Собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор.

Нека е дадена матрица $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(F)$. Под характеристичен полином на матр. A ще разбираме:

$$f_{(A)}\lambda = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})}_{tr\,A} \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

Корените на $f_{(A)}(\lambda)$ се наричат характеристични корени.

<u>Твърдение 1</u>: Характеристичните полиноми на подобни матрици съвпадат.

<u>Доказателство</u>: Нека $A \sim B$, т.е. $B = T^{-1}AT$.

Изпълнено е:

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det\left(T^{-1}AT - T^{-1}\lambda E T\right) =$$
$$= \det\left(T^{-1}(A - \lambda E)T\right) = \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T =$$
$$= \det(A - \lambda E) = f_A(\lambda).$$

$\blacksquare$

Следствие: Ако V е крайномерно лин. простр.
и $\varphi \in Hom\, V$, тогава той като матриците на
φ в различните базиси на V са подобни, следва че можем да говорим за характеристичен полином на лин. оператор.

Определение: Нека V е лин. пространство над F и $\varphi \in Hom\, V$. Векторът $v \in V$ се нарича собствен
вектор за φ, ако:

1) $v \neq 0$
2) $\varphi(v) = \lambda v$, $\lambda \in F$,

λ се нарича собствена стойност на φ, съответстваща на собствения вектор v.

Примери:

1) Оператор хомотетия φ, дефиниран по следния начин: $\forall\, v \in V: \quad \varphi(v) = \lambda_0 v$, λ_0 – фиксирано число $\Rightarrow \forall\, v \neq 0$ е собствен вектор и λ_0 е единствената собствена стойност на φ.

2) Оператор ρ – "ротация на ъгъл φ" (където $0 \leq \varphi < 2\pi$), на вектор от равнината около началото на коорд. с-ма. Матрицата на оператора е:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Докажете, че ρ има собствени вектори само за $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

<u>Теорема 1:</u> Нека V е крайномерно пространство, над полето F и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$. Тогава характер истинните корени на φ, лежащи в полето F, и само те, са $\forall$ собствени стойности на φ.

<u>Доказателство:</u> Нека $e_1, \dots, e_n$ - базис на V и $A = (a_{ij})_{n \times n}$ е матр. на φ в базиса. Нека $\lambda \in F$ е собствена стойност на φ и

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in V : \varphi(v) = \lambda v,$$ тогава

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \ \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = \lambda \xi_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = \lambda \xi_2 \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n = \lambda \xi_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\xi_n = 0 \end{cases}$$

Векторът $v = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$ (т.е. е собствен) $\Leftrightarrow f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in F$ е характеристичен корен на φ.

<u>Забележка:</u> Някои от характеристичните корени на оператор φ може да не лежат в числовото поле F, но тъй като $F \subseteq \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}$ е алгебрически затворено $\Rightarrow$ всички корени са комплексни.
Ако V е лин. простр. над $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ хар. корени = собствени стойности.

<u>Теорема 2:</u> Нека V е лин. пространство и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$. Ако $v_1, v_2, \dots, v_k$ са собствени вектори на φ, съответстващи на различни собствени

стойности, то $v_1, v_2, \ldots, v_k$ са лин. независими вектори.

Доказателство: Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ са собствените стойности, съответстващи на $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Индукция по k:

1) База: $k = 1$, v_1 е собствен $\Rightarrow$ $v_1 \neq 0$ и е лин. нез.

2) Нека $k > 1$ и твърдението е изпълнено за $k-1$ вектора. Тогава:

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k = 0 \qquad (1)$$

$$\varphi(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k) = \varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 \varphi(v_1) + \cdots + \mu_{k-1}\varphi(v_{k-1}) + \mu_k \varphi(v_k) = 0$$

$$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

$$\Rightarrow \mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_{k-1}\lambda_{k-1} v_{k-1} + \mu_k \lambda_k v_k = 0 \qquad (2)$$

Умножаваме (1) с λ_k и вадим от (2):

$$\mu_1(\lambda_1-\lambda_k)v_1 + \dots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)v_{k-1} = 0,$$

По индукционното предположение $v_1, \dots, v_{k-1}$ са лин. независими $\Rightarrow$

$$\mu_1(\lambda_1-\lambda_k) = \dots = \mu_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k) = 0, \quad \lambda_i-\lambda_k \neq 0, \ 1 \le i \le k-1$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{k-1} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu_k = 0$$

Определение: Под спектър на линеен оператор ще разбираме множеството от всичките му собствени стойности. Оператор с прост спектър в n-мерното лин. пространство V се нарича оператор с n на брой различни собствени стойности.

Следствие 1: Нека V е лин. пространство, $\dim V = n < \infty$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$. Ако φ е оператор с прост спектър и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ са собств. му стойности, то $\exists$ базис на V, в който матрицата на φ е диагонална:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

<u>Доказателство:</u>

Нека $v_1, \dots, v_n$ са собствени вектори на φ, съответстващи на $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. От Т-ма 2 $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ са лин. незав. и са n на брой $\Rightarrow$ образуват базис на V. От $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n$ и определението на матрица на лин. оператор следва твърдението. $\blacksquare$

<u>Следствие 2:</u> Нека $A \in M_n(F)$

и A има n различни характ. корена. Тогава $A \sim D$ (D е диагонална матрица).

Доказателство:
Нека $V = \mathbb{C}^n$ $e_1, \ldots, e_n$ - базис на V. Тогава A е матрицата в този базис на лин. оператор φ, който има n на брой различни собствени стойности в $\mathbb{C}$. От Следствие 1 следва твърдението $A \sim D$.

Задача 1: Да се намерят характеристичните корени на матрицата:

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha +$$

$$+\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1.$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} =$$

$$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha \in \mathbb{R} \underset{\sin\alpha = 0}{\Updownarrow}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$.

Задача 2 В тримерното реално лин. пространство
V с базис e_1, e_2, e_3 е даден линеен оператор φ
с равенството:

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (-6\alpha_1 - 8\alpha_2 + 16\alpha_3)e_1 + (-4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3)e_2 + (-4\alpha_1 - 4\alpha_2 + 10\alpha_3)e_3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$$

а) Да се намерят матр. A на оператора φ спрямо базиса и характ. и корени.

б) Да се намерят базис на V от собствени в-ри на φ и таквоа матр. T, че

$T^{-1}AT = D$ – диаг. матрица.

в) Да се пресметне $A^{98} = ?$

Решение: Даваме стойности на α_1, α_2, α_3, идеята е да получим $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3) = ?$

1) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \varphi(e_1) = -6e_1 - 4e_2 - 4e_3$

2) $\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \alpha_2 = 1$

$\Rightarrow \varphi(e_2) = -8e_1 - 2e_2 - 4e_3$

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$

$\Rightarrow \varphi(e_3) = 16e_1 + 8e_2 + 10e_3$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 16 \\ -4 & -2 & 8 \\ -4 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Търсим хар. корени на A (на φ).

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & -8 & 16 \\ -4 & -2-\lambda & 8 \\ -4 & -4 & 10-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \end{matrix} \times(-2) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4+2\lambda & 0 \\ -4 & -2-\lambda & 8 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ -4 & -2-\lambda \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \left[-2-\lambda+8-8\right] = -(2-\lambda)^2(2+\lambda) \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$$
$$\lambda_3 = -2$$

б) Търсим базис от собствени вектори:

1) $\lambda_{1,2} = 2$

Търсим $v_{1,2} \neq 0 : (A - 2E)v_i = 0$

$v_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и правим ФСР

$v_i = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и правим ФСР.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -8 & -8 & 16 \\ -4 & -4 & 8 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & p & q \end{array} \end{array}$$

1) $p = 1,\ q = 0$
$\Rightarrow v_1 = (-1, 1, 0)$

2) $p = 0,\ q = 1$
$\Rightarrow v_2 = (2, 0, 1)$

$\Rightarrow v_1$ и v_2 са лин. незав.

2) $\lambda_3 = -2 \longrightarrow v_3$ - собствен в-р.
$(A + 2E)v_3 = 0$. Правим ФСР:

$$(A+2E) = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 16 \\ -4 & 0 & 8 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & 8 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ & & p \end{array} \end{array}$$

$\times(-2)$ $+$ $+$ $-$

$p = 1 \Rightarrow v_3 = (2, 1, 1)$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ - базис на V

$$D = T^{-1} A T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \varphi(v_3) \end{array} \end{array}$$

b) $A^{99} = ?$

$A = TDT^{-1} \Rightarrow A^{99} = \underbrace{TDT^{-1}TDT^{-1} \cdots TDT^{-1}}_{99} =$

$= TD^{99}T^{-1}$; $D^{99} = D^{98} \cdot D$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$D^{98} = 2^{98} \Rightarrow D^{99} = 2^{98} \cdot D$

$\Rightarrow A^{99} = 2^{98} T D T^{-1} = 2^{98} \cdot A$

Инвариантни подпространства

Определение: Нека V е лин. пространство $U \leq V$ и $\varphi \in Hom\, V$. Казваме, че U е φ-инвариантно подпространство, ако $\forall u \in U$: $\varphi(u) \in U$.

Забележка: Ако U е φ-инвариантно подпр. на V можем да разглеждаме ограничението на φ върху U $\varphi|_U$: $\varphi|_U(u) = \varphi(u)$, $\forall u \in U$.

Примери: 1) Очевидно $\{0\}$ и V са φ-инварианти.
2) $Ker\,\varphi$ и $Im\,\varphi$ са

φ - инвариантни:
$\forall v \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(v) = 0 \in Ker\varphi$;
$\forall u \in Im\varphi \Rightarrow u \in V$ и $\varphi(u) \in Im\varphi$.

3) Нека $m \in \mathbb{N}$. Ще док., че $Ker(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$ и $Im(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$ са φ - инвариантни пространства.

$w \in Ker(\varphi - \lambda\varepsilon)^m \Rightarrow (\varphi - \lambda\varepsilon)^m(w) = 0 \Rightarrow$

$(\varphi - \lambda\varepsilon)^m(\varphi(w)) = \varphi(\varphi - \lambda\varepsilon)^m(w) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow$
$\varphi(w) \in Ker(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$.

$u \in Im(\varphi - \lambda\varepsilon)^m : \exists v \in V : (\varphi - \lambda\varepsilon)(v) = u$.
Тогава $\varphi(\varphi - \lambda\varepsilon)^m(v) = \varphi(u) = (\varphi - \lambda$

$\varepsilon)^m(\varphi(v)) =$
$= (\varphi - \lambda\varepsilon)^m(v') \Rightarrow \varphi(u) \in \mathrm{Im}$
$(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$.

4) Нека λ е собствена стойност на $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$.

— $U = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно линейно подпространство на V.

— Ако $v \in V$ е собствен вектор на φ, съответстващ на λ, тогава $W = \ell(v)$ е едномерно φ-инвариантно линейно подпространство на V.

5) Нека U, W са φ-инвариантни подпространства на V, тогава $U + W$ и $U \cap W$ са φ-инвариантни подпространства.

Забележка: От пример 4), следва

че всеки оператор, който притежава собствена стойност има едномерно инвариантно подпространство.
В частност, ако $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, където $V \neq \{0\}$ лин. пространство над $\mathbb{C}$, то φ има едномерно инвариантно подпространство (Защо?).
Нека сега V е лин. пространство над $\mathbb{R}$:

Теорема: Нека V е крайномерно ненулево лин. пространство над $\mathbb{R}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Тогава φ има едномерно или двумерно инвариантно подпространство.

Доказателство: Нека $\dim V = n$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис и $A_e(\varphi)$ е матр. на φ в базиса. Разглеждаме стълбовете на A като в-ри от $\mathbb{R}^n$. Изпълнено е, че $V \cong \mathbb{R}^n$ и можем да считаме, че $V = \mathbb{R}^n$. Така $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$.

$\Rightarrow V \subseteq \mathbb{C}^n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$.

Нека $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}\, \mathbb{C}^n$, който има матр. A в базиса. При това $\bar{\varphi}(v) = \varphi(v)$ $\forall v \in V$. Тъй като $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}\, \mathbb{C}^n \Rightarrow \bar{\varphi}$ притежава поне една собствена стойност $\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Нека $c \in \mathbb{C}^n$ – собствен в-р на $\bar{\varphi}$ съответстващ на λ, тогава:

$c = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_j = \mu_j + i\eta_j$, $j = 1, \dots, n$

$a = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $b = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

$\Rightarrow c = a + ib \Rightarrow \overline{\varphi}(c) = \overline{\varphi}(a) + i\overline{\varphi}(b) = \varphi(a) + i\varphi(b)$

$\overline{\varphi}(c) = \lambda c = (\alpha + i\beta)(a + ib) = \alpha a - \beta b +$
$+ (\alpha b + \beta a) i$

Приравняваме реалните и имагинерните части и получаваме:

$\varphi(a) = \alpha a - \beta b$

$\varphi(b) = \alpha b + \beta a$

Очевидно $U = l(a, b)$ е φ-инвариантно подпространство и $\dim U \leq 2$, $U \neq \{0\}$.