ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – ΣΥΣ 411

<u>Τελική εργασία μαθήματος, Φεβρουάριος 2023</u>

Αγγελόπουλος Δημήτριος – 2020030038

Μελέτη και έλεγχος της longitudinal κίνησης ενός αεροσκάφους F-16.

Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε αφορά την κίνηση ενός αεροσκάφους σε καθεστώς πτήσης. Το σύστημα που περιγράφει την διάρκεια της πτήσης είναι ένα μη-γραμμικό σύστημα 4ης τάξης. Αφού γίνει η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας του, έχουμε :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0507 & -3.861 & 0 & -32.2 \\ -0.00117 & -0.5164 & 1 & 0 \\ -0.000129 & 1.4168 & -0.4932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0717 \\ -1.645 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (*)$$

Όπου η είσοδος ελέγχου $u = \delta_E$ είναι η γωνία ανύψωσης και οι καταστάσεις στο διάνυσμα $x = [\Delta u \ a \ q \ \theta]^T$ είναι η αλλαγή στην ταχύτητα, η γωνία επίθεσης, ο ρυθμός κλίσης και η κλίση αντίστοιχα.

Το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το $x_e = [0\ 0\ 0\ 0]^T$. Σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε ότι το αεροσκάφος θα συγκλίνει πάντα σε αυτό το σημείο.

A) Αρχικά θα μελετήσουμε το δυναμικό σύστημα (*).

α)

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Χρησιμοποιώντας την εντολή eig(A) της MATLAB βρίσκουμε ότι :

$\lambda_1 = -1.7036,\ v_1 = [0.9943,\ \ 0.0633,\ \ -0.074,\ \ 0.0434]^T$

$\lambda_2 = 0.7310,\ v_2 = [0.9995,\ \ -0.0142,\ \ -0.0165,\ \ -0.0226]^T$

$\lambda_3 = -0.0438 + 0.2066j, v_3 = [1, 0.0005 + 0.0003j, 0.0013 + 0.0002j, -0.0003 - 0.0064j]^T$

$\lambda_4 = -0.0438 - 0.2066j, v_4 = [1, 0.0005 - 0.0003j, 0.0013 - 0.0002j, -0.0003 + 0.0064j]^T$

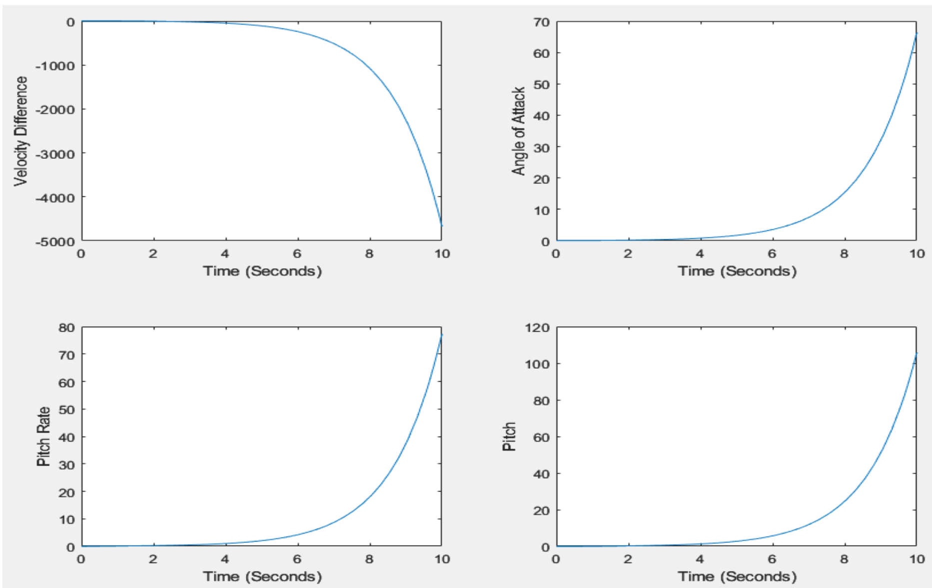
Για u = 0 το σύστημα μας γίνεται $\dot{x} = Ax$. Η λύση του συστήματος ανοικτού βρόχου για μηδενική είσοδο είναι :

$x(t) = e^{At}x(0)$

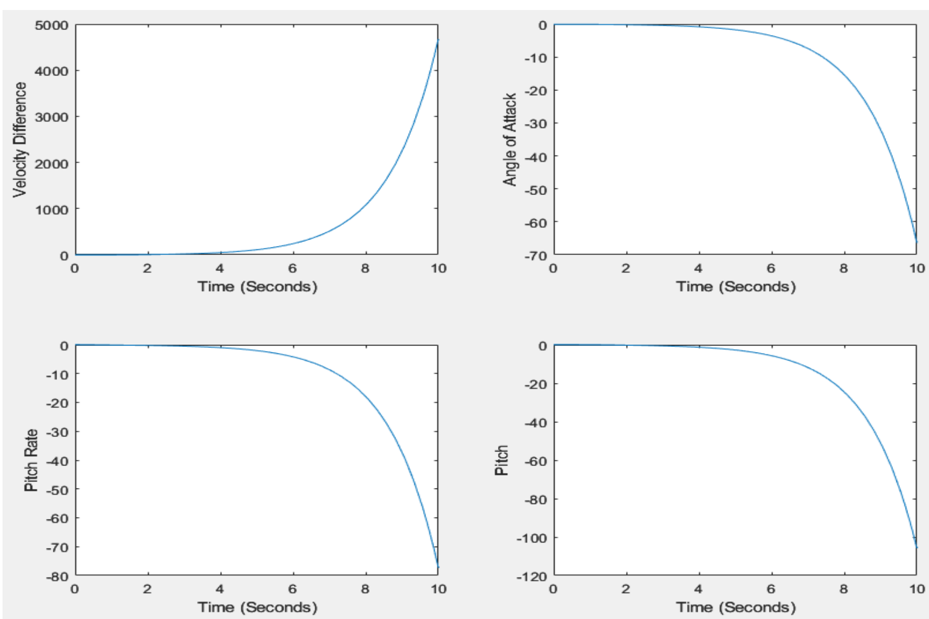
Όπου e^{At} είναι ο πίνακας μεταφοράς και x(0) οι αρχικές συνθήκες.

Αφού βρήκαμε την χρονική απόκριση του συστήματος θα την σχεδιάσουμε στην MATLAB για τις αρχικές συνθήκες :

- ➔ $x(0) = [0\ 0.1\ 0\ 0]^T$



- ➔ $x(0) = [0\ -0.1\ 0\ 0]^T$



Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα δεν συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας.

β)

Υποθέτουμε ότι ο πιλότος θέλει να φτάσει σε μεγαλύτερο υψόμετρο και για αυτό θέτει την είσοδο ελέγχου ίση με -1 (δηλαδή τραβάει το τιμόνι προς τα πίσω) για χρόνο 2 δευτερολέπτων, θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές.

Δηλαδή έχουμε $u = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$, $x(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$

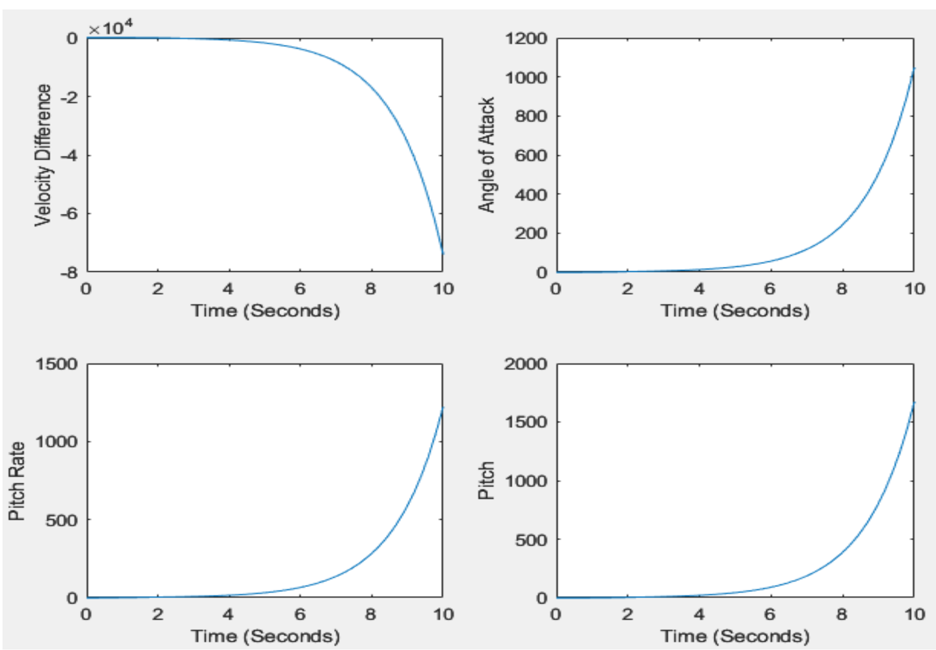
Η γενική λύση ενός συστήματος της μορφής $\dot{x} = Ax + Bu$ είναι :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Στην περίπτωση μας η απόκριση του συστήματος γίνεται :

$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

Επομένως περιμένουμε ότι το σύστημα δεν θα συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας για οποιαδήποτε είσοδο που θέτει ο πιλότος. Προσομοιώνοντας την απόκριση έχουμε :



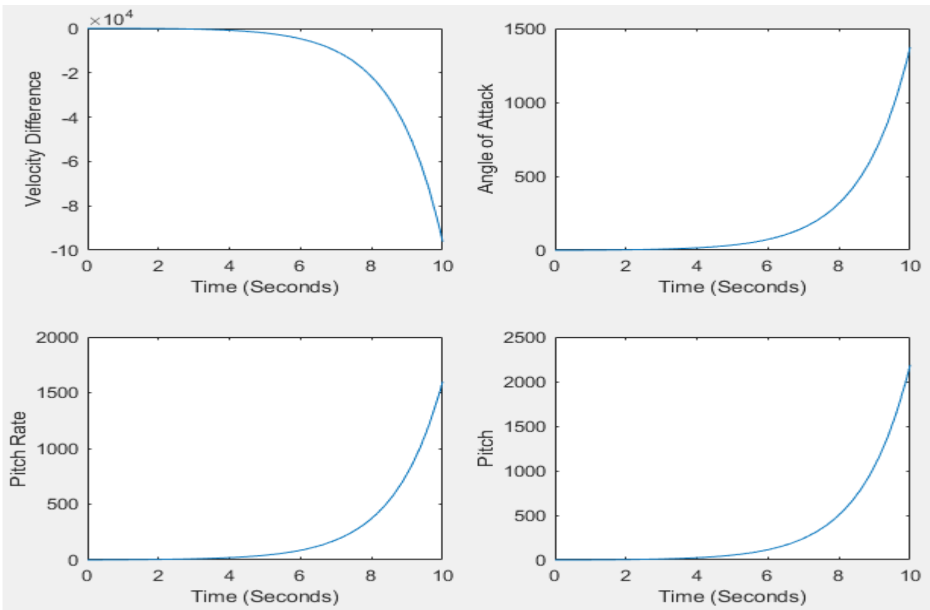
Έτσι, όπως αναμένεται κάθε κατάσταση του συστήματος αποκλίνει στο άπειρο με την διαφορά ότι τώρα αποκλίνει με μεγαλύτερο ρυθμό.

γ)

Τώρα θα προσομοιώσουμε τις καταστάσεις του συστήματος ανοικτού βρόχου κάτω από παρόμοιες συνθήκες με την διαφορά ότι θα θέσουμε για είσοδο ελέγχου την βηματική είσοδο.

Δηλαδή $u = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, $x(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$

Η απόκριση του συστήματος είναι :



Οι καταστάσεις αποκλίνουν στο άπειρο με ακόμα πιο μεγάλο ρυθμό. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι έχουμε βηματική είσοδο και όχι τετραγωνικό παλμό όπως παραπάνω.

δ)

Θα μελετηθεί το σύστημα ως προς την ευστάθεια. Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα Α δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ανοικτού βρόχου $\dot{x} = Ax$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γύρω από το σημείο ισορροπίας του. Αυτό σημαίνει ότι χωρίς κάποιον ελεγκτή, το αεροσκάφος είναι ασταθές.

Παρατηρώντας και τις προσομοιώσεις των καταστάσεων, στο πρώτο ερώτημα βλέπουμε ότι η κίνηση του αεροσκάφους μας δεν είναι σταθερή για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση. Μια οποιαδήποτε διατάραξη του αεροσκάφους οδηγεί στην αστάθεια.

Στην συνέχεια θα μελετηθεί το σύστημα ως προς την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα.

ε)

Για την ελεγξιμότητα αρχικά υπολογίζουμε τον πίνακα ελεγξιμότητας Pc και ύστερα ελέγχουμε αν είναι πλήρους βαθμού. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις ctrb(A,B) και rank(Pc) της MATLAB βρίσκουμε ότι :

$rank(P_c) = 4$

Δηλαδή το σύστημα μας είναι ελέγξιμο.

ζ)

Η έξοδος του συστήματος είναι η y = q = x3, άρα βρίσκουμε ότι C = [0 0 1 0]. Για την παρατηρησιμότητα βρίσκουμε τον Po και ελέγχουμε αν είναι πλήρους βαθμού. Κάνοντας χρήση των συναρτήσεων obsv(A,C) και rank(Po) της MATLAB έχουμε :

$rank(P_o) = 4$

Δηλαδή το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο.

B) Αφού αναλύσαμε τις ιδιότητες του συστήματος προχωράμε στην σχεδίαση ελεγκτή-παρατηρητή.

α)

Γνωρίζουμε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης τέτοιον ώστε να μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του συστήματος όπου θέλουμε.

Ο ελεγκτής ανατροφοδότησης είναι της μορφής :

$u = -Kx + r$

Θέλουμε οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος να είναι οι εξής :

$p_{1,2} = -1.25 \pm 2.2651j$ και $p_{3,4} = -0.01 \pm 0.095j$

Αφού έχουμε δύο ζευγάρια πόλων θα λάβουμε υπόψη και τα δύο και έτσι βρίσκουμε ότι

$\omega_{n1} = 2.5871\frac{rad}{s},\ \zeta_1 = 0.4831$ και $\omega_{n2} = 0.0955\frac{rad}{s},\ \zeta_2 = 0.1046$ αντίστοιχα.

Και άρα τα υπολογίζουμε τα 2 ποσοστά υπερύψωσης και τους 2 χρόνους αποκατάστασής.

$PO_1 = 17.668\%,\ \ T_{s1} = 3.2\ s$ & $PO_2 = 71.862\%,\ \ T_{s2} = 400\ s$

Άρα περιμένουμε ότι : $PO = 44\%,\ \ T_s = 201\ s$

Βρίσκουμε μέσω της συνάρτησης place(A,B,poles) της MATLAB ότι :

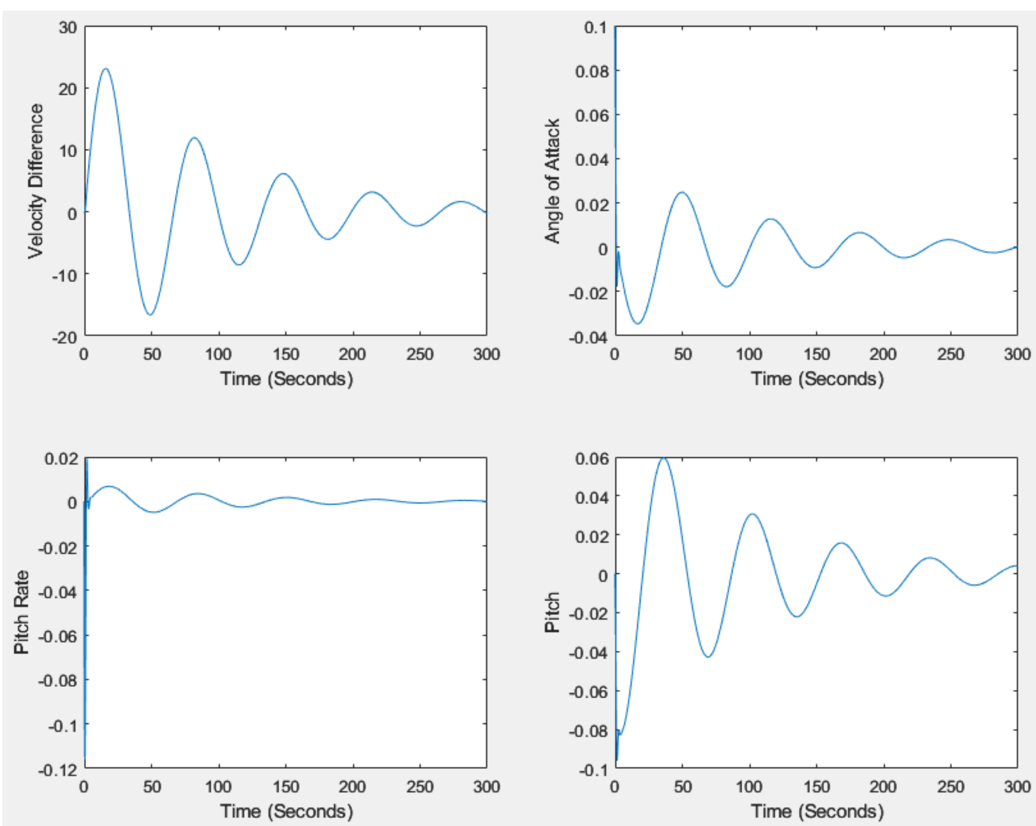
$K = [-0.0047\ \ -4.126\ \ -0.7075\ \ -0.1149]$

Το σύστημα μας με ελεγκτή γίνεται $\dot{x} = (A - BK)x + Br\ \ \ (**)$

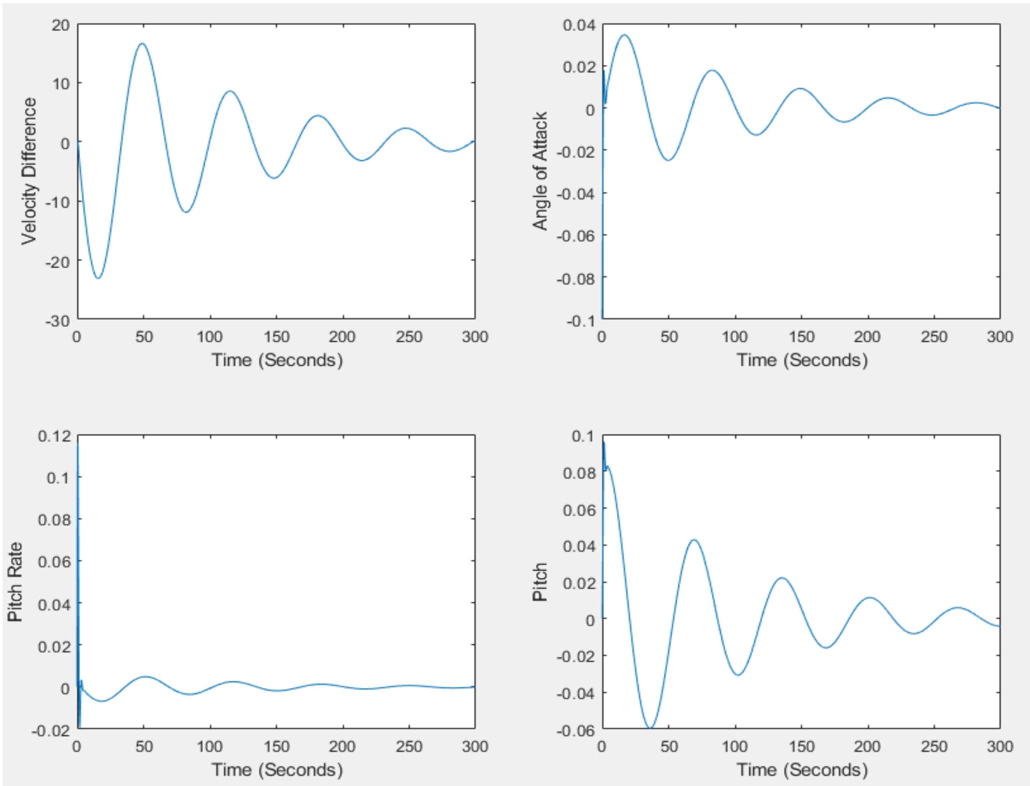
β)

Για r = 0 και για αρχικές συνθήκες $x(0) = [0\ \ \pm 0.1\ \ 0\ \ 0]^T$ σχεδιάζουμε την χρονική απόκριση του συστήματος μας :

➔ $x(0) = [0\ 0.1\ 0\ 0]^T$



➔ $x(0) = [0 \ \ -0.1 \ \ 0 \ \ 0]^T$

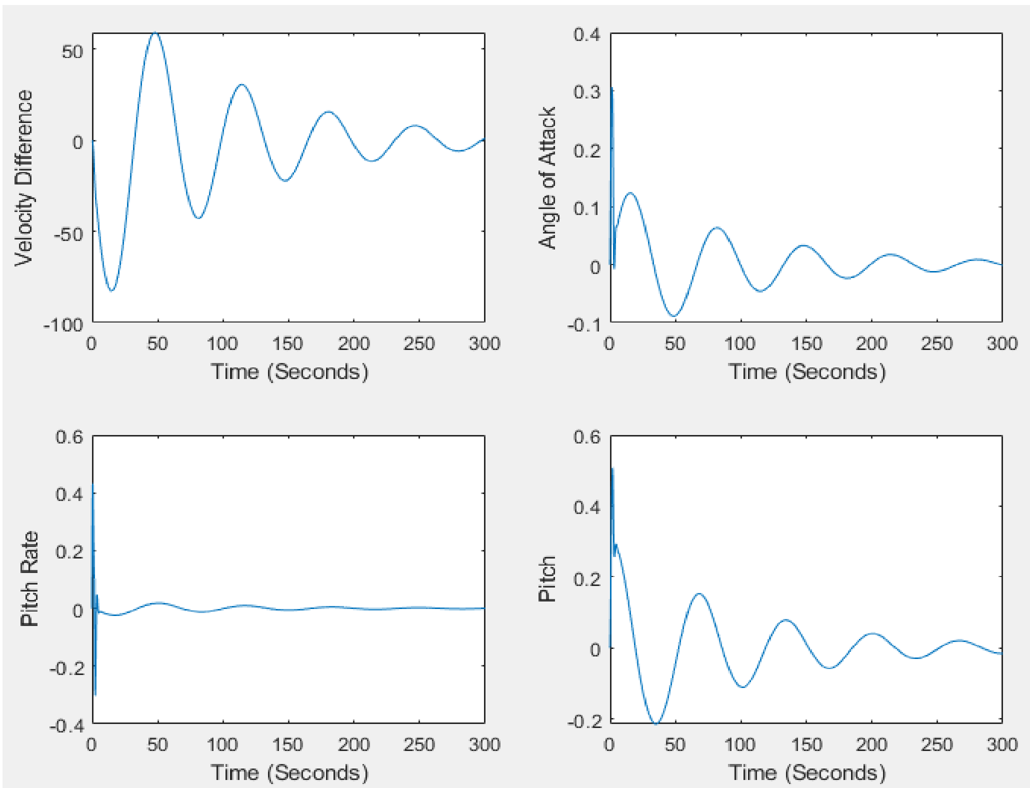


Παρατηρούμε ότι το σύστημα κλειστού βρόχου είναι πράγματι ασυμπτωτικά ευσταθές.

γ)

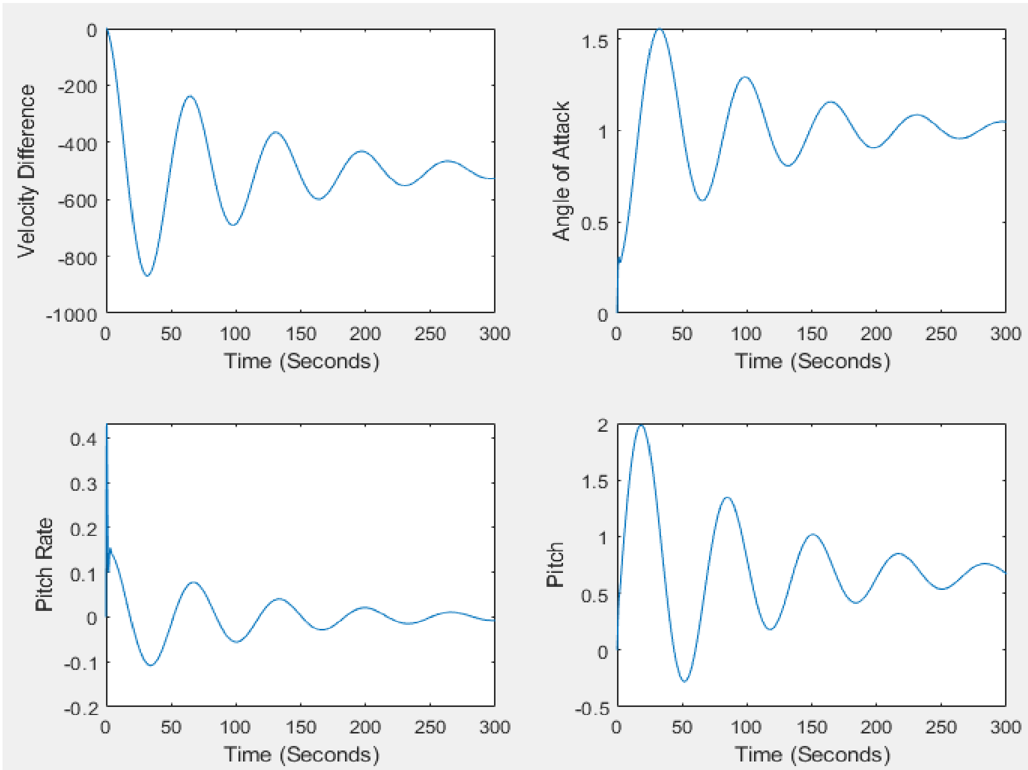
Θα επαναλάβουμε τα ερωτήματα β),γ) του πρώτου μέρους για την είσοδο r. Περιμένουμε ότι το σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αρχικά για $r = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$, $x(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$



Το σύστημα κλειστού βρόχου (**) παραμένει ευσταθές όσο εφαρμόζει την παραπάνω είσοδο ο πιλότος του αεροσκάφους. Δηλαδή αν θέλει να ανεβεί ψιλότερα δεν κινδυνεύει να χάσει τελείως την πορεία του.

Για είσοδο της μορφής $r = \begin{cases} -1, & 0 \le t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, $x(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$



Στην περίπτωση της βηματικής εισόδου παρατηρούμε ότι μερικές καταστάσεις δεν συγκλίνουν στο 0. Αυτό ευθύνεται στο γεγονός ότι ο πιλότος ασκεί διαρκώς είσοδο στο αεροσκάφος με αποτέλεσμα αυτό να υψώνεται όσο περνάει χρόνος. Παρατηρούμε ότι με τον έλεγχο που έχουμε εφαρμόσει πολλές καταστάσεις παραμένουν σταθερές μετά τον χρόνο αποκατάστασης.

Με βάση την συμπεριφορά των καταστάσεων βλέπουμε ότι η κλίση και η γωνία επίθεσης αυξάνονται ομαλά, λογικό αφού το αεροσκάφος υψώνεται. Η διαφορά στην ταχύτητα μειώνεται και ο ρυθμός της κλίσης συγκλίνει στο 0.Λογικό καθώς το αεροσκάφος δεν περιστρέφεται, αλλά κρατάει σταθερή την κλίση του κατά την άνοδο.

δ)

Θα δημιουργήσουμε έναν παρατηρητή κατάστασης Luenberger με ιδιοτιμές

$op_1 = -0.1, op_2 = -0.421, op_3 = -0.587 \; και \; op_4 = -1$

Ο παρατηρητής κατάστασης μας είναι ένα νέο δυναμικό σύστημα που δέχεται σαν εισόδους την είσοδο ελέγχου (που διαλέγουμε εμείς) και την έξοδο του συστήματος. Το γεγονός ότι το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από την έξοδο y σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τις ιδιοτιμές της δυναμικής του σφάλματος της κατάστασης έτσι ώστε το σφάλμα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η εξίσωση κατάστασης της εκτίμησης κατάστασης $\hat{x}$ είναι :

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$

Το σφάλμα εκτίμησης είναι $e = x - \hat{x}$ και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο :

$\dot{e} = (A - LC)e$

Βρίσκουμε με όμοιο τρόπο με τον K το διάνυσμά L μέσω της MATLAB :

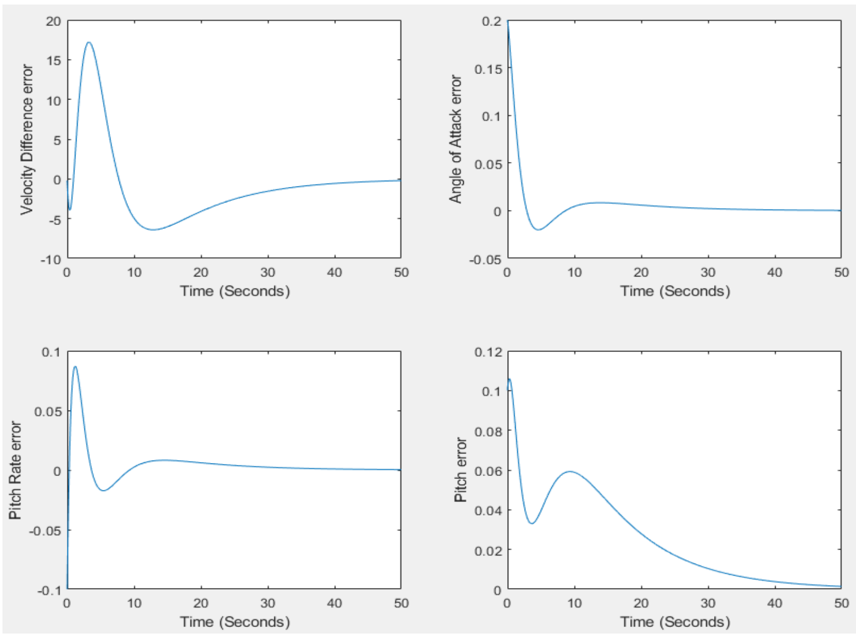
$L = [-179.7758 \quad -1.3792 \quad -1.0477 \quad -1.4451]^T$

ε)

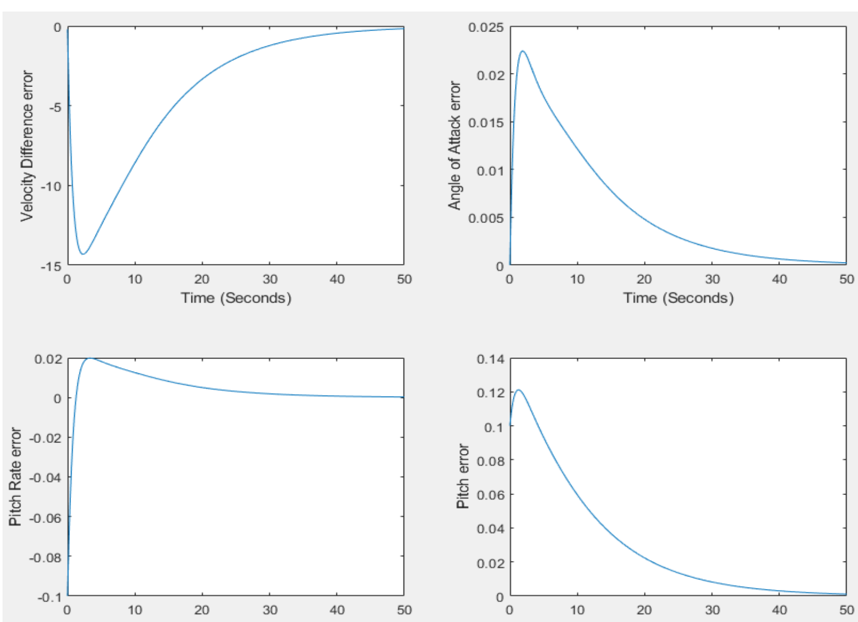
Θα προσομοιώσουμε την δυναμική του σφάλματος εκτίμησης για αρχικές συνθήκες :

$x(0) = [0 \ \pm 0.1 \ \ 0 \ \ 0]^T \quad \& \quad \hat{x}(0) = [0.2 \ -0.1 \ \ 0.1 \ \ -0.1]^T$

➔ $x(0) = [0 \ \ 0.1 \ \ 0 \ \ 0]^T$



➔ $x(0) = [0 \ -0.1 \ \ 0 \ \ 0]^T$

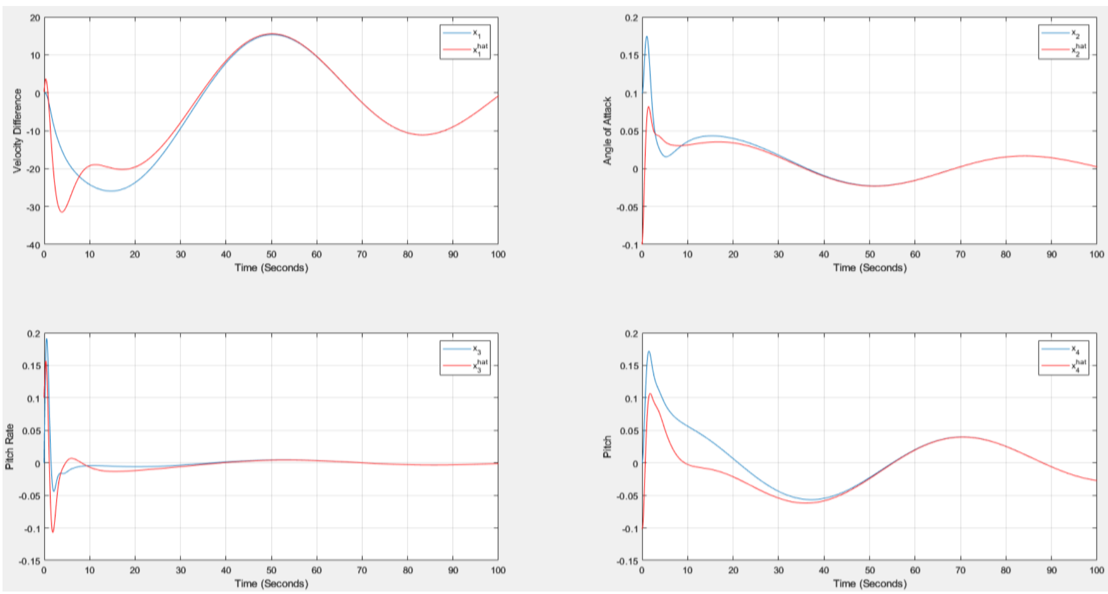


ζ)

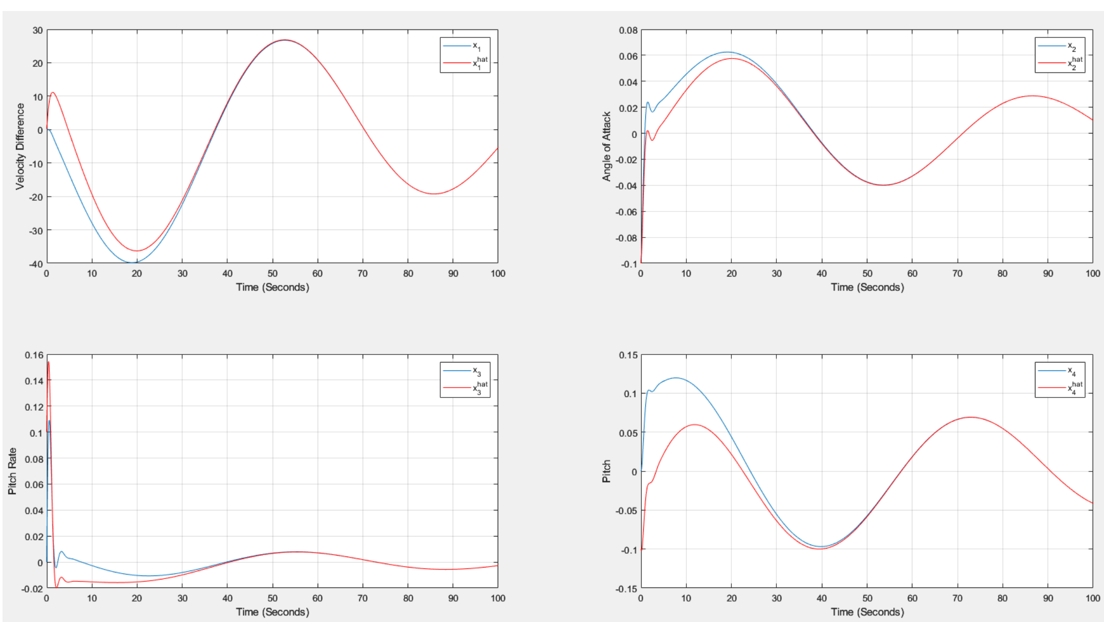
Για τις ίδιες αρχικές συνθήκες θα σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης, βασισμένο σε παρατηρητή. Δηλαδή έχουμε είσοδο ελέγχου της μορφής : $u = -K\hat{x}$.

Προσομοιώνουμε στην MATLAB τον έλεγχο κάθε κατάστασης και την εκτίμηση της κατάστασης που ανατροφοδοτείται όσο περνάει ο χρόνος.

➔ $x(0) = [0 \;\; 0.1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ & $\hat{x}(0) = [0.2 \; -0.1 \;\; 0.1 \; -0.1]^T$



➔ $x(0) = [0 \; -0.1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ & $\hat{x}(0) = [0.2 \; -0.1 \;\; 0.1 \; -0.1]^T$



Ο παρατηρητής κατάστασης παρόλο που ξεκινάει από διαφορετικές αρχικές συνθήκες εκτιμάει κάθε κατάσταση με μικρό σφάλμα όπως φαίνεται στο ε). Μετά από κάποιο χρόνο, που διαφέρει ανά κατάσταση, το σφάλμα γίνεται μηδενικό.

Παρατηρούμε έτσι ότι μπορούμε να ελέγξουμε ένα σύστημα χωρίς να ξέρουμε ακριβώς την δυναμική του ανά πάστα στιγμή. Αντί δηλαδή να ενημερωνόμαστε συνεχώς για την κατάσταση του (χρησιμοποιώντας ίσως πολλούς αισθητήρες), μπορούμε με βάση την είσοδο που διαλέγουμε και την έξοδο που παρατηρούμε, να το προσομοιώσουμε και να το ελέγξουμε με βάση το νέο μοντέλο δυναμικού συστήματος που δημιουργήσαμε.

η)

Χρησιμοποιώντας τον νόμο ανάδρασης $u = -K\hat{x} + r$ μπορούμε να βρούμε μία νέα αναπαράσταση του συστήματος μας. Οι καταστάσεις αυτού του μοντέλου είναι το διάνυσμα καταστάσεων x και το σφάλμα εκτίμησης e.

Δηλαδή :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (***)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι :

$$H(s) = \frac{-1.645s^3 - 1.034s^2 - 0.04082s - 2.691 \cdot 10^{-18}}{s^4 + 2.52s^3 + 6.752s^2 + 0.1567s + 0.06108}$$

Έχουμε νέο δυναμικό σύστημα της μορφής $z = A_t z + B_t r \quad y = C_t z$, όπου το z περιέχει 8 καταστάσεις και ο πίνακας At είναι 8x8. Θα μελετήσουμε το σύστημα ως προς την ελεγξιμότητα, δηλαδή θα πρέπει ο πίνακας ελεγξιμότητας να είναι πλήρους βαθμού. Βρίσκουμε μέσω της MATLAB ότι rank(Pc) = 4 < 8.

Το παραπάνω σύστημα δεν είναι ελέγξιμο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας υποχώρος του (***) ο οποίος είναι ελέγξιμος. Αυτός ο υποχώρος είναι το σύστημα κλειστού βρόχου (**).

Αυτό σημαίνει ότι από την είσοδο r δεν μπορούμε να ελέγξουμε το σφάλμα εκτίμησης e αλλά μπορούμε να ελέγξουμε το x.

Αφού το (***) δεν είναι ελέγξιμό, θα δούμε αν είναι ευσταθοποιήσιμο. Ο μη ελέγξιμος υποχώρος, δηλαδή η δυναμική του σφάλματος εκτίμησης, έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή είναι ευσταθές. Επομένως το σύστημα είναι ευσταθοποιήσιμο.

θ)

Τέλος, θα ξανασχεδιάσουμε έναν ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης επιλέγοντας το Κ έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση κόστους :

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

Όπου $Q = Q^T > 0 \ \& \ R = R^T > 0.$

Αυτή η μέθοδος ελέγχου ονομάζεται Γραμμικός Τετραγωνικός Ρυθμιστής και μας δίνει το βέλτιστο Κ δεδομένου των πινάκων Q και R.

Τα διαγώνια στοιχεία του Q τα διαλέγουμε με βάση το πόσο γρήγορα επιθυμούμε να φτάσει μία κατάσταση στο σημείο ισορροπίας και το R με βάση το πόσο ακριβή είναι η είσοδος ελέγχου.

Για το συγκεκριμένο σύστημα επιλέγουμε τα εξής Q,R :

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Επιλέγουμε μεγάλους συντελεστές για την κλίση και τον ρυθμό κλίσης διότι το αεροσκάφος πρέπει να έχει την καλύτερη δυνατή ακρίβεια κατά την διάρκεια πτήσης καθώς είπαμε ότι αυτό είναι F-16. Ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι η είσοδος είναι ακριβή, αλλά η χρήση ενός τέτοιου αεροσκάφους δεν είναι συχνή, είναι όμως σημαντική.

Κάνοντας χρήση της συνάρτησης lqr(A,B,Q,R) της MATLAB υπολογίζουμε το Κ :

$$K = [2.181 \ \ -4.561 \ \ -9.5196 \ \ -35.8322]$$

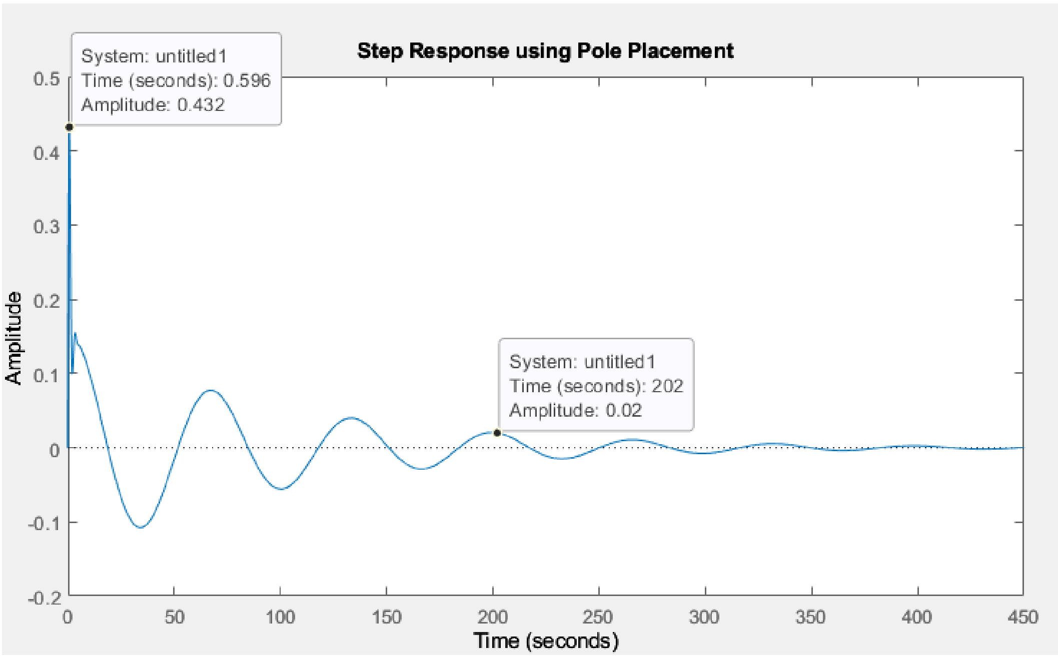
Οι πόλοι του συστήματος είναι :

$$p_1 = -11.7547, \quad p_{2,3} = -2.3881 \pm 2.3625j, \ \ p_4 = -0.5163$$

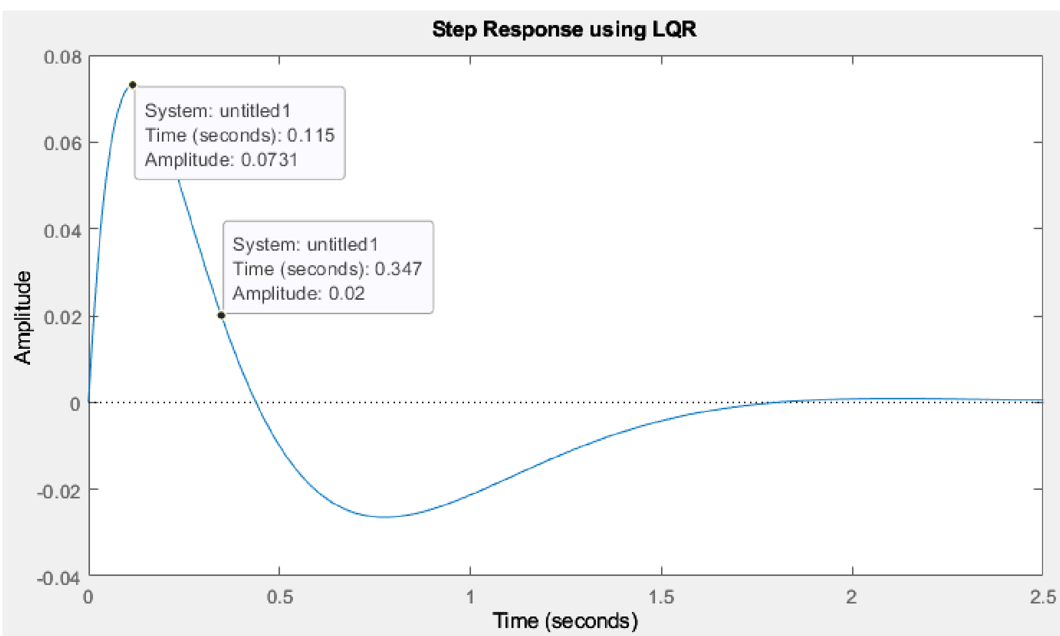
Σε αυτήν την περίπτωση οι πόλοι βρίσκονται πιο αριστερά στο μιγαδικό επίπεδο από ότι οι πόλοι του β). Αυτό είναι σχετικό όμως διότι αν επιλέγαμε μικρότερα penalties και μεγαλύτερο R τότε οι πόλοι του συστήματος θα είχαν, κατά μέτρο, μικρότερο πραγματικό μέρος από τους προκειμένους.

Επιπλέον, προσομοιώνουμε και τις βηματικές αποκρίσεις για κάθε μέθοδο επιλογής του K και έχουμε :

➔ Επιλογή K με την μέθοδο της Τοποθέτησης Πόλων



➔ Επιλογή K με LQR



Στις δύο παραπάνω αποκρίσεις μετράμε τα Percentage Overshoot και Settling Time και έχουμε:

	Pole Placement	**LQR**
PO	**43.20%**	**7.31%**
Ts (δ = 2%)	**202 s**	**0.34 s**

Παρατηρούμε ότι ο αρχικός ελεγκτής που χρησιμοποιήσαμε δεν είναι ιδανικός καθώς έχει πολύ αργό χρόνο αποκατάστασης ενώ ταυτόχρονα έχει και πολύ μεγάλο ποσοστό υπερύψωσης.

Από την άλλη το K που διαλέξαμε με βάση το LQR έχει πολύ μικρό χρόνο αποκατάστασης και ελάχιστο ποσοστό υπερύψωσης καθιστώντας τον ελεγκτή βέλτιστο για τα δεδομένα ενός πολεμικού αεροσκάφους.