

# ОЗШ 2025. Весенняя сессия

## Домашнее задание (11 класс)

1. Найти все значения  $a$ , при которых функция  $f$  возрастает на  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 5$$

2. Доказать, что уравнение имеет единственный корень  $\sin(x) = -x - \pi$ .

3. Решить неравенство  $2 + \sin(x) > \frac{1}{1 + x^2}$

5. На какое целое положительное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25 процентов от частного?

6. В окружность радиуса  $R$  вписан правильный  $n$ - угольник, площадь которого равна  $3R^2$ . Найти  $n$ .

7. Решить уравнение  $\cos(2x) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 0$

8. Фабрике поручено выполнить заказ на изготовление 89250 деталей типа Е и 42840 деталей типа Ж в установленный срок. Каждый рабочий за одну единицу времени может изготовить либо 5 деталей типа Е, либо 4 детали типа Ж. Для выполнения заказа рабочие делятся на две бригады, которые начинают работу одновременно, и каждая из которых изготавливает детали только одного типа. Если заказ будут выполнять 68 рабочих, то фабрика может выполнить заказ только при увеличении установленного срока на 68 и более единиц времени. Какое наименьшее число рабочих должно выполнять заказ и как их распределить по бригадам для того, чтобы фабрика выполнила заказ в установленный срок? Укажите этот срок.

9. Пловец переплывает реку по прямой перпендикулярно ее берегу, делая 30 гребков в минуту. Если число гребков в минуту уменьшить до 15, то время, за которое он достигнет берега увеличится в 3 раза. Каково соотношение собственной скорости пловца и скорости течения реки?

10. Могут ли числа 7,8,9 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

11. Четыре точки расположены на плоскости. Могут ли попарные расстояния между ними равняться 1,2,3,4,5,6 см.?

12. При каких значениях параметра  $b$  система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ |y| - x = b \end{cases}$  имеет ровно три решения?

13. Найти наименьшее из значений  $x$ , для которых существуют числа  $y, z$ , удовлетворяющие уравнению  $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$

14. Решить неравенство  $2^{2\sqrt{3x+4}} - 2^{\sqrt{3x+4}-x+1} - 2^{3-2x} > 0$

## Теория вероятностей

### Задача 1

По игрушечному самолету производят три последовательных выстрела. Вероятность попадания с первого выстрела равна 0.5, со второго – 0.6, с третьего – 0.8. При одном попадании самолет сбивается с вероятностью 0.3, при двух – 0.6, при трех наверняка. Какова вероятность сбить самолет? А при условии, что первый выстрел точный?

### Задача 2

В семье Брауна-Робинсон 2 детей. События «рождение мальчика» и «рождение девочки» независимы, а их вероятности равны и равны 0.5. Какова вероятность, что в семье два мальчика, если известно, что есть мальчик, которому повезло родиться в понедельник?

### Задача 3

Формализовать и исследовать игру «камень/ножницы/бумага». Определить оптимальные стратегии игроков.

### ***Список тем, задания по которым входят в выпускную работу:***

- 1) комплексные числа
- 2) уравнения прямых в плоскости и уравнения плоскостей в пространстве
- 3) решения уравнений в целых числах (в том числе диофантовых)
- 4) рациональные уравнения и неравенства
- 5) тригонометрические задачи
- 6) показательные уравнения и неравенства
- 7) делимость
- 8) задачи на составление уравнений
- 9) задачи с параметрами
- 10) стереометрия и геометрия
- 11) алгебраические задания и производная

### ***Экзамен 2001 года***

1. Решить неравенство  $\log_{5x-4x^2} (4^{-x}) < 0$ .
2. При каких значениях параметра  $a$  система имеет единственное решение
$$\begin{cases} axy + x - y + 3/2 = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$
3. Решить уравнение
$$1/2(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x(\sin 2x)$$
4. Назовем медианой тетраэдра отрезок, соединяющий его вершины с точкой пересечения медиан противоположной ей грани. Доказать, что все четыре медианы произвольного тетраэдра пересекаются в одной точке. В каком отношении эта точка делит каждую из медиан?
5. Доказать, что выражение  $n^2 - n + 9$  ни при каком натуральном  $n$  не делится на 49.
6. 4 цеха изготавливают детали прессованием. В двух из них установлены прессы нового типа, а в двух - старого. Всего прессов имеется не менее 5. Количество прессов во всех цехах одинаково. Изготовление 400 деталей на новом прессе занимает на 3 часа меньше времени, чем 420 деталей - на старом.

На новых прессах изготовили по 200 деталей, на старых - по 300.

Если сложить время работы всех прессов, то окажется, что за получившееся суммарное время цех, оборудованный тремя новыми и двумя старыми прессами, работающими одновременно, может изготовить 17640 деталей. Найти производительность каждого пресса.