Rightarrow \varphi(v) \in U^\perp$$

$\Rightarrow U^\perp$ е φ-инвариантно подпространство.

φ е ортогонален оператор в $U^\perp$ и $\dim U^\perp \leq n-1$

$\xRightarrow{\text{по ИП}} \exists$ ортонормиран базис на $U^\perp$: матрицата на φ в него е от желания вид

ортон. базис на U + ортон. базис $U^\perp$ = ортон. базис на E

$(U, U^\perp) = 0$, $U \oplus U^\perp = E$

$\Rightarrow$ матрицата на φ в ортонормирания базис на E е:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix} U^\perp$$

$\checkmark$

Следствие: За всяка ортогонална матрица A съществува ортогонална матрица T, такава че

$$D = T^{-1} A T$$

и D има вида на клетъчно-диагоналната матрица от Теоремата.