Евклидови пространства

Определение: Нека E е линейно пространство над $\mathbb{R}$. В E въвеждаме операция скаларно произведение:

$$(\;,\;) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \in \mathbb{R}, \ \forall a, b \in E$$

Изпълнени са следните аксиоми:

$\forall a, b, c \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$:

1) $(a, b) = (b, a)$;
2) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$;
3) $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$;

3) $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$;

4) $(a, a) \geq 0$, $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Всяко линейно пространство над $\mathbb{R}$ с въведено скаларно произведение се нарича <u>Евклидово пространство</u>

<u>Следствия от аксиомите:</u>

1) от 1) $\Rightarrow$ Скаларното произведение е билинейна функция, т.е. линейна и по двата аргумента.

$$(\lambda_1 a + \lambda_2 b, \mu_1 c + \mu_2 d) = (\lambda_1 a, \mu_1 c + \mu_2 d) + (\lambda_2 b, \mu_1 c + \mu_2 d) =$$
$$= \lambda_1 (a, \mu_1 c + \mu_2 d) + \lambda_2 (b, \mu_1 c + \mu_2 d) = \lambda_1 (\mu_1 c + \mu_2 d, a) +$$
$$+ \lambda_2 (\mu_1 c + \mu_2 d, b) = \lambda_1 (\mu_1 c, a) + \lambda_1 (\mu_2 d, a) + \lambda_2 (\mu_1 c, b)$$
$$+ \lambda_2 (\mu_2 d, b) = \ldots = \lambda_1 \mu_1 (a, c) + \lambda_1 \mu_2 (a, d) + \ldots$$

$+ \lambda_2(\mu_1 c + \mu_2 d, b) = \lambda_1(\mu_1 c, a) + \lambda_1(\mu_2 d, a) + \lambda_2(\mu_1 c, b)$

$+ \lambda_2(\mu_2 d, b) = \dots = \lambda_1\mu_1(a,c) + \lambda_1\mu_2(a,d) +$

$+ \lambda_2\mu_1(b,c) + \lambda_2\mu_2(b,d)$

Нека $\dim E = n$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис на E.

Нека $a = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$

$$(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i e_j (e_i, e_j)$$

2) ако b 3) $\lambda = 0 \Rightarrow (0, b) = 0$, $\forall\, b \in E$

Казваме, че нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор в Евклидовото пространство.

<u>Дължина (норма)</u> на вектор се нарича:

$$|a| = \sqrt{(a,a)} \geq 0, \quad \forall a \in E$$
$$|\lambda a| = \sqrt{(\lambda a, \lambda a)} = \sqrt{\lambda^2 (a,a)} = |\lambda||a|$$

Вектор с дължина 1 се нарича нормиран вектор.
Изпълнено е:

$$\left| \frac{1}{|x|} x \right| = \frac{1}{|x|} |x| = 1$$

Нормираме вектор като го делим на дължината му.

Нека E - евклидово пространство, $\dim E = n$ и $e_1, \dots, e_n$ - базис на E.

Базисът е ортогонален, ако $(e_i, e_j) = 0$, $1 \le i \ne j \le n$. Базисът е ортонормиран, ако:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}.$$

Примери:

1) Пространствата $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ със стандартното скаларно произведение на геометрични вектори. Стандартните базиси тук са ортонормирани (единични вектори, лежащи върху осите на Декартова коорд. система)

2) Нека a, b са произволни вектори от V – n-мерно линейно пространство над $\mathbb{R}$ и нека

$$a = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$$

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

Директна проверка на свойствата 1), ..., 4) превръщат V в n-мерно Евклидово пространство. Базисът тук е ортонормиран.

3) Нека V е множеството от $\forall$ реални непрекъснати функции в интервал $[a, b]$. Със стандартните операции събиране на функции и умножение на функция с число V се превръща в линейно пространство. Въвеждаме скаларно произведение

по следния начин:

$$f(x), g(x) \in V: \left(f(x), g(x)\right) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Директна проверка показва, че аксиомите са изпълнени и V се превръща в Евклидово пространство.

<u>Теорема на Питагор:</u> Ако векторите $a_1, \dots, a_k$ са два по два ортогонални, то е изпълнено:

$$|a_1 + \dots + a_k| = |a_1|^2 + \dots + |a_k|^2$$

Доказателство: В сила е:

$$(a_i, a_j) = 0, \quad 1 \le i \ne j \le k$$

$$\Rightarrow |a_1 + \dots + a_k|^2 = (a_1 + \dots + a_k, a_1 + \dots + a_k) =$$

$$= (a_1, a_1) + (a_2, a_2) + \dots + (a_k, a_k) = |a_1|^2 + \dots + |a_k|^2.$$

В частност е в сила теоремата на Питагор за страните на правоъгълни триъгълник:

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

Твърдение 1: Всяка система $a_1, a_2, \dots, a_k$ от два по два ненулеви ортогонални помежду си вектора е линейно независима.

Доказателство:

Нека $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)$ и $(a_i, a_j) = 0$, $i \neq j$

$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \vec{0}$, $i = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \right) = \lambda_1^2 |a_1|^2 + \dots + \lambda_k^2 |a_k|^2 = 0,$$

$\forall i$, $a_i \neq \vec{0} \Rightarrow |a_i| > 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, k$.

✓

Твърдение 2: (Ортогонализация по метода на Грам-Шмид)

а) Нека $a_1, \dots, a_k$ са ЛНЗ вектори. Тогава съществуват два по два ортогонални вектора $e_1, \dots, e_k$, такива че

$l(e_1, \dots, e_k) = l(a_1, \dots, a_k)$ и е изпълнено:

$$e_i = a_i + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Ако първите $\boxed{m}$ вектора са два по два ортогонални, то $e_1 = a_1, \dots, e_m = a_m$.

б) Нека $\dim E = n < \infty$. Тогава всяка система от два по два ортогонални ненулеви вектора може да се допълни до ортогонален базис на E. В частност (след нормиране на ортогоналния базис) E притежава ортонормиран базис.

Доказателство: а) Конструктивно: построяваме векторите $e_1, \dots, e_k$ на k-стъпки. Нека първо $e_1 = a_1$ и нека

$e_2 = a_2 + \lambda_1 e_1 = a_2 + \lambda_1 a_1 \Rightarrow l(e_1, e_2) \subseteq l(a_1, a_2)$,
но $a_2 = e_2 - \lambda_1 e_1 \Rightarrow l(a_1, a_2) \subseteq l(e_1, e_2) \Rightarrow l(e_1, e_2) = l(a_1, a_2)$

Сега, от $e_2 = a_2 + \lambda_1 e_1 \;|\; .e_1$ - скаларно
$\Rightarrow 0 = (e_1, e_2) = (e_1, a_2) + \lambda_1 (e_1, e_1) \Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)}$
(ако $(a_1, a_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$).

В действителност на всяка стъпка ще получаваме $l(e_1, \dots, e_k) = l(a_1, \dots, a_k)$ и двете системи ще са ЛНЗ и с равен брой вектори, т.е. ще получим, че векторите $e_1, \dots, e_k$ са ЛНЗ.

Нека допуснем, че сме построили векторите

$e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$ и $l(e_1, \dots, e_{i-1}) = l(a_1, \dots, a_{i-1})$

Нека $e_i = a_i + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1}$. Последователно умножаване скаларно двете страни с $e_1, \dots, e_{i-1}$ и взимане предвид, че $(e_i, e_s) = 0$, $s = 1, \dots, i-1$

$$\Rightarrow 0 = (e_i, e_s) = (a_i, e_s) + \lambda_s (e_s, e_s), \quad 1 \leq s \leq i-1$$

$$\Rightarrow \lambda_s = -\frac{(a_i, e_s)}{(e_s, e_s)}$$

Освен това от допускането имаме:

$$l(a_1,\dots,a_{i-1}) = l(e_1,\dots,e_{i-1})$$

$$e_i \in l(e_1,\dots,e_{i-1},a_i) = l(a_1,\dots,a_{i-1},a_i)$$

$$a_i \in l(e_1,\dots,e_{i-1},e_i) \Rightarrow l(a_1,\dots,a_i) = l(e_1,\dots,e_i).$$

Забележка: Ако векторите $a_1,\dots,a_s$ са два по два ортогонални, то

$$(a_i,a_j)=0, \quad 1\le i\ne j\le s \Rightarrow \lambda_s = 0, \; s=1,\dots,i-1$$

$$\Rightarrow e_i = a_i$$

✓

б) Допълваме системата вектори $a_1,\dots,a_k$ до базис на E и ортогонализираме по метода на Грам-Шмид. След това нормираме получената система вектори.

<u>Твърдение 2:</u> Един базис $e_1, \dots, e_k$ на E е ортонормиран тогава и само тогава когато

$\forall a, b \in E$, където $a = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i$, $b = \sum_{i=1}^{k} \eta_i e_i$ е изпълнено $(a,b) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i$.

<u>Доказателство:</u> $\boxed{\Rightarrow}$ – очевидно!

$\boxed{\Leftarrow}$ Разгледайте $a = e_i$, $b = e_j$, $1 \le i, j \le k$.

✓

<u>Определение:</u> Нека V и W са Евклидови пространства. Ще

Казваме, че изображението $\varphi: V \to W$ е изоморфизъм на Евклидови пространства, ако: 1) φ е изоморфизъм на линейни пространства;

2) $\forall a, b \in V: (a, b) = (\varphi(a), \varphi(b))$.

Теорема 2: Нека V и W са крайномерни Евклидови пространства. Тогава $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$. Всяко n-мерно Евклидово пространство е изоморфно на $\mathbb{R}^n$.

Доказателство: $\boxed{\Rightarrow}$ Ако $V \cong W$ (те са изоморфни като линейни пространства) $\Rightarrow \dim V = \dim W$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $\dim V = \dim W$ и нека
$e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V
$f_1, \dots, f_n$ е ортонормиран базис на W
$\Rightarrow \exists!\ \varphi: V \to W: \varphi(e_i) = f_i,\ i = 1, \dots, n$
φ изпраща базис в базис $\Rightarrow \varphi$ е изоморфизъм на линейни пространства.
Нека $a, b \in V$: $a = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$
$\Rightarrow (a, b) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$

$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i$, $\varphi(b) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i \Rightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$

$\checkmark$

$\Rightarrow V \cong W$ като Евклидови пространства.

Определение: Нека $U \leq E$. Под ортогонално допълнение на U разбираме:

$U^\perp = \{a \in E \mid (a, U) = 0\}$; $(a, U) = 0 \iff (a, b) = 0, \forall b \in U$

Ако $U = E \iff U^\perp = \{0\}$ и $U = \{0\} \iff U^\perp = E$

Директна проверка: $U^\perp \leq E$.

Твърдение 3: Нека E е крайномерно Евклидово пространство и $U \leq E \Rightarrow E = U \oplus U^\perp$.

Доказателство:

Нека $e_1, \dots, e_k$ е базис на U.

Допълване до базис на E: $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$.

Нека $W = \ell(e_1, \dots, e_n)$. Ще докажем, че $W = U^\perp$.

Нека $W = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Ще докажем, че $W = U^{\perp}$.

$\subseteq$ $(e_i, e_j) = 0$; $1 \le i \le k$, $k+1 \le j \le n$ $\Rightarrow (U, W) = 0 \Rightarrow W \le U^{\perp}$

$\supseteq$ $u \in U^{\perp}$, $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$

$(e_i, u) = 0$, $i = 1, \dots, k \Rightarrow \lambda_i = 0$

$(e_j, u) = \lambda_j (e_j, e_j)$, $k+1 \le j \le n$

$\Rightarrow u = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in W \Rightarrow U^{\perp} \subseteq W$

$\Rightarrow U^{\perp} = W$ ✓

Твърдение 4: Нека E е крайномерно Евклидово пространство и $U \le E$. Тогава $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Доказателство: Самостоятелно, като използвате Твърдение 3.

Твърдение 5: Нека E е крайномерно Евклидово пространство и $U \leq E$, $a \in U$. Тогава съществуват единствени $a_0 \in U$ и $h \in U^{\perp}$, такива че

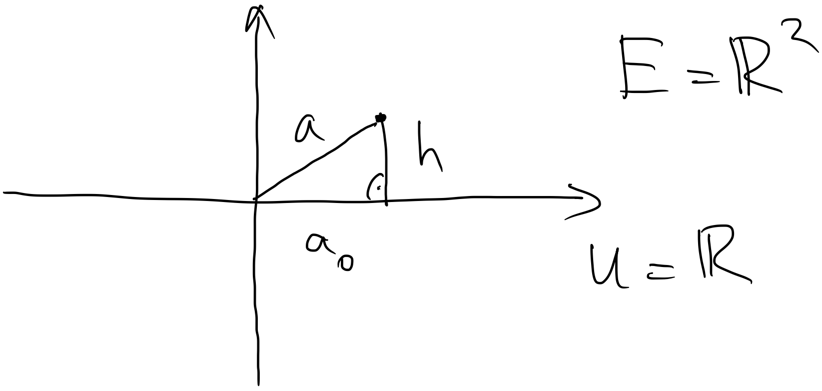
$$a = a_0 + h,$$

a_0 – <u>ортогонална проекция</u> на a в U

h – <u>перпендикуляр</u>, спуснат от a в U.

<u>Доказателство:</u>

$$E = U \oplus U^{\perp} \Rightarrow \exists!\ a_0 \in U,\ h \in U^{\perp}:$$
$$a = a_0 + h,\ \forall a \in E.$$



Твърдение 6: Ако $u \in U$ и $u \neq a_0 \in U$, тогава е изпълнено:

$$|a - a_0| < |a - u|$$

Доказателство:

$$\left.\begin{aligned} a - a_0 = h \in U^\perp \\ 0 \neq a_0 - u \in U \end{aligned}\right\} \Rightarrow (a - a_0, a_0 - u) = 0$$

Питагор
$$\Rightarrow |a - a_0|^2 + |a_0 - u|^2 = |a - \cancel{a_0} + \cancel{a_0} - u|^2$$

$$\Rightarrow |a - a_0|^2 + |a_0 - u|^2 = |a - u|^2$$

$$\Rightarrow |a - a_0|^2 < |a - u|^2 \Rightarrow |a - a_0| < |a - u| \quad \checkmark$$

Задача 1 (7.10)

Нека $U = l(a_1, a_2, a_3)$

$a_1 = (1, 2, 0, 1)$

$a_2 = (3, 2, 1, 2)$

$a_3 = (1, -2, 1, 0)$

Да се најдат ортонормирани базиси на U и $U^\perp$.

Решение: Търсим базис на U, т.е. МЛНЗП на $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_1 \\ a_3 \end{array} \\ \;\; p \;\;\;\;\; q \end{array}$$

базис на U

$\Rightarrow U = \ell(a_1, a_3)$

Търсим ФСР на системата:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- $p = 0, q = 1 \Rightarrow b_1 = (0, 1, 2, -2)$ – базис на $U^\perp = \ell(b_1, b_2)$
- $p = 1, q = 0 \Rightarrow b_2 = (1, 0, -1, -1)$

Ортогонализиране a_1, a_3 по метода на Грам-Шмид:

$U = l(a_1, a_3)$

$e_1 = a_1 = (1, 2, 0, 1)$

$(a_1, a_3) = -3$

$e_2 = a_3 + \lambda_1 e_1 \mid \cdot e_1$

$\Rightarrow 0 = (e_1, e_2) = (e_1, a_3) + \lambda_1 (e_1, e_1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{(e_1, a_3)}{(e_1, e_1)} = -\dfrac{-3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow e_2 = (1, -2, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 2, 0, 1) = \left(\frac{3}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right)$

$e_2 = (3, -2, 2, 1)$

Нормираме e_1, e_2 и получаваме f_1, f_2 – ортонормиран базис на U:

$f_1 = \dfrac{1}{|e_1|} e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1)$

$f_2 = \dfrac{1}{|e_2|} e_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(3, -2, 2, 1)$

$|e_2|$ $\sqrt{2}$

Аналогично за $U^{\perp}$:

$b_1 = (0,1,2,-2)$

$b_2 = (1,0,-1,-1)$, $U^{\perp} = \ell(b_1, b_2)$

$(b_1, b_2) = 0 \Rightarrow b_1 \perp b_2$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{|b_1|} b_1 = \frac{1}{3}(0,1,2,-2) \\ h_2 &= \frac{1}{|b_2|} b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1) \end{aligned}\right\} \text{ортонормиран базис на } U^{\perp}$$

<u>Задача 2 (7.11)</u>: Нека U е пространството от решения на ХС ЛУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Да се намерят ортонормирани базиси на U и $U^{\perp}$

Решение: Самостоятелно!

7. 12. $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ от евклидово простр. V и $a \in V$. Да се намерят ортог. проекция a_0 на a върху U и перпендикулярът h от a към U.

$a = (4, -1, -3, 4) \in V$

$a_1 = (1, 1, 1, 1)$

$a_2 = (1, 2, 2, -1)$

$a_3 = (1, 0, 0, 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} a_1 \to \\ a_3 \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) МЛНЗП на a_1, a_2, a_3

$U = \ell(a_1, a_3)$

$(a_1, a_3) = 4 \Rightarrow a_1$ и a_3 не са ортог.

$\Rightarrow$ Грам – Шмид $\ell(b_1, b_2) = \ell(a_1, a_3)$ и $b_1 \perp b_2$

$b_1 = a_1 = (1, 1, 1, 1)$

$| \cdot b_1$

$0 = (b_1, b_2) = (b_1, a_3) + \lambda_1 (b_1, b_1) \Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{4}{4} = -1$

$b_2 = (1, 0, 0, 3) - (1, 1, 1, 1) = (0, -1, -1, 2) \perp b_1$

$b_2 = (1,0,0,3) - (1,1,1,1) = (0,-1,-1,2) \perp b_1$

$\Rightarrow b_1, b_2$ - ортог. базис на U.

$U \ni a_0 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$ $\qquad \mu_1, \mu_2 = ?$ $\qquad a = a_0 + h$

$a_0 \perp h = a - a_0 \in U^\perp$

$(h, U) = 0 \Rightarrow (h, b_1) = (h, b_2) = 0$

1) $(a - a_0, b_1) = (a - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2, b_1) = (a, b_1) - \mu_1 (b_1, b_1) = 0$

2) $(a - a_0, b_2) = (a - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2, b_2) = (a, b_2) - \mu_2 (b_2, b_2) = 0$

1) $\Rightarrow \mu_1 = \dfrac{(a, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{4}{4} = 1$

2) $\Rightarrow \mu_2 = \dfrac{(a, b_2)}{(b_2, b_2)} = \dfrac{12}{6} = 2$

$a_0 = (1,1,1,1) + (0,-2,-2,4) = (1,-1,-1,5)$

$\Rightarrow h = a - a_0 = (4,-1,-3,4) - (1,-1,-1,5) = (3,0,-2,-1)$

$\Rightarrow h = a - a_0 = (4,-1,-3,4) - (1,-1,-1,5) = (3,0,-2,-1)$

7.13.

$$U: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}, \quad a = -3,0,-5,9)$$

? $a_0 \in U$, $h \in U^\perp$: $a = a_0 + h$ – самостоятельно!