Lista de Exercícios 1 — Análise Assintótica de Funções

QXD0115 – Estrutura de Dados Avançada – Turma 02A – 2024.1

Prof. Atílio Gomes

1 de março de 2024

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

1. Suponha que estamos comparando implementações do insertion sort e do merge sort na mesma máquina. Para entradas de tamanho n, insertion sort executa em $8n^2$ passos, enquanto merge sort executa em $64n \lg_n$ passos. Para quais valores de n insertion sort é melhor(mais eficiente) que o merge sort?

2. Qual o menor valor de n tal que um algoritmo cujo tempo de execução é $100n^2$ executa mais rápido que um algoritmo cujo tempo de execução é 2^n na mesma máquina?

3. Prove o seguinte teorema: "Para quaisquer duas funções $f(n)$ e $g(n)$, temos que $f(n) = \Theta(g(n))$ se, e somente se, $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$"

4. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ duas funções assintóticamente não negativas. Usando a definição básica da notação Θ, prove que $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$.

5. É verdade que $2^{n+1} = O(2^n)$? É verdade que $2^{2n} = O(2^n)$?

6. Explique por quê a declaração "O tempo de execução do algoritmo A é pelo menos $O(n^2)$" não faz sentido.

7. Prove que o tempo de execução de um algoritmo é $\Theta(g(n))$ se e somente se seu tempo de execução no pior caso é $O(g(n))$ e seu tempo de execução no melhor caso é $\Omega(g(n))$.

8. O que há de errado com o seguinte raciocínio? "Existem números c e N tais que $n^3 \leq cn^2$ para todo n maior que N. De fato, basta tomar $c = n$ e $N = 1$".

9. Encontre números c e N tais que $2nlgn - 10n + 100lgn \leq cnlgn$ para todo n maior que N.

10. É verdade que $10n^2 + 200n + 500/n = O(n^2)$?

11. É verdade que $n^2 - 200n - 300 = O(n)$?

12. Mostre que $\lg(100n^3 + 200n + 300)^2 = O(\lg n)$.

13. Seja $C(n,k)$ o número de combinações de n objetos tomados k a k. Mostre que $C(n,2) = O(n^2)$. Mostre que $C(n,3) = O(n^3)$. É verdade que, para qualquer número natural k tem-se $C(n,k) = O(n^k)$?

14. (Adaptado de Horowitz et al.) Um quadrado mágico é uma matriz $n \times n$ de inteiros de 1 até n^2 tais que a soma de cada linha, coluna, ou diagonal é a mesma. H. Coxter deu a seguinte regra para para criar um quadrado mágico quando n é ímpar.

    > "Comece com 1 no centro da última linha; então vá para baixo e para a direita, atribuindo números em ordem crescente nos quadrados vazios; se você sair do quadrado, imagine que o mesmo quadrado está ladrilhando o plano e continue; se o próximo quadrado já estiver ocupado, suba uma linha (ao invés de se mover para baixo e para a direita) e continue."

    (a) Escreva um algoritmo no formato de pseudocódigo que implemente a regra de Coxter acima. Lembre-se de dar um nome com os parâmetros de entrada.

    (b) Analise a complexidade desse algoritmo. Justifique a resposta.