Симетрични оператори

Определение: Една матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ наричаме симетрична, ако $A = A^t$.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$: $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j \in [1,n]$

симетрия относно главния диагонал

$S = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t \} < M_n(\mathbb{R})$ - симетрични

$T = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^t \} < M_n(\mathbb{R})$ - антисиметр.

$M_n(\mathbb{R}) = S \oplus T$, $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1.E_{11} + 2E_{22} + 1.E_{33} + 0.(E_{12}+E_{21}) +$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.E_{11} + 2E_{22} + 1.E_{33} + 0.(E_{12}+E_{21}) + $$
$$+ 3(E_{13}+E_{31}) + (-1)(E_{23}+E_{32}) \in S$$

Свойства на симетричните матрици:

1) Ако $A \in S$ и A е обратима матрица $\Rightarrow A^{-1} \in S$

$$A^{-1} = X: \quad AX = E \Rightarrow (AX)^t = E \Rightarrow X^t A^t = E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X^t A = E \Rightarrow X^t = A^{-1} = X \Rightarrow X \in S$$

√

2) Ако $A, B \in S$ и $AB = BA \Rightarrow$

$AB \in S$.

$$(AB)^t = B^t A^t = BA = AB \Rightarrow AB \in S$$

✓

<u>Определение</u>: Нека E е n-мерно Евклидово пространство. Тогава $\varphi \in \mathrm{Hom}\, E$ е симетричен оператор, ако

$$\forall a, b \in E: \; (\varphi(a), b) = (a, \varphi(b)).$$

Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис на E. Тогава
φ е симетричен $\Leftrightarrow (\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$

Твърдение 1: Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на E и $\varphi \in \operatorname{Hom} E$, A е матрицата на φ в базиса. Тогава φ е симетричен оператор $\Leftrightarrow A$ е симетрична матрица.

Доказателство:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \varphi(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ – ортонормиран

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{ni} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\varphi(e_1) \dots \varphi(e_i) \dots \varphi(e_n)$

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ – ортонормиран базис

$$(\varphi(e_i), e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j\right) = a_{ji}(e_j, e_j) = a_{ji}$$

$$\left(e_i, \varphi(e_j)\right) = \left(e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\right) = a_{ij}(e_i, e_i) = a_{ij}$$

$$(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j)) \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}$$

$\checkmark$

Твърдение 2: Характеристичните корени на симетрична матрица са реални числа.

Доказателство:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ и $A = A^t$, $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$

$\lambda \in \mathbb{C}$ е характеристичен корен

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ХСЛУ с ненулево решение $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\xi_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1 & \cdot \bar{\xi}_1 \\ a_{21}\xi_1 + \dots + a_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2 & \cdot \bar{\xi}_2 \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + \dots + a_{nn}\xi_n = \lambda\xi_n & \cdot \bar{\xi}_n \end{cases} +$$

$\xi_i = x_i + i y_i, \; x_i, y_i \in \mathbb{R}$

$\bar{\xi}_i = x_i - i y_i$

$\xi_i \bar{\xi}_i = x_i^2 + y_i^2 = |\xi_i|^2$

i-то ур-е $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\bar{\xi}_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i \neq 0$

ур-е $\sum_{i,j=1} a_{ij}\xi_j\bar{\xi}_i = \lambda \sum_{i=1} |\xi_i|^2$ ...

Нека $c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\bar{\xi}_i$, $d = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \in \mathbb{R}$

$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \bar{a}_{ij} = a_{ij} = a_{ji}$

симетр.

Ако $c \in \mathbb{R}$ $(c = \bar{c}) \Rightarrow \lambda = \frac{c}{d} \in \mathbb{R}$

Имаме: $\bar{c} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\bar{\xi}_j\bar{\bar{\xi}}_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\bar{\xi}_j\xi_i = c \Rightarrow c \in \mathbb{R}$

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j \Rightarrow \lambda = \frac{c}{d} \in \mathbb{R}$ ✓

Следствие: Характеристичните корени на симетричен оператор са реални числа $\Rightarrow$ характеристичните корени са и собствени стойности на оператора.

Твърдение 3: Всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности на симетричен оператор са ортогонални помежду си.

Доказателство:

Нека $\lambda_1 \neq \lambda_2$ са различни собствени стойности на симетричен оператор φ, а v_1 и v_2 са съответните им собствени вектори. Тогава:

$$(\varphi(v_1), v_2) = (v_1, \varphi(v_2)) \Leftrightarrow (\lambda_1 v_1, v_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (v_1, v_2) = \lambda_2 (v_1, v_2) \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

✓

Теорема: Нека φ е симетричен оператор в E. Тогава съществува ортонормиран базис на E, в който матрицата D на φ е диагонална.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \text{ - собствени стойности на } \varphi.$$

$\varphi(e_1)\ \varphi(e_2) \ldots \varphi(e_n)$

Доказателство: Индукция по $\boxed{n}$.

Търсим ортонормиран базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ от собствени в-ри на φ.

1) $n = 1 \Rightarrow \exists\ \lambda_1$ - собствена стойност $\Leftrightarrow v_1$ - собствен вектор - нормиран

$\Rightarrow D = (\lambda_1)$

2) ИП - Нека за $\dim E = n-1$, условието е изпълнено.

3) за $\underline{n}$? Хар. корени са реални $\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$ - собствена стойност на $\varphi \rightarrow$ нормиран собствен вектор v_1

$U = \ell(v_1) < E$, $U \oplus U^\perp = E$, $(U^\perp, v_1) = 0$, $\dim U^\perp = n-1$.

Ще док., че $U^\perp$ е φ - инвариантно подпространство.

$v \in U^\perp \Rightarrow (v, v_1) = 0$? $\varphi(v) \in U^\perp$?

$(\varphi(v), v_1) = (v, \varphi(v_1)) = (v, \lambda_1 v_1) = \lambda_1 (v, v_1) = 0 \Rightarrow \varphi(v) \in U^\perp$

$\dim U^\perp = n-1 \overset{ИП}{\Longrightarrow} \exists$ ортон. базис $v_2, \dots, v_n \in U^\perp$,

в който матрицата на $\varphi|_{U^\perp}$ е диагонална.

$\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$; $D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(v_i, v_1) = 0$, $i = 2, \dots, n$

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$ - ортонормиран базис на E.

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

V

Следствие: За всяка симетрична матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$, съществува ортогонална матрица T, такава че матрицата $D = T^{-1} A T$ е диагонална.

Задача 8.6 б)

$$A_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$? $D = T^{-1} A T$ – диагонална и ортон. базис

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{4} R_i$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot 1 \, (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -\lambda-1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 1, \ \lambda_3 = -1, \ \lambda_4 = 3}$$

1) $\lambda_{1,2}=1$ $\quad A-E=\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}&&p&q\end{array}\end{array}$

$p=1,\ q=0$ | $p=0,\ q=1$

$u_1=(1,0,1,0)$ | $u_2=(0,1,0,1)$ $\qquad (u_1,u_2)=0$

$$\boxed{\begin{aligned}v_1&=\frac{1}{|u_1|}u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)\\ v_2&=\frac{1}{|u_2|}u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)\end{aligned}}$$

2) $\lambda_3=-1$ $\quad A+E=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\\+\\+\\ \end{matrix}\sim\begin{matrix}\\+\\+\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\-3&0&-1&2\\1&0&1&0\\-1&0&1&2\end{pmatrix}|:2\ \sim$

$\sim\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}+\\ \end{matrix}\ |:2,\quad\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \Big| :2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = 1, \quad u_3 = (1, -1, -1, 1)$$

$$\boxed{v_3 = \frac{1}{|u_3|} u_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)}$$

3) $\lambda_4 = 3$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ + \\ \end{matrix} x(-2) \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big| :2$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| :2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = 1 \Rightarrow u_4 = (1, 1, -1, -1)$$

$$\boxed{v_4 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)}$$

v_1, v_2, v_3, v_4 - ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$:

$$D_v(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_{e \to v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = T^{-1} A T$$