Grafos – Busca em Largura - BFS

Estrutura de Dados Avançada — QXD0015

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

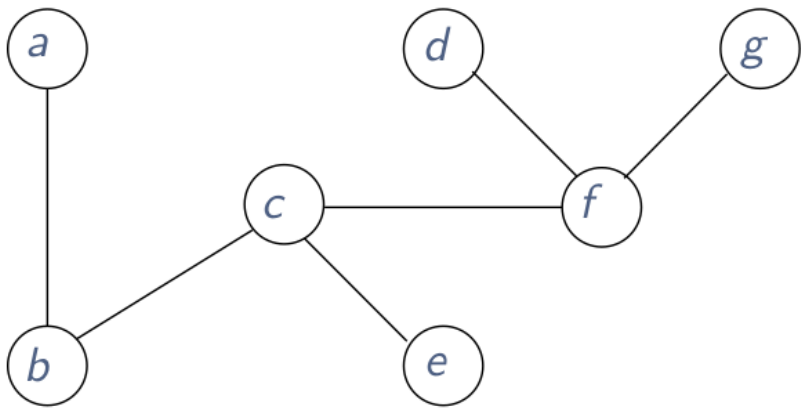
1º semestre/2024

Definições iniciais

Representação de árvores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Uma árvore enraizada é uma árvore com um vértice especial chamado raiz.



Representação de árvores

Uma árvore direcionada com raiz r é um grafo direcionado acíclico $T = (V, E)$ tal que:

Representação de árvores

Uma árvore direcionada com raiz r é um grafo direcionado acíclico $T = (V, E)$ tal que:

1. $d_{in}(r) = 0$,

Representação de árvores

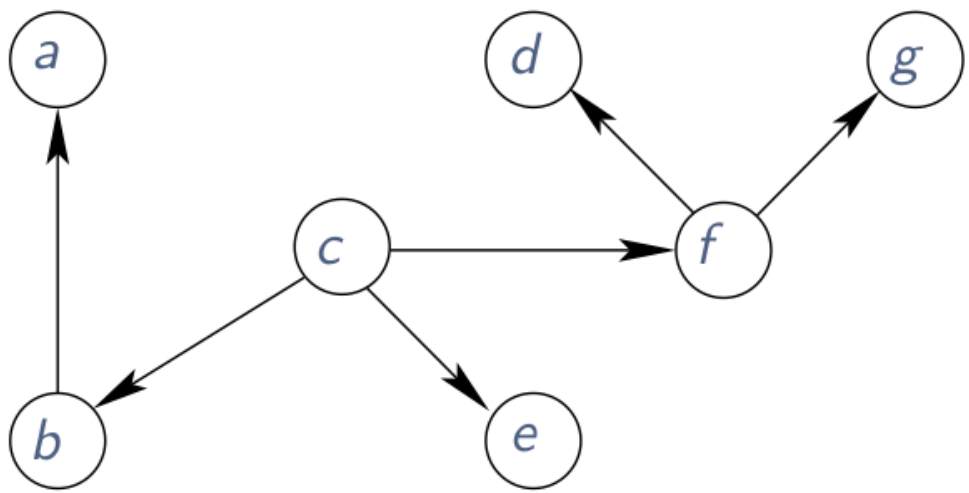
Uma árvore direcionada com raiz r é um grafo direcionado acíclico $T = (V, E)$ tal que:

1. $d_{in}(r) = 0$,
2. $d_{in}(v) = 1$ para todo $v \in V \setminus \{r\}$.

Representação de árvores

Uma árvore direcionada com raiz r é um grafo direcionado acíclico $T = (V, E)$ tal que:

1. $d_{in}(r) = 0$,
2. $d_{in}(v) = 1$ para todo $v \in V \setminus \{r\}$.



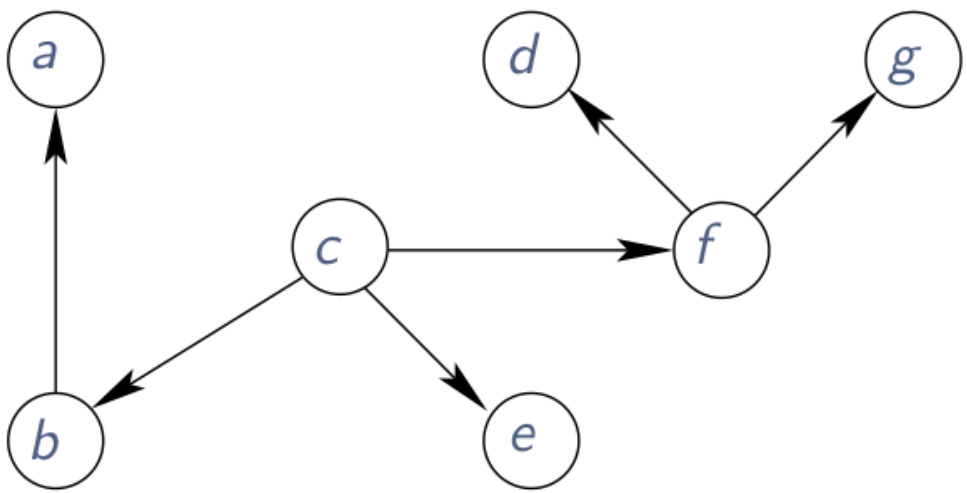
raiz c

Representação de árvores

Representar uma árvore enraizada com um vetor de predecessores π.

v	a	b	c	d	e	f	g
$\pi[v]$	b	c	NIL	f	c	c	f

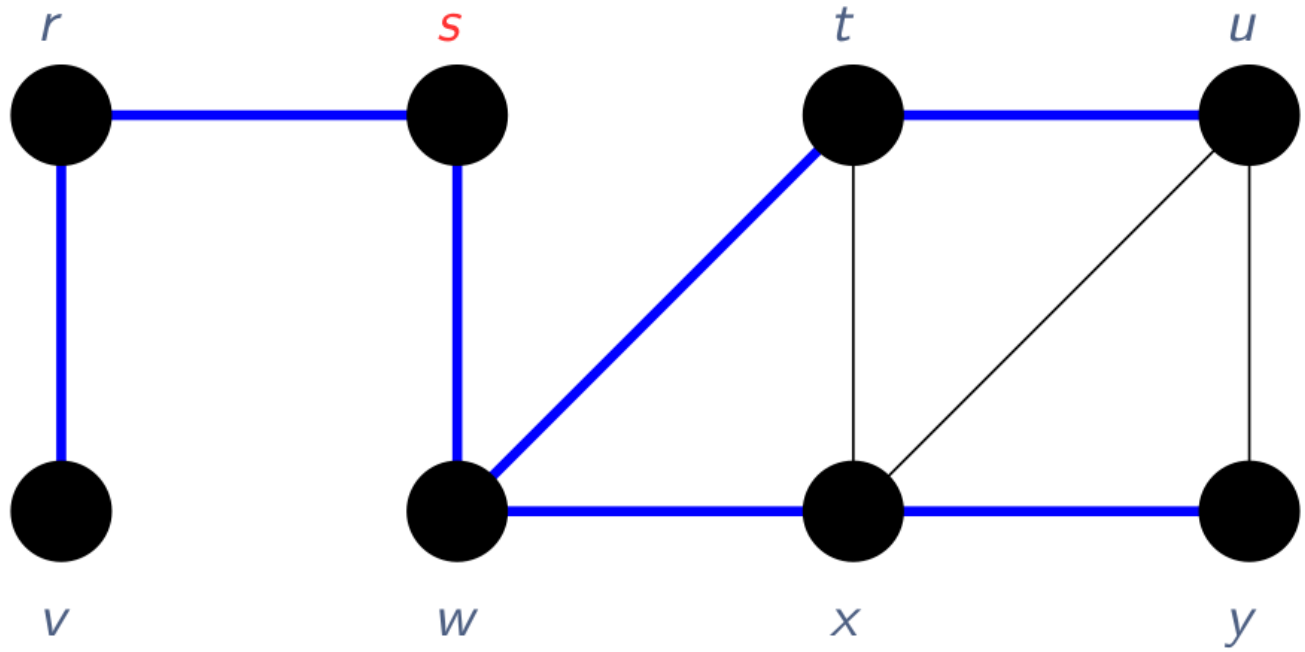
- usamos o símbolo NIL para indicar a ausência



raiz c

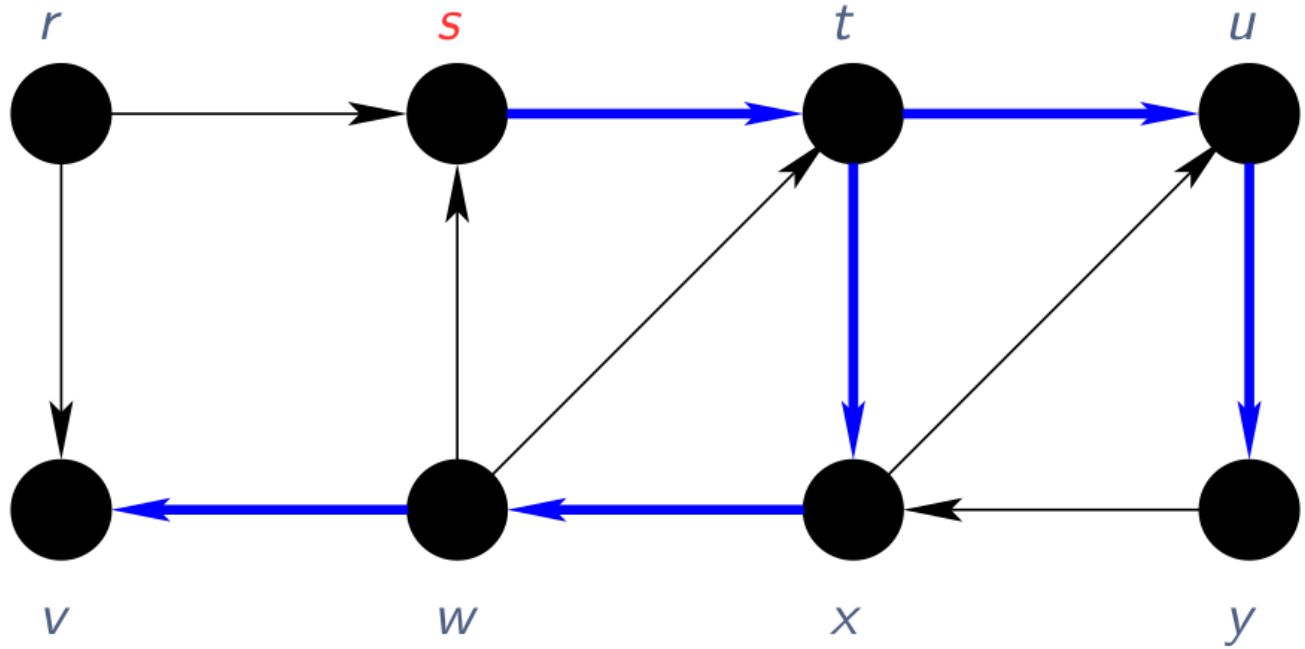
Exemplo com grafo não direcionado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



v	r	s	t	u	v	w	x	y
$\pi[v]$	s	NIL	w	t	r	s	w	x

Exemplo com grafo direcionado



v	r	s	t	u	v	w	x	y
$\pi[v]$	NIL	NIL	s	t	w	x	t	u

Imprimindo caminho entre dois vértices

Imprimindo caminho entre dois vértices

Algoritmo recursivo para imprimir caminho de s a v no grafo:

`print-path`(π, s, v)

1. **se** $v == s$ **então**
2. `imprima` s
3. **senão se** $\pi[v] ==$ `NIL` **então**
4. `imprima` "não existe caminho de s a v"
5. **senão**
6. `print-path`$(\pi, s, \pi[v])$
7. `imprima` v

Busca em grafos

Busca em grafos

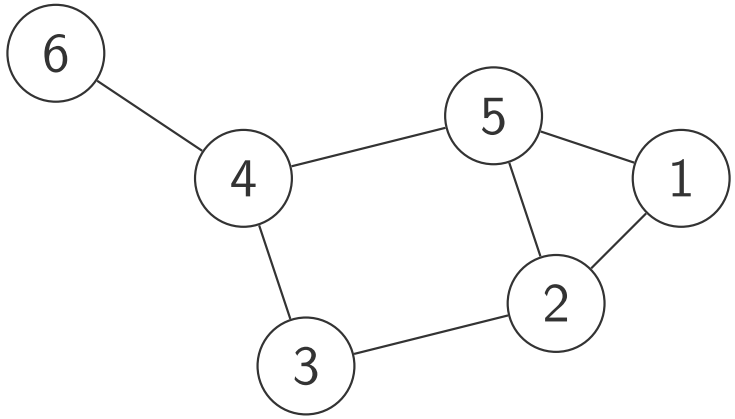
Problema fundamental em grafos:

> Como explorar um grafo de forma sistemática?

- Muitas aplicações são abstraídas como problemas de busca.
- Muitos algoritmos utilizam fundamentos similares.

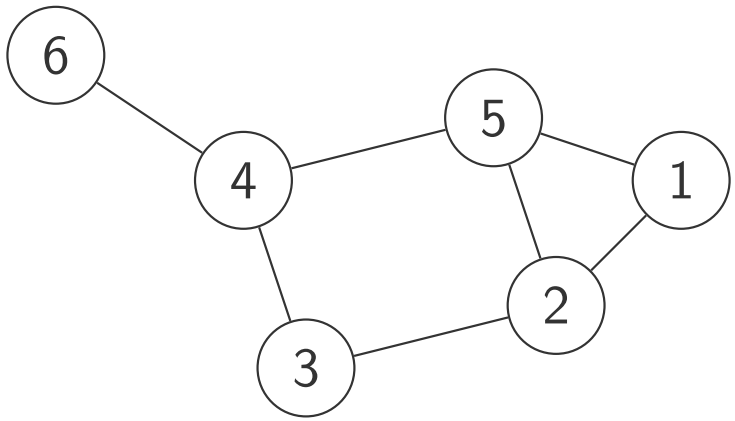
Busca em grafos

- Como saber se existe caminho entre dois vértices, de maneira eficiente?



Busca em grafos

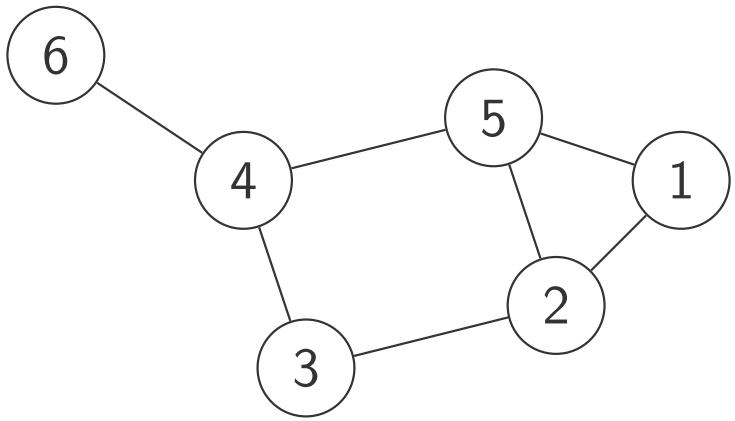
- Como saber se existe caminho entre dois vértices, de maneira eficiente?



- **Ideia:** durante a busca no grafo, evitar passar por um vértice mais de uma vez
  - quando chegar num vértice pela primeira vez, marcá-lo.

Busca em grafos

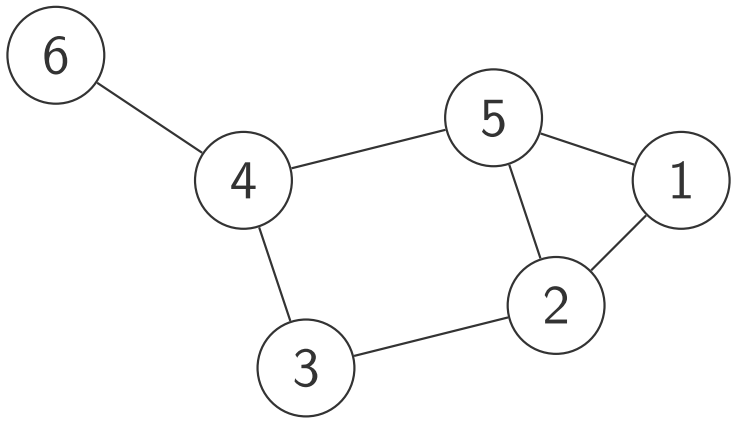
- Como saber se existe caminho entre dois vértices, de maneira eficiente?



- **Ideia:** durante a busca no grafo, evitar passar por um vértice mais de uma vez
  - quando chegar num vértice pela primeira vez, marcá-lo.
  - ao sair de um vértice u e chegar, por meio de uma aresta (u, v), num vértice v nunca visto antes, vamos de alguma forma marcar essa aresta como especial.

Busca em grafos

- Como saber se existe caminho entre dois vértices, de maneira eficiente?



- **Ideia:** durante a busca no grafo, evitar passar por um vértice mais de uma vez
  - quando chegar num vértice pela primeira vez, marcá-lo.
  - ao sair de um vértice u e chegar, por meio de uma aresta (u, v), num vértice v nunca visto antes, vamos de alguma forma marcar essa aresta como especial.
  - É preciso garantir não só que todos os vértices possíveis de serem alcançados foram alcançados, mas também garantir que todas as arestas incidentes nesses vértices foram analisadas.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)
- Possíveis tipos de arestas durante a busca:

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

- Possíveis estágios da marcação de um vértice:

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

- Possíveis estágios da marcação de um vértice:
  - **Não-descoberto:** vértice que ainda não foi encontrado pela busca.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

- Possíveis estágios da marcação de um vértice:
  - **Não-descoberto:** vértice que ainda não foi encontrado pela busca.
  - **Descoberto:** vértice foi descoberto (visitado pela primeira vez).

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

- Possíveis estágios da marcação de um vértice:
  - **Não-descoberto:** vértice que ainda não foi encontrado pela busca.
  - **Descoberto:** vértice foi descoberto (visitado pela primeira vez).
  - **Descoberto e não-explorado:** vértice foi descoberto, mas possui arestas incidentes que ainda não foram exploradas.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

- Possíveis estágios da marcação de um vértice:
  - **Não-descoberto:** vértice que ainda não foi encontrado pela busca.
  - **Descoberto:** vértice foi descoberto (visitado pela primeira vez).
  - **Descoberto e não-explorado:** vértice foi descoberto, mas possui arestas incidentes que ainda não foram exploradas.
  - **Explorado:** vértice foi descoberto e todas as arestas incidentes no vértice foram exploradas e seus vizinhos foram descobertos.

Busca em grafos – Estratégia

- Definir vértice inicial (origem da busca)

- Possíveis tipos de arestas durante a busca:
  - **Não-explorada:** ainda não considerada pela busca.
  - **Explorada:** já foi considerada pela busca.
  - **Aresta de árvore:** assim que ela foi considerada pela busca, um de seus extremos já tinha sido descoberto, mas o outro ainda não.

- Possíveis estágios da marcação de um vértice:
  - **Não-descoberto:** vértice que ainda não foi encontrado pela busca.
  - **Descoberto:** vértice foi descoberto (visitado pela primeira vez).
  - **Descoberto e não-explorado:** vértice foi descoberto, mas possui arestas incidentes que ainda não foram exploradas.
  - **Explorado:** vértice foi descoberto e todas as arestas incidentes no vértice foram exploradas e seus vizinhos foram descobertos.

- Essa estratégia resulta em um algoritmo genérico para buscas em grafos.

Algoritmo de busca genérico

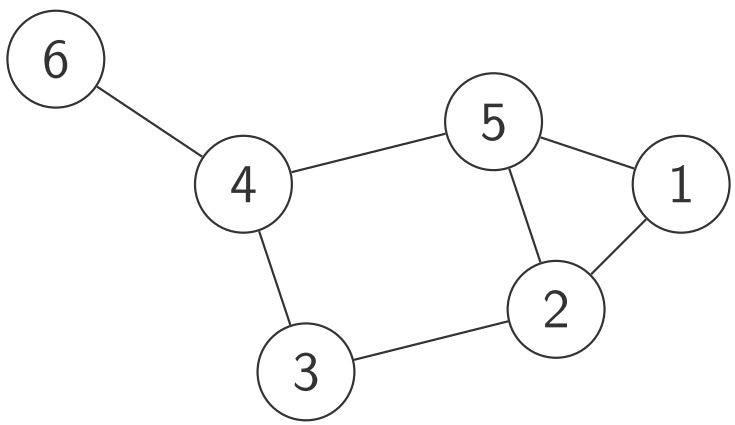
Dado grafo $G = (V, E)$ (direcionado ou não-direcionado):

(1) Marcar todos os vértices como `não-descobertos`

(2) Escolher um vértice inicial e marcá-lo `descoberto`

(3) **Enquanto** houver vértice `descoberto` e `não-explorado`:

  (a) Selecionar vértice descoberto e não-explorado u
  (b) Considerar aresta não-explorada (u, v)
  (c) Se v for `não-descoberto`, marcar v como `descoberto` e marcar aresta (u, v) como **aresta de árvore**.
  (d) Se não houver mais arestas incidentes a u a serem exploradas, marcar u como **explorado**.



Ordenação da Exploração

O algoritmo genérico não estabelece ordem de visita dos vértices e arestas.

Ordenação da Exploração

O algoritmo genérico não estabelece ordem de visita dos vértices e arestas.

- A ordem de visita das arestas geralmente é aleatória e depende da representação do grafo no computador.

Ordenação da Exploração

O algoritmo genérico não estabelece ordem de visita dos vértices e arestas.

- A ordem de visita das arestas geralmente é aleatória e depende da representação do grafo no computador.
- Existem duas abordagens principais para a ordem de visita dos vértices:

Ordenação da Exploração

O algoritmo genérico não estabelece ordem de visita dos vértices e arestas.

- A ordem de visita das arestas geralmente é aleatória e depende da representação do grafo no computador.
- Existem duas abordagens principais para a ordem de visita dos vértices:
  - Explorar o vértice descoberto **"mais antigo"**
    - Busca em Largura (Breadth-First Search – BFS)

Ordenação da Exploração

O algoritmo genérico não estabelece ordem de visita dos vértices e arestas.

- A ordem de visita das arestas geralmente é aleatória e depende da representação do grafo no computador.
- Existem duas abordagens principais para a ordem de visita dos vértices:
  - Explorar o vértice descoberto **"mais antigo"**
    - Busca em Largura (Breadth-First Search – BFS)
  - Explorar o vértice descoberto **"mais recente"**
    - Busca em Profundidade (Depth-First Search – DFS)
    - Já vimos busca em profundidade quando estudamos árvores: pré-ordem, pós-ordem e ordem simétrica.

Busca em largura

Distância entre vértices

- Dado grafo G e dois vértices s e v de G, podem haver diversos caminhos entre s e v.
- **Problema:** Queremos um caminho de s a v com o menor comprimento.

Distância entre vértices

- Dado grafo G e dois vértices s e v de G, podem haver diversos caminhos entre s e v.
- **Problema:** Queremos um caminho de s a v com o menor comprimento.

Definição

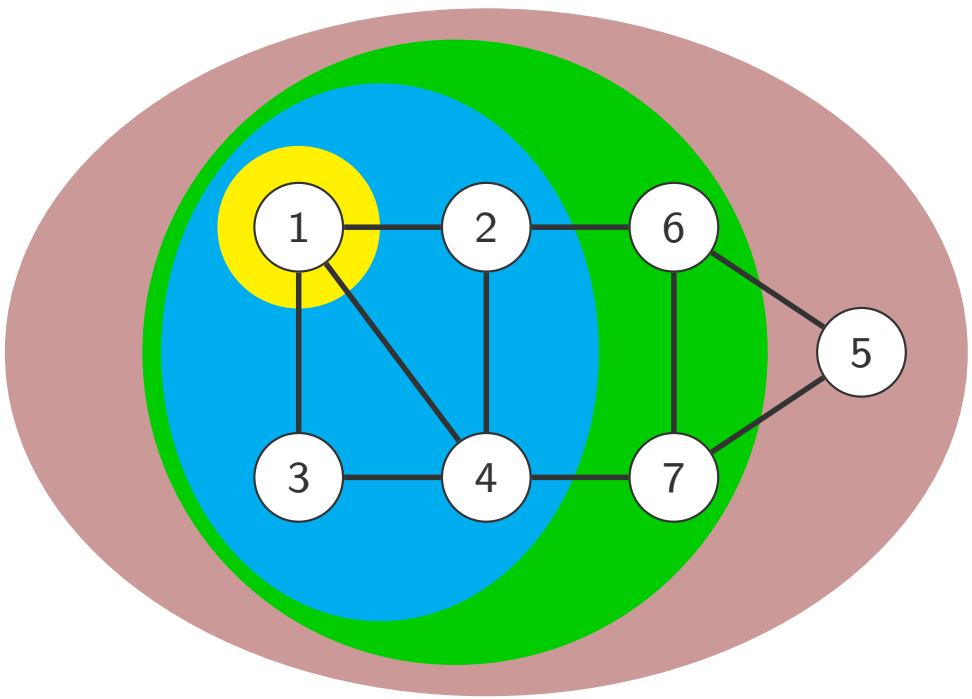
A distância de s a v é o comprimento de um caminho mais curto de s a v

- denotamos esse valor por $dist(s, v)$
- se v não for alcançavel a partir de s, definimos $dist(s, v) = \infty$

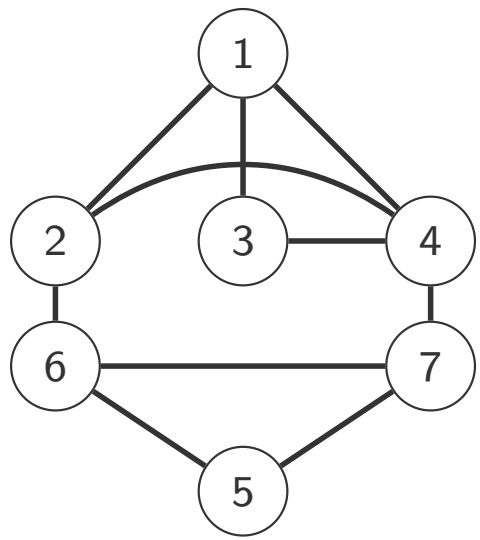
Interpretação da busca em largura

- A busca em largura é realizada em níveis.

- Primeiro a raiz é descoberta no nível L_1. Depois todos os vértices vizinhos da raiz são descobertos no nível L_2. Depois todos os vértices vizinhos dos vizinhos da raiz são descobertos no nível L_3, e assim por diante.



Grafo G



Grafo G redesenhado

Construindo uma árvore de busca

Ideia do algoritmo

Construindo uma árvore de busca

Ideia do algoritmo

1. percorremos os vértices usando uma fila Q

Construindo uma árvore de busca

Ideia do algoritmo

1. percorremos os vértices usando uma fila Q
2. enfileiramos o vértice de origem s

Construindo uma árvore de busca

Ideia do algoritmo

1. percorremos os vértices usando uma fila Q
2. enfileiramos o vértice de origem s
3. desenfileiramos o próximo vértice u da fila Q e, para cada vizinho v do vértice atual u,

Construindo uma árvore de busca

Ideia do algoritmo

1. percorremos os vértices usando uma fila Q
2. enfileiramos o vértice de origem s
3. desenfileiramos o próximo vértice u da fila Q e, para cada vizinho v do vértice atual u,
   - se for a primeira vez que vemos v durante a busca, então adicionamos uma aresta (u, v) à árvore de busca, ou seja, fazemos $\pi[v] = u$

Construindo uma árvore de busca

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Ideia do algoritmo

1. percorremos os vértices usando uma fila Q
2. enfileiramos o vértice de origem s
3. desenfileiramos o próximo vértice u da fila Q e, para cada vizinho v do vértice atual u,
   - se for a primeira vez que vemos v durante a busca, então adicionamos uma aresta (u, v) à árvore de busca, ou seja, fazemos $\pi[v] = u$
   - inserimos v na fila de processamento

Construindo uma árvore de busca

Ideia do algoritmo

1. percorremos os vértices usando uma fila Q
2. enfileiramos o vértice de origem s
3. desenfileiramos o próximo vértice u da fila Q e, para cada vizinho v do vértice atual u,
   - se for a primeira vez que vemos v durante a busca, então adicionamos uma aresta (u, v) à árvore de busca, ou seja, fazemos $\pi[v] = u$
   - inserimos v na fila de processamento
4. repetimos o passo anterior com o primeiro vértice da fila

Cores dos vértices

A BFS pinta o grafo durante a busca

Cores dos vértices

A BFS pinta o grafo durante a busca

1. $cor[v] = branco$ se não descobrimos v ainda

Cores dos vértices

A BFS pinta o grafo durante a busca

1. $cor[v] = branco$ se não descobrimos v ainda
2. $cor[v] = cinza$ se já descobrimos, mas não finalizamos v

Cores dos vértices

A BFS pinta o grafo durante a busca

1. $cor[v] = branco$ se não descobrimos v ainda
2. $cor[v] = cinza$ se já descobrimos, mas não finalizamos v
3. $cor[v] = preto$ se já descobrimos e já finalizamos v

Cálculo de distâncias

- Será computado um vetor de distâncias d

Cálculo de distâncias

- Será computado um vetor de distâncias d
- Para todo vértice $v \in V(G)$, a distância do vértice de origem s até v é dada por $d[v]$

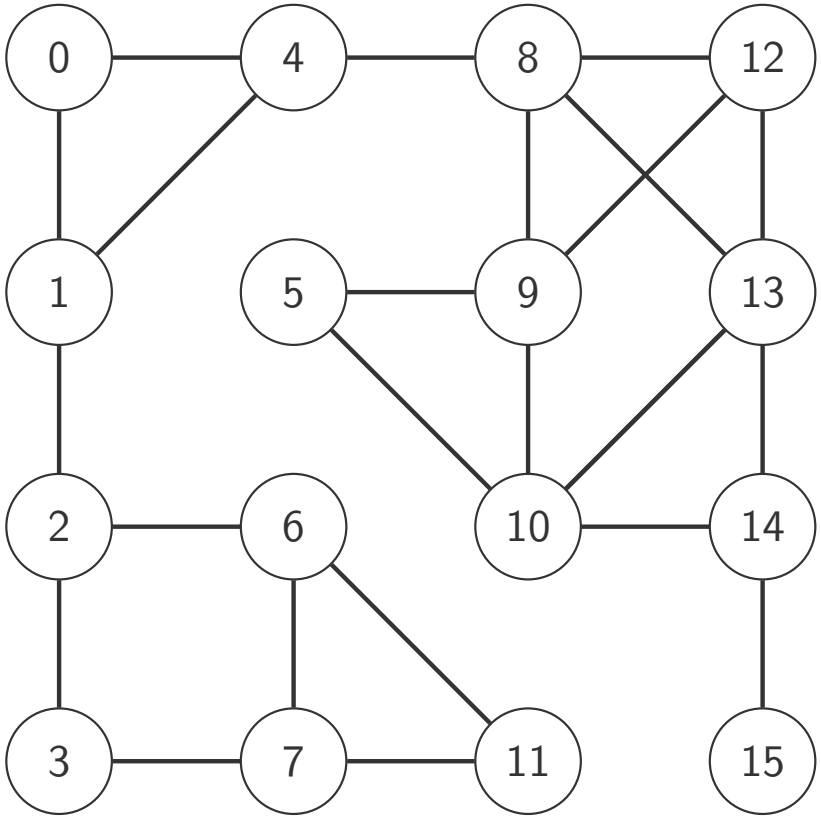
Cálculo de distâncias

- Será computado um vetor de distâncias d
- Para todo vértice $v \in V(G)$, a distância do vértice de origem s até v é dada por $d[v]$
- Por default, $d[s] = 0$

Cálculo de distâncias

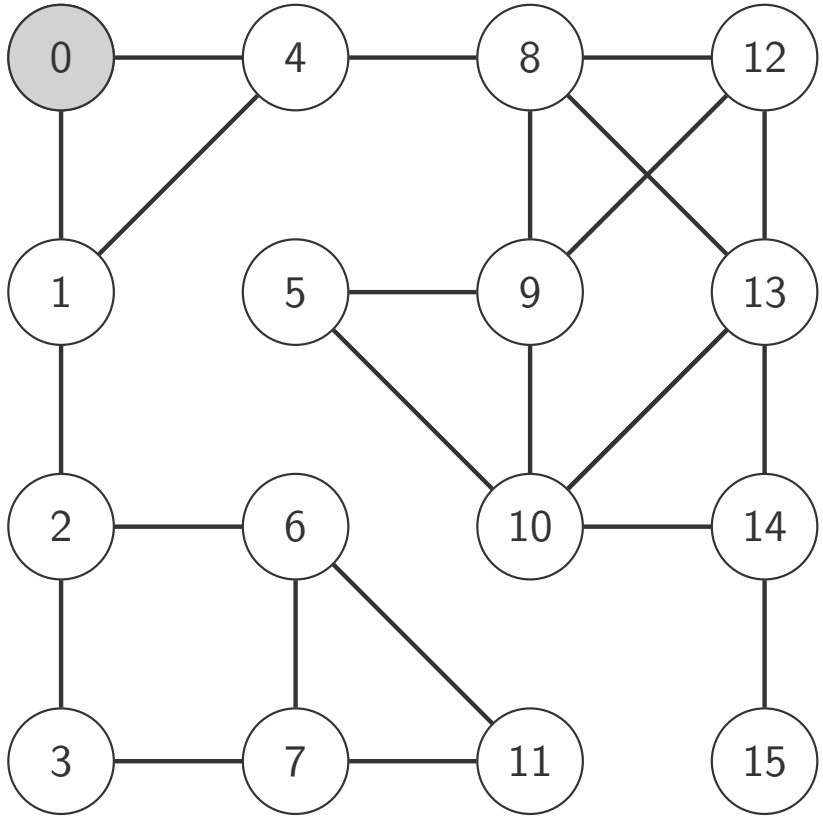
- Será computado um vetor de distâncias d
- Para todo vértice $v \in V(G)$, a distância do vértice de origem s até v é dada por $d[v]$
- Por default, $d[s] = 0$
- A primeira vez que vemos um vértice $v \neq s$, ele é branco e foi descoberto na vizinhança de um vértice cinza u. Então fazemos $d[v] = d[u] + 1$.

Exemplo de busca em largura



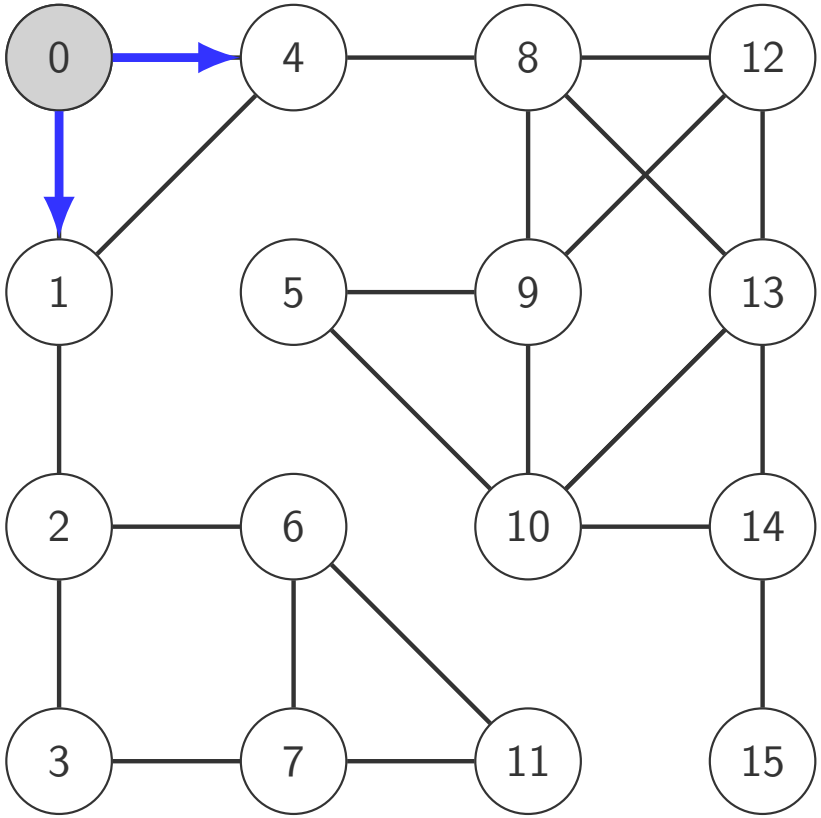
Fila

Exemplo de busca em largura



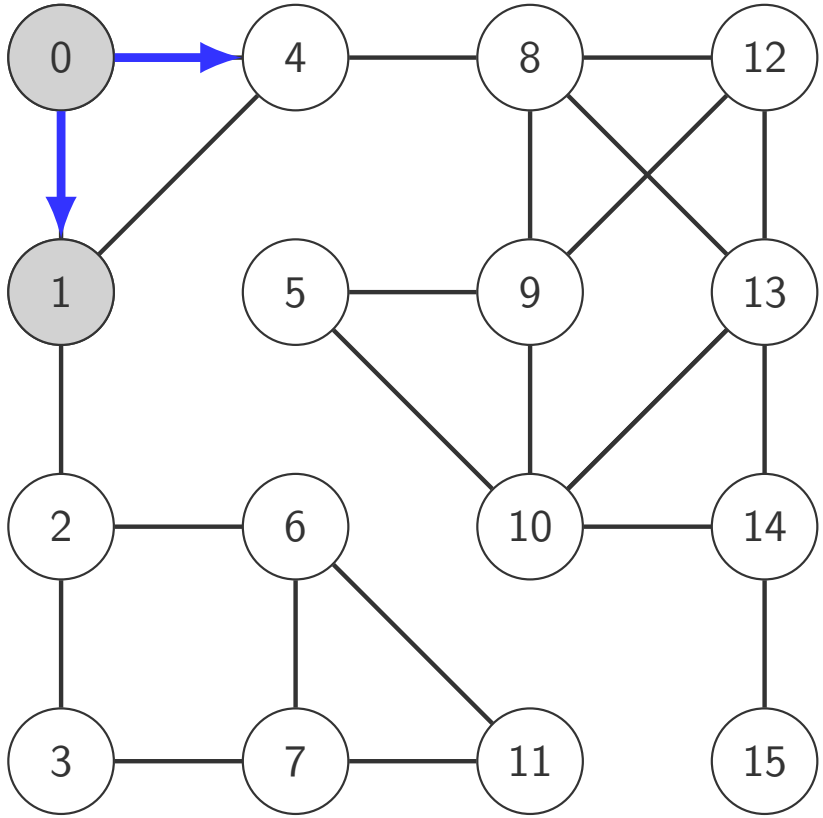
Fila | 0

Exemplo de busca em largura



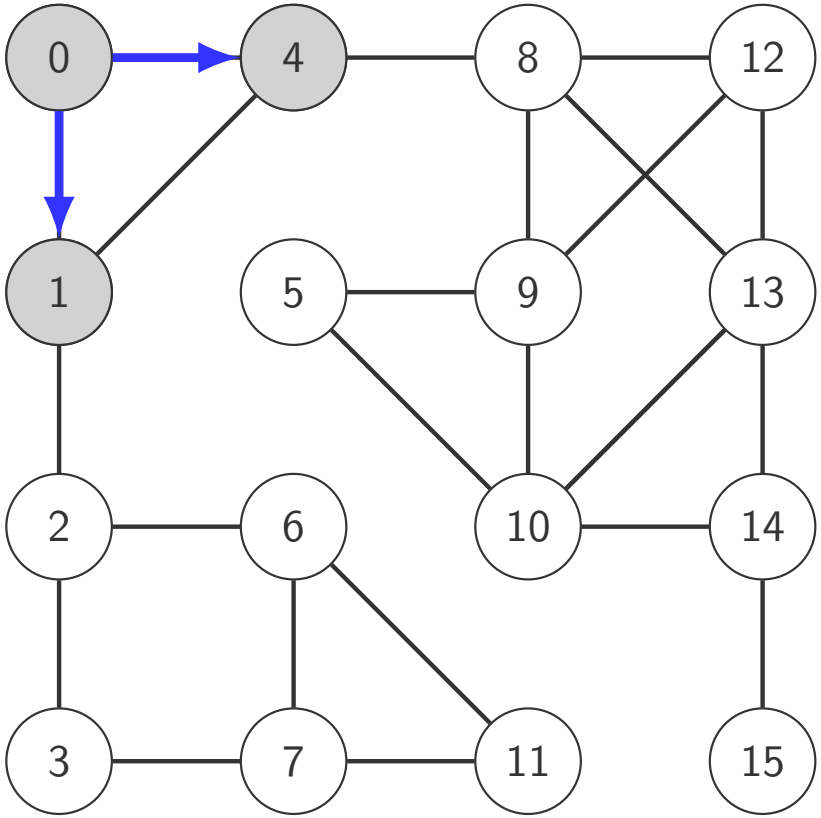
Fila

Exemplo de busca em largura



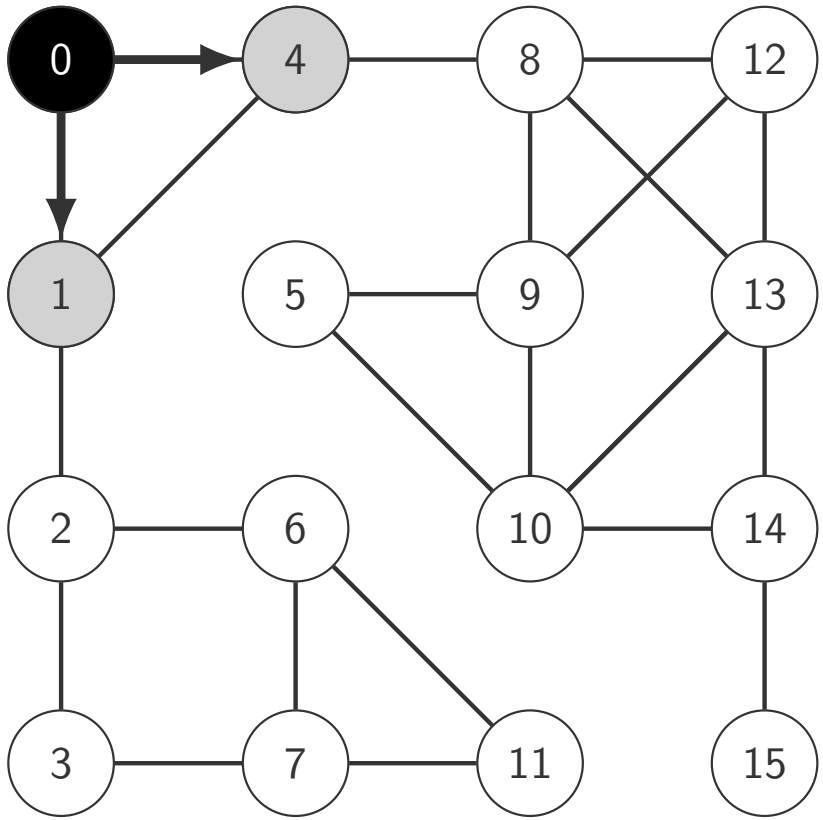
Fila | 1

Exemplo de busca em largura



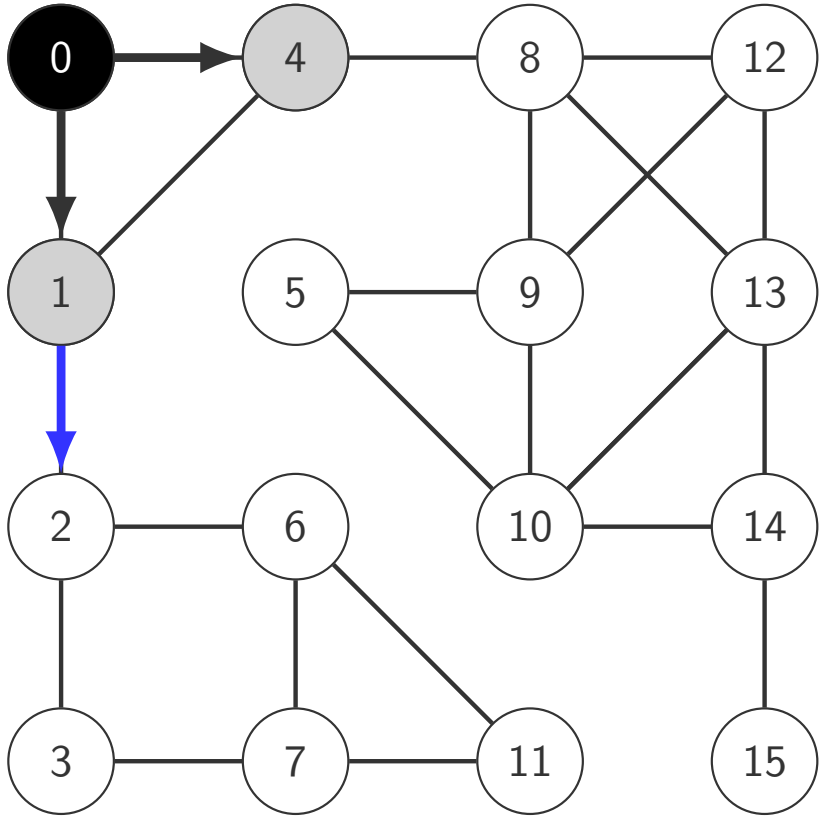
Fila | 1 | 4 |

Exemplo de busca em largura



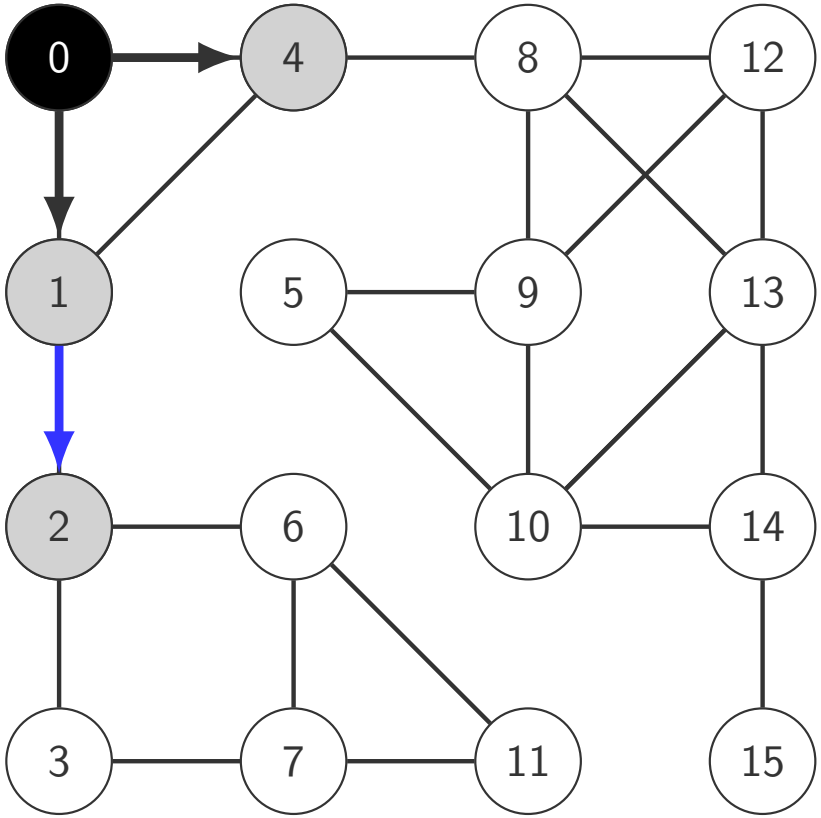
Fila | 1 | 4 |

Exemplo de busca em largura



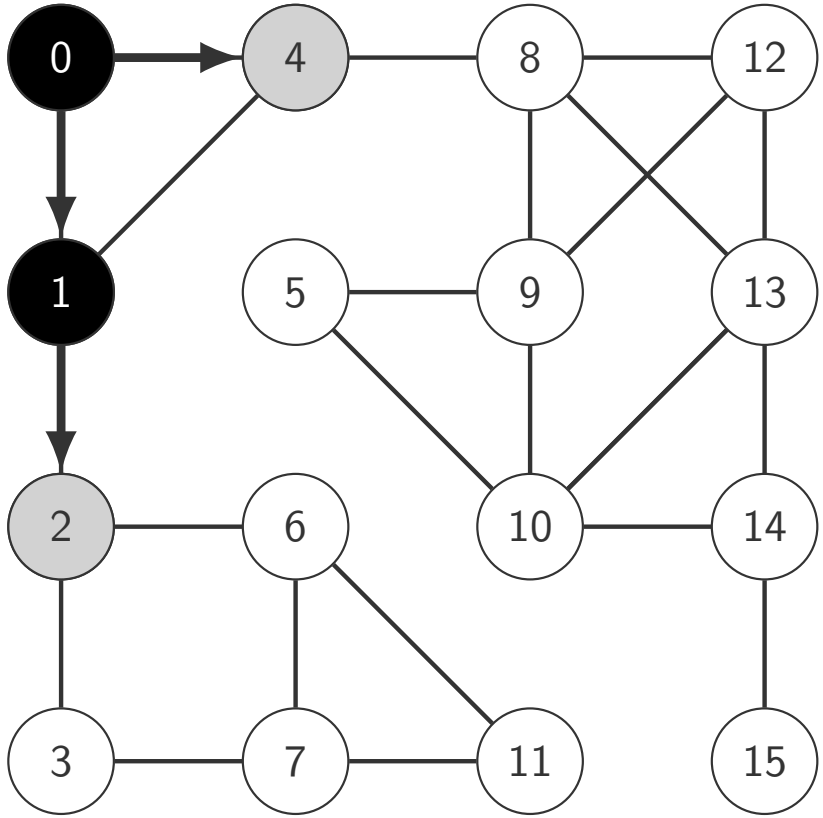
Fila | 4

Exemplo de busca em largura



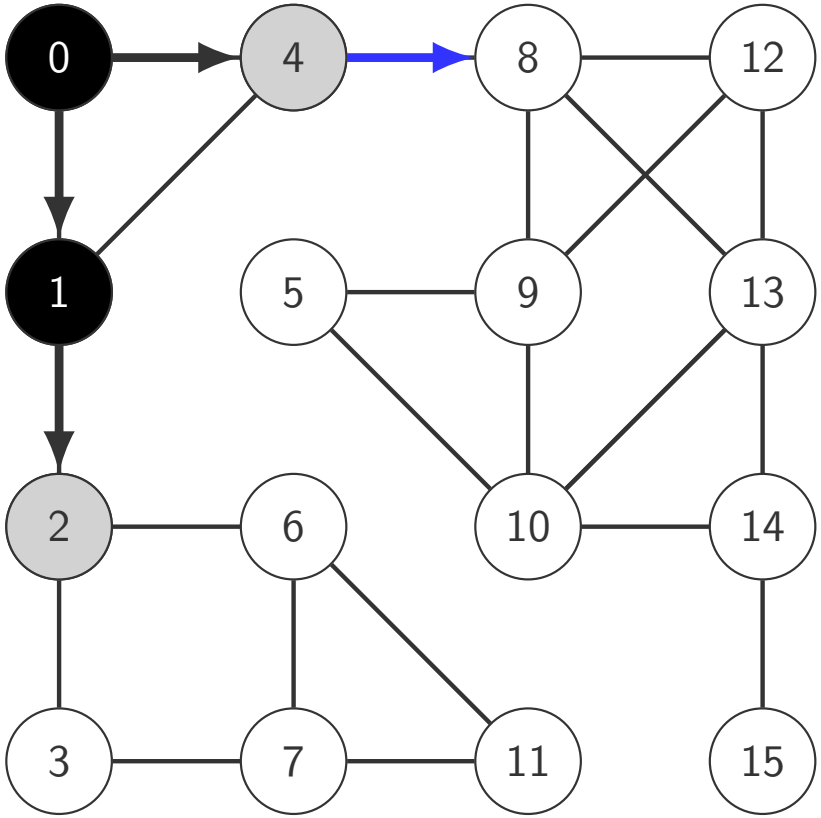
Fila | 4 | 2 |

Exemplo de busca em largura



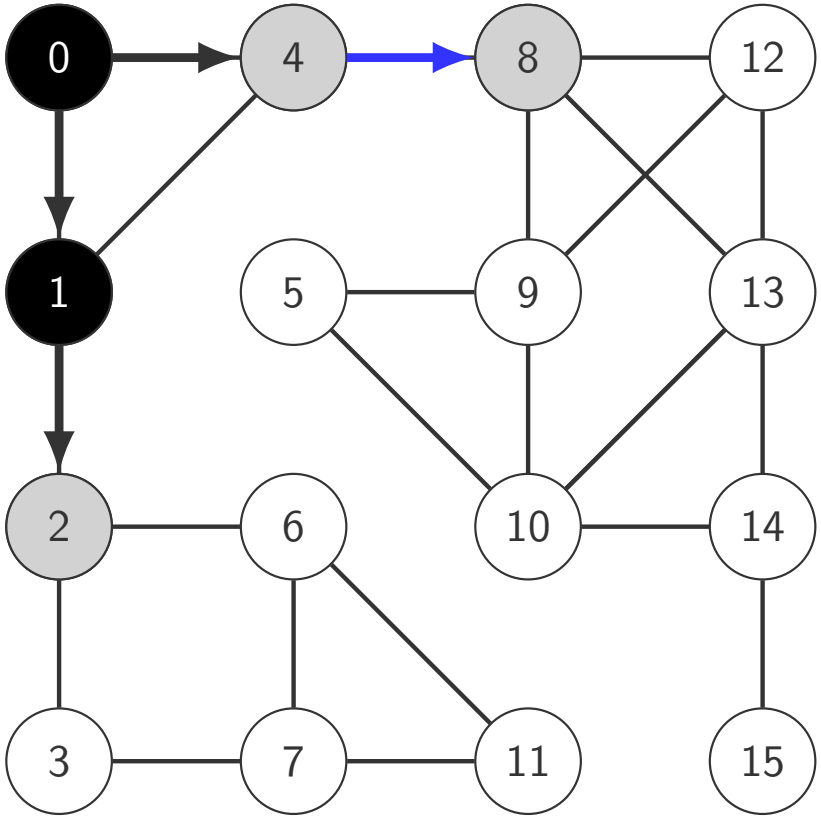
Fila | 4 | 2 |

Exemplo de busca em largura



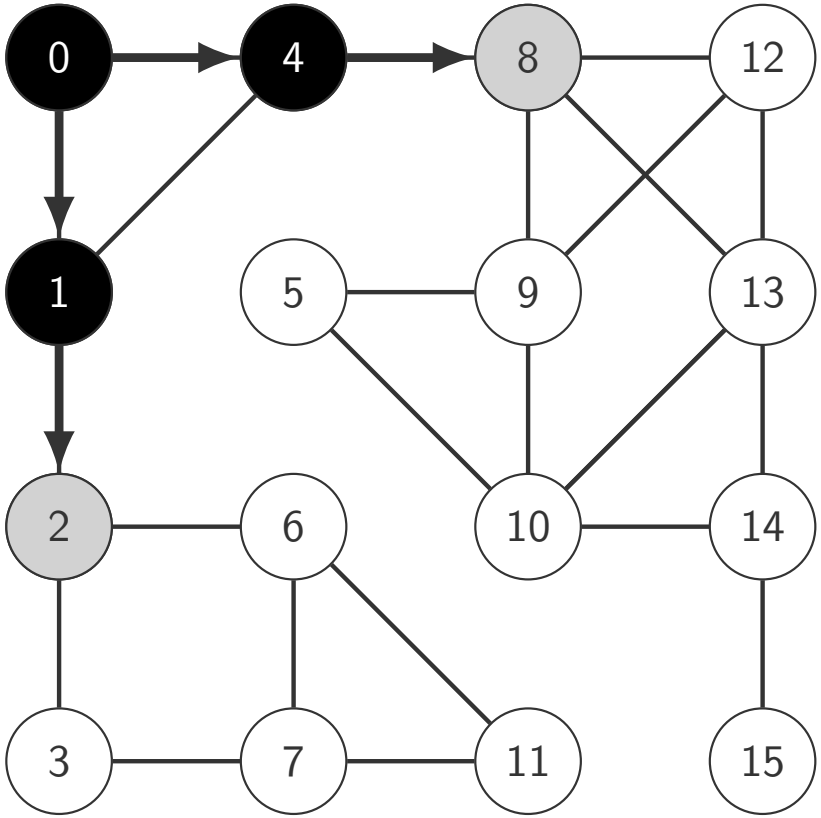
Fila | 2

Exemplo de busca em largura



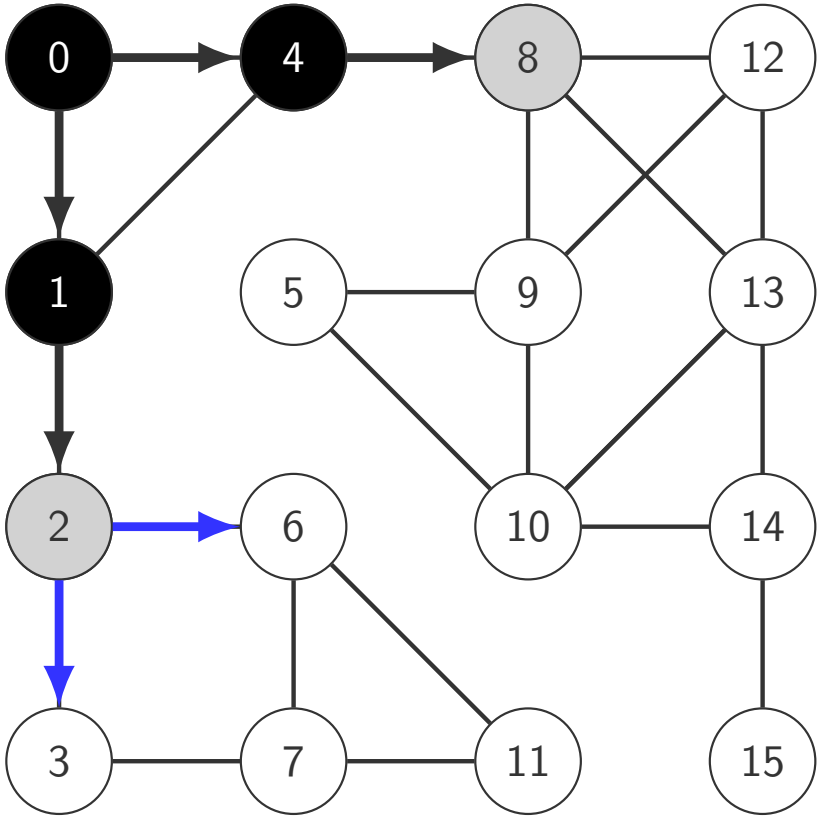
Fila | 2 | 8 |

Exemplo de busca em largura



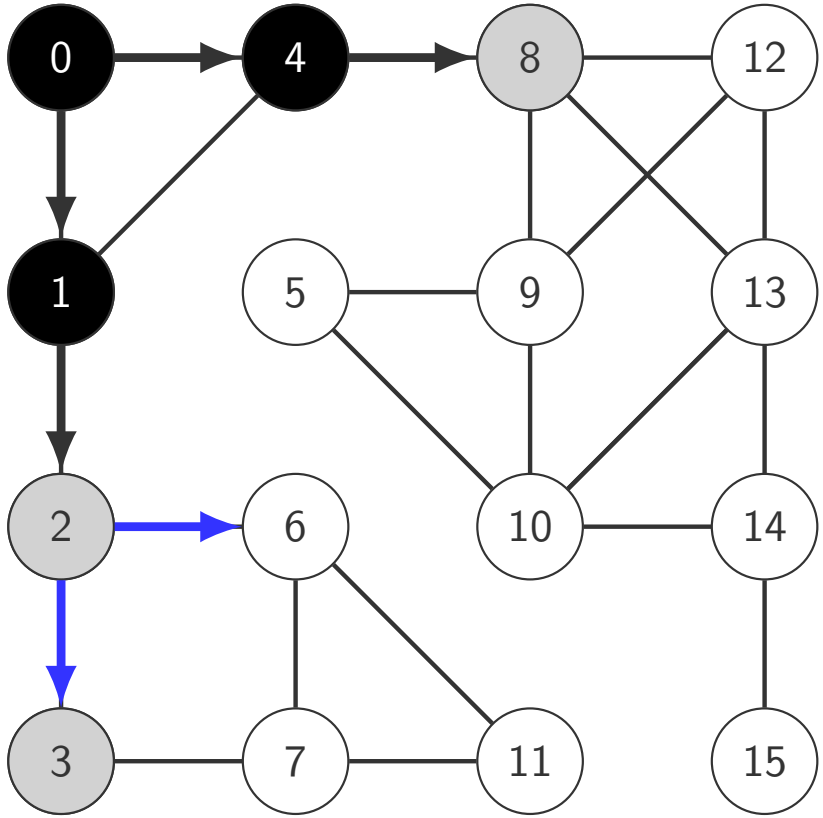
Fila | 2 | 8 |

Exemplo de busca em largura



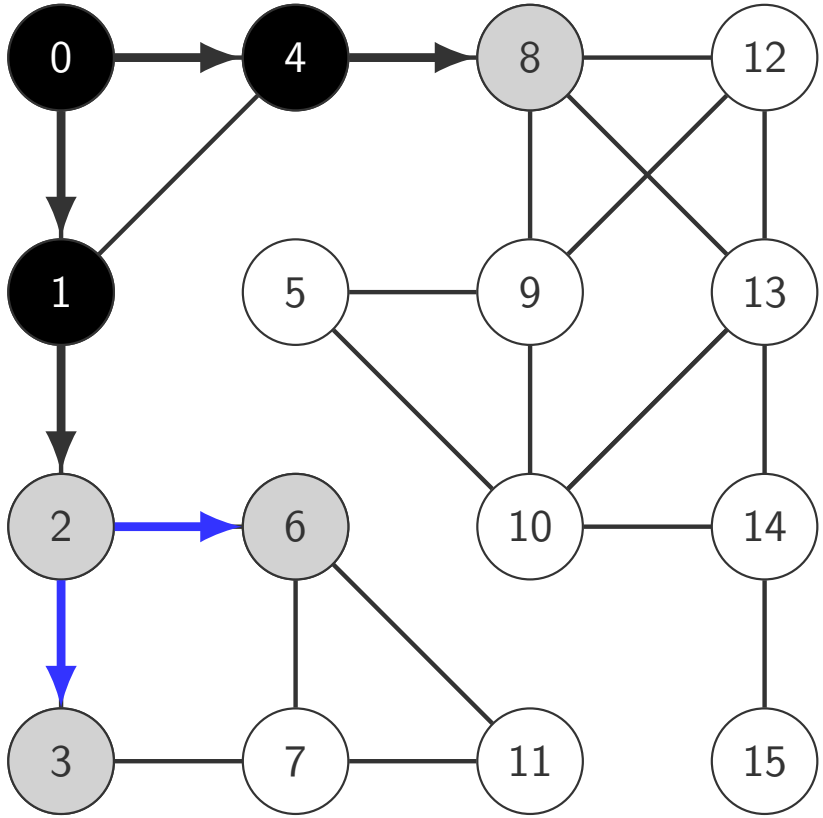
Fila | 8

Exemplo de busca em largura



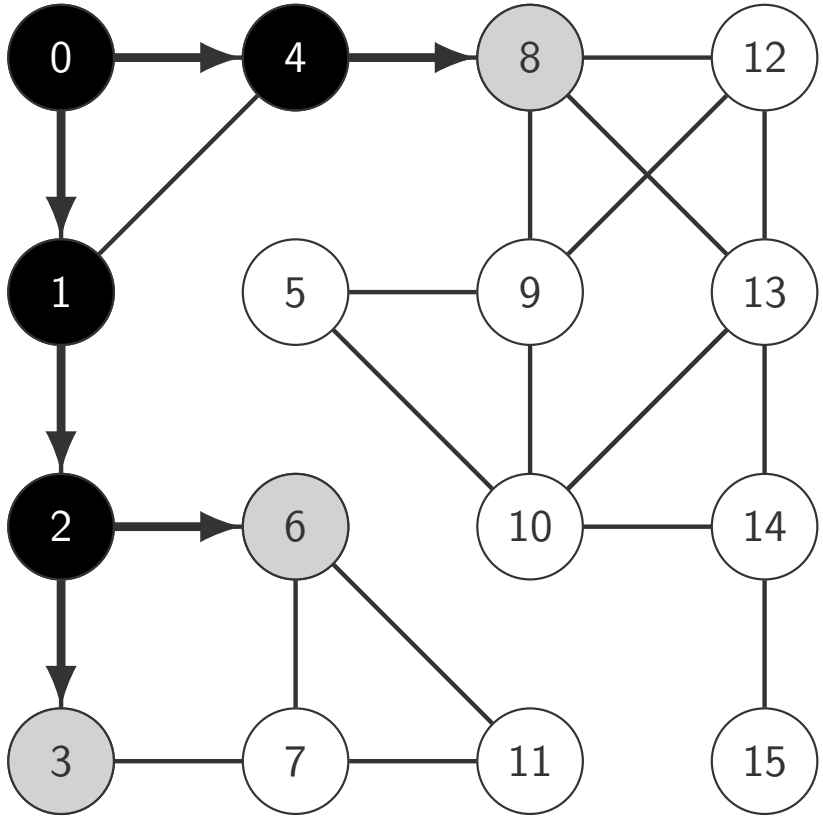
Fila | 8 | 3 |

Exemplo de busca em largura



Fila | 8 | 3 | 6 |

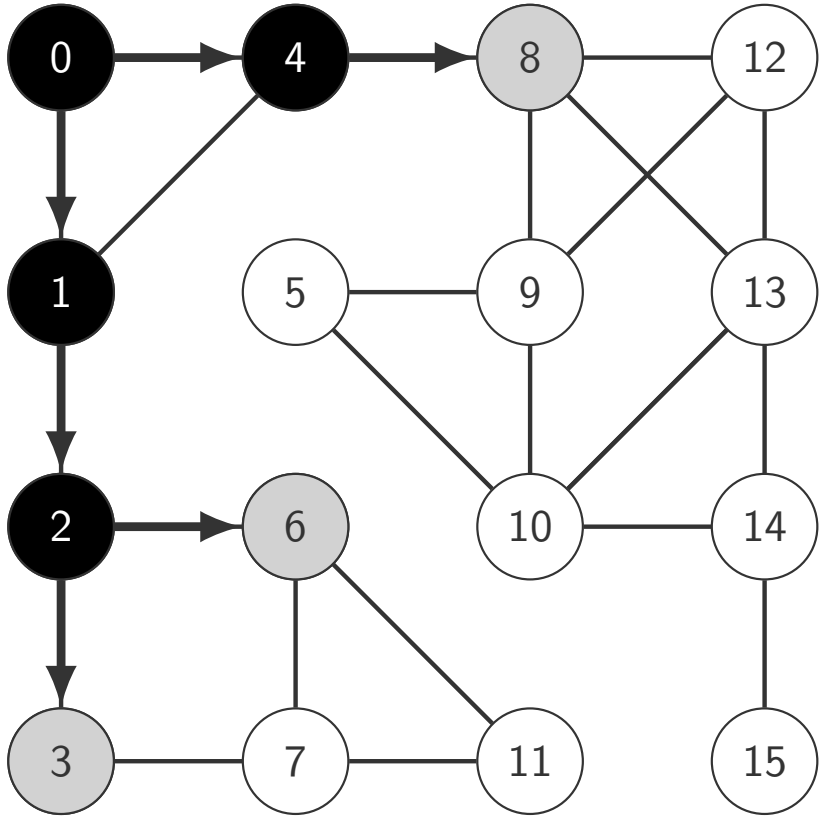
Exemplo de busca em largura



Fila

8	3	6

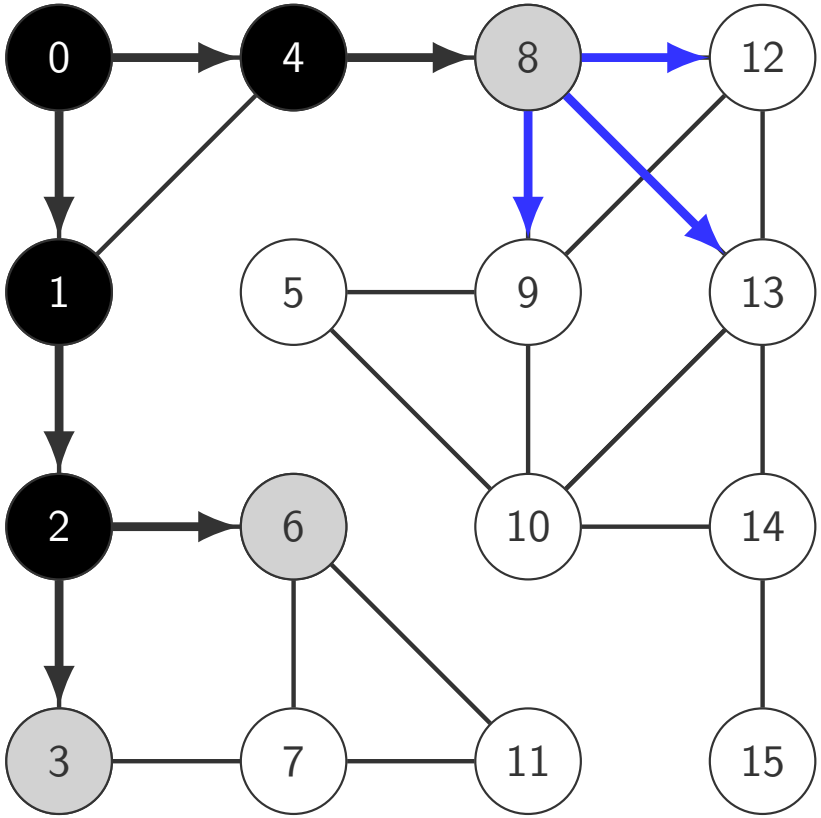
Exemplo de busca em largura



Fila

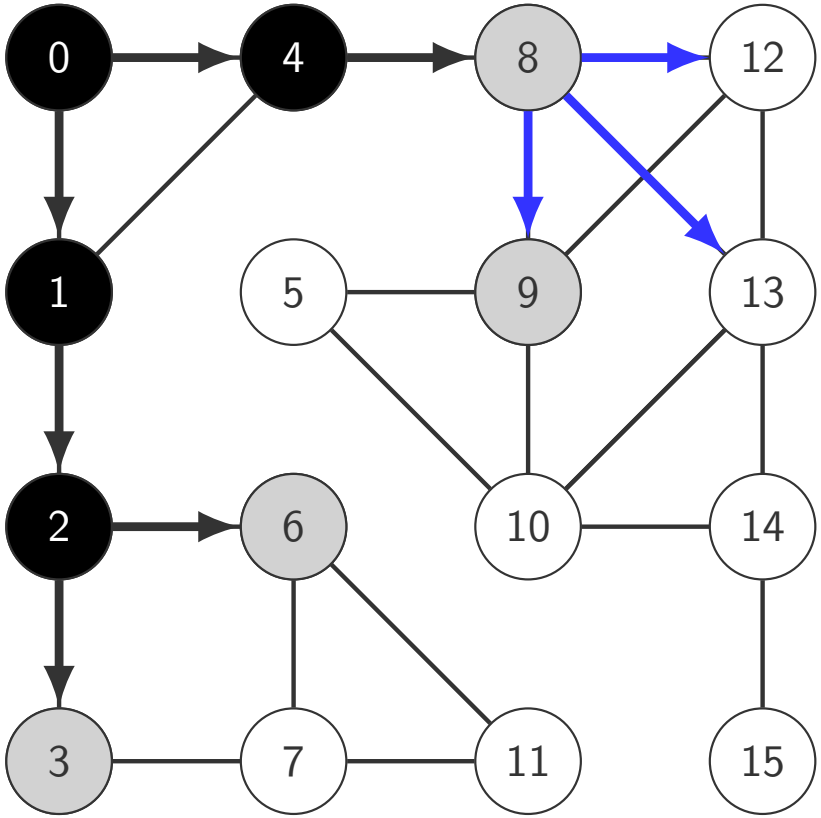
8	3	6

Exemplo de busca em largura



Fila | 3 | 6 |

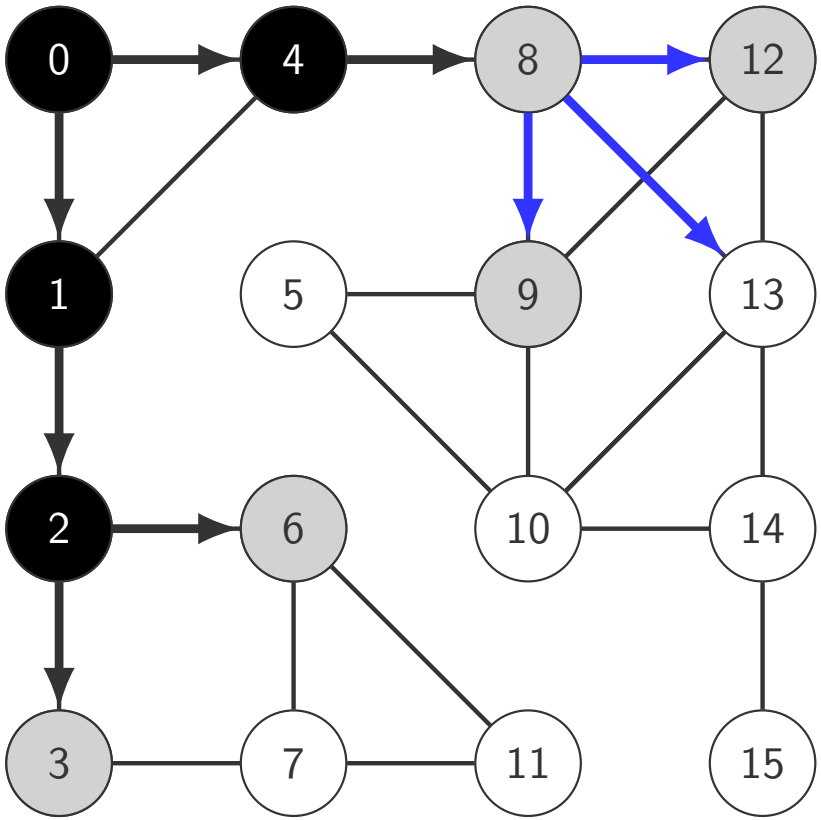
Exemplo de busca em largura



Fila

3	6	9

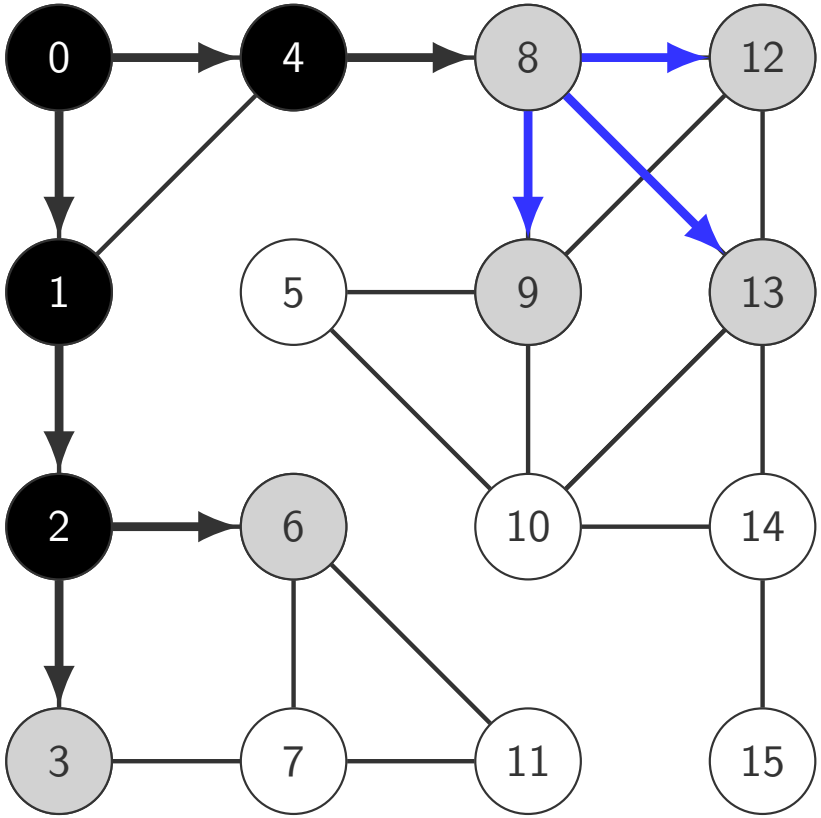
Exemplo de busca em largura



Fila

3	6	9	12

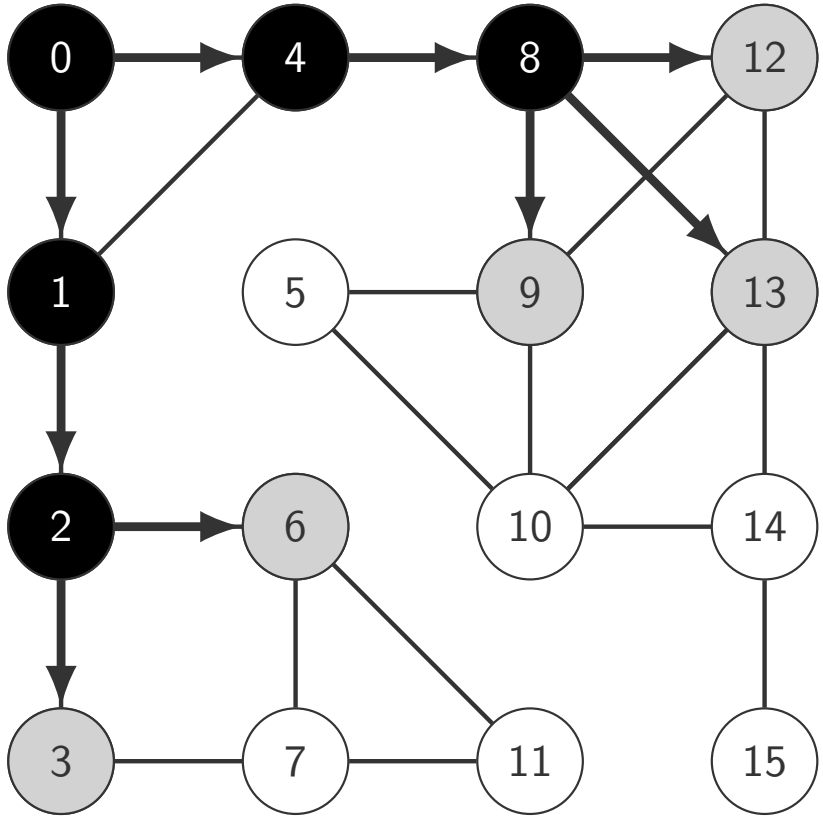
Exemplo de busca em largura



Fila

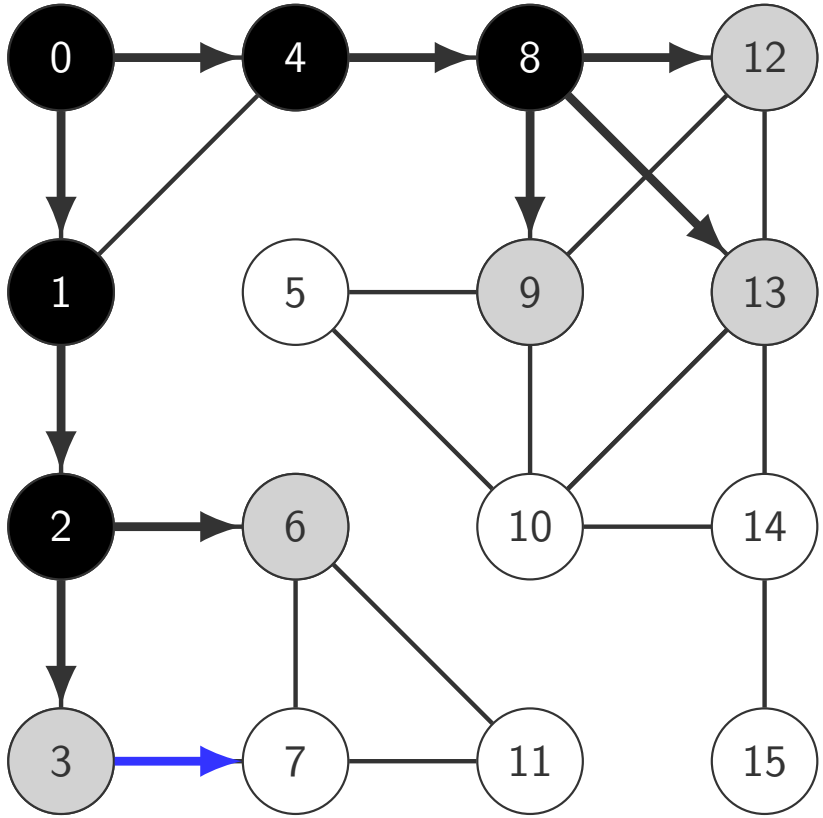
3	6	9	12	13

Exemplo de busca em largura



Fila	3	6	9	12	13

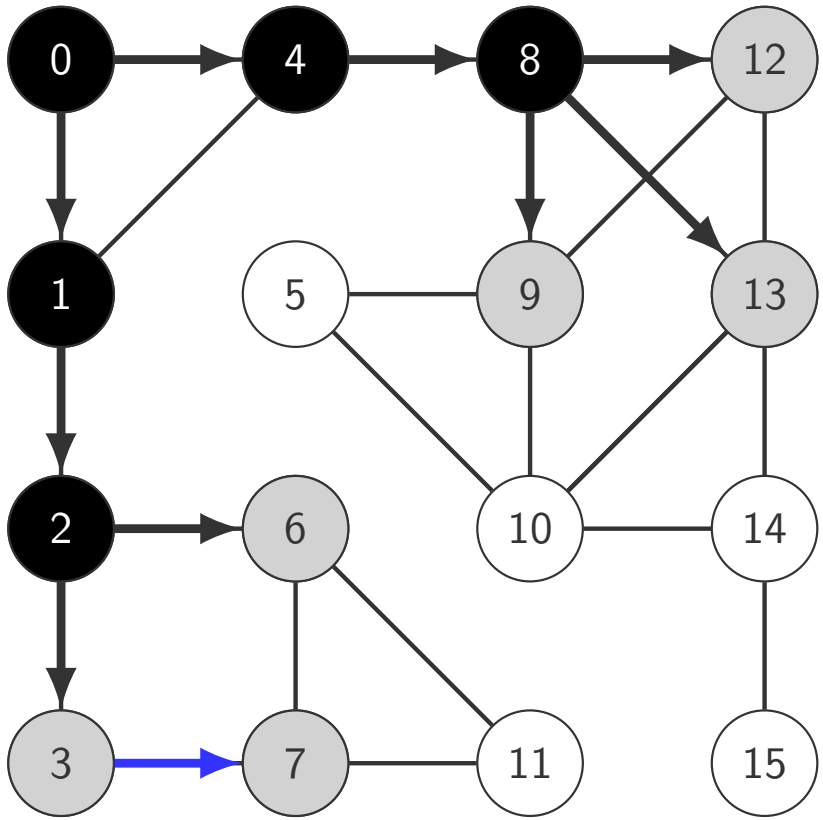
Exemplo de busca em largura



Fila

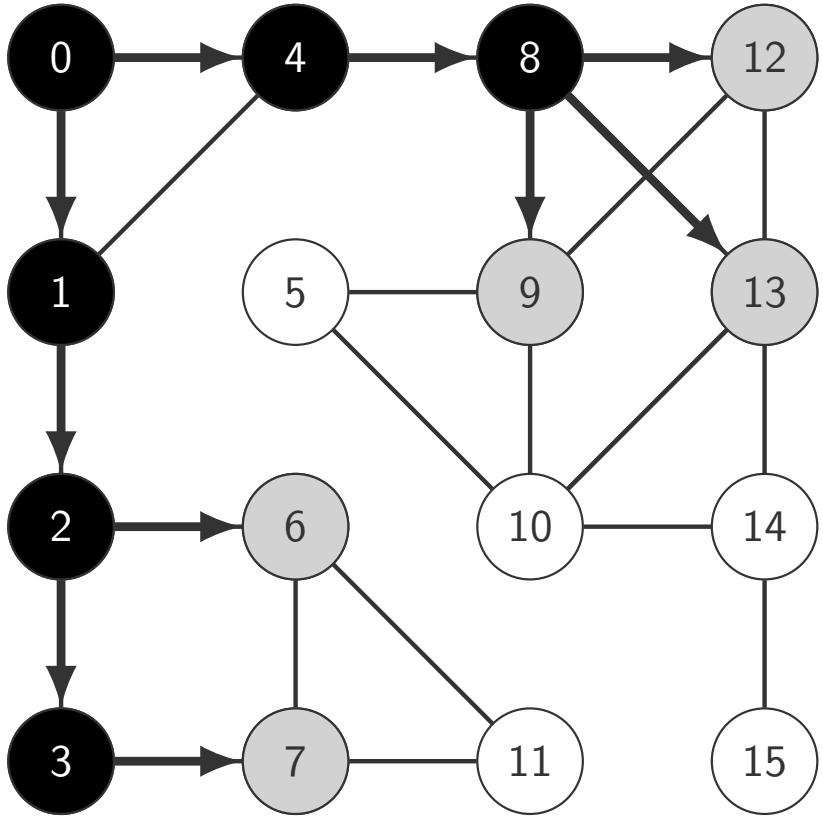
6	9	12	13

Exemplo de busca em largura



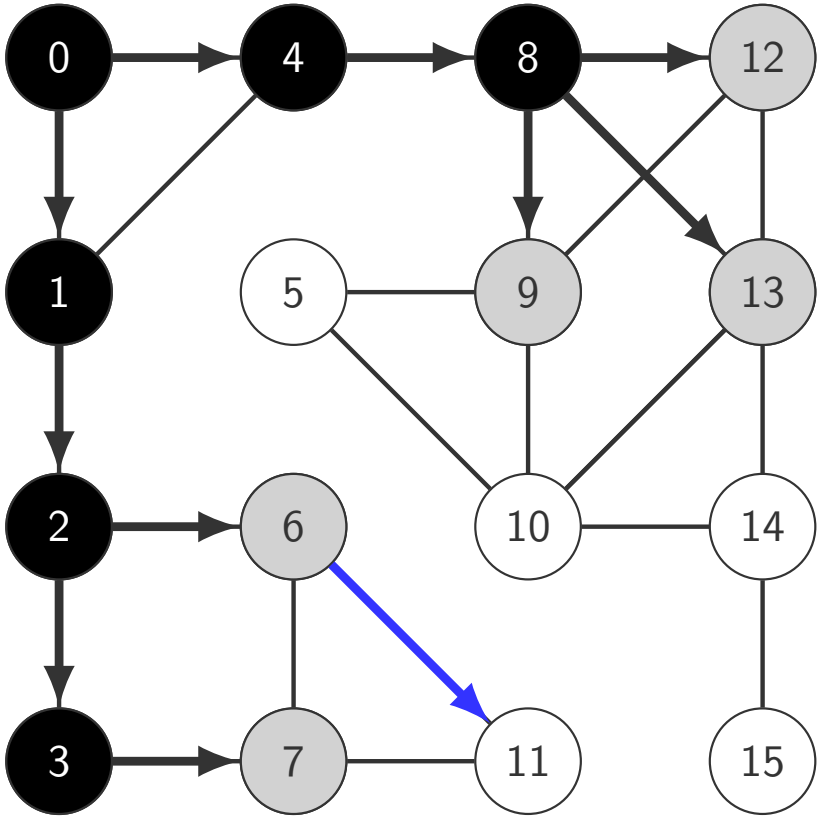
Fila	6	9	12	13	7

Exemplo de busca em largura



Fila	6	9	12	13	7

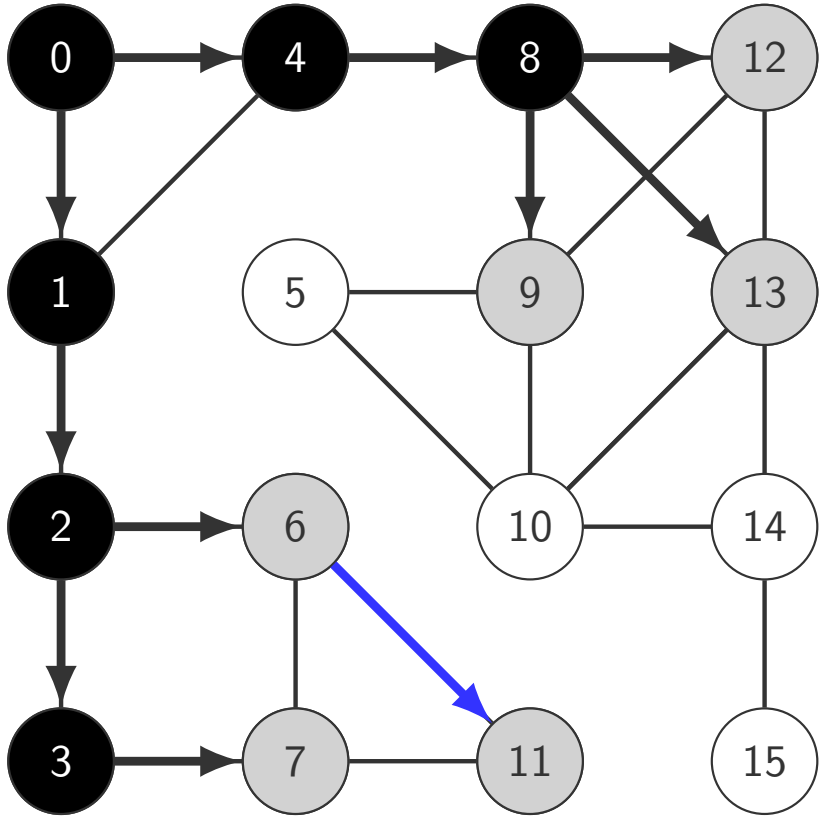
Exemplo de busca em largura



Fila

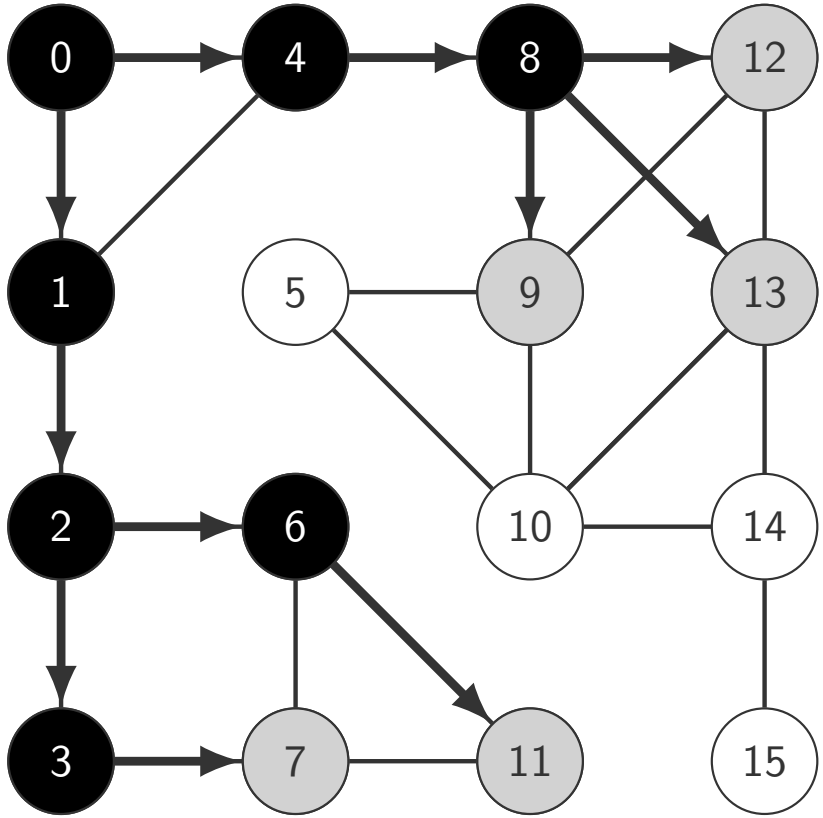
9	12	13	7

Exemplo de busca em largura



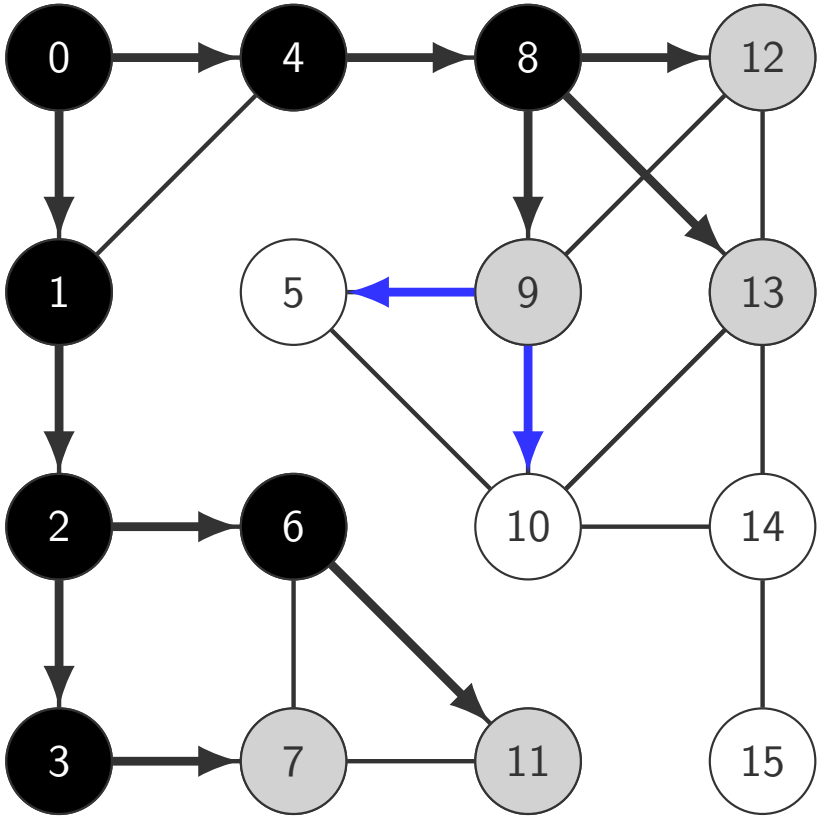
Fila	9	12	13	7	11

Exemplo de busca em largura



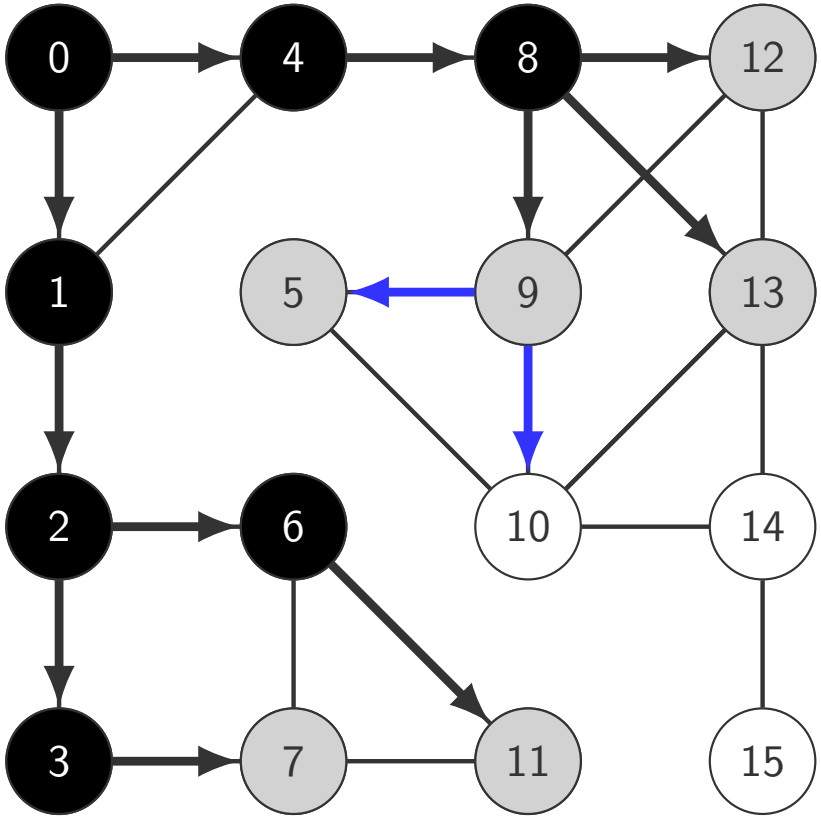
Fila	9	12	13	7	11

Exemplo de busca em largura



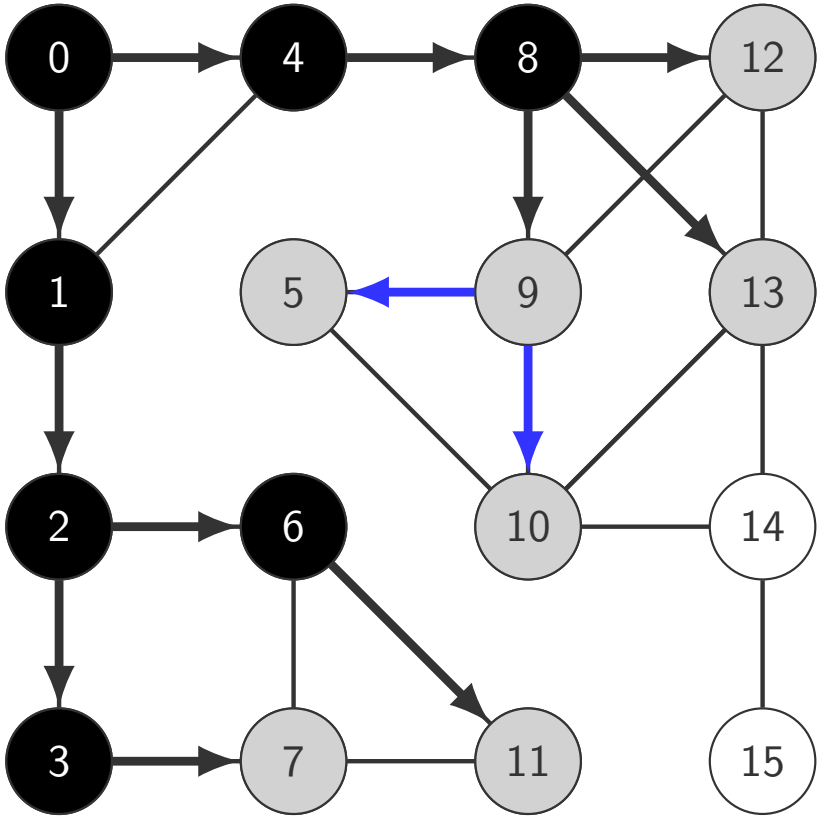
Fila	12	13	7	11

Exemplo de busca em largura



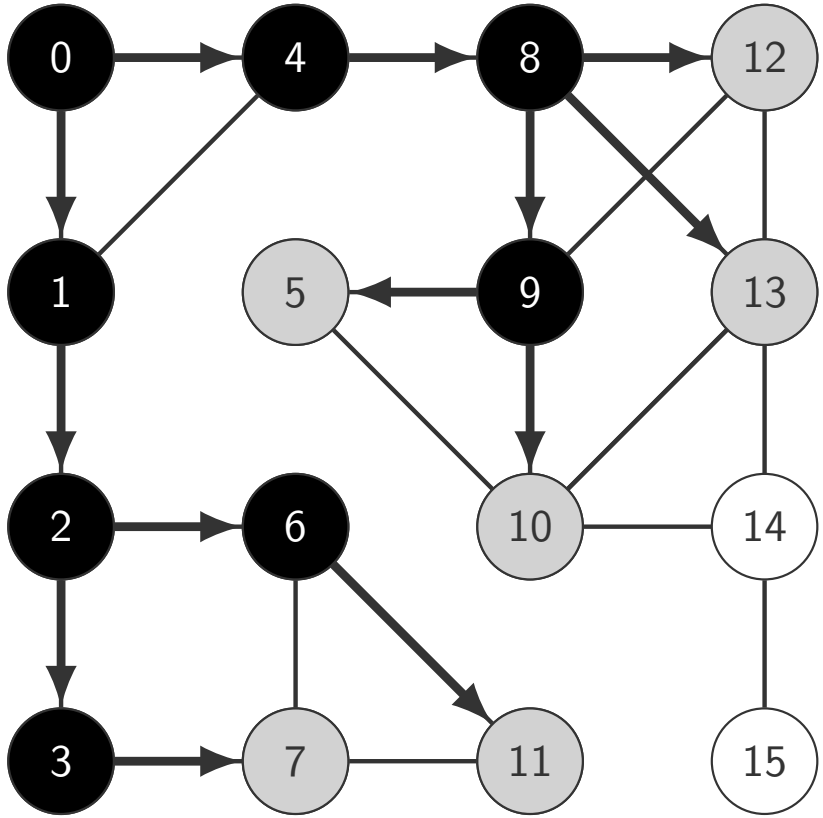
Fila	12	13	7	11	5

Exemplo de busca em largura



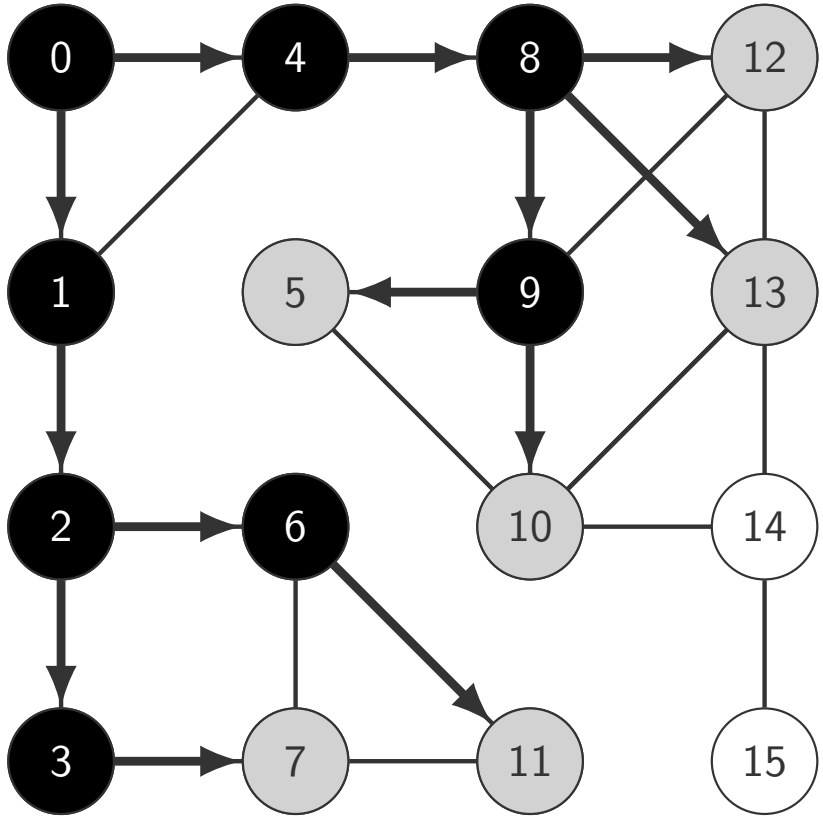
Fila	12	13	7	11	5	10

Exemplo de busca em largura



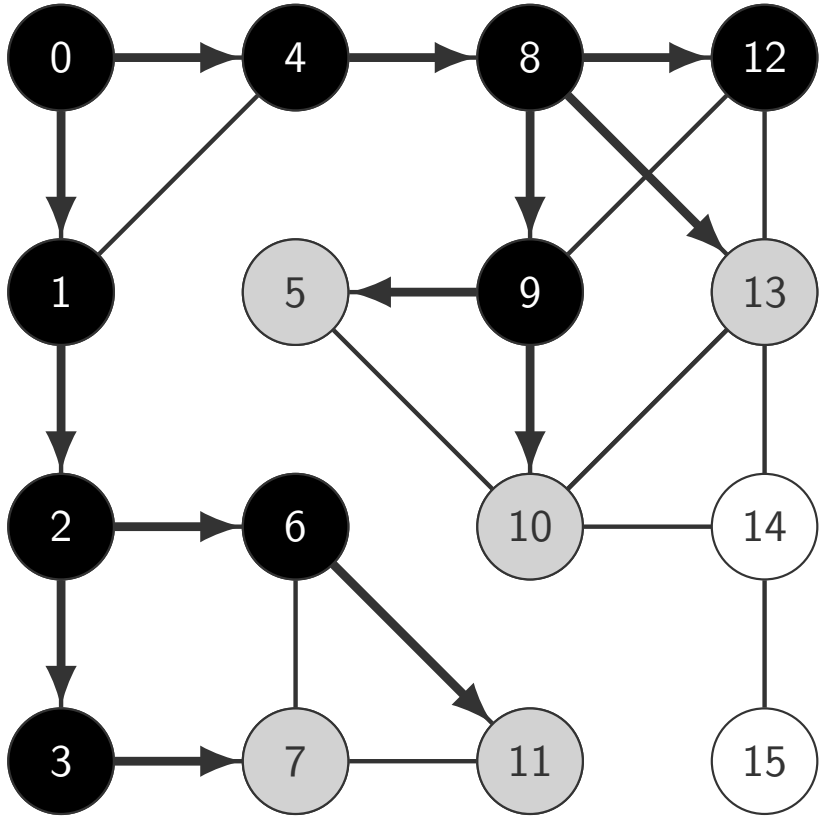
Fila	12	13	7	11	5	10

Exemplo de busca em largura



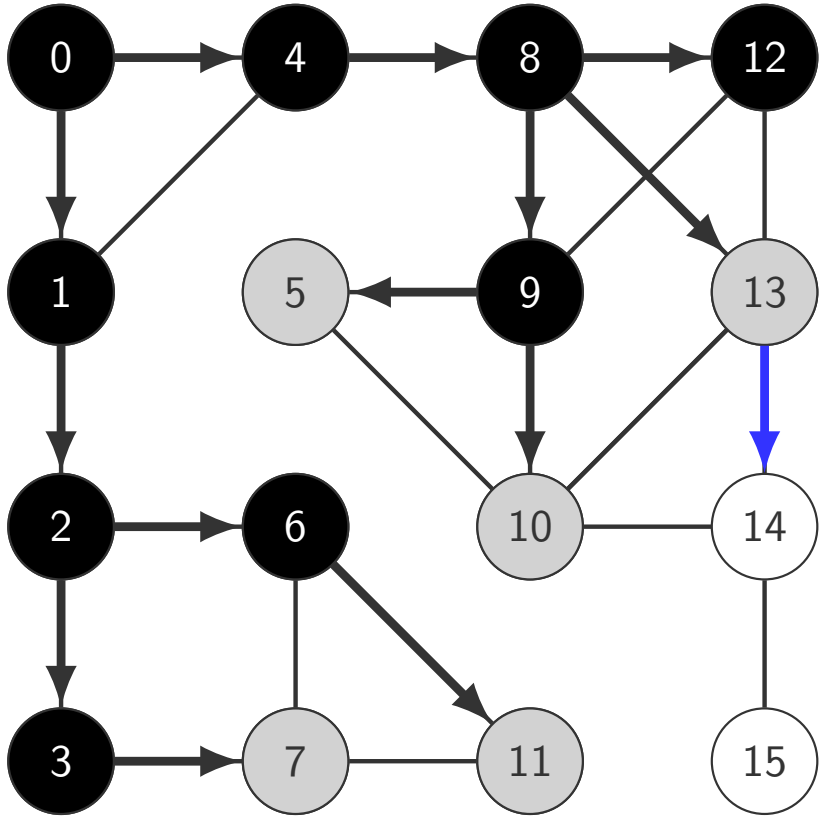
Fila	13	7	11	5	10

Exemplo de busca em largura



Fila	13	7	11	5	10

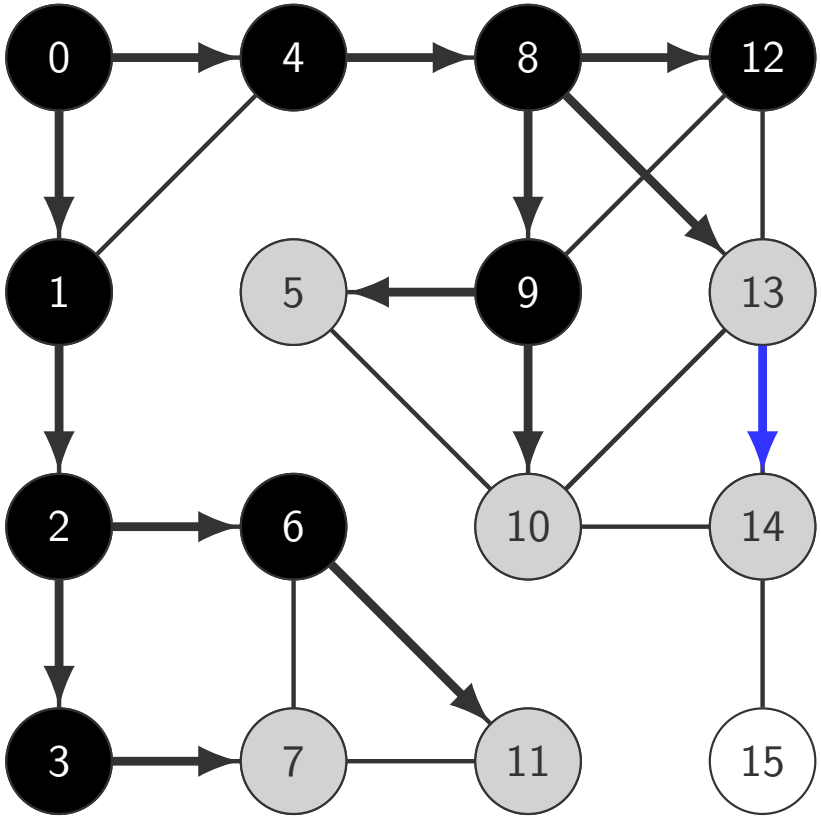
Exemplo de busca em largura



Fila

7	11	5	10

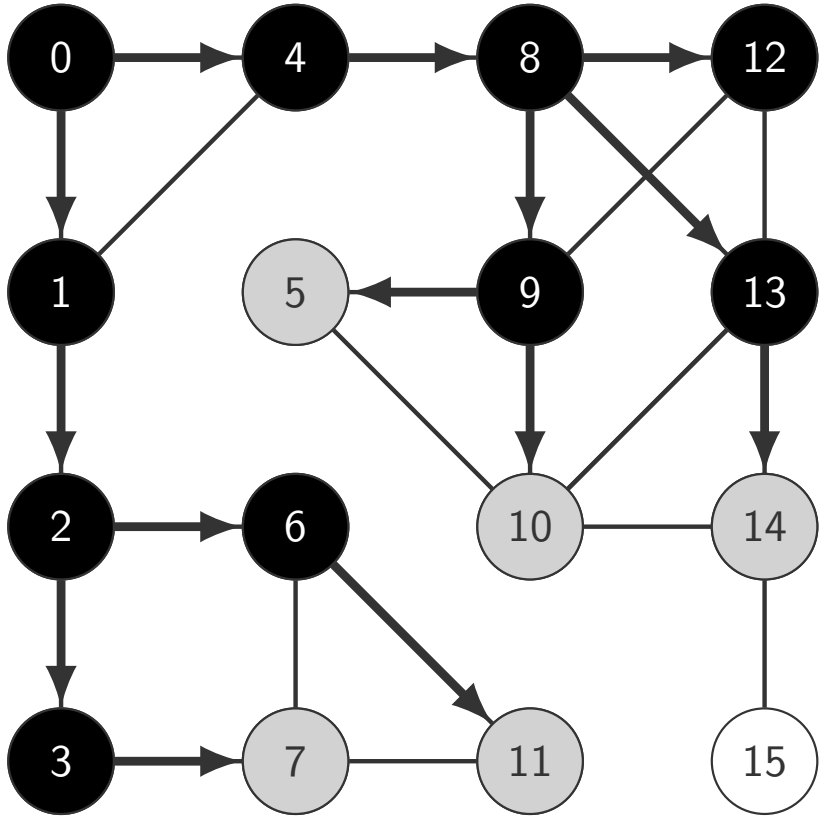
Exemplo de busca em largura



Fila	7	11	5	10	14

Exemplo de busca em largura

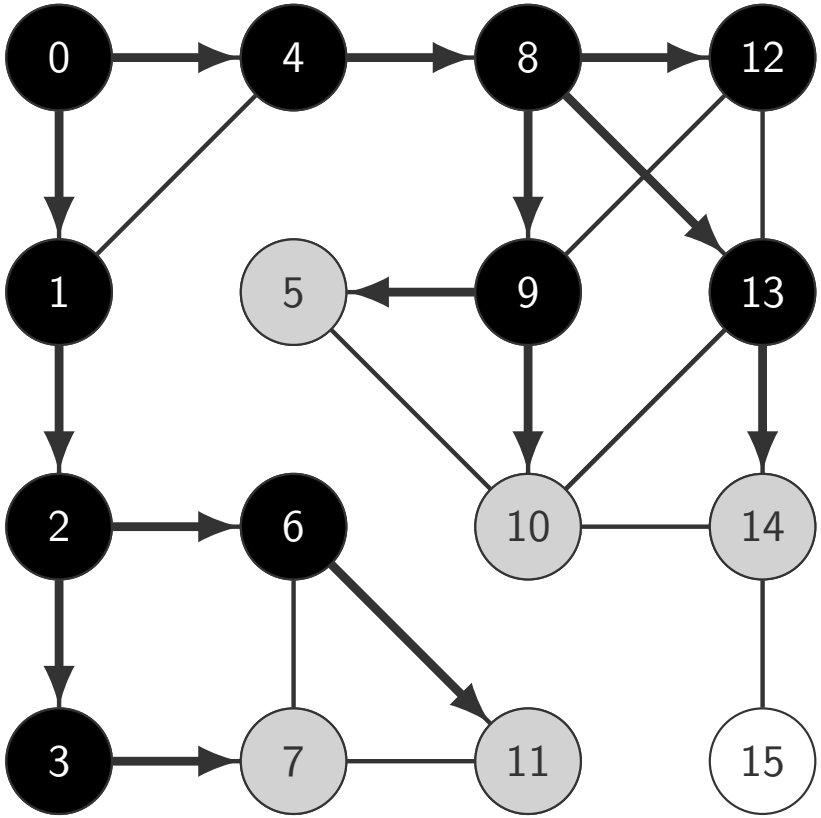
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Fila	7	11	5	10	14

Exemplo de busca em largura

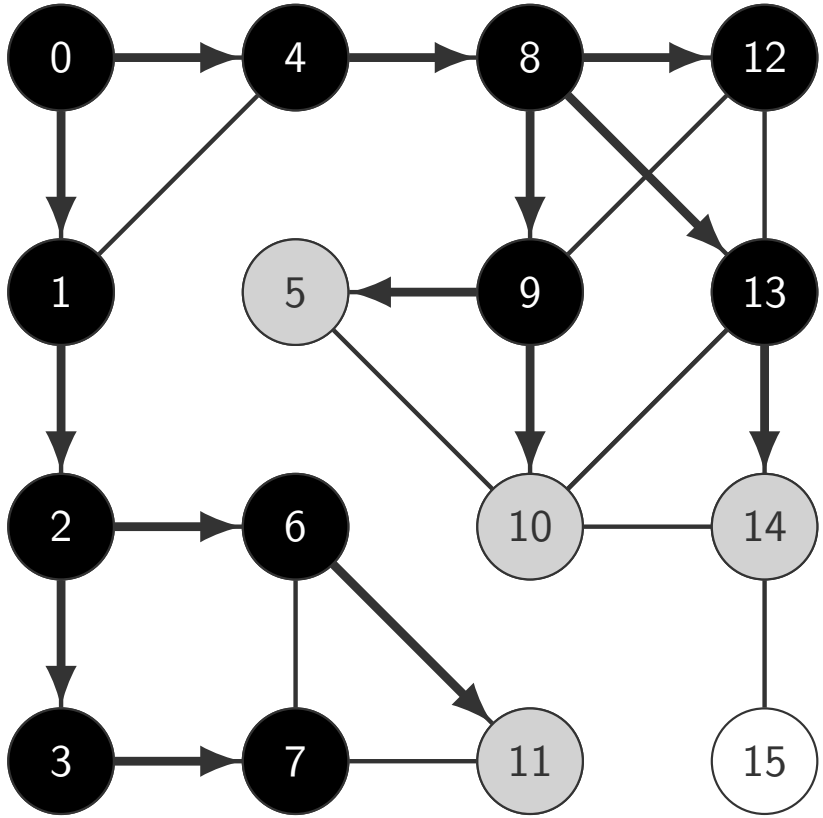
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



Fila

11	5	10	14

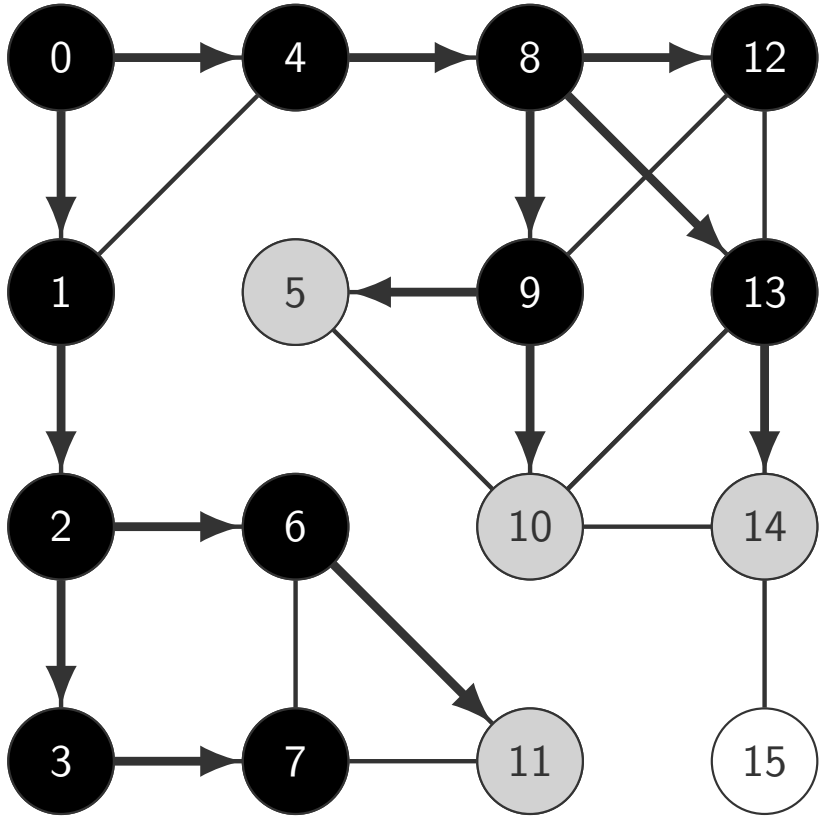
Exemplo de busca em largura



Fila

11	5	10	14

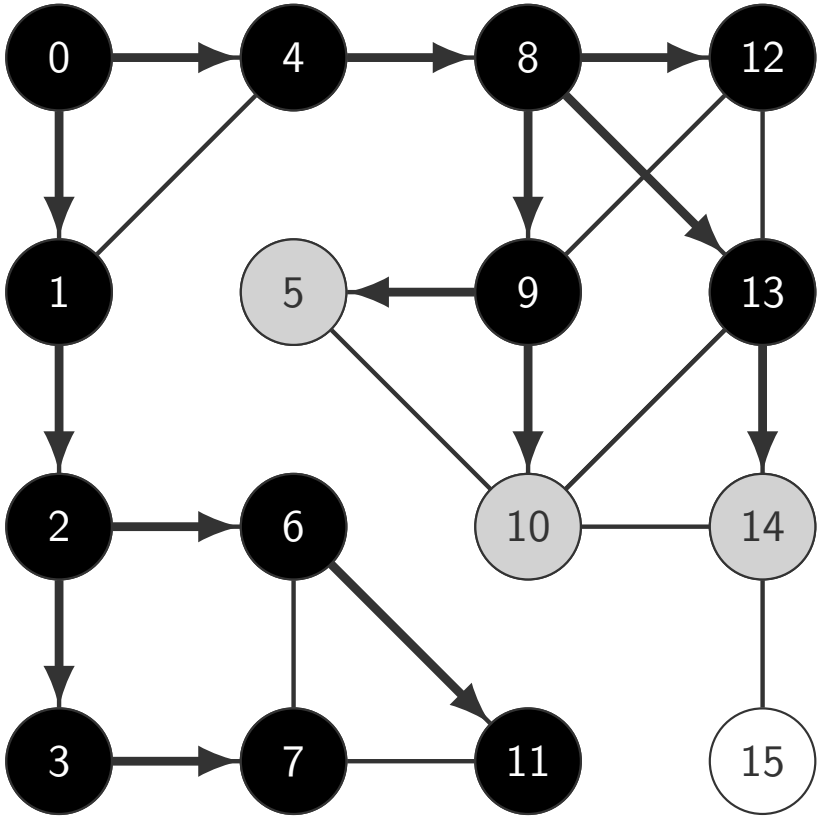
Exemplo de busca em largura



Fila

5	10	14

Exemplo de busca em largura

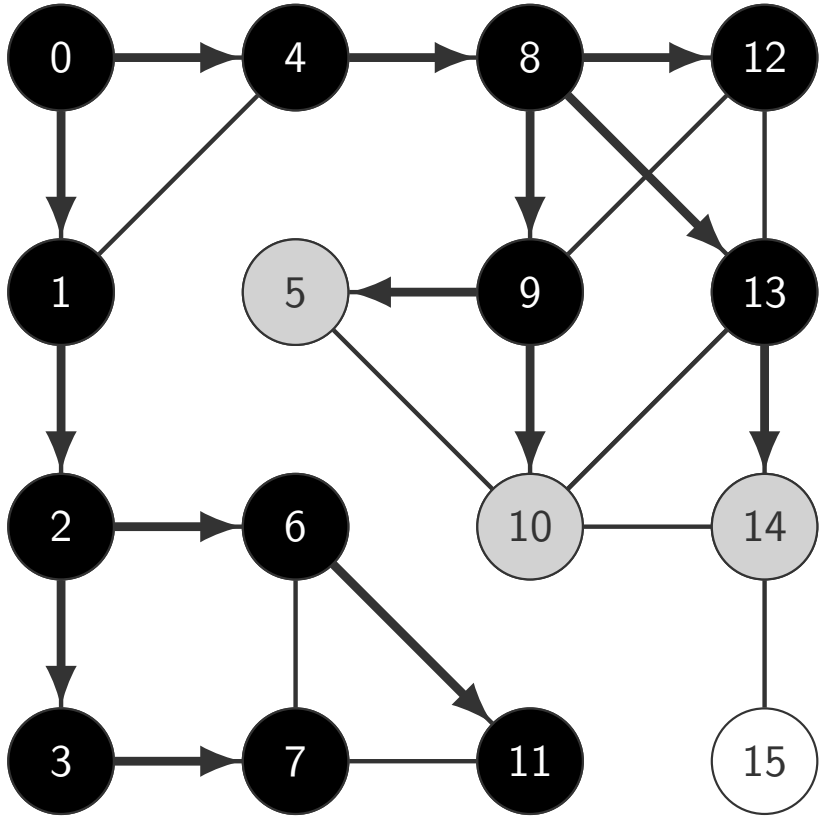


Fila

5	10	14

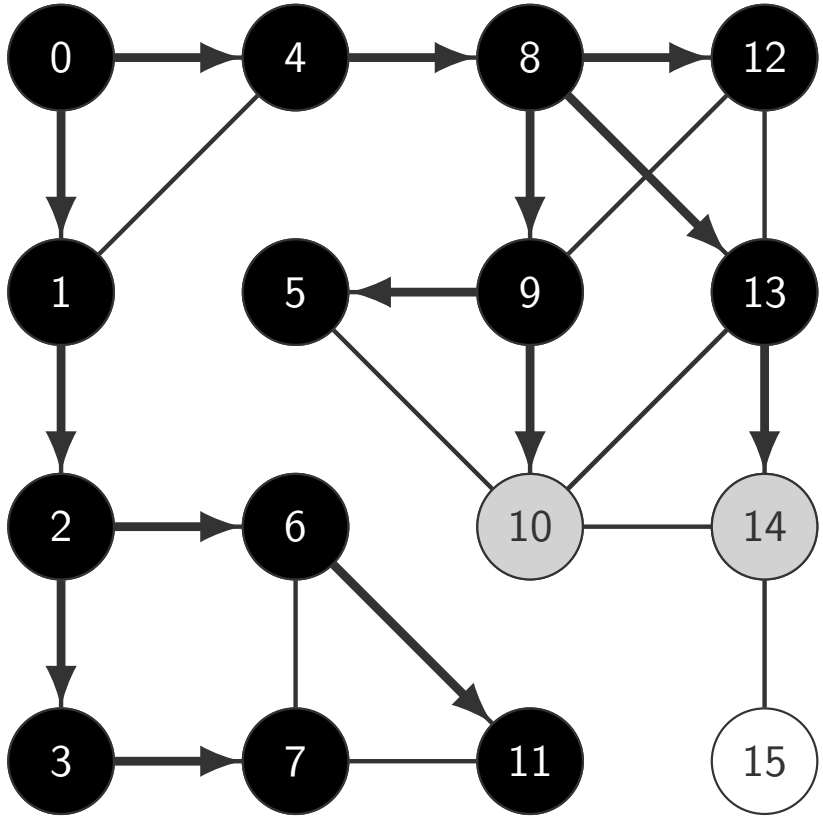
Exemplo de busca em largura

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



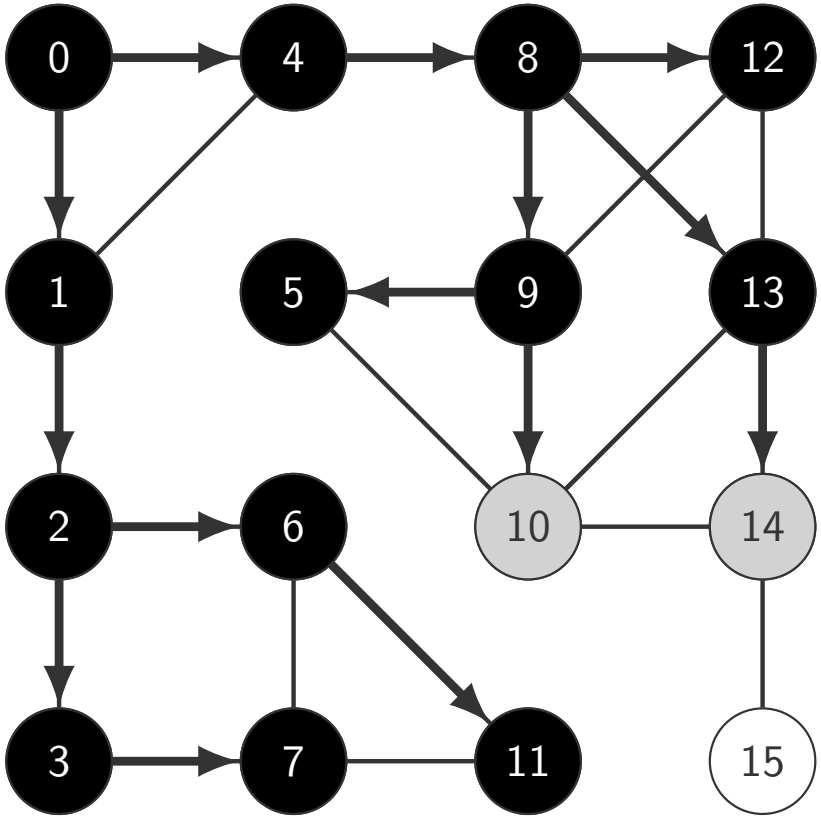
Fila | 10 | 14 |

Exemplo de busca em largura



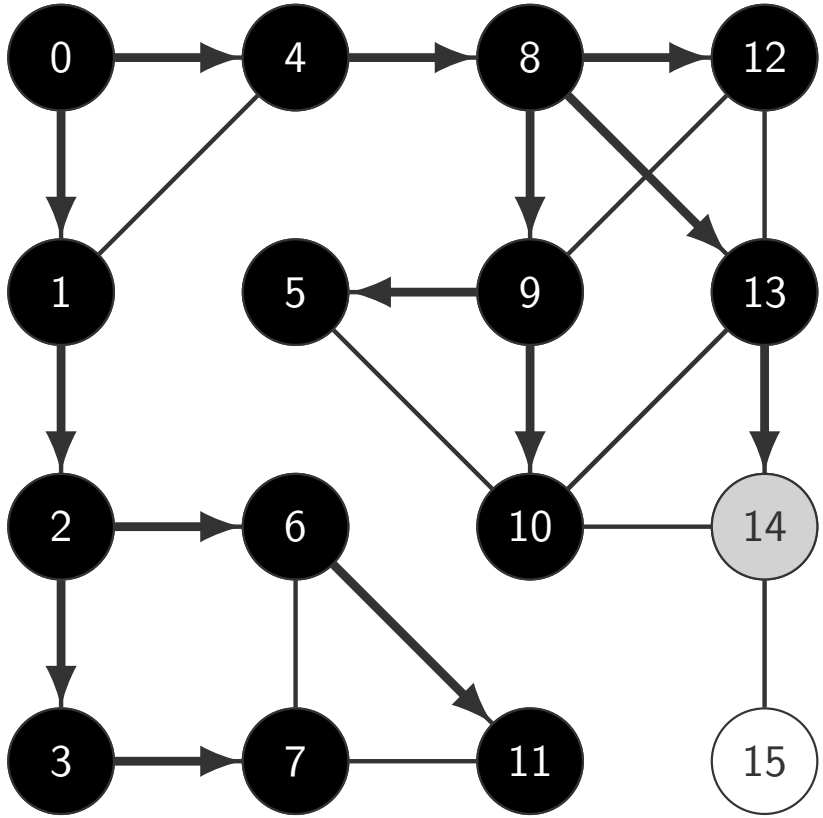
Fila | 10 | 14 |

Exemplo de busca em largura



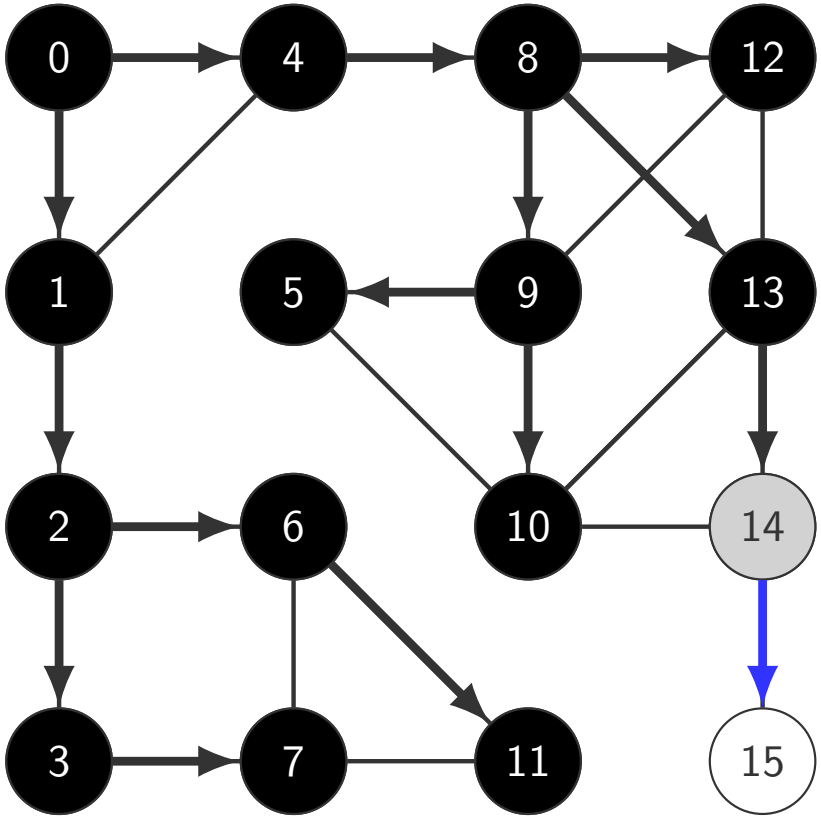
Fila | 14

Exemplo de busca em largura



Fila | 14

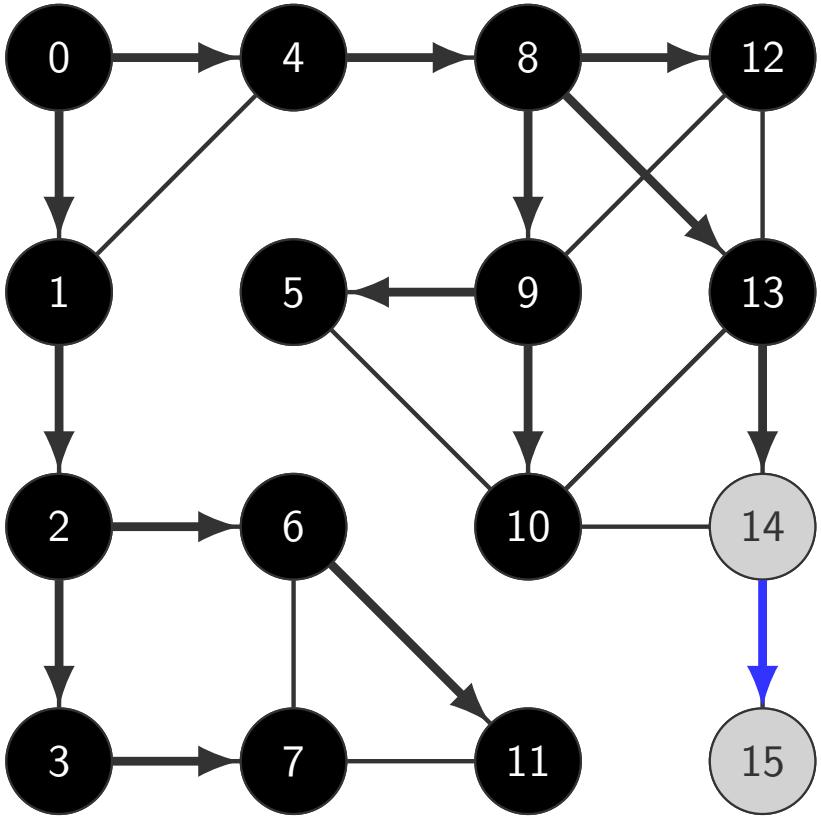
Exemplo de busca em largura



Fila

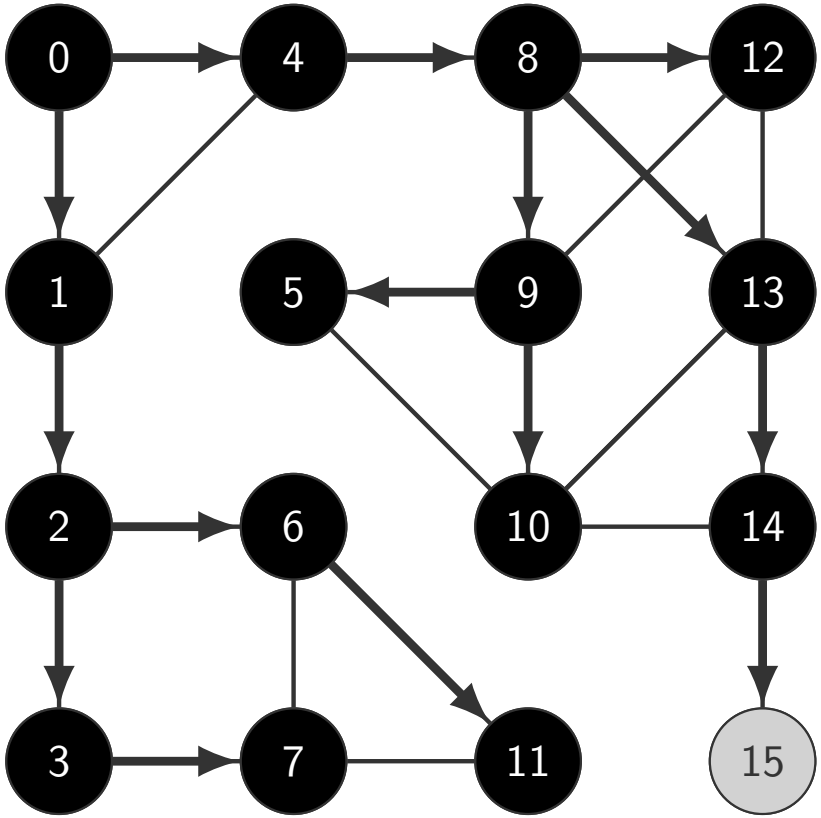
Exemplo de busca em largura

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



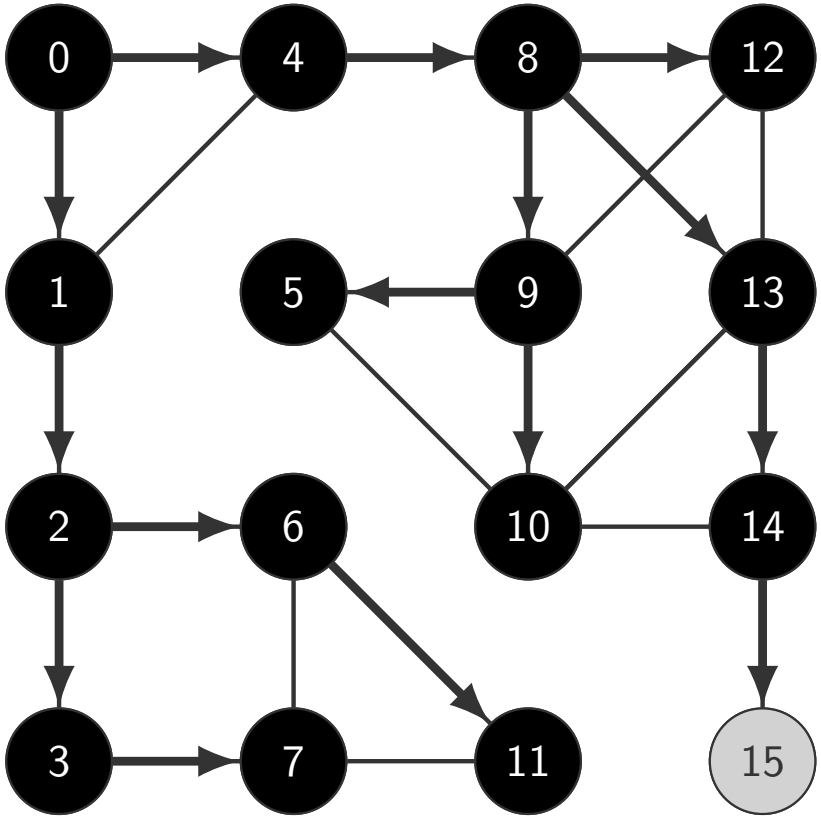
Fila | 15

Exemplo de busca em largura



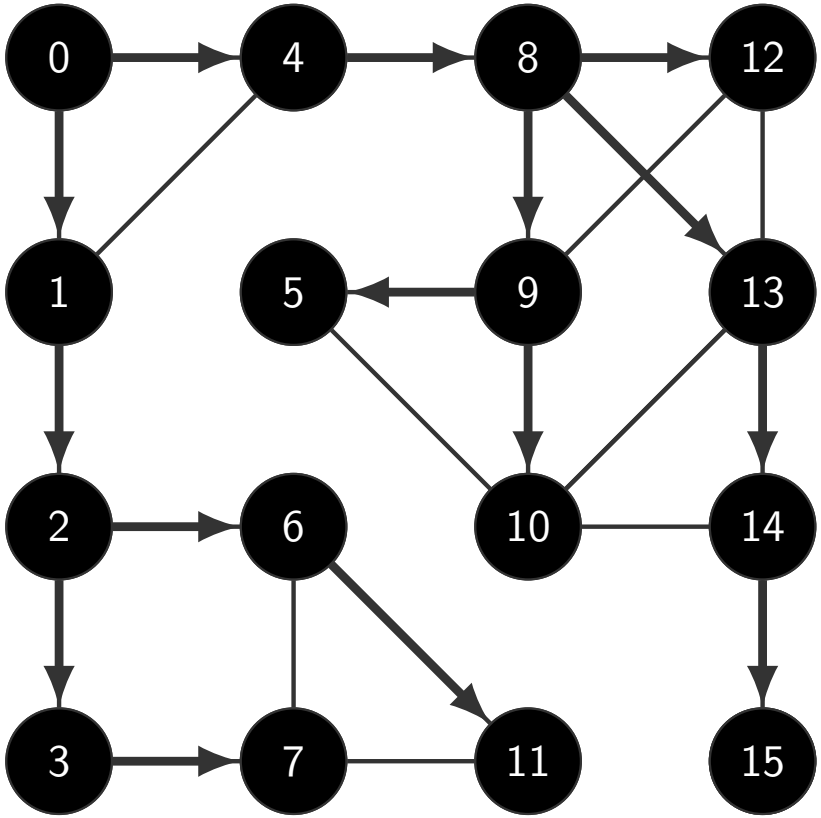
Fila | 15

Exemplo de busca em largura



Fila

Exemplo de busca em largura



Fila

BFS(G, s)

1. **para todo** $u \in V(G)$ **faça**
2. $\quad cor[u] \leftarrow$ BRANCO
3. $\quad \pi[u] \leftarrow$ NIL
4. $\quad d[u] \leftarrow \infty$
5. $cor[s] \leftarrow$ CINZA
6. $d[s] \leftarrow 0$
7. cria fila vazia $Q = \emptyset$
8. Enqueue(Q, s)
9. **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**
10. $\quad u \leftarrow$ Dequeue(Q)
11. $\quad$ **para todo** $v \in Adj(u)$ **faça**
12. $\quad\quad$ **se** $cor[v] ==$ BRANCO
13. $\quad\quad\quad cor[v] \leftarrow$ CINZA
14. $\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1$
15. $\quad\quad\quad \pi[v] \leftarrow u$
16. $\quad\quad\quad$ Enqueue(Q, v)
17. $\quad cor[u] \leftarrow$ PRETO

Análise de complexidade

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Analisamos de forma agregada

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$
   - o tempo gasto com a fila é $O(V)$

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$
   - o tempo gasto com a fila é $O(V)$
3. processamos cada vértice uma vez

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$
   - o tempo gasto com a fila é $O(V)$
3. processamos cada vértice uma vez
   - cada lista de adjacências é percorrida uma vez

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$
   - o tempo gasto com a fila é $O(V)$
3. processamos cada vértice uma vez
   - cada lista de adjacências é percorrida uma vez
   - no pior caso, percorremos todas as listas

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$
   - o tempo gasto com a fila é $O(V)$
3. processamos cada vértice uma vez
   - cada lista de adjacências é percorrida uma vez
   - no pior caso, percorremos todas as listas
   - o tempo gasto percorrendo adjacências é $O(E)$

Análise de complexidade

Analisamos de forma agregada

1. o tempo de inicialização é $O(V)$
2. um vértice não volta a ser branco
   - enfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - desenfileiramos cada vértice no máximo uma vez
   - cada operação na fila leva tempo $O(1)$
   - o tempo gasto com a fila é $O(V)$
3. processamos cada vértice uma vez
   - cada lista de adjacências é percorrida uma vez
   - no pior caso, percorremos todas as listas
   - o tempo gasto percorrendo adjacências é $O(E)$

A complexidade da busca em largura é $O(V + E)$

Corretude do algoritmo

Correção do algoritmo

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

1. os vértices $v \in V(G) \backslash \{s\}$ com $\pi[v] \neq NIL$ definem uma árvore enraizada em s

Correção do algoritmo

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

1. os vértices $v \in V(G) \backslash \{s\}$ com $\pi[v] \neq NIL$ definem uma árvore enraizada em s
2. $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

Correção do algoritmo

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

1. os vértices $v \in V(G) \backslash \{s\}$ com $\pi[v] \neq NIL$ definem uma árvore enraizada em s
2. $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

A primeira afirmação segue imediatamente do funcionamento do BFS.

Correção do algoritmo

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

1. os vértices $v \in V(G) \backslash \{s\}$ com $\pi[v] \neq NIL$ definem uma árvore enraizada em s
2. $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

A primeira afirmação segue imediatamente do funcionamento do BFS.

A fim de provar a segunda afirmação, precisamos de dois lemas auxiliares:

Correção do algoritmo

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

1. os vértices $v \in V(G) \backslash \{s\}$ com $\pi[v] \neq NIL$ definem uma árvore enraizada em s
2. $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

A primeira afirmação segue imediatamente do funcionamento do BFS.

A fim de provar a segunda afirmação, precisamos de dois lemas auxiliares:

- Lema 1: o caminho de s a v na árvore tem tamanho $d[v]$

Correção do algoritmo

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

1. os vértices $v \in V(G) \backslash \{s\}$ com $\pi[v] \neq NIL$ definem uma árvore enraizada em s
2. $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

A primeira afirmação segue imediatamente do funcionamento do BFS.

A fim de provar a segunda afirmação, precisamos de dois lemas auxiliares:

- Lema 1: o caminho de s a v na árvore tem tamanho $d[v]$
- Lema 2: os vértices são inseridos na fila Q em ordem crescente de $d[v]$

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Demonstração:

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Demonstração:

- Por indução no número de vezes que executamos **enqueue**

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Demonstração:

- Por indução no número de vezes que executamos **enqueue**
- **Caso Base:** depois que executamos **enqueue** pela primeira vez

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Demonstração:

- Por indução no número de vezes que executamos **enqueue**
- **Caso Base:** depois que executamos **enqueue** pela primeira vez
  - T continha apenas s e valia $d[s] = 0$

Lema 1

Lema 1: Seja T a árvore induzida por π. Se $d[v] < \infty$, então

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Demonstração:

- Por indução no número de vezes que executamos **enqueue**
- **Caso Base:** depois que executamos **enqueue** pela primeira vez
  - T continha apenas s e valia $d[s] = 0$
  - como $d[s]$ nunca mais muda, isso completa a base

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T
  2. esse caminho tem comprimento $d[u]$

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T
  2. esse caminho tem comprimento $d[u]$
- mais isso implica que

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T
  2. esse caminho tem comprimento $d[u]$
- mais isso implica que
  1. há caminho de s a v em T, pois $\pi[v] = u$

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T
  2. esse caminho tem comprimento $d[u]$
- mais isso implica que
  1. há caminho de s a v em T, pois $\pi[v] = u$
  2. e esse caminho tem comprimento $d[v]$, pois $d[v] = d[u] + 1$

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T
  2. esse caminho tem comprimento $d[u]$
- mais isso implica que
  1. há caminho de s a v em T, pois $\pi[v] = u$
  2. e esse caminho tem comprimento $d[v]$, pois $d[v] = d[u] + 1$
- e completamos a indução

Prova do lema

Considere o instante em que enfileiramos v

- então v foi descoberto percorrendo os vizinhos de u
- mas u já havia sido enfileirado antes desse instante
- pela hipótese de indução
  1. existe um caminho de s a u em T
  2. esse caminho tem comprimento $d[u]$
- mais isso implica que
  1. há caminho de s a v em T, pois $\pi[v] = u$
  2. e esse caminho tem comprimento $d[v]$, pois $d[v] = d[u] + 1$
- e completamos a indução

Corolário 1: Durante BFS, $d[v] \geq dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Lema 2

Lema 2: Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q em alguma iteração do algoritmo. Então

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1.$$

Demonstração:

Lema 2

Lema 2: Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q em alguma iteração do algoritmo. Então

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1.$$

Demonstração:

- por indução no número de iterações do laço enquanto

Lema 2

Lema 2: Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q em alguma iteração do algoritmo. Então

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1.$$

Demonstração:

- por indução no número de iterações do laço enquanto
- antes da primeira iteração, $Q = \langle s \rangle$ e o lema vale

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$
- no final da iteração a fila será $\langle v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+t} \rangle$

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$
- no final da iteração a fila será $\langle v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+t} \rangle$

Inserimos vizinhos de v_1

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$
- no final da iteração a fila será $\langle v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+t} \rangle$

Inserimos vizinhos de v_1

- se v_j é um vértice inserido, então $d[v_j] = d[v_1] + 1$

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$
- no final da iteração a fila será $\langle v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+t} \rangle$

Inserimos vizinhos de v_1

- se v_j é um vértice inserido, então $d[v_j] = d[v_1] + 1$
- pela hipótese de indução

$$d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$$

Prova do lema

Considere uma nova iteração do laço

- antes da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ (qual a H.I.?)
- pela H.I. $d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$.
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$
- no final da iteração a fila será $\langle v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+t} \rangle$

Inserimos vizinhos de v_1

- se v_j é um vértice inserido, então $d[v_j] = d[v_1] + 1$
- pela hipótese de indução

$$d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$$

- portanto

$$d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_{r+1}] = \cdots = d[v_{r+t}] \leq d[v_2] + 1$$

Prova do teorema

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

- π define árvore com caminho mínimo de s a v em G e

Prova do teorema

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

- π define árvore com caminho mínimo de s a v em G e
- $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

Prova do teorema

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

- π define árvore com caminho mínimo de s a v em G e
- $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

Demonstração

Prova do teorema

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

- π define árvore com caminho mínimo de s a v em G e
- $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

Demonstração

- Sabemos que π define uma árvore enraizada em s e, pelo Lema 1, o caminho de s a v na árvore tem comprimento $d[v]$

Prova do teorema

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

- π define árvore com caminho mínimo de s a v em G e
- $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

Demonstração

- Sabemos que π define uma árvore enraizada em s e, pelo Lema 1, o caminho de s a v na árvore tem comprimento $d[v]$
- também, se $dist(s, v) = \infty$, então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1

Prova do teorema

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo e s um vértice de G. Então, depois de executar bfs(G, s), temos que:

- π define árvore com caminho mínimo de s a v em G e
- $d[v] = dist(s, v)$, para todo $v \in V(G)$.

Demonstração

- Sabemos que π define uma árvore enraizada em s e, pelo Lema 1, o caminho de s a v na árvore tem comprimento $d[v]$
- também, se $dist(s, v) = \infty$, então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1
- resta provar que se $dist(s, v) < \infty$, então $d[v] = dist(s, v)$

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Caso Base:

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Caso Base:

- se $k = 0$, devemos ter $v = s$ e a afirmação vale.

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Caso Base:

- se $k = 0$, devemos ter $v = s$ e a afirmação vale.

Hipótese indutiva: Suponha que, para todo u com $dist(s, u) < k$, temos que $d[u] = dist(s, u)$

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Caso Base:

- se $k = 0$, devemos ter $v = s$ e a afirmação vale.

Hipótese indutiva: Suponha que, para todo u com $dist(s, u) < k$, temos que $d[u] = dist(s, u)$

Passo indutivo: considere um caminho de s a v de comprimento k

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Caso Base:

- se $k = 0$, devemos ter $v = s$ e a afirmação vale.

Hipótese indutiva: Suponha que, para todo u com $dist(s, u) < k$, temos que $d[u] = dist(s, u)$

Passo indutivo: considere um caminho de s a v de comprimento k

- chame de u o vértice que antecede v nesse caminho

Prova do teorema (cont)

Considere um vértice v com $dist(s, v) = k$

- iremos provar que $d[v] = k$ por indução em k

Caso Base:

- se $k = 0$, devemos ter $v = s$ e a afirmação vale.

Hipótese indutiva: Suponha que, para todo u com $dist(s, u) < k$, temos que $d[u] = dist(s, u)$

Passo indutivo: considere um caminho de s a v de comprimento k

- chame de u o vértice que antecede v nesse caminho
- daí $dist(s, u) = k - 1$ e portanto $d[u] = k - 1$

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração
  - e teremos $d[v] = d[u] + 1 = k$

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração
  - e teremos $d[v] = d[u] + 1 = k$
- se v era cinza

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração
  - e teremos $d[v] = d[u] + 1 = k$
- se v era cinza
  - v já estava na fila nesse instante

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração
  - e teremos $d[v] = d[u] + 1 = k$
- se v era cinza
  - v já estava na fila nesse instante
  - então o Lema 2 implica $d[v] \leq d[u] + 1 = k$

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração
  - e teremos $d[v] = d[u] + 1 = k$
- se v era cinza
  - v já estava na fila nesse instante
  - então o Lema 2 implica $d[v] \leq d[u] + 1 = k$
  - como $k \leq d[v]$, temos $d[v] = k$

Prova do teorema (cont)

Considere o instante em que u foi removido da fila Q

- suponha por contradição que v seja preto
- daí v foi removido de Q antes de u
- então o Lema 2 implica que $d[v] \leq d[u] < k$
- mas o Corolário 1 implica que $k = dist(s, v) \leq d[v]$
- isso é uma contradição, então v não pode ser preto

Portanto, nesse instante, v era branco ou cinza

- se v era branco
  - v será inserido na fila nessa iteração
  - e teremos $d[v] = d[u] + 1 = k$
- se v era cinza
  - v já estava na fila nesse instante
  - então o Lema 2 implica $d[v] \leq d[u] + 1 = k$
  - como $k \leq d[v]$, temos $d[v] = k$
- em qualquer caso, concluímos a indução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

FIM